Nashin lause

LuK-tutkielma
Kimi Lehtovirta
2558783
Matemaattisten tieteiden laitos
Oulun yliopisto
Kevät 2021

Sisällys

Johdanto

Peliteoria on matematiikan osa-alue, joka tutkii pelien strategisuutta. Peliteorian mielessä peleiksi voidaan laskea muun muassa erilaiset korttipelit, lautapelit ja videopelit mutta myös esimerkiksi kaupungin keskustan läpi ajaminen tai evoluutio. Tässä tutkielmassa perehdytään ensin itse peleihin. Sitten määritellään Nashin tasapaino sekä etsitään Nashin tasapainoja esimerkkipeleistä, minkä jälkeen esitellään ja todistetaan Nashin lause.

Ensimmäisessä luvussa palataan aluksi todennäköisyyslaskennan käsitteisiin sekä selvennetään sitä, miten pelejä kästellään tässä tutkielmassa. Toisessa luvussa tutkitaan, miten pelit voidaan esittää matriisina sekä käsitellään esimerkki erikoistapauksesta, jonka avulla lukijalle esitellään esimerkkitilanne Nashin tasapainosta. Kolmannessa luvussa esitetään Nashin tasapainon formaali määritelmä, minkä jälkeen etsitään Nashin tasapainoja peleistä. Viimeisessä luvussa todistetaan Nashin lause Brouwerin kiintopistelauseen avulla. Nashin lause väittää, että jokaisesta pelistä löytyy Nashin tasapaino.

Tutkielman kirjoittamiseen on käytetty pääasiassa teosta [1].

1 Peruskäsitteitä ja merkintöjä

Aluksi on hyvä palautaa mieleen muutama todennäköisyyslaskennan käsite.

Määritelmä 1.1. *Todennäköisyysavaruus* on kolmikko $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, missä Ω on perusjoukko eli kaikkien alkeistapausten joukko, $\mathcal{F}$ on alkeistapausten joukkojen eli tapahtumien kokoelma ja $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ on kuvaus, joka liittää jokaiseen tapahtumaan todennäköisyyden.

Määritelmä 1.2. *Satunnaismuuttuja* on todennäköisyysavaruudessa määritelty funktio

$$X : \Omega \to \mathbb{R}.$$

Satunnaismuuttuja on *diskreeetti*, jos Ω on numeroituva.

Määritelmä 1.3. Diskreetin satunnaismuuttujan X *odotusarvo* on

$$E(X) = \sum_{a \in \Omega} P(a)X(a)$$

Määritellään seuraavaksi peli, minkä jälkeen määritellään erikseen pelin muodostavat osat.

Määritelmä 1.4. *Peli* on pelaajista, pelaajien valinnoista ja valintakombinaatioihin liitetyistä palkkioista muodostuva kokonaisuus.

Määritelmä 1.5. *Pelaaja* on pelissä toimiva agentti, joka tekee *valinnan.*

Kun pelin pelaajien määrä on $n \in \mathbb{Z}_+$, pelaajat numeroidaan n:llä ensimmäisellä positiviisilla kokonaisluvuilla, kun niihin on syytä viitata täsmällisesti. Jos numeroinnille ei ole tarvetta, pelaajille annetaan kuvaavat nimet.

Määritelmä 1.6. *Valinta* on luku $v \in \mathbb{Z}_+$. Pelaajan i kaikkien valintojen joukko on $V_i = \{1, 2, \ldots, n\}$, missä n on pelaajan i valintojen määrä.

Kuten pelaajien tapauksessa, myös valinnoille voidaan antaa kuvaavat nimet, kun niiden numeroinnille ei ole tarvetta.

Määritelmä 1.7. *Palkkio* on satunnaismuuttuja

$$u : V_1 \times V_2 \times ... \times V_n \to \mathbb{R},$$

missä n on pelaajien määrä. Pelaajan i palkkiota merkitään u_i.

Optimaalisesti pelaava pelaaja pyrkii aina maksimoimaan palkkionsa odotusarvon $E(u)$.

Määritelmä 1.8. Pelaajan *strategia* on todennäköisyysvektori $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, missä $x_i \in [0, 1]$ on valinnan i todennäköisyys kaikilla $i = 1, ..., n$ ja $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Jos $x_i = 1$ jollekin $i = 1, \ldots, n$, kyseessä on *puhdas strategia*, jolloin puhutaan myös strategiasta i. Jos puolestaan $x_i > 0$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$, niin kyseessä on *täyssekastrategia*. Kaikkien n-ulotteisten strategioiden joukkoa merkitään Δ_n.

Huomautus 1.9. Pelaajan strategia siis määrää hänen valintojensa todennäköisyydet. Täten, jokaisen pelaajan odotusarvo riippuu jokaisen pelaajan strategiasta. Kun halutaan korostaa pelajan i palkkion odotusarvoa kiinnitetyillä strategioilla $(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n) =: \mathbf{s}$, merkitään odotusarvoa $E_{\mathbf{s}}(u_i)$.

