

# Características de la enseñanza del concepto de razón de cambio en las áreas de Física y Cálculo de la Universidad de La Salle y la Universidad Católica de Colombia

Francisco Niño Rojas\*, Wilson Pico Sánchez\*\*

Marco Aurelio Barrero Cubillos\*\*\*

<https://dx.doi.org/10.14718/EncuentroCienc.Básicas.2020.4.9>

## Resumen

El concepto de razón de cambio es uno de los más relevantes del cálculo, ya que explica fenómenos propios de las ciencias básicas y de diferentes áreas del saber, como el aumento y la disminución de la temperatura conforme varía el tiempo, el crecimiento de una planta con el paso de los días, el área de figuras geométricas al variar alguno de sus lados o el cambio de posición con respecto al tiempo, entre otros. En este trabajo se contrasta el criterio de profesores de física y matemáticas sobre el estado actual de la enseñanza del concepto de razón de cambio en las Universidades de La Salle y Católica de Colombia. Para conocer las características que priman en la enseñanza del concepto de razón de cambio, se encuestó a veintitrés profesores de las dos áreas del saber (seis profesores de la Católica y diecisiete de La Salle), las cuales fueron aplicadas durante las primeras semanas del segundo semestre de 2019. Se tuvieron en cuenta: el tiempo de experiencia en la enseñanza del concepto, la formación académica, el nivel de formación, la categoría docente, el área de trabajo y los años de experiencia en el área. Se observó que los profesores participantes tienen los conocimientos para la enseñanza del concepto, ya que la gran mayoría cuenta con más de diez años de experiencia en su área, con un mínimo de cinco años en la orientación de alguna de las asignaturas. Si bien la gran mayoría de los profesores hace uso de situaciones contextualizadas como recurso para la enseñanza, muchas veces estas

\* Docente, Universidad de La Salle. Correo electrónico: [fnino@unisalle.edu.co](mailto:fnino@unisalle.edu.co)

\*\* Docente, Universidad de La Salle. Correo electrónico: [wilpico@unisalle.edu.co](mailto:wilpico@unisalle.edu.co)

\*\*\* Docente, Universidad Católica de Colombia. Correo electrónico: [mabarrero@ucatolica.edu.co](mailto:mabarrero@ucatolica.edu.co)

no son procesadas por los estudiantes, puesto que se puntualiza en los procedimientos y algoritmos y no en la comprensión del concepto y la habilidad para resolver problemas. En consecuencia, a pesar de que se cuenta con fortalezas en la enseñanza del concepto de razón de cambio, se identificaron limitaciones que la alejan de las estrategias privilegiadas por las dos instituciones.

*Palabras clave:* caracterización, razón de cambio, enseñanza de las ciencias, enseñanza del cálculo.

## Characteristics of the Teaching of the Concept of Rate of Change in the Areas of Physics and Calculus at the Universidad de La Salle and the Universidad Católica de Colombia

### Abstract

The concept of rate of change is one of the most relevant in the calculus, since it explains phenomena typical of basic sciences and different areas of knowledge, such as the increase and decrease in temperature as time varies, the growth of a plant with the passing of the days, the area of geometric figures will vary some of its sides or the change of position with respect to time, among others. This paper contrasts the criteria of physics and mathematics teachers on the current state of teaching the concept of the rate of change in the Universities of La Salle and Católica de Colombia. To know the characteristics that prevail in the teaching of the concept of the rate of change, twenty-three professors from the two areas of knowledge were surveyed (six professors from the Universidad Católica de Colombia and seventeen from La Salle), which were applied during the first weeks of the second 2019 semester. The following were taken into account: the time of experience in teaching the concept, the academic training, the level of training, the teaching category, the work area and the years of experience in the area. It was observed that the participating teachers have the knowledge to teach the concept, since the vast majority have more than ten years of experience in their area, with a minimum of five years in the guidance of any of the subjects. Although the vast majority of teachers make use of contextualized situations as a teaching resource, many times these are not processed by students, since it is specified in the procedures and algorithms and not in the understanding of the concept and the ability to solve problems. Consequently,

despite the fact that there are strengths in teaching the concept of the rate of change, limitations were identified that distance it from the strategies favored by the two institutions.

*Keywords:* Characterization, rate of change, science teaching, calculus teaching.

## Introducción

Para la enseñanza del concepto de razón de cambio, los profesores usan diversos enfoques y estrategias didácticas de enseñanza; entre las más comunes tenemos la resolución de problemas, entendida como el proceso que sigue un estudiante desde la lectura, la decodificación, la interpretación, la representación y la planeación hasta la solución, basadas en la metacognición y buscan que los estudiantes conceptualicen. Sin embargo, a pesar de contar con múltiples maneras para desarrollar la clase, aún se observa que en el ámbito educativo universitario priman los procedimientos y los algoritmos, los cuales traen problemas para los estudiantes, pues no les ayudan a desarrollar las habilidades que se requieren para resolver problemas en su campo disciplinar (Artigue, 1995).

Para dar respuesta a esta problemática y dado que en la universidad se deben buscar estrategias alternativas de enseñanza que integren el conocimiento, presentamos este trabajo como parte de la primera fase de una propuesta interinstitucional del proyecto de investigación “Didácticas alternativas para el aprendizaje de conceptos afines entre la física y el cálculo”, en la que se presentan los resultados de las características sobre las didácticas que usan los docentes de física y matemáticas de la Universidad de La Salle y la Universidad Católica de Colombia en la enseñanza del concepto de razón de cambio y sus aplicaciones en la física.

