



TEKNILLINEN TIEDEKUNTA

**LINEAARISEN PALKKITEORIAN JA  
GEOMETRISESTI EPÄLINEAARISEN FEM  
RATKAISUN VERTAILU**

Janne Pitkänen

Konetekniikka  
Kandidaatintyö  
Toukokuu 2021

# TIIVISTELMÄ

Lineaarisen palkkiteorian ja geometrisesti epälineaarisen FEM ratkaisun vertailu

Janne Pitkänen

Oulun yliopisto, Konetekniikan tutkinto-ohjelma

Kandidaatintyö 2021, 42 s.

Työn ohjaaja yliopistolla: Hannu Koivurova, TkT

Palkkirakenteet ovat hyvin keskeisessä asemassa teollisuudessa monikäyttöisyytensä vuoksi. Taivutustilanteissa ollaan kiinnostuneita palkin poikkileikkauksen jännityskentästä, sillä se kertoo rakenteen lujuudesta. Standardit ja normit puolestaan antavat rajoitteita palkin eri pisteiden siirtymille. Insinöörien olisi hyvä tietää, tilanteesta riippuen, tuleeko mallinnus suorittaa geometrisesti lineaarisella vai epälineaarilla teoriolla. Tämän työn teoriaosuudessa johdetaan taipumaviivan yhtälöt kahdelle lineaariselle palkkiteorialle ja läpikäydään epälineaarisuuden muotoja. Teoriaosuuden jälkeen suoritetaan geometrisesti lineaarisen ja epälineaarisen teorioiden vertailu esimerkkitehtävällä FEM-ohjelmassa.

Tunnetuin lineaarisista palkkiteorioista on Euler-Bernoullin taivutusteoria, missä leikkausvoiman vaikutus jätetään huomiotta ja oletetaan, että palkin poikkileikkaukset säilyttävät deformaatioissa tasomaisuutensa. Timoshenkon palkkiteoria puolestaan huomioi leikkausvoiman aiheuttaman leikkausjännityksen, mikä aiheuttaa palkin poikkileikkauksissa deplanaation. Materiaalista ja reunaehdoista johtuvat epälineaarisuudet esitellään lukijalle yksinkertaisilla analyttisillä esimerkeillä. Geometrisesta epälineaarisuudesta käydään läpi taivutetun palkin kokema jännitysjäykistyminen tasotilanteessa. Työn tavoitteena on näyttää lukijalle, mitä geometrisesti lineaarinen mallinnus jättää huomiotta taivutetun palkin laskennassa ja kuinka merkittävää tämä on tulosten kannalta. Lisäksi kerrotaan, milloin laskenta olisi suoritettava geometrisesti epälineaarilla teoriolla ja muutamia käytännön peukalosääntöjä helpottamaan tilanteiden tunnistamista. Lukija voi hyödyntää työtä ja sen lähdekirjallisuutta erilaisiin ja vaativimpiin rakennelmiin.

Laskentaesimerkin saaduista taipumaviivoista voidaan päätellä, että molemmat teorat ovat käyviä kyseiselle palkille ja kuormitukselle. Positiiviset kalvovoimat lisäävät rakenteen taivutusjäykkyyttä huomattavasti, jolloin rakenne vastustaa sitä taivuttavia voimia ja näin ollen taipuu vähemmän. Tämä jännitysjäykistymiseksi kutsuttu ilmiö huomioidaan geometrisesti epälineaarissa teoriassa jännitysjäykkyydsmatriisilla, joka summataan rakenteen elastiseen jäykkyydsmatriisiin. Laskentaesimerkissä käytetty molemmista päistä niveltuettu palkki ei pääse pitenemään, jolloin sen sisäiset kalvovoimat kasvavat suuresti verrattuna toisesta päästä aksiaalissuunnassa vapaasti liikkuvaan palkkiin. Geometrisesti lineaarinen teoria laskee ainoastaan elastisen jäykkyydsmatriisin, jolloin tietyissä tilanteissa siirtymät voivat kasvaa älyttömän suuriksi. Kalvovoimat voivat olla myös negatiivisia, jolloin aiheutuu rakenteen nurjahtaminen. Analogisesti palkkirakenteelle voidaan samankaltaista laskentaa suorittaa levy- ja kuorirakenteille.

Peukalosääntöihin kuuluu palkkirakenteissa sallitut venymät, jotka ovat lähteistä riippuen 2–5 % ja maksimitaipuma, mikä voi korkeintaan olla puolet palkin korkeudesta. Lisäksi suunnittelijan tulisi tarkastella lineaarisella teorialla laskettua rakenteen deformaatiota luonnollisessa skaalauksessa ja nähtäessä selvää muodonmuutosta tulisi käyttää geometrisesti epälineaarista teoriaa. Epäiltäessä tulosten luotettavuutta tulisi käyttää geometrisesti epälineaarista teoriaa.

*Asiasanat: Euler-Bernoulli, Timoshenko, taivutusteoria, elementtimenetelmä, palkkirakenne, jännitysjäykistyminen*

# ABSTRACT

Comparison of linear beam theory and geometrically nonlinear FEM solution

Janne Pitkänen

University of Oulu, Degree Programme of Mechanical Engineering

Bachelor's Thesis 2021, 42 pp.

Supervisor at the university: Hannu Koivurova, D.Sc (Tech)

Beam structures play a very central role in industry due to their multifunctionality. In bending situations, there is interest in the stress state of the cross-section of the beam, as it indicates the strength of the structure. Standards and norms, on the other hand, provide limitations on the displacements of different points in the beam. It would be good for engineers to know, depending on the situation, whether modelling should be carried out with geometrically linear or nonlinear theory. The theoretical part of this thesis derives the equations of the deflection curve for two linear beam theories and undergoes forms of nonlinearity. After the theory section, a comparison of linear beam theory and geometrically nonlinear FEM solution is carried out with an example.

The most famous of the linear beam theories is Euler-Bernoulli's bending theory, where the effect of shearing force is ignored, and it is assumed that the cross-sections of the beam retain their planeness in deformation. Timoshenko's beam theory, on the other hand, takes into account the shearing stress caused by the shearing force, which causes deformation in the cross-sections of the beam. Nonlinearities due to material and boundary conditions are presented to the reader with simple analytical examples. Geometric nonlinearity is reviewed by the stress stiffening experienced by the bent beam in plane. The aim of the thesis is to show the reader what geometrically linear modelling ignores in the calculation of the bent beam and how significant this is in terms of results. In addition, it is explained when the calculation should be carried out with a geometrically nonlinear theory and a few practical thumb rules to facilitate the identification of these situations. The reader can utilize the thesis and its source literature for various and more demanding structures.

The deflection curves obtained from the calculation example suggest that both theories are valid for the used beam and load. Positive membrane forces greatly increase the bending stiffness of the structure, causing the structure to resist transverse forces and thus bend less. This phenomenon, known as stress stiffening, is taken into account in geometrically nonlinear theory by a stress stiffness matrix summed to the elastic stiffness matrix of the structure. The beam pinned at both ends used in the calculation example cannot lengthen, causing its internal membrane forces to increase greatly compared to the axially free beam at one end. Geometrically linear theory calculates only the elastic stiffness matrix, which means that in certain situations deflections can become incredibly large. Membrane forces can also be negative, causing the structure to buckle. By analogy, similar calculation of the beam structure can be performed on plate and shell structures.

The rules of thumb include strains allowed in beam structures, which are between 2% and 5% depending on the sources, and the maximum displacement, which can be at most half the height of the beam. In addition, the designer should look at the deformation of the structure calculated by linear theory in natural scaling and when seeing clear deformation, geometrically nonlinear theory should be used. When doubting the reliability of the results, a geometrically nonlinear theory should be used.

*Keywords: Euler-Bernoulli, Timoshenko, bending theory, finite element method, beam structure, stress stiffening*

# SISÄLLYSLUETTELO

TIIVISTELMÄ

ABSTRACT

SISÄLLYSLUETTELO

MERKINNÄT JA LYHENTEET

1 Johdanto .....	9
2 Lineaarinen palkkiteoria.....	11
2.1 Suoran palkin puhdas taivutus .....	11
2.2 Euler-Bernoullin palkkiteorian mukainen differentiaaliyhtälö .....	15
2.3 Timoshenkon palkkiteoria.....	17
3 Epälineaarisuuden muotoja .....	20
3.1 Materiaalinen epälineaarisuus .....	20
3.2 Reunaehdoista johtuva epälineaarisuus.....	22
3.3 Geometrinen epälineaarisuus .....	25
3.3.1 Deformaation kuvaaminen kontinuumissa .....	27
3.3.2 Jännitysjäykkyydsmatriisi palkkielementeille tasossa.....	28
4 Lineaarisen ja geometrisesti epälineaarisen ratkaisun vertailua .....	31
4.1 Laskentamallit 1 ja 2 .....	31
4.2 Elementtiverkko ja verkon konvergenssitarkastelu .....	32
4.3 Laskentamallien 1 ja 2 tulokset.....	33
4.4 Tulosten tarkastelu .....	37
5 Yhteenveto .....	39

LÄHDELUETTELO

# MERKINNÄT JA LYHENTEET

$A$	palkin poikkileikkauksen pinta-ala
$a$	palkin poikkileikkauksen leveys
$b$	palkin poikkileikkauksen korkeus
$C$	Cauchy-Green muodonmuutostensori
$E$	Green-Lagrange venymätensori
$E$	materiaalin kimmomoduuli
$F$	deformaatiogradienttitensori
$F$	vetävä tai puristava voima
FEM	elementtimenetelmä (finite element method)
$G$	materiaalin leikkausmoduuli
GNL	geometrinen epälinearisuus (geometric nonlinearity)
$H$	siirtymägradientti
$I$	yksikkötensori/-matriisi
$I$	neliömomentti
$I_z$	neliömomentti z-akselin suhteen
$K$	koko rakenteen jäykkyyismatriisi
$K_E$	koko rakenteen elastinen jäykkyyismatriisi
$K_\sigma$	koko rakenteen jännitysjäykkyyismatriisi
$k_E$	elementin elastinen jäykkyyismatriisi
$k_\sigma$	elementin jännitysjäykkyyismatriisi
$L$	palkin pituus
$M_t$	taivutusmomentti
$M_{tz}$	taivutusmomentti z-akselin ympäri
$N_i$	rakenteen $i$ normaalivoima
$P$	kuormitusmatriisi
$Q$	leikkausvoima
$q$	jakautunut viivakuormitus
$R$	jäykän kappaleen rotaatiotensori
RF1	vaakasuntainen tukivoima (reaction force in the horizontal direction)
RF2	pystysuntainen tukivoima (reaction force in the vertical direction)
$S$	voima – siirtymä yhtälöryhmä
$U$	siirtymämatriisi, oikea venytystensori
$U$	venymäenergia
$u$	siirtymävektori

$u_i$	rakenteen $i$ siirtymä
$\nu$	palkin kimmoviiva
$\mathbf{X}$	materiaalikoordinaattivektori
$\mathbf{x}$	spatiaalikoordinaattivektori
$y$	palkin neutraalitasosta tai $-$ -akselista mitattu etäisyys
$\alpha$	leikkauskorjauskerroin
$\delta$	kontaktieron pituus
$\varepsilon$	venymä
$\varepsilon_{xx}$	normaalivenymä
$\kappa$	kimmoviivan kaarevuus
$\nu$	poissonin vakio
$\rho$	kimmoviivan kaarevuussäde
$\sigma_t$	palkin poikkileikkauksen taivutusjännitys
$\sigma_x$	palkin poikkileikkauksen normaalijännitys
$\sigma_y$	materiaalin myötöraja
$\tau_{xy}$	keskiarvoistettu leikkausjännitys
$\varphi$	kulmamuutos



# 1 JOHDANTO

Palkkeja käytetään hyvin monipuolisesti teollisuudessa ja näitä rakenteita suunnittelevien tulee osata mallintaa ja analysoida, niin lineaarisia, kuin epälineaarisia tapauksia. Taivutukselle altistuneiden rakenteiden mitoituksessa ollaan erityisen kiinnostuneita poikkileikkauksen jännityskentästä, sillä se kertoo rakenteen lujuudesta. Lisäksi standardit ja normit antavat rajoituksia myös palkin eri pisteiden siirtymille. (Salmi ja Pajunen 2010, s. 207) Ratkaisujen tuottaminen ja niiden tulkitseminen pienten ja suurten siirtymien teorioilla on alan insinöörin hyvä osata.