Huomautus 1.10. Tässä tutkielmassa ajatellaan, että pelit ovat äärellisiä eli sekä pelaajien että valintojen lukumäärä on äärellinen. Lisäksi ajatellaan, että peli koostuu vain yhdestä kierroksessa, eli kukin pelaaja tekee yhden valinnan, sekä pelaajat tekevät valintansa samanaikaisesti ja toisistaan riippumatta.

2 Pelien mallintaminen

Tarkastellaan seuraavaksi kahden pelaajan pelejä, missä pelaajan 1 valintojen määrä $|V_1| = m$ sekä pelaajan 2 valintojen määrä $|V_2| = n$.

Kahden pelaajan peli voidaan esittää matriisina, jonka soluista löytyvät eri valintakombinaatioihin liitetyt palkkiot. Siis peli voidaan kuvata $m \times n$ -matriisilla $A = (\mathbf{a}_{ij}) = (a_{ij1}, a_{ij2})$, missä a_{ij1} on pelaajan 1 palkkio ja a_{ij2} pelaajan 2 palkkio, kun pelaajan 1 valinta on i ja pelaajan 2 valinta on j.

Esimerkki 2.1.
Esimerkki pelin matriisista:

		Pelaaja 2		
		C	D	E
Pelaaja 1	A	(1, -1)	(2, 3)	(-1, 1)
	B	(2, 2)	(-6, 2)	(0, 0)

Esimerkiksi, jos pelaaja 1 tekee valinnan B ja pelaaja 2 valinnan D, niin pelaajan 1 palkkio on -6 ja pelaajan 2 palkkio on 2.

Huomautus 2.2. Monesti on myös hyödyllistä kuvata peli yhtäpitävästi kahdella $m \times n$ -matriisilla $A = (a_{ij})$ ja $B = (b_{ij})$, missä a_{ij} on pelaajan 1 palkkio ja b_{ij} pelaajan 2 palkkio, kun pelaajan 1 valinta on i ja pelaajan 2 valinta on j. Tällöin sanotaan, että A on pelaajan 1 palkkiomatriisi ja B on pelaajan 2 palkkiomatriisi. Siis esimerkin 2.1 matriisi voidaan esittää yhtäpitävästi matriisien

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -6 & 0 \end{bmatrix} \text{ ja } B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

avulla.

Otetaan seuraavaksi esimerkki yksinkertaisesta erikoistapauksesta, jota kutsutaan nollasummapeliksi.

Määritelmä 2.3. Peli on *nollasummapeli*, jos

$$\sum_{i=1}^{k} u_i(\mathbf{v}) = 0$$

kaikilla $\mathbf{v} \in V_1 \times V_2 \times ... \times V_k$, missä k on pelaajien lukumäärä.

Toisin sanoen, nollasummapelissä pelaajien palkkioiden summa on aina nolla riippumatta heidän valinnoistaan. Voidaan ajatella, että pelaaja vie palkkionsa aina toisilta pelaajilta. Huomautuksen 2.2 merkinnöillä kahden pelaajan tapauksessa nollasummapeli on siis pelin erikoistapaus, jossa $b_{ij} = -a_{ij}$ kaikilla $i = 1, ..., m$ ja $j = 1, ..., n$. Tällöin peli voidaan esittää pelkästään matriisilla A, jonka soluista löytyvät pelaajan 1 palkkiot eli pelaajan 2 tappiot.

Esimerkki 2.4. Pelaaja 2 (piilottaja) laittaa molemmat kätensä selänsä taakse piilottaen joko yhden kolikon vasempaan käteen tai kaksi kolikkoa oikeaan käteen. Pelaaja 1 (valitsija) valitsee sitten toisen käsistä, ja saa kädestä mahdollisesti löytyvät kolikot itselleen. Peli voidaan kuvata seuraavanlaisella palkkiomatriisilla:

		Piilottaja	
		Vasen	Oikea
Valitsija	Vasen	1	0
	Oikea	0	2

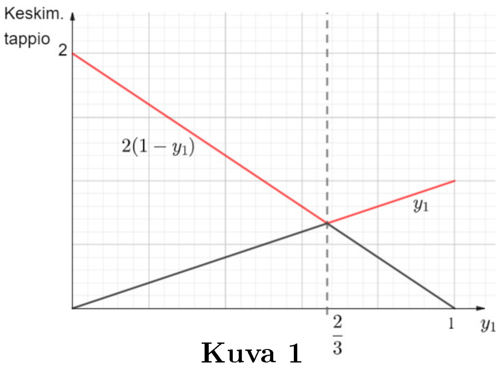
Miksi piilottaja ei piilottaisi yhtä kolikkoa vasempaan käteen joka kerta?

Koska hän haluaa varautua pahimpaan mahdolliseen valitsijan strategiaan; esimerkiksi valitsija voi olla päättänyt, että valitsee aina vasemman käden. Piilottaja siis olettaa, että valitsija pelaa optimaalisesti.

