közlemények

16/1976

MTA Számitástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, Közlemények 16/1976.

A SZÁMITÓGÉPEK HIERARCHIKUS LAP–TÁROLÁSI ELJÁRÁSAINAK OPTIMALIZÁLÁSÁRÓL

Arató Mátyás

Ahhoz, hogy a számitógépek memória lehetőségeit jól és gyorsan lehessen kihasználni, gyakran alkalmaznak lineáris hierarchikus tárolási eljárásokat. Az ilyen hierarchikus információ–tárolási eljárások esetén meghatározott számu szó alkot egy "lap"–ot: A hierarchia minden szintjén lehetőség van lapok tárolására, és az egyes szinteken belül elhelyezhető lapok száma különböző lehet. Egy futó programban a tárolási helyekre történő hivatkozások minden lépésben kétféle módon történhetnek. Vagy az első szinten elhelyezkedő lapra irányul a hivatkozás, amikor is az elérés közvetlenül megtörténik, vagy egy alsóbb szinten elhelyezkedő lapra, amikor is ezt a lapot automatikusan át kell helyezni az első szintre. Az utóbbi esetben más lapokat alsóbb szintekre kell helyezni. Az alsóbb szinten lévő lapra hivatkozást szokás lapolási hibának (page fault) nevezni. A tárolási eljárás lineárisan hierarchikusnak szokás nevezni, ha a keresett lapot a megtalálási szintről az összes közbenső szinteken keresztül lehet eljuttatni a legelső szintre.

A memória elvi bővitésének lehetőségét először a virtuális memória rendszernek megvalósitása adja (lásd Kilburn [9]), melyet először az ATLAS rendszernél készitettek. A buffer–tárolós memóriákat az IBM 360-as rendszerben alkalmazták. A lapok cserélési eljárásai közül az u.n. megkeresési lapolás (demand paging), amikor is csak akkor van csere a szintek között, ha lapolási hiba fordul elő – a legelterjedtebb. A cserélési algoritmusok közül a következőket emlitjük meg:

1. Az első bekerült kerül ki (FIFO: first in, first out) algoritmus, amely az első szinten legrégebben bennlévő lapot helyezi alacsonyabb szintre lapolási hiba esetén.
2. A legritkábban használt kerül ki (LFU: least frequently used) algoritmus, amely az első szinten – egy bizonyos perióduson belül – legkevesebbszer használt lapot helyezi alacsonyabb szintre lapolási hiba esetén.
3. A legrégebben használt kerül ki (LRU: least recently used) algoritmus, amely az első szinten legrégebben hivatkozott lapot helyezi alacsonyabb szintre lapolási hiba esetén.
4. Optimális algoritmus, amely azt a lapot helyezi az első szintről alacsonyabbra, amelyre a jövőben legkésőbb fognak hivatkozni. Ez utóbbi nyilván használhatatlan a gyakorlatban, mivel a program jövőbeni viselkedését kellene ismerni.
5. Véletlen(RR: random replacement) algoritmus, mely az első szint lapjai közül bármelyiket egyenlő valószinüséggel helyez alsóbb szintre lapolási hiba esetén.

Ebben a cikkben megmutatjuk, hogy bizonyos egyszerü feltevések esetén megadhatók olyan tárolási, illetve cserélési eljárások, amelyek a lapolási hibák átlagos számát minimalizálják. A feladat megoldásánaál a legjelentősebb korlátozás, hogy az egymásutáni hivatkozások függetlenek. Ez a feltevés a gyakorlatban ritkán teljesül, és csak mint durva közelités használható.

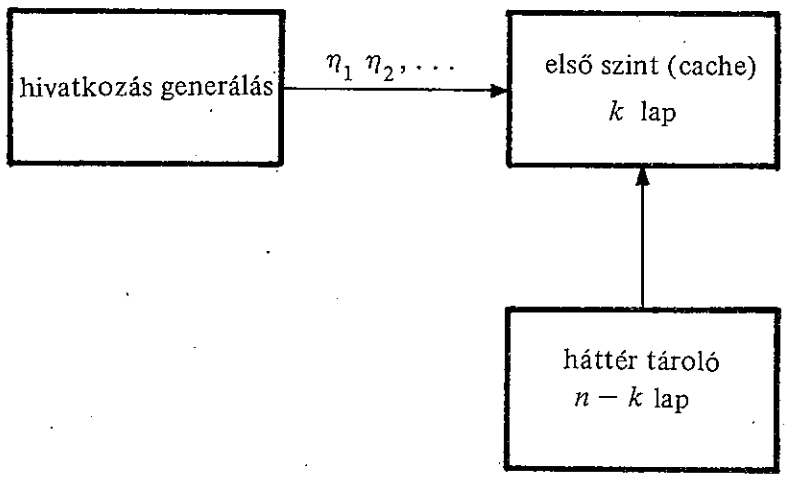
Opderbeck és Chu [11] dolgozatukban a relativ gyakoriságokon alapuló lap–tárolási algoritmust vizsgálják. Ez az algoritmus áll legközelebb a Bayes–féle feltevésen alapuló optimális eljáráshoz, igy nyilvánvaló, hogy szimulációs eredményeik alátámasztják a jelen cikkben bizonyitandó optimális eljárás jóságát. Idézett dolgozatunkban megmutatjuk, hogy az általuk gyakorisági helyettesitési algoritmusnak (PFF: page fault frequency replacement algorithm) nevezett eljárás jobb, mint az LRU (legrégebben használt) algoritmuson alapuló eljárás. Mérési eredményeik egyben azt is igazolják, hogy a lapok független hivására vonatkozó feltevések igen általános feltételek mellett jó közelitésnek tekinthetők.

Megmutatjuk azokat a feltételeket, melyek mellett a megoldás a "kétpisztolyos bandita" (illetve többpisztolyos bandita) problémakör megoldására vezethető vissza. Kitérünk a különböző más feltétel melletti feladat megfogalmazásakor, azok lehetséges megoldásaira és a közelitésekre is.

1.

