A számítástechnika matematikai eszközeiről

Dr. Arató Mátyás

Fontos

A szerző a matematikai módszerek felhasználásának jelentőségére mutat rá, anélkül, hogy azokat abszolutizálná. A számítástechnikát szoros szálak fűzik a matematika legkülönbözőbb ágaihoz, így a matematikai eszközök helyének megtalálása komoly gyakorlati jelentőséggel bír. A szerző példákat mutat be matematikai modellek készítésére biztonságos adatbázis-kezelési feladat kapcsán, valamint az operációs rendszerek feladataiban.

(Érkezett: 1977. december 6.)

A számítástechnika matematikai eszközeiről beszélve, a vizsgálatoknak két igen fontos oldalát szoktuk kiemelni. Az egyik oldala a meggondolásoknak a számítástechnikai eszközök működésének leírását, a számítástechnikai rendszerek matematikai modelljeinek megalkotását tartja szem előtt, abból a célból, hogy ezeknek a rendszereknek a működését elemezhessük, hatékonyságukat megvizsgálhassuk, az analízis alapján megkívánt módosításokat, szükséges változtatásokat elvégezzük. A vizsgálatok másik oldala a számítástechnikai eszközök felhasználását, az un. alkalmazási rendszerek megvalósítását tekinti fő célkitűzésnek, ahol az alkalmazási rendszerek működésének megadása legtöbbször valamilyen szinten igényli a matematikát, és a gyakorlati probléma megoldása számítástechnikai eszközök beépítésével valósítható meg. Igaz, hogy a megoldás – különösen az irányítási rendszerek mai gyakorlatában – legtöbbször algoritmus szinten (sok ésszerű algoritmus rendszerré foglalásában), és nem a matematika klasszikus tételbizonyítási eljárása alapján születik meg. Azonban, mint azt a gyakorlat is bizonyítja, az algoritmuskészítés nem kevésbé fontos és jelentős része a matematikának, mint a tételbizonyítási eljárások. A matematika eszközeinek, legújabb eredményeinek felhasználása a megfelelő és adekvát modellek készítéséhez, azaz a modern eszközök használata, nem lehetséges pusztán formális igénybevétel útján. Így a számítástechnika visszahat a matematika fejlődésére, olyan új problémákat is felvet, amelyekkel azelőtt nem találkoztunk. A matematika problémalátásban már ma is sokat köszönhet a számítástechnikának. Általában senki sem vitatja, hogy „valamilyen szinten" szükség van matematikai meggondolásokra, matematikai módszerekre, csak a szint meghatározásában térnek el a vélemények. Természetesnek tekintjük, hogy a gépek megalkotása, a számítógépes kultúra kialakítása a matematikai logika eredményei nélkül lehetetlen lett volna. Sőt, az első alkalmazások, amelyek a differenciálegyenletek numerikus megoldásaival és bizonyos fizikai rendszerek szimulációjával voltak kapcsolatosak (termonukleáris folyamatok lefolyásával kapcsolatos vizsgálatok), a matematikai módszereket igen magas szinten igényelték. A hihetetlenül gyors fejlődés következtében a számítástechnikai eszközök olyan bonyolult módon működnek, az alkalmazások köre pedig olyan mértékben megváltozott, hogy a matematikai módszerek felhasználásának lehetőségei nem világíthatók meg olyan egyszerűen, mint a korábbi időszakban. Mielőtt néhány feladat megfogalmazását, ill. azon keresztül a matematikai módszerek alkalmazását bemutatnám, két lényeges, de meggyőződésem szerint a hazai célkitűzések és feladatok meghatározása szempontjából nagyon fontos tényezőre szeretném felhívni a figyelmet.