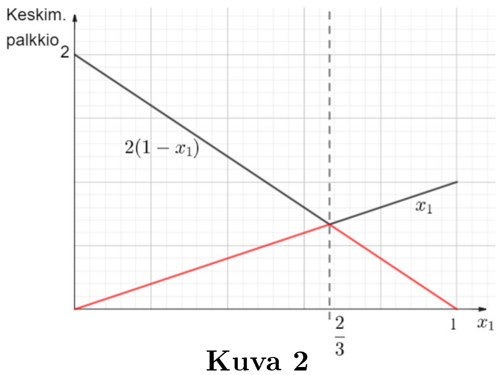
Jotta piilottaja voi varautua pahimpaan mahdolliseen valitsijan strategiaan, hänen valintaansa täytyy liittyä satunnaisuutta. Olkoon y_1 todennäköisyys sille, että piilottaja tekee valinnan "Vasen", ja $y_2 = 1 - y_1$ todennäköisyys valinnalle "Oikea". Tällöin piilottajan tappion odotusarvo on y_1, jos valitsijan valinta on "Vasen", ja $2(1 - y_1)$, jos valitsijan valinta on "Oikea".

Piilottaja haluaa varautua tilanteeseen, jossa valitsija saattuu valitsemaan aina suuremman palkkion, jolloin hän haluaa minimoida tappioista suuremman eli arvon $\max\{y_1, 2(1 - y_1)\}$. Minimi saavutetaan arvolla $y_1 = \frac{2}{3}$ (Kuva 1), joten piilottaja valitsee strategiakseen $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

Vastaavasti, valitsija haluaa maksimoida arvon $\min\{x_1, 2(1 - x_1)\}$, missä x_1 on todennäköisyys valitsijan valinnalle "Vasen". Maksimi saavutetaan arvolla $x_1 = \frac{2}{3}$ (Kuva 2), joten myös hän valitsee strategiakseen $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.



Kuva 1



Kuva 2

Tarkastellaan tilannetta, jossa valitsijan strategia on $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ ja piilottajan strategia on $\mathbf{z} \in \Delta_2$. Tällöin piilottajan tappion odotusarvo on

$$E(u_2) = \frac{2}{3} \cdot z_1 \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot z_2 \cdot 2 = \frac{2}{3}(z_1 + z_2) = \frac{2}{3}$$

Siten piilottajan strategia ei vaikuta hänen tappionsa odotusarvoon, kun valitsijan strategia on $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. Myöskään valitsijan strategia ei vaikuta tämän palkkionsa odotusarvoon, jos piilottaja käyttää strategiaa $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. Siis kumpikaan pelaajista ei pysty parantamaan strategiaansa, kun valitsijan strategia on $\mathbf{x} = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ ja piilottajan strategia on $\mathbf{y} = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. Tällöin strategiaparia $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ kutsutaan Nashin tasapainoksi.

Huomautus 2.5. Useasti palkkion odotusarvo on hyödyllistä esittää matriisien tulona seuraavasti. Olkoon A pelaajan 1 palkkiomatriisi, B pelaajan 2 palkkiomatriisi, $\mathbf{x}$ pelaajan 1 strategia sekä $\mathbf{y}$ pelaajan 2 strategia. Lasketaan auki tulo

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^T A \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^m x_k a_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^m x_k a_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m x_k y_i a_{ki} \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m P(k,i) u_1(k,i) = E(u_1),
\end{aligned}$$

joten pelaajan 1 palkkion odotusarvo $E(u_1) = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$. Vastaavasti $E(u_2) = \mathbf{x}^T B \mathbf{y}$.

3 Nashin tasapaino

Tässä luvussa esitellään Nashin tasapainon formaali määritelmä useammalle pelaajalle, minkä jälkeen etsitään Nashin tasapainoja esimerkkipeleistä.

Tarkastellaan $k \geq 2$ pelaajan peliä. Olkoon $\mathbf{s} = (\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_k)$ pelaajien strategioiden muodostama vektori. Määritellään pelaajalle i merkintä $\mathbf{s}_{-i} := (\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_{i-1}, \mathbf{s}_{i+1}, \ldots, \mathbf{s}_k)$. Eli $\mathbf{s}_{-i}$ on kuin $\mathbf{s}$, mutta siitä on poistettu i:nnes komponentti. Lisäksi, merkintä $(\mathbf{s}'_i, \mathbf{s}_{-i}) := (\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_{i-1}, \mathbf{s}'_i, \mathbf{s}_{i+1}, \ldots, \mathbf{s}_k)$ tarkoittaa vektoria, joka on saatu vektorista $\mathbf{s}$ asettamalla $\mathbf{s}_i$:n paikalle $\mathbf{s}'_i$.

Nyt useamman pelaajan tapauksessa palkkioiden odotusarvoja on helpompi tarkastella puhtaiden strategioiden kautta seuraavasti.

