



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

O teorema de Poincaré-Miranda

Julio Novoa Fernández

2019 – 2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

O TEOREMA DE POINCARÉ-MIRANDA

Julio Novoa Fernández

Setembro 2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

Área de Coñecemento: ANÁLISE MATEMÁTICA
Título: O TEOREMA DE POINCARÉ-MIRANDA
Titor/a: Rosana Rodríguez López (cotitor: Daniel Cao Labora)
Breve descrición do contido
<p>O teorema dos valores intermedios, un resultado de capital importancia na Análise Matemática, establece que unha función continua nun intervalo compacto acada todos os valores comprendidos entre aqueles que toma nos seus extremos. Como consecuencia deste resultado, dedúcese o teorema de Bolzano, así como outras relevantes propiedades das funcións continuas definidas en intervalos.</p> <p>O teorema de Poincaré-Miranda constitúe unha xeneralización de grande interese ao caso multidimensional, establecendo unha condición suficiente para que unha función continua do cubo $[-1, 1]^n$ con valores en \mathbb{R}^n se anule nalgún punto; condición que se establece en termos dos signos das compoñentes da función en certas caras contrapostas do cubo.</p> <p>O presente traballo está centrado no estudo dunha demostración do mencionado resultado, podendo tamén analizar certas extensións e estudar algunhas das súas posibles aplicacións.</p>
Recomendacións
<p>Aconséllase ter superado as materias “Continuidade e Derivabilidade de Funcións dunha Variable Real” e “Diferenciación de Funcións de Varias Variables Reais”, ademais de ter coñecementos de programas de cálculo simbólico.</p>

Índice xeral

Resumo	VII
Introdución	1
1. Conceptos e resultados preliminares	1
1.1. Combinatoria do n -símplex e o lema de Sperner	1
1.2. Propiedades do n -cubo combinatorio	8
1.3. Resultados topolóxicos	12
1.4. O teorema do punto fixo de Brouwer	17
2. O teorema de Poincaré-Miranda	21
2.1. Enunciado do teorema	21
2.2. Primeira proba do teorema	23
2.3. Algunhas probas alternativas	25
2.3.1. Nova proba utilizando o teorema do punto fixo de Brouwer	25
2.3.2. Proba utilizando métodos combinatorios	27
2.4. Condicións para a unicidade de solución	29
2.5. Xeneralización do teorema a outros dominios	33
3. Aplicacións	35
3.1. Exemplo de comprobación do teorema	35
3.2. Resolución dun problema físico	37
4. Conclusións	45

Resumo

Resumo

O teorema de Poincaré-Miranda establece unha condición suficiente para garantir que unha aplicación continua $f : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ ten un cero en K , onde $K \subset \mathbb{R}^n$ é un n -cubo e $n \in \mathbb{N}$. O obxectivo principal deste traballo é enunciar e demostrar dito resultado, revisando a proba orixinal de Carlo Miranda e proporcionando dúas probas alternativas. Con este fin, introducimos unha serie de conceptos necesarios de combinatoria e topoloxía, incluíndo demostracións do lema de Sperner e do teorema do punto fixo de Brouwer. Tamén amosamos unha condición de unicidade e unha posible extensión do teorema de Poincaré-Miranda a dominios máis xerais que o n -cubo. Finalmente, presentamos unha interpretación gráfica do teorema e unha aplicación práctica ao problema dos $1 + 4$ corpos.

Abstract

The Poincaré-Miranda theorem provides a sufficient condition to guarantee that a continuous function $f : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ has a zero in K , where $K \subset \mathbb{R}^n$ is an n -cube and $n \in \mathbb{N}$. The main objective of this work is to state and prove the aforementioned result, reviewing Carlo Miranda's original proof and describing two alternative proofs. With that goal in mind, we introduce several necessary concepts of combinatorics and topology, including proofs for the Sperner's lemma and the Brouwer's fixed-point theorem. We also produce a uniqueness condition and a possible extension of the Poincaré-Miranda theorem for domains that are more general than n -cubes. Finally, we present a graphical interpretation of the theorem and a practical application to the $(1 + 4)$ -body problem.

Introdución

O obxectivo do traballo é enunciado, probar e analizar o teorema de Poincaré-Miranda, que pode entenderse como unha xeneralización multidimensional do teorema de Bolzano. Baixo certas condicións, dito resultado garante a existencia dun cero para unha aplicación continua $f : K \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde $K \subset \mathbb{R}^n$ é un n -cubo e $n \in \mathbb{N}$.

No primeiro capítulo, introducimos unha serie de conceptos preliminares que serán precisos nas seccións posteriores do traballo. En primeiro lugar, definimos o n -símplex e algúns conceptos básicos, como a triangulación e a coloración propia, que nos permiten demostrar o lema de Sperner. Tamén presentamos algunhas propiedades básicas do n -cubo combinatorio e varios resultados técnicos de topoloxía. Por último, damos unha proba do teorema do punto fixo de Brouwer baseada no lema de Sperner.

No segundo capítulo, enunciados o teorema de Poincaré-Miranda e estudamos a proba orixinal de Carlo Miranda. Ademais, presentamos unha proba alternativa que utiliza o teorema do punto fixo de Brouwer e mais unha que fai uso das propiedades do n -cubo combinatorio. Por outra parte, damos unha condición suficiente para asegurar a existencia e unicidade do cero da función. Finalmente, estudamos unha xeneralización do teorema a dominios convexos, dando unha proba explícita para unha n -bóla.

No terceiro capítulo, comprobamos as hipóteses do teorema de Poincaré-Miranda nunha aplicación bidimensional concreta e analizamos a súa interpretación gráfica. Ademais, introducimos o problema dos $1 + n$ corpos e aplicamos o teorema no caso $n = 4$ para garantir a existencia dunha configuración particular.

Finalmente, presentamos un capítulo de conclusións cos aspectos máis relevantes que estudamos ao longo do traballo.

Capítulo 1

Conceptos e resultados preliminares

Antes de estudar o teorema de Poincaré-Miranda, é preciso introducir certos conceptos e demostrar certos resultados previos. En primeiro lugar, revisaremos varias propiedades combinatorias do n -símplex e do n -cubo, que nos permitirán demostrar tanto o teorema do punto fixo de Brouwer como o teorema de Poincaré-Miranda. Por outra parte, probaremos algúns resultados de carácter topolóxico que utilizaremos ao longo de todo o traballo.

Para elaborar este capítulo de prerequisites, consultamos principalmente os apuntamentos dos profesores Jacob Fox [1] e Michael Müger [2]. Tamén revisamos o traballo de John Nachbar [3] para algunhas cuestións técnicas de topoloxía.

1.1. Combinatoria do n -símplex e o lema de Sperner

Nesta sección, o obxectivo fundamental vai ser estudar o n -símplex, que pode entenderse como unha xeneralización do triángulo en dimensión n arbitraria. Aínda que o concepto xa era coñecido a finais do século XIX, foi en 1902 cando o matemático Peter Hendrik Schoute acuñou o termo moderno, que provén do latín *simplex*, “simple” [4]. Intuitivamente, así como o triángulo é o polígono máis sinxelo que existe, o símplex é o politopo máis simple que se pode construír en calquera dimensión.

Tras definir os conceptos de triangulación e coloración propia, estaremos en condicións de probar o lema de Sperner. Este resultado foi publicado en 1928 por Emanuel Sperner [5] e con el poderemos dar unha proba do teorema

do punto fixo de Brouwer, que é o noso obxectivo. A idea de relacionar estes resultados débese a Knaster, Kuratowski e Mazurkiewicz, que en 1929 utilizaron o lema de Sperner para demostrar un lema intermedio do que se deduce o teorema de Brouwer [6].



Figura 1.1: Emanuel Sperner (1905-1980). Fonte: [7].

De feito, pode demostrarse que o lema de Sperner e o teorema do punto fixo de Brouwer son equivalentes, como é posible ver, por exemplo, en [8]. No noso caso, probaremos unha proposición máis forte da cal o lema de Sperner é unha consecuencia inmediata.

Como observación, existe unha xeneralización do lema de Sperner para d -politopos, que son obxectos máis xerais que o n -simplex. Foi probada en 2002 e pode consultarse en [9].

Definición 1.1. En \mathbb{R}^{n+1} , consideremos $n + 1$ puntos afinmente independentes v_1, \dots, v_{n+1} , que chamaremos vértices. Un simplex n -dimensional ou n -simplex S é o fecho convexo deses $n + 1$ vértices; isto é, o conxunto de todas as posibles combinacións convexas deses puntos. Explicitamente:

$$S = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i v_i \in \mathbb{R}^{n+1} : \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1 \right\}.$$

Como exemplos, un 1-simplex é un segmento, un 2-simplex é un triángulo e un 3-simplex é un tetraedro, todos eles macizos. O diámetro de S defínese co-

mo a máxima distancia euclídea usual dentro do conxunto S . Pode denotarse por $\text{diam}(S)$ ou $\text{diam}\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ se queremos explicitar os vértices.

Un caso particular é o n -símplex estándar Δ^n , cuxos vértices son os que forman a base canónica de \mathbb{R}^n , $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$ e mais a orixe $(0, \dots, 0)$. Podemos utilizar coordenadas en \mathbb{R}^n e dar unha expresión para Δ^n da seguinte forma:

$$\Delta^n = \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n : \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i \leq 1 \right\}. \quad (1.1)$$

Definición 1.2. Dado un n -símplex S con vértices v_1, \dots, v_{n+1} e $m + 1$ puntos do conxunto de vértices, unha m -cara é o fecho convexo deses puntos, que por definición é un m -símplex.

Notemos que as 0-caras son precisamente os vértices e a única n -cara é outra vez S . As 1-caras reciben o nome de lados e as $(n - 1)$ -caras chámanse facetas.

A unión de todas as facetas de S recibe o nome de fronteira de S . Ao seu complementario en S chamáremolo interior de S . Resulta doado comprobar que estas nocións coinciden coa de “fronteira” e “interior” no sentido topolóxico.

Definición 1.3. Unha subdivisión simplicial ou triangulación T dun n -símplex S é unha colección finita $\{T_i\}$, onde cada T_i é un n -símplex, de xeito que a unión dos T_i é S e cada intersección $T_i \cap T_j$, para $i \neq j$, é o baleiro ou ben unha m -cara, para algunha dimensión $m < n$. Cada n -símplex T_i recibe o nome de cela. O tamaño dunha cela T_i defínese como o seu diámetro.

Definición 1.4. Dado un n -símplex S con vértices $\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$, o bari-centro (ou centroide) de S defínese como:

$$\text{bar}(S) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} v_i. \quad (1.2)$$

A triangulación baricéntrica T_B consiste en dividir S en $(n + 1)!$ celas, cada unha asociada a unha das posibles permutacións do conxunto $\{1, \dots, n + 1\}$. Para a permutación (i_1, \dots, i_{n+1}) , a correspondente cela $T_{i_1, \dots, i_{n+1}}$ é o n -

símplex con vértices $\{w_{i_1}, \dots, w_{i_{n+1}}\}$, dados por:

$$\begin{aligned} w_{i_1} &= v_{i_1}, \\ w_{i_2} &= \frac{1}{2}(v_{i_1} + v_{i_2}), \\ &\vdots \\ w_{i_n} &= \frac{1}{n}(v_{i_1} + \dots + v_{i_n}), \\ w_{i_{n+1}} &= \text{bar}(S). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Intuitivamente, os vértices da triangulación baricéntrica son precisamente os baricentros de todas as posibles m -caras de S , para $0 \leq m \leq n$.

É fácil ver que a unión das celas é S . Observamos tamén que todas as celas comparten, como mínimo, o punto $\text{bar}(S)$, que é unha 0-cara. En xeral, se T_i e T_j teñen en común $m + 1$ vértices, entón por (1.3) é doado comprobar que $T_i \cap T_j$ é exactamente a m -cara xerada por eses vértices. Polo tanto, concluímos que T_B é efectivamente unha triangulación. Unha proba detallada pode consultarse en [10].

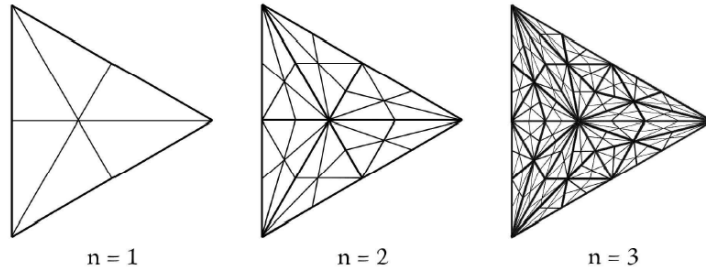


Figura 1.2: Tres triangulacións baricéntricas sucesivas nun 2-símplex. Fonte: [11].

Lema 1.5. *A triangulación baricéntrica dun n -símplex S reduce estritamente o tamaño das súas celas con respecto ao diámetro de S . Concretamente, para unha cela T_i calquera, tense a seguinte expresión:*

$$\text{diam}(T_i) \leq \frac{n}{n+1} \text{diam}(S). \tag{1.4}$$

Demostración. Sen perda de xeneralidade, imos facer a argumentación para a cela T_1 que se consegue coa permutación identidade $(1, \dots, n+1)$. Para calquera outra permutación, a demostración sería totalmente análoga e simplemente habería que utilizar os seus correspondentes índices.

En primeiro lugar, probemos que o diámetro de S é a máxima distancia entre os seus vértices. Supoñamos que $p, q \in S$ son dous puntos para os cales se acadada a máxima distancia en S . Sabemos da existencia destes puntos por ser S compacto. Sexa B a bóla con centro p e raio $d(p, q)$. Imos demostrar por redución ao absurdo que na fronteira de B debe haber un vértice de S . En efecto, se isto non se cumprixe, existiría un certo $\varepsilon > 0$ de xeito que a bóla B_ε de centro p e raio $d(p, q) - \varepsilon$ contén todos os vértices de S . Pero entón chegamos a unha contradición, xa que temos un conxunto convexo B_ε que contén todos os vértices pero non o símplex S , que por definición é o menor convexo que contén ditos vértices.