En este trabajo se muestran los enfoques metodológicos y las didácticas, entendidos como la forma de abordar el desarrollo de un tema, que pueden ser: conductismo, constructivismo, aprendizaje significativo o una mezcla de varios enfoques, a lo que algunos llaman eclécticos. A partir de estos enfoques, los docentes diseñan una serie de actividades en torno a la enseñanza del concepto de razón de cambio, con situaciones contextualizadas presentes en el cálculo diferencial y la física mecánica. La razón de cambio es un tema afín entre las dos áreas y, para su comprensión, se requiere fundamentación matemática: lenguaje

algebraico, representaciones gráficas, análisis de tablas, operaciones y geometría en el plano.

También se revisaron, en las dos universidades, las estrategias de enseñanza de los docentes cuando se aborda el concepto, las actividades que se están realizando como ayuda, el acompañamiento del docente y los objetivos de enseñanza, entre otros.

A partir de los resultados y las teorías didácticas en la enseñanza de la matemática, la física y la solución de problemas con el uso de tecnologías, guías estructuradas y afines, se presenta una alternativa metodológica que permita desarrollar el tema de manera articulada que involucre material didáctico apoyado en tecnologías y la estrategia de aula invertida, con el fin de buscar un aprendizaje situado, contextualizado, aplicado y significativo.

## Marco teórico

### Aprendizaje basado en problemas

La enseñanza de ejercicios, conceptos y aplicaciones propios de la matemática han ayudado a la estructuración y el perfeccionamiento de muchas disciplinas, técnicas y ciencias. Numerosas investigaciones evidencian que la enseñanza de la matemática mediante la solución de problemas facilita el proceso de aprendizaje de los estudiantes, siempre y cuando conste de una formulación e instrucción asertiva que propicie en ellos la capacidad de interpretación, análisis de resultados y generación de conclusiones (Zabala, 2010).

En concordancia con Morales y Landa (2004), el aprendizaje basado en problemas (ABP) se caracteriza por ser una didáctica que se enfoca en el aprendizaje centrado en el estudiante y promueve el desarrollo de habilidades y competencias fundamentales para el ejercicio profesional. Además, en gran parte se lleva a cabo en grupos e incentiva el trabajo colaborativo y autodirigido de los estudiantes.

Recientemente, los docentes han optado por didácticas que abran escenarios confortables y favorecedores de los aprendizajes. La solución de problemas es fundamental, debido a que a diario nos enfrentamos a ellos y es importante darle solución (Herrera, Carrasco, Fernández y Perera, 2018). En comparación con

otras didácticas, como el manejo de casos y el aprendizaje basado en proyectos, el ABP estimula más competencias genéricas (Villa y Poblete, 2007), por lo que se ubica de manera exitosa e imprescindible en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

### *Guías de aprendizaje*

Una de las didácticas relevantes en los procesos de enseñanza y aprendizaje de todas las áreas del conocimiento es la guía de aprendizaje. Se caracteriza por ser un instrumento facilitador y orientador del aprendizaje activo, que ayuda a relacionar actividades tendientes a la solución de problemas, el desarrollo de habilidades y a la organización de tareas de forma secuencial, que fomente el compromiso y responsabilidad de trabajo independiente (Romero y Moya, 2012).

En el cálculo diferencial, el uso de las guías de aprendizaje es frecuente. En algunas situaciones se centran en orientar la solución de problemas de variación de funciones a partir de conceptos de la derivada en diferentes situaciones y contextos (Instituto Politécnico Nacional, s. f.). Asimismo, este instrumento es utilizado con fines de promover el incremento de habilidades por medio de la solución de problemas en los que se relaciona principalmente el concepto de derivada. Lo anterior muestra la importancia de abordar el concepto de derivada desde la estrategia de solución de problemas.

La Física I es una de las asignaturas que requieren comprender algunos conceptos propios del cálculo diferencial (López-Gay y Martínez, 2005), entre los que se destacan: variable, función en variable real, límite de una función, derivada de una función, aplicaciones de problemas de razones de cambio, entre otros. Estos conceptos son necesarios en la “comprensión de los fundamentos del tratamiento científico de los fenómenos naturales, la aplicación de conceptos y leyes básicas de la mecánica y la formulación de modelos matemáticos y sus condiciones de aplicación a los problemas mecánicos” (Universidad Politécnica de Madrid, s. f., p. 5). Es por esto que algunas guías de aprendizaje apuntan a promover el dominio y la comprensión de conceptos asociados con fundamentos generales de la mecánica y su incidencia en la solución de problemas aplicados a la ingeniería (Universidad Politécnica de Madrid, s. f.).

Lo anterior expone la importancia de usar una guía de aprendizaje basada en problemas que, además de relacionar conceptos matemáticos con la física, permita “clarificar conceptualmente el significado de todo lo que se hace cuando se

usa el cálculo diferencial en aplicaciones físicas” (Martínez, López-Gay, Gras y Torregrosa, 2002, p. 272).

### Aula invertida

Debido al ausentismo escolar, a la falta de tiempo y a los ritmos de aprendizaje diferentes, nace el concepto de “aula invertida” (AI), como espacio extracurricular para complementar las clases y poner al tanto en los temas del curso a los estudiantes que han faltado o no han comprendido la totalidad de las temáticas trabajadas. Estos problemas hacen que Bergmann y Sams (2012) se planteen esta estrategia como una salida a la dificultad de la mayoría de las clases, en las que el profesor entra con un tema nuevo y el estudiante, en su afán de tomar apuntes y retener la información, queda inmerso en confusión y desespero, lo que conlleva a la desidia y a claudicar en su intento de aprender y aprobar.

