



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

Fractales: la interacción entre distancia y medida

Andrés Mato Cutrín

2019–2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRADO EN MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

**Fractales:
la interacción entre distancia y medida**

Andrés Mato Cutrín

Julio, 2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Conocimiento: Análisis Matemático
Título: Fractales: la interacción entre distancia y medida
Director: Fernando Adrián Fernández Tojo
Breve descripción del contenido
Los fractales son figuras geométricas que desafían la intuición por sus propiedades especiales, en particular el hecho de que su dimensión puede no ser un número natural. En este trabajo estudiaremos las propiedades básicas de los fractales, su construcción y su relación con otros elementos de las matemáticas, en especial su relación con la teoría de la medida.

Índice general

Notación	v
Resumen	vi
1. Introducción y ejemplos clásicos.	1
2. Dimensión fractal	7
2.1. Dimensión topológica	7
2.2. Dimensión de conteo de cajas	8
2.3. Teoría de la medida	13
2.4. Medida y dimensión de Hausdorff	22
2.5. Comparación de dimensiones. Definición de fractal de Mandelbrot	29
3. Propiedades locales de s-conjuntos	31
3.1. Densidad y regularidad	31
3.2. Estructura de conjuntos de dimensión entera	36
3.3. Estructura de conjuntos de dimensión no entera	40
4. Sistema iterativo de funciones	41
4.1. Autosimilitud. Dimensión de conjuntos autosimilares	45
5. Aplicaciones	53
5.1. Teorema del collage. Aplicación a la compresión de imágenes	53
5.2. Sistemas dinámicos	54
5.2.1. El modelo logístico	55
5.2.2. El conjunto de Mandelbrot. Conjuntos de Julia	58
5.3. Otras aplicaciones	60
A. Código utilizado	63
B. Demostraciones auxiliares	69

Notación

Lista de los símbolos más usados a lo largo del trabajo.

\mathbb{N}	Conjunto de los números naturales, esto es, $\{1, 2, \dots\}$.
\mathbb{Q}	Conjunto de los número racionales.
\mathbb{R}	Conjunto de los números reales.
\mathbb{C}	Conjunto de los números complejos.
$ A $	Diámetro de A .
$N_\delta(F)$	El menor número de conjuntos que forman un δ -recubrimiento de F .
$\overline{\dim}_B F$	Dimensión de conteo de cajas superior de F .
$\underline{\dim}_B F$	Dimensión de conteo de cajas inferior de F .
$\dim_B F$	Dimensión de conteo de cajas de F .
$\dim_H F$	Dimensión de Hausdorff de F .
$\dim F$	Dimensión topológica de F .
\overline{F}	Clausura topológica de F .
\mathcal{L}^n	Medida de Lebesgue n -dimensional.
\mathcal{H}^s	Medida de Hausdorff s -dimensional.
$D^s(E, x)$	Densidad de E en x .
G_δ	Conjunto de los conjuntos que se pueden escribir como intersecciones numerables de abiertos.
F_σ	Conjunto de los conjuntos que se pueden escribir como uniones numerables de cerrados.
vol^n	Volumen n -dimensional.
A_δ	δ -vecindad de A .
$\mathcal{L}(C)$	Longitud de la curva C .
$d_H(A, B)$	Distancia de Hausdorff entre A y B .

Resumen

Los fractales son un tipo de conjuntos conocidos por ser “irregulares” a todas las escalas y, usualmente, ser “autosimilares”. Además, tienen una sorprendente variedad de aplicaciones desde modelización de superficies de la naturaleza hasta el estudio de sistemas dinámicos pasando por aplicaciones en economía, física o astronomía.

En este trabajo nos centraremos en comprender con cierto detalle las matemáticas detrás de la geometría fractal. Así, definiremos y estudiaremos las principales herramientas matemáticas usadas para describir y estudiar fractales. En particular, definiremos un concepto de dimensión que permitirá a los fractales tener como dimensión un número real positivo cualquiera. Además, daremos un significado preciso y estudiaremos la irregularidad y la autosimilitud comentadas.

Finalmente, comentaremos brevemente algunas de sus aplicaciones en distintas disciplinas matemáticas.

Abstract

Fractal sets are known for being “irregular” and, usually, “self-similar”. Moreover, they have a surprising variety of applications including modelation of natural surfaces, study of dynamical systems and applications in economy, physics or astronomy.

In this work we will try to understand the mathematics behind fractal geometry. We will define and study the main mathematical tools needed to describe and study fractal sets. In particular, we will define a concept of dimension that will allow fractal sets to have any positive real number as their dimension. Furthermore, we will give a precise meaning to the mentioned irregularity and self-similarity.

Finally, we will briefly comment some of the applications in different branches of mathematics.

1. Introducción y ejemplos clásicos.

Benoît Mandelbrot acuña el término fractal en su libro de 1975, *The fractal geometry of nature* [20], inspirado en la palabra latina *fractus* que tiene un doble significado de «fragmentado» e «irregular». Como el nombre de su libro indica, la principal motivación de la introducción del concepto de fractal era la de modelizar la geometría de diversas superficies naturales. Por ejemplo, según Mandelbrot, la geometría clásica no era suficiente para describir la superficie de las nubes, la línea costera o ciertas superficies topográficas. No obstante, esta no era la única motivación pues, además, dichos fractales parecían tener usos prácticos en disciplinas muy diversas. Comentaremos esto con más detalle en el Capítulo 5.

En cuanto a las matemáticas, Mandelbrot agrupa en este libro una serie de conjuntos cuya característica común era la de ser muy irregulares. Muchos de estos conjuntos eran ya conocidos, pero se catalogaban como casos patológicos o degenerados cuyo estudio no merecía la pena. Hasta el siglo XIX, las matemáticas se centraban en el estudio de las funciones diferenciables, es decir, aquellas suficientemente regulares como para poder aproximarlas por una línea recta en cada punto. Por entonces, la creencia era que el grafo de cualquier función definida por una “fórmula analítica” era diferenciable [9]. Sin embargo, en 1872, Weierstrass demostró que si $a \in \mathbb{N}$ entonces la función $\sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos(a^n x \pi)$ es continua pero no es diferenciable en ningún punto, pues su derivada se vuelve arbitrariamente grande al aumentar el índice de la suma parcial [30]. En la Figura 1.1 podemos ver gráficas de la función para distintos valores de a y b .

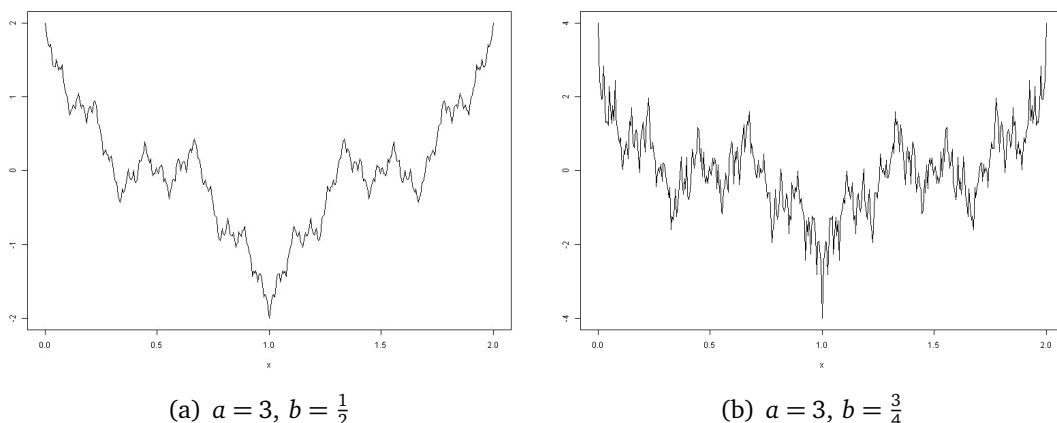


Fig. 1.1. Gráficas de los 500 primeros sumandos de la función de Weierstrass entre 0 y 2 para distintos valores de a y b .

Cabe destacar que Riemann ya había introducido la función $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$ de características similares. Sin embargo, nunca publicó una demostración. En 1890, Peano introduce [27] una curva que llena el espacio, es decir, una aplicación continua y sobreyectiva de $[0, 1]$ en

$[0, 1] \times [0, 1]$. Estas funciones desafiaban tanto el pensamiento de época que fueron apodadas “monstruos” y fueron, generalmente, ignoradas por la comunidad matemática. Sin embargo, plantarían una semilla que llevaría a matemáticos posteriores a pensar en nuevos ejemplos con propiedades similares. Veremos tres de estos ejemplos en este apartado, el conjunto de Cantor, la curva de Koch y el triángulo de Sierpinski.

Ejemplo 1.1. Construiremos el conjunto de Cantor a través de un proceso iterativo. Sea E_0 el intervalo $[0, 1]$. Obtendremos E_1 dividiendo E_0 en tres partes iguales y eliminando el tercio del medio. De esta forma obtendremos que E_1 está formado por dos intervalos, $[0, \frac{1}{3}]$ y $[\frac{2}{3}, 1]$. Continuando de esta manera, obtendremos E_k eliminando el tercio del medio en cada uno de los intervalos que forman E_{k-1} . Por tanto, E_k consistirá en 2^k intervalos de longitud 3^{-k} cada uno. El conjunto de Cantor F lo formarán aquellos números que pertenezcan a E_k para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, es decir, $F = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$.