Polo tanto, deducimos que existe un vértice $q' \in \partial B$; isto é, verificando $d(p, q) = d(p, q')$. Podemos repetir este razoamento para unha bóla con centro q' e raio $d(p, q')$, de forma que aseguramos a existencia dun vértice p' que cumpre $d(p', q') = d(p, q') = d(p, q)$. Logo, demostramos que o diámetro de S se realiza precisamente entre os vértices. En particular, este mesmo argumento proba que, dado un punto calquera de S , o seu punto máis distante en S é un vértice.

Agora, imos limitar a distancia dos vértices de S ao baricentro de S . Sen perda de xeneralidade, tomemos o vértice v_1 . Podemos mover o n -símplex de xeito que $v_1 = 0$. Entón, podemos dar a seguinte estimación para a distancia do vértice v_1 ao baricentro en S :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{v_1 + v_2 + \cdots + v_{n+1}}{n+1} \right\| &\leq \frac{\|v_1\| + \|v_2\| + \cdots + \|v_{n+1}\|}{n+1} \\ &\leq \text{diam}\{v_1, \dots, v_{n+1}\} \cdot \frac{n}{n+1}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Estudemos agora o diámetro da cela T_1 . É claro que a máxima distancia se realiza para dous vértices de T_1 , que podemos denotar por $w_j = \frac{1}{j}(v_1 + \cdots + v_j)$ e $w_k = \frac{1}{k}(v_1 + \cdots + v_k)$, con $k > j$. Dado que w_j está no n -símplex con vértices $\{v_1, \dots, v_k\}$, que ten por baricentro w_k , podemos sobreestimar a distancia entre w_j e w_k ao intercambiar w_j por algún vértice v_i , con $i \in \{1, \dots, k\}$. Pola ecuación (1.5), podemos escribir:

$$\text{diam}(T_1) \leq d(v_i, w_k) \leq \frac{k}{k+1} \cdot \text{diam}\{v_1, \dots, v_{k+1}\}. \quad (1.6)$$

Na ecuación (1.6), podemos aplicar as desigualdades $\text{diam}\{v_1, \dots, v_{k+1}\} \leq \text{diam}\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ e $\frac{k}{k+1} < \frac{n}{n+1}$ para obter finalmente a expresión (1.4), como queríamos demostrar. □

Definición 1.6. Para un n -símplex S , unha coloración propia (ou de Sperner) dunha triangulación é unha asignación de $n + 1$ etiquetas, que chamaremos cores, aos vértices da triangulación, de xeito que se verifique:

1. Cada vértice de S recibe unha cor distinta.
2. Os vértices da triangulación que estean nunha m -cara de S só poden colorarse coas cores dos vértices de S que definan esa m -cara.

As cores son representadas por números naturais; así, para un n -símplex, as posibles cores forman o conxunto $\{1, 2, 3, \dots, n, n + 1\}$. Cando queiramos indicar a coloración dunha cela, daremos unha lista das cores dos seus vértices entre parénteses.

Para comprendermos ben esta definición, pensemos novamente nun triángulo T con vértices ABC e unha triangulación formada por triángulos máis pequenos, como o que observamos na Figura 1.3. Unha coloración propia sería:

1. Os vértices A , B e C teñen as cores 1, 2 e 3, respectivamente.
2. Se un vértice da triangulación está nalgún dos lados de T , só pode colorarse coas cores dos extremos dese lado. Por exemplo, se está no lado AB , só pode ter as cores 1 ou 2.

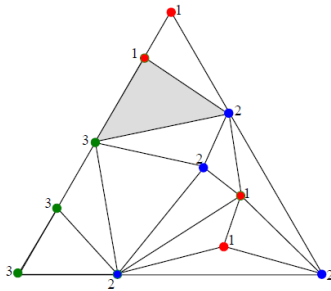


Figura 1.3: Coloración propia dun 2-símplex. Fonte: [12].

Definición 1.7. Dada unha coloración propia, unha cela dise de tipo R se cada un dos seus vértices recibe unha cor distinta. O nome provén do inglés *rainbow*, que significa “arco da vella”. Por exemplo, o triángulo sombreado na Figura 1.3 é unha cela de tipo R .

Lema 1.8. *Toda triangulación cunha coloración propia ten un número impar de celas de tipo R .*

Demostración. Para probar o Lema 1.8, imos facer indución sobre a dimensión do n -símplex. Para $n = 1$, temos un segmento (a, b) dividido en segmentos máis pequenos e as cores posibles son 1 ou 2. Os extremos a e b deben recibir cores distintas. Así, se empezamos a colorar os puntos intermedios desde a , debemos mudar de cor un número impar de veces, para así terminar nunha cor distinta en b . Por tanto, hai un número impar de segmentos de tipo R .

O caso $n = 2$ non sería preciso demostralo para a indución, pero imos facelo porque resulta interesante para entender o caso de n arbitrario. Supoñamos un triángulo T con posibles cores $\{1, 2, 3\}$. Podemos encontrar celas de tipo R , con coloración $(1, 2, 3)$, ou as que chamaremos de tipo Q , con coloración $(1, 1, 2)$ ou $(1, 2, 2)$. Abusando da notación, denotamos por R e Q o número de celas de tipo R e Q , respectivamente. Sexa X o número de lados na fronteira de T con coloración $(1, 2)$ (lados externos) e sexa Y o número de lados con esas coloracións e cun extremo no interior de T (lados internos).

Nesta situación, observamos que hai exactamente dous lados con coloración $(1, 2)$ por cada cela de tipo Q , mentres que por cada cela de tipo R hai só un deses lados. Ademais, observamos que cada lado interno sempre está compartido por dúas celas (sexan de tipo Q ou R), polo que, ao considerar todas as celas de tipo Q e R , estamos contando cada lado interno por duplicado. Pola súa parte, os lados externos só se contan unha vez. É dicir, chegamos á seguinte ecuación:

$$2Q + R = X + 2Y. \quad (1.7)$$

Agora, restrinxímonos aos lados externos. Como a fronteira de T está formada por segmentos, cada un destes lados debe estar nun deses segmentos que, por hipótese, ten os extremos de cores distintas. Como xa vimos no caso unidimensional, necesariamente X debe ser impar. Utilizando a ecuación (1.7), chegamos a que R tamén debe ser impar.

Agora, supoñamos o enunciado certo para $n - 1$ e demostrémolo para un n -símplex. Imos manter a notación dos casos anteriores. Neste caso, estamos a usar as cores $\{1, 2, 3, \dots, n, n + 1\}$. As celas de tipo R usan todas as cores, mentres que as de tipo Q usan todas menos a cor $n + 1$, de xeito que unha das outras cores se usa dúas veces e as outras exactamente unha vez. Consideremos tamén as $(n - 1)$ -caras que reciben exactamente as cores $\{1, 2, \dots, n\}$. Así, X denota o número de caras externas dese tipo e Y o número de caras internas con esa coloración.

Cunha argumentación análoga ao caso bidimensional, vemos que por cada cela de tipo Q hai dúas $(n-1)$ -caras con coloración $\{1, 2, \dots, n\}$ e exactamente unha desas caras por cada cela de tipo R . Ademais, estamos contando as caras internas dúas veces e as externas unha vez, polo que chegamos novamente á ecuación (1.7).

Por outra parte, se consideramos a fronteira de S , as $(n-1)$ -caras externas con coloración $\{1, 2, \dots, n\}$ forman unha coloración propia de dimensión $n-1$, logo, por hipótese de indución, X é impar. Pola ecuación (1.7), chegamos a que R tamén debe ser impar. □

Corolario 1.9. (Sperner, 1928) *En toda triangulación cunha coloración propia existe unha cela de tipo R .*

Demostración. Aplicando o Lema 1.8, vemos que o número de celas de tipo R non pode ser cero; é dicir, polo menos existe unha. □

1.2. Propiedades do n -cubo combinatorio

Nesta sección, imos definir o espazo \mathbb{Z}_k^n e o n -cubo combinatorio $C(k) \subset \mathbb{Z}_k^n$, que se pode entender como unha certa discretización do n -cubo unidade. Tamén introduciremos o concepto de n -símplex en \mathbb{Z}_k^n e de i -veciño co obxectivo de demostrar algunhas propiedades básicas que serán necesarias máis adiante.

Definición 1.10. Sexa $k > 1$ un número natural e consideremos o conxunto $\mathbb{Z}_k = \{i/k : i \in \mathbb{Z}\}$. Definimos $\mathbb{Z}_k^n \subseteq \mathbb{R}^n$ como o produto cartesiano de n copias de \mathbb{Z}_k , ou sexa,

$$\mathbb{Z}_k^n = \{z : \{1, \dots, n\} \longrightarrow \mathbb{Z}_k : z(i) \in \mathbb{Z}_k, \forall i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Utilizando notación cartesiana, definimos tamén o elemento neutro $0 := (0, \dots, 0)$ e o vector básico i -ésimo, $e_i := (0, \dots, 1/k, \dots, 0)$, $e_i(i) = 1/k$.

Definición 1.11. Un n -cubo combinatorio é un subconxunto $C \subset \mathbb{Z}_k^n$ da forma

$$C := C(k) = [0, 1]^n \cap \mathbb{Z}_k^n = \left\{ 0, \frac{1}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, k \right\}^n.$$

Noutras palabras, $C(k)$ é o conxunto de n -tuplas posibles que se poden formar con eses elementos. Intuitivamente, podemos pensar este obxecto como un n -cubo de lado 1 discretizado nunha grella (ver Exemplo 1.16).

Definimos tamén as caras anterior e posterior i -ésimas dun n -cubo combinatorio $C(k)$ como os subconxuntos

$$\begin{aligned} C_i^- &:= C_i^-(k) = \{z \in C : z(i) = 0\}, \\ C_i^+ &:= C_i^+(k) = \{z \in C : z(i) = 1\} \end{aligned}$$

e a fronteira de $C(k)$ como a unión de todas as caras anteriores e posteriores, é dicir,

$$\partial C := \partial C(k) = \bigcup_{i=1}^n (C_i^-(k) \cup C_i^+(k)).$$

Definición 1.12. Diremos que un conxunto ordenado $S = [z_0, \dots, z_n] \subset \mathbb{Z}_k^n$ é un n -símplex en \mathbb{Z}_k^n se existe unha permutación α do conxunto $\{1, \dots, n\}$ de xeito que

$$z_1 = z_0 + e_{\alpha(1)}, \dots, z_n = z_{n-1} + e_{\alpha(n)}.$$

Isto é, cada punto está separado do seguinte por un certo vector básico e_i , que chamaremos distancia i -ésima.

Ademais, é sinxelo calcular o diámetro de S . É evidente que a máxima distancia é a que existe entre os vértices z_0 e z_n , que se pode calcular como:

$$\text{diam}(S) = d(z_0, z_n) = \sqrt{e_{\alpha(1)}^2 + \dots + e_{\alpha(n)}^2} = \frac{\sqrt{n}}{k}. \quad (1.8)$$

Definición 1.13. Sexa $S = [z_0, \dots, z_n]$ un n -símplex en \mathbb{Z}_k^n . A i -ésima $(n-1)$ -cara de S é o conxunto $F_i(S) = [z_0, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_n]$, para $i \in \{0, \dots, n\}$.

Notemos que as únicas $(n-1)$ -caras que son tamén un $(n-1)$ -símplex en \mathbb{Z}_k^{n-1} (no sentido da Definición 1.12) son $F_0(S)$ e $F_n(S)$.

Definición 1.14. Sexa $S = [z_0, \dots, z_n]$ un n -símplex en \mathbb{Z}_k^n . O veciño i -ésimo (ou i -veciño) de S , $S[i]$, defínese como:

1. $S[0] = [z_1, \dots, z_n, x_0]$, onde $x_0 = z_n + (z_1 - z_0)$.
2. Para $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $S[i] = [z_0, \dots, z_{i-1}, x_i, z_{i+1}, \dots, z_n]$, onde $x_i = z_{i-1} + (z_{i+1} - z_i)$.
3. $S[n] = [x_n, z_0, \dots, z_{n-1}]$, onde $x_n = z_0 + (z_{n-1} - z_n)$.

Lema 1.15.

1. Os i -veciños $S[i]$ son n -símplices en \mathbb{Z}_k^n ben definidos, para calquera n -símplex S en \mathbb{Z}_k^n .

2. Os i -veciños son únicos, no sentido de que son os únicos que verifican $S \cap S[i] = F_i(S)$, para todo $i \in \{0, \dots, n\}$.
3. Se $S \subseteq C(k)$ e $i \in \{0, \dots, n\}$, entón $S[i] \subseteq C(k)$ se e só se $F_i(S) \not\subseteq \partial C(k)$.

Demostración. Probemos cada unha das afirmacións enunciadas:

1. Imos comprobalo pola Definición 1.12. Nos tres casos, $S[i]$ é un conxunto ordenado de $n+1$ puntos. Atendendo á orde dos puntos en cada caso, podemos dar explicitamente as distancias entre puntos:
 - a) Para $S[1]$: $e_{\alpha(2)}, \dots, e_{\alpha(n)}, e_{\alpha(1)}$.
 - b) Para $S[i]$: $e_{\alpha(1)}, \dots, e_{\alpha(i-1)}, e_{\alpha(i+1)}, e_{\alpha(i)}, e_{\alpha(i+2)}, \dots, e_{\alpha(n)}$.
 - c) Para $S[n]$: $e_{\alpha(n)}, e_{\alpha(1)}, \dots, e_{\alpha(n-1)}$.

Así, comprobamos que cada $S[i]$ é efectivamente un n -símplex en \mathbb{Z}_k^n .

2. É evidente que $S \cap S[i] = F_i(S)$. Vexamos que os $S[i]$ son únicos neste sentido:
 - a) Se $i = 0$, observamos que $S[0]$ ten fixados n puntos ordenados en común con S e polo tanto $n-1$ distancias fixas. A única posibilidade para a última distancia é precisamente $e_{\alpha(1)}$, pois doutra forma non sería un n -símplex. Se $i = n$, a demostración é análoga.
 - b) Se $i \in \{1, \dots, n-1\}$, vemos que hai dous subconxuntos de puntos en común con S . En total, ambos subconxuntos teñen $n-1$ puntos, logo hai $n-2$ distancias fixas. A única forma de proceder para que $S[i]$ sexa un n -símplex é intercambiar os vectores $e_{\alpha(i)}$ e $e_{\alpha(i+1)}$.