Huomautus 3.1. Olkoot K pelaajien joukko, $|K| = k$ ja $\mathbf{s}$ pelaajien strategioiden vektori. Tällöin pelaajan i palkkio odotusarvo voidaan esittää puhtaista strategioista koituvien odotusarvojen lineaarikombinaationa:

$$
\begin{aligned}
E_{(\mathbf{s}'_i, \mathbf{s}'_{-i})}(u_i) &= \sum_{j_1 \in V_1} \sum_{j_2 \in V_2} \cdots \sum_{j_k \in V_k} \prod_{m=1}^{k} [P(j_m)] u_i(j_1, \ldots, j_k) \\
&= \sum_{j_i \in V_i} P(j_i) \sum_{j_1 \in V_1} \cdots \sum_{j_{i-1} \in V_{i-1}} \sum_{j_{i+1} \in V_{i+1}} \cdots \sum_{j_k \in V_k} \prod_{m \in K \setminus \{i\}} [P(j_m)] u_i(j_1, \ldots, j_k) \\
&= \sum_{j_i \in V_i} P(j_i) E_{(j_i, \mathbf{s}_{-i})}(u_i) = \sum_{j_i \in V_i} s_i^j E_{(j_i, \mathbf{s}_{-i})}(u_i)
\end{aligned}
$$

Kuten esimerkissä 2.4 mainittiin, kahden pelaajan tapauksessa Nashin tasapaino on strategiapari $(\mathbf{x}', \mathbf{y}')$, jolle pätee, että strategia $\mathbf{y}'$ on paras vastaus strategiaan $\mathbf{x}'$ ja päin vastoin. Formaalimmin Nashin tasapaino useammalle pelaajalle voidaan esittää seuraavasti:

Määritelmä 3.2. Olkoot pelaajien määrä $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ ja S_i pelaajan i kaikkien strategioiden joukko kaikilla $i = 1, \ldots, k$. Strategioiden vektori $\mathbf{s}' = (\mathbf{s}'_1, \mathbf{s}'_2, \ldots, \mathbf{s}'_k)$ on *Nashin tasapaino*, jos kaikilla $i = 1, \ldots, k$ pätee

$$E_{(\mathbf{s}'_i, \mathbf{s}'_{-i})}(u_i) \geq E_{(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}'_{-i})}(u_i) \quad \forall s_i \in S_i,$$

Jos $\mathbf{s}'$ on Nashin tasapaino ja $\mathbf{s}'_i$ on puhdas strategia kaikilla $i = 1, \ldots, k$, niin $\mathbf{s}'$ on *puhdas Nashin tasapaino*. Jos puolestaan $\mathbf{s}'_i$ on täyssekastrategia kaikilla $i = 1, \ldots, k$, niin $\mathbf{s}'$ on *täysin ei-puhdas Nashin tasapaino*.

Toisien sanoen, strategiat muodostavat Nashin tasapainon, jos kukaan pelaaja ei pysty parantamaan palkkionsa odotusarvoa muuttamalla vain omaa strategiaansa. Tasapaino on puhdas, jos jokaisen pelaajan strategia on vain yksi valinta. Jos taas jokaisen pelaajan strategia on täyssekastrategia, niin tasapaino on täysin ei-puhdas.

Huomautus 3.3. Kahden pelaajan tapauksessa $(\mathbf{x}', \mathbf{y}')$ on Nashin tasapaino, jos
1) $\mathbf{x}'^T A\mathbf{y}' \geq \mathbf{x}^T A\mathbf{y}'$ kaikilla $\mathbf{x} \in S_1$ ja
2) $\mathbf{x}'^T B\mathbf{y}' \geq \mathbf{x}'^T B\mathbf{y}$ kaikilla $\mathbf{y} \in S_2$,
missä A on pelaajan 1 palkkiomatriisi ja B on pelaajan 2 palkkiomatriisi.

Seuraus 3.4. *Olkoon $\boldsymbol{s}'$ pelaajien strategioiden vektori. Nyt huomautuksesta 3.1 saadaan, että jos*

$$E_{(j,\boldsymbol{s}'_{-i})} \leq E_{(\boldsymbol{s}'_i,\boldsymbol{s}'_{-i})} \text{ kaikilla } j \in V_i$$

niin

$$E_{(\boldsymbol{s}_i,\boldsymbol{s}'_{-i})} \leq E_{(\boldsymbol{s}'_i,\boldsymbol{s}'_{-i})} \text{ kaikilla } \boldsymbol{s}_i \in \Delta_{|V_i|}$$

Eli, kun tavoitteena on osoittaa $\boldsymbol{s}$ Nashin tasapainoksi, riittää osoittaa, että kukaan pelaaja ei pysty parantamaan oman palkkionsa odotusarvoa vaihtamalla mihinkään puhtaaseen strategiaan.