El AI se convierte en una estrategia didáctica útil, caracterizada por un enfoque de enseñanza que cambia el modelo tradicional de aprendizaje y le da un mayor peso a la práctica. Este enfoque apunta al aprovechamiento de las nuevas tecnologías y su incidencia en los procesos de enseñanza y aprendizaje, en ambientes virtuales guiados por el docente, dinámicos e interactivos y aportadores al aprendizaje significativo y colaborativo (Vidal, Rivera, Nolla, Morales y Vialart, 2016).

### *Razón de cambio*

La educación, para ayudar al estudiante a comprender el concepto de razón de cambio, ha explorado caminos diferentes. Se han encontrado trabajos con propuestas didácticas o metodológicas enfocadas a facilitar la enseñanza de la noción de derivada y del concepto de razón de cambio.

Vrancken, Engler y Müller (2009) presentan una secuencia didáctica que promueve las habilidades relacionadas con las variables, las funciones y la variación, lo que facilita el aprendizaje del concepto de derivada a partir de registros de representación e interpretaciones variacionales, por ejemplo, la razón de cambio. Asimismo, Vidal (2012) interpreta la noción de derivada como razón de cambio y propone una unidad didáctica enfocada al análisis, a la interpretación y a la solución de problemas en contextos matemáticos y físicos. En las actividades se emplean los recursos tradicionales como guías de trabajo y nuevas tecnologías, entre otros, y cuentan con la observación y el acompañamiento del docente.

El concepto de razón de cambio se involucra en diversos escenarios de variación. Vrancken y Engler (2014) estudian la importancia de “caracterizar variaciones de magnitudes a través de cálculos de razones de cambios” (p. 454), lo que propicia el proceso cognitivo de la visualización. Para esto presentan una propuesta guiada por una secuencia didáctica tendiente a identificar la comprensión de los conceptos de la cinemática como la posición-tiempo, velocidad promedio, velocidad instantánea y aceleración, mediante representaciones gráficas y problemas. Se evidencian aspectos positivos en la metodología empleada, pues promueve la comprensión de la derivada y fomenta el trabajo colaborativo; sin embargo, las dificultades más relevantes tienen que ver con la asimilación y el manejo de los conceptos previos necesarios para asimilar el concepto de razón de cambio.

### *Algo de historia*

El concepto de razón de cambio, como el cambio de una variable, se viene tratando desde la Antigüedad: los babilonios lo abordaron de manera práctica, inicialmente de forma cualitativa, y más adelante, en Roma, de forma cuantitativa; esto hace más de 3.000 años.

El problema para estas civilizaciones consistía en mantener:

[...] una pendiente uniforme en cada cara y la misma en cada una de las cuatro caras de la pirámide. Se solía utilizar la relación avance vs. subida, denominándola por la palabra *seqt*, que significaba la separación horizontal de una recta oblicua del eje vertical por unidad de variación en la altura (Boyer, 1986, p. 11).

Hacia el año 585 a. C, Tales de Mileto hizo aproximaciones al estudio de las proporciones y variaciones. Este estudio teórico fue la génesis de la matematización de las comparaciones geométricas. En sus estudios, Tales afirma “que los lados correspondientes a ángulos iguales en triángulos semejantes, son proporcionales” (citado en Rendón, 2009, p. 2).

La forma de abordar estas proporciones era encontrar mediciones de objetos reales de manera indirecta con medidas que eran posibles de manera directa. Tales midió la altura de una pirámide utilizando la proporción y la variación de la sombra en una vara vertical.

En ese tiempo, la teoría de las proporciones estaba centrada en mostrar la armonía cósmica por medio del establecimiento de razones numéricas entre cantidades discretas y la comparación entre estas para definir proporciones.

Eudoxo, matemático perteneciente a la escuela de Platón, reformuló la teoría de las proporciones y su propuesta es la que utiliza Euclides en el libro V de la siguiente forma:

Las magnitudes están en la misma razón, la primera a la segunda y la tercera a la cuarta, cuando, tomados cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera y cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, entonces los primeros equimúltiplos ambos exceden, son iguales o menores que los segundos equimúltiplos, tomados en el orden correspondiente (Boyer, 1986, p. 99).

Arquímedes (287-212 a. C.) usó la razón geométrica para derivar las fórmulas para el área y el volumen de diversas figuras planas y sólidos regulares. Profundizó sus estudios en la espiral y las líneas tangentes y la relación entre la rapidez y la dirección del movimiento observando la tangente en diferentes puntos de la espiral. En este momento se identifica la relación física de las proporciones y variaciones (Rendón, 2009).

En la Edad Media, hacia la primera mitad del siglo XIV, los matemáticos de la escuela de Mentón se pusieron en la tarea de predecir la magnitud de una magnitud física que está cambiando y analizaron la fuerza que actúa sobre un móvil que está en desplazamiento por un camino inclinado. Esta relación entre la matemática y la física dio origen a nuevo campo de estudio, la cinemática, que constituyó la base del cálculo.

Jordano de Namore, en el siglo XIII, fundó la escuela medieval de mecánica, cuyo fin principal era el estudio de las magnitudes físicas. La formulación del plano inclinado se le debe a él.

Jordano caracteriza un movimiento de razón de cambio constante, por medio de razones geométricas entre magnitudes. La relación constante entre la altura y la longitud del plano inclinado.