Mindenekelött egy, a programozás szempontjából elvi jelentőségü feladat megfogalmazásával kezdjük. Multiprogramozásu gép egy programját vizsgálva vetődik fel ezen program két lapja két különböző fokozaton való elhelyezési próblémája. Amennyiben a második fokozaton lévő lapra történő hivatkozás esetén a két lapot azonnal ki kell cserélni, semmilyen optimalizálási feladat nem merül fel. Tegyük fel, hogy lehetőség van mindkét lap első szinten való tartására a hivatkozás befejezéséig, és csak ezután (azaz az ujabb hivatkozás előtt) helyezzük a lapok valamelyikét a második fokozatra.

Az Aho, Denning, Ullman [1] féle kétszintes tárolási eljárás (lásd még: Franaszek, Wagner [5]) esetén, amikor az elérési idők átlagát akarjuk minimalizálni, a fenti megvalósitás reális. Ezért röviden ismertetjük egy ilyen rendszer vázlatát. (1. ábra).



1. ábra Kétszintes tárolás

Az első szint (cache vagy puffer) egy kisebb, de gyors elérésü memória– egység, a második szint (háttér tároló) lassabb elérésü memória– egység. Az $\eta_1, \eta_2, \ldots$ hivatkozási sor generálása a lehetséges $A_1, A_2, \ldots, A_n$ lapokra vonatkozik ($\eta_i = j$, ha az i-edik hivatkozás az A_j lapra történik). Az összes elérés az első szinten történik, ha a hivatkozott lap az első szinten van: az elérési idő T_1 mp., ha a második szinten , akkor előbb az első szintre kell hozni és az elérési idő T_2 mp (általában $T_2 \gg T_1$). Az első szinten egy szabad hely rendszerint rendelkezésre áll az esetleges helyettesités (csere) lebonyolitásához (lásd: Aho, Denning, Ullman [1]). Az itt ismertetett eljárás annyiban uj, hogy a hivatkozás végén kell dönteni a második szintre történő kivitelről (esetleges cseréről).

Visszatérve a két lap esetére az előbbi megfogalmazás alapján jutunk a következő optimalizálási feladatra. Az A_1 és A_2 programrészekre (lapokra) való hivatkozások történjenek függetlenül egymás után, de hivatkozásaik valószinüségeit nem ismerjük. A könnyebb elérésü szint sorszáma legyen 1, a nehezebbé 2. Minden hivatkozás után lehetőség van annak eldöntésére, hogy az A_1 vagy az A_2 programrész kerüljön a könnyebb elérésü helyre. N számu független hivatkozás esetén olyan döntési eljárást kivánunk kidolgozni az A_1 illetve A_2 elhelyezésére, amely minimalizálja a nehezebb elérésü helyre való hivatkozások számát (azaz a lapolási hibák számát). Feltételezzük, hogy az esetleges cserék nem kerülnek költségbe.

Ha az A_1 és A_2 programrészek hivatkozási valószinüségei: p_1 és $1 - p_1$ ismertek, és $p_1 > 1 - p_1$, az A_1 részt kell a könnyebb elérésü 1. helyre helyezni, mivel az 1. helyre történő átlagos hivatkozások száma ekkor Np_1, és az nagyobb, mint az ellenkező elhelyezés esetén. Ha az A_1 és A_2 hivatkozási valószinüségei nem ismertek első közelitésben, feltesszük hogy az egyes programrészekre való hivatkozási valószinüségek p_1 illetve p_2 és $p_1 > p_2$ ismertek ($p_1 + p_2 = 1$, bár ez nem szükséges kikötés), de ismeretlen a hozzárendelés sorrendje.

Jelölje η_t a megfigyelési folyamatot ($t = 1,2, \ldots, N$), lehetséges értékei 1,2 és η_t megadja, hogy a t időpontban az $A_1(\eta_t = 1)$ vagy az $A_2(\eta_t = 2)$ programrészre történt-e hivatkozás.

Az $X_t^{(d)}$ (ahol $d = 1$, ha az A_1 és $d = 2$, ha az A_2 programrész van a 2. (nehezebb) elérésü helyen) valószinüségi változó a d döntés esetén megadja, hogy a t időpontban melyik helyre történt hivatkozás:

$$X_t^{(d)} = \begin{cases} 1 & \text{ha az 1. helyen lévő programrészre történik hivatkozás,} \\ 0 & \text{ha a 2. helyen lévő programrészre történik hivatkozás.} \end{cases}$$

Minden kisérletnél módunkban áll választani (döntést hozni) az előző kisérletek eredményei alapján arról, hogy az $X^{(1)}$ (az A_1 rész kerül a 2. helyre), vagy az $X^{(2)}$ változót figyeljük meg.

Nyilvánvaló hogy

$$X_t^{(d)} = \begin{cases} 0 & \text{ha } \eta_t = d, \\ 1 & \text{ha } \eta_t \neq d. \end{cases}$$

A W valószinüségi változó lehetséges értékei legyenek

1 ha (A_1, A_2) hivási valószinüségei (p_2, p_1),

2 ha (A_1, A_2) hivási valószinüségei (p_1, p_2).

Legyen továbbá az u.n. nem megfigyelhető W komponens apriori eloszlása

$$P(W = 1) = \xi_1, \quad P(W = 2) = \xi_2 = 1 - \xi_1.$$

Feltevéseink szerint tetszőleges t időpontban

$$P\{X_t^{(1)} = 1|W = 1\} = p_1, \qquad P\{X_t^{(1)} = 0|W = 1\} = p_2,$$
$$P\{X_t^{(2)} = 1|W = 2\} = p_1, \qquad P\{X_t^{(2)} = 0|W = 2\} = p_2,$$
$$P\{X_t^{(1)} = 1|W = 2\} = p_2, \qquad P\{X_t^{(1)} = 0|W = 2\} = p_1,$$
$$P\{X_t^{(2)} = 1|W = 1\} = p_2, \qquad P\{X_t^{(2)} = 0|W = 1\} = p_1.$$