Ejemplo 1.2. La curva de Koch se construye de manera parecida al conjunto de Cantor. Sea E_0 un segmento de recta de una unidad de longitud. El conjunto E_1 consiste en cuatro segmentos obtenidos dividiendo E_0 en tres y reemplazando el tercio del medio por los otros dos segmentos del triángulo equilátero cuya base sea el segmento eliminado. Seguimos construyendo de forma que E_k se obtenga aplicando el procedimiento anterior a cada uno de los segmentos que forman E_{k-1} . Ilustramos las primeras etapas de este proceso en la Figura 1.2. La curva de Koch es el límite de los E_k cuando $k \rightarrow \infty$.

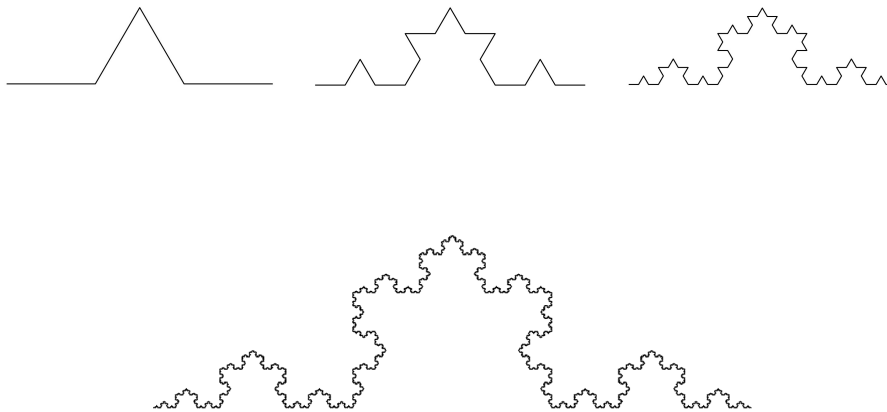


Fig. 1.2. Curva de Koch.

Ejemplo 1.3. Para construir el triángulo de Sierpinski empezaremos con E_0 siendo un triángulo equilátero de lado unitario y los puntos de su interior. Para obtener E_1 dividiremos E_0 en cuatro triángulos equiláteros, usando los segmentos que unen los puntos medios de cada lado del original, y eliminamos el interior del triángulo del medio. De manera similar a los ejemplos anteriores, seguimos iterando de forma que E_k se obtenga aplicando este proceso a cada uno de los triángulos que forman E_{k-1} . El triángulo de Sierpinski es el límite de E_k cuando $k \rightarrow \infty$ que, teniendo en cuenta que $E_k \subset E_{k-1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, puede ser interpretado como $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$. En la Figura 1.3 se ilustran las primeras etapas.

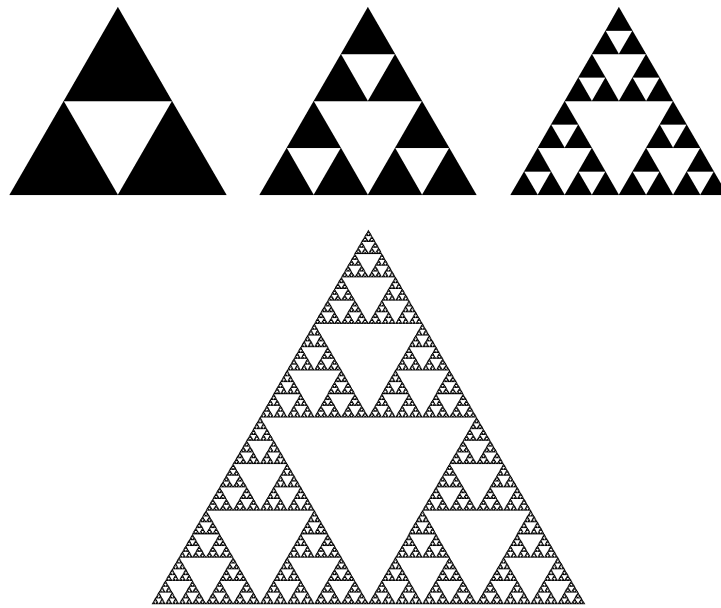


Fig. 1.3. Triángulo de Sierpinski.

En el año 1918 se publican dos trabajos relevantes para en el desarrollo de lo que hoy conocemos como fractales. Por un lado, Hausdorff [16] define la *dimensión de Hausdorff*, un concepto fundamental en la geometría fractal y que veremos con detalle en este trabajo. Cabe destacar al respecto que, un par de décadas más tarde, el matemático ruso Besicovitch publicó una serie de resultados interesantes utilizando la dimensión de Hausdorff [2–4], algunos de los cuales veremos en el Capítulo 3. Su trabajo sobre la dimensión de Hausdorff fue tan importante como para que algunos autores se refieran a esta como dimensión de Hausdorff-Besicovitch. Por otro lado, de forma independiente, los matemáticos franceses Gaston Julia y Pierre Fatou, trabajaron en resultados sobre iteraciones de funciones de variable compleja. En particular, definieron los llamados conjuntos de Julia, una clase de conjuntos que resultan ser fractales. Vemos un ejemplo en la Figura 1.4.

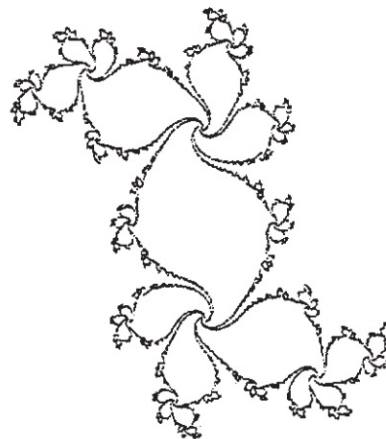


Fig. 1.4. Un ejemplo de conjunto de Julia.

En [20], Mandelbrot definía un fractal como un conjunto que cumple que su dimensión de Hausdorff es estrictamente mayor que su dimensión topológica. Trataremos de darle un significado a esta definición a lo largo del trabajo. No obstante, el propio Mandelbrot descartaba esta definición en una reedición de su libro en 1982. Kenneth Falconer comenta en su libro *Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications* [12] que esta definición es muy restrictiva pues deja fuera a conjuntos que parecen merecer ser considerados fractales. Desde entonces, a pesar de algún intento infructuoso, el término fractal se utiliza en matemáticas sin una definición precisa. Falconer observa al respecto que, a pesar de no haber una definición concreta y precisa, sí que existen una serie de características relacionadas con el concepto de fractal. De esta manera, cuando nos refiramos a un conjunto F como un fractal, tendremos en mente las siguientes propiedades:

- (1) F tiene detalles en escalas arbitrariamente pequeñas.
- (2) F es demasiado irregular para ser descrito en el lenguaje tradicional de la geometría, tanto global como localmente.
- (3) Usualmente F tiene algún tipo de autosimilitud.
- (4) Usualmente, la dimensión de Hausdorff de F es mayor que su dimensión topológica.
- (5) En muchos casos de interés, F se define de manera sencilla, probablemente de forma recursiva.

Retomando el uso de fractales como modelo de ciertas formas naturales, observamos que no existen fractales en la naturaleza pues a escalas suficientemente pequeñas las características fractales desaparecen para dejar paso a las moléculas. No obstante, a ciertas escalas, se parecen bastante a fractales y puede ser útil considerarlos como tales. Al fin y al cabo, tampoco existen rectas ni circunferencias perfectas en la naturaleza. Para más detalles históricos sobre la geometría fractal pueden consultarse los libros [20] y [9].

En cuanto a la estructura de este trabajo, en el Capítulo 2 definiremos y estudiaremos dos dimensiones fractales, la dimensión de Hausdorff y la dimensión de conteo de cajas. No obstante, empezaremos el capítulo definiendo la dimensión topológica pues se trata de la más intuitiva y nos dará un punto de partida a la hora de hablar de dimensiones. A continuación, introduciremos la dimensión de conteo de cajas pues es la dimensión más sencilla entre las fractales. Continuaremos con la dimensión de Hausdorff, la más importante en el estudio de los fractales a nivel teórico. Para ello debemos ampliar conocimientos de teoría de la medida, en particular, estudiaremos qué son las medidas métricas exteriores y un método para construirlas. Terminaremos comparando todas las dimensiones vistas y comentando la motivación de la primera definición de fractal de Mandelbrot.

En el Capítulo 3 utilizaremos algunas de las herramientas de teoría de la medida introducidas en el capítulo anterior para estudiar las propiedades locales de los s -conjuntos, una clase de conjuntos de interés al estudiar fractales. Esto nos conducirá a una definición de irregularidad interesante. Además, enunciaremos un par de teoremas de caracterización de s -conjuntos en función de si son o no irregulares. Esto nos proporcionará un mayor entendimiento de la estructura de los fractales a nivel teórico.

En el Capítulo 4 estudiaremos un tipo de autosimilitud, la autosimilitud exacta. Para ello introduciremos el concepto de sistema iterativo de funciones. Esto nos conducirá a métodos para construir nuevos fractales, a métodos para obtener representaciones gráficas de fractales y, probablemente lo más interesante, a un método de cálculo de la dimensión de Hausdorff de ciertos fractales extremadamente sencillo.

En el Capítulo 5 nos centraremos en alguna de las aplicaciones de los fractales. Empezaremos comentando una aplicación de los sistemas iterativos de funciones a la comprensión de imágenes. Por otro lado, veremos cómo pueden aparecer fractales en el estudio de sistemas dinámicos, centrándonos en el ejemplo del modelo logístico. Además, aprovecharemos para relacionar esto con el llamado “conjunto de Mandelbrot” que tendrá una sorprendente conexión con los conjuntos de Julia mencionados anteriormente. Por último, recopilaremos, a modo de divulgación, algunas de las aplicaciones de los fractales más interesantes en las matemáticas.