Polo tanto, só existe unha forma de definir os $S[i]$ de xeito consistente.

3. Imos comprobalo para $i = 0$ (os outros casos son análogos). Neste caso, podemos escribir:

$$\begin{aligned} S &= [z_1 - e_{\alpha(1)}, z_1, \dots, z_n], \\ S[0] &= [z_1, \dots, z_n, z_n + e_{\alpha(1)}], \\ F_0(S) &= [z_1, \dots, z_n]. \end{aligned}$$

Supoñamos que $F_0(S) \subseteq \partial C(k)$; por exemplo, con $F_0(S) \subseteq C_j^+(k)$. Pola Definición 1.11, isto implica que os puntos z_1, \dots, z_n teñen todos

a mesma coordenada j -ésima $z(j) = 1$, logo necesariamente $\alpha(1) = j$. Pero entón $z_n + e_j \notin [0, 1]^n$, isto é, $S[0] \not\subseteq C(k)$. Consideremos agora a outra posibilidade, $F_0(S) \subseteq C_j^-(k)$. Neste caso, a compoñente j -ésima de todos os puntos é $z(j) = 0$ e $\alpha(1) = j$, pero isto implicaría que $z_1 - e_j \notin [0, 1]^n$, o cal é un absurdo.

Por outra parte, supoñamos $S, S[0] \subseteq C(k)$. Iso significa que a $\alpha(1)$ -ésima coordenada de z_1 é maior que 0 e a $\alpha(1)$ -ésima coordenada de z_n é menor que 1, entón $F_0(S)$ non pode estar sobre as dúas caras de $C(k)$ que cumpren $\alpha(1) = \text{cte}$. Ademais, ao construír os demais puntos, estamos usando as outras distancias $e_{\alpha(2)}, \dots, e_{\alpha(n)}$. Cada coordenada modifícase cun deses $e_{\alpha(i)}$, logo é imposible que todos os puntos estean nun hiperplano con algunha coordenada constante. É dicir, $S[0]$ non pode estar sobre unha cara de $C(k)$.

□

Exemplo 1.16. *Imos ilustrar todos estes conceptos cun exemplo sinxelo. Tomando $n = 2$ e $k = 4$, consideremos o 2-cubo combinatorio $C(4) \subset \mathbb{Z}_4^2$ e un 2-símplex $S = [z_0, z_1, z_2]$. Como se ve na Figura 1.4, $C(4)$ é un cadrado dividido en 5×5 puntos equiespaciados e S é un triángulo cuxos tres vértices están precisamente sobre algúns deses puntos. Cada un dos i -veciños $S[i]$ de S é outro triángulo cuxa intersección con S é xustamente o seu lado i -ésimo; vemos que non hai outra posibilidade para escoller os $S[i]$. Ademais, é claro que se algún dos lados de S estivese na fronteira do cubo, entón ese veciño quedaría fóra de $C(4)$.*

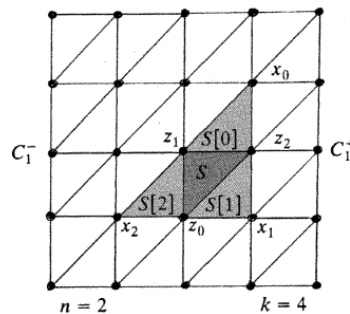


Figura 1.4: Os i -veciños dun 2-símplex nun 2-cubo combinatorio. Fonte: [13].

1.3. Resultados topolóxicos

Nesta sección, imos probar algunhas proposicións de carácter topolóxico que serán de axuda en capítulos posteriores. Primeiro, definiremos a propiedade do punto fixo e probaremos que é topolóxica. Tamén daremos homeomorfismos explícitos entre o n -simplex estándar, o n -cubo e a n -bóla. Finalmente, demostraremos un lema de compacidade que será necesario para dar unha das probas alternativas do teorema de Poincaré-Miranda.

Como apuntamento, nas nosas probas imos utilizar algunhas propiedades básicas da topoloxía euclídea. Concretamente, usaremos que os compactos en \mathbb{R}^n son exactamente os fechados e limitados, que a compacidade e a compacidade secuencial son equivalentes en \mathbb{R}^n e que calquera subconxunto de \mathbb{R}^n é Hausdorff. Ademais, daremos por probado un teorema sobre homeomorfismos (Teorema 1.22). Estes resultados elementais poden consultarse en [14].

Definición 1.17. Un espazo métrico non baleiro (X, d_X) ten a propiedade do punto fixo se calquera aplicación continua $f : X \rightarrow X$ ten un punto fixo, isto é, un punto $x \in X$ tal que $f(x) = x$.

Proposición 1.18. Sexan (X, d_X) e (Y, d_Y) dous espazos métricos non baleiros. Supoñamos que existe un homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$. Entón, se (X, d_X) ten a propiedade do punto fixo, (Y, d_Y) tamén ten dita propiedade.

Demostración. Supoñamos que (X, d_X) ten a propiedade do punto fixo. Sexa un homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$ e sexa unha aplicación continua $g : Y \rightarrow Y$. Vexamos que g ten un punto fixo. O primeiro paso é definir unha nova aplicación

$$f = h^{-1} \circ g \circ h.$$

A aplicación inversa $h^{-1} : Y \rightarrow X$ existe por ser h un homeomorfismo, así que f está ben definida. Ademais, notemos que $f : X \rightarrow X$. Como (X, d_X) ten a propiedade do punto fixo, existe un punto $x \in X$ tal que $f(x) = x$. Pola definición de f , isto significa que $(h^{-1} \circ g \circ h)(x) = x$. Se aplicamos h en cada lado desta última igualdade, resulta que

$$g(h(x)) = h(x),$$

o que quere dicir que $h(x) \in Y$ é un punto fixo de g . Así que (Y, d_Y) ten a propiedade do punto fixo. □

Observación 1.19. Nos seguintes apartados imos traballar con espazos métricos (X, d_E) , onde $X \subset \mathbb{R}^n$ e d_E é a distancia euclídea usual. Para simplificar a notación, escribiremos $X \subset \mathbb{R}^n$ sen necesidade de especificar a métrica, pois sempre será a mesma.

Definición 1.20. Sexa $n \in \mathbb{N}$. A bóla fechada n -dimensional (ou n -bóla fechada) de raio $R > 0$ e centro $a \in \mathbb{R}^n$ defínese como o conxunto $B_{a,R}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : d_E(a, x) \leq R\}$.

As n -bólas coas que traballaremos serán sempre fechadas e con centro a orixe $a = (0, \dots, 0)$, así que falaremos simplemente de n -bólas de raio $R > 0$. Ademais, a n -bóla de raio $R = 1$ (ou directamente n -bóla) denotarémola por B^n .

Definición 1.21. Un rectángulo en \mathbb{R}^n (ou hiperrectángulo) é un produto cartesiano K de intervalos, isto é,

$$K = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n],$$

onde $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Se todos os intervalos coinciden, falaremos de n -cubo ou hipercubo. Un caso particular é o n -cubo de lado L , que é da forma

$$[0, L] \times \dots \times [0, L].$$

Se $L = 1$, falaremos do n -cubo unidade I^n ou simplemente n -cubo.

Teorema 1.22. Sexa $f : X \rightarrow Y$ unha aplicación continua e bixectiva, onde X é compacto e Y é Hausdorff. Entón f é un homeomorfismo.

Proposición 1.23. O n -cubo I^n e o n -símplex estándar Δ^n son homeomorfos para calquera $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Definimos a aplicación $f : \Delta^n \rightarrow I^n$. A imaxe de $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Delta^n$ vén dada pola expresión:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\max\{x_1, \dots, x_n\}} \sum_{j=1}^n x_j, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad (1.9)$$

onde estamos usando a notación $0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

Observamos que a división que aparece en (1.9) está ben definida, pois o denominador nunca se anula. Tomemos agora un punto calquera $x \in \Delta^n$ e vexamos que $f(x) \in I^n$. O caso $x = 0$ é evidente, así que supoñamos $x \neq 0$.

Por (1.1), é claro que $x_i \geq 0$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ e que $0 \leq \sum_{j=1}^n x_j \leq 1$. Así, podemos limitar a compoñente i -ésima $f(x)_i$ da seguinte maneira:

$$0 \leq f(x)_i = \frac{x_i}{\max\{x_1, \dots, x_n\}} \sum_{j=1}^n x_j \leq \sum_{j=1}^n x_j \leq 1. \quad (1.10)$$

Noutras palabras, $0 \leq f(x)_i \leq 1$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, así que $f(x) \in I^n$. Con isto, comprobamos que f está ben definida.

Estudemos agora a continuidade de f en cada punto $x \in \Delta^n$. Se $x \neq 0$, é evidente que f é continua en x , pois é produto e cociente de funcións continuas con denominador non nulo. Tomemos agora $x = 0$. Utilizando (1.10), vemos claramente que:

$$0 \leq f(x)_i \leq \sum_{j=1}^n x_j \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Entón, temos que $\lim_{x_i \rightarrow 0} f(x)_i = 0$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Isto quere dicir que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, logo f tamén é continua en $x = 0$.

Vexamos agora que f é inxectiva. Tomemos $x, y \in \Delta^n$ tales que $f(x) = f(y)$. Supoñamos $x, y \neq 0$ (se algún deles é cero, a demostración é trivial). Pola definición de f en (1.9), é claro que isto implica que $x = my$, para un certo $m \in \mathbb{R}$. Pero notemos tamén que f ten a propiedade $f(\lambda z) = \lambda z$ para todo escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ e todo punto $z \in \Delta^n$. Entón

$$f(x) = f(my) = mf(y),$$

e como $f(x) = f(y) \neq 0$, necesariamente $m = 1$, logo $x = y$. Con isto, probamos que f é inxectiva.

Finalmente, comprobemos que f é sobrexectiva. Consideremos un punto $y = (y_1, \dots, y_n) \in I^n$. Se $y = 0$, xa temos que $f(0) = 0$, así que supoñamos $y \neq 0$. Propoñemos

$$x = \max\{y_1, \dots, y_n\} \frac{y}{\sum_{j=1}^n y_j}.$$

Vexamos que $x \in \Delta^n$. Dado que $y_i \geq 0$, é claro que $x_i \geq 0$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Ademais, notemos que

$$\sum_{i=1}^n x_j = \max\{y_1, \dots, y_n\} \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{\sum_{j=1}^n y_j} = \max\{y_1, \dots, y_n\} \leq 1,$$

logo, por (1.1), $x \in \Delta^n$. Ademais, utilizando (1.9), é claro que $f(x) = y$, como queríamos probar. Así que f é sobrexectiva.

En conclusión, a aplicación f é continua e bixectiva en Δ^n que, por ser fechado e limitado, é compacto. Ademais, I^n é Hausdorff. Polo Teorema 1.22, f é un homeomorfismo. \square

Proposición 1.24. *A n -bóla B^n e o n -cubo I^n son homeomorfos para calquera $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Definimos a aplicación $f : I^n \rightarrow B^n$. A imaxe dun punto $x = (x_1, \dots, x_n) \in I^n$ vén dada pola expresión

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}}{\|x\|} x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad (1.11)$$

onde denotamos por $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ a norma euclídea en \mathbb{R}^n .

Notemos primeiro que a expresión (1.11) está ben definida, pois nunca dividimos entre cero. Vexamos tamén que $f(x)$ está na n -bóla, é dicir, que $d_E(0, f(x)) \leq 1$. Para $x = 0$ é evidente. Para $x \neq 0$, como $x \in I^n$, podemos limitar a compoñente i -ésima $|x_i| \leq 1$. Logo, temos que

$$f(x) = d_E(0, f(x)) = \left\| \frac{\max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}}{\|x\|} x - 0 \right\| \leq \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1.$$

Así que, efectivamente, f está ben definida. Ademais, é claro que f é continua en calquera punto $x \neq 0$, pois é produto e cociente de funcións continuas. En $x = 0$, imos comprobalo por definición. Dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario, escollemos $\delta = \varepsilon$. Desta forma, para todo $x \in I^n$ tal que $\|x - 0\| < \varepsilon$, en particular temos que $\max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} < \varepsilon$, polo tanto:

$$\|f(x) - 0\| = \left\| \frac{\max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}}{\|x\|} x - 0 \right\| < \varepsilon \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = \varepsilon.$$

Polo tanto, f tamén é continua en $x = 0$. Vexamos agora que f é inxectiva. Sexan $x, y \in I^n$ tales que $f(x) = f(y)$. Se algún deles é cero, a demostración é evidente, así que supoñamos $x, y \neq 0$. Pola definición de f en (1.11), chegamos a que

$$x = \frac{\max\{|y_1|, \dots, |y_n|\}}{\max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}} \frac{\|x\|}{\|y\|} y. \quad (1.12)$$

Tomando normas en (1.12) e despxando, obtemos:

$$\max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} = \max\{|y_1|, \dots, |y_n|\}. \quad (1.13)$$

Xuntando (1.12) e (1.13), tense que

$$x = \frac{\|x\|}{\|y\|} y. \quad (1.14)$$

Se tomamos o máximo por compoñentes en (1.14) e aplicamos (1.13), chegamos a que $\|x\| = \|y\|$, logo $x = y$. Isto proba que f é inxectiva.

Comprobemos que f tamén é sobrexectiva. Sexa $y = (y_1, \dots, y_n) \in B^n$. Se $y = 0$, temos directamente $f(0) = 0$, así que supoñamos $y \neq 0$. Tomemos o punto $x = \frac{\|y\|}{|y_i|} y$. Denotemos $|y_i| = \max\{|y_1|, \dots, |y_n|\}$, para certo índice $i \in \{1, \dots, n\}$. Entón, podemos limitar a norma de x da seguinte forma:

$$\|x\| = \frac{\|y\|}{|y_i|} \|y\| = \frac{y_1^2 + \dots + y_i^2 + \dots + y_n^2}{|y_i|} \leq \frac{y_i^2}{|y_i|} = |y_i| \leq 1.$$

Así, aseguramos que $x \in I^n$. Agora, pola definición de f en (1.11), é claro que $f(x) = y$, logo deducimos que f é sobrexectiva.