Az optimalizálási feladat megfogalmazása: a $\delta = (d_0, d_1, \ldots, d_{N-1})$ döntési sorozat olyan δ^* megválasztása, melyre

$$E(X_1^{(d_0)} + X_2^{(d_1)} + \ldots + X_N^{(d_{N-1})}) = \max.$$

Hasonló feladat megfogalmazása és megoldása megtalálható DeGroot [2] könyvében (14.7.§), ezt használjuk fel a következő pontban. A dinamikus programozás u.n. Bellman egyenlete segitségével történő megoldást (lásd pl. Prohorov–Rozanov [12] 363.o.) ismertetjük az alábbikaban. Ez a nyereség egy más megfogalmazását igényli. A nyereségfüggvény $V(x)$ definiciója az x megfigyelés esetén a következő:

$$V(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x = 1, \\ 0 & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

Az optimalizálási feladat a W változó t időpontban adott $\xi(t)$ apriori (vagy a $t-1$ utáni apostreiori) eloszlás estén

$$E_{t,\xi,x} \sum_{s=t}^{N} V(X_s^{(d_{s-1})}) = V(t, \xi(t), X_t = x, \delta^{[t,N]} = (d_{t-1}, \ldots, d_{N-1}))$$

maximalizálása, azaz

$$V(t,\xi(t),x) = \sup_{\delta[t,N]} V(t,\xi(t), X_t = x, \delta^{[t,N]})$$

megadása. Nyilvánvaló, hogy

$$V(N,\xi(N),x) = V(x) \qquad \text{(független a } \xi \text{ eloszlástól),}$$

$$V(N-1),x) = V(x) + \max_{d_{N-1}} \{\boldsymbol{P}(W=1)\,\boldsymbol{P}(X_N^{(d_{N-1})} = 1 \mid W=1)V(N,\xi(N),1) +$$

$$+ \boldsymbol{P}(W=2)\,\boldsymbol{P}(X_N^{(d-1)} = 1 \mid W=2)V(N,\xi(N),1)\},$$

ahol

$$V(N,\xi(N),1) = 1.$$

Az útobbi összefüggés a $d_{N-1} = 1$ esetben a következőt adja

$$V(N-1,\,\xi(N-1),\,x,\,d_{N-1} = 1) = V(x) + \{\xi_1(N)p_2 + \xi_2(N)p_1\}$$

mig a $d_{N-1} = 2$ esetben a

$$V(N-1,\,\xi(N-1),\,x,d_{N-1} = 2) = V(x) + \{\xi_1(N)p_1 + \xi_2(N)p_2\}$$

adódik. Különbségük (feltevésünk szerint $p_1 > p_2$)

$$\xi_1(N)(p_1-p_2) - \xi_2(N)(p_1-p_2) = (\xi_1(N) - \xi_2(N))(p_1-p_2)$$

alapján a $\xi_1(N) > \xi_2(N)$ esetben $d_{N-1} = 1$, mig a $\xi_1(N) < \xi_2(N)$ esetben a $d_{N-1} = 2$ döntés az optimális. Tehát ebben a lépésben csak a $\xi(N)$ aposteriori eloszlás alapján kell dönteni az eljárás optimalizálásáról. A továbbiakban szükség van a

$$\boldsymbol{P}\{W = 1 \mid X_t^{(d_t-1)} = x\}$$

valószinüségek meghatározására. A Bayes tétel alapján, (ahol $\boldsymbol{P}\{W = i\}$ jelenti a t időpontbeli apriori valószinüséget)

$$\boldsymbol{P}\{W = 1 \mid X_t^{(d_t-1)} = x\} = \frac{\boldsymbol{P}\{X_t^{(d_t-1)} = x \mid W=1\}\boldsymbol{P}\{W=1\}}{\boldsymbol{P}\{X_t^{(d_t-1)} = X \mid W=1\}\boldsymbol{P}\{W=1\} + \boldsymbol{P}\{X_t^{(d_t-1)} = x \mid W=2\}\boldsymbol{P}\{W=2\}}$$

ahol $\xi_1(1) = \xi_1$ adott, és igy látható, hogy a W változó t-beli aposteriori valószinüsége kifejezhető az apriori valószinüségek segitségével. Az aposteriori valószinüségek segitségével tetszőleges t-re

$$V(t,\xi(t),x) = V(x) + \max_{d_t} \{\xi_1(t+1)\boldsymbol{P}\{X_{t+1}^{(d_t)} = 1 \mid W = 1\} V(t+1,\xi(t+1),1) + \ldots)$$
$$+ \xi_2(t+1)\boldsymbol{P}\{X_{t+1}^{(d_t)} = 0 \mid W = 2\} V(t+1,\xi(t+1),0)\} .$$

Innen könnyen leolvasható, hogy az optimális döntési eljárás:

$$d_t = 1 \quad \text{ha} \quad \xi_1(t+1) > \xi_2(t+1),$$
$$d_t = 2 \quad \text{ha} \quad \xi_1(t+1) < \xi_2(t+1).$$

A döntési eljárás tehát az u.n. rövidlátó politika: a t-edik lépésben azt a programrészt (lapot) helyezzük a 2. szintre (nehezebb elérésü helyre), amelynek hivási valószinüsége, aposteriori valószinüsége nagyobb.

2.

Az A_1, A_2, A_3 lapok közül a központi memóriában csak kettő tárolására van lehetőség, a harmadikat háttér tárolóban kell elhelyezni. Feltételezzük, hogy a lapok hivatkozási valószinüségei első közelitésben a következő módon ismeretlenek. A $p_1 > p_2 > p_3$ $(p_1 + p_2 + p_3 = 1)$ valószinüségek ismertek, de számunkra meg nem adott sorrendben vannak hozzárendelve az egyes lapokhoz. Mivel a háttér tárolón lévő lapra történő hivatkozásnál hosszabb adminisztrációs munkára is szükség van, természetesnek tünik minimalizálni N lépés (N hivatkozás) esetén a háttér tárolóban lévő lapra történő hivatkozások átlagos számát.