Por último, se incluyen dos apéndices. En el Apéndice A se puede consultar el código en R utilizado para generar algunas de las ilustraciones incluidas en este trabajo. El resto de ilustraciones utilizadas se han obtenido de diversos libros que se especificarán en cada caso. En el Apéndice B se incluyen algunas demostraciones auxiliares.

Para cerrar este apartado, comentaremos brevemente la bibliografía utilizada. El principal libro de referencia a lo largo del trabajo es el ya comentado *Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications* [12]. Se trata de un libro que recopila tanto contenidos teóricos sobre fractales así como distintas aplicaciones. En general, seguiremos la línea de este libro a lo largo del trabajo. No obstante, hay ciertos contenidos que se omiten para los que nos harán falta otras fuentes. En primer lugar, necesitaremos libros de teoría de la medida complementarios. En este trabajo usaremos el libro *Measure, topology and fractal geometry* [7], que es un manual sobre fractales en el que se incluyen todos los detalles sobre teoría de la medida necesarios, y el libro *Measure and integration* [26] que es más específico sobre el tema. Además, en algunas demostraciones a lo largo del trabajo, particularmente en el Capítulo 3, se optará por el libro *The geometry of fractal sets* [13] también de Falconer. En segundo lugar, necesitaremos resultados sobre espacios métricos y topología. Para ello recurriremos al ya mencionado *Measure, topology and fractal geometry* [7] y al libro *Topology* [25], que es un libro especializado de topología. Por último, utilizaremos el libro *Chaos and fractals* [28] como referencia para ampliar información a lo largo del trabajo, se trata de un extenso libro sobre fractales que se caracteriza por incluir muchas ilustraciones que complementan las explicaciones.

2. Dimensión fractal

La noción de dimensión es un aspecto muy relevante en el estudio de los fractales. Una de las características especiales de las dimensiones fractales es que no tienen por qué ser números enteros. Como veremos, esto es debido a que intentan generalizar la idea familiar de que una curva regular tiene dimensión uno o una superficie regular dimensión dos. En general, el concepto de dimensión es algo complicado. Como punto de partida en este capítulo, definiremos la dimensión topológica que es el concepto de dimensión más intuitivo. No obstante, nuestro interés está en las dimensiones fractales. Así, nos centraremos rápidamente en la dimensión de conteo de cajas, una dimensión fractal cuya definición no requiere de ningún conocimiento previo, es la más intuitiva y es relativamente fácil de estimar en todo tipo de conjuntos. Veremos también que esta dimensión tiene algunas características que podemos considerar como poco interesantes a nivel teórico y que necesitaremos de conocimientos de teoría de la medida para poder definir una alternativa mejor en este aspecto. Cabe destacar que hay una gran variedad de “dimensiones fractales” con diversas relaciones entre ellas. En este trabajo sólo se exponen algunas de las más importantes. El lector interesado puede encontrar una exhaustiva recopilación de dimensiones fractales en [8, Chapter 1].

2.1. Dimensión topológica

En general, el concepto de dimensión en matemáticas no es sencillo. En este trabajo nos centraremos en estudiar las dimensiones fractales. No obstante, empezamos definiendo la dimensión topológica por un doble motivo. En primer lugar, porque es el concepto de dimensión más antiguo y más intuitivo de los estudiados en este trabajo. Además, como hemos visto, tiene un papel protagonista en la definición de fractal de Mandelbrot.

Definición 2.1. Sean \mathcal{U} un recubrimiento por abiertos de un espacio topológico X y $x \in X$. Diremos que el número de elementos del recubrimiento \mathcal{U} que contienen a x es la *multiplicidad de \mathcal{U} en x* y lo denotaremos $M(\mathcal{U}, x)$. Diremos que $M(\mathcal{U}) = \sup_{x \in X} \{M(\mathcal{U}, x)\}$ es la *multiplicidad de \mathcal{U}* .

Definición 2.2. Sean \mathcal{U} y \mathcal{V} dos recubrimientos por abiertos de X . Diremos que \mathcal{V} es un *refinamiento* de \mathcal{U} si para todo $V \in \mathcal{V}$ existe un $U \in \mathcal{U}$ tal que $V \subset U$.

Utilizaremos el concepto de refinamiento para definir la dimensión topológica de un espacio topológico. Para ellos consideraremos la cantidad

$$M(X) = \sup_{\mathcal{U}} \{\inf\{M(\mathcal{V}) : \mathcal{V} \text{ es un refinamiento de } \mathcal{U}\}\},$$

que es la multiplicidad de un refinamiento óptimo en ese sentido. Tomamos el supremo sobre todos los recubrimientos para descartar casos triviales como el recubrimiento $\mathcal{U} = \{X\}$ que nos da el valor $M(\mathcal{U}) = 1$.

Definición 2.3. Diremos que la *dimensión topológica* de un espacio topológico X es la cantidad $M(X) - 1$, es decir, la dimensión es uno menos que la máxima multiplicidad de un refinamiento óptimo. La denotaremos $\dim X$.

Como vemos la dimensión topológica no tiene una definición muy sencilla. Sin embargo, se trata del concepto de dimensión más intuitivo. Por ejemplo, en la Figura 2.1 podemos ver un recubrimiento con multiplicidad 2 para un conjunto de dimensión topológica 1. Obser-

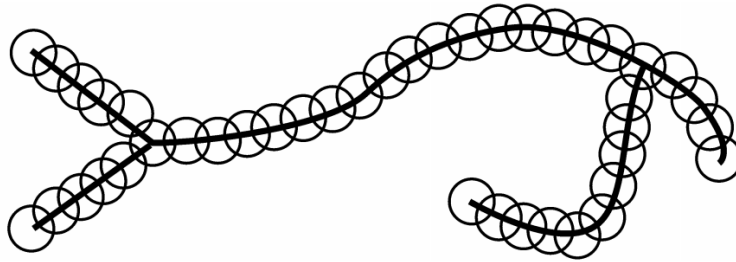


Fig. 2.1. Recubrimiento de un conjunto con dimensión topológica 1. Como vemos el máximo número de abiertos a los que pertenece un punto del conjunto es 2 por lo que la multiplicidad del recubrimiento es 2. Imagen obtenida en [7].

vamos que la dimensión topológica de un espacio topológico es siempre un número entero no negativo. Esto supone una diferencia sustancial con las dimensiones fractales que definiremos en el resto del capítulo. El lector interesado puede encontrar un estudio detallado de la dimensión topológica en [7].

2.2. Dimensión de conteo de cajas

Tras una sucinta aparición de la dimensión topológica, nos centramos en las dimensiones fractales. En primer lugar estudiaremos la dimensión de conteo de cajas. Trabajaremos en esta sección sobre el espacio euclídeo n -dimensional \mathbb{R}^n . Denotaremos por U a un subconjunto no vacío de \mathbb{R}^n y definiremos su *diámetro* como $|U| = \sup\{|x - y| : x, y \in U\} \in [0, \infty]$, es decir, la mayor distancia entre dos puntos cualesquiera de U .

Definición 2.4. Diremos que una colección numerable de conjuntos $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un δ -recubrimiento de F si $F \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ y $0 < |U_n| \leq \delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dado F un subconjunto de \mathbb{R}^n , la idea detrás de la dimensión de conteo de cajas es tomar, para cada $\delta > 0$, el menor número de conjuntos que formen un δ -recubrimiento de F , que denotaremos por $N_\delta(F)$, con la idea de ver cómo se comporta este número cuando δ tiende a cero. De esta forma si cuando δ tiende a cero $N_\delta(F) \approx c\delta^{-s}$ con c y s constantes positivas, diremos que F tiene dimensión de conteo de cajas s . La siguiente definición lo expresa formalmente.

Definición 2.5. Sea F un subconjunto de \mathbb{R}^n no vacío y acotado y sea $N_\delta(F)$ el menor número de conjuntos que forman un δ -recubrimiento de F de todos los δ -recubrimientos posibles. Definimos la dimensión de conteo de cajas superior e inferior, respectivamente,

como

$$\overline{\dim}_B F = \limsup_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta},$$

$$\underline{\dim}_B F = \liminf_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}.$$

En general $\underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F$ y, si se da la igualdad, nos referiremos a ese valor como la *dimensión de conteo de cajas* de F y se denotará por $\dim_B F$.

En la definición pedimos que F sea no vacío y acotado para evitar problemas con $\log 0$ o $\log \infty$, pues por un lado al ser no vacío todo recubrimiento de F tiene por lo menos un elemento y al ser acotado es un subconjunto de un compacto así que por lo menos existe un recubrimiento finito.

Proposición 2.6 ([12, Equivalent definitions 2.1]). *En la Definición 2.5 es equivalente que $N_\delta(F)$ se defina de cualquiera de las siguientes maneras:*

- (1) *el menor número de conjuntos que formen un δ -recubrimiento de F ,*
- (2) *el menor número de bolas cerradas que formen un δ -recubrimiento de F ,*
- (3) *el menor número de cubos de lado δ que recubran F ,*
- (4) *el número de cubos de la forma $[m_1\delta, (m_1+1)\delta] \times \cdots \times [m_n\delta, (m_n+1)\delta]$, con m_1, \dots, m_n números enteros, que interseca a F ,*
- (5) *el mayor número de bolas disjuntas de radio δ con centro en F .*

Demostración. Todas las equivalencias se prueban de manera similar. Para demostrar la equivalencia de dos apartados tomamos un conjunto de uno de los apartados, lo recubrimos con un número constante de conjuntos del otro apartado y viceversa. Con este procedimiento, al tomar logaritmos podremos demostrar que $N_\delta(F)$ en una definición es mayor o igual que en la otra y viceversa. Probaremos con detalle la equivalencia entre el apartado (1) y el (4). Para más detalles se puede consultar la demostración en [12].