Európában a legtöbb hozzánk – azaz a SZÁMKI-hoz – hasonló intézet közül azok emelkednek ki, amelyek matematikai vizsgálataikban is igényesnek mutatkoznak. A francia IRIA nemcsak konferenciái szervezésével, valamint a CYCLAD rendszer megalkotásával, hanem azzal is kimagaslik a többiek közül, hogy a numerikus módszerek területén meghatározó jelentőségű kutatásokat folytat Lions, az irányításelmélet és a differenciálegyenletek nemzetközileg is tekintélyes kutatója. Hasonlóan jelentősek az IRIA esetében a számítógépes hatékonyság kérdésében folytatott kutatásaik, ahol a tömegkiszolgálási modellek továbbfejlesztését a gyakorlati kérdések vizsgálatával párhuzamosan végezték. Ezen a területen is kiváló, talán még az amerikaiakkal is vetélkedő, fiatal kutatógárdával rendelkeznek, amelynek kiemelkedő egyénisége Gelenbe. Hasonló jelenség figyelhető meg a nyugatnémet GMD esetében, ahol a Petri-hálók vizsgálata ugyan az intézetnek nem központi témája, de azzal, hogy Petri az intézet munkatársa, és elmélete jól használható a párhuzamos folyamatok vizsgálatában, a GMD nemzetközi elismerést vívott ki magának. Jelentős szerepet játszik a Szovjetunióban a novoszibirszki akadémiai számítóközpont, melynek vezetője G. Marcsuk, aki nemcsak a számítástechnika, hanem a differenciálegyenletek elméletének, valamint az irányításelméletnek nemzetközileg is tekintélyes, kimagasló egyénisége. A novoszibirszki számítástechnikai központ eredményei (annak ellenére, hogy a központ nem a legmodernebb számítógépekkel rendelkezik) nemzetközileg elfogadottak, hazánkban is ismertek. A matematikai módszerek felhasználásának másik, nem kevésbé lényeges momentuma arra vonatkozik, hogy a hazai matematika a nemzetközi életben mindig jelentős helyet foglalt el. Büszkén hivatkozhatunk arra, hogy Riesz Frigyes és Fejér Lipót időszakában a magyar matematika meghatározó szerepet játszott a nemzetközi kutatások igen fontos területein. Ennek a háttérnek fel nem ismerése és nem kellő mértékű kihasználása amúgy is szűkös erőforrásainkkal való helytelen gazdálkodást jelentene. Éppen ezért a számítástechnika mindennapi feladatainak, kutatásainak a matematikai kutatásokkal való összehangolásával hazánk jelentősen hozzájárulhat a nemzetközi együttműködéshez, és siker reményében részt vehet a nemzetközi versengésben is.

Tudomásul vesszük közben azt is, hogy a matematikai eszközök felhasználhatóságáról természetesen csak azok munkája alapján lehet dönteni, akik a kidolgozásban részt vesznek. A matematikai diszciplinák közül természetesen azokról alakul ki jó vélemény és azok fejlődnek elsősorban, amelyek felhasználására sikeres kísérletek történtek, ill. történnek. A magyarországi matematikai alkalmazásokban annak ellenére, hogy külföldön igen sokan érvényesültek ezen a területen is (gondoljunk Lánczosra, Kármánra vagy Neumannra), lényeges előrelépés csak a felszabadulás után történt. Széles körben ismertek az alkalmazási sikerek a differenciálegyenletek elmélete (Egervári J.), a matematikai statisztika (Rényi A., Jordán K.), az operációkutatás és a matematikai logika (Kalmár L., Péter R.) területén. Ezekhez az irányzatokhoz kapcsolódóak és belőlük gyökereznek a SZÁMKI matematikai irányzatú és alapú kutatásai.

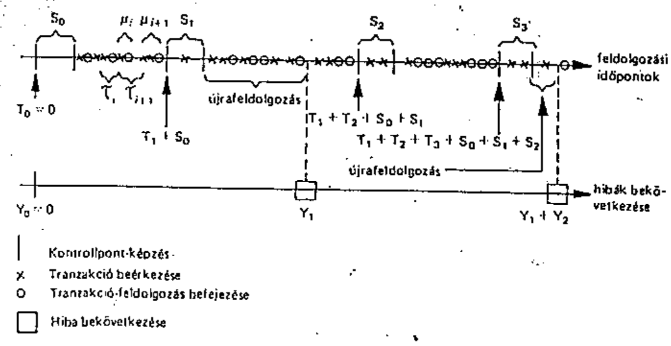
Intézetünkben hagyományai vannak a matematikai logika sikeres felhasználásának és kutatásának. Ezek a vizsgálatok elsősorban a programozási rendszerek elméletét érintették. Ugyancsak sikeresnek nevezhetők az intézetben folyó operációkutatási, matematikai statisztikai és ökonometriai vizsgálatok. Intézetünk ilyen irányú tevékenységéről külön beszámolók szerepelnek az Információ-Elektronika jelenlegi számában, de szerepeltek korábban is.