A programozás technikailag és fizikailag megvalósitható eljárások alapján különböző tipusu feladatok megoldása lehetséges. Ha a d döntés azt jelenti, hogy melyik lap elhelyezése történik a háttér tárolóban ($d = i$, ha A_i kerül a háttér tárolóba, $i = 1,2,3$), akkor elegendő megvizsgálni a háttér tárolóhoz történő hivatkozások száma várható értékének minimumát. Ez a megoldás azonban gyakorlatilag nehezen képzelhető el, mivel azt jelenti, hogy elegendő a lapot a programrész lefutása (a lap felhasználása) után a külső tárolóra visszahelyezni (és ekkor a döntés vonatkozhat bármelyik lapra). Multiprogramozás esetén ez az eljárás használható, mivel a központi memóriában található szabad hely. A valóságban hivatkozás esetén a lapok cseréje azonnal megtörténik. Ennek a feladatnak a megfogalmazásával később foglalkozunk.

Jelölje η_t (lehetséges értékei 1,2,3) a megfigyelhető folyamatot, amelynek értéke a t időpontban megadja, hogy melyik lapra történt hivatkozás.

Legyen $X_t^{(d)}$ az a folyamat, amely megmutatja, hogy a d döntés esetén a központi memóriában vagy a háttér tárolón lévő lapra történt-e hivatkozás. Azaz

$$X_t^{(d)} = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad \eta_t \neq d, \\ 0 & \text{ha} \quad \eta_t = d; \end{cases}$$

Az $X_t^{(d)}$ változókra ($d = 1,2,3$) vonatkozó kisérleteket úgy kivánjuk elvégezni, azaz a $d_0, d_1, \ldots, d_{N-1}$ sorozatot ugy megválasztani, hogy

$$Z = X_1^{(d_0)} + X_2^{(d_1)} + \ldots + X_N^{(d_{N-1})}$$

várható értéke, $E(Z)$, maximális legyen.

Tegyük fel, hogy a (p_1, p_2, p_3) számhármasnak az (A_1, A_2, A_3) lapokhoz történő hozzárendelése a W valószinüségi változó értékeit jelenti:

	(A_1, A_2, A_3)	
$W = 1,$	$(p_3, p_2, p_1),$	$P(W = 1) = \xi_{11}$
$W = 2,$	$(p_3, p_1, p_2),$	$P(W = 2) = \xi_{22}, \ \xi_{11} + \xi_{12} = \xi_1,$
$W = 3,$	$(p_2, p_3, p_1),$	$P(W = 3) = \xi_{21},$
$W = 4,$	$(p_1, p_3, p_2),$	$P(W = 4) = \xi_{22}, \ \xi_{21} + \xi_{22} = \xi_2,$
$W = 5,$	$(p_2, p_1, p_3),$	$P(W = 5) = \xi_{31},$
$W = 6,$	$(p_1, p_2, p_3),$	$P(W = 6) = \xi_{32}, \ \xi_{31} + \xi_{32} = \xi_3,$

$$\sum_{i,j} \xi_{ij} = \sum_i \xi_i = 1.$$

A $P\{X_t^{(d)} = x, \eta_t = j | W = k\}$ valószinüségek meghatározása azon feltevés alapján történik, hogy tetszőleges t időpontbeli kisérletnél az egyes lapokra történő hivatkozás valószinüsége csak W értékétől függ, és független az előző kisérletek kimenetelétől. Például:

$$P\{X_t^{(1)} = 1, \quad \eta_t = 2 | W = 5\} = p_1,$$
$$P\{X_t^{(1)} = 0, \quad \eta_t = 3 | W = 5\} = 0.$$

Könnyü meghatározni a következő valószinüségeket

$$P\{X_t^{(1)} = 1 | W = 1\} = p_1 + p_2 = 1 - p_3 = P\{X_t^{(1)} = 1 | W = 2\}$$
$$P\{X_t^{(2)} = 1 | W = 3\} = p_1 + p_2 = 1 - p_3 = P\{X_t^{(2)} = 1 | W = 4\}$$
$$P\{X_t^{(3)} = 1 | W = 5\} = p_1 + p_2 = 1 - p_3 = P\{X_t^{(3)} = 1 | W = 6\}$$

A W valószinüségi változó különböző értékei nem függetlenek egymástól, igy az $(X_t^{(d)}, \eta_t)$ megfigyelések W egész aposteriori eloszlását megváltoztatják.

Ha első szinten lévő lapra történik a hivatkozás, az ezen a szinten lévő lapok aposteriori hivatkozási valószinüségei megnőnek és nem kell alsóbb szintüvel felcserélni. Alacsonyabb szinten lévő lapra történő hivatkozás esetén a behivott lap a szükséges hivatkozás után ismét külső tárolóra kerülhet, ha aposteriori hivatkozási valószinüsége nem nőtt eléggé.

A továbbiakban az x kisérleti eredmény (mely megadja, hogy belső vagy külső lapra történt-e hivatkozás) esetén legyen a nyereség a következő

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x = 0, \\ 1 & \text{ha} \quad x = 1. \end{cases}$$

Jelölje tetszőleges szekvenciális eljárás esetén M azoknak a hivatkozásoknak a számát (az u.n. "hibás döntések"-nek a számát) a lehetséges N-ből, amelyeknél nem a p_3 valószinüségü lap volt a háttér tárolón. Feltevéseink szerint a megfigyelő nem tudja, hogy melyik $X^{(i)}$ $(i = 1,2,3)$ változóra vonatkozó megfigyelést jelenti a "hibás döntés" (amikor nem a p_3 valószinüségü lap a külső).

M tekinthető a "hibás döntések" számának, mivel az ideális megoldás az lenne, hogy mindig a legkisebb valószinüségü lap legyen a háttér tárolón.

Az előbbi veszteségfüggvény esetén az $E(M)$ várható érték minimalizálása és $E(Z)$ maximalizálása ekvivalens feladat. Ez az optimalizálási feladat speciális esete a következő megfogalmazásu feladatnak.

Legyen ξ a W változó eloszlása. Adott N és ξ esetén jelölje $\widetilde{V}_N(\xi)$ az N megfigyelés (hivatkozás) után a különböző döntési eljárásokhoz tartozó lehetséges összegek várható értékének maximumát.