Lineaarisista palkkiteorioista tunnetuin on Euler-Bernoullin malli, missä oletetaan, että deformaatioissa palkin poikkileikkauksen suuntainen taso säilyy muuttumattomana, eli siinä ei tapahdu leikkausvoiman vaikutuksesta venymistä. Tämän yksinkertaisuuden vuoksi malli on rajoittunut pitkille ja hoikille palkeille. Yleisin palkkiteoria, mikä käsittelee edellä mainitun leikkausvoiman vaikutuksen, on Timoshenkon taivutusteoria. Tässä mallissa palkin poikkileikkaus ei enää pysy kohtisuorassa sen deformaatioakseliin nähden, vaan kokee käyristymisen eli deplanaation johtuen leikkausvoiman aiheuttamista leikkausjännityksistä. (Salmi ja Pajunen 2010, s. 171–172)

Nykypäivänä elementtimenetelmä on tärkeä työkalu insinöörien suunnittelu- ja optimointityössä ja yhä enemmän tarvitaan epälineaaristen ongelmien ratkaisukykyä. Todellisissa suunnittelutilanteissa geometriat voivat olla hyvinkin monimutkaisia ja rakenteiden deformaatiot tai rotaatiot suuria, joten lineaariset teoriat eivät enää toimi. Lisäksi epälineaarisuutta voi tulla laskentamalliin materiaalista, kontaktista ja dynaamisesta kuormituksesta. Epälineaarisessa FE-analyysissä on tärkeää osata lujuusopin ja sen numeerisen soveltamisen perusteet. (Wriggers 2008, s. 1–3)

Tämän työn teoriaosuudessa keskitytään edellä mainittujen lineaaristen palkkiteorioiden kimmoviivan yhtälön määrittämiseen ja yleisesti epälineaarisuuden muotoihin, joista tarkemmin geometriseen epälineaarisuuteen. Työssä ei käsitellä lineaaristen teorioiden FEM-formulointia ja muiden epälineaarisuuksien laskentaa elementtimenetelmällä. Lineaaristen teorioiden johtaminen tehdään analyttisesti käytännöllisyyden vuoksi, sillä useimmiten palkkirakenteita voidaan laskea analyttisesti ja näin ollen FEM-formulointi ei vaikuta ratkaisun lopputulemaan mitenkään. Lopuksi käydään läpi laskentaesimerkki kaupallisella FEM-ohjelmalla käyttäen Euler-Bernoullin palkkielementtiä ilman

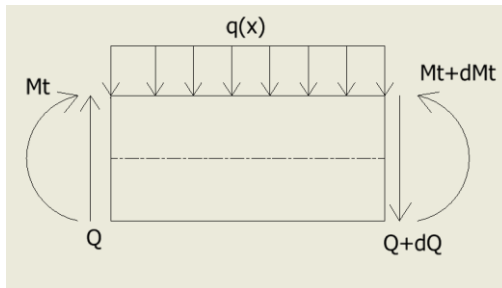
geometrista epälineaarisuutta ja sen kanssa. FEM-ohjelmiston käyttöä ei tarkemmin kuvailla, mutta harjaantuneelle lukijalle mallinnusprosessi on tutumpi. Tämän jälkeen tehdään tulosten tarkastelu, missä vertaillaan suurten siirtymien huomioon ottavan laskennan eroavaisuutta pienten siirtymien teoriaan. Tarkastelussa tuodaan esille, milloin lineaarinen teoria ei enää sovellu kuvaamaan rakenteen deformaatiota ja tulisi siirtyä geometrisesti epälineaariseen laskentaan. Lopussa esitetään myös muutamia käytännön peukalosääntöjä, joiden avulla voi suunnittelija tunnistaa tilanteen, käyttääkö pienten siirtymien teorian sijasta suurten siirtymien teoriaa.

## 2 LINEAARINEN PALKKITEORIA

Tässä osiossa käsitellään suoran palkin taivutusta Euler-Bernoullin ja Timoshenkon teorioiden pohjalta. Aiheen johdattelu alkaa puhtaasta suorasta taivutuksesta, jonka jälkeen voidaan syventyä teknisen taivutusteorian eli Euler-Bernoullin palkkiteorian mukaiseen kimmoviivan differentiaaliyhtälön muodostamiseen. Tämän jälkeen käsitellään leikkausvoiman huomioonottavan laskennan vaikutusta kimmoviivaan.

### 2.1 Suoran palkin puhdas taivutus

Puhtaassa taivutuksessa palkkia kuormittaa ainoastaan taivutusmomentti  $M_t(x)$ , joka on vakio, jolloin  $M_t(x) = M_t$  ja leikkausvoima  $Q(x) \equiv 0$ . Nämä yksinkertaistukset voidaan johtaa kuvan 1 mukaisesta palkin differentiaalelementistä, missä elementin pituus on infinitesimaalinen  $dx$ , eli se approksimoidaan niin pieneksi, ettei siihen kohdistu pistemäistä kuormitusta. (Salmi ja Pajunen 2010, s. 168–170)



Kuva 1. Palkin infinitesimaalinen differentiaalelementti (mukaihen Salmi ja Pajunen 2010).

Elementille voidaan tehdä seuraavat tasapainoyhtälöt kuvan 1 perusteella

$$\uparrow + Q - (Q + dQ) - q(x)dx = 0 \quad (1)$$

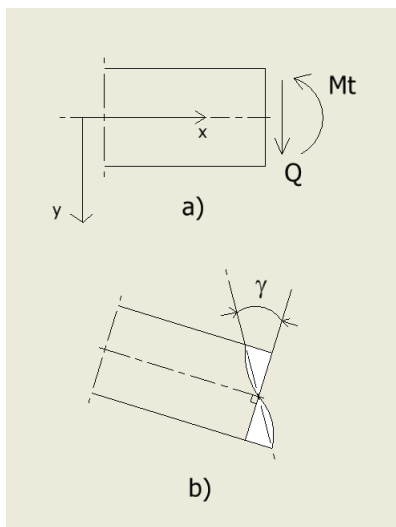
$$-M_t + (M_t + dM_t) - Qdx = 0, \quad (2)$$

missä  $q(x)$  on palkkia kuormittava jakautunut voima. Ratkaisuksi saadaan seuraavat differentiaaliyhtälöt

$$\frac{dQ}{dx} = -q(x) \quad \frac{dM_t}{dx} = Q(x). \quad (3)$$

Edellä muodostettuja differentiaaliyhtälöitä käytetään hyväksi kimmoviivan linearisoidun differentiaaliyhtälön muodostamisen yhteydessä, sillä ne kertovat kuormitusten välisistä yhteyksistä.

Pelkästään taivutusmomentilla kuormitetun palkin symmetrialeikkaus pysyy deformatiivisena tilassa symmetrialeikkauksena ja näin ollen leikkaamalla palkista mistä kohdasta tahansa, sen akselin suuntainen elementti, niin saadaan aina muodostettua poikkileikkaustasosta symmetriapoikkileikkaus. Tämä havainto symmetriasta on johtanut Bernoullin hypoteesiin: ”Palkin poikkileikkaus säilyy tasona, joka on kohtisuorassa palkin pituussuuntaisia säikeitä vastaan”. Todellisuudessa poikkileikkausta kuormittaa myös leikkausvoima  $Q$ , mikä tarkoittaa, ettei käsitellä enää puhdasta taivutusta symmetriaoletuksineen. Kuvassa 2 nähdään, miten leikkausvoimasta johtuvien leikkausjännitysten ansiosta poikkileikkaus käyristyy, eli siihen muodostuu liukuma ja siten tasomaisuus häviää. On todettu, että käyrityksen vaikutus poikkileikkauksen jännityskenttään on varsin mitätön, joten se jätetään usein huomiotta. (Salmi ja Pajunen 2010, s. 171)

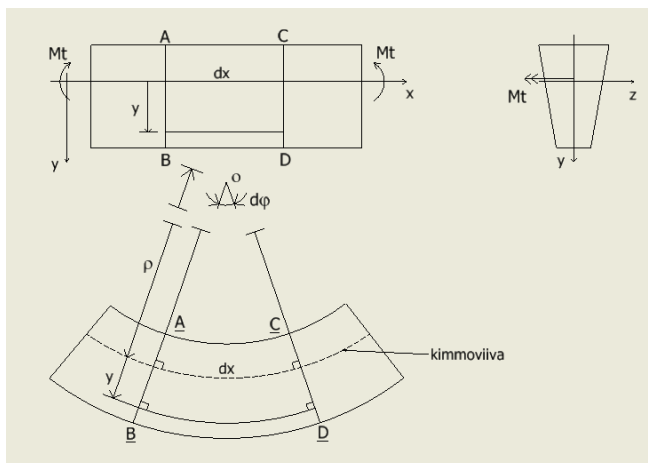


Kuva 2. Poikkileikkauksen käyristyminen palkissa (mukaiillen Salmi ja Pajunen 2010).

Palkkiteoriassa esiintyy Bernoullin hypoteesin lisäksi toinen yksinkertaistus, missä poikkileikkaus oletetaan pysyvän deformaatioissa yhtenevänä, mutta todellisuudessa tämä ei ole mahdollista edes puhtaan taivutuksen tilanteessa. Poikkileikkauksessa tapahtuu niin sanottu poikittaiskutistuminen, missä poikkileikkaustason rajaamat ääriviivat venyvät. Tämänkin efektin vaikutus on vähäinen, joten se jätetään yleensä huomioimatta. Bernoullin hypoteesi ja poikittaiskutistuminen luovat perustan tekniselle

taivutusteorialle, jota yleisemmin kutsutaan Euler-Bernoullin palkkiteoriaksi. Teorialla on useampia kehittäjiä, mutta niistä mainittakoon sveitsiläinen Jacob Bernoulli (1645–1705), ranskalainen Louis-Marie Navier (1785–1836) ja sveitsiläinen Leonhard Euler (1707–1783). (Salmi ja Pajunen 2010, s. 171)

Suoran palkin puhtaassa taivutuksessa sen differentiaalelementissä  $dx$  sijaitsevat poikkileikkaustasot AB ja CD kääntyvät toisiinsa verraten kulman  $d\varphi$  siten, että ne säilyttävät kohtisuoruutensa palkin pituussuuntaisia säikeitä kohtaan ja näin ollen säikeistä muodostuu ympyränkaaria, joilla on sama keskipiste. Nämä säikeet venyvät palkin kuperalla puolella ja puolestaan puristuvat koveralla puolella. Tietyissä kohdassa palkin korkeussuunnassa kulkee palkin pituussuuntainen säie, joka ei veny tai puristu, vaan pelkästään taipuu ja tämä säie yhdessä muiden saman tason säikeiden kanssa muodostaa neutraalitason, joka deformaatioissa taipuu neutraalipinnaksi. Asetetaan koordinaatisto XYZ siten, että XZ-taso muodostaa palkin neutraalitason ja XY-taso poikkileikkauksen symmetriatasen. (Salmi ja Pajunen 2010, s. 172)



Kuva 3. Palkin deformaatio ja pitkittäissäikeen venyminen, missä kaarevuuskeskipiste  $o$  (mukaillen Salmi ja Pajunen 2010).

Kuvassa 3 esitetyn alkutilan taipumatonta  $x$ -akselia kuvaillaan palkin akselina ja sen taipunutta muotoa lopputilassa sanotaan palkin kimmoviivaksi. Puhtaan taivutuksen tilanteessa kimmoviiva on  $\rho$ -säteinen ympyränkaari ja yleisesti ottaen  $\rho$ :ta pidetään kimmoviivan kaarevuussäteenä. Tämän käänteisarvoa kutsutaan kimmoviivan kaarevuudeksi, joka merkitään  $\kappa = 1/\rho$ . Aikaisemmin tehdyn koordinaatistovalinnan pohjalta määrättiin  $z$ -akseli palkin neutraalitasoon ja näin ollen se muodostaa poikkileikkauksen neutraaliakselin. Kuvassa 3 näkyvän differentiaalisen  $dx$  pituisen

palkin elementin ABCD alku- ja lopputilojen perusteella voidaan laskea x-akselista etäisyydellä  $y$  olevan viivaelementin venymäksi

$$\varepsilon_x = \frac{(\rho+y)d\varphi-dx}{dx} = \frac{(\rho+y)d\varphi-\rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho}. \quad (4)$$

Kaavasta (4) huomataan, että palkin pituussuuntaisten säikeiden venyminen on suoraan verrannollinen sen neutraalitasosta mitattuun etäisyyteen  $y$ . Tämä on seurausta Bernoullin hypoteesista ja näin ollen on vain kinemaattinen ominaisuus, eikä riipu käytetystä materiaalimallista, jolloin se sopii kimmoisalle tai plastiselle materiaalille. (Salmi ja Pajunen 2010, s. 173)

Palkin taipuneessa pituussuuntaisessa säikeessä vaikuttaa samansuuntainen jännitys, joka tässä tapauksessa on x-akselin suuntainen  $\sigma_x$ . Pienten siirtymien teoriassa tasapainoyhtälöt kirjoitetaan rakenteen alkutilalle eli nyt poikkileikkauksen alkuperäiselle asemalle ja suunnalle. Hooken lain ja kaavan (4) avulla saadaan jännitysvenymäyhteydeksi

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E\frac{y}{\rho}, \quad (5)$$

missä  $E$  on palkin kimmomoduuli. Poikkileikkauksen normaalijännitys  $\sigma_x$  oletetaan tasan jakautuneeksi poikkileikkauksen leveyssuunnassa, kun taas lineaarisesti jakautuneeksi poikkileikkauksen kohdalla palkin pituussuunnassa. Yleensä tätä normaalijännitystä kutsutaan taivutusjännitykseksi ja merkitään  $\sigma_t$ . Käytettäessä Hooken lakia otaksutaan, että materiaali on lineaarisesti kimmoista ja isotrooppista, jolloin myös poikkileikkauksen kimmomoduuli  $E$  on vakio. Tällöin puhtaassa taivutuksessa poikkileikkauksen neutraaliakseli kulkee poikkileikkauksen pintakeskiön kautta. Lisäksi suoran taivutuksen tilanteessa kuormitustason tulee sisältää poikkileikkauksen toinen pääakseli, jotta voidaan olettaa kuormitukseksi vain taivutusmomentti  $M_{tz}$ . (Salmi ja Pajunen 2010, s. 174–175)