En conclusión, temos que f é unha aplicación continua e bixectiva. Ademais, I^n é compacto (fechado e limitado) e B^n é Hausdorff, así que aplicando o Teorema 1.22, temos que f é un homeomorfismo. □

Lema 1.25. *Sexa un espazo métrico (X, d) e unha colección $\{K_1, \dots, K_n\}$, onde cada conxunto $K_i \subset X$ é compacto. Consideremos tamén $\{S_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, con $S_k \subset X$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam}(S_k) = 0$. Supoñamos ademais que, para calquera $k \in \mathbb{N}$ e $i \in \{1, \dots, n\}$, $S_k \cap K_i \neq \emptyset$. Entón, $\bigcap_{i=1}^n K_i \neq \emptyset$.*

Demostración. Consideremos o espazo métrico (K, d_k) , onde $K = \prod_{i=1}^n K_i$ e $d_k(x, y) = \sum_{i=1}^n d(x_i, y_i)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ e $i \in \{1, \dots, n\}$, por hipótese $S_k \cap K_i \neq \emptyset$, logo podemos escoller un punto $x_{k,i} \in S_k \cap K_i$. Definimos tamén $x_k = (x_{k,1}, \dots, x_{k,n}) \in K$.

Por outra parte, K é compacto por ser produto cartesiano de conxuntos compactos, así que o conxunto infinito $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ten un punto de acumulación $z = (z_1, \dots, z_n)$. Noutras palabras, cada veciñanza de z contén infinitos puntos x_k . Ademais, facendo uso da desigualdade triangular:

$$\begin{aligned} 0 \leq d(z_i, z_j) &\leq d(z_i, x_{k,i}) + d(x_{k,i}, x_{k,j}) + d(x_{k,j}, z_j) \\ &\leq 2d_k(z, x_k) + \text{diam}(S). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Por outra parte, $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam}(S_k) = 0$ e ademais $\lim_{k \rightarrow \infty} d_k(z, x_k) = 0$, xa que unha veciñanza arbitrariamente pequena de z contén infinitos x_k . Por (1.15), vemos que $\lim_{k \rightarrow \infty} d(z_i, z_j) = 0$, polo que concluímos que $z = (x, \dots, x)$, para un certo $x \in X$. É claro que $x \in K_i$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, logo $x \in \bigcap_{i=1}^n K_i$. Polo tanto, $\bigcap_{i=1}^n K_i \neq \emptyset$. □

1.4. O teorema do punto fixo de Brouwer

A motivación deste teorema ten a súa orixe nos primeiros estudos sobre ecuacións diferenciais de finais do século XIX, concretamente no relativo ao problema dos tres corpos. Henri Poincaré investigou profundamente este problema, publicando artigos en 1883 [15] e en 1886 [16]. No artigo de 1886, Poincaré considerou unha superficie circular cun fluxo no seu interior por analoxía a un sistema gravitatorio; por exemplo, podemos pensar nunha cunca de café. Poincaré observou que había certas propiedades desa superficie (fechada e limitada) que facían pensar que as traxectorias debían tender cara a un certo límite que permanece quedo, ou sexa, un punto fixo.



Figura 1.5: Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966). Fonte: [17].

Foi a principios do século XX cando se intentou formalizar esta idea dun xeito máis xeral: para calquera $n \in \mathbb{N}$, a n -bóla B^n ten a propiedade do punto fixo. En 1910, Jacques Hadamard presentou a primeira proba para o caso xeral [18], e pouco despois L. E. J. Brouwer publicaría outra demostra-

ción [19]. O artigo de Brouwer foi especialmente importante, pois utilizou ferramentas matemáticas moi novidosas neses tempos, como por exemplo os conceptos de homotopía ou de grao dunha función continua. É máis, este resultado sería unha das grandes motivacións que levarían ao desenvolvemento da topoloxía alxébrica no século XX.

Aínda que o teorema do punto fixo de Brouwer é de carácter topolóxico, é destacado por estar relacionado con múltiples áreas das matemáticas. Xa mencionamos que era equivalente ao lema de Sperner (combinatoria), e máis adiante probaremos que tamén equivale ao teorema de Poincaré-Miranda (análise matemática). Outras aplicacións son moito máis sorprendentes: por exemplo, John Nash utilizou o teorema para resolver un problema de teoría de xogos en 1949 [20].

Neste apartado, imos demostrar primeiro que o n -símplex estándar ten a propiedade do punto fixo, utilizando para iso o lema de Sperner (Corolario 1.9). Despois, coa axuda do que vimos na sección anterior, será inmediato comprobar que a n -bóla e o n -cubo tamén teñen dita propiedade. De feito, é interesante notar que calquera corpo convexo (é dicir, un subconxunto $K \subset \mathbb{R}^n$ convexo, compacto e con interior non baleiro) ten a propiedade do punto fixo, aínda que o obxectivo deste traballo non esixe tanta xeneralidade. Unha demostración deste último feito pode consultarse en [21].

Teorema 1.26. *O n -símplex estándar Δ^n ten a propiedade do punto fixo, para calquera $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Tomemos $n \in \mathbb{N}$ arbitrario e consideremos unha aplicación $f : \Delta^n \rightarrow \Delta^n$ continua. Supoñamos que f non ten ningún punto fixo e vexamos que necesariamente chegamos a unha contradición.

O primeiro paso é definir unha sucesión $\{\Delta_i^n\}$, onde $\Delta_0^n = \Delta^n$ e para $i \geq 1$, Δ_i^n é a triangulación baricéntrica de Δ_{i-1}^n . Noutras palabras, comezamos facendo a triangulación baricéntrica de Δ^n , logo repetimos o proceso para cada cela e así sucesivamente. Polo Lema 1.5, sabemos que o tamaño das celas se reduce en cada paso, así que cando $i \rightarrow \infty$, é claro que ese tamaño tende a cero.

Por outra parte, tomemos un punto calquera $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \Delta^n$. Pola definición de Δ^n , é claro que $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1$. Ademais, como o codominio de f é Δ^n , temos que $\sum_{i=1}^{n+1} f(x)_i = 1$. Como estamos supoñendo que f non ten puntos fixos, necesariamente debe haber algunha compoñente de x menor que a súa imaxe e algunha outra maior. Isto é,

$$\exists i \in \{1, \dots, n+1\} : f(x)_i < x_i, \quad (1.16)$$

$$\exists j \in \{1, \dots, n+1\} : f(x)_j > x_j. \quad (1.17)$$

No caso de que haxa varios índices que cumpran (1.16), tomamos i como o menor deles.

Imos definir unha coloración para Δ_k^n , con $k \geq 1$. Para cada vértice $x \in \Delta_k^n$, asignamos unha cor $c(x) \in \{1, \dots, n+1\}$ de xeito que $f(x)_{c(x)} < x_{c(x)}$. Esta asignación ten sentido pola condición (1.16). Comprobemos agora que é unha coloración propia:

1. Sexa $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ un vértice de Δ^n . Claramente, a única compoñente que pode verificar (1.16) é a i -ésima, logo $c(e_i) = i$. Polo tanto, cada vértice de Δ^n recibe unha cor distinta.
2. Sexa $A \subset \{1, \dots, n+1\}$ un subconxunto de $m+1$ elementos e sexa unha m -cara xerada polos vértices $\{e_i : i \in A\}$. Sexa x un vértice desa m -cara. Para $j \notin A$, a compoñente j -ésima é cero, logo non pode verificar (1.16). É dicir, necesariamente $c(x) \in A$, que é a cor dalgún dos vértices e_i que definen a m -cara.

Polo tanto, a coloración é propia. Polo Corolario 1.9, existe unha cela de tipo R con vértices $x^{(k,1)}, \dots, x^{(k,n+1)} \in \Delta_k^n$, onde $x^{(k,i)}$ é o vértice coa cor i . Tal e como definimos a nosa coloración, é evidente que

$$f(x^{(k,i)})_i < x_i^{(k,i)}, \forall i \in \{1, \dots, n+1\}. \quad (1.18)$$

Este argumento fixémoslo para $k \geq 1$ arbitrario. Polo tanto, podemos formar unha sucesión $\{x^{(k,1)}\}$ contida en Δ^n . Como Δ^n é fechado e limitado, é secuencialmente compacto, polo que $\{x^{(k,1)}\}$ ten unha subsucesión converxente. Abusando da notación, eliminemos os puntos que non están nesa subsucesión e consideremos que $\{x^{(k,1)}\}$ é converxente. Este razoamento serve para calquera $\{x^{(k,i)}\}$, con $i \in \{1, \dots, n+1\}$. Pero lembremos que o tamaño das celas tende a cero cando $k \rightarrow \infty$, logo existe $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k,i)}$ e é o mesmo para calquera $i \in \{1, \dots, n+1\}$. Denotemos ese límite por x^* .

Como $x^* \in \Delta^n$, por (1.17), existe unha compoñente j tal que $f(x^*)_j > x_j^*$. Por outra parte, a condición (1.18) é válida para calquera k . Como $x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k,i)}$ por definición, e ademais f é continua, chegamos a que $f(x^*)_j \leq x_j^*$. Isto é unha contradición, logo a suposición de que f non ten puntos fixos é falsa. □

Corolario 1.27. (Brouwer, 1911) *A n -bóla B^n ten a propiedade do punto fixo, para calquera $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. É consecuencia do Teorema 1.26, a Proposición 1.18 e a Proposición 1.23. □

Corolario 1.28. *O n -cubo I^n ten a propiedade do punto fixo, para calquera $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. É consecuencia do Teorema 1.26, a Proposición 1.18 e a Proposición 1.24. □

Capítulo 2

O teorema de Poincaré-Miranda

Neste capítulo presentaremos o teorema de Poincaré-Miranda, que pode ser entendido como unha extensión do coñecido Teorema de Bolzano ao caso multidimensional. Tras expoñer o seu enunciado clásico e a súa “tradución” na linguaxe matemática moderna, describiremos a proba orixinal elaborada por Carlo Miranda en [22]. Así mesmo, presentaremos outras posibles probas do citado teorema, como as incluídas en [13] e [23].

2.1. Enunciado do teorema

A primeira versión do teorema de Poincaré-Miranda foi enunciada en 1883 por Henri Poincaré nunha disertación sobre o problema dos tres corpos [15]. O autor indicou que o resultado era unha consecuencia dun traballo previo de Leopold Kronecker presentado en 1869 (publicado en dúas partes, [24] e [25]) e non ofreceu ningunha demostración. O enunciado orixinal en [15], unha vez traducido do francés, é o seguinte:

Sean $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ funcións continuas de n variables x_1, x_2, \dots, x_n ; onde a variable x_i está suxeita a variar entre os límites $+a_i$ e $-a_i$. Supoñamos que, para $x_i = a_i$, ξ_i sexa constantemente positiva, e para $x_i = -a_i$, constantemente negativa; eu digo que existe un sistema de valores das x para o cal todas as ξ se anulan.

Tras a publicación orixinal de Poincaré, os matemáticos que estudaron o teorema de Poincaré-Miranda utilizaron enunciados lixeiramente distintos; por

exemplo, modificando o dominio das aplicacións continuas. Para fixar a notación e a terminoloxía modernas, imos dar unha primeira versión bastante recente, publicada por Hélène Frankowska en 2018, [26]. En seccións posteriores, escribiremos o enunciado concreto que utilizou cada autor e daremos a demostración correspondente.



Figura 2.1: Jules Henri Poincaré (1854-1912). Fonte: [27].

Teorema 2.1. (Enunciado de Frankowska [26]) *Consideremos un número $L > 0$ e o n -cubo*

$$K = [-L, L] \times \cdots \times [-L, L] \subset \mathbb{R}^n.$$

Sexa $f = (f_1, \dots, f_n) : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ unha función continua de forma que:

$$f_i(x) \geq 0, \forall x \in \{(x_1, \dots, x_n) \in K : x_i = -L\}, \quad (2.1)$$

$$f_i(x) \leq 0, \forall x \in \{(x_1, \dots, x_n) \in K : x_i = L\}. \quad (2.2)$$

Entón, f ten un equilibrio en K ; é dicir, existe un punto $x^ \in K$ de xeito que $f(x^*) = 0$.*

Observación 2.2. É doado obter unha versión algo máis xeral do Teorema 2.1. Por exemplo, podemos multiplicar por -1 algunha coordenada f_i , con $i \in \{1, \dots, n\}$, sen que isto modifique as consecuencias do teorema. Noutras palabras, para dita coordenada i -ésima, a condición (2.1) non ten por que ir asociada ao hiperplano $x_i = -L$, senón que podería estar asociada a $x_i = L$ e viceversa para a desigualdade (2.2).

Observación 2.3. Unha interpretación da observación anterior é que o Teorema 2.1 afirma que todo campo vectorial entrante nun hipercubo K ten un cero en K . Se multiplicamos por -1 todas as desigualdades (2.1) e (2.2), obtemos unha versión análoga do teorema: todo campo vectorial saínte nun hipercubo K ten un cero en K .

2.2. Primeira proba do teorema

A proposición de Poincaré permaneceu esquecida durante décadas [28] até o ano 1940, cando foi redescuberta por Silvio Cinquini [29]. El mesmo fixo unha tentativa de demostración, pero resultou estar incompleta. Ese mesmo ano, Carlo Miranda estudou o problema que lle propuxo Cinquini e publicou a primeira proba rigorosa [22], baseándose na equivalencia da proposición de Poincaré co teorema do punto fixo de Brouwer. No noso caso, como xa demostramos o Corolario 1.28, será suficiente con probar que o teorema de Poincaré-Miranda é consecuencia do teorema de Brouwer.



Figura 2.2: Carlo Miranda (1912-1982). Fonte: [30].