Tekintsük azt az eljárást, amely az első megfigyelést $X_1^{(1)}$ -re (azaz az A_1 lap van háttér tárolon) végzi, majd $N - 1$ lépésben optimális. Az $X_1^{(1)}$ megfigyelés után a W változó aposteriori eloszlása $\xi(X_1^{(1)})^*$ és a megmaradó $N - 1$ lépésben az összeg maximuma $\widetilde{V}_{N-1}(\xi(X_1^{(1)}))$. Ennél az eljárásnál az összeg várható értéke $E(X_1^{(1)} + \widetilde{V}_{N-1}(\xi(X^{(1)}))$.

Hasonlóan, ha az első megfigyelés $X_1^{(2)}$ volt (az A_2 lap volt a háttér tárolón) és ezután optimális az eljárás az összeg várható értéke $E(X_1^{(2)} + \widetilde{V}_{N-1}(\xi(X_1^{(2)})))$ lesz. Végül az első megfigyelés lehet $X_1^{(3)}$ (az A_3 lap helyezkedik el a háttér tárolón). A $\widetilde{V}_N(\xi)$ függvény ki kell elégitse a következő összefüggést

* Ez a valószinüség η_1 értékétől függ, ezt azonban nem jelöljük.

$$\tilde{V}_n(\xi) = \max\{E[X_1^{(1)} + \tilde{V}_{N-1}(\xi(X_1^{(1)}))], E[X_1^{(2)} + \tilde{V}_{N-1}(\xi(X_1^{(2)}))],$$
$$E[X_1^{(3)} + \tilde{V}_{N-1}(\xi(X_1^{(3)}))]\}.$$

Mivel $\tilde{V}_0(\xi) \equiv 0$ a fenti összefüggésből $\tilde{V}_1, \tilde{V}_2, \ldots, \tilde{V}_N$ szukcesszive meghatározható. Más tipusu nyereségfüggvényekre a későbbiekben visszatérünk.

Lemma. *Az $E(M)$ értéket akkor és csak akkor minimalizálja egy szekvenciális eljárás, ha egyben maximalizálja $E(Z)$ értékét.*

Bizonyitás. A bizonyitás hasonlóan végezhető, mint a két lehetséges alternativa esetén (v.ö. DeGroot [2],14.7 § 1. lemma).

A megfogalmazott feladat optimális döntési eljárása meghatározásához tekintsük ismét Bellman egyenleteit. Adott eloszlás estén nyilvánvalóan teljesülnek a következő összefüggések

Legyen

$$V(t,\xi(t),x) = \sup_{\delta[t,N]} V(t,\xi(t),X_t = x,\delta[t,N]) = E_{t,\xi(t),x} \sum_{s=t}^{N} V(X_s^{(d_{s-1})}),$$

akkor

$$V(N,\xi(N),x) = V(x)$$

és

$$V(N-1,\xi(N-1),x) = V(x) + \max_{d_{N-1}} [\xi_{11}(N)\boldsymbol{P}\{X_N^{(d_{N-1})} = 1 \mid W = 1\} V(N,\xi(N),1) +$$
$$+ \xi_{12}(N)\boldsymbol{P}\{X_N^{(d_{N-1})} = 1 \mid W = 2\} V(N,\xi(N),1) + \ldots$$
$$+ \xi_{32}(N)\boldsymbol{P}\{X_N^{(d_{N-1})} = 1 \mid W = 6\} V(N,\xi(N),1)]$$

ahol

$$V(N,\xi(N),1) = 1.$$

Az utóbbi kifejezésre $d_{N-1} = 1$ esetén

$$\tilde{\xi}_1 = V(x) + [\xi_{11}(N)(1-p_3) + \xi_{12}(N)(1-p_3) + \xi_{21}(N)(1-p_2) + \xi_{22}(N)(1-p_1) +$$
$$+ \xi_{32}(N)(1-p_2)],$$

$d_{N-1} = 2$ esetén

$$\widetilde{\xi}_2 = V(x) + [\xi_{11}(N)(1-p_2) + \xi_{12}(N)(1-p_1) + \xi_{21}(N)(1-p_3) + \xi_{22}(N)(1-p_3) + \\ + \xi_{31}(N)(1-p_1) + \xi_{32}(N)(1-p_2)],$$

míg $d_{N-1} = 3$ esetén

$$\widetilde{\xi}_3 = V(x) + [\xi_{11}(N)(1-p_1) + \xi_{12}(N)(1-p_2) + \xi_{21}(N)(1-p_1) + \xi_{22}(N)(1-p_2) + \\ + \xi_{31}(N)(1-p_3) + \xi_{32}(N)(1-p_3)]$$

adódik.

A $\widetilde{\xi}_1 - \widetilde{\xi}_2, \widetilde{\xi}_1 - \widetilde{\xi}_3$ és $\widetilde{\xi}_2 - \widetilde{\xi}_3$ különbségek a következőképpen irhatók

$$\widetilde{\xi}_1 - \widetilde{\xi}_2 = (1-p_3)(\xi_1(N) - \xi_2(N)) + (1-p_2)[\xi_{21}(N) + \xi_{31}(N) - \xi_{11}(N) - \xi_{32}(N)] + \\ + (1-p_1)[\xi_{22}(N) + \xi_{32}(N) - \xi_{12}(N) - \xi_{31}(N)]$$

$$\widetilde{\xi}_1 - \widetilde{\xi}_3 = (1-p_3)(\xi_1(N) - \xi_3(N)) + (1-p_2)[\xi_{21}(N) + \xi_{31}(N) - \xi_{12}(N) - \xi_{22}(N)] + \\ + (1-p_1)[\xi_{22}(N) + \xi_{32}(N) - \xi_{11}(N) - \xi_{21}(N)],$$

$$\widetilde{\xi}_2 - \widetilde{\xi}_3 = (1-p_3)(\xi_2 - \xi_3) + (1-p_2)[\xi_{12} + \xi_{32} - \xi_{21} - \xi_{11}] + \\ + (1-p_1)[\xi_{11} + \xi_{31} - \xi_{22} - \xi_{12}].$$

A jobboldal első tagja – $\xi_1 > \xi_2$ és $\xi_1 > \xi_3$ esetén – pozitiv, mivel $p_3 < p_2 < p_1$. A többi tag rendszerint elhanyagolható (bár lehetnek negativak is), igy a döntési szabály a ξ_1, ξ_2, ξ_3 mennyiségek alapján hozható.