A számítástechnikai eszközök, ezen belül is a software-eszközök gyors fejlődése új típusú feladatok felvetéséhez vezetett. Elsősorban az alkalmazások területét emelném ki, ahol az információs rendszerek kezelése, az adatbázisok felhasználása az irányítási rendszerekben a 70-es évek legfontosabb hazai alkalmazásai közé tartozik. Hasonló módon vetődtek fel a gépek hatékony működésével, a működés leírásával kapcsolatos matematikai kérdések vizsgálatai is. A hatékony működés megoldása országunkban, ahol a gépellátottság nem a legjobb, az alapvető feladatok közé tartozik. Ezzel a két problémakörrel kapcsolatos néhány olyan matematikai feladat leírásával és megoldásával kívánok foglalkozni, amelyek nem a teljesség igényével készültek, hanem csak azzal a céllal, hogy illusztrálják a felmerülő matematikai nehézségeket, és a megoldásra kerülő feladatok hatékony bevezetésének lehetőségét is. Az olvasónak talán feltűnik, hogy a konkrét kutatások végzésénél is hangsúlyozandónak tartom az egész feladatkomplexum figyelembevételét, ahol új megoldási kísérletek keresése mégis csak részfeladatokon keresztül, azok matematikai megoldásán keresztül valósulhat meg. A kettő – az egész rendszer figyelembevétele és a részfeladatok újszerű megoldása – nem ellentéte, hanem kiegészítése egymásnak, és legtöbbször az előrehaladás egyetlen lehetséges útja.

A számítástechnikai rendszerek működésének, valamint az alkalmazói rendszerek leírásának bonyolultsága nem indok arra, hogy feladatainkat ne fogalmazzuk meg egzakt módon. Már csak azért sem kerülhető el ez az út, mert a realizálás mindenképpen a matematika egyik legfontosabb eszköze, az ún. algoritmusok segítségével valósulhat meg. Igaz, hogy ezeknek az algoritmusoknak az összehasonlítására, hatékonyságuk megvizsgálására még nincsenek megfelelő eszközeink. Nem lebecsülendők azok az erőfeszítések és kutatások, melyek az algoritmusok bonyolultsági vizsgálataira vonatkoznak, még ha csak kezdeti sikerek mutatkoznak is ezen az úton.

A számítástechnika matematikai eszközei fejlesztésénél abból a helyes meggondolásból szoktunk kiindulni, hogy a matematikai modellek, a matematikai leírások nagyban elősegítik a bonyolult feladatok áttekinthető leírását és segítenek a legjobb megoldások kiválasztásában. Csakis matematikai eszközök segítségével van lehetőségünk mennyiségi és minőségi ítéletek megalkotására. A matematikai eszközök ily módon segítenek fontos gyakorlati problémák tisztázásában, a klasszikus megoldások és javaslatok készítésében és abban, hogy gyorsabban haladhassunk előre mind a számítástechnikai eszközök fejlesztésében, mind az alkalmazási rendszerek megvalósításában.

Elsőként az adatfeldolgozások megbízható működésének kérdésével szeretnék foglalkozni, és azt egy szempontból bemutatni. Biztonságos működésen azt értjük, hogy a feldolgozási rendszerek működése közben előforduló véletlen hibák a rendszer működését károsan befolyásolhatják, de nem akadályozhatják meg. A feldolgozásban gyakran vissza kell térni egy olyan korábbi állapotra, ahonnan az egész feldolgozás, az egész programozási rendszer működése újrakezdhető. Természetes kérdés, hogy történjen az ellenőrzési pontok megválasztása ismert vagy ismeretlen hibaelőfordulás esetén? Az operációs rendszerek működésével kapcsolatban a prioritásos rendszerek működésének egy matematikai leírásmódjára és a prioritás megadásának matematikailag is bizonyítható hasznosságára, a hasznosság számszerűsítésére kívánok kitérni. Az operációs rendszer statisztikai méréseinek megbízhatóságát a különböző mérési pontok megválasztása határozza meg. Ez a módszer ad lehetőséget az overhead idő, valamint a rendszer erőforrásai felhasználási idejének kiszámítására. Végül a programviselkedéssel kapcsolatos matematikai leírások egy osztályát kívánom bemutatni annak illusztrálására, hogy hogyan tervezhető a virtuális memóriával rendelkező számítógép kihasználása.