Nicolás de Oresme, en el siglo XIV, estudió la variación de fenómenos físicos uniformes y no uniformes:



Para el caso de un cuerpo con movimiento acelerado, Oresme dibujaba una curva de velocidad vs tiempo en la que los puntos de una recta horizontal representaban los sucesivos instantes de tiempo iguales, que llamó longitudes, y para cada punto trazaba un segmento (al que llamó latitud) perpendicular a la recta horizontal, cuya longitud representaba la velocidad en ese instante (Rendón, 2009, p. 5).

Oresme caracteriza el movimiento con aceleración constante, en el que la velocidad cambia en forma constante, como un movimiento de razón constante. De esta forma dedujo que su curva tenía pendiente constante y determinó la razón de cambio de velocidades.

Aparece en escena Galileo Galilei (1564-1642), quien opta por describir el mundo físico en términos de cantidades medibles como el tiempo, la distancia, la fuerza y la masa. Utiliza las representaciones geométricas de Oresme para los estudios de velocidades e introduce técnicas cuantitativas específicas con las cuales llega a la determinación del teorema de velocidad media, que explica mediante razones geométricas.

“Una distancia es recorrida por un cuerpo con velocidad uniformemente acelerada, es igual al tiempo en que el mismo espacio sería recorrido por el mismo objeto a velocidad uniforme igual a la velocidad media” (Rendón, 2009, p. 7).

Desde allí se abre un campo de investigación que intenta encontrar métodos para caracterizar matemáticamente las curvas como representativas de las variaciones de las magnitudes a estudiar. Casi simultáneamente y haciendo uso, por primera vez, de la idea de que por medio de una ecuación se podía expresar la dependencia entre dos cantidades variables Descartes y Fermat desarrollaron métodos específicos para caracterizar las curvas (Rendón, 2009).

Retomaron de los griegos la utilidad de la recta tangente, que posteriormente permitió relacionar los valores de una función para puntos muy próximos, con los valores de las ordenadas de la recta tangente en los puntos respectivos, de donde surge la idea del triángulo diferencial.

En los trabajos de Descartes y Fermat se emplean las ecuaciones que muestran la dependencia entre las dos magnitudes representadas, la razón entre la diferencia de los valores de la magnitud dependiente en puntos próximos y la diferencia de los valores correspondientes de la magnitud independiente, es decir, la razón

de cambio del incremento de la magnitud dependiente respecto al incremento de la magnitud independiente.

En 1696, el marqués de L'Hôpital publicó un libro en el que se menciona la importancia de las gráficas para representar y caracterizar los cambios de dichas magnitudes. También señaló la importancia de lo que llamó la diferencia fundamental de una variable continua y se podría decir que es el primer libro de cálculo.

Después de los trabajos de Fermat y Descartes, Barrow (1630-1677) trabajó con la intención de caracterizar tangentes, pero, a diferencia de sus antecesores, introdujo, según el pensar de los historiadores de la matemática, una interpretación infinitesimal del problema. En su trabajo modificó el método de Fermat y consideró un arco "indefinidamente pequeño" que asoció con un trozo de la tangente para construir lo que hoy llamamos triángulo diferencial.

Hacia 1640, Roberval y Torricelli empezaron a incluir interpretaciones cinemáticas de las curvas estudiadas, interpretaron la gráfica como la representación de la dependencia de dos magnitudes físicas y consideraron la tangente en un punto de la curva como la expresión de la razón de cambio de la magnitud dependiente respecto a la independiente, razón que permitía identificar la dirección del cambio de la magnitud en ese punto. Con su método consiguieron determinar tangentes de todas las curvas típicas de la época y presentaron la aceptación de las razones de cambio heterogéneas.

Posteriormente surgieron los aportes de Newton y Leibniz. Este último trabajó la razón de diferencias que luego se transformó en la razón de diferencias entre valores infinitamente pequeños, o sea, el diferencial. Más tarde se dio cuenta de que esta razón de diferencias le posibilita encontrar una ecuación para determinar la inclinación de la recta tangente y encontrar razones de cambio instantáneas.

La aceptación de las razones de cambio heterogéneas rompió con la manera griega de ver las razones y abrió el acceso al estudio de los fenómenos de variación entre magnitudes interdependientes. Cada punto de la curva en el plano se desligó de los segmentos asociados como representantes de dicha magnitud y empezó a verse como la asociación de dos valores de magnitudes de diferente especie. Así surgen los estudios de las variaciones de las razones heterogéneas. Con el avance del álgebra y la posibilidad de usar ecuaciones que muestran la dependencia entre las dos magnitudes interdependientes apareció la representación

de las razones de cambio por medio de razones heterogéneas de diferencias, que constituyen la clave para avanzar hacia el cálculo diferencial (Rendón, 2009).

Por otra parte, al emplear las tangentes para caracterizar curvas se fue gestando el concepto de pendiente en todo el proceso que dio origen a las razones de cambio instantáneas, pero su conceptualización como objeto de estudio siguió un camino distinto al del cálculo: la geometría analítica. Desde allí se empezó a hablar de razón de cambio.

La razón de cambio se define como un cociente incremental o de diferencias. El cociente es el cambio o la diferencia en el eje Y dividido entre el respectivo cambio en el eje X; se reconoce que el cambio se establece al hallar la diferencia entre una magnitud final y una inicial. Con la notación moderna puede escribirse como:  $\Delta(y) / \Delta(x) = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$ . En muchas ocasiones, la razón de cambio está dotada de un significado contextual, pues plantea relaciones significantes entre las magnitudes que intervienen. Este cociente, en algunos casos, dará el mismo resultado (constante) y, en caso contrario, como razón de cambio variable. En el siguiente apartado se explican estas razones de cambio y la diferenciación entre ambos (Larson y Edwards, 2010).