A Bellman egyenletek általános felirása szintén könnyen megtörténhet:

$$V(t, \xi(t), x) = V(x) + \max_{d_t}[\xi_{11}(t+1)\boldsymbol{P}\{X_{t+1}^{(d_t)} = 1 | W = 1\} V(t+1, \xi(t+1), 1) \\ + \ldots + \xi_{32}\boldsymbol{P}\{X_{t+1}^{(d_t)} = 0 | W = 6\} V(t+1, \xi(t+1), 0)],$$

ahonnan a döntési eljárás rekurzive leolvasható. Mégpedig a max $(\xi_1(t+1), \xi_2(t+1), \xi_3(t+1))$ aposteriori valószinüség értéke alapján hozunk döntést.

Ha $p_1 = p_2 = \frac{1-\epsilon}{2}$, $p_3 = \epsilon$ (ahol $\epsilon \sim 0$) könnyű megmutatni, hogy

$$\widetilde{\xi}_1 - \widetilde{\xi}_2 = (1/2 - \tfrac{3}{2}\epsilon)[\xi_1(N) - \xi_2(N)],$$

$$\widetilde{\xi}_1 - \widetilde{\xi}_3 = (1/2 - 3/2\epsilon)[\xi_1(N) - \xi_3(N)],$$

$$\widetilde{\xi}_2 - \widetilde{\xi}_3 = (1/2 - 3/2\epsilon)[\xi_2(N) - \xi_3(N)].$$

Innen közvetlenül adódik, hogy $\widetilde{\xi}_j = \max_i \widetilde{\xi}_i = \max_i \xi_i = \xi_j$, azaz azt a lapot helyezzük a háttér tárolóra melynek ξ aposteriori valószinüsége maximális.

Az aposteriori valószinüségek meghatározása a Bayes képlet segitségével történik*

$$P\{W=i \mid X_t^{(d_{t-1})}=x\}=\frac{P\{X_t^{(d_{t-1})}=x \mid W=i\}P\{W=i\}}{\sum_{j=1}^{6} P\{X_t^{(d_{t-1})}=x \mid W=j\}P\{W=j\}}$$

ahol $P\{W=j\}$ az aposteriori valószinüséget jelenti. Amint azt már korábban láttuk a $P\{X_t^{(d_{t-1})}=1 \mid W=i\}$ valószinüségek megadhatók a p_i értékek segitségével, különben a $P\{X_t^{(d)}, \eta_t \mid W\}$ valószinüségek meghatározására van szükség.

3.

A döntési eljárás és kisérlet (a lapokra történő hivatkozás) következő megfogalmazása (és egyben a döntési tér megszoritása) jobban megfelel a legtöbb gyakorlati követelménynek is. Ha a második szinten lévő lapra történik hivatkozás, az helyet cserél egy első szinten lévő lappal, mig első szinten lévő lapra történő hivatkozás esetén nem történik csere, csak az aposteriori valószinüségek változnak meg. Legyenek a jelölések továbbra is az előző pontban bevezetettek. A döntési eljárás a következő:

$d_t = d_{t-1}$, nincs változás, ha $X_t^{(d_{t-1})}=1$, azaz első szinten lévő lapra történt hivatkozás;

$d_t = (d_{t-1}+1$ vagy $d_{t-1}+2$, mod 3) ha $X_t^{(d_{t-1})}=0$, azaz első szintü lap kerül ki, és az a lap, amelyik a második szinten volt, felkerül az első szintre.

Feltételezzük, hogy ξ kezdeti eloszlás esetén a max (ξ_1, ξ_2, ξ_3) valószinüségi lap helyezkedik el a második szinten, azaz $d_0 = i$, ha max $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_i$.
A döntési tér ilyen megszoritása esetén vizsgáljuk a

$$Z = X_1^{(d_0)} + \ldots + X_N^{(d_{N-1})}$$

hibátlan lapolási hivatkozások számának maximalizálását, adott ξ kezdeti eloszlás esetén.

A Bellman egyenletek ebben az esetben a következők

$$V(N,\xi(N),x) = V(X)$$

* Mivel a teljes megfigyelés η_t, X_t-re vonatkozik a Bayes-féle képletben, szükség van a $P(X_t = i,\ \eta_t = j \mid W = k)$ feltételes valószinüségekre. A gyakorlatban csak az X_t folyamat megfigyelése történik, ez a feladat azonban új próblémákat vet fel, melyre itt nem térünk ki.

és

$$V(N-1,\xi(N-1),1) = V(1) + [\xi_{11}(N)\boldsymbol{P}\{X_N^{(d_{N-1})} = 1 \mid W = 1\}\, V(N,\xi(N),1) +$$
$$+ \ldots + \xi_{32}(N)\boldsymbol{P}\{X_N^{(d_{N-1})} = 1 \mid W = 6\}\, V(N,\xi(N),1)],$$

és $\quad d_{N-1} = d_{N-2}$, illetve

$$V(N-1,\xi(N-1),0) = V(0) + \max_{d_{N-1}} [\xi_{11}(N)\boldsymbol{P}\{X_N^{(d_{N-1})} = 1 \mid W = 1\} V(N,\xi(N),1) +$$
$$+ \ldots + \xi_{32}\boldsymbol{P}\{X_N^{(d_{N-1})} = 1 \mid W = 6\}\, V(N,\xi(N),1)],$$

és $\quad d_{N-1} = (d_{N-2} + 1 \text{ vagy } d_{N-2} + 2, \bmod 3), \; V(0) = 0.$