Esimerkki 3.5. Pelissä

		Pelaaja 2	
		C	D
Pelaaja 1	A	(0, 0)	(2, 2)
	B	(1, 1)	(0, 0)

Strategiapari (B, C) (pelaaja 1 tekee aina valinnan B ja pelaaja 2 valinnan C) on Nashin tasapaino.

Todistus. Strategiaparilla (B, C) pelaajan 1 palkkion odotusarvo on $E_{(B,C)}(u_1) = 1$ ja pelaajan 2 palkkion odotusarvo on $E_{(B,C)}(u_2) = 1$. Kun pelaaja 1 vaihtaa strategiaan A, pelaajan 1 palkkion odotusarvo on

$$E_{(A,C)}(u_1) = 0 \leq 1 = E_{(B,C)}(u_1).$$

Vastaavasti, jos pelaaja 2 vaihtaisi strategiaan D, kun pelaajan 1 strategia on B, niin pelaajan 2 palkkion odotusarvo on

$$E_{(B,D)}(u_2) = 0 \leq 1 = E_{(B,C)}(u_2).$$

Siis kumpikaan pelaajista ei pysty parantamaan oman palkkionsa odotusarvoa vaihtamalla mihinkään puhtaaseen strategiaan, jolloin seurauksen 3.4 nojalla (B, C) on Nashin tasapaino. □

Huomautus 3.6. Esimerkissä 3.5 on selvää, että myös (A, D) on Nashin tasapaino, sillä kumpikaan pelaaja ei pysty millään strategialla saamaan palkkionsa odotusarvoksi suurempaa kuin 2 riippumatta toisen pelaajan strategiasta. On kuitenkin tärkeää huomata, että Nashin tasapaino ei tarkoita aina tilannetta, jossa jokaisen pelaajan palkkio on suurin mahdollinen. Puolestaan, Nashin tasapaino on tilanne, jossa yksittäisen pelaajan strategian muuttaminen ei voi nostaa hänen oman palkkionsa odotusarvoa, kuten esimerkissä 3.5 huomattiin.

Käsitellään seuraavaksi lause, joka helpottaa täysin ei-puhtaan Nashin tasapainon löytämistä kahden pelaajan pelistä.

Lause 3.7. *Olkoot $\boldsymbol{x}' \in \Delta_m$ pelaajan 1 täyssekastrategia (eli $x_i > 0$ kaikilla $i = 1, \ldots, m$) ja $\boldsymbol{y}' \in \Delta_n$ pelaajan 2 täyssekastrategia. Strategiapari $(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}')$ on Nashin tasapaino jos ja vain jos*

$$E_{(a_1,\boldsymbol{y}')}(u_1) = E_{(a_2,\boldsymbol{y}')}(u_1) \text{ sekä } E_{(\boldsymbol{x}',b_1)}(u_2) = E_{(\boldsymbol{x}',b_2)}(u_2)$$

kaikilla $a_1, a_2 \in V_1$ ja $b_1, b_2 \in V_2$.

Todistus.

$\Rightarrow$ Oletetaan, että $(\mathbf{x}', \mathbf{y}')$ on Nashin tasapaino. Tehdään vastaoletus, että

$$E_{(a_1,\mathbf{y}')}(u_1) \neq E_{(a_2,\mathbf{y}')}(u_1) \text{ joillain } a_1, a_2 \in V_1$$

tai

$$E_{(\mathbf{x}',b_1)}(u_2) \neq E_{(\mathbf{x}',b_2)}(u_2) \text{ joillain } b_1, b_2 \in V_2.$$

Käsitellään tilanne $E_{(a_1,\mathbf{y}')}(u_1) \neq E_{(a_2,\mathbf{y}')}(u_1)$, jolloin on olemassa sellainen valinta $a' \in V_1$, että

$$E_{(a',\mathbf{y}')}(u_1) \geq E_{(a,\mathbf{y}')}(u_1)$$

kaikille $a \in V_1$ ja lisäksi on olemassa $a_0 \in V_1$, jolle

$$E_{(a',\mathbf{y}')}(u_1) > E_{(a_0,\mathbf{y}')}(u_1).$$

Nyt

$$\begin{aligned} E_{(a',\mathbf{y}')}(u_1) &= (x'_1 + \ldots + x'_m) E_{(a',\mathbf{y}')}(u_1) \\ &> x'_1 E_{(1,\mathbf{y}')}(u_1) + \ldots + x'_m E_{(m,\mathbf{y}')}(u_1) = E_{(\mathbf{x}',\mathbf{y}')}(u_1), \end{aligned}$$

joten $(\mathbf{x}', \mathbf{y}')$ ei ole Nashin tasapaino, mikä on ristiriita.