Taivutusmomentti z-akselin ympäri lasketaan poikkileikkauksesta pintaintegraalina, kun sen differentiaalista pintaelementtiä  $dA$  kuormittaa normaalivoima  $\sigma_x dA$

$$M_{tz} = \iint y \sigma_x dA, \quad (6)$$

missä  $y$  on momenttivarsi voiman vaikutuspisteestä  $z$ -akseliin. Hyödyntämällä tietoa kaavasta (5) ja lineaarisesti kimmoisasta materiaalmallista saadaan momentiksi

$$M_{tz} = \frac{E}{\rho} \iint y^2 dA = \frac{E}{\rho} I_z, \quad (7)$$

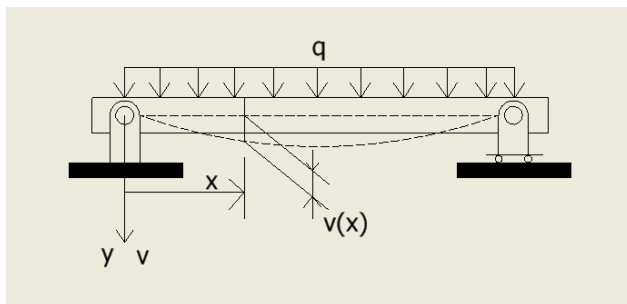
jossa integroinnista saatu tulos on poikkipintasuure  $I_z$ , mitä kutsutaan pinnan toiseksi momentiksi ja tässä tapauksessa neliömomentiksi  $z$ -akselin suhteen. Nyt voidaan merkitä momenttia  $M_{tz} \equiv M_t$ , sillä käsitellään puhdasta taivutusta, joten yhtälö (7) saa muodon

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_t}{EI_z} \quad (8)$$

Yhtälön (8) nimittäjässä olevaa tuloa  $EI_z$  sanotaan poikkileikkauksen taivutusjäykkyydeksi. Kaava (8) osoittaa, että palkin kimmoviivan kaarevuus on suoraan verrannollinen taivutusmomenttiin ja kääntäen verrannollinen käsittelyn alaisena olevan poikkileikkauksen taivutusjäykkyyteen. (Salmi ja Pajunen 2010, s. 177)

## 2.2 Euler-Bernoullin palkkiteorian mukainen differentiaaliyhtälö

Rakenteita suunniteltaessa kuljetaan standardien ja normien mukaisesti, jotka määrittelevät suunnittelijalle palkin tiettyjen pisteiden sallitut siirtymät, esimerkiksi ulokepalkin vapaan pään pystysiirtymä täytyy olla pienempi entä  $L/150$  ja  $L$  on palkin pituus. Materiaaleilla, joilla on poikkeuksellisen matala taivutusjäykkyys johtuen pienestä kimmokertoimesta, voi pystysiirtymälle asetettu raja-arvo ylittyä helposti. Kohdassa 2.1 käydyn suoran puhtaan taivutuksen tilanteessa kuormitustaso sisältää palkin kaikkien poikkileikkausten toisen pääakselin ja palkin pituussuuntainen akseli taipuu tasokäyrämäiseksi kimmoviivaksi. (Salmi ja Pajunen 2010, s. 207)



Kuva 4. Palkin kimmoviiva, missä  $v = v(x)$  (mukaillen Salmi ja Pajunen 2010).

Kuvan 4 mukaisesti etäisyydellä  $x$  olevan poikkileikkauksen keskipisteen siirtymää  $y$ -akselin eli pääakselin suunnassa kutsutaan taipumaksi. Kimmoviivan kaarevuussäteelle  $\rho$  voidaan osoittaa kaavan (8) avulla kohdassa  $x$  pätevän yhtälö

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{|M_t(x)|}{EI(x)}, \quad (9)$$

kun  $\rho > 0$ . Tasokäyrän  $v(x)$  kaarevuudelle  $\kappa$  on määritelty lausekkeella

$$\kappa(x) = \frac{v''(x)}{[1+(v'(x))^2]^{3/2}} \quad (10)$$

ja lisäksi tiedetään, että  $\frac{1}{\rho} = |\kappa|$ . Derivaatoista voidaan käyttää myös merkintää  $v' \equiv dv/dx$  ja  $v'' \equiv d^2v/dx^2$ . Käytettäessä pienten siirtymien teoriaa eli rajoitutaan loiviin siirtymäkenttiin, niin voidaan tehdä linearisointi tasokäyrän kaltevuudelle, jolloin  $|v'| \ll 1$  ja kaarevuus voidaan ilmaista yksinkertaisemmin  $\kappa(x) \approx v''(x)$ , mistä taas seuraa

$$\frac{1}{\rho} = |\kappa| \approx v''(x). \quad (11)$$

Yhtälöistä (9) ja (11) voidaan kirjoittaa

$$|v''(x)| \approx \frac{|M_t(x)|}{EI(x)}. \quad (12)$$

Puhtaassa taivutuksessa taivutusmomentti on positiivinen, kun palkin pituussuuntaiset säikeet venyvät sen  $y$ -akselin positiivisella puolella, jolloin kaarevuus on negatiivinen ja taas päinvastoin. Eli taivutusmomentti on aina vastakkaismerkkinen kaarevuuden kanssa. Tällöin kaavasta (12) voidaan poistaa itseisarvomerkki ja vaihdellaan hieman termejä, niin saadaan Euler-Bernoullin palkkiteorian mukainen linearisoitu differentiaaliyhtälö

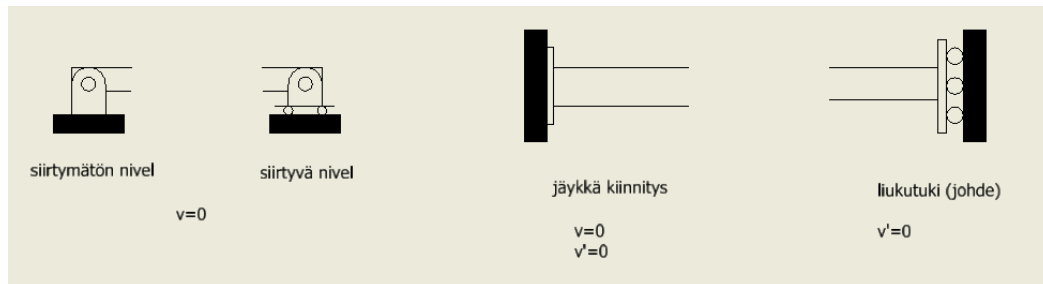
$$EIv'' = -M_t \quad (13)$$

Differentiaaliyhtälöiden (3) avulla ja tiedolla, että yleensä palkin materiaali on homogeenista ja poikkileikkaus on vakio koko palkin alueella, saadaan määritettyä yhteys kuormituksen ja taipuman välille

$$EIv''' = -Q \quad EIv'''' = q, \quad (14)$$



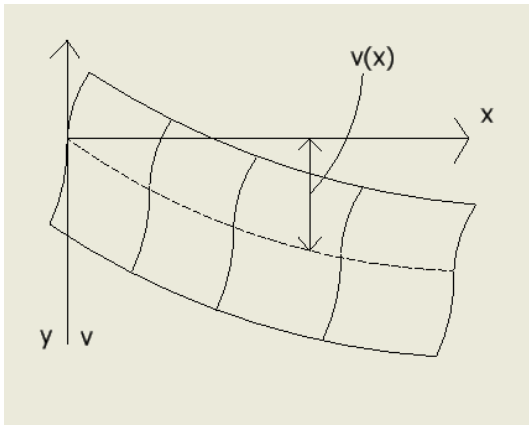
missä homogeenisuudesta ja vakiopaksuudesta johtuen taivutusjäykkyys  $EI$  on vakio ja on viety derivaatan ulkopuolelle. Yleensä kimmoviivan yhtälö määritetään taivutusmomentin  $M_t(x)$  avulla, joka saadaan vapaakappalekuvasta. Jotta tämä yhtälö saadaan määritettyä kaavoista (13) tai (14) tarvitaan integroinnista muodostuvien vakioiden selvittelyyn reunaehtoja ja niistä yleisimmät on esitetty kuvassa (5). (Salmi ja Pajunen 2010, s. 207–208)



Kuva 5. Yleisimmät kinemaattiset reunaehdot (mukaiillen Salmi ja Pajunen 2010).

## 2.3 Timoshenkon palkkiteoria

Yleisesti on todettu, että leikkausmuodonmuutos on pieni suhteutettuna palkin taipumisen aiheuttamaan deformaatioon ja tästä johtuen jätetään huomiotta staattisessa laskennassa. Leikkausmuodonmuutoksen vaikutus kuitenkin suurenee, kun palkin poikkileikkauksen dimensiot kasvavat suhteessa palkin pituuteen eli kun käsitellään paksuja ja lyhyitä palkkeja. Dynaamisissa ongelmissa leikkausmuodonmuutos on merkittävässä asemassa, mikä näkyy esimerkiksi palkin värähtelyn korkeammassa ominaisuudoissa ja palkin muodostamassa vasteessa sitä iskeville voimille. Timoshenkon palkkiteoria perustuu kuvan 2 mukaiselle tilanteelle, missä taso on deformoitumattomassa alkutilassa kohtisuorassa palkin pituussuuntaista akselia kohtaan, mutta ei enää deformoituneessa tilassa, vaikka säilyttääkin tasomaisuutensa. Kasvattamalla lisää poikkileikkauksen mittoja palkin syvyys- tai korkeussuunnassa suhteutettuna palkin pituuteen olettaen tasomaisuudesta häviää ja tapahtuu leikkauslukkiutumiseksi kutsuttu ilmiö. Tästä johtuen Timoshenkon palkkiteoria pätee vain sellaisille palkeille, missä leikkauslukkiutumisen vaikutus on mitättömän pieni. Tämä tarkoittaa sitä, että Timoshenkon palkkiteoria ottaa huomioon leikkausvoiman aiheuttaman muodonmuutoksen, mutta sen täytyy olla suuruudeltaan pieni. (Iwakuma et al. 1981, s. 119)



Kuva 6. Pelkästään leikkausvoimasta johtuva palkin taipuminen (mukaillen Timoshenko 1955).

Kaikkien palkin poikkileikkausten keskipisteet säilyvät pystysuorina ja liukuvat toisiinsa nähden kuvan 6 mukaisesti. Sen vuoksi, pelkästään leikkauksesta johtuen, tasokäyrän kaltevuus tietyssä kohtaa palkkia on yhtä suuri sen kohdan poikkileikkauksen keskipisteen leikkausvenymän kanssa. Tämä sama pätee palkin kaikille poikkileikkauksille, mikäli leikkausvoima on vakio koko palkissa. Merkitsemällä leikkausvoimasta johtuvaa taipumaa  $v(x)$  saadaan palkin jokaiselle poikkileikkaukselle kaltevuuden lauseke

$$\frac{dv(x)}{dx} = \frac{(\tau_{xy})_{y=0}}{G} = \frac{\alpha Q}{AG}, \quad (15)$$

missä  $Q/A$  on keskiarvoistettu leikkausjännitys  $\tau_{xy}$ , joka lasketaan leikkausvoiman ja poikkipinta-alan suhteella.  $G$  on materiaalin leikkausmoduuli ja  $\alpha$  numeerinen arvo, millä kerrotaan keskiarvoistettua leikkausjännitystä, jotta saataisiin leikkausjännitys poikkileikkauksen keskipisteessä. (Timoshenko 1955, s. 170–171) Sillä keskipisteessä on leikkausjännitysjakautuman maksimikohta ja se häviää palkin reunoilla. Leikkausjännitysjakautuma palkin korkeussuunnassa mukailee paraabelia palkeilla, joilla on suorakaiteen muotoinen poikkileikkaus eli voidaan todeta jakauman riippuvuus palkin profiilista. (Timoshenko 1955, s. 118)

Numeerinen arvo  $\alpha$  tunnetaan myös nimellä leikkauskorjauskerroin ja sille löytyy useita määritelmiä, mikä johtuu tehdyistä lisätutkimuksista värähtelevien Timoshenko-palkkien taajuusspektreissä, sillä ne ovat antaneet epätarkkoja tuloksia. (Gruttmann ja Wagner 2001, s. 203) Timoshenko itse määrittää leikkauskorjauskertoimen laskiessaan maksimileikkausjännitystä palkin neutraaliakselilla eli poikkileikkausten keskipisteissä.

Esimerkiksi suorakaideprofiilisella palkilla korjauskerroin on  $3/2$  ja ympyräprofiililla  $4/3$ . Staattisessa laskennassa palkin kuormitus  $q$  on jatkuva, joten myös leikkausvoima  $Q$  on jatkuva funktio ja sitä voidaan derivoida  $x$ :n suhteen. Ainoastaan leikkausvoiman aiheuttamaksi kaarevuuden differentiaaliyhtälöksi saadaan yhtälön (15) avulla

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = \frac{\alpha}{AG} \frac{dQ(x)}{dx} = -\frac{\alpha}{AG} q. \quad (16)$$

Merkitään  $v(x) = v$ ,  $\frac{d^2v}{dx^2} = v''$  ja lasketaan puhtaan taivutuksen mukainen differentiaaliyhtälö (13) yhteen yhtälön (16) kanssa

$$v'' = -\frac{1}{EI} \left( M_t + \frac{\alpha EI}{AG} q \right), \quad (17)$$

niin saadaan johdettua Timoshenkon palkkiteorian mukainen kimmoviivan differentiaaliyhtälö. Kaavaa (17) käytetään, kun suoritetaan laskentaa, missä leikkausvoiman aiheuttamat leikkausjännitykset on huomioitava. (Timoshenko 1955, s. 171) Kuvan 5 mukaisia kinemaattisia reunaehtoja hyödynnetään myös Timoshenkon palkkimallissa, jotta voidaan integroimalla kaavaa (17) selvittää taipumaviivan yhtälö.