Teorema 2.4. (Enunciado de Miranda [22]) *Se f_1, f_2, \dots, f_n son n funcións de variable (x_1, x_2, \dots, x_n) continuas no n -cubo $K = [-L, L] \times \dots \times [-L, L]$ e tales que verifican as desigualdades*

$$f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, -L, x_{i+1}, \dots, x_n) \geq 0, \quad (2.3)$$

$$f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, L, x_{i+1}, \dots, x_n) \leq 0, \quad (2.4)$$

entón existe polo menos unha solución do seguinte sistema:

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.5)$$

Demostración. Imos demostrar que o Teorema 2.4 é consecuencia do Corolario 1.28. En primeiro lugar, podemos supoñer que as desigualdades (2.3) e (2.4) se dan en sentido estrito (xustificaremos isto ao final da proba). Así, é posible definir as cantidades ε_i , para $i = 1, \dots, n$, de forma que cumpran

$$0 < \varepsilon_i < -\frac{\delta'_i}{m_i}, \quad (2.6)$$

$$0 < \varepsilon_i < \frac{\delta''_i}{M_i}, \quad (2.7)$$

onde δ'_i e δ''_i son as distancias dos conxuntos $A = f_i^{-1}(-\infty, 0)$ e $B = f_i^{-1}(0, \infty)$ aos hiperplanos $x_i = -L$ e $x_i = L$, respectivamente; e m_i e M_i son o mínimo (negativo) e o máximo (positivo) da f_i no seu dominio.

Notemos que o conxunto A é fechado (preimaxe dun fechado por f continua) e o hiperplano $x_i = -L$ restrinxido a K é compacto (subconxunto fechado de K compacto) e, ademais, son conxuntos disxuntos. Polo tanto, é claro que a distancia δ'_i é positiva. Cun razoamento análogo, temos que δ''_i tamén é unha distancia positiva.

Por outra parte, definimos as seguintes funcións:

$$F_i = x_i + \varepsilon_i \cdot f_i. \quad (2.8)$$

É claro que estas novas F_i verifican a condición $|F_i| \leq L$, logo estamos nas hipóteses do Corolario 1.28 e existe un punto fixo $x_i = F_i(x_i)$. Despexando en (2.8), deducimos que o sistema (2.5) ten solución, como queríamos probar.

En caso de que as desigualdades (2.3) e (2.4) non se cumprisen en sentido estrito, bastaría tomar $\varepsilon > 0$ e definir as funcións

$$f'_i = f_i - \varepsilon \cdot x_i, \quad (2.9)$$

de xeito que (2.3) e (2.4) xa se satisfán de xeito estrito e podemos definir as cantidades ε'_i como en (2.6) e (2.7). Podemos repetir o proceso anterior e definir unhas funcións análogas a (2.8), isto é,

$$F'_i = (1 - \varepsilon \cdot \varepsilon'_i) \cdot x_i + \varepsilon'_i \cdot f'_i. \quad (2.10)$$

Tomando ε suficientemente pequeno, é claro que podemos limitar as funcións F'_i nun certo hipercubo K' e, aplicando o Corolario 1.28, aseguramos a existencia dunha solución para $f'_i = 0$. Facendo $\varepsilon \rightarrow 0$ e pola expresión (2.9), isto garante que o sistema (2.5) ten un cero, como queríamos probar. \square

Observación 2.5. É interesante demostrar tamén a outra implicación que deu Miranda en [22], isto é, que o Corolario 1.28 é consecuencia do Teorema 2.4. Desta forma, quedará probada a equivalencia dos teoremas de Poincaré-Miranda e de Brouwer.

Supoñamos que F_1, \dots, F_n son funcións nas condicións do Corolario 1.28. Podemos prolongar cada F_i a todo \mathbb{R} mantendo a restrición $|F_i| \leq L$. Defínimos agora

$$f_i = F_i - x_i. \quad (2.11)$$

Podemos encontrar un $L' > 0$ suficientemente grande para que se cumpran as desigualdades (2.3) e (2.4). Polo Teorema 2.4, o sistema (2.5) ten polo menos unha solución. Despexando en (2.11), isto significa que F_i ten un punto fixo. Ademais, a condición $|F_i| \leq L$ permítenos asegurar que todo punto (x_1, \dots, x_n) está contido no hipercubo $|x_i| \leq L$; polo tanto, o punto fixo tamén está nese hipercubo.

2.3. Algunhas probas alternativas

A partir do artigo [22] publicado por Miranda en 1940, o resultado comezou a ser coñecido como o teorema de Poincaré-Miranda. Múltiples matemáticos teñen revisado este resultado, ofrecendo diversas probas alternativas ou simplificando os argumentos orixinais que utilizou Miranda. Nas seguintes seccións presentamos unha selección dalgunhas desas demostracións.

2.3.1. Nova proba utilizando o teorema do punto fixo de Brouwer

O matemático belga Jean Mawhin é un dos maiores expertos no teorema de Poincaré-Miranda. Entre outros artigos, en 2007 publicou unha revisión exhaustiva do teorema do punto fixo de Brouwer e as súas equivalencias, onde se dá unha referencia completa da historia do teorema de Poincaré-Miranda [28]. Nun artigo posterior de 2019, el mesmo ofreceu unha proba alternativa [23]. A devandita proba está baseada nunha aplicación alternativa do teorema de Brouwer e, a diferenza da versión de Miranda, é moito máis directa, evitando ter que distinguir os casos de desigualdades estritas e non estritas.

Teorema 2.6. (Enunciado de Mawhin [23]) *Consideremos un hiperrectángulo $K = [-R_1, R_1] \times \dots \times [-R_n, R_n] \subset \mathbb{R}^n$ e unha aplicación $f : K \rightarrow \mathbb{R}^n$*

continua, de maneira que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ se cumpre:

$$f_i(x) \leq 0, \forall x \in \{(x_1, \dots, x_n) \in K : x_i = -R_i\}, \quad (2.12)$$

$$f_i(x) \geq 0, \forall x \in \{(x_1, \dots, x_n) \in K : x_i = R_i\}. \quad (2.13)$$

Entón, f ten polo menos un cero en K .

Demostración. Comezamos definindo a aplicación $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, cuxa compoñente i -ésima para o punto $x = (x_1, \dots, x_n)$ vén dada pola expresión:

$$p_i(x) = \begin{cases} -R_i, & x \in (-\infty, -R_i), \\ x_i, & x \in [-R_i, R_i], \\ R_i, & x \in (R_i, \infty). \end{cases} \quad (2.14)$$

É fácil ver que $p(x) = x$ para todo $x \in K$ e que $p(\mathbb{R}^n) \subset K$. En particular, isto último implica que $|p(x)| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n R_j^2}$ para todo $x \in K$.

Agora, definimos unha nova aplicación (continua) $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $g = p - f \circ p$. Para un punto calquera $x \in \mathbb{R}^n$, podemos limitar a aplicación:

$$|g(x)| \leq |p(x)| + |f(p(x))| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n R_j^2} + \max_{x \in K} |f(x)| := R_0$$

Tal e como definimos a cantidade R_0 , é inmediato comprobar que g leva a bóla B_{R_0} en si mesma. Polo tanto, estamos en condicións de aplicar o Corolario 1.27 e podemos asegurar a existencia dun punto fixo para a función g , é dicir:

$$x^* = p(x^*) - f(p(x^*)). \quad (2.15)$$

Para concluír, bastaría ver que $x^* \in K$ pois nese caso teríamos $p(x^*) = x^*$ e (2.15) implicaría $f(x^*) = 0$. Se tivésemos que $x^* \notin K$, entón existiría $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $x_i^* < -R_i$ ou $x_i^* > R_i$. Sen perda de xeneralidade, tomemos o primeiro caso. Usando a definición de p_i en (2.14) e que x^* é un punto fixo segundo (2.15), temos que

$$-R_i > x_i^* = p_i(x^*) - f_i(p_i(x^*)) = -R_i - f_i(p_i(x^*)) \geq -R_i,$$

o cal é un absurdo. □

2.3.2. Proba utilizando métodos combinatorios

En apartados previos, estudamos que o lema de Sperner aseguraba a existencia dun certo tipo de coloración para o n -símplex, o cal daba unha proba elemental do teorema do punto fixo de Brouwer. Algúns matemáticos, como Kuhn [31] ou Wolsey [32], enunciaron as súas propias versións cúbicas do lema de Sperner, isto é, adaptadas ao n -cubo combinatorio. En 1997, o matemático polaco Wladyslaw Kulpa publicou un artigo [13] no que demostra un resultado análogo ao lema de Sperner e, como consecuencia, proba o teorema de Poincaré-Miranda. A diferenza das probas de Miranda e Mawhin, Kulpa non recorre ao teorema de Brouwer. A súa proba é bastante elemental, no sentido de que só precisamos do concepto de n -cubo combinatorio e algunhas propiedades básicas, ademais dun lema técnico de conxuntos compactos (Lema 1.25).

Teorema 2.7. (Enunciado de Kulpa [13]) Consideremos o n -cubo unida-
de $I^n = [0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$ e, para cada $i \leq n$, as i -ésimas caras posteriores e anteriores:

$$\begin{aligned} I_i^- &= \{x \in I^n : x_i = 0\}, \\ I_i^+ &= \{x \in I^n : x_i = 1\}. \end{aligned}$$

Consideremos tamén a función continua $f : I^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, de xeito que para cada $i \leq n$ se verifica $f_i(I_i^-) \subset (-\infty, 0]$ e $f_i(I_i^+) \subset [0, \infty)$. Entón, existe un punto $c \in I^n$ tal que $f(c) = 0$.

Demostración. Comezamos definindo os conxuntos $H_i^- = f_i^{-1}(\infty, 0]$ e $H_i^+ = f_i^{-1}[0, \infty)$. Observemos que $I^n = H_i^- \cup H_i^+$, para calquera $i \in \{1, \dots, n\}$. Definimos tamén $F_0 = I^n$ e $F_i = H_i^+ \setminus I_i^-$, para $i \in \{1, \dots, n\}$. Así, podemos construír a aplicación $\varphi : I^n \rightarrow \{0, \dots, n\}$, dada por:

$$\varphi(x) = \max \left\{ j : x \in \bigcap_{k=0}^j F_k \right\}. \quad (2.16)$$

Imos estudar algunhas propiedades importantes da función φ :

- Propiedade 1: Se $x \in I_i^-$, entón $\varphi(x) < i$. Isto é consecuencia de $I_i^- \cap F_i = \emptyset$ e de (2.16).
- Propiedade 2: Se $x \in I_i^+$, entón $\varphi(x) \neq i - 1$. Para comprobalo, supoñamos pola contra que $\varphi(x) = i - 1$. Por (2.16), isto significa que $x \in \bigcap_{k=0}^{i-1} F_k$ e $x \notin F_i$. Pero, por outro lado $x \in I_i^+ \subseteq H_i^+$ e $I_i^+ \cap I_i^- = \emptyset$, polo que $x \in F_i$ e chegamos a unha contradición.

- Propiedade 3: Se $\varphi(x) = i$, entón $x \in H_i^+$. É consecuencia de (2.16) e de que $I^n = H_i^- \cup H_i^+$.
- Propiedade 4: Se $\varphi(x) = i-1$, entón $x \in H_i^-$. É consecuencia de (2.16) e de que $I^n = H_i^- \cup H_i^+$.
- Propiedade 5: Para calquera subconxunto $S \subset I^n$, se $\varphi(S \cap I_i^\varepsilon) = \{0, 1, \dots, n-1\}$, entón $i = n$ e $\varepsilon = -$. É consecuencia das Propiedades 2.3.2 e 2.3.2.

Consideremos agora o n -cubo combinatorio $C(k)$. Diremos que un subconxunto $S \subseteq C(k)$ de $l+1$ puntos é admisible se $\varphi(S) = \{0, \dots, l\}$. Imos probar por indución na dimensión n que o número de n -símplices admisibles en $C(k)$, $\alpha(C(k))$, é sempre impar. O caso $n = 0$ é evidente, pois $C(k) = \{0\}$ e $S = \{0\}$ é o único 0-símplice admisible, logo temos $\alpha(C(k)) = 1$ impar.

Supoñamos certo para $(n-1)$ -símplices e consideremos un n -símplice $S = [z_0, \dots, z_n] \subseteq C(k)$ en \mathbb{Z}_k^n . Sexa $\alpha(S)$ o número de $(n-1)$ -caras admisibles de S . Se S é admisible, entón $\varphi(S) = \{0, \dots, n\}$ e a única $(n-1)$ -cara admisible é a que se obtén eliminando o vértice z_i tal que $\varphi(z_i) = n$. Polo tanto, $\alpha(S) = 1$. Se S non é admisible, distinguimos dous casos:

1. Se $\varphi(S) = \{0, \dots, n-1\}$, isto significa que hai dous índices $i \neq j$ para os cales $z_i = z_j$, de forma que se omitimos algún deses vértices, obtemos unha $(n-1)$ -cara admisible. É dicir, $\alpha(S) = 2$.
2. Se $\{0, \dots, n-1\} \not\subseteq \varphi(S)$, non hai ningunha forma de omitir un vértice para formar unha $(n-1)$ -cara admisible, logo $\alpha(S) = 0$.

Consideremos todos os posibles n -símplices $S \subseteq C(k)$. Podemos escribir a ecuación

$$\alpha(C(k)) \equiv \sum_S \alpha(S) \pmod{2}, \quad (2.17)$$

xa que se S non é admisible, $\alpha(S) \equiv 0 \pmod{2}$, así que non contribúe ao sumando da dereita.

Por outra parte, imos aplicar o Lema 1.15 á nosa situación. Se S ten unha $(n-1)$ -cara na fronteira de $C(k)$, entón o $S[i]$ que comparta esa cara con S non pode estar dentro de $C(k)$, así que esa $(n-1)$ -cara só está en S . Se a $(n-1)$ -cara non está na fronteira, entón está compartida exactamente por dous n -símplices en $C(k)$, o propio S e o $S[i]$ correspondente.