(1) \Leftrightarrow (4) Denotamos por $N_\delta(F)$ el menor número de conjuntos de diámetro δ que recubren F . Sea $N'_\delta(F)$ el número de cubos de la forma $[m_1\delta, (m_1+1)\delta] \times \cdots \times [m_n\delta, (m_n+1)\delta]$, con m_1, \dots, m_n números enteros, que interseca a F . En particular los cubos de $N'_\delta(F)$ proporcionan una colección de conjuntos de diámetro $\delta\sqrt{n}$ que recubren F , por tanto,

$$N_{\delta\sqrt{n}}(F) \leq N'_\delta(F). \quad (2.1)$$

Por otro lado, podemos recubrir cualquier conjunto de diámetro δ con 3^n cubos n -dimensionales de lado δ , para ello tomamos un cubo que interseque al conjunto y, entonces, este cubo junto a sus vecinos lo recubrirán. Por tanto

$$N'_\delta(F) \leq 3^n N_\delta(F). \quad (2.2)$$

Combinando las desigualdades (2.1) y (2.2) y dividiendo por $-\log \delta$ tenemos que

$$\frac{\log N_{\delta\sqrt{n}}(F)}{-\log(\delta\sqrt{n}) + \log \sqrt{n}} \leq \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \frac{\log 3^n + \log N_\delta(F)}{-\log \delta}, \quad (2.3)$$

ya que $\log(\sqrt{n}) - \log(\delta\sqrt{n}) = \log(\frac{1}{\delta}) = -\log \delta$. Tomando límites superior e inferior en la cadena de desigualdades (2.3) tenemos que

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log 3^n + \log N_\delta(F)}{-\log \delta},$$

ya que

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log N_{\delta\sqrt{n}}(F)}{-\log(\delta\sqrt{n}) + \log \sqrt{n}} = \liminf_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta},$$

y

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log 3^n + \log N_\delta(F)}{-\log \delta} = \liminf_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta},$$

donde los términos constantes $\log \sqrt{n}$ y $\log 3^n$ desaparecen debido a que tanto $-\log(\delta\sqrt{n})$ como $-\log \delta$ tienden a ∞ cuando $\delta \rightarrow 0^+$. Análogamente obtenemos que

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \limsup_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \limsup_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}.$$

De lo que se deduce la igualdad. ■

La formulación (4) de la definición de dimensión de conteo de cajas es de las más usadas para estimar esta dimensión computacionalmente. Por ejemplo, para estimar la dimensión de conteo de cajas de un conjunto F contenido en el plano, dibujamos, para unos cuantos valores de δ , un cuadrícula con cuadrados o “cajas” de lado δ y contamos el número de cajas que cortan a F . De esta forma la dimensión de conteo de cajas es aproximadamente la pendiente de la gráfica de $\log N_\delta$ contra $-\log \delta$. En la Figura 2.2 se ilustra parte este proceso sobre la frontera de Galicia.

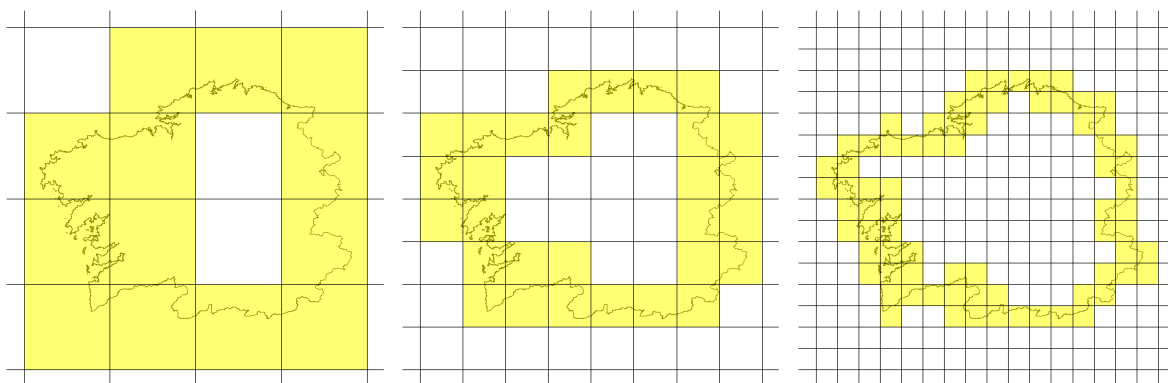


Fig. 2.2. Distintas iteraciones para la aproximación de la dimensión de conteo de cajas para la frontera de Galicia. Se marcan en amarillo aquellas “cajas” en las que hay puntos de la frontera.

Veremos en el final de este apartado que la dimensión de conteo de cajas tiene unas características poco interesantes a nivel teórico y por tanto trabajaremos para definir una

dimensión mejor en ese aspecto. No obstante, el gran interés que tiene esta dimensión es precisamente su facilidad de estimarse computacionalmente. En este trabajo hemos comentado un método muy básico utilizando la definición (4), para ver métodos más avanzados puede consultarse [12, Chapter 4]. A modo de ejemplo, trataremos de calcular a nivel teórico la dimensión de conteo de cajas en alguno de los ejemplos del primer capítulo.

Ejemplo 2.7. Sea F el conjunto de Cantor. Veamos que $\dim_B F = \frac{\log 2}{\log 3}$. Sea E_k el k -ésimo conjunto obtenido en la construcción del Ejemplo 1.1. Tomando δ tal que $3^{-k} < \delta \leq 3^{-k+1}$, los 2^k intervalos de longitud 3^{-k} que conforman E_k son un δ -recubrimiento de F y consecuentemente $N_\delta(F) \leq 2^k$. Por tanto,

$$\overline{\dim}_B F = \limsup_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{N_\delta(F)}{-\log(\delta)} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(2^k)}{-\log(3^{-k+1})} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{k \log(2)}{(k-1) \log(3)} = \frac{\log(2)}{\log(3)}. \quad (2.4)$$

Por otro lado, sea ahora δ tal que $3^{-k-1} \leq \delta < 3^{-k}$. Entonces cualquier intervalo de longitud δ interseca como mucho a uno de los intervalos que forman a E_k pues la distancia entre dos intervalos de E_k es de $3^{-k} > \delta$. Como en E_k hay 2^k intervalos, se necesitan por lo menos 2^k intervalos de longitud δ para recubrir F . Por tanto, $N_\delta(F) \geq 2^k$ y entonces,

$$\underline{\dim}_B = \liminf_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2^k}{-\log 3^{-k-1}} = \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{k \log 2}{(k+1) \log 3} = \frac{\log 2}{\log 3}. \quad (2.5)$$

De las desigualdades (2.4) y (2.5) deducimos que $\dim_B(F) = \frac{\log 2}{\log 3}$.

Ejemplo 2.8. Sea F el triángulo de Sierpinski. Veamos que $\underline{\dim}_B = \overline{\dim}_B = \frac{\log 3}{\log 2}$. Sea E_k la k -ésima etapa de la construcción del Ejemplo 1.3. E_k consiste en 3^k triángulos equiláteros con lados de longitud 2^{-k} . Tomando δ tal que $2^{-k} < \delta \leq 2^{-k+1}$, dado que $F \subset E_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, tenemos que los 3^k triángulos de E_k forman un δ -recubrimiento de F y, por tanto, $N_\delta(F) \leq 3^k$. Consecuentemente,

$$\overline{\dim}_B(F) = \limsup_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 3^k}{-\log 2^{-k+1}} = \frac{\log 3}{\log 2}.$$

Por otro lado, tomemos δ tal que $2^{-k-1} < \delta \leq 2^{-k}$. Entonces cualquier subconjunto del plano de diámetro δ interseca como mucho a tres triángulos de E_k , puesto que no puede intersecar a dos triángulos a distancia mayor que 2^{-k} . Como hay 3^k triángulos en E_k y todos contienen algún punto de F , se necesitan por lo menos $\frac{3^k}{3}$ conjuntos de diámetro menor o igual que δ para recubrir F . Consecuentemente, $N_\delta(F) \geq 3^{k-1}$. Por tanto,

$$\underline{\dim}_B(F) = \liminf_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{N_\delta(F)}{-\log \delta} \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 3^{k-1}}{-\log 2^{-k-1}} = \frac{\log 3}{\log 2}.$$

Deducimos entonces que $\overline{\dim}_B(F) = \underline{\dim}_B(F) = \frac{\log 3}{\log 2}$.

En la siguiente proposición enumeramos algunas de las propiedades básicas de la dimensión de conteo de cajas.

Proposición 2.9. *La dimensión de conteo de cajas cumple las siguientes propiedades:*

- (1) Si $E \subset F$, entonces $\underline{\dim}_B E \leq \underline{\dim}_B F$ y $\overline{\dim}_B E \leq \overline{\dim}_B F$.
- (2) Si $F \subset \mathbb{R}^n$ no vacío y acotado, entonces $0 \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F \leq n$.
- (3) $\overline{\dim}_B$ es finitamente estable, es decir, $\overline{\dim}_B(E \cup F) = \max\{\overline{\dim}_B E, \overline{\dim}_B F\}$.
- (4) Si $F \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, entonces $\underline{\dim}_B F = n$.
- (5) Si F es no vacío y finito, $\underline{\dim}_B F = 0$.