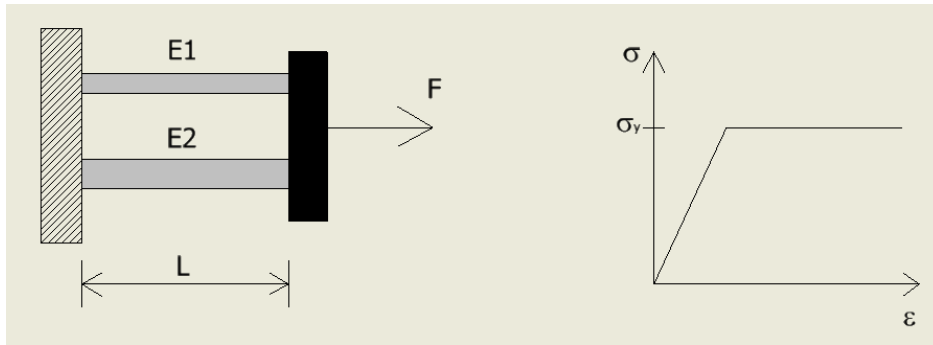
### 3 EPÄLINEAARISUUDEN MUOTOJA

Kontinuumimekaniikassa esiintyy useampia epälineaarisuuden aiheuttajia, jotka ovat luonteeltaan geometrisia tai materiaalisia. Näiden ongelmien mallintamiseen ja ratkaisemiseen on kehitetty lukuisia menetelmiä ja algoritmeja. Tässä kappaleessa käsitellään yleisesti epälineaarisuutta ilmiönä ja sen aiheuttavia tekijöitä, mutta keskitytään enemmän palkkirakenteen geometriseen epälineaarisuuteen. Kappaleen tarkoituksena on tutustuttaa lukija epälineaarisuuden muotoihin, eikä läpikäydä syventävästi ratkaisumenetelmiä ja FEM-formulointia. Tutustuttaminen materiaaliseen ja reunaehdoista riippuvaan epälineaarisuuteen tehdään selventävin esimerkein, jotka ovat niin yksinkertaisia, että ne voidaan epälineaarisuudesta huolimatta ratkaista analyyttisesti. Todellisuudessa tällainen ei onnistu ja esimerkiksi rakenteiden mekaniikan ongelmat tulee ratkaista numeerisesti elementtimenetelmällä. Geometrisesti epälineaarinen teoriaosuus on koottu laskentaesimerkin pohjalta, jotta vertailu geometrisesti lineaariseen teoriaan voidaan tehdä yksinkertaisesti.

#### 3.1 Materiaalinen epälineaarisuus

Lukuisat materiaalit kuvaavat epälineaarista käyttäytymistä. Näihin kuuluvat visko-elastiset polymeerit tai teräkset, betoni ja maaperä, jotka osoittavat kimmo-plastisia ominaisuuksia. Materiaalin käyttäytyminen karakterisoidaan epälineaarisella vastefunktiolla jännitysten ja venymien välille tai evoluutioyhtälöillä. Lineaarisesti kimmoisa jännitys - venymä yhteys on hyvä approksimointi monille materiaaleille, mutta pätee vain tiettyjen oletuksien alaisina, kuten esimerkiksi tilanteessa, missä otaksutaan venymät pieniksi. Yksinkertaisilla esimerkeillä voidaan osoittaa, että tämä ei aina pidä paikkaansa, sillä venyttämällä kimmoista kuminauhaa saadaan aikaiseksi yhä suurempi jäykkyys ilman plastisoitumista, mutta taivuttamalla rautalankaa se deformoituu pysyvästi. Rautalangan käytös johtuu kimmo-plastisesta materiaalmallista ja pysyvä muodonmuutos tapahtuu, kun ylitetään myötöraja. (Wriggers 2008, s. 15)

Käydään kuvassa 7 näkyvän esimerkin avulla läpi kimmo-plastinen deformaatio.



Kuva 7. Systemi, kuormitus ja materiaalikäytös (mukaillen Wriggers 2008).

Kuvan 7 systeemissä on kaksi tankoa samalla poikkileikkauksella  $A$  ja pituudella  $L$ , mutta eri materiaaliominaisuuksilla. Esimerkissä oletetaan kimmo-plastinen materiaalikäytös, missä myötöraja  $\sigma_y$  rajoittaa jännitystä. Kimmokerroin valitaan siten, että  $E_1 = 2E_2 = 2E$  ja lisäksi materiaalien myötörajat ovat erilaiset  $\sigma_{y1} = 3\sigma_{y2} = 3\sigma_y$ . Sillä oletuksella, että tankoja vetävä voima  $F$  on niin pieni, että myötöraja ei ylity yhdellä sauvoista, tapahtuu kimmoinen käytös ja voidaan muodostaa tasapainoehto

$$N_1 + N_2 = F \rightarrow \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{F}{A}, \quad (18)$$

missä normaalivoima  $N_i$  tangossa  $i$  on verrannollinen jännitykseen siten, että  $N_i = A\sigma_i$ . Kinemaattiset yhteydet ovat

$$u_1 = u_2 = u, \quad \varepsilon = \frac{u}{L}, \quad (19)$$

siirtymille  $u_i$  tankojen aksiaalisuunnassa ja niihin liittyvään venymään  $\varepsilon$ . Hooken lineaarisesti kimmoinen materiaalimalli liittyy jännitykset ja venymät toisiinsa

$$\sigma_i = E_i \varepsilon = E_i \frac{u}{L}. \quad (20)$$

Yhdistämällä kaavat (18) ja (20) saadaan voiman  $F$  ja siirtymän  $u$  välinen yhteys

$$E_1 A \frac{u}{L} + E_2 A \frac{u}{L} = F \rightarrow u = \frac{FL}{(E_1 + E_2)A}. \quad (21)$$

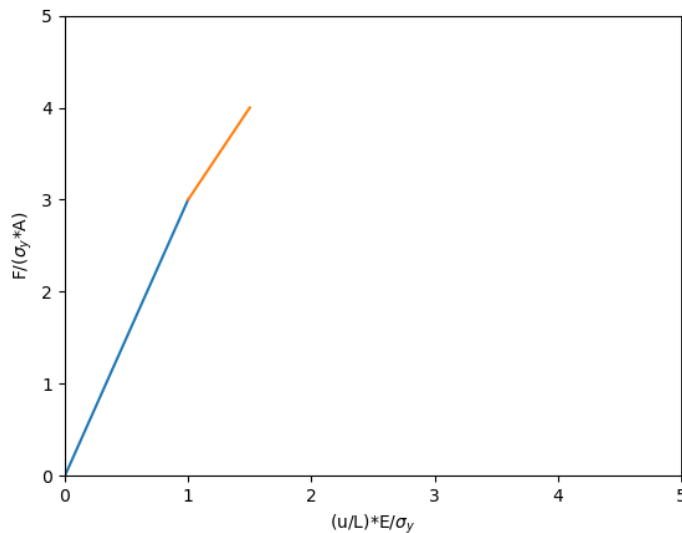
Jännitykset molemmissa sauvoissa on

$$\sigma_i = E_i \frac{F}{(E_1 + E_2)A} \rightarrow \sigma_i = E_i \frac{F}{3EA}. \quad (22)$$

Kaavasta (22) huomataan, että tanko 2 alkaa myötään kuormituksella  $F = 3A\sigma_y$  tangon 1 ollessa vielä kimmoisella alueella. Edellä mainitulla tangon 2 rajakuormituksella saadaan siirtymäksi  $u = \sigma_y L/E$ . Mikäli kuormitusta kasvatettaisiin lisää, niin joudutaan huomioimaan tangossa 2 vaikuttava vakio normaalivoima  $N_2 = A\sigma_y$ . Tällöin, analogisesti vertaamalla kaavaan (21), saadaan siirtymäksi

$$u = \left(\frac{F}{A} - \sigma_y\right) \frac{L}{2E}. \quad (23)$$

Lopuksi tanko 1 myötää sen normaalivoiman ollessa  $N_{1min} = 3A\sigma_y$  ja kuormituksella  $F = 4A\sigma_y$ . Tämän jälkeen kuormitusta ei ole enää mahdollista kasvattaa ja lopputulosta esittävä kuormitus - siirtymä kuvaaja on annettu kuvassa 8. (Wriggers 2008, s. 15–16)



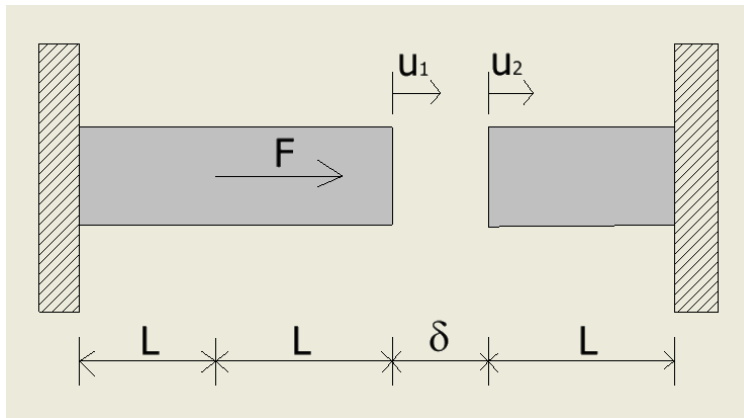
Kuva 8. Kuormitus-siirtymä kuvaaja (mukaiillen Wriggers 2008).

Kuvasta 8 voidaan todeta kuormituksen ja siirtymän välinen epälineaarinen käytös, mikä tässä esimerkissä johtuu kimmo-plastisesta materiaalmallin oletuksesta. Useissa teknillisissä sovelluksissa epälineaarinen käytös ei aina johdu pelkästään yhdestä tekijästä, vaan voi olla yhdistelmä geometrisia ja materiaalisia epälineaarisuuksia. (Wriggers 2008, s. 16–17)

### 3.2 Reunaehdoista johtuva epälineaarisuus

Edeltävästä poikkeava epälineaarisuuden lähde liittyy erikoisiin reunaehtoihin. Yksi merkittävä aiheuttaja on systeemin muodonmuutostilan mukana muuttuvat reunaehdot eli

esimerkiksi annetun kuormituksen kasvun aikana. Tällainen tilanne syntyy, kun yksi rakenne pääsee kontaktiin toisen rakenteen kanssa deformaatio prosessin aikana. Nyt rakenteen tunkeutuminen toiseen on suljettu pois ja rakenteiden välinen kontaktialue muuttuu riippuen kuormituksen tasosta. Kontaktiongelmiin olennaiset ominaisuudet käydään läpi seuraavan esimerkin avulla. Kuvan 9 mallissa on kaksi tankoa, joiden jäykkyydet ovat  $EA$  ja systeemissä vaikuttaa pistevoima  $F$ . (Wriggers 2008, s. 17)



Kuva 9. Systemi ja kuormitus (mukaillen Wriggers 2008).

Tangot ovat erotettuina toisistaan välillä  $\delta$  ja etsitään niiden jännitys- ja siirtymätiloja sillä ehdolla, etteivät tangot voi tunkeutua toisiinsa. Tämä johtaa siirtymien väliseen epäyhtälöön

$$u_1 - u_2 \leq \delta. \quad (24)$$

Epäyhtälössä ”yhtä suuri, mutta vähemmän kuin” merkintä on ”vähemmän kuin” osuudeltaan tosi silloin, kun tanko 1 ei kosketa tankoa 2 ja ”yhtä kuin” osuudeltaan tosi, kun tangot koskettavat toisiaan. Kaavan (24) tilanteessa siirtymä  $u_2$  on nolla ja tangon 1 siirtymäksi saadaan

$$u_1 = \frac{FL}{EA}. \quad (25)$$

Kasvattamalla voimaa  $F$  siten, että  $F > EA \frac{\delta}{L}$  täyttyy, päädytään tilanteeseen, missä tangot 1 ja 2 koskettavat ja yhtälö  $u_1 - u_2 = \delta$  on tosi. Kohdassa  $x = 2L$  saadaan molempien tankojen siirtymiksi

$$u_1 = \frac{FL}{EA} + \frac{N_1 2L}{EA}, \quad u_2 = -\frac{N_2 L}{EA} \quad (26)$$

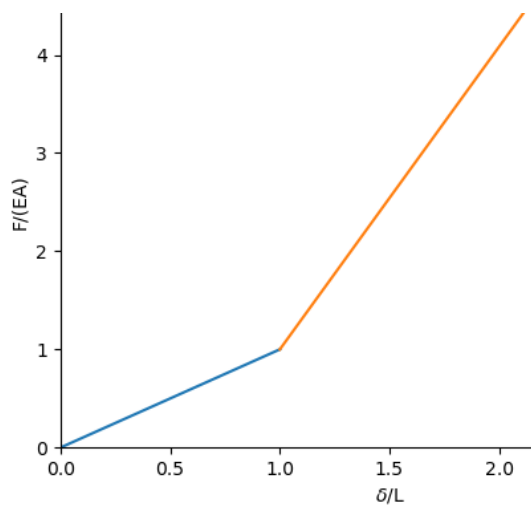
ja sillä tiedolla, että molempien tankojen normaalivoimat kohdassa  $x = 2L$  täytyy olla yhtä suuret seuraa yhtälöstä  $u_1 - u_2 = \delta$

$$\frac{FL}{EA} + 3\frac{NL}{EA} = \delta \rightarrow N = \frac{1}{3}(EA\frac{\delta}{L} - F). \quad (27)$$

Sijoittamalla kaava (27) siirtymään  $u_1$  kaavassa (26) saadaan kontaktitilanteessa yhteys voiman  $F$  ja siirtymän  $u_1$  välille

$$F = EA(3\frac{u_1}{L} - 2\frac{\delta}{L}). \quad (28)$$

Yhtälöstä (28) saadaan tilanteella  $u_1 = \delta$  voima kontaktin alussa ja tämä sijoitettuna kaavaan (27) antaa normaalivoiman  $N = 0$ . Tästä johtuen voidaan kontaktissa laskea tangolle 1 siirtymä kaavalla (25). Lopputuloksena saatu epälineaarinen kuormitus - siirtymä kuvaaja on esitelty kuvassa 10, missä epälineaarisuus johtuu vain kontaktimekanismista. (Wriggers 2008, s. 17–18)



Kuva 10. Kuormitus – siirtymä kuvaaja (mukaiillen Wriggers 2008).