Pola ecuación (2.17), as $(n-1)$ -caras admisibles que non estean na fronteira de $C(k)$ están contándose por duplicado e, como estamos traballando en

módulo 2, non afectan á suma total. É dicir, só consideramos $F \subset \partial C(k)$, onde F é unha $(n-1)$ -cara admisible. A Propiedade 2.3.2 implica que $F \subset C_n^+$ e, como vimos na Definición 1.13, F pode pensarse como un $(n-1)$ -simplex en \mathbb{Z}_k^{n-1} . Polo tanto, podemos aplicar a hipótese de indución a $\sum_S \alpha(S)$ e aseguramos que é un número impar. Por (2.17), isto implica que $\alpha(C(k))$ é impar, como queríamos probar.

En particular, acabamos de demostrar que, para calquera $k > 1$, sempre existe un n -simplex admisible $S_k \subset C(k)$, isto é, tal que $\varphi(S_k) = \{0, \dots, n\}$. Polas Propiedades 2.3.2 e 2.3.2, é claro que existen puntos $x, y \in S_k$ tales que $x \in H_i^+$ e $y \in H_i^-$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Noutras palabras:

$$H_i^+ \cap S_k \neq \emptyset \neq H_i^- \cap S_k, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Ademais, $\text{diam}(S_k) = \frac{\sqrt{n}}{k}$ pola ecuación (1.8), logo $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam}(S_k) = 0$. Observemos tamén que os conxuntos H_i^+ e H_i^- son compactos, por ser fechados e limitados. Entón, aplicando o Lema 1.25, podemos garantir que o conxunto

$$H = \bigcap_{i=1}^n (H_i^+ \cap H_i^-)$$

non é baleiro. Por outra parte, é claro que calquera punto $c \in H \subset I^n$ verifica $f(c) = 0$. En conclusión, aseguramos a existencia dun punto $c \in I^n$ que cumpre $f(c) = 0$.

□

2.4. Condicións para a unicidade de solución

Nas seccións anteriores, vimos que o teorema de Poincaré-Miranda garante a existencia dun cero, pero en ningún momento temos asegurada a súa unicidade. Temos a motivación do que acontece no caso unidimensional, isto é, o teorema de Bolzano. Nesas condicións, se unha función continua $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ cambia de signo no intervalo I , entón existe unha raíz de f en I . Ademais, se f é derivable e a derivada é estritamente positiva en todo \mathbb{R} (ou equivalentemente, estritamente negativa), entón dita raíz é única.

Considerando dimensións superiores, é razoable pensar nunha analogía dese resultado para Poincaré-Miranda; isto é, se existe a matriz xacobiana e é definida (positiva ou negativa) en todo \mathbb{R}^n , entón o cero é único. Veremos que efectivamente esta proposición é certa e, de feito, é semellante ao teorema fundamental de inxectividade de Gale-Nikaido-Inada, que pode consultarse en [33]. Para facilitar os cálculos, nós restrinxiremos un pouco máis as hipóteses e asumiremos que a aplicación de partida é de clase C^1 .

Aínda que isto resolve a pregunta de forma teórica, probar que unha matriz é definida pode ser complicado de comprobar na práctica, sobre todo para dimensións altas. Por esta razón, daremos un criterio sinxelo para matrices bidimensionais que nos servirá para garantir a unicidade cando o dominio da aplicación está en \mathbb{R}^2 . Este resultado será útil no seguinte capítulo, onde traballaremos cunha aplicación concreta e aseguraremos a existencia e unicidade dun cero dentro dun certo rectángulo en \mathbb{R}^2 .

Definición 2.8. Sexa $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ unha aplicación de clase C^1 no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. A matriz xacobiana de f é unha matriz cadrada de orde n formada por todas as derivadas parciais de primeira orde, isto é,

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix},$$

onde usamos a notación $f = (f_1, \dots, f_n)$ e $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$. A diferencial de f é a aplicación $df : \Omega \rightarrow \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ definida por $df(x) = J_f(x)$. Como traballaremos con funcións de clase C^1 , a diferencial sempre será unha aplicación continua nos casos considerados.

Definición 2.9. Unha matriz $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ dise definida positiva se verifica

$$v^\top \cdot A \cdot v > 0, \forall v \neq 0,$$

onde v^\top denota o trasposto de v . Equivalentemente, A é definida negativa cando cumpre

$$v^\top \cdot A \cdot v < 0, \forall v \neq 0.$$

Proposición 2.10. Consideremos a aplicación $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 no aberto convexo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Se, para todo $x \in \Omega$, $J_f(x)$ é unha matriz definida positiva (ou definida negativa), entón f é inxectiva en Ω .

Demostración. Imos facer a demostración supoñendo que $J_f(x)$ é definida positiva para todo $x \in \Omega$ (o outro caso é análogo). Para ver que f é inxectiva en Ω , tomemos dous puntos $x, y \in \Omega$ de xeito que $f(x) = f(y)$ e vexamos que necesariamente $x = y$. Comezamos definindo a aplicación $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ dada por

$$\gamma(t) = ty + (1 - t)x, \tag{2.18}$$

que é a liña recta que une os puntos x e y . Dado que o conxunto Ω é convexo, é claro que $\gamma(t) \in \Omega$ para calquera $t \in [0, 1]$, así que dita aplicación está ben definida. Tamén podemos definir $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, dada pola composición $g(t) = (f \circ \gamma)(t)$. Para $i \in \{1, \dots, n\}$, derivemos a compoñente i -ésima de g , utilizando a regra da cadea:

$$g'_i(t) = (f_i \circ \gamma)'(t) = \nabla f_i(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\gamma(t)) \cdot (y - x). \quad (2.19)$$

Dado que g é claramente continua en $[0, 1]$ e tendo en conta a ecuación (2.19), podemos aplicar o teorema fundamental do cálculo:

$$g_i(1) - g_i(0) = \int_0^1 g'_i(t) dt = \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\gamma(t)) dt \right) \cdot (y - x), \quad (2.20)$$

onde tamén utilizamos a linearidade da integral. Como a ecuación (2.20) é válida para toda compoñente de g e lembrando a Definición 2.8, podemos escribir:

$$g(1) - g(0) = \int_0^1 (df(\gamma(t)) \cdot (y - x)) dt. \quad (2.21)$$

Observemos que $g(1) = f(x)$ e $g(0) = f(y)$. Se denotamos $v = x - y \in \mathbb{R}^n$ e multiplicamos por v^\top a ambos lados na ecuación (2.21), entón:

$$v^\top \cdot (f(x) - f(y)) = \int_0^1 (v^\top \cdot df(\gamma(t)) \cdot v) dt. \quad (2.22)$$

Por hipótese, o termo da esquerda da ecuación (2.22) é nulo. Se tivésemos que $v \neq 0$, como $J_f(x)$ é definida positiva para todo $x \in \Omega$, deducimos que o integrando na dereita de (2.22) é unha función continua e estritamente positiva. Desta forma, a integral da dereita non podería ser cero. Entón, a única forma de que se verifique a ecuación (2.22) é que $v = 0$; isto é, $x = y$. Polo tanto, probamos que f é inxectiva en Ω . □

Corolario 2.11. (Teorema de Poincaré-Miranda con unicidade de solución) *Consideremos un hiperrectángulo $K = [-R_1, R_1] \times \dots \times [-R_n, R_n] \subset \mathbb{R}^n$ e unha aplicación $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 en \mathbb{R}^n , de maneira que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ cúmprese que:*

$$f_i(x) \leq 0, \forall x \in \{(x_1, \dots, x_n) \in K : x_i = -R_i\}, \quad (2.23)$$

$$f_i(x) \geq 0, \forall x \in \{(x_1, \dots, x_n) \in K : x_i = R_i\}. \quad (2.24)$$

Ademais, supoñamos que a matriz xacobiana J_f é definida positiva (ou negativa) en todo \mathbb{R}^n . Entón, existe un único punto $c \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(c) = 0$ e ademais $c \in K$.

Demostración. A existencia do cero en K é consecuencia inmediata do Teorema 2.6. Ademais, como \mathbb{R}^n é un conxunto aberto e convexo, a Proposición 2.10 garante que f é inxectiva en todo \mathbb{R}^n . Polo tanto, esa raíz de f é única. \square

Proposición 2.12. *Consideremos unha matriz $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ da forma:*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Entón, a matriz A é definida (positiva ou negativa) se, e só se, cumpre que:

$$(b+c)^2 < 4 \cdot a \cdot d. \quad (2.25)$$

Demostración. Sexa $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$. Se desenvolvemos $v^\top \cdot A \cdot v$, obtemos a seguinte forma cuadrática:

$$Q(v_1, v_2) = av_1^2 + (b+c)v_1v_2 + dv_2^2. \quad (2.26)$$

Se $a = 0$, entón vemos que $Q(1, 0) = 0$, así que A non sería definida. Polo tanto, $a \neq 0$ e podemos reescribir a ecuación (2.26) como:

$$Q(v_1, v_2) = a \left[\left(v_1 + \frac{b+c}{2a} v_2 \right)^2 + \left(\frac{d}{a} - \left(\frac{b+c}{2a} \right)^2 \right) v_2^2 \right]. \quad (2.27)$$

Se supoñemos que $(b+c)^2 < 4 \cdot a \cdot d$, o único xeito de que a forma cuadrática sexa nula para algún (v_1, v_2) é que $v_2 = 0$ para anular o segundo sumando dentro do paréntese. Como $v_2 = 0$, para que o primeiro sumando tamén sexa nulo séguese que $v_1 = 0$. Logo, concluimos que Q é definida (positiva ou negativa) segundo o signo de a .

Se supoñemos que Q é definida, vemos que $Q(1, 0)$ ten o signo de a . Pero ese signo coincide co de $Q\left(\frac{b+c}{2a}, -1\right)$ só se $(b+c)^2 < 4 \cdot a \cdot d$.

Logo, a condición (2.25) garante que A é definida e o signo de a decide se é positiva ou negativa. \square

2.5. Xeneralización do teorema a outros dominios

Tras a publicación da proba de Miranda en 1940 [22], algúns dos autores que estudaron o teorema de Poincaré-Miranda tamén presentaron as súas propias xeneralizacións de dito resultado. Unha das posibilidades é considerar aplicacións con propiedades máis débiles que a continuidade. No ano 2007, a matemática Katarzyna Szymanska-Debowska probou o teorema para funcións semicontínuas [34] e en 2015 refinou o resultado para aplicacións aínda máis xerais en espazos de Banach [35].

Outra posibilidade é considerar recintos máis xerais que o hiperrectángulo. Como exemplo, Kidawa e Tkacz demostraron o teorema de Poincaré-Miranda para poliedros n -cúbicos, publicado en 2015 en [36]. Nesta categoría está incluído o n -cubo e tamén outros obxectos máis exóticos, como a banda de Möbius, o toro sólido ou un 2-cubo cun buraco cadrado.

A partir de Poincaré-Miranda, podemos demostrar o seguinte resultado válido para a bóla, aínda que podería refinarse para outras xeometrías.

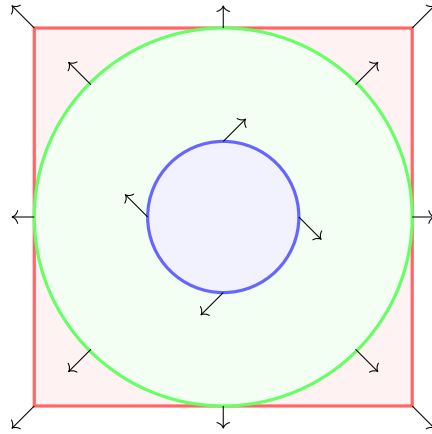


Figura 2.3: Teorema de Poincaré-Miranda nunha 2-bóla.

Proposición 2.13. *Consideremos $B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ a bóla maciza centrada na orixe de raio 1. Se $F : B(0,1) \rightarrow \mathbb{R}^n$ cumpre que $\langle F(x), x \rangle > 0$ para todo punto $x \in \partial B(0,1)$, entón existe $c \in B(0,1)$ tal que $F(c) = 0$.*

Demostración. Como primeiro paso definiremos $G : B(0,2) \rightarrow \mathbb{R}^n$ como

unha extensión continua de F

$$G(x) = \begin{cases} F(x) & \text{se } x \in B(0, 1), \\ (2 - \|x\|) \cdot F\left(\frac{x}{\|x\|}\right) + (\|x\| - 1) \cdot \frac{x}{\|x\|} & \text{noutro caso.} \end{cases}$$

Obsérvese que na zona na cal F non estaba definida, G non presenta ceros. O motivo é simple, xa que claramente

$$\left\langle ((2 - \|x\|) \cdot F\left(\frac{x}{\|x\|}\right) + (\|x\| - 1) \cdot \frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle > 0$$

pola hipótese $\left\langle F\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \frac{x}{\|x\|} \right\rangle > 0$.

Por último, estendemos G a un campo $H : [-2, 2]^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ cunha extensión radial constante a partir de $\partial B(0, 2)$, é dicir $H(x) = \frac{x}{\|x\|}$ en $[-2, 2]^n \setminus B(0, 2)$. Evidentemente a extensión resulta continua e non engade ceros. Ademais, H está nas hipóteses de Poincaré-Miranda pois se $x \in \partial[-2, 2]^n$, basta argumentar que o signo da i -ésima coordenada de x coincide co signo da i -ésima coordenada de $\frac{x}{\|x\|}$.

En consecuencia, o teorema de Poincaré-Miranda garante que H ten un cero en $[-2, 2]^n$ e, polos descartes previos, F ten que ter un cero en $B(0, 1)$. \square

Capítulo 3

Aplicacións

Neste capítulo, imos presentar dous exemplos de aplicación do teorema de Poincaré-Miranda. No primeiro caso, comprobaremos as hipóteses do teorema para unha aplicación particular, aseguraremos a unicidade de solución e discutiremos a súa interpretación gráfica. Na segunda sección, imos facer uso do teorema desde un punto de vista máis aplicado ás ciencias naturais. En concreto, presentaremos o problema dos $1 + n$ corpos e aplicaremos o teorema de Poincaré-Miranda de forma axeitada para garantir a existencia dunha certa configuración estable. Para elaborar este último apartado, consultamos o traballo de Gasull e Mañosa [37]. Neste artigo, poden revisarse exemplos adicionais de aplicacións do teorema de Poincaré-Miranda a sistemas dinámicos, en relación directa con modelos mecánicos e biolóxicos.