Para este estudio se considera cómo se conceptualiza en el aula de clase la razón de cambio, pues en el aula es donde debe empezar a tomar significado para los estudiantes. Se debe relacionar de manera intrínseca en cálculo y física para ver su relación y apropiar significado.

### *Trabajo autónomo*

El trabajo autónomo en el campo de la educación tiene tres componentes fundamentales: el desarrollo de la autonomía en el individuo, el aprendizaje para luego llevarlo al trabajo autónomo, y el laboratorio activo de aprendizaje.

### *La autonomía*

Una primera mirada del significado de autonomía, que se deriva de la tradición filosófica kantiana, está relacionada con la formación del pensamiento crítico: pensar con entendimiento propio, hacer uso del propio entendimiento, sin la ayuda o dirección de otro. La estructura del sistema educativo se cimienta en una serie de actitudes por la que los seres humanos se adaptan a la subordinación, dado que sienten que es un riesgo pensar por cuenta propia. Romper con esa

tendencia es lo que Kant llama mayoría de edad. Desde el nacimiento se crean lazos de dependencia, de tutelaje y, si el modelo educativo se repite, el individuo no llegará a su mayoría de edad, es decir, no desarrolla sus propios pensamientos, su construcción de moral y de ética, en el campo del crecimiento personal y del respeto por las normas sociales.

La autonomía, entendida desde ese equilibrio entre lo privado y lo público, podrá formar individuos capaces de tomar responsablemente sus propias decisiones, sin afectar a los demás con sus acciones (Erazo, 2003).

El objetivo del educador es crear espacios para delegar responsabilidades al estudiante a medida que va creciendo para que, de esta manera y de acuerdo con su edad, el individuo alcance su mayoría de edad, es decir, su autonomía.

Habermas, en 1968, hace referencia a la identificación, que en el contexto kantiano se refiere a la autonomía. En la identificación, el individuo supera un comportamiento imitativo: llega a ser y siente que es “él mismo”, no necesita de identificaciones, no puede ser un “seguidor” ni un fanático; ha evaluado críticamente y con autonomía sus argumentos racionales y no proyecta en otros emotividades y poderes similares al del padre idealizado.

La autonomía se refiere a la regulación de la conducta por normas que surgen del propio individuo. Autónomo es todo aquel que decide conscientemente qué reglas son las que van a guiar su comportamiento.

Tener autonomía quiere decir ser capaz de hacer lo que uno cree que se debe hacer, pero no solo eso. También significa ser capaz de analizar lo que creemos que debemos hacer y considerar si de verdad debe hacerse o si nos estamos engañando.

Somos autónomos cuando somos razonables y consideramos qué debemos hacer con todos los datos a nuestra disposición. Dicho de otro modo: somos verdaderamente autónomos cuando usamos nuestra conciencia moral (Universidad de Navarra, 2013).

### *Aprendizaje*

De acuerdo con la Federación de la Enseñanza de Andalucía (2009), Hergenhahn define el aprendizaje “como un cambio relativamente permanente en la conducta

o en su potencialidad, que se produce a partir de la experiencia y no puede ser atribuido a un estado temporal” (p. 2). Esta definición contempla la experiencia como la condición esencial para el aprendizaje e incluye los cambios en los patrones de conducta. Además, abarca la decisión personal de asumir el objeto a aprender desde su propio interés de hacerlo. Desde esta perspectiva, el aprendizaje está relacionado con la autonomía.

En el proceso de aprendizaje se integran los conocimientos y las destrezas a lo largo de la vida, en un proceso en el que intervienen las capacidades naturales, el grado de madurez y la interacción con el medio. Es fundamental entender los principios del aprendizaje que llevan implícitos una serie de procesos cognitivos: la atención, la abstracción, la inducción, la deducción, la interpretación, la representación, la transferencia, la memorización y, por último, la comprensión (Federación de la Enseñanza de Andalucía, 2009).

### *Laboratorio de aprendizaje activo*

Otra didáctica tiene que ver con la propuesta de Aguirre y Alfonso (2012), que considera la realización de actividades mediante “laboratorio de aprendizaje activo”, el cual se apoya en una serie de pasos que le permiten al estudiante relacionar los tiempos para el desarrollo de las actividades, revisar los conceptos previos y diagnósticos, debatir sus opiniones y analizar los resultados obtenidos. Lo anterior con la corrección y retroalimentación del docente.

## Metodología

Para conocer las características de la enseñanza del concepto de razón de cambio de los docentes de física y cálculo de las dos universidades comprometidas en este rastreo, se aplicó una metodología cualitativa con enfoque descriptivo, en el que se recolectan datos o componentes sobre diferentes aspectos de las formas didácticas que utilizan los docentes al abordar el objeto de estudio de esta experiencia. Se identifican aspectos comunes entre docentes de las asignaturas de una universidad y luego se hace un cruce entre las dos universidades que lleve a encontrar el enfoque más común entre todos los docentes. “La investigación descriptiva busca especificar propiedades, características y rasgos importantes de cualquier fenómeno que se analice” (Hernández, Fernández y Baptista, 2003, p. 119).

Se encuestó a veintitrés profesores de las dos áreas (seis profesores de la Católica y diecisiete de La Salle), quienes participaron libremente con sus opiniones para responder un cuestionario enviado al correo institucional. Estos fueron diligenciados durante las primeras semanas del segundo semestre de 2019 y debían responderse teniendo en cuenta el tiempo de experiencia en la enseñanza del concepto, la formación académica, el nivel de formación, la categoría docente, el área de trabajo y los años de experiencia en el área.