Demostración. (1) Como $E \subset F$ tenemos que para todo $\delta > 0$, $N_\delta(E) \leq N_\delta(F)$ de lo que se sigue la desigualdad de dimensiones.

(2) Por definición tenemos que $0 \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F$, entonces solo tenemos que ver $\overline{\dim}_B F \leq n$. Sean C un cubo n -dimensional de lado m y $\delta \in (0, m)$. Es fácil ver que podemos recubrir C con cubos n -dimensionales de lado δ dispuestos como en el apartado (4) de la Proposición 2.6 utilizando $\lceil \frac{m}{\delta} \rceil^n$ cubos. Entonces, como $\lceil \frac{m}{\delta} \rceil^n \leq (\frac{m}{\delta} + 1)^n = (m + \delta)^n \delta^{-n} \leq (2m)^n \delta^{-n}$, existe una constante $c = (2m)^n$ tal que $N_\delta(C) \leq c\delta^{-n}$ para todo $\delta \in (0, m)$. Usando la definición de $\overline{\dim}_B$ obtenemos que $\overline{\dim}_B C \leq n$. Como cualquier conjunto acotado F está contenido en un cubo n -dimensional, tenemos, por (1), que $\overline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B C \leq n$.

(3) En la desigualdad $N_\delta(E \cup F) \leq N_\delta(E) + N_\delta(F)$ dividimos por $-\log \delta$ (tomando $\delta < 1$ para que no afecte al signo de la desigualdad) y obtenemos, tomando límite superior, que $\overline{\dim}_B(E \cup F) \leq \max\{\overline{\dim}_B E, \overline{\dim}_B F\}$. Para la desigualdad contraria basta tener en cuenta que $E, F \subset E \cup F$.

(4) Como F contiene un cubo n -dimensional C tenemos, razonando de manera similar a (2), que $N_\delta(F) \geq N_\delta(C) \geq c\delta^{-n}$ para alguna constante c lo que implica que $\underline{\dim}_B(F) \geq n$. Por (2) tenemos que $n \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F \leq n$, por lo que $\underline{\dim}_B F = n$.

(5) Como F es no vacío y finito, F consiste en m puntos distintos. Luego $N_\delta(F) = m$ para todo $\delta > 0$ y, por tanto, $\underline{\dim}_B F = 0$. ■

Proposición 2.10 ([12, Proposition 2.6]). Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ y \overline{E} su clausura topológica. Entonces

$$\overline{\dim}_B \overline{E} = \overline{\dim}_B E,$$

$$\underline{\dim}_B \overline{E} = \underline{\dim}_B E.$$

Demostración. Sea $\{B_\alpha\}_{\alpha=1}^k$ una colección finita de bolas cerradas de radio δ . Entonces el conjunto $\bigcup_{\alpha=1}^k B_\alpha$ es cerrado y contiene a E si y sólo si contiene a \overline{E} ya que por definición la clausura de un conjunto es el menor cerrado en el que está contenido. Por tanto, el menor número de bolas cerradas de radio δ que recubren E también recubren \overline{E} . Teniendo en cuenta la Proposición 2.6, se da la igualdad de dimensiones. ■

Si bien a primera vista esta proposición parece interesante, podemos exponer las debilidades de la dimensión de conteo de cajas a nivel teórico muy fácilmente gracias a ella. Veamos a través de dos ejemplos cómo conjuntos numerables tienen dimensión de conteo de cajas mayor que cero, incluso aunque sólo tengan un punto de acumulación.

Ejemplo 2.11. Gracias a la Proposición 2.10 es sencillo construir un conjunto numerable con dimensión de conteo de cajas distinta de cero. Sea E el conjunto, numerable, de los racionales que pertenecen a $[0, 1]$. Entonces \overline{E} es todo el intervalo $[0, 1]$, por la Proposición 2.10 vemos que $\overline{\dim}_B E = \underline{\dim}_B E = 1$. Se trata de un resultado poco interesante pues la dimensión de cada punto por separado es cero y, sin embargo, su unión numerable tiene dimensión igual a uno.

Ejemplo 2.12. Sea $E = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$, veamos que $\dim_B E = \frac{1}{2}$. Sean $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ y $k \in \mathbb{N}$ el natural que satisfaga $\frac{1}{(k-1)k} > \delta \geq \frac{1}{k(k+1)}$.

Veamos en primer lugar que $\underline{\dim}_B E \geq \frac{1}{2}$. Sea U un conjunto tal que $|U| \leq \delta$, entonces U sólo puede contener a un punto del conjunto $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^k$ pues la distancia entre dos de estos puntos es por lo menos $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k(k-1)} > \delta$. Consecuentemente, son necesarios por lo menos k conjuntos de diámetro δ para recubrir E , luego $N_\delta(E) \geq k$ y entonces,

$$\frac{\log N_\delta(E)}{-\log \delta} \geq \frac{\log k}{\log k(k+1)} = \frac{\log k}{2 \log k + \log(1+1/k)} \rightarrow \frac{1}{2}$$

cuando $k \rightarrow +\infty$, que corresponde con $\delta \rightarrow 0$, por lo que $\underline{\dim}_B E \geq \frac{1}{2}$.

Por otro lado, veamos que $\overline{\dim}_B E \leq \frac{1}{2}$. Podemos dividir el intervalo $[0, \frac{1}{k}]$ en $k+1$ intervalos de longitud $\frac{1}{k(k+1)} \leq \delta$, con esto nos quedan otros $k-1$ puntos en E que podemos recubrir con $k-1$ intervalos, por lo tanto $N_\delta(E) \leq k+1+k-1 = 2k$ y entonces,

$$\frac{\log N_\delta(E)}{-\log \delta} \leq \frac{\log 2k}{\log k(k-1)} = \frac{\log 2 + \log k}{2 \log k + \log(1-1/k)} \rightarrow \frac{1}{2}$$

cuando $k \rightarrow +\infty$, que corresponde con $\delta \rightarrow 0$, por lo que $\overline{\dim}_B E \leq \frac{1}{2}$.

En este ejemplo vemos que basta que un conjunto numerable tenga un único punto de acumulación para que su dimensión de conteo de cajas sea mayor que cero.

2.3. Teoría de la medida

Nuestro objetivo será tratar de construir una dimensión que corrija las carencias teóricas de la dimensión de conteo de cajas. No iremos muy lejos en este intento sin la ayuda de la teoría de la medida, así pues, en este capítulo, introduciremos las nociones de esta rama de las matemáticas necesarias para poder seguir avanzando. A partir de aquí trabajaremos con un conjunto cualquiera X .

Definición 2.13. Decimos que una colección \mathcal{S} de subconjuntos de X es una σ -álgebra si $\emptyset \in \mathcal{S}$ y \mathcal{S} es cerrada bajo uniones numerables y bajo complementarios.

Proposición 2.14 ([7, Theorem 5.2.1]). Sea \mathcal{C} una colección de subconjuntos de X , entonces existe una única σ -álgebra \mathcal{F} tal que:

$$(1) \quad \mathcal{C} \subset \mathcal{F},$$

(2) Si \mathcal{G} es una σ -álgebra tal que $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ entonces $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.

Demostración. Veamos en primer lugar que la intersección de una familia de σ -álgebras es una σ -álgebra. Sea Γ una familia de σ -álgebras y sea $\mathcal{B} = \bigcap_{\mathcal{A} \in \Gamma} \mathcal{A}$, veamos que \mathcal{B} es una σ -álgebra. En primer lugar, tenemos que $\emptyset \in \mathcal{B}$ ya que $\emptyset \in \mathcal{A}$ para todo $\mathcal{A} \in \Gamma$ por ser \mathcal{A} una σ -álgebra. En segundo lugar, veamos que \mathcal{B} es cerrado por complementarios. Sea $A \in \mathcal{B}$, entonces $A \in \mathcal{A}$ para todo $\mathcal{A} \in \Gamma$ y, por tanto, $X \setminus A \in \mathcal{A}$, consecuentemente, $X \setminus A \in \mathcal{B}$. Por último, veamos que es cerrado por uniones numerables. Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $A_n \in \mathcal{B}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $A_n \in \mathcal{A}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $\mathcal{A} \in \Gamma$, así que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ para todo $\mathcal{A} \in \Gamma$ y, consecuentemente, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}$.

Para construir la σ -álgebra \mathcal{F} consideraremos Γ la familia de todas las σ -álgebras \mathcal{G} tales que $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$. Γ es no vacío ya que por lo menos la σ -álgebra que forman la familia de todos los subconjuntos de X pertenece a Γ . Sea $\mathcal{F} = \bigcap_{\mathcal{G} \in \Gamma} \mathcal{G}$. \mathcal{F} es una σ -álgebra por ser intersección de σ -álgebras y si \mathcal{G} es una σ -álgebra tal que $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$, entonces $\mathcal{G} \in \Gamma$ y, consecuentemente, $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. ■

Definición 2.15. Si \mathcal{C} es una colección de subconjuntos de X , diremos que la σ -álgebra \mathcal{F} obtenida en la Proposición 2.14, que denotaremos por $\sigma(\mathcal{C})$, es la σ -álgebra generada por \mathcal{C} .