3.1. Exemplo de comprobación do teorema

Co obxectivo de ilustrar o teorema de Poincaré-Miranda, imos dar un exemplo concreto de aplicación que cumpre as hipóteses do Corolario 2.11 para así asegurar a existencia e unicidade dun cero. Ademais, poderemos dar unha interpretación gráfica e unha aproximación numérica dese cero.

Comezamos definindo o rectángulo $K = [0, 1] \times [0, 2] \subset \mathbb{R}^2$ e a aplicación $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada pola expresión:

$$f_1(x, y) = \frac{2}{3}x^3 + xy^2 + \frac{y}{2} + x - \frac{3}{2}, \quad (3.1)$$

$$f_2(x, y) = \frac{2}{3}y^3 + yx^2 - \frac{x}{2} + y - 3. \quad (3.2)$$

Esta aplicación é claramente de clase C^2 en \mathbb{R}^2 . Comprobemos agora as

desigualdades (2.23) e (2.24) no rectángulo K :

$$f_1(0, y) = \frac{1}{2}(y - 3) < 0, \forall y \in [0, 2], \quad (3.3)$$

$$f_1(1, y) = y^2 + \frac{y}{2} + \frac{1}{6} > 0, \forall y \in [0, 2], \quad (3.4)$$

$$f_2(x, 0) = -\frac{x}{2} - 3 < 0, \forall x \in [0, 1], \quad (3.5)$$

$$f_2(x, 2) = 2x^2 - \frac{x}{2} + \frac{13}{3} > 0, \forall x \in [0, 1]. \quad (3.6)$$

Vexamos agora a inxectividade de f . O primeiro paso é calcular as derivadas parciais de primeira orde e construír a matriz xacobiana:

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x^2 + y^2 + 1 & 2xy + \frac{1}{2} \\ 2xy - \frac{1}{2} & 2y^2 + x^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

Para ver que $J_f(x, y)$ é definida, aplicamos a Proposición 2.12. Temos que verificar a inecuación (2.25) para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Desenvolvendo e agrupando termos axeitadamente, obtemos a desigualdade

$$2x^4 + 2y^4 + x^2y^2 + 3x^2 + 3y^2 + 1 > 0,$$

que claramente é certa para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Ademais, $a(x, y) > 0$ nesta matriz, así que $J_f(x, y)$ é definida positiva. Estamos entón nas condicións do Corolario 2.11, polo que garantimos a existencia e unicidade dun punto $(x^*, y^*) \in K$ tal que $f(x^*, y^*) = 0$.

Na Figura 3.1, imos estudar cal é a interpretación gráfica deste resultado. O rectángulo K aparece representado en cor verde. As desigualdades (3.3) e (3.4) aseguran que a función f_1 é negativa no lado esquerdo de K e positiva no lado dereito. A continuidade de f_1 implica que, se tomamos calquera camiño do lado esquerdo ao lado dereito de K (ou viceversa), debemos pasar por un punto onde f_1 sexa nula. Isto significa que existe unha certa curva na que f_1 vale cero e que divide K nunha parte esquerda e nunha parte dereita (na gráfica, a curva vermella). De igual modo, razoamos que debe haber unha curva en cuxos puntos f_2 é cero e que ademais divide K nunha parte superior e nunha inferior (na gráfica, a curva azul). Observamos na Figura 3.1 que ditas curvas deben cortar polo menos nun punto, que será unha raíz de f . Para a nosa aplicación particular, observamos que o punto $(x^*, y^*) \in K$ é único, tal e como aseguramos coa condición de unicidade.

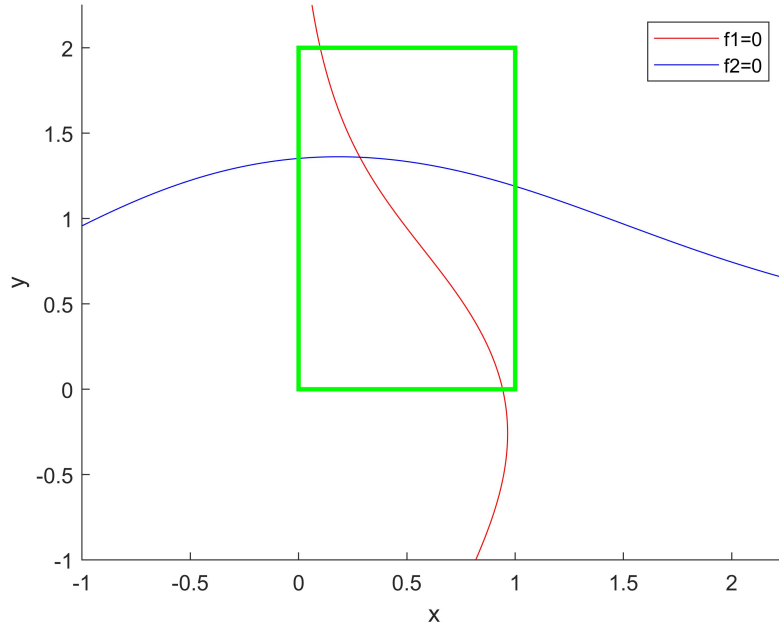


Figura 3.1: Curvas implícitas $f_1(x, y) = 0$ e $f_2(x, y) = 0$ no rectángulo $[0, 1] \times [0, 2]$.

Ademais, podemos empregar métodos numéricos xa implementados para dar unha aproximación dese punto (x^*, y^*) . A estimación obtida é:

$$\begin{aligned} x^* &\approx 0,282871, \\ y^* &\approx 1,35909. \end{aligned}$$

3.2. Resolución dun problema físico

O problema dos tres corpos xurdiu no século XVIII coa motivación de modelar o comportamento do Sol, a Terra e a Lúa dunha forma precisa. O problema foi amplamente estudado no século XIX tanto por físicos como por matemáticos, debido á súa estreita relación coas ecuacións diferenciais e os sistemas dinámicos. Xa temos comentado que Henri Poincaré publicou resultados importantes acerca deste tema en 1883 [15] e en 1886 [16]; de feito, foi precisamente neste contexto no que o matemático formulou o teorema de Poincaré-Miranda.

En xeral, o problema dos n corpos, para $n \in \mathbb{N}$, pode ser formulado da seguinte maneira. Consideremos n partículas no espazo \mathbb{R}^3 . Para $i \in$

$\{1, \dots, n\}$, a partícula i -ésima ten masa puntual $m_i \in \mathbb{R}$ e o seu vector de posición denótase por $r_i = r_i(t) \in \mathbb{R}^3$. Coñecemos os valores iniciais da posición $r_i(0)$, da velocidade $r_i'(0)$ e da aceleración $r_i''(0)$. O noso obxectivo será determinar a evolución temporal das n partículas en calquera instante, $\{r_1(t), \dots, r_n(t)\}$. Este conxunto recibe o nome de solución ou configuración do sistema.

As partículas seguen a lei de gravitación de Newton, isto é, a interacción mutua entre as partículas i e j vén dada por

$$F_{ij} = \frac{Gm_i m_j (r_i - r_j)}{\|r_i - r_j\|^3}, \quad (3.7)$$

onde G é a constante de gravitación universal. A ecuación (3.7) pode introducirse na segunda lei de Newton e, sumando para todas as partículas, obtemos a ecuación do movemento da partícula i -ésima:

$$m_i \frac{d^2 r_i}{dt^2} = \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{Gm_i m_j (r_i - r_j)}{\|r_i - r_j\|^3}. \quad (3.8)$$

Aplicando a ecuación (3.8) a todas as partículas e, tendo en conta que cada vector de posición ten tres coordenadas, obtemos un sistema de $3n$ ecuacións diferencias ordinarias de segunda orde. O problema dos n corpos consiste en encontrar unha solución deste sistema en forma fechada, é dicir, unha expresión cunha cantidade finita de operacións aritméticas.

O caso $n = 1$ é trivial e, para $n = 2$, pode encontrarse unha solución en forma fechada de xeito bastante simple. Porén, o caso $n = 3$ é notablemente complexo. Ao longo das décadas, matemáticos como Euler, Lagrange ou D'Alembert presentaron modelos para casos particulares do problema dos tres corpos, pero a solución xeral permaneceu sen resolver [38]. Non foi até 1887 cando Heinrich Bruns probou en [39] que, de feito, é imposible encontrar unha solución en forma fechada para $n \geq 3$.

Debemos destacar que é posible resolver formalmente o problema dos n corpos mediante series de Taylor. O caso tridimensional foi probado en 1912 por Karl Sundman [40] e en 1991 o matemático Quidong Wang xeneralizouno para $n > 3$, en [41]. Porén, ao tratarse dunha serie infinita, é necesario truncala nun número finito de termos para aplicala a calquera situación práctica, perdendo así a exactitude. Ademais, o truncamento da serie é moi pouco eficiente desde o punto de vista computacional, polo que normalmente se utilizan outros métodos numéricos máis sofisticados.

Para o noso traballo, imos estudar unha versión simplificada do problema que se coñece como aproximación dos $1 + n$ corpos. Nesta situación, consideramos que un dos corpos ten unha masa significativamente maior que as

outras n partículas, cuxas masas pódense desprezar. Estes supostos seme llan unha boa opción para estudar un sistema planetario, pois normalmente a estrela é moito máis masiva que os planetas que orbitan arredor dela. Por esta mesma razón, é razoable procurar solucións planas, xa que ese é o comportamento que observamos nos movementos periódicos dos planetas. Por último, tamén é coherente procurar solucións centrais: en vez de considerar as interaccións individuais, podemos asumir que a forza gravitatoria resultante que actúa sobre cada partícula é a que exerce o centro de masas (neste caso, o corpo masivo) e a aceleración inducida é proporcional á distancia entre ambos corpos.

Tendo en conta todas estas condicións e aproximacións, podemos transformar o sistema de $6n$ ecuacións diferenciais do tipo (3.8) nun novo sistema de n ecuacións alxébricas. En efecto, pode demostrarse (por exemplo, en [42]) que as solucións centrais planas (SCP) do problema dos $1 + n$ corpos son órbitas sobre un mesmo círculo centrado no corpo masivo. Podemos supoñer dito círculo de raio unidade e centro na orixe de coordenadas. Deste xeito, as n traxectorias son estables, periódicas no tempo e, en certo modo, só dependen das condicións iniciais. Pero non todas as configuracións angulares das n partículas sobre o círculo dan lugar a unha SCP. Os ángulos iniciais deben cumprir unhas certas condicións, que estudaremos a continuación.

Sexa $\theta_i \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ a posición angular inicial (en radiáns) que forma a partícula i -ésima co corpo masivo. Definimos a función $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$f(\theta) = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{(1 - \cos \theta)^3}} \right) \text{sen } \theta. \quad (3.9)$$

Entón, como pode verse en [42], as SCP do problema dos $1 + n$ corpos deben satisfacer un sistema de n ecuacións. A ecuación i -ésima, onde $i \in \{1, \dots, n\}$, vén dada pola expresión:

$$\sum_{j=1}^n f(\theta_j - \theta_i) = 0. \quad (3.10)$$

Imos estudar o caso $n = 4$. Definimos as novas variables $u = \theta_2 - \theta_1$, $v = \theta_3 - \theta_1$ e $w = \theta_4 - \theta_1$. Entón, o sistema do tipo (3.10) pode reducirse a un sistema equivalente de tres ecuacións:

$$\begin{cases} f(u) + f(v) + f(w) & = 0, \\ f(u) - f(v - u) - f(w - u) & = 0, \\ f(v) - f(u - v) - f(w - v) & = 0, \end{cases}$$

onde estamos a usar a propiedade $f(-\theta) = -f(\theta)$, que se deduce de (3.9) polo feito de que a función seno é impar. Nótese que a cuarta ecuación que aparecería $f(w) - f(u - w) - f(v - w) = 0$ sería redundante.

Sen perda de xeneralidade, imos procurar SCP simétricas; isto é, aquelas que verifican $\theta_4 - \theta_3 = \theta_2 - \theta_1$. Con esta condición, é inmediato ver que $w = u + v$, co cal podemos eliminar unha ecuación no sistema anterior. É máis, podemos definir unha nova aplicación $g : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ coa seguinte expresión:

$$\begin{aligned} g_1(u, v) &= f(u) + f(v) + f(u + v), \\ g_2(u, v) &= f(u) - f(v) - f(v - u). \end{aligned}$$

Deste xeito, as SCP simétricas do problema dos 1 + 4 corpos poden acharse, precisamente, a partir das raíces desta aplicación g . Imos aplicar o Teorema 2.6 para asegurar a existencia dun cero. Consideremos o rectángulo $K = [0, 7; 0, 8] \times [1, 3; 1, 5] \subset \mathbb{S}^1$ e vexamos que a aplicación $g : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ é continua en K . En efecto, pola ecuación (3.9), a función f é continua no intervalo $(0, \pi)$. Dado un punto $(u, v) \in K$, é claro que u e v non poden valer nin 0 nin π . Ademais, podemos facer as seguintes limitacións:

$$\begin{aligned} 0 < 2 \leq u + v \leq 2, 3 < \pi, \\ 0 < 0, 5 \leq v - u \leq 0, 8 < \pi. \end{aligned}$$

Polo tanto, estamos evitando as dúas singularidades de f e g é continua en todo o dominio K , como queriamos probar.

Agora, debemos estudar as desigualdades (2.12) e (2.13). O primeiro paso é estudar o comportamento crecente ou decrecente de f . Observando a expresión (3.9), é sinxelo ver que f é crecente en $(0, \frac{\pi}{2})$, xa que é un produto de dúas funcións crecentes onde un factor é positivo nese intervalo.