Periaatteessa kontaktiongelmiin formuloinnissa täytyy käyttää differentioitumattomia tasapainoyhtälöitä ja geometrisia reunaehtoja, koska systeemi voi omaksua kaksi eri tilaa, jotka ovat kontaktissa olemisen tai olematta olemisen. Tätä havainnollistaa kuvassa 10 olevan kuvaajan mutka. Syystä, että kontaktista johtuvat epälineaarisuudet yhdistyvät monissa teknillisissä sovelluksissa muihin epälineaarisuuksiin, kuten äärellisiin tai joustamattomiin muodonmuutoksiin, on kontaktiongelmiin ollut erittäin monimutkaista kehittää kestäviä ja tehokkaita algoritmeja. (Wriggers 2008, s. 18)



Materiaaliominaisuuksien ja muuttuvien reunaehtojen lisäksi epälineaarista käytöstä saadaan geometrisista vaikutuksista, mihin syvennyttään seuraavaksi tarkemmin.

### 3.3 Geometrinen epälinearisuus

Rakenteelliset stabiliteettiongelmat muodostavat tärkeän osa-alueen elementtimenetelmän soveltamisessa. Yleisesti oletetaan, että rakenteiden epävakaas johtuu geometrisen epälinearisuuden huomioimista efekteistä huolimatta siitä, että epälineaariset materiaalmallit voivat olla myös merkittävä tekijä stabiliteetin menettämisessä. Käytettäessä termiä ”suuret siirtymät” ei aina välttämättä tiedetä, mitä sillä käytännössä tarkoitetaan. Joskus viittaus tehdään suuriin venymiin, joita nähdään esimerkiksi kumimaisten materiaalien deformaatioissa tai metallien pursottamisessa, kun taas muutoin viittaus kohdistuu suuriin siirtymiin ja rotaatioihin, mitä tavataan ohutseinämaisissä ja hoikissa rakenteissa. Tarkastellaan ulokepalkin tapausta, jonka jäykkyyttä  $EI$  kasvatetaan, jolloin palkille saadaan mielivaltaisen pienet venymät. Jäykkyyden ollessa hyvin suuri ja näin ollen venymien ollessa pienet, voidaan palkin pään siirtymästä ja rotaatiosta tehdä mielivaltaisen suuret, kun palkki on tarpeeksi pitkä. Itseasiassa käsitteet ”suuret siirtymät” ja ”suuret venymät” tai tarkemmin sanottuna ”suuret siirtymägradientit” eivät tarkoita samaa. (De Borst et al. 2012, s. 63)

Suuret venymät voivat ilmetä vain, jos siirtymägradientit ovat myös suuria, mutta käänteisesti tämä ei välttämättä pidä paikkaansa, sillä suuria siirtymägradientteja voi esiintyä rakenteiden käyttäytymisessä, vaikka venymät olisivat pieniä, eli alle 2 %. Normaaleissa ”insinööritarkasteluissa” useimmille materiaaleille käytetään pieniä venymiä. (De Borst et al. 2012, s. 63) Syynä tälle on yksinkertaisuus ja se, että voidaan sisällyttää mahdollisimman paljon asioita klassisesta teoriasta. Lisäksi yleiset rakennusteollisuuden materiaalit, kuten niukkahiilinen teräs, kaapelit, alumiini, puu ja valmisteet pysyville rakennelmille eivät kestä suuria venymiä ilman murtumia. Väärinkäytettynä lineaarinen teoria johtaa ajatukseen kuvitteellisesta tai virheellisestä venymästä eli venymästä, mitä oikeasti ei ole muodostunutkaan. Virheellisen venymän ilmaantuminen estetään poistamalla jäykän kappaleen liike ennen venymän laskentaa, mikä on olennaista käsitteelle suuret rotaatiot, mutta pienet venymät. (Levy & Spillers 2003, s. 4–5)

Tässä tutkielmassa vertaillaan teknisen taivutusteorian ja geometrisesti epälineaarisen teorian ratkaisuja taivutuksen osalta, jotka on rajoitettu pitkille ja hoikille palkeille. Koska teorioiden vertailu tehdään palkkimallilla, otaksutaan epälineaarissa teoriassa pienet venymät. Lineaarinen teoria approksimoi siirtymät ja rotaatiot pieniksi, sekä käyttää venymämittana klassista insinöörivenymää. Tämä teoria ei myöskään huomioi taivutuksessa kalvovoimien aiheuttamaa jännitysjäykistymisen muodostumista. Kalvovoimat vaikuttavat palkin taivutusjäykkyyteen (Cook et al. 1989, s. 429). Selventämiseksi niistä käytetään tässä työssä myös nimitystä palkin aksiaalissuunnan voimat.

Jos kalvovoimat aiheuttavat vetoa, taivutusjäykkyys kasvaa. Mikäli ne aiheuttaisivat puristusta, niin taivutusjäykkyys alenisi lähelle nolaa ja tapahtuisi rakenteen nurjahdus tai lommahdus. Aikaisemmin mainittu jännitysjäykistyminen tarkoittaa juuri tätä rakenteen taivutusjäykkyyden kasvua johtuen sen jännitystilasta. Kalvovoimien vaikutukset huomioidaan elementeittäin laskennassa matriisilla  $\mathbf{k}_\sigma$ , joka summataan perinteiseen elastiseen jäykkymatriisiin  $\mathbf{k}_E$ . Matriisilla  $\mathbf{k}_\sigma$  on useita nimityksiä, kuten alkutilan jännitysjäykkymatriisi, differentiaalinen jännitysjäykkymatriisi, geometrinen jännitysjäykkymatriisi ja stabiliteetti kerroinmatriisi. Tässä työssä käytetään nimitystä jännitysjäykkymatriisi, joka muodostetaan elementin geometrian, siirtymäkentän ja jännitystilän avulla. Tästä johtuen jännitysjäykkymatriisi on riippumaton kimmoisista ominaisuuksista, mutta voidaan vaihtoehtoisesti kuitenkin muodostaa näiden ominaisuuksien ja venymien tai deformaatioiden mukaisesti käyttämällä jännitys-venymäyhteyttä. Koko rakenteen jännitysjäykkymatriisi  $\mathbf{K}_\sigma$  saadaan summaamalla jokaisen yksittäisen elementin  $\mathbf{k}_\sigma$  matriisit yhteen, mikä on sama menettely, kuin koko rakenteen elastisen jäykkymatriisin  $\mathbf{K}_E$  kanssa. (Cook et al. 1989, s. 429) Geometrisesti epälineaarissa mallinnuksessa tehdään ero rakenteen spatiaalisen ja materiaalisen konfiguraation välille eli nykyisen deformaation tilan ja alkutilanteen deformaation referenssitilan välille. Suurien siirtymien otaksumassa rakenteen tasapainoyhtälöt on laskettava sen deformaation tilassa. Lineaarinen yhteys annetun kuormituksen  $\mathbf{P}$  ja siirtymien  $\mathbf{U}$  välillä ei enää päde. Siirtymien  $\mathbf{U}$  ratkaiseminen geometrian muuttuessa, kun kuormitus kasvaa voidaan hoitaa lineaaristen askeleiden sarjana, missä jokainen askel kuvaa kuormitusinkrementtiä. Suurten siirtymien vuoksi venymä - siirtymä yhtälöt sisältävät epälineaarisia termejä, joiden täytyy olla mukana laskiessa koko rakenteen jäykkymatriisia  $\mathbf{K}$ . (Przemieniecki 2012, s. 384)

Johdetaan jännitysjäykkyysmatriisi  $\mathbf{k}_\sigma$  palkkielementille tasotilanteessa. Määritetään aluksi venymä - siirtymä yhteys, mistä jatketaan venymäenergiaan  $U$ , jonka jälkeen saadaan Castiglianon teoreemalla elementin vapausasteita vastaava voima - siirtymä yhtälöryhmä, mikä pitää sisällään elementin jännitysjäykkyysmatriisin. Venymäenergiasta eteenpäin lähtevien laskujen välivaiheita on vähennetty niiden pituuden vuoksi, mutta kiinnostunut lukija voi katsoa niitä tarkemmin Przemienieckin (2012, s. 388–391) teoksesta.

### 3.3.1 Deformaation kuvaaminen kontinuumissa

Oletetaan, että materiaalipartikkeli sijaitsee avaruuden pisteessä  $\mathbf{X}$  alkutilassa ns. referenssi konfiguraatiossa, jota kutsutaan materiaalkoordinaateiksi  $X_1, X_2$  ja  $X_3$ , sekä pisteessä  $\mathbf{x}$  deformoituneessa konfiguraatiossa, jota kutsutaan spatiaalikoordinaateiksi  $x_1, x_2$  ja  $x_3$ . Deformaation kuvaaminen lokaalisti materiaalipartikkelin ympäristössä tehdään deformaatiogradienttitenzorilla  $\mathbf{F}$ . Tämä tensori kuvaa viivaelementin  $d\mathbf{X}$  alkuperäisestä tilasta viivaelementiksi  $d\mathbf{x}$  lopputilaan, toisin sanoen

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X}. \quad (29)$$

Deformaatiogradientti on toisen kertaluvun tensori, joka kuvaa partikkelin ympäristön liikkeen jäykänkappaleen translaatiota lukuun ottamatta. (De Borst et al. 2012, s. 85) Muodonmuutoksen mittaaminen on helpointa oikeanpuolen Cauchy-Green muodonmuutostensorilla  $\mathbf{C}$ , joka saadaan laskettua materiaaliviivojen  $d\mathbf{X}$  ja  $d\mathbf{x}$  pituuksien neliöiden erotuksena

$$d\mathbf{x}d\mathbf{x} - d\mathbf{X}d\mathbf{X} = (\mathbf{F}d\mathbf{X})(\mathbf{F}d\mathbf{X}) - d\mathbf{X}d\mathbf{X} = d\mathbf{X}(\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{I})d\mathbf{X}. \quad (30)$$

Deformaatiogradientti voidaan esittää jäykän kappaleen rotaatiotensorin  $\mathbf{R}$  ja oikean venytystensorin  $\mathbf{U}$  tulona, jota myös kutsutaan polaarihajotelmaksi. Kaavalla (30) ja tiedolla, että tensori  $\mathbf{U}$  on puhdas muodonmuutoksen mitta, saadaan Cauchy-Green muodonmuutostensoriksi

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F} = \mathbf{U}^2, \quad (31)$$

joka myös täydellisesti kuvaa muodonmuutostilaa ja josta jäykän kappaleen rotaation vaikutukset ovat eliminoitu täysin. Green-Lagrangen venymätensori on siten määritelty

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}). \quad (32)$$

Yhtälöistä (29), (31) ja (32) nähdään, että Green-Lagrangen venymätensori  $\mathbf{E}$  viittaa deformaatiomattomaan referenssitilaan. Käytännöllisempää on käyttää siirtymävektoria  $\mathbf{u}$  vektorin  $\mathbf{x}$  sijasta, joka piti sisällään spatiaalikoordinaatit deformaatiosta. Toisaalta numeerisessa soveltamisessa tämä ei ole tarpeen (Wriggers 2008, s. 24). Selvästikin  $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}$ , mistä saadaan

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{X}}. \quad (33)$$

Siirtymävektorin derivaattaa materiaalikoordinaattien suhteen kutsutaan siirtymägradientiksi. (De Borst et al. 2012, s. 86–87) Wriggers (2008, s. 23) merkitsee siirtymägradienttia tensorina  $\mathbf{H}$ . Yhdistämällä tiedot kaavoista (31), (32) ja (33) muodostetaan

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H}), \quad (34)$$

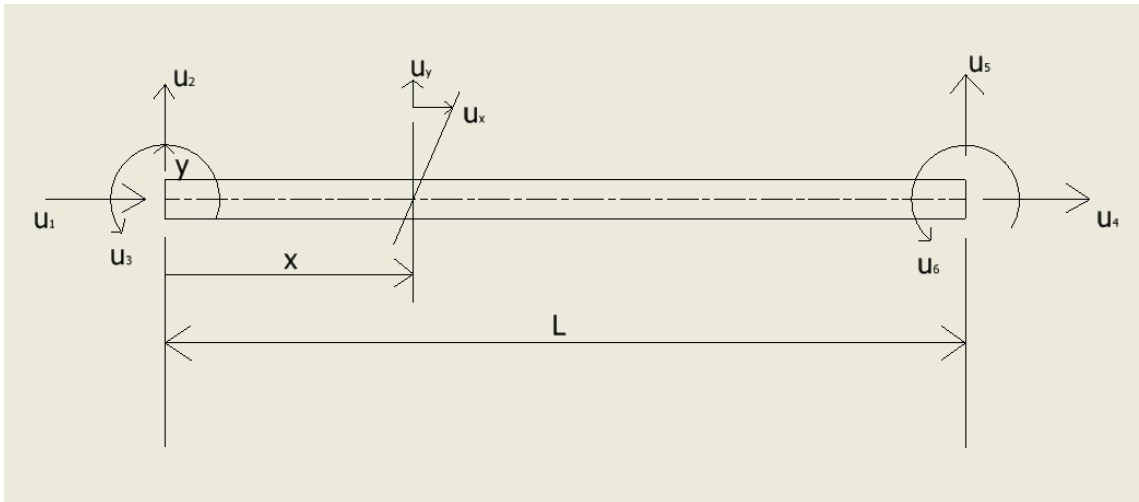
missä korkeamman kertaluvun termi  $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$  viittaa epälineaariseen luonteeseen Green-Lagrangen venymätensorissa, joka geometrisesti lineaarisessa teoriassa jätetään huomiotta, kun siirtymägradientti oletetaan pieneksi (Wriggers 2008, s. 23).