A su vez, debían responder una serie de preguntas cerradas que indagaban por la forma de organización de la clase, su desarrollo y si empleaban estrategias de seguimiento y acompañamiento o no. También se buscaba identificar si el uso de actividades promovía el desarrollo de habilidades y competencias y si estaban articuladas con otras áreas del saber o no.

Por último, mediante seis preguntas orientadoras, se pretendía identificar las dificultades más frecuentes al enseñar el tópico de razón de cambio, el alcance del objetivo de aprendizaje planteado para la clase, las actividades que suelen utilizar para sus intervenciones didácticas y lo que perciben de los estudiantes cuando se aborda el concepto.

Para identificar los aspectos comunes se observaron las respuestas abiertas por asignatura y universidad, y se organizó un listado con todos los elementos que resaltaban los docentes en sus respuestas y aquellos que debían tenerse en cuenta según el enfoque metodológico promovido por las dos instituciones para abordar el concepto (resolución de problemas). Los estudios descriptivos miden de manera más bien independiente los conceptos o las variables a los que se refieren y se centran en medir con la mayor precisión posible (Hernández et al., 2003).

En una mesa de trabajo con todos los investigadores se cruzaron los datos y se identificaron diferencias y semejanzas en las categorías elaboradas por cada universidad. Asimismo, como el estudio tuvo un enfoque cualitativo, fue necesario analizar los resultados de las encuestas diligenciadas en las dos instituciones e identificar los rasgos comunes y las características de las actividades y se elaboró una categorización posible unificada en relación con los modelos didácticos reconocidos. Con la información organizada se procedió a establecer las características de la enseñanza del concepto de razón de cambio en las áreas de física y cálculo de las dos universidades.

## Resultados

En cuanto a los veintitrés profesores que participaron en la encuesta (Anexo 1), se puede decir que la gran mayoría cuenta con estudios de maestría o doctorado en ciencias: veintiuno tienen estudios posgraduales y dos, especialización; llevan más de diez años enseñando en el ámbito universitario el concepto de razón de cambio, lo cual indica que están cualificados para su enseñanza. Para ejercer en estas universidades, los profesionales deben contar con mínimo cinco años de experiencia universitaria en el área de formación y con estudios posgraduales. Los profesionales que solo tienen especialización tienen una trayectoria en cada institución por más de diez años y han acompañado los procesos en las instituciones por varios años debido a que han obtenido una evaluación docente sobresaliente como mínimo.

En la Tabla 1 podemos observar los resultados de la encuesta en las dos universidades.

Tabla 1

*Resultados del cuestionario diligenciado por los docentes que han enseñado el concepto de razón de cambio en la Universidad de La Salle y en la Universidad Católica de Colombia*

Pregunta	Criterio	Sí	No
1	¿Realiza alguna actividad diagnóstica a los estudiantes que le permitan organizar y establecer la mejor estrategia para abordar el concepto de razón de cambio?	26 %	74 %
2	Para abordar el concepto de razón de cambio, ¿realiza actividades complementarias, adicionales a la clase, que ayudan a su comprensión?	74 %	26 %
3	Para abordar el concepto de razón de cambio, ¿aplica estrategias de acompañamiento de forma individualizada?	35 %	65 %
4	Para abordar el concepto de razón de cambio, ¿promueve el desarrollo de habilidades o competencias propias del campo de formación profesional?	83 %	17 %
5	¿Realiza modificaciones a las actividades planificadas durante la clase del concepto de razón de cambio, según el nivel de participación y de apropiación del tema por parte de los estudiantes?	65 %	35 %
6	¿Utiliza estrategias que incluyan un proceso para resolver problemas de aplicación del concepto de razón de cambio?	100 %	0 %

Pregunta	Criterio	Sí	No
7	¿Ofrece instrumentos de autoevaluación a sus estudiantes, relacionados con el aprendizaje del concepto de razón de cambio?	35 %	65 %
8	¿Promueve la articulación del concepto de razón de cambio con otras áreas del conocimiento?	83 %	17 %

Fuente: elaboración propia.

Puede observarse que los criterios de organización y desarrollo de la clase que menos tienen en cuenta los docentes están las actividades relacionadas con el diagnóstico inicial (26 %), acompañamiento durante la clase a las necesidades individuales de los estudiantes (35 %) y la retroalimentación asertiva, ya que no cuentan con los instrumentos que les permitan adelantar estos procesos (35 %). En contraste, se aprecia que hacen mayor énfasis en actividades relacionadas con el desarrollo de habilidades y competencias de las áreas, así como también en actividades que articulan el concepto con otras disciplinas o áreas de conocimiento (más de 85 %).

En las preguntas abiertas se encontró que los profesores identifican como principales dificultades para la enseñanza del concepto la poca motivación con la que los estudiantes afrontan los conceptos nuevos. La capacidad de interpretación con la que ingresan los estudiantes es baja, lo cual impide llevar a cabo un buen proceso durante la clase, ya que esto incide en el planteamiento de un modelo a partir de una situación problema.

En lo referente al alcance que se plantean los profesores, coinciden en que buscan que el estudiante logre conceptualizar y, a partir de ahí, puedan establecer vínculos con otras áreas de conocimiento para resolver situaciones en contexto o en el ámbito real.