1. ábra

1. Adatbázisok biztonságos kezelése

A rendszer leírásánál a következő feltevésekkel élünk.

a) Egy adatbázis állapotainak módosítását az ún. módosító tranzakciók egymásutánja (tranzakciósorozat) váltja ki. A tranzakciók beérkezése közötti időt jelölje τ, míg egy tranzakció végrehajtásához szükséges időt jelölje μ (az $i-1$-edik és i-edik beérkezés esetén ezeket a mennyiségeket τ_i, μ_i-vel jelöljük). A módosítást kiváltó információk egy meghatározott ideig a tárolóban maradnak, hogy egy esetlegesen bekövetkező hiba esetén megismételhetők legyenek.

b) Az adatbázis meghatározott időpontokban kimentésre kerül, és a következő kimentésig tárolódik. A kimentő eljárást kontrollpont-képzésnek (checkpoint) szokás nevezni. Az $(i-1)$-edik és i-edik időpont között eltelt időt jelölje T_i. A kimentés idejét az i-edik kontrollpont képzésnél jelöljük S_i-vel.

c) Hiba bekövetkezése esetén a legutolsó kontrollpont képzésénél kimentett adatbázis állapotból a tárolt módosítások segítségével újrafeldolgozás történik. Az egyes hibák előfordulása közötti távolságot Y-nal jelöljük. A visszaállítási időt hibajavítási periódusnak nevezzük.

A rendszer ~~működésével~~ kapcsolatban a következő feltevésekkel szokás élni:

1. Kontrollpont-képzés vagy hibajavítás közben tranzakció-feldolgozás nem történik (a közben beérkező tranzakciók várakoznak).
2. A kontrollpont-képzés, a tranzakciósorozat tárolása, valamint a hibajavítás költsége mérhető.
3. Hibák bekövetkezése a kontrollpont-képzés időszakában nem lehetséges (legtöbbször – lásd pl. Chandy [6], Gelenbe [7] – a tárgyalás egyszerűsítése céljából azt is feltételezik, hogy a hibajavítás periódusa is hibamentes).
4. A $\{\mu_i\}$, $\{\tau_i\}$, $\{T_i\}$, $\{S_i\}$, $\{Y_i\}$ változók sorozatai általában sztochasztikus mennyiségek, melyek sztochasztikus vagy determinisztikus kapcsolatban lehetnek.

A fenti leírás áttekintésének megkönnyítésére az *1. ábrán* a feldolgozás és a hibák bekövetkezését külön tengelyen ábrázoltuk.

A kérdéskör vizsgálatában alapvető feladat (lásd pl. Benczur [5], Krámli [4]) a fent leírt tranzakciókat kiszolgáló rendszernek, mint sztochasztikus rendszernek vizsgálata. Ebbe a feladatkörbe tartozik a megbízhatóság kérdése, az egyes állapotokban (ilyen állapotok lehetnek: kiszolgálás, visszaállítás, kontrollpont-képzés) való tartózkodás stacionér valószínűségei, ill. ezek körüli ingadozás. Ugyancsak alapvető a T_i intervallumok megválasztása, abból a célból, hogy az időegységre eső kontrollpont-képzési és visszaállítási költség minimális legyen.

A megbízható működés szempontjából alapvető a kiszolgálási állapotban töltött idő viselkedése. A nagy számok törvényének általánosítása a következő állítás. Jelölje ξ_i az i és $i+1$-edik kontrollpontok között a kiszolgálási állapotban töltött időt, melynek eloszlása

$F_t(x) = P\ \xi_i < x | T_i = t$, ahol T_i eloszlása

$G(t) = P(T_i < t)$. Jelölje továbbá ν_T a kontrollpontok számát a T időpontig:

$$\nu_T = \min \left\{ n \;\middle|\; \sum_{j=1}^{n} T_i > T \right\}$$

Azon feltevés mellett, hogy $D^2 T_i < \infty$ (a szórásnégyzet véges), igaz a

$$P\left\{ \lim_{T\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{\nu_T} \xi_i}{T} = \frac{\int_0^\infty \int_{-\infty}^{\infty} x\, dF_t(x)\, dG(y)}{\int_0^\infty x\, dG(x)} \right\} = 1 \tag{1.1}$$

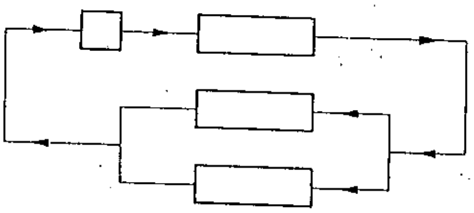
összefüggés. A bizonyítás megtalálható pl. Benczúr [4] disszertációjában. Az (1) képlet levezetése olyan matematikai apparátust igényel, amely a sztochasztikus folyamatok elméletének legújabb eredményein alapszik, és a különböző megszorításoknak (feltételeknek) gyakorlati következményei vannak.