### 3.3.2 Jännitysjäykkymatriisi palkkielementeille tasossa

Venymäenergian  $U_i$  laskemisessa jätetään pois leikkausvenymän vaikutukset, joten ainoastaan normaalivenymät sisällytetään. Nämä venymät suurille taipumille palkissa määritetään pienten venymien normaalivenymällä

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du_0}{dx} - \frac{d^2u_y}{dx^2} y + \frac{1}{2} \left( \frac{du_y}{dx} \right)^2, \quad (35)$$

missä siirtymät tapahtuvat y-akselin suunnassa, sillä palkki on piirretty kuvassa 11 xy-tasossa. Kaavassa (35)  $y$  on mitattu palkin neutraaliakselilta ja  $u_0$  merkitään siirtymää  $u_x$  kohdassa  $y = 0$ .



Kuva 11. Lineaarisen palkkielementin solmupisteiden siirtymien positiiviset suunnat (mukaillen Przemieniecki 2012).

Venymäenergia lasketaan kaavalla

$$U_i = \frac{E}{2} \int_V \varepsilon_{xx}^2 dV, \quad (36)$$

missä  $E$  on materiaalin kimmokerroin. Sijoittamalla yhtälö (35) kaavaan (36), muuntamalla tilavuusintegraali palkin pituuden ja poikkipinta-alan tuplaintegraaliksi, jättämällä saadusta tuloksesta pois korkeamman asteluvun termi  $\frac{1}{4} \left(\frac{du_y}{dx}\right)^4$ . Integroimalla poikkipinta-alan  $A$  yli, ja tiedolla etäisyyden  $y$  laskemisesta, saadaan eliminoitua kaikki integraalit  $\int y dA$ , jolloin venymäenergia tyypistyy muotoon

$$U_i = \frac{EA}{2} \int_0^L \left(\frac{du_0}{dx}\right)^2 dx + \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{d^2u_y}{dx^2}\right)^2 dx + \frac{EA}{2} \int_0^L \frac{du_0}{dx} \left(\frac{du_y}{dx}\right)^2 dx, \quad (37)$$

missä  $I$  on poikkileikkauksesta laskettu neliömomentti ja  $L$  palkin pituus. Havaitaan, että kaksi ensimmäistä integraalia yhtälössä (37) edustavat lineaarista venymäenergiaa ja viimeisin integraali epälineaarista osuutta. Siirtymien derivaatat korvataan 2D-palkkielementille ominaisella siirtymäjakaumalla. (Przemieniecki 2012, s. 388–389) Palkkielementissä vallitsevaa aksiaalista veto- tai puristusvoimaa voidaan pitää vakiona, suurista siirtymistä huolimatta, seuraavalla yhteydellä

$$F = \frac{EA}{L} (u_4 - u_1) \cong \text{vakio}. \quad (38)$$

Soveltamalla Castiglianon teoriaa (osa 1) muokattuun (37) yhtälöön saadaan elementille voima - siirtymä yhtälöryhmä, jota voidaan symbolisesti matriisimuodossa merkitä

$$\mathbf{S} = (\mathbf{k}_E + \mathbf{k}_\sigma)\mathbf{u}, \quad (39)$$

josta voidaan erotella jännitysjäykkymatriisi

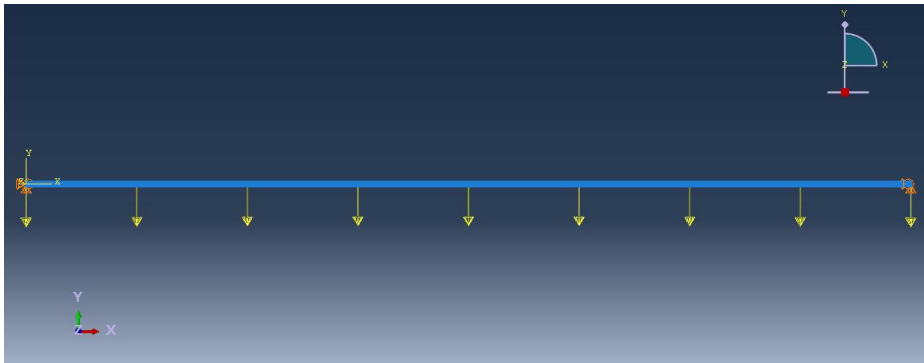
$$\mathbf{k}_\sigma = \frac{F}{L} \begin{bmatrix} 0 & & & & & & \\ 0 & \frac{6}{5} & & & & & \\ 0 & \frac{L}{10} & \frac{2}{15}L^2 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{L}{10} & 0 & \frac{6}{5} & & \\ 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} & 0 & -\frac{L}{10} & \frac{2}{15}L^2 & \end{bmatrix}. \quad (40)$$

Matriisista voidaan todeta, että se joko kasvattaa tai alentaa rakenteen jäykkyyttä, riippuen voiman  $F$  suunnasta. (Przemieniecki 2012, s. 390–391)

## 4 LINEAARISEN JA GEOMETRISESTI EPÄLINEAARISEN RATKAISUN VERTAILUA

Tämän kappaleen tarkoituksena on esittää staattiset laskelmat lineaarisella ja geometrisesti epälineaarilla teoriolla kahdelle laskentamallille, jotka poikkeavat toisistaan vain reunaehdoista. Laskelmien pohjalta muodostetaan johtopäätökset tulosten tarkasteluun, missä tuodaan esille teorioiden poikkeavuudet ja tarkkuudet. Tulosten tarkastelussa pyritään siihen, että annettujen tietojen perusteella lukija tunnistaisi, milloin on syytä käyttää lineaarisen palkkiteorian sijaan geometrisesti epälineaarista ratkaisijaa, sekä huomaisi lineaarisen teorian puutteet ja pystyisi soveltamaan annettua tietoa muihin rakenteisiin. Kappaleen rakenne lähtee liikkeelle laskentamallien 1 ja 2 esittelystä, elementtiverkosta, minkä jälkeen siirrytään laskentamallien tuloksiin. Lopuksi saadut tulokset kerätään yhteen tarkasteltavaksi. Ratkaisuihin käytetään Dassault Systems Simulia Abaqus/CAE Student Edition 2019 ohjelmistoa kappaleissa 2.2 ja 3.3 käytyjen teorioiden pohjalta.

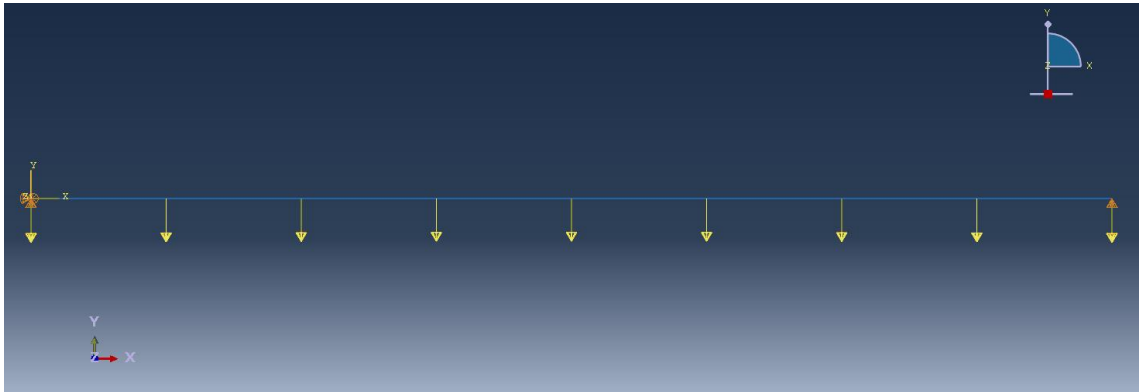
### 4.1 Laskentamallit 1 ja 2



Kuva 12. Laskentamalli 1 Abaquksessa profiili näkyvästi mallinnettuna.

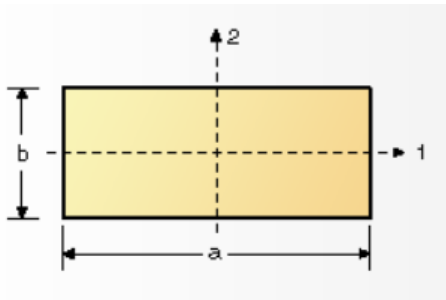
Kuvassa 12 nähdään palkkirakenteen geometria, tuenta ja kuormitus. Rakenne on tasapaksua tavallista rakenneterästä, jota kuvataan pitkänä ja hoikkana. Palkki on 3 metriä pitkä, jonka poikkileikkaus on suorakaide, kuten kuvasta 14 nähdään. Palkkirakenne voidaan mallintaa näkyvästi ilman profiilia tai sen kanssa, jolloin voidaan tarkkailla sen lokaalien akselien orientaatiota. Poikkileikkauksen mitat ovat  $a = b = 0.10 \text{ m}$ . Laskentamallissa 1 rakenne on tuettu molemmista päistä niveltuennalla, kun taas

laskentamalli 2 kuvassa 13 on tuettu vasemmasta päästä niveltuennalla ja oikeasta päästä rullaavalla niveltuella, missä liike on mahdollistettu x-akselin suunnassa.



Kuva 13. Laskentamalli 2 Abaquksessa pelkkänä rautalankageometriana.

Kuormitus on annettu laskentamalleissa tasaisesti jakautuneena viivakuormituksena  $q = 50 \frac{kN}{m}$  palkin yläpinnalle.



Kuva 14. Teräspalkin profiili.

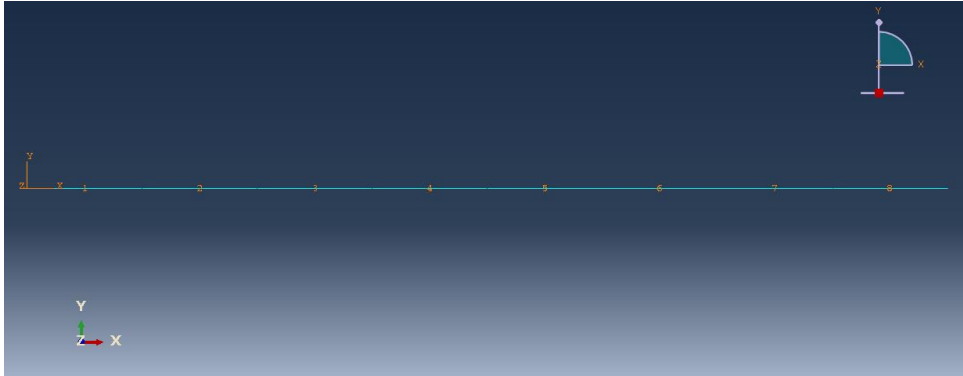
Palkin materiaalmalli mallinnetaan nyt lineaarisesti kimmoisana, jotta tästä ei aiheutuisi ylimääräistä epälineaarisuutta, sillä se ei ole nyt tarkoituksena. Materiaalivakiot ovat  $E = 210 \text{ GPa}$ ,  $G = 81 \text{ GPa}$  ja  $\nu = 0.3$ . Laskentamalli luotiin Abaquksessa 2D deformaationa rautalankamallina, sillä kuormitus on nyt vain y-akselin suunnassa.

## 4.2 Elementtiverkko ja verkon konvergenssitarkastelu

Palkin elementtiverkko mallinnettiin lineaarisilla Euler-Bernoullin B23 palkkielementeillä, joita on koko rakenteessa 8 kappaletta. Abaqus käyttää Euler-Bernoullin palkkielementeissä oletuksena kolmannen asteen muotofunktioita ja tätä ei



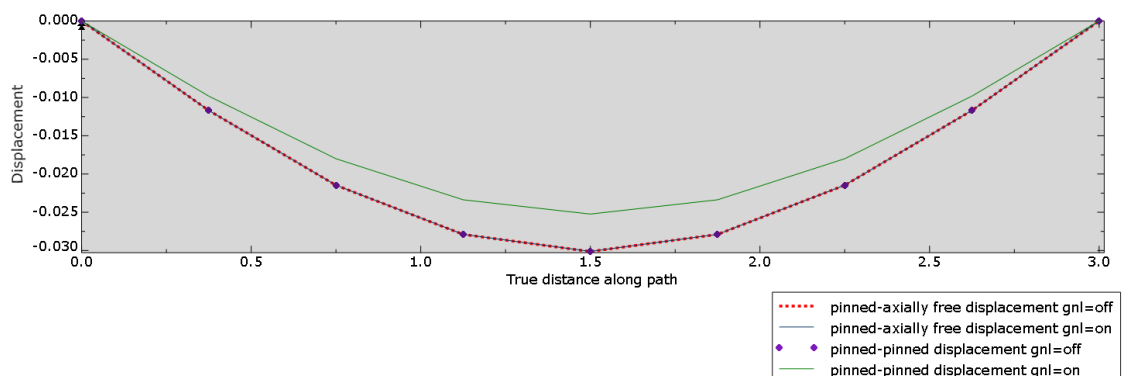
pysty muuttamaan. Verkon konvergenssitarkastelu tehtiin seuraamalla maksimi Von-Mises vertailujännitystä. Tihentäminen aloitettiin 5 elementistä ja korotus tapahtui 1 elementillä, kunnes prosentuaalinen muutos jännityksessä oli enää alle 1 % luokkaa. Käytetty elementtiverkko on esitetty kuvassa 15.



Kuva 15. Elementtiverkko Abaquksessa.