$\Leftarrow$ Oletetaan, että

$$E_{(a_1,\mathbf{y}')}(u_1) = E_{(a_2,\mathbf{y}')}(u_1) =: A \text{ sekä } E_{(\mathbf{x}',b_1)}(u_2) = E_{(\mathbf{x}',b_2)}(u_2)$$

kaikilla $a_1, a_2 \in V_1$ ja $b_1, b_2 \in V_2$. Tällöin huomautuksen 3.1 avulla saadaan

$$E_{(\mathbf{x}',\mathbf{y}')}(u_1) = \sum_{i=1}^{m} x_i E_{(i,\mathbf{y}')}(u_1) = \sum_{i=1}^{m} x_i A = A.$$

Erityisesti

$$E_{(a,\mathbf{y}')}(u_1) \leq E_{(\mathbf{x}',\mathbf{y}')}(u_1)$$

kaikilla $a \in V_1$. Vastaavasti

$$E_{(\mathbf{x}',b)}(u_1) \leq E_{(\mathbf{x}',\mathbf{y}')}(u_1)$$

kaikilla $b \in V_2$, joten $(\mathbf{x}', \mathbf{y}')$ on Nashin tasapaino.

$\square$

Esimerkki 3.8. Tarkastellaan peliä, jota kuvaa palkkiomatriisi

<table>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">Pelaaja 2</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>C</td><td>D</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Pelaaja 1</td><td>A</td><td>(6, -10)</td><td>(0, 10)</td></tr>
<tr><td>B</td><td>(4, 1)</td><td>(1, 0)</td></tr>
</table>

Tavoitteena on löytää pelistä Nashin tasapaino. Aluksi voidaan huomata, että pelillä ei ole puhdasta Nashin tasapainoa, koska jos

1) pelaajan 1 strategia on $(1, 0)$, pelaajan 2 paras puhdas strategia on $(0, 1)$.
2) pelaajan 2 strategia on $(0, 1)$, pelaajan 1 paras puhdas strategia on $(0, 1)$.
3) pelaajan 1 strategia on $(0, 1)$, pelaajan 2 paras puhdas strategia on $(1, 0)$.
4) pelaajan 2 strategia on $(1, 0)$, pelaajan 1 paras puhdas strategia on $(1, 0)$.

Siis, jos molemmat pelaajat käyttävät puhdasta strategiaa, aina toinen pelaajista on tyytymätön strategiaansa, jolloin strategiat eivät muodosta Nashin tasapainoa.

Etsitään pelistä täysin ei-puhdas Nashin tasapaino $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Tällöin x_1 on todennäköisyys sille, että pelaaja 1 tekee valinnan A ja $x_2 = 1 - x_1$ todennäköisyys sille, että pelaaja 1 tekee valinnan B. Jos pelaaja 2 tekee valinnan C, pelaajan 2 palkkion odotusarvo on

$$E_{(x,C)}(u_2) = -10x_1 + 1(1 - x_1) = 1 - 11x_1.$$

Vastaavasti, jos pelaaja 2 tekee valinnan D, hänen palkkionsa odotusarvo on

$$E_{(x,D)}(u_2) = 10x_1 + 0(1 - x_1) = 10x_1.$$

Nyt lauseen 3.7 nojalla $E_{(x,C)}(u_2) = E_{(x,D)}(u_2)$, mistä saadaan $x_1 = \frac{1}{21}$, jolloin $\mathbf{x} = (\frac{1}{21}, \frac{20}{21})$. Voidaan myös olettaa, että pelaajan 1 valinnoista A ja B saatavat palkkioiden odotusarvot $E_{(A,\mathbf{y})}(u_1) = 6y_1$ ja $E_{(B,\mathbf{y})}(u_1) = 3y_1 + 1$ ovat yhtä suuret, jolloin $y_1 = \frac{1}{3}$ ja $\mathbf{y} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Näin saadut strategiat $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ muodostavat Nashin tasapainon.

Esimerkki 3.9. Kaksi opiskelijaa menevät luennolle myöhässä. Luentosalissa on kaksi vapaata pöytää, joista toinen on pieni (P) ja toinen on suuri (S). Opiskelija on sitä tyytyväisempi mitä enemmän hänen pöydällään on vapaata tilaa. Opiskelijat valitsevat pöytänsä samanaikaisesti. Pienemmästä pöydästä saatava palkkio (tilan määrä) on $p > 0$ ja suuremmasta $s > p$. Jos opiskelijat valitsevat saman pöydän, he jakavat pöydästä saatavan palkkion puoleksi. Pelin palkkiomatriisi on:

		Opiskelija 2	
		S	P
Opiskelija 1	S	(s / 2, s / 2)	(s, p)
	P	(p, s)	(p / 2, p / 2)

Jos $s \geq 2p$, niin kummankin opiskelija kannattaa valita suuri pöytä, koska puolitettukin palkkio siitä on suurempi kuin kokonainen palkkio pienemmästä pöydästä. Tällöin (S, S) on pelin ainoa Nashin tasapaino, sillä strategia S on ainoa paras vastaus jokaiseen toisen pelaajan strategiaan.