Por outra parte, aplicando a regra do produto, podemos calcular a derivada de f :

$$f'(\theta) = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{(1 - \cos \theta)^3}}\right)' \sin \theta + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{(1 - \cos \theta)^3}}\right) \cos \theta.$$

Vexamos o comportamento de f' en $(\frac{\pi}{2}, \pi)$. O primeiro sumando é un produto de dúas funcións, onde o seno claramente é decrecente e positivo nese intervalo. Ademais, se desenvolvemos a outra derivada, obtemos

$$\frac{3 \sin \theta}{4\sqrt{2}(1 - \cos \theta)^{5/2}},$$

que é un cociente con numerador decrecente, denominador crecente e positivo en $(\frac{\pi}{2}, \pi)$. Polo tanto, o primeiro sumando de f' é un produto de funcións decrecentes e positivas no intervalo dado. En canto ao segundo sumando, é o produto dunha función crecente positiva por unha decrecente negativa, así que ese sumando tamén é decrecente. Polo tanto, f' é suma de dúas funcións decrecentes, así que f' é decrecente en $(\frac{\pi}{2}, \pi)$. Ademais, $f'(2) < 0$, logo f' é negativa en $(2, \pi)$ e deducimos que f é decrecente en $(2, \pi)$.

En resumo, acabamos de probar analiticamente o comportamento crecente e decrecente de f respectivamente nos intervalos $(0, \frac{\pi}{2})$ e $(2, \pi)$, que é o que precisamos para os seguintes cálculos. Como complemento, podemos utilizar métodos numéricos e comprobar que f ten un máximo no punto $\theta^* \approx 1,891$, sendo f crecente no intervalo $(0, \theta^*)$ e decrecente en (θ^*, π) . Como estamos traballando cunha función real, podemos visualizar a situación na Figura 3.2.

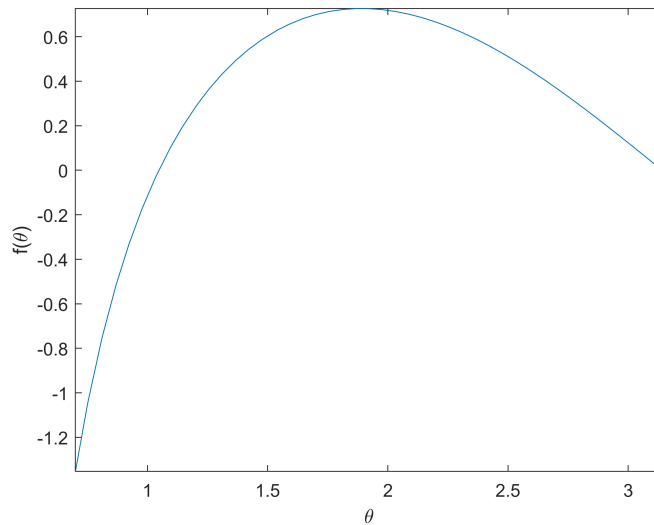


Figura 3.2: Gráfica da función f no intervalo $(0, 7; \pi)$.

Tendo en conta o comportamento de f , comprobemos (2.12) e (2.13).

Para calquera $u \in [0, 7; 0, 8]$ e $v \in [1, 3; 1, 5]$, temos que:

$$\begin{aligned} g_1(0, 7; v) &\leq f(0, 7) + f(1, 5) + f(2) \approx -0,031 < 0, \\ g_1(0, 8; v) &\geq f(0, 8) + f(1, 3) + f(2, 3) \approx 0,24 > 0, \\ g_2(u; 1, 3) &\leq f(0, 7) - f(1, 3) - f(0, 6) \approx 0,40 > 0, \\ g_2(u; 1, 5) &\geq f(0, 8) - f(1, 5) + f(0, 7) \approx -0,031 < 0. \end{aligned}$$

Desta forma, estamos en condicións de aplicar o Teorema 2.6 e aseguramos a existencia dun punto $(u^*, v^*) \in K$ tal que $g(u^*, v^*) = 0$. Noutras palabras, garantimos que existe unha SCP simétrica para o problema dos 1 + 4 corpos. Como na sección anterior, podemos debuxar unha gráfica coas curvas implícitas $g_1(u, v) = 0$ e $g_2(u, v) = 0$ (Figura 3.3) e visualizar a existencia desa raíz de g .

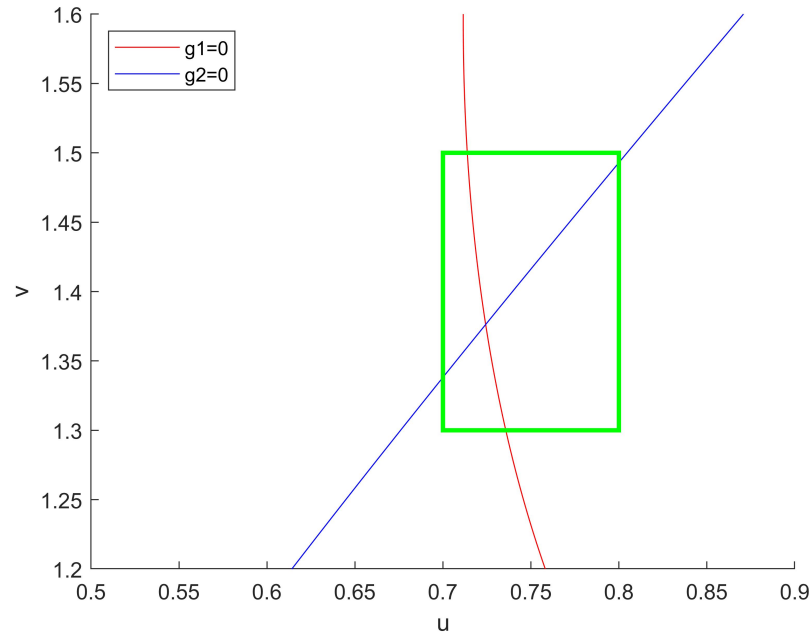


Figura 3.3: Curvas $g_1(u, v) = 0$ e $g_2(u, v) = 0$ no rectángulo $[0, 7; 0, 8] \times [1, 3; 1, 5]$.

Finalmente, tamén é interesante dar unha aproximación numérica da raíz

(u^*, v^*) . Unha aproximación é:

$$u^* \approx 0,724272,$$

$$v^* \approx 1,376255.$$

Capítulo 4

Conclusións

O noso estudo do teorema de Poincaré-Miranda partiu dunha motivación moi concreta: xeneralizar o teorema de Bolzano a dimensións superiores. Con todo, ao longo do traballo vimos que este resultado ten múltiples implicacións e aplicacións que van máis alá da análise matemática. Así, mediante o uso de ferramentas combinatorias e topolóxicas, proporcionamos tres demostracións alternativas do teorema. Tamén establecemos que o teorema de Poincaré-Miranda, o teorema do punto fixo de Brouwer e o lema de Sperner son todos equivalentes entre eles; un feito interesante se temos en conta que os tres resultados orixináronse en contextos históricos ben distintos.

Por outra parte, respondemos a algunhas cuestións que xorden naturalmente ao enunciar o teorema. Deste modo, vimos que podemos asegurar a unicidade de solución se impoñemos certas condicións máis restritivas na aplicación de partida. Ademais, deducimos que o teorema pode aplicarse en dominios máis xerais que o n -cubo, facendo unha demostración explícita para a n -bóla. Tamén comprobamos as hipóteses do teorema nunha función bidimensional particular e presentamos unha interpretación gráfica que, en certo modo, é semellante á que se estuda no caso do teorema de Bolzano.

Finalmente, cabe destacar que, ademais do interese intrínseco e histórico, o teorema de Poincaré-Miranda ten certa relevancia na investigación matemática actual. En seccións anteriores presentamos diversos traballos de recente publicación, como por exemplo [26] ou [35], nos que se estudan extensións, xeneralizacións e outras cuestións teóricas relativas ao teorema. É máis, como vimos en [37], o resultado ten aplicacións modernas en campos diferentes ás matemáticas, como a bioloxía, a mecánica ou a enxeñaría.

Referencias

1. Fox, J. *Lecture 3: Sperner's lemma and Brouwer's theorem* Documento non publicado. Disponible online en <http://math.mit.edu/~fox/MAT307-lecture03.pdf> (consultado o 6/9/2020).
2. Müger, M. *Topology for the working mathematician* Documento non publicado. Disponible online en <https://www.math.ru.nl/~mueger/topology.pdf> (consultado o 6/9/2020).
3. Nachbar, J. *Fixed point theorems* Documento non publicado. Disponible online en <https://sites.wustl.edu/nachbar/course-notes/math/fixed-point-theorems/> (consultado o 6/9/2020).
4. Miller, J. *Earliest known uses of some of the words of mathematics* Documento non publicado. Disponible online en <http://jeff560.tripod.com/s.html> (consultado o 6/9/2020).
5. Sperner, E. Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes. *Abhandlungen aus dem Mathematisches Seminar, Hamburg Universität*, 265-272 (1928).
6. Knaster, B., Kuratowski, K. & Mazurkiewicz, S. Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n -dimensionale Simplexe. *Fundamenta Mathematicae* **14**, 132-137 (1929).
7. O'Connor, J. J. & Robertson, E. F. *Emanuel Sperner* Documento non publicado. Disponible online en <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Sperner/pictdisplay/> (consultado o 6/9/2020).
8. Flegg, H. G. *From Geometry to Topology* 84-89 (English University Press, 1974).
9. De Loera, J. A., Peterson, E. & Su, F. E. A polytopal generalization of Sperner's lemma. *Journal of Combinatorial Theory. A* **100**, 1-26 (2002).

10. Wilkins, D. R. *Module MA3486: Fixed Point Theorems and Economic Equilibria* Documento no publicado. Disponible online en <https://www.maths.tcd.ie/~dwilkins/Courses/MA3486/> (consultado o 7/9/2020).
11. Hough, B. Tessellation of a triangle by repeated barycentric subdivision. *Electronic Communications in Probability* **14**, 270-277 (2009).
12. Grigor'yan, A., Lin, Y., Muranov, Y. & Yau, S.-T. *Homologies of path complexes and digraphs* Disponible online en <https://arxiv.org/abs/1207.2834> (consultado o 6/9/2020).
13. Kulpa, W. The Poincaré-Miranda theorem. *The American Mathematical Monthly* **104**, 545-550 (1997).
14. Munkres, J. R. *Topology* 2.^a ed. (Pearson, 2000).
15. Poincaré, H. Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* **97**, 251-252 (1883).
16. Poincaré, H. Sur les courbes définies par les équations différentielles. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* **2**, 167-244 (1886).
17. O'Connor, J. J. & Robertson, E. F. *Luitzen Egbertus Jan Brouwer* Documento no publicado. Disponible online en <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Brouwer/pictdisplay/> (consultado o 6/9/2020).
18. Hadamard, J. en *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable* (ed. Tannery, J.) 2.^a ed., 437-477 (A. Hermann & Fils, 1910).
19. Brouwer, L. E. H. Über Abbildungen von Mannigfaltigkeiten. *Mathematische Annalen* **71**, 97-115 (1911).
20. Gale, D. The game of Hex and Brouwer fixed-point theorem. *The American Mathematical Monthly* **86**, 818-827 (1979).
21. Bredon, G. E. *Topology and Geometry* (Springer-Verlag, 1993).
22. Miranda, C. Un'osservazione su un teorema di Brower. *Bolletino della Unione Matematica Italiana* **3**, 5-7 (1940).
23. Mawhin, J. Simple proofs of the Hadamard and Poincaré-Miranda theorems using the Brouwer fixed point theorem. *The American Mathematical Monthly* **126**, 260-263 (2019).
24. Kronecker, L. Ueber Systeme von Funktionen mehrerer Variabeln (erster Abhandlung). *Monatsberichte der Königlich Preussische Akademie des Wissenschaften zu Berlin*, 159-193 (1869).

25. Kronecker, L. Ueber Systeme von Funktionen mehrerer Variabeln (zweite Abhandlung). *Monatsberichte der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 688-698 (1869).
26. Frankowska, H. The Poincaré-Miranda theorem and viability condition. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **463**, 832-837 (2018).
27. O'Connor, J. J. & Robertson, E. F. *Jules Henri Poincaré* Documento no publicado. Disponible online en <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Poincare/pictdisplay/> (consultado o 6/9/2020).
28. Mawhin, J. Le théorème du point fixe de Brouwer: un siècle de métamorphoses. *Sciences et techniques en perspective* **10**, 175-220 (2007).
29. Cinquini, S. Problemi di valori al contorno per equazioni differenziali di ordine n . *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa* **9**, 61-77 (1940).
30. O'Connor, J. J. & Robertson, E. F. *Carlo Miranda* Documento no publicado. Disponible online en <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Miranda/pictdisplay/> (consultado o 6/9/2020).
31. Kuhn, H. W. Some combinatorial lemmas in topology. *IBM Journal of Research and Development* **4**, 518-524 (1960).
32. Wolsey, L. A. Cubical Sperner lemmas as applications of generalized complementary pivoting. *Journal of Combinatorial Theory. A* **23**, 78-87 (1977).
33. Parthasarathy, T. *On Global Univalence Theorems* 20-21 (Springer-Verlag, 1983).
34. Szymanska-Debowska, K. Resonant problem for some second-order differential equation on the half-line. *Electronic Journal of Differential Equations* **160**, 1-9 (2007).
35. Szymanska-Debowska, K. On a generalization of the Miranda Theorem and its application to boundary value problems. *Journal of Differential Equations* **258**, 2686-2700 (2015).
36. Kidawa, M. & Tkacz, P. The cube-like complexes and the Poincaré-Miranda theorem. *Topology and its Applications* **196**, 198-207 (2015).
37. Gasull, A. & Mañosa, V. *Periodic orbits of discrete and continuous dynamical systems via Poincaré-Miranda theorem* Disponible online en <https://arxiv.org/abs/1809.06208> (consultado o 6/9/2020).

38. Barrow-Green, J. en *The Princeton Companion to Mathematics* (eds. Gowers, T., Barrow-Green, J. & Leader, I.) 726-728 (Princeton University Press, 2008).
39. Bruns, H. Über die Integrale des Vielkörperproblems. *Acta Mathematica* **11** (1887).
40. Sundman, K. Mémoire sur le problème des trois corps. *Acta Mathematica* **36**, 105-179 (1912).
41. Wang, Q. The global solution of the n -body problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **50**, 73-88 (1991).
42. Cors, J. M., Llibre, J. & Ollé, M. Central configurations of the planar coorbital satellite problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **89**, 319-342 (2004).