Optimalizálási feladat a kiszolgálási állapotban való tartózkodás stacionér valószínűségének, π_0-nak maximalizálása útján fogalmazható meg. Megjegyezzük, hogy stacionér eloszlás az $E\tau < \pi_0 \cdot E\mu$ feltétel teljesülése esetén létezik.

Amennyiben nemcsak a nagy számok törvényei által nyújtott átlagos értékekre, hanem az ingadozásokra is kíváncsiak vagyunk, szükség van a nem független sztochasztikus sorozatok, ill. folyamatok funkcionáljai határeloszlás tételeinek használatára és kidolgozására. Ennek a megjegyzésnek matematikai hátterét nem kívánom most taglalni, azonban a szükséges időléptékek megválasztása – éppen a felmerülő nagy költségek miatt – nagy gyakorlati jelentőséggel bír. Mint érdekes és lényeges következményt említem meg, hogy ezen az úton jutunk el a diffúziós közelítésekhez. A diffúziós folyamatok használata a fizikában és a hírközlésben természetes és a folyamatok lényegéhez tartozik. A számítástechnikai folyamatokban való megjelenést sem tekintjük kuriózumnak.

2. Egy egyszerű prioritásos rendszer

Alkosson ciklikus, zárt kiszolgálási rendszert az egyetlen központi egység (CPU), és két azonos típusú perifériális egység (DTU), ahogyan azt a *2. ábra* szemlélteti. A rendszerben 2 program kiszolgálása folyik, mégpedig a CPU-n abszolút prioritásos módon: a DTU-ról visszaérkező magasabb prioritású program mindig megkapja a CPU-t (esetleg a másik program megszakítása árán is),



2. ábra

míg az alacsonyabb prioritású program foglaltság esetén várakozik.

Feltéve, hogy az 1-es számú program CPU és DTU igényei az ζ_{11}, ξ_{11}, ζ_{12}, ξ_{12} váltakozó sorozattal adhatók meg (ζ a CPU, míg ξ a DTU igényt jelenti), ahol az $\{\zeta_{1i}\}$, $\{\xi_{1i}\}$ sztochasztikus vagy determinisztikus viselkedésére vonatkozóan különböző feltevésekkel élhetünk. Hasonlóan a 2-es számú program CPU és DTU igényét az ζ_{21}, ξ_{21}, ζ_{22}, ξ_{22}, ... váltakozó sorozattal adjuk meg. Feltételezzük, hogy a két program CPU és DTU igényei egymástól sztochasztikusan függetlenek, azaz $\{\zeta_{1i}, \xi_{1i}\}$ és $\{\zeta_{2i}, \xi_{2i}\}$ függetlenek egymástól.

Ha a rendszer hatékonyságát a CPU hasznos idejével mérjük, kérdés, milyen feltételek esetén adjuk az első, ill. a második programnak az abszolút prioritást. Igen általános feltételek mellett (lásd Arató, Knúth, Tőke [3], Tomkó [8]) bebizonyítható, hogy igaz a következő állítás.

Tétel. Legyenek az ζ_{1i} ($i = 1, 2, \ldots$) változók azonos eloszlásúak és függetlenek: $F\zeta_1$ (x) elosztással $E\zeta_{1i} = m_1$, $D^2\ \zeta_{1i} = \sigma_1^2 < \infty$ várható értékkel és szórásnégyzettel. A ξ_{1i} ($i = 1, 2, \ldots$) független, azonos $F\xi_1$ (x) eloszlású valószínűségi változókra legyen.

$$E\,\xi_{1i} = \widetilde{m}_1\,, D^2\ \xi_{1i} = \widetilde{\sigma}_1^2 < \infty. \tag{2.1}$$