Definición 2.16. Decimos que una aplicación μ definida sobre una σ -álgebra \mathcal{S} y con valores en $[0, +\infty]$ es una *medida* si cumple las dos siguientes propiedades:

(1) El conjunto vacío tiene medida igual a 0, es decir,

$$\mu(\emptyset) = 0;$$

(2) La aplicación μ es σ -aditiva, es decir, para toda colección numerable $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos disjuntos de \mathcal{S} se cumple que

$$\mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Teorema 2.17 ([13, Theorem 1.1] Continuidad de la medida). Sea μ una medida definida en una σ -álgebra \mathcal{S} de subconjuntos de X . Entonces se cumple:

(1) Si $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ es una sucesión creciente de conjuntos de \mathcal{S} , entonces

$$\mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(E_k).$$

(2) Si $F_1 \supset F_2 \supset \dots$ es una sucesión decreciente de conjuntos de \mathcal{S} y $\mu(F_1) < \infty$, entonces

$$\mu\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} F_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(F_k).$$

Demostración. (1) Podemos expresar $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ como la unión disjunta $E_1 \sqcup \bigsqcup_{k=2}^{\infty} (E_k \setminus E_{k-1})$. Entonces tenemos, por la propiedad (2) de la Definición 2.16, que

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) &= \mu(E_1) + \sum_{k=2}^{\infty} \mu(E_k \setminus E_{k-1}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\mu(E_1) + \sum_{k=2}^m \mu(E_k \setminus E_{k-1}) \right] \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \mu\left(E_1 \sqcup \bigsqcup_{k=2}^m (E_k \setminus E_{k-1})\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(E_m). \end{aligned}$$

(2) Sea $E_k = F_1 \setminus F_k$, entonces la sucesión $E_{k \in \mathbb{N}}$ es creciente y, como $\mu(F_1) < \infty$, $\mu(E_k) < \infty$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Además, $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k = F_1 \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Por tanto tenemos, usando (1), que

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k\right) &= \mu(F_1) - \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \mu(F_1) - \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(E_k) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} [\mu(F_1) - \mu(E_k)] = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(F_k). \end{aligned}$$

■

Definición 2.18. Decimos que una aplicación ν definida sobre todos los subconjuntos de X y con valores en $[0, +\infty]$ es una *medida exterior* si cumple las siguientes propiedades:

(1) El conjunto vacío tiene medida igual a 0, es decir,

$$\mu(\emptyset) = 0;$$

(2) $\nu(A) \leq \nu(B)$ si $A \subset B$;

(3) La aplicación ν es σ -subaditiva, es decir, para toda colección numerable $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de X se cumple que

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n).$$

Las medidas exteriores son útiles pues por un lado están definidas para cualquier subconjunto de X pero además, como veremos a continuación, siempre existe una σ -álgebra sobre la que actúa como una medida.

Definición 2.19. Sea ν una medida exterior sobre X . Un subconjunto $E \subset X$ se dice ν -medible (en el sentido de Carathéodory) si para cada subconjunto A de X tenemos que $\nu(A) = \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E)$.

Observamos que, como $A = (A \cap E) \cup (A \setminus E)$, por la condición (3) de la Definición 2.18 tenemos que en general se cumple $\nu(A) \leq \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E)$. Luego para verificar que un conjunto E es ν -medible llegará con probar que $\nu(A) \geq \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E)$ para todo A subconjunto de X .

Teorema 2.20 ([13, Theorem 1.2]). Sea ν una medida exterior. La colección \mathcal{M} de los conjuntos ν -medibles forma una σ -álgebra y la restricción de ν a \mathcal{M} es una medida.

Demostración. Empezaremos viendo que \mathcal{M} es una σ -álgebra.

Claramente $\emptyset \in \mathcal{M}$ pues, para todo $A \subset X$, $A \cap \emptyset = \emptyset$ y $A \setminus \emptyset = A$, entonces $\nu(A) = \nu(\emptyset) + \nu(A)$ ya que $\nu(\emptyset) = 0$ por ser ν medida exterior.

Veamos que \mathcal{M} es cerrado por complementarios. Para ello, supongamos que $E \in \mathcal{M}$ y veamos que $X \setminus E \in \mathcal{M}$. Como $E \in \mathcal{M}$ tenemos, para todo $A \subset X$, que $\nu(A) = \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E)$, además, como $A \cap (X \setminus E) = A \setminus E$ y $A \setminus (X \setminus E) = A \cap E$, también se cumple $\nu(A \cap (X \setminus E)) + \nu(A \setminus (X \setminus E)) = \nu(A \setminus E) + \nu(A \cap E) = \nu(A)$. Por tanto, $X \setminus E \in \mathcal{M}$.

Veamos que \mathcal{M} es cerrado por uniones numerables. Sean $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ y $A \subset X$. Aplicando la igualdad de la Definición 2.19 sucesivamente tenemos que

$$\begin{aligned} \nu(A) &= \nu(A \cap E_1) + \nu(A \setminus E_1) \\ &= \nu(A \cap E_1) + \nu((A \setminus E_1) \cap E_2) + \nu(A \setminus (E_1 \cup E_2)) \\ &= \dots \\ &= \sum_{j=1}^k \nu\left(\left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} E_i\right) \cap E_j\right) + \nu\left(A \setminus \bigcup_{j=1}^k E_j\right). \end{aligned}$$

Para todo $k \in \mathbb{N}$ se cumple $\bigcup_{j=1}^k E_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, lo que implica que $A \setminus (\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) \subset A \setminus (\bigcup_{j=1}^k E_j)$. Por tanto, tenemos, por el apartado (2) de la Definición 2.18, que

$$\nu(A) \geq \sum_{j=1}^k \nu\left(\left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} E_i\right) \cap E_j\right) + \nu\left(A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right), \quad (2.6)$$

y, como la desigualdad (2.6) es cierta para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\nu(A) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \nu\left(\left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} E_i\right) \cap E_j\right) + \nu\left(A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right). \quad (2.7)$$

Por otro lado, como $A \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) = \bigcup_{j=1}^{\infty} ((A \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} E_i) \cap E_j)$, usando el apartado (3) de la Definición 2.18 tenemos que

$$\nu(A) \leq \nu\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)\right) + \nu\left(A \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \nu\left(\left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} E_i\right) \cap E_j\right) + \nu\left(A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right). \quad (2.8)$$

De las desigualdades (2.7) y (2.8) deducimos que

$$\nu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu\left(\left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} E_i\right) \cap E_j\right) + \nu\left(A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \nu\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)\right) + \nu\left(A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right),$$

lo que implica que $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{M}$. Por tanto, \mathcal{M} es una σ -álgebra.

Por último, veamos que ν restringida a \mathcal{M} es una medida. Para ello tenemos que ver que ν cumple la condición (2) de la Definición 2.16. Por la condición (3) de la Definición 2.18 de medida exterior solo tenemos que probar que $\nu(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$ si $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es

una colección de conjuntos disjuntos de \mathcal{M} . Tomando $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n$ en la desigualdad (2.7) comprobamos que

$$\nu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$$

ya que $\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n \setminus \bigsqcup_{i=1}^{j-1} E_i\right) \cap E_j = E_j$ por ser $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ conjuntos disjuntos. Por lo tanto, la restricción de ν a \mathcal{M} es efectivamente una medida. ■

Definición 2.21. Decimos que una medida exterior es *regular* si para cualquier conjunto A existe un conjunto ν -medible E tal que $A \subset E$ y $\nu(E) = \nu(A)$.

Estaremos interesados en construir una medida exterior tal que la mayoría de conjuntos sean medibles, en particular, será conveniente que los conjuntos que sean expresables en términos de uniones o intersecciones de conjuntos abiertos o cerrados sean medibles. A partir de ahora sea (X, d) un espacio métrico y (X, τ_d) el espacio topológico inducido por la métrica.

Definición 2.22. Llamaremos *borelianos* o *conjuntos de Borel* de (X, τ_d) a los conjuntos de la σ -álgebra generada por τ_d . Denotaremos por F_σ al conjunto de los borelianos que se puedan expresar como una unión numerable de conjuntos cerrados y G_δ al conjunto de los borelianos que se puedan expresar como una intersección numerable de conjuntos abiertos.

Observamos que en la Definición 2.22 es equivalente decir que los borelianos son los elementos de la σ -álgebra generada por los abiertos de τ_d a decir que son los elementos de la σ -álgebra generada por los cerrados de τ_d . Esto es debido a que una σ -álgebra es cerrada por complementarios. Con el objetivo de asegurarnos que los conjuntos de Borel sean medibles introducimos la siguiente definición.

Definición 2.23. Una medida exterior ν sobre un espacio métrico (X, d) se dice *medida métrica exterior* si $\nu(E \cup F) = \nu(E) + \nu(F)$ para todo par de subconjuntos E y F *positivamente separados*, es decir, tales que $d(E, F) := \inf\{d(x, y) : x \in E, y \in F\} > 0$.

Demostraremos a continuación que los borelianos son siempre ν -medibles si ν es una medida métrica exterior. Para ello demostraremos en primer lugar el siguiente lema.