Jos $p < s < 2p$, niin strategiaparit (S, P) ja (P, S) ovat Nashin tasapainoja:

Todistus. Osoitetaan (S, P) Nashin tasapainoksi (vastaavasti (P, S)). Olkoon opiskelijan 1 strategia S, ja opiskelijan 2 strategia $\mathbf{y} = (y_1, y_2) = (y_1, 1 - y_1)$. Nyt opiskelijan 2 palkkion odotusarvo on

$$y_1 \frac{s}{2} + (1 - y_1)p < y_1 p + (1 - y_1)p = p$$

kaikilla $y_1 \in]0, 1]$. Jos $y_1 = 0$ (eli opiskelijan 2 strategia on P), niin opiskelijan 2 palkkion odotusarvo on p. Vastaavasti, jos opiskelijan 2 strategia on P, niin strategialla $\mathbf{x} = (x_1, 1 - x_1)$ opiskelijan 1 palkkion odotusarvo on

$$x_1 s + (1 - x_1)\frac{p}{2} < x_1 s + (1 - x_1)s = s$$

kaikilla $x_1 \in [0,1[$. Jos $x_1 = 1$ (eli opiskelijan 1 strategia on S), niin opiskelijan 1 palkkion odotusarvo on s.

Siis kumpikaan opiskelija ei voi parantaa strategiaansa, kun heidän strategiansa ovat (S,P), joten (S,P) on Nashin tasapaino. $\square$

Etsitään pelistä vielä mahdollinen täysin ei-puhdas Nashin tasapaino $(\mathbf{x},\mathbf{y})$. Lauseen 3.7 nojalla on oltava

$$E_{(\mathbf{x},S)}(u_2) = E_{(\mathbf{x},P)}(u_2)$$

yhtäpitävästi

$$x_1\frac{s}{2} + (1-x_1)s = x_1 p + (1-x_1)\frac{p}{2},$$

mistä saadaan

$$x_1 = \frac{2s-p}{p+s}.$$

Koska $p > \frac{s}{2}$, niin

$$0 < x_1 = \frac{2s-p}{p+s} < \frac{2s-\frac{s}{2}}{p+s} < \frac{2s-\frac{s}{2}}{\frac{s}{2}+s} = 1.$$

Vastaavasti, on oltava

$$E_{(S,\mathbf{y})}(u_1) = E_{(P,\mathbf{y})}(u_1) \iff y_1\frac{s}{2} + (1-y_1)s = y_1 p + (1-y_1)\frac{p}{2},$$

jolloin myös

$$y_1 = \frac{2s-p}{p+s} \in]0,1[.$$

Näin ollen, strategiat

$$\mathbf{x} = (\frac{2s-p}{p+s}, \frac{2p-s}{p+s}) \text{ ja } \mathbf{y} = (\frac{2s-p}{p+s}, \frac{2p-s}{p+s})$$

muodostavat täysin ei-puhtaan Nashin tasapainon.

4 Nashin lause

Tässä luvussa perehdytään Nashin lauseeseen. Nashin lause väittää, että jokaisesta pelistä löytyy Nashin tasapaino. Nashin lauseen todistamiseen käytetään Brouwerin kiintopistelausetta.

Määritelmä 4.1. Joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on konveksi joukko, jos

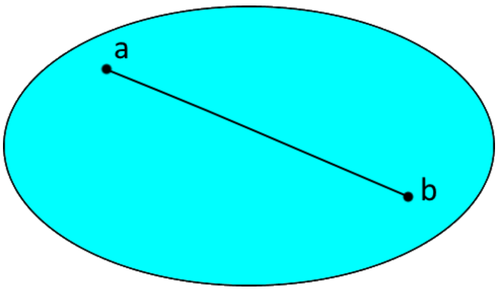
$$\lambda \mathbf{a} + (1-\lambda)\mathbf{b} \in A, \lambda \in [0,1]$$

kaikilla $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A$.

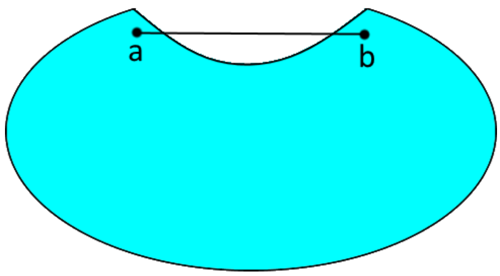
Huomautus 4.2. Pisteet $\lambda \mathbf{a} + (1-\lambda)\mathbf{b}$ muodostavat janan **ab**:
Olkoon J janan **ab** pisteiden joukko. Nyt

$$\mathbf{x} \in J \iff \exists \lambda \in [0,1] : \mathbf{x} = \mathbf{b} + \lambda(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \mathbf{b} - \lambda\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a} + (1-\lambda\mathbf{b}).$$

Siis joukko A on konveksi, jos kaikki sen pisteiden väliset janat kuuluvat myös joukkoon A.