Entre las actividades más frecuentes que los profesores emplean para enseñar el concepto están ejercicios propuestos en libros, lecturas al inicio de la clase que faciliten la apertura y la propuesta catedrática acompañada de preguntas. Sin embargo, reconocen que su práctica docente podría mejorar si se usaran mediaciones tecnológicas, lo cual ayudaría a ofrecer otras aproximaciones al concepto.

Entre las percepciones más frecuentes que identifican los docentes están la falta de disposición al aprendizaje, la frustración por la no comprensión y expectativa por la aplicación.



Como una diferencia significativa en la enseñanza del concepto de razón de cambio entre los docentes de física y los de matemáticas, se halló que los primeros hacen acercamientos al concepto desde lo numérico, mientras que los segundos usan representaciones algebraicas con mayor frecuencia, pero los de ambas áreas emplean situaciones contextualizadas comunes como el estudio de la posición, la velocidad o la aceleración de un objeto que se mueve en línea recta.

Entre las características comunes de los procesos de enseñanza de los docentes de matemáticas y física en las dos universidades se tienen:

1. Los docentes hacen actividades complementarias para ayudar a la comprensión del concepto de razón de cambio, como recursos tecnológicos, guías de aprendizaje y libros de apoyo.
2. Las actividades planteadas promueven el desarrollo de habilidades y competencias propias de las ciencias básicas en los estudiantes, como la observación, la interpretación, el planteamiento de hipótesis y la resolución de problemas.
3. Las estrategias didácticas promovidas por los docentes para resolver problemas siguen el siguiente proceso: lectura, decodificación, interpretación, representación, planeación y solución del problema.
4. La enseñanza del concepto de razón de cambio emplea situaciones contextualizadas para hacer una aproximación a las realidades de los estudiantes de acuerdo con su formación.

A partir de los hallazgos, proponemos que las universidades fortalezcan las estrategias didácticas institucionalizadas para la enseñanza de las ciencias, con base en el enfoque de resolución de problemas y el aula invertida mediada con recursos tecnológicos como estrategia para apoyar la participación de los estudiantes.

## Conclusiones

Este trabajo contó con la participación de docentes de las áreas de física y matemáticas de las dos universidades y permitió reflexionar sobre las didácticas que se emplean para la enseñanza del concepto de razón de cambio y la forma como se articula en las dos áreas. Entre las estrategias más comunes que los profesores

emplean se encuentran la resolución de problemas y la clase activa; sin embargo, se evidencia que muchos de ellos mantienen las estrategias aprendidas en su formación.

En las didácticas empleadas por los docentes de ambas universidades se logra identificar que los estudiantes comparten las mismas dificultades, que tienen que ver con la interpretación de situaciones contextualizadas, el análisis y la interpretación de gráficas y la asimilación de conceptos como variable, razón, proporción y rapidez, entre otros.

Los resultados de la etapa de caracterización brindan los elementos suficientes para organizar un proyecto de investigación que aborde la construcción de didácticas armonizadas y estructuradas con apoyo en las TIC: “Didácticas alternativas para el aprendizaje de conceptos afines entre física y cálculo”, ya que fue posible identificar las variables clave que afectan la enseñanza del concepto de razón de cambio y su relación con las aplicaciones físicas.

Para contar con más elementos que fortalezcan la propuesta de proyecto interinstitucional sugerimos ampliar la caracterización al campo documental de las instituciones, la mirada de los aprendices frente al concepto y la participación de pares amigos que verifiquen lo que los docentes manifiestan realizar en el aula de clase, así como también la inclusión de otras instituciones que compartan intereses.

## Referencias

- Aguirre, C. y Alfonso, R. (2012). *Una propuesta para la enseñanza de la derivada como razón de cambio a estudiantes de grado undécimo*. (Tesis doctoral inédita). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.
- Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97-140). Ciudad de México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Bergmann, J. y Sams, A. (2012). *Flip Your Classroom Every Student in Every Day*. Washington: International Society for Technology in Education.
- Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. Nueva York: Alianza Editorial.

- Erazo, E. (diciembre, 2003). Qué significa “formación para la autonomía. Una perspectiva filosófica. *Páginas de la UCPR* (67), 7-16.
- Federación de la Enseñanza de Andalucía. (mayo, 2009). Aprendizaje: definición, factores y clases. *Revista digital para profesionales de la enseñanza* (2), 1-6.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2003). *Metodología de la investigación* (5ta. ed.). Ciudad de México: McGraw-Hill.
- Herrera, S., Carrasco, M., Fernández, M. y Perera, J. (2018). Solución de problemas como proceso de aprendizaje cognitivo. *Boletín Redipe*, 7(4), 107-117.
- Instituto Politécnico Nacional. (s.f.). *Guía de aprendizaje de Cálculo Diferencial*. Recuperado de <https://www.ipn.mx/assets/files/cecylt11/docs/Guias/UABasicas/Matematicas/calculo-diferencial.PDF>
- Larson, R. y Edwards, B. (2010). *Cálculo de una variable*. Ciudad de México: McGraw-Hill.
- López-Gay, R. y Martínez, J. (2005). ¿Qué hacen y qué entienden los estudiantes y profesores de física cuando usan expresiones diferenciales? *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 23(3), 321-333.
- Martínez, J., López-Gay, R., Gras, A. y Torregrosa, G. (2002). La diferencial no es un incremento infinitesimal. Evolución del concepto de diferencial y su clarificación en la enseñanza de la física. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 20(2), 271-284.
- Morales, P. y Landa, V. (2004). Aprendizaje basado en problemas. *Theoria*, 13, 145-157.
- Rendón, P. (2009). *Conceptualización de la razón de cambio en el marco de la enseñanza para la comprensión*. (Tesis de maestría inédita). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
- Romero, M. y Moya, E. (2012). Las guías de aprendizaje autónomo como herramienta didáctica de apoyo a la docencia. *Escuela abierta* (15), 9-31.
- Sánchez, G., García, M. y Linares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 11(2), 267-296.
- Universidad Politécnica de Madrid. (s. f.) *Guía de aprendizaje de la asignatura Física I*. Recuperado de [http://www.minasyenergia.upm.es/attachments/article/2137/Fisica\\_1\\_12\\_13.pdf](http://www.minasyenergia.upm.es/attachments/article/2137/Fisica_1_12_13.pdf)
- Universidad de Navarra. (2013). *Escuelas de familia moderna. Documentación sobre las competencias*. Navarra: Universidad de Navarra.
- Vidal, M., Rivera, N., Nolla, N., Morales, I. y Vialart, M. (2016). Aula invertida, nueva estrategia didáctica. *Revista cubana de educación médica superior*, 30(3), 678-688.