Lema 2.24 ([26, Lemma 13.1] Carathéodory). Sean ν una medida métrica exterior sobre (X, d) , $G \in \tau_d$ y A_0 cualquier subconjunto de G . Para todo $n \in \mathbb{N}$, sea

$$A_n = \left\{ x : x \in A_0 \text{ y } d(x, X \setminus G) \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(A_n) = \nu(A_0).$$

Demostración. Como para todo $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_0$ y $A_n \subset A_{n+1}$, tenemos que $\nu(A_n) \leq \nu(A_0)$ y $\nu(A_n) \leq \nu(A_{n+1})$. Por tanto, el límite existe y es menor o igual que $\nu(A_0)$. Consecuentemente solo tenemos que probar que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \nu(A_n) \geq \nu(A_0). \quad (2.9)$$

Como $A_n \subset A_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset A_0$. Como G es un abierto, cada punto $x \in A_0$ es un punto interior de G y, por tanto, existe un entorno abierto de ese punto $U_x \subset G$ de forma que $d(U_x, X \setminus G) > 0$. Consecuentemente, $x \in A_m$ para un $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Así, $A_0 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, de lo que se deduce que

$$A_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \quad (2.10)$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$ definimos $D_n = A_{n+1} \setminus A_n$. De la igualdad (2.10) y el hecho de que $A_n \subset A_{n+1}$ se deduce que

$$A_0 = A_{2n} \cup \left(\bigcup_{k=2n}^{\infty} D_k \right) = A_{2n} \cup \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} D_{2k} \right) \cup \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} D_{2k+1} \right),$$

y, por lo tanto,

$$\nu(A_0) \leq \nu(A_{2n}) + \sum_{k=n}^{\infty} \nu(D_{2k}) + \sum_{k=n}^{\infty} \nu(D_{2k+1}).$$

Supongamos que las dos últimas sumas convergen a 0 cuando $n \rightarrow \infty$. Entonces tenemos que

$$\nu(A_0) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \nu(A_{2n}) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \nu(A_n),$$

como queríamos ver. En caso de no cumplirse nuestra suposición tendríamos que una de las series $\sum_{k \in \mathbb{N}} \nu(D_{2k})$, $\sum_{k \in \mathbb{N}} \nu(D_{2k+1})$ es divergente. Supongamos que lo es la primera. La demostración es completamente análoga si suponemos que lo es la segunda.

Por la definición de los conjuntos A_n , tenemos que para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$d(D_{2k}, D_{2k+2}) \geq \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} > 0,$$

y, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\bigcup_{k=1}^{n-1} D_{2k} \subset A_{2n},$$

luego, como ν es una medida métrica exterior, tenemos, por la Definición 2.23, que

$$\nu(A_{2n}) \geq \nu\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} D_{2k}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \nu(D_{2k}).$$

Como $\sum_{k \in \mathbb{N}} \nu(D_{2k})$ es divergente,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \nu(A_n) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \nu(A_{2n}) = \infty,$$

y, por tanto, se cumple la desigualdad (2.9) como queríamos probar. ■

Teorema 2.25 ([26, Theorem 13.2]). Si ν es una medida métrica exterior sobre (X, d) , entonces los conjuntos cerrados de (X, τ_d) son ν -medibles.

Demostración. Sean F un conjunto cerrado y A un conjunto cualquiera. Entonces $A \setminus F$ está contenido en el conjunto abierto $X \setminus F$ y, por el Lema 2.24, existe una sucesión $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$d(E_n, F) \geq \frac{1}{n}, \quad (2.11)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(E_n) = \nu(A \setminus F). \quad (2.12)$$

Por la desigualdad (2.11) tenemos que

$$\nu(A) \geq \nu[(A \cap F) \cup E_n] = \nu(A \cap F) + \nu(E_n),$$

y, haciendo tender $n \rightarrow \infty$, tenemos, por la igualdad (2.12), que

$$\nu(A) \geq \nu(A \cap F) + \nu(A \setminus F).$$

Por tanto, F es ν -medible. ■

Corolario 2.26 ([26, Corollary 13.2.1]). *Si ν es una medida métrica exterior, entonces los borelianos son ν -medibles.*

Demostración. Por el Teorema 2.20 sabemos que los conjuntos medibles forman una σ -álgebra. Como los borelianos son la σ -álgebra generada por los cerrados de τ_d y, por el Teorema 2.25, los cerrados son medibles tenemos, a consecuencia de la Proposición 2.14, que los borelianos son medibles. ■

Nos centraremos ahora en un método para crear medidas exteriores y medidas métricas exteriores desarrollado por Carathéodory. Sea \mathcal{A} una familia de subconjuntos de X que recubra a X . Sea $\mathbf{c} : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ una función cualquiera.

Teorema 2.27 ([7, Theorem 5.2.2] Método I). *Existe una única medida exterior ν sobre X tal que:*

- (1) $\nu(A) \leq \mathbf{c}(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}$,
- (2) si ν^* es una medida exterior sobre X de forma que $\nu^*(A) \leq \mathbf{c}(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}$, entonces $\nu^*(B) \leq \nu(B)$ para todo $B \subset X$.

Demostración. Para la unicidad vemos que si dos medidas satisfacen (1) y (2), por (2) cada una es menor o igual que la otra y por tanto son iguales.

Para la existencia, sea $B \subset X$, definimos

$$\nu(B) = \inf \left\{ \sum_{A \in \mathcal{D}} \mathbf{c}(A) \right\}, \quad (2.13)$$

donde el ínfimo se toma sobre el conjunto de todos los recubrimientos numerables \mathcal{D} de B por conjuntos de \mathcal{A} . Veamos en primer lugar que ν así definida es una medida exterior.

Claramente $\nu(\emptyset) = 0$ ya que el conjunto vacío está recubierto por un recubrimiento vacío y la suma vacía tiene valor cero. Por otro lado, si $B \subset C$, entonces cualquier recubrimiento de C también es un recubrimiento de B y, consecuentemente, $\nu(B) \leq \nu(C)$. Por último, sea $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una colección numerable de subconjuntos de X . Tenemos que demostrar que

$$\nu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n).$$

Si $\nu(B_n) = \infty$ para algún n , la desigualdad se cumple claramente. Por tanto podemos suponer $\nu(B_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $\epsilon > 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos escoger, teniendo en cuenta la definición que introdujimos en la igualdad (2.13), \mathcal{D}_n un recubrimiento numerable de B_n por conjuntos de \mathcal{A} de forma que

$$\sum_{A \in \mathcal{D}_n} \mathbf{c}(A) \leq \nu(B_n) + 2^{-n} \epsilon.$$

Sea $\mathcal{D} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{D}_n$, entonces \mathcal{D} es un recubrimiento numerable de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \nu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) &\leq \sum_{A \in \mathcal{D}} \mathbf{c}(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{A \in \mathcal{D}_n} \mathbf{c}(A) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n) + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \epsilon \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n) + \epsilon. \end{aligned}$$

Como ϵ era un número positivo cualquiera, tenemos que

$$\nu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n).$$

Consecuentemente, ν es una medida exterior.

Por último veamos que ν cumple las dos condiciones del enunciado. Para (1), si $A \in \mathcal{A}$, entonces $\{A\}$ es un recubrimiento por elementos de \mathcal{A} de A , luego,

$$\nu(A) \leq \sum_{B \in \{A\}} \mathbf{c}(B) = \mathbf{c}(A).$$

Para (2), supongamos que ν^* es una medida exterior sobre X tal que $\nu^*(A) \leq \mathbf{c}(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}$. Sea \mathcal{D} cualquier recubrimiento numerable de $B \subset X$ por elementos de \mathcal{A} , entonces,

$$\sum_{A \in \mathcal{D}} \mathbf{c}(A) \geq \sum_{A \in \mathcal{D}} \nu^*(A) \geq \nu^*\left(\bigcup_{A \in \mathcal{D}} A\right) \geq \nu^*(B).$$

Como \mathcal{D} era un recubrimiento numerable cualquiera tenemos que $\inf_{\mathcal{D}} \left\{ \sum_{A \in \mathcal{D}} \mathbf{c}(A) \right\} \geq \nu^*(B)$ y por tanto $\nu(B) \geq \nu^*(B)$, como queríamos ver. ■

Definición 2.28. Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un producto cartesiano de intervalos finitos, es decir, C es de la forma

$$C = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n),$$

donde $a_i < b_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Entonces definimos el *volumen n -dimensional* de C como

$$\text{vol}^n(C) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n).$$

Sea F un subconjunto cualquiera de \mathbb{R}^n , definimos la aplicación

$$\mathcal{L}^n(F) = \inf \left\{ \sum_{\lambda \in \Lambda} \text{vol}^n(C_\lambda) : F \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda \right\},$$

donde el ínfimo se toma sobre todos los recubrimientos numerables de F por conjuntos que son productos cartesianos de intervalos finitos. De esta forma \mathcal{L}^n es una medida exterior construida siguiendo el Teorema 2.27, donde \mathcal{A} son los conjuntos que son productos cartesianos de intervalos finitos y $\mathbf{c} : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ es el volumen n -dimensional. \mathcal{L}^n se llama *medida exterior de Lebesgue n -dimensional* y su restricción a la σ -álgebra de los conjuntos \mathcal{L}^n -medibles es la *medida de Lebesgue n -dimensional*. Se tiene que los conjuntos de Borel son \mathcal{L}^n -medibles [5, Proposition 1.3.6].

Por último en este apartado, veamos un método para construir medidas métricas exteriores. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$, de igual forma que para espacios euclídeos denotaremos por $|A| = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$ el diámetro de A . Sea \mathcal{A} una familia de subconjuntos de X de forma que para todo $x \in X$ y todo $\epsilon > 0$ existe un $A \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A$ y $|A| < \epsilon$. Sea $\mathbf{c} : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ un función cualquiera. Para todo $\epsilon > 0$ construimos una medida exterior ν_ϵ por el método del Teorema 2.27 sobre el conjunto \mathcal{A}_ϵ y la función \mathbf{c} , siendo $\mathcal{A}_\epsilon = \{A \in \mathcal{A} : |A| \leq \epsilon\}$. Sea $E \subset X$ definimos

$$\nu_0(E) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \nu_\epsilon(E),$$

este límite existe ya que $\nu_\epsilon(E)$ crece cuando ϵ decrece. Para comprobar esto supongamos $0 < \epsilon < \epsilon'$ entonces $\mathcal{A}_\epsilon \subset \mathcal{A}_{\epsilon'}$ y por tanto $\nu_{\epsilon'}(E) \leq \nu_\epsilon(E)$ ya que en la definición introducida en la igualdad (2.13) el ínfimo se toma sobre menos elementos. Diremos que una función ν_0 construida de esta manera está *construida a través del Método II*.