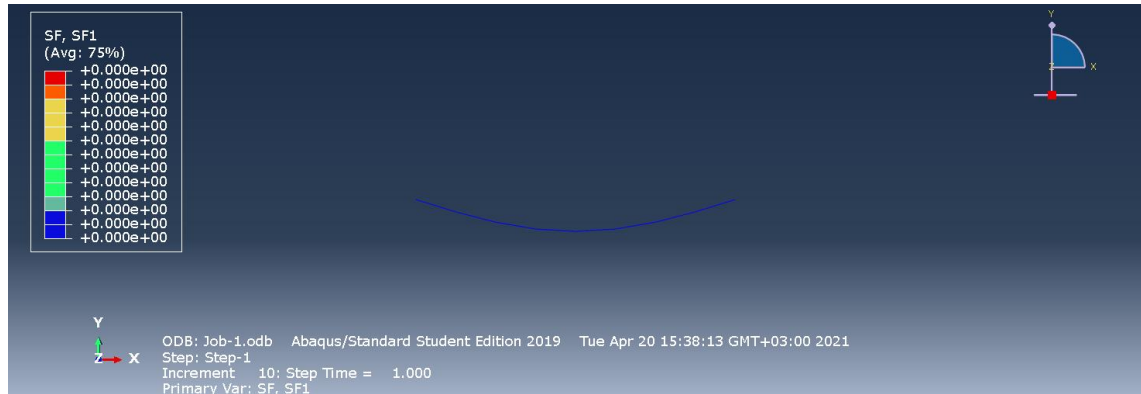
### 4.3 Laskentamallien 1 ja 2 tulokset

Laskentamallien ratkaisussa on laskettu palkin taipuma, aksiaalisuunnassa vaikuttava voima ja tukireaktiot palkin oikeassa päädyssä, niin lineaarisella teorialla, kuin geometrisesti epälineaarilla. Saaduista tuloksista on piirretty kuvaajat palkin pituuteen nähden, lukuun ottamatta aksiaalisuunnan voimaa, mikä on piirretty contour-kuvaajana. Laskennassa on käytetty SI-järjestelmän yksiköitä eli tulokset ovat Newtonina, Pascaleina ja metreinä. Kuvaajien käyrien nimityksissä merkintä gnl viittaa geometriseen epälineaarisuuteen.



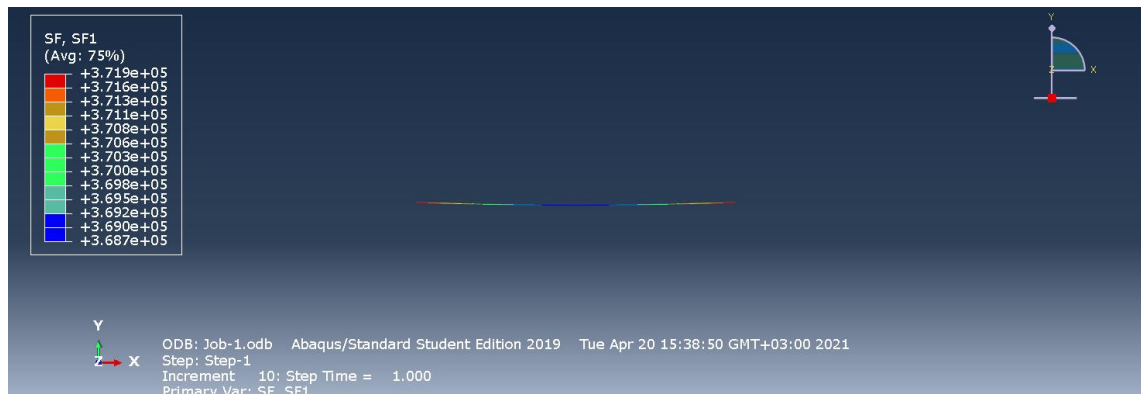
Kuva 16. Laskentamallien taipumat molemmilla teorioilla.

Molempien laskentamallien taipumaviivat on piirretty kuvaan 16 lineaarisella teorialla ja geometrisesti epälineaarilla. Kuvasta voidaan todeta heti, että epälineaarinen tulos seuraa lineaarista, kun palkin toinen pää saa liikkua pituussuuntaansa nähden. Kuvassa 17 nähdään laskentamallin 1 deformaatiomuodon lisäksi aksiaalissuunnassa vaikuttava voima, jota teoriaosuudessa 3.3 kutsuttiin myös kalvovoimaksi.



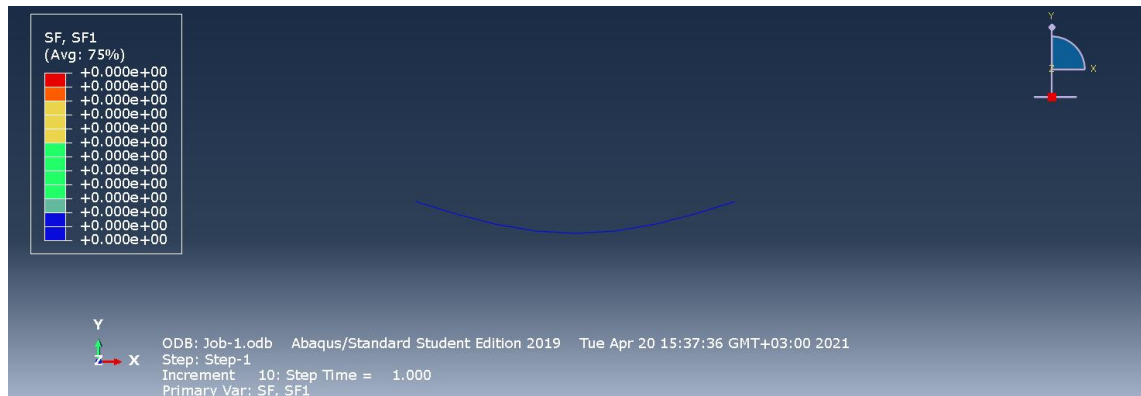
Kuva 17. Laskentamallin 1 aksiaalissuunnassa vaikuttava voima lineaarisella teorialla.

Seuraavaksi kuvassa 18 on esiteltyä laskentamallin 1 kalvovoima geometrisesti epälineaarilla teorialla. Tuloksesta nähdään selvästi epälineaarisen teorian huomioima jännitysjäykistymisen vaikutus.

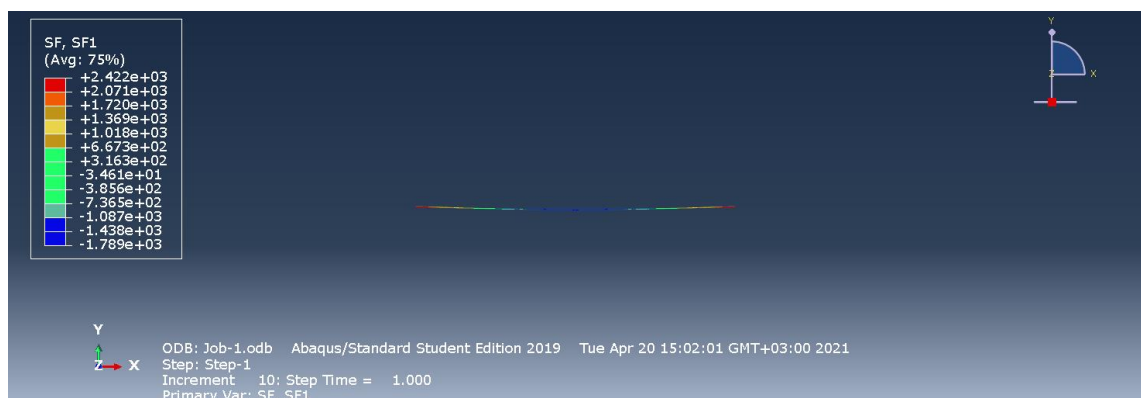


Kuva 18. Laskentamallin 1 aksiaalissuunnassa vaikuttava voima, kun geometrinen epälineaarisuus on huomioitu.

Laskentamallissa 2 aksiaalissuunnassa voima on maltillisempi, sillä palkki pääsi rullaamaan vapaasti vaakasuunnassa. Kuvassa 19 ratkaisu on tehty lineaarisella teorialla ja kuvassa 20 epälineaarilla.

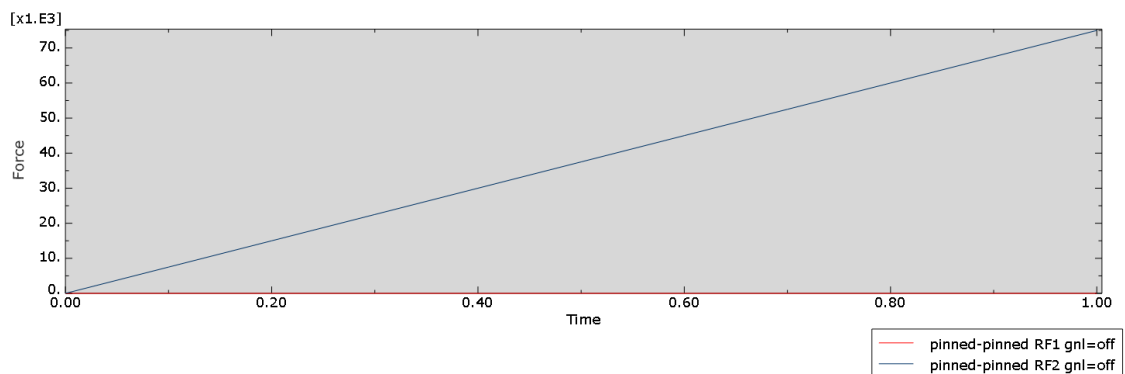


Kuva 19. Laskentamallin 2 aksiaalissuunnassa vaikuttava voima lineaarisella teoriolla.



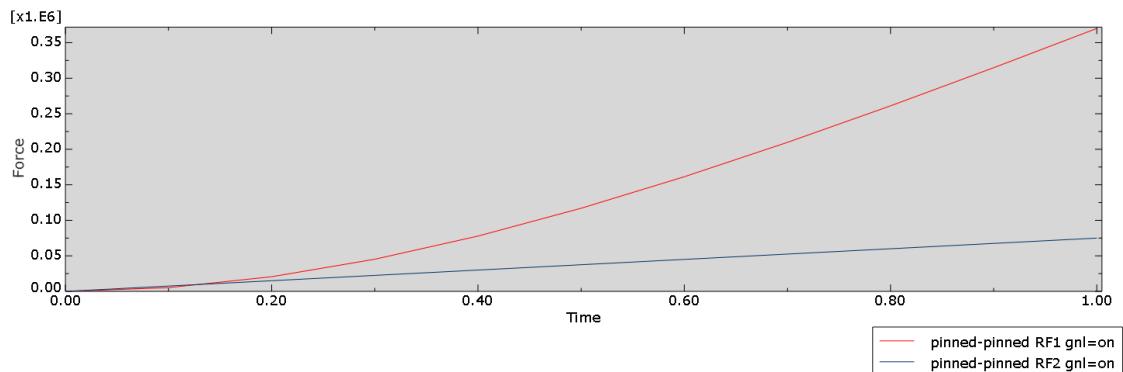
Kuva 20. Laskentamallin 2 aksiaalissuunnassa vaikuttava voima, kun geometrinen epälinearisuus on huomioitu.

Laskentamallien vaaka- ja pystysuuntaiset tukivoimat piirretään Abaquksessa laskentaajan suhteen, missä ajan hetkellä nolla ollaan deformoitumattomassa alkutilassa ja hetkellä yksi deformoituneessa lopputilassa. Kuvassa 21 ja 22 on laskentamallin 1 tukivoimat molemmilla teorioilla.



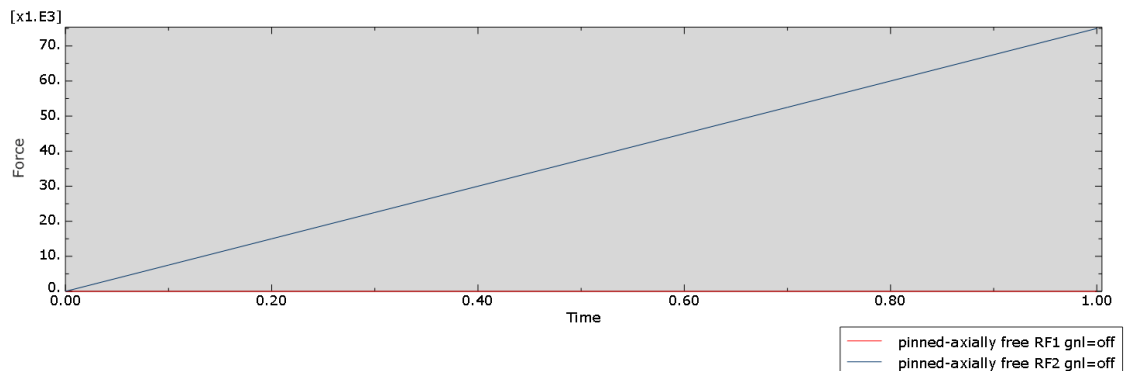
Kuva 21. Laskentamallin 1 vaaka- ja pystysuuntaiset tukivoimat lineaarisella teoriolla.

Abaquksessa merkitään vaakasuuntaista tukivoimaa lyhenteellä RF1 ja pystysuuntaista tukivoimaa RF2, mitkä ovat peräisin englanninkielisestä termistä ”reaction force” (Dassault Systems 2016).



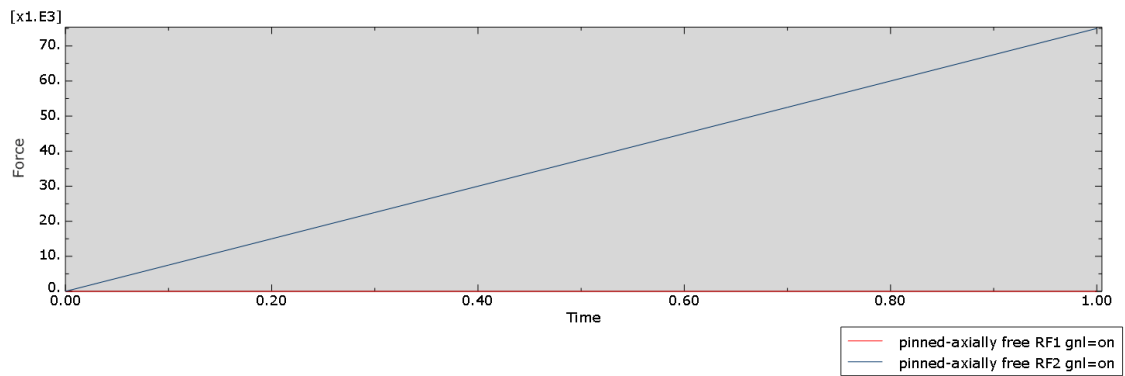
Kuva 22. Laskentamallin 1 vaaka- ja pystysuuntaiset tukivoimat, kun geometrinen epälineaarisuus on huomioitu.