A $d_{N-1} = 1$ döntés értéke elsősorban a $\xi_i(N)$ valószinüségek viselkedésétől függ. Ha $d_{N-2} = 3$ volt az előző pontban végzett számitásokhoz hasonlóan kiszámitható, hogy $d_{N-1} = 1$, ha

$$(1 - p_3)(\xi_1(N) - \xi_2(N)) + (1 - p_2)[\xi_{21}(N) + \xi_{31}(N) - \xi_{11}(N) - \xi_{32}(N)] +$$
$$+ (1 - p_1)[\xi_{22}(N) + \xi_{32}(N) - \xi_{12}(N) - \xi_{31}(N)] > 0$$

és $d_{N-1} = 2$ ellenkező esetben. Ebből jó közelitéssel

$$d_{N-1} = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad \xi_1(N) > \xi_2(N), \\ 2 & \text{ha} \quad \xi_1(N) < \xi_2(N), \end{cases}$$

amint az várható volt. Abban a speciális esetben, amikor

$$p_1 = p_2 = \frac{1-\epsilon}{2} \quad \text{és} \quad p_3 = \epsilon(\epsilon \sim 0) \quad \text{a}$$
$$V(N-1,\xi(N-1),0,1) - V(N-1,\xi(N-1),0,2)$$

különbségre pontosan

$$\frac{1}{2}(1 - 3\epsilon)[\xi_1(N) - \xi_2(N)]$$

adódik és az optimális döntés ξ_1 és ξ_2 összehasonlitásából adódik.

Általánosan felirva a Bellman egyenletet belátható, hogy a lapolási hibák számát az az eljárás minimalizálja, amely az első szinten lévő lapok közül szükség esetén azt a lapot viszi a második szintre, amelyhez tartozó legkisebb hivatkozási valószinüségek aposteriori valószinüsége a legnagyobb.

Az aposteriori valószinüségek kiszámitása az előzőekhez hasonlóan történhet. Erre itt külön nem térünk ki.

A legutóbb megfogalmazott döntési eljárás egy lehetséges módositása a következő (az eljárás realizálása elképzelhető, de a gyakorlatban nem ismert hasonló megoldás):
Ha az első szinten lévő lapra történik hivatkozás a nyereség legyen 1, ha a második szinten lévő lapra történik hivatkozás és csak csere történik egy elsőszintü lappal, a nyereség legyen 0, ha a második szinten lévő lapra történik hivatkozás és a hivatkozás befejezése után szükség van a kivitt csere lappal történő visszacserélésre, a nyereség legyen -1. A $\widetilde{V}_N(\xi)$ nyereségre vonatkozó előző pontbeli összefüggések érvényben maradnak, azonban az optimális eljárás nem Z várható értékének maximalizálását jelenti.

4.

Az általános esetben feltételezzük, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ lapok közül az első szinten (a központi memóriában) csak $k < n$ tárolható, a továbbiak a másodikon helyezhetők el. A lapok hivatkozási valószinüségeiről feltételezzük, hogy adottak

$$p_1 > p_2 > \ldots > p_n, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

de ismeretlen az egyes lapokhoz való hozzárendelés sorrendje. A W valószinüségei változó $n!$ lehetséges értéke a különböző hozzárendeléseket jelenti, eloszlását jelölje

$$\xi = (\xi_{11}, \ldots, \xi_{1(n-1)!}, \xi_{n1}, \ldots, \xi_{n(n-1)!})$$

A ξ_i valószinüség W olyan értékhez rendelt valószinüséget jelent, amelynél az A_i laphoz a minimális p_n valószinüség tartozik.

Az előbbiekhez hasonlóan a Bayes–féle hozzáállás alapján ismét a második szinten (háttér tárolón) lévő lapokra történő hivatkozások átlagos számát kivánjuk minimalizálni.
A d döntés $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ lehetséges különböző értéke a háttér tárolón elhelyezendő lapokra vonatkozik. A döntési tér megszoritása abban áll, hogy a háttér tárolón lévő lapra történő hivatkozás esetén a lap az első szintre kerül s vagy azonnali csere történik, vagy – ez a nehezebben realizálható eljárás – a hivatkozás befejezése után történik valamelyik első szinten lévő lap második szintre helyezése.
Multiprogramozás esetén ez utóbbi eljárás használható, mivel a központi memóriában szabad hely rendelkezésre áll.

Az η_t megfigyelhető folyamat, melynek lehetséges értékei $1,2,\ldots,n$ megadja, melyik lapra történik hivatkozás a t időpontban. Az $X_t^{(d)}$ folyamat megadja, hogy d döntés esetén az első vagy második szinten lévő lapra történik-e hivatkozás.

$$X_t^{(d)} = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad \eta_t \in \text{ első szint,} \\ 0 & \text{ha} \quad \eta_t \in \text{ második szint.} \end{cases}$$

Feltételezzük, hogy tetszőleges t időpontban az egyes lapokra történő hivatkozás valószinüsége csak W értékétől függ, és független az előző kisérletek kimenetelétől. A W változó értékei függőek, igy az $(X_t^{(d)}, \eta_t)$ megfigyelési sorozat megváltoztatja aposteriori eloszlását.
A feladat olyan $\delta = (d_0, d_1 \dots, d_{N-1})$ döntési sorozat megválasztása, amely maximalizálja

$$Z = X_1^{(d_0)} + \dots + X_N^{(d_{N-1})}$$

várható értékét.

A feladat ilyen formában történő megfogalmazása általánositása a 2. és 3. pontokban megfogalmazott feladatnak, ahol $n = 3$ volt. Mivel elég nagy n esetén lényeges eltérés nem tapasztalható a 2. és 3. pontbeli feladat megoldása között, elegendő az egyik feladattal foglalkozni.

Bebizonyitható, hogy jó közelitéssel mindig az a lap kerül (szükség esetén) a második szintre, amelyhez tartozó legkisebb hivatkozási valószinüség valószinüsége a legnagyobb. A W segédváltozó bevezetése, mely megadja, hogy az egyes valószinüségek mely lapokhoz tartoznak, itt is szükség és kezdeti eloszlása a megfigyelések során lényegesen változhat.
A $P\{W | X_1^{(d_0)}, \dots, X_t^{(d_{t-1})}\}$ aposteriori valószinüségeloszlás viselkedése határozza meg a követendő döntési eljárást. A képletek felirását és a számitásokat mellőzzük, mivel azok az $n = 3$ eset formális általánositásai.