Legyenek $\{\zeta_{1i}\}$ és $\{\xi_{1i}\}$ függetlenek. Hasonlóan, legyen $\{\zeta_{2i}\}$ és $\{\xi_{2i}\}$ függetlenek és teljesüljenek az

$$E\,\zeta_{2i} = m_2\,, D^2\ \xi_{2i} = \sigma_2^2 < \infty,$$

$$E\,\xi_{2i} = \widetilde{m}_2\,, D^2\ \xi_{2i} = \widetilde{\sigma}_2^2 < \infty,$$

feltételek. Ha

$$\widetilde{m}_1 < \widetilde{m}_2\,, \tag{2.2}$$

azaz az első program átlagos kiszolgálási ideje a DTU-n rövidebb, mint a 2-es programé, a T alatti CPU kihasználtság (azaz a CPU hasznos működési ideje) nagyobb lesz, ha az 1-es program rendelkezik abszolút prioritással.

A fenti tétel általánosításával az is belátható (lásd Arató [1]), hogy ha $m_1 << m_2$, (azaz a 2-es program lényegesen hosszabb ideig van a DTU-n kiszolgálás alatt, mint az 1-es), a CPU hasznos működési idejére az

$$\frac{m_1}{m_1 + \widetilde{m}_1} \sim 1/2 \text{ és } \frac{m_2}{m_2 + \widetilde{m}_2} \sim 1/2$$

egyszerűsítő feltétel teljesülése esetén adódik, hogy az első program prioritása esetén 5/6, míg ellenkező esetben 3/4. Ez mintegy 10%-os különbséget jelent hasznosságban különböző prioritások esetén. Hasonló típusú probléma merül fel az osztott memóriájú többprocesszoros számítógépes rendszer esetén is, amint arról az olvasó meggyőződhet A. Smith [9] cikkéből. Az idézett cikk 2. tétele szerint, azonos kiszolgálási idők feltételezése esetén, a prioritás megadása az igény átlagos visszatérési idejétől függ. A sorhossz minimalizálása által lehet elérni, hogy a legnagyobb visszatérési idejű igény kapja a legmagasabb prioritást.

Irodalom

[1] ARATÓ M.: Diffusion Approximation for Multiprogrammed Computer Systems. Comp. and Maths. with Appls. 1. k. 1975. 315–326. old.

[2] ARATÓ M.: Statistical Sequential Methods for Utilization in Performance Analysis. Measuring, Modelling and Evaluating Computer Systems. H. Beilner and E. Gelenbe (eds.) 1977. North-Holland.

[3] ARATÓ M.–KNUTH E.–TŐKE P.: On Stochastic Control of a Multiprogrammed Computer Based on a Probabilistic Model. IFAC Symp. on Stochastic Control. Budapest, 1974. 305–311. old.

[4] BENCZÚR A.: Adatkezelő rendszerek biztonságának kérdései. Kandidátusi disszertáció. Kézirat. 1977.

[5] BENCZÚR A.–KRÁMLI A.: A Note on Data Base Integrity. Acta Cybernetica, Szeged, 1977. Nyomtatásban.

[6] CHANDY, K. M.–BROWNE, J. C.–DISSLY, C. W.–UHRING, W. R.: Analytical Models for Rollback and Recovery Strategies in Data Base Systems. IEEE Trans. Software Eng. 1/1975. 1. sz. 100–110. old.

[7] GELENBE, E.: On the Optimum Checkpoint Interval. 2nd Hungarian Computer Science Conference. Budapest, 1977.

[8] TOMKÓ J.: Processor Utilization Study. Comp. and Maths. with Appls. 1975. 1. sz. 337–344. old.

[9] SMITH, A. J.: Multiprocessor Memory Organization and Memory Interference. Communications ACM, 20/1977. 10. sz. 754–761. old.

Резюме

В статье автор подчёркивает значение математических методов в вычислительной технике, но не претендует на то, чтобы считать их единственными. Вычислительная техника тесно связана с разными областями математики, таким образом нахождение места математических методов и моделей имеет большое значение на практике. Автор показывает примеры математических моделей в надёжности использования банка данных и приоритетных задачах операционых систем.

Summary

The author interprets the role of mathematical methods in computer science, but he does not overestimate it. Computer science is very closely connected with different fields of mathematics, and so to find the exact place of mathematical models has extremely great practical interest. There are given examples of mathematical models in the reliability of data base systems and in operating systems.