Kuvan 22 kuvaajasta nähdään vaakasuuntaisen tukivoiman parabolinen kasvu, kun ohjelman sisäinen inkrementointi eli aika-askellus etenee. Aika-askelluksen mukana kasvaa palkkia kuormittava viivakuorma  $q$ , missä rakenteelle asetettua kuormitusta kerrotaan kertoimella, mikä on sen hetkinen aika (Przemieniecki 2012, s. 385).



Kuva 23. Laskentamallin 2 vaaka- ja pystysuuntaiset tukivoimat lineaarisella teoriolla.

Reunaehdon muutoksella ei ole vaikutusta lineaarisella teoriolla laskettuihin tukivoimiin kuvassa 23 ja kuvan 24 tulos on luonnollisesti sama, sillä tuenta vaakasuunnassa puuttuu. Kiinnostavinta jatkokäsittelyn kannalta on seurata tuloksista taipumia ja vaakasuuntaisen tukivoiman epälineaarista riippuvuutta kuormituksesta.



Kuva 24. Laskentamallin 2 vaaka- ja pystysuuntaiset tukivoimat, kun geometrinen epälineaarisuus on huomioitu.

#### 4.4 Tulosten tarkastelu

Kuvaan 16 piirretyistä taipumaviivoista huomataan, kuinka molemmista päistään niveltuetun palkin epälineaarinen ratkaisu on erilainen verrattuna muihin. Syynä tähän on teoriaosuudessa 3.3 kuvailtu jännitysjäykistyminen, mikä omaksutaan laskennassa lisättynä jäykkyytenä kaavalla (40). Palkki ei pääse pitenemään, jolloin sen sisäiset kalvovoimat kasvavat taivuttavan viivakuormituksen kasvaessa inkrementaalisesti ja mitä suurempi vetävä aksiaalivoima palkissa on, niin sitä voimakkaammin se vastustaa sitä kohtisuorassa suunnassa kuormittavia voimia. Vaakasuuntaisen tuen poistaminen palkin toisesta päädyistä mahdollistaa palkin pitenemisen, jolloin sen sisäinen jännitys ei pääse kasvamaan ja näin ollen käytös mukaillee geometrisesti lineaarista teoriaa, missä ei lasketa ollenkaan geometrasta lisäystä jäykkyyteen.

Kalvovoimien vertailussa keskitytään laskentamallien epälineaarisiin tuloksiin, sillä lineaariset ovat nollaa. Taivutetussa palkissa esiintyy aina jonkin verran kalvovoimaa reunaehdosta riippumatta, joten vertailu kohdistuu nyt enemmänkin voimien suuruusluokkiin. Molemmista päistä niveltuetun palkin kalvovoimat ovat yli satakertaiset verrattuna toisesta päästä aksiaalissuunnassa vapautettuun palkkiin. Kalvovoiman voimakas kasvu vaatii palkin vaakatuennoilta enemmän ja tästä johtuu kuvan 22 RF1 epälineaarinen käytös.

Edellä lasketuista tuloksista olisi suunnittelijan hyvä tunnistaa kumpaa teoriaa kannattaisi käyttää ja muutenkin olisi perusteltua tietää hieman käytännön peukalosääntöjä, mitkä johtaisivat geometrisesti epälineaariseen mallinnukseen. Ensimmäisenä olisi hyvä pohtia

deformoituuko rakenne suuresti ja mikäli deformoituu selvästi, niin tulisi käyttää geometrisesti epälineaarista ratkaisijaa. Epäiltäessä deformaation mittakaavaa kannattaa suorittaa laskenta ensin lineaarisella teorialla, jonka tuloksista tarkkailla rakenteen muotoa, asettaa skaalauskerroin luonnolliseksi eli yleensä ykköseksi ja havaitessaan silminnähtävää muutosta tulisi laskenta tehdä epälineaarilla teorialla. Palkkirakenteissa taipuman ollessa suurempi kuin puolet palkin paksuudesta, tulisi huomioida geometrinen epälineaarisuus (Renganathan 2019). Laskentaesimerkin tapauksessa tämä ei toteudu, joten mallinnus voitaisiin tehdä lineaarisellakin teorialla. Toisena peukalosääntönä on sallittu prosentuaalinen venymä, minkä raja-arvo vaihtelee lähteestä riippuen 2–5 % välillä eli sen ylittävällä mallilla tulisi tehdä geometrisesti epälineaarinen laskenta (De Borst et al. 2012, s. 63; Renganathan 2019). Peukalosääntöjen noudattaminen tietenkin on jokaisen omalla vastuulla, sillä ne eivät aina välttämättä pohjaudu kokeiltuun dataan tai tarkaksi todettuun teoriaan eli suunnittelijan on ymmärrettävä oma ongelmansa raja-arvoineen.

Epävarmana suositellaan käytettäväksi geometrisesti epälineaarista teoriaa, sillä silloin ei menetetä mitään, koska jos malli käyttäytyy lineaarisen teorian mukaisesti, niin konvergenssi on sen mukainen. Muulloin saadaan tarkempia todenmukaisia tuloksia, vaikka laskenta-aika piteneekin ongelmasta riippuen.

## 5 YHTEENVETO

Tämän työn tarkoituksena oli vertailla lineaarista palkkiteoriaa geometrisesti epälineaariseen teoriaan. Vertailu kohdistui palkin taipumiseen ja sen sisäiseen jännitystilaan. Työssä pyrittiin selvittämään lukijalle teorioiden eroavaisuuksista, milloin lineaarinen teoria ei enää riitä kuvaamaan palkin deformaatiota ja tulisi siirtyä geometrisesti epälineaariseen laskentaan sekä muutamia peukalosääntöjä hahmottamaan teorioiden välisiä rajatilanteita. Tutkielman rakenne koostui kahden lineaarisen palkkiteorian taipumaviivan yhtälöiden johtamisesta, epälineaarisuuden muodoista, joista tarkimmin paneuduttiin geometriasta johtuvaan epälineaarisuuteen, ja esimerkkitietävän laskennasta staattisesti. Esimerkkitehtävä rajoittuu tasotilanteeseen, missä mallinnettiin palkkirakenne pitkänä ja hoikkana, poikki-pinnan geometrialtaan tasapaksuna neliönä ja materiaalimallina käytettiin isotrooppista lineaarisesti kimmoista rakenneterästä. Palkkimallin geometriasta johtuen laskenta suoritettiin Euler-Bernoullin palkkielementillä.

Lineaaristen teorioiden esittelyyn kuului Euler-Bernoullin tekninen taivutusteoria, jota voidaan pitää yleisimpänä. Tässä palkkimallissa otaksutaan, että deformaatioissa palkin poikkileikkaus säilyy muuttumattomana eli ei sisällä leikkausvoimaa ja sen aiheuttamaa venymistä. Oletuksensa vuoksi Euler-Bernoullin palkkiteoria soveltuu parhaiten pitkille ja hoikille palkeille. Palkkiteoriaa, joka ottaa likimääräisesti huomioon leikkausvoiman aiheuttaman muodonmuutoksen kutsutaan Timoshenkon palkkiteoriaksi. Likimääräisyys juontaa siitä, että poikkileikkaukseen jakautunut leikkausjännitys keskiarvoistetaan, mistä syntyy virhettä, sillä todellisuudessa leikkausjännitys häviää palkin reunoilta. Virhettä poistetaan leikkauskorjauskertoimella. Yleensä leikkausvoiman vaikutus jätetään huomiotta staattisessa laskennassa, mutta tulee tarpeelliseksi dynaamisissa tarkasteluissa ja palkin poikkileikkauksen dimensioiden kasvaessa suhteutettuna palkin pituuteen.

Rakenteen stabiliteetin menetys voi johtua monesta epälineaarisuuden muodosta tai näiden yhdistelmistä. Yleisimpinä on pidetty materiaalista, kontaktista eli reunaehdoista ja geometriasta johtuvaa epälineaarisuutta. Materiaalista ja reunaehdoista johtuvat teoriaosuudet käsittelevät yksinkertaisia analyttisesti laskettavia esimerkkejä, joista johtopäätöksiin saatiin kuormitus – siirtymä kuvaajat, missä epälineaarinen käytös voitiin osoittaa johtuvan kimmo-plastisesta materiaalimallista ja kontaktimekanismista.

Geometrisessa epälineaarisuudessa puhutaan suurista siirtymistä, venymistä ja rotaatioista. Palkkirakenteiden yhteydessä käytetään suuria siirtymiä ja rotaatioita, mutta venymät pidetään pieninä johtuen yksinkertaisesti siitä, että yleiset rakennusteollisuuden materiaalit eivät kestä suuria venymiä ilman murtumista. Lineaarinen palkkiteoria jättää huomiotta taivutetussa palkissa muodostuvan sisäisen aksiaalivoiman eli kalvovoiman, millä on palkin taivutusjäykkyyttä kasvattava vaikutus. Mitä suuremmaksi taivutusjäykkyys kasvaa, niin sitä paremmin palkki vastustaa sitä taivuttavaa voimaa, mistä todellisuudessa johtuu pienemmät siirtymät käytettäessä suurten siirtymien teoriaa. Aksiaalivoiman suunnalla on merkitystä, sillä puristavana se taas alentaa taivutusjäykkyyttä. Laskennassa tämä rakenteen jännitysjäykistyminen tai -heikentyminen otetaan huomioon jännitysjäykkyydsmatriisilla, joka summataan elastisen jäykkyyteen.

Esimerkkitehtävän laskennassa käytettiin Dassault Systems Simulia Abaqus/CAE Student Edition 2019 ohjelmistoa. Laskenta suoritettiin kahdelle laskentamallille, jotka poikkesivat toisistaan vain reunaehdoista. Laskentamallien avulla pyrittiin esittämään lukijalle jännitysjäykistymisen huomioimisen vaikutus rakenteen taipumiseen. Molemmista päistä niveltuettu palkki ei pääse pitenemään, mikä kasvattaa huomattavasti sen sisäistä aksiaalivoimaa. Esimerkkitehtävässä käytetty palkki ei taipunut riittävästi, jotta olisi syytä käyttää epälineaarista ratkaisijaa. Mikäli palkki olisi ollut pidempi, ohuempi tai kuormitus suurempi, olisi tilanne ollut toinen. Tärkeimpänä lukijalle jää mieleen neuvot ja peukalosäännöt liittyen geometrisen epälineaarisuuden huomioimiseen. Neuvoina yleisimmät ovat deformaation suuruuden tarkastelu kriittisesti ja epäilyksen herätessä tulisi laskenta suorittaa geometrisen epälineaarisuuden kanssa. Peukalosääntöinä palkkirakenteeseen liittyen pidetään, että taipuman ollessa suurempi kuin puolet palkin korkeudesta ja venymien ollessa enemmän kuin 2–5 % tulisi käyttää geometrisesti epälineaarista teoriaa. Samankaltaista laskentaa voidaan suorittaa levy- ja kuorirakenteille. Työn ongelmakohtaksi muodostui sen laajuus, sillä geometriseen epälineaarisuuteen kuuluu vielä suurten rotaatioiden esittäminen, mutta se jouduttiin nyt jättämään pois.



## LÄHDELUETTELO

Dassault Systems, 2016. Abaqus 2016 Documentation, Abaqus Analysis User's Guide [verkkodokumentti]. Pariisi: Dassault Systems. Saatavissa: <http://130.149.89.49:2080/v2016/books/usb/default.htm> [viitattu 20.4.2021].

De Borst, R., Crisfield, M., Remmers, J. & Verhoosel, C., 2012. Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. 2. painos. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 527 s. ISBN 978-0-470-66644-9

Cook, R., Malkus, D. & Plesha, M., 1989. Concepts and Applications of Finite Element Analysis. 3. painos. New York: John Wiley & Sons Inc, 630 s. ISBN 978-0-471-84788-5

Gruttmann, F. & Wagner, W., 2001. Shear correction factors in Timoshenko's beam theory for arbitrary shaped cross-sections. *Computational Mechanics*, 27 (3), s. 199–207

Iwakuma, T., Ai, M. & Nishino, F., 1981. On derivation of Timoshenko beam stiffness equation. *Proceedings of JSCE*, (312), s. 119-128

Levy, R. & Spillers, W., 2003. Analysis of Geometrically Nonlinear Structures. 2. painos. Berlin: Springer Science Business Media, 276 s. ISBN 978-94-017-0243-0

Przemieniecki, J., 2012. Theory of Matrix Structural Analysis. New York: Dover Publications, 480 s. ISBN 978-0-486-64948-1

Renganathan, S., 2019. Caendkölsch, Geometric nonlinearity – What does it mean? Examples and applications [verkkodokumentti]. Aachen: Renganathan, S. Saatavissa: <https://caendkoelsch.wordpress.com/2019/03/14/geometric-nonlinearity-what-does-it-mean-post-1-2/> [viitattu 26.4.2021]

Salmi, T. & Pajunen, S., 2010. Lujuusoppi. Tampere: Pressus Oy, 462 s. ISBN 978-952-9835-67-6

Timoshenko, S., 1955. Strength of Materials. New York: D. Van Nostrand Company, INC, 442 s.

Wriggers, P., 2008. Nonlinear Finite Element Methods. Heidelberg: Springer-Verlag, 559 s. ISBN 978-3-540-71000-4