Az eddigiekben tárgyalás során lényeges megszoritás volt, hogy az η_t folyamat (a lapokra történő hivatkozások) egy független valószinüségi változó sorozatot jelentett. Feltételezve η_t-ről markovitást, vagy bizonyos periodicitást, a feladat megfogalmazása csak formálisan válik kezelhetővé. Amint erről az olvasó meggyőződhet Ingargiola és Korsh [8] cikkéből, ahol általános Markov hivatkozás esetén felirják a dinamikus programozásból adódó összefüggéseket, de egyetlen általános elvű megoldást nem sikerül adniok.

A Markov tipusú hivatkozások pedig természetesek, különösen a Denning-féle munkamezőkkel történő programleirás mutatja ennek jelentőségét. A szükséges megfigyelésszám – N – megválasztása a p_i valószinüségektől függ. A gyakorlatban, mivel az optimális eljárás igen bonyolult számitásokat igényel, a következőképpen tanácsos eljárni.
A p_i valószinüségektől függő N megadása után elvégezve az optimális eljárást, felvilágositást kapunk az egyes lapok hivatkozási valószinüségeire is. A nagy számok törvénye alapján, amint ezt több cikkben is teszik (lásd pl. Gyires [7]) ezután a relativ gyakoriságok alapján történik a lapok besorolása a különböző szintekre.

Az optimális és közelitő eljárások összehasonlitását elvégző szimulációs eredmények ismertetésére egy másik dolgozatban kivánunk visszatérni.

Irodalom

[1] Aho, A.V., Denning, P.J., Ullman, J.D., Principles of optimal page replacement. Journ. ACM, 18 (1) 80-93, 1971.

[2] DeGroot, M.H., Optimal Statistical Decisions. McGraw-Hill, 1970.

[3] Denning, P.J., Virtual memory. – Computing Surveys, 2 (3) 153-189, 1970.

[4] Doyle, M.S. and Grahman, J.W., Some parameters affecting performance of paged storage hierarchies. INFOR 13 (2) 197-207, 1975.

[5] Franaszek, P.A., and Wagner, T.J., Some distribution–free aspects of paging algorithm performance. Journ. ACM, 21 (1) 31-39, 1974.

[6] Freiberger, W.F., Grenander, U., Sampson, P.D., Patterns in program references. IBM J. Res. Development, 23-243, May 1975.

[7] Gyires T., A virtuális memóriáról. MTA SzTAKI Közlemények, 15 1975. (s.a.)

[8] Ingargiola, G. and Korsh, J.F., Finding optimal demand paging algorithms. Journ. ACM, 21 (1) 40-53, 1974.

[9] Kilburn, T., Edwards, D., Lanigan, M., Sümner, F., One–level storage system. IEEE Transactions on Electronic Computers, EC-11 (2) 223-235, 1962.

[10] Mattson, R.L. et al., Evaluation techniques for storage hierarchies. IBM Syst. Journ., 9, (2) 78-117, 1970.

[11] Opderbeck, H. and Chu, W.W., Performance of the page fault frequency replacement algorithm in a multiprogramming environment. IFIP Congress, 1974., Inform. Proc. 235-241.

[12] Prohorov, J.V. and Rozanov, J.A., Probability theory (in Russian) Nauka, Moszkva, 1967.

Summary

On optimal performance of page storage hierarchies

M. Arató

The Bayes sequential design is obtained for an optimization problem involving the choice of page replacement. In the most elementary case given are two pages A_1, A_2, request probabilities $p_1 > p_2$ $(p_1 + p_2 = 1)$, a positive integer N and a number ξ. A sequence of N references is to be made and at each stage either A_1 or A_2 is on the second level, the loss being 1 if a page fault occurs (a reference to the second level), 0 otherwise. ξ is the apriori probability that A_1 has the less request probability, p_2. The replacement of one page to the second level occurs after delivering the contents of the demanded page. The reference string is an independent, identically distributed random sequence. The principal result of this paper is a proof of optimality for the sequential procedure which at each stage puts the page to the second level with higher posterior probability of having the smaller request probability p_2. The solution is similar to the solution of "two–armed bandit problem". The general case when the number of pages, $n \geqslant 2$ and the number of pages on the first level, $k(1 \leqslant k < n)$ are given and the apriori probability distribution $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ of the request probabilities $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_n (\sum_1^n p_i = 1)$ is given the optimal sequential procedure is constructed. Special cases are examined when the solution does not depend on the request probabilities.

The results of the paper give general mathematical foundation of the "least frequency used" and "page fault frequency replacement" algorithms in the case of independent reference string.

Р е з ю м е

Оптимальная процедура для хранения станиц

М. Арато

Рассматривается Байесовская постановка задачи для оптимизации хранения и перестановки страниц в вычислительной машине с виртуальной памятью и с мультипрограммированием. В самой простой постановке задачи предпологается, что имеется две страницы A_1, A_2 с вероятностями обращения $p_1 > p_2$ $(p_1+p_2=1)$, целое положительное число N и число $0 \le \xi \le 1$. Последовательность N обращений к страницам является независимой и в каждый момент времени или A_1 или A_2 находится на втором уровне памяти /другая на первом/. Если обращение происходит к странице на втором уровне потерь равен 1 и о в другом случае. ξ вероятность что страница A_1 имеет вероятность обращения p_2. Посылка одной из страниц на второй уровень происходит после доставки содержания требуемой страницы.

Главный результат статьи состоит в следующем: оптимальная процедура в каждый момент времени посылает ту страницу на второй уровень памяти которая имеет наибольшую aposteriori вероятность иметь меньшую вероятность обращения p_2. Результаты обобщаются на случай $n(\ge 3)$ страниц, где $2 \le k < n$ могут находиться на первом уровне памяти. Рассматриваются специальные случаи когда оптимальное решение не зависит от вероятностей обращения $p_1 \ge p_2 \ge \ldots \ge p_n$ $(\Sigma p_i=1)$.

Результаты статьи дают математическое обоснование ранее разработанных альгоритмов где последовательность обращения является независимой.