- Vidal, O. (2012). *Interpretación de la noción de derivada como razón de cambio instantánea en contextos matemáticos*. (Tesis de maestría inédita). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.
- Villa, A. y Poblete, M. (2007). *Aprendizaje basado en competencias: una propuesta para la evaluación de competencias genéricas*. Bilbao: Ediciones Mensajero.
- Vrancken, S. y Engler, A. (abril, 2014). Una introducción a la derivada desde la variación y el cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 28(48), 449-468.
- Vrancken, S., Engler, A. y Müller, D. (2009). Una propuesta para la introducción del concepto de derivada desde la variación. Análisis de resultados. En I. Zapico y S. Tajeyan (eds.), *Actas de la VII conferencia argentina de educación matemática* (pp. 129-138). Buenos Aires: Soarem.
- Zabala, A. (2010). *Revisión crítica de la contextualización matemática que involucra conceptos físicos*. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/17107/1/Zabala2010Revision.pdf>

## Anexo 1. Cuestionario aplicado a los profesores de la Universidad de La Salle y de la Universidad Católica de Colombia

Proyecto: didácticas alternativas para la enseñanza de conceptos afines entre física y cálculo

*Instrumento para profesores sobre el estado actual de la enseñanza del concepto de razón de cambio*

Objetivo: contrastar el criterio de profesores sobre el estado actual de la enseñanza del concepto de razón de cambio.

Por favor responda cada una de las siguientes preguntas:

Nivel de formación: profesional \_\_\_\_, especialización \_\_\_\_, maestría \_\_\_\_, doctorado \_\_\_\_, otra \_\_ ¿Cuál? \_\_\_\_\_

Áreas en las que ha trabajado: \_\_\_\_\_

Años de experiencia en la enseñanza del concepto razón de cambio:  
\_\_\_\_\_

Categoría docente: \_\_\_\_\_. Años de experiencia como docente en el  
área: \_\_\_\_\_

Estimado profesor: se estudia la enseñanza del concepto de razón de cambio en la asignatura de Cálculo Diferencial (Cálculo I) y Física I (Física Mecánica) para ingenierías. Nos ayudaría a conocer sus criterios en relación con las preguntas formuladas. Le agradecemos de forma anticipada su sinceridad y cooperación y le garantizamos el anonimato de sus respuestas.

## I. VALORACIÓN

1. ¿Realiza alguna actividad diagnóstica a los estudiantes que le permita organizar y establecer la mejor estrategia para abordar el concepto de razón de cambio? Sí \_\_\_\_ No \_\_\_\_
2. Para abordar el concepto de razón de cambio, ¿realiza actividades complementarias, adicionales a la clase, que ayuden a su comprensión? Sí \_\_\_\_ No \_\_\_\_
3. Para abordar el concepto de razón de cambio, ¿aplica estrategias de acompañamiento de forma individualizada? Sí \_\_\_\_ No \_\_\_\_
4. Para abordar el concepto de razón de cambio, ¿promueve el desarrollo de habilidades o competencias propias del campo de formación profesional? Sí \_\_\_\_ No \_\_\_\_
5. ¿Modifica las actividades planificadas durante la clase del concepto de razón de cambio, según el grado de participación y de apropiación del tema por parte de los estudiantes? Sí \_\_\_\_ No \_\_\_\_
6. ¿Utiliza estrategias que incluyan un proceso para resolver problemas de aplicación del concepto de razón de cambio? Sí \_\_\_\_ No \_\_\_\_
7. ¿Ofrece instrumentos de autoevaluación a sus estudiantes relacionados con el aprendizaje del concepto de razón de cambio? Sí \_\_\_\_ No \_\_\_\_
8. ¿Promueve la articulación del concepto de razón de cambio con otras áreas del conocimiento? Sí \_\_\_\_ No \_\_\_\_

## II. REFLEXIÓN SOBRE SU ENSEÑANZA

1. ¿Cuáles son las principales dificultades que encuentra en la enseñanza del concepto de razón de cambio? \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
2. ¿Cuál es el alcance que usted busca con el estudiante cuando enseña el concepto de razón de cambio? \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
3. ¿Cuáles son las actividades que emplea en la enseñanza del concepto de razón de cambio? \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
4. ¿Qué actividades adicionales sugiere para mejorar la apropiación del concepto de razón de cambio? \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
5. Durante el proceso de enseñanza del concepto de razón de cambio, ¿cuáles son las percepciones más frecuentes que observa en los estudiantes? \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
6. Si tiene alguna observación con respecto a las estrategias de enseñanza del concepto de razón de cambio, por favor escríbalas. \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_