Konveksi joukko



Epäkonveksi joukko

Lause 4.3. ***(Brouwerin kiintopistelause)*** *Olkoon $K \subset \mathbb{R}^n$ suljettu, rajoitettu ja konveksi. Jos $T : K \to K$ on jatkuva, niin on olemassa $\boldsymbol{x} \in K$, jolle $T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$.*

Todistus. Sivuutetaan, katso [1, kohta 5.2.3]. □

Lause 4.4. ***(Nashin lause)*** *Jokaisella k (≥ 2) pelaajan pelillä on olemassa Nashin tasapaino.*

Todistus. Merkitään $v_i := |V_i|$. Olkoon $K = \Delta_{v_1} \times \cdots \times \Delta_{v_k}$. Määritellään

$$c_{i,j}(\mathbf{s}) := \max\{E_{(j,\mathbf{s}_{-i})}(u_i) - E_{(\mathbf{s}_i,\mathbf{s}_{-i})}(u_i), 0\}$$

kaikilla pelaajilla $i = 1, \ldots, k$ ja valinnoilla $j = 1, \ldots, v_i$. Tarkastellaan kiinnitettyä pelaajaa i sekä määritellään

$$A_i = \{j \in V_i : s_i^j > 0\}$$

Osoitetaan, että

$$c_{i,a_0}(\mathbf{s}) = 0 \text{ jollain } a_0 \in A_i. \tag{1}$$

Jos $c_{i,a}(\mathbf{s}) > 0$ kaikilla $a \in A_i$, niin $c_{i,j}$:n määritelmän perusteella

$$E_{(a,\mathbf{s}_{-i})}(u_i) > E_{\mathbf{s}}(u_i) \text{ kaikilla } a \in A_i.$$

Tällöin

$$E_{\mathbf{s}}(u_i) = \sum_{j=1}^{v_i} \mathbf{s}_i^j E_{(j,\mathbf{s}_{-i})}(u_i) = \sum_{a\in A_i} \mathbf{s}_i^a E_{(a,\mathbf{s}_{-i})}(u_i) > \sum_{j=1}^{v_i} \mathbf{s}_i^j E_{(j,\mathbf{s}_{-i})}(u_i) = E_{\mathbf{s}}(u_i),$$

mikä on ristiriita, joten $c_{i,a_0}(\mathbf{s}) = 0$ jollain $a_0 \in A_i$. Määritellään seuraavaksi $\mathbf{s}'_i \in \Delta_{v_i}$ kaikilla $i = 1, \ldots, k$ asettamalla $j : nnes$ komponentti

$$s_i'^j := \frac{s_i^j + c_{i,j}(\mathbf{s})}{1 + \sum_{t=1}^{v_i} c_{i,t}(\mathbf{s})} \tag{2}$$

kaikilla $j = 1, ..., v_i$. Olkoon

$$T : K \to K, \;\; T(\mathbf{s}) = \mathbf{s}'.$$

Joukko K on suljettuna yksikkökuutiona myös rajoitettu ja konveksi. Lisäksi, T on jatkuva, koska $c_{i,j}$:t ovat jatkuvia. Siis Brouwerin kiintopistelauseen nojalla on olemassa sellainen $\mathbf{x} \in K$, että $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. Näytetään, että $\mathbf{x}$ on Nashin tasapaino. Kun asetetaan $\mathbf{s} = \mathbf{x}$, niin määritelmästä (2) saadaan yhtälöt

$$x_i^j \sum_{t=1}^{v_i} c_{i,t}(\mathbf{x}) = c_{i,j}(\mathbf{x}), \text{ missä } j \in \{1, \ldots, v_i\}.$$

Kohdan (1) nojalla jollain $a_0 \in A_i$ pätee

$$x_i^{a_0} \sum_{t=1}^{v_i} c_{i,t}(\mathbf{x}) = 0.$$

Lisäksi, A_i:n määritelmän perusteella $x_i^{a_0} > 0$, jolloin on oltava $\sum_{t=1}^{v_i} c_{i,t}(\mathbf{x}) = 0$ eli $c_{i,j}(\mathbf{x}) = 0$ kaikilla $j = 1, \ldots, k$. Nyt $c_{i,j}$:n määritelmästä saadaan

$$E_{\mathbf{x}}(u_i) \geq E_{(j,\mathbf{x}_{-i})}(u_i) \text{ kaikilla } j = 1, \ldots, v_i,$$

joten seurauksen 3.4 nojalla $\mathbf{x}$ on Nashin tasapaino. Täten jokaisella $k \geq 2$ pelaajan pelillä on olemassa Nashin tasapaino. $\square$

Lähdeluettelo

[1] Anna R. Karlin, Y. Peres: *Game Theory, Alive.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2017.

[2] A.X. Jiang, K. Leyton-Brown: *A Tutorial on the Proof of the Existence of Nash Equilibria.* University of British Columbia, 2007, saatavilla verkosta: https://www.cs.ubc.ca/tr/2007/tr-2007-25