Teorema 2.29 ([7, Theorem 5.4.4] Método II). *Una función ν_0 construida a través del Método II es una medida métrica exterior.*

Demostración. En primer lugar veamos que es una medida exterior. Tenemos $\nu_\epsilon(\emptyset) = 0$ y $\nu_\epsilon(A) \leq \nu_\epsilon(B)$ si $A \subset B$ por ser ν_ϵ medida exterior para todo $\epsilon > 0$. Luego ν_0 cumple con estas dos propiedades también. Veamos que ν_0 es σ -subaditiva. Sea $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una colección de subconjuntos de X , por la σ -subaditividad de ν_ϵ y el hecho de que $\nu_{\epsilon'}(E) \leq \nu_\epsilon(E)$ si $0 < \epsilon < \epsilon'$ se tiene que

$$\nu_\epsilon \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \nu_\epsilon(E_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \nu_0(E_k).$$

Por tanto,

$$\nu_0 \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \nu_\epsilon \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \nu_0(E_k).$$

Por último, veamos que ν_0 es una medida métrica exterior. Sean A y B dos subconjuntos de X positivamente separados, tenemos que demostrar que $\nu_0(A \cup B) = \nu_0(A) + \nu_0(B)$. Como

ν_0 es una medida exterior tenemos que $\nu_0(A \cup B) \leq \nu_0(A) + \nu_0(B)$, luego solo tenemos que probar la desigualdad contraria. Sea ϵ tal que $d(A, B) > \epsilon > 0$ y sea \mathcal{D} un recubrimiento numerable de $A \cup B$ por conjuntos de \mathcal{A}_ϵ . Un conjunto $D \in \mathcal{D}$ tiene diámetro menor que $d(A, B)$, por tanto, intersecará como mucho a uno de los dos conjuntos. Consecuentemente podemos dividir a \mathcal{D} en dos colecciones disjuntas \mathcal{D}_1 y \mathcal{D}_2 , de forma que \mathcal{D}_1 recubra a A y \mathcal{D}_2 recubra a B . Luego tenemos que

$$\sum_{D \in \mathcal{D}} \mathbf{c}(D) = \sum_{D \in \mathcal{D}_1} \mathbf{c}(D) + \sum_{D \in \mathcal{D}_2} \mathbf{c}(D) \geq \nu_\epsilon(A) + \nu_\epsilon(B).$$

Tomando el ínfimo sobre todos los recubrimientos tenemos que $\nu_\epsilon(A \cup B) \geq \nu_\epsilon(A) + \nu_\epsilon(B)$. Por último, tomando el límite cuando $\epsilon \rightarrow \infty$, deducimos que $\nu_0(A \cup B) \geq \nu_0(A) + \nu_0(B)$ como queríamos probar. ■

2.4. Medida y dimensión de Hausdorff

Con lo que hemos visto de teoría de la medida ya estamos en disposición de poder definir la dimensión Hausdorff. Esta es una de las dimensiones fractales más conocidas y utilizadas. Como veremos tiene propiedades mejores a nivel teórico que la dimensión de conteo de cajas pero es más difícil de estimar computacionalmente sobre ejemplos concretos. En lo que sigue, sean (X, d) un espacio métrico y s un número real positivo.

Definición 2.30. La medida exterior construida a través del Método II usando la aplicación $\mathbf{c}_s : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $\mathbf{c}_s(A) = |A|^s$, donde \mathcal{A} es el conjunto de todos los subconjuntos de X , se denomina la *medida exterior s -dimensional de Hausdorff* y la denotaremos por \mathcal{H}^s . Llamaremos *medida s -dimensional de Hausdorff* a la restricción de \mathcal{H}^s a la σ -álgebra de los conjuntos \mathcal{H}^s -medibles.

Observación 2.31. En este trabajo se denotará por \mathcal{H}^s tanto a la medida de Hausdorff como a la medida exterior de Hausdorff. En caso de utilizar la medida de Hausdorff se indicará expresamente que el conjunto es \mathcal{H}^s -medible. Por otro lado, nos centraremos en el estudio de la medida de Hausdorff sobre \mathbb{R}^n .

Como \mathcal{H}^s está construida por el Método II tenemos, en virtud del Teorema 2.27, que \mathcal{H}^s es una medida métrica exterior y, por tanto, sabemos, por el Corolario 2.26, que todos los borelianos son \mathcal{H}^s -medibles.

Aplicaremos explícitamente a este caso la construcción de una medida por el Método II para obtener una definición más explícita de \mathcal{H}^s . En primer lugar, para cada $\delta > 0$ construimos la siguiente medida exterior por el Método I

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{A \in \mathcal{A}_\delta} |A|^s \right\}, \quad (2.14)$$

donde el ínfimo se toma sobre todos los δ -recubrimientos de F \mathcal{A}_δ . Entonces

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\delta^s(F), \quad (2.15)$$

es la medida exterior s -dimensional de Hausdorff de F .

Observación 2.32. Se obtiene una definición equivalente de la medida de Hausdorff si en la ecuación (2.14) el ínfimo se toma sobre todos los δ -recubrimientos de F formados por conjuntos convexos en vez de conjuntos arbitrarios. Esto es debido a que siempre existe, para cualquier conjunto, un conjunto convexo del mismo diámetro en el que está contenido. Además, también se obtiene una definición equivalente si tomamos el ínfimo sobre todos los δ -recubrimientos abiertos o todos los δ -recubrimientos cerrados [6].

Nos dedicaremos ahora a demostrar algunos resultados sobre la medida de Hausdorff que nos serán de utilidad. El siguiente teorema demuestra la regularidad de la medida de Hausdorff junto con algunas consecuencias que nos serán útiles más adelante.

Teorema 2.33 ([13, Theorem 1.6]).

- (1) Si E es un subconjunto de \mathbb{R}^n , entonces existe un conjunto G perteneciente a G_δ tal que $E \subset G$ y $\mathcal{H}^s(G) = \mathcal{H}^s(E)$. En particular, \mathcal{H}^s es una medida exterior regular.
- (2) Cualquier conjunto \mathcal{H}^s -medible de \mathcal{H}^s -medida finita contiene un conjunto perteneciente a F_σ de igual medida y, por tanto, contiene un conjunto cerrado que difiere de él en un conjunto de medida arbitrariamente pequeña.

Demostración. (1) Si $\mathcal{H}^s(E) = \infty$, entonces \mathbb{R}^n es un conjunto abierto de igual medida. Supongamos que $\mathcal{H}^s(E) < \infty$. Teniendo en cuenta la Observación 2.32 podemos tomar, para todo $k \in \mathbb{N}$, $\{U_m^k\}_{m \in \mathbb{N}}$ un $\frac{2}{k}$ -recubrimiento abierto de E tal que

$$\sum_{m=1}^{\infty} |U_m^k|^s < \mathcal{H}_{\frac{1}{k}}^s(E) + \frac{1}{k}.$$

Entonces $E \subset G$, donde $G = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} U_m^k$ es un G_δ -conjunto. Como $\{U_m^k\}_{m \in \mathbb{N}}$ es un $\frac{2}{k}$ -recubrimiento de G tenemos que $\mathcal{H}_{\frac{2}{k}}^s(G) \leq \mathcal{H}_{\frac{1}{k}}^s(E) + \frac{1}{k}$. Tomando el límite cuando $k \rightarrow \infty$ y teniendo en cuenta que $E \subset G$ deducimos que $\mathcal{H}^s(E) = \mathcal{H}^s(G)$. Como, por el Corolario 2.26, los conjuntos pertenecientes a G_δ son \mathcal{H}^s -medibles, \mathcal{H}^s es una medida exterior regular.

(2) Sea E un conjunto \mathcal{H}^s -medible con $\mathcal{H}^s(E) < \infty$. Usando (1), podemos encontrar una sucesión $\{O_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de conjuntos abiertos que contengan a E tal que $\mathcal{H}^s(\bigcap_{k=1}^{\infty} O_k \setminus E) = \mathcal{H}^s(\bigcap_{k=1}^{\infty} O_k) - \mathcal{H}^s(E) = 0$. Como cualquier abierto de \mathbb{R}^n es un conjunto de F_σ , suponemos que $O_k = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, donde $\{F_m^k\}_{m \in \mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de conjuntos cerrados. Tenemos, por la continuidad de la medida \mathcal{H}^s , que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{H}^s(E \cap F_m^k) = \mathcal{H}^s(E \cap O_k) = \mathcal{H}^s(E),$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Por tanto, dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar un m_k tal que

$$\mathcal{H}^s(E \setminus F_{m_k}^k) < 2^{-k} \epsilon,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Si tomamos F_ϵ igual al conjunto cerrado $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_{m_k}^k$, entonces

$$\mathcal{H}^s(F_\epsilon) \geq \mathcal{H}^s(E \cap F_\epsilon) \geq \mathcal{H}^s(E) - \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(E \setminus F_{m_k}^k) > \mathcal{H}^s(E) - \epsilon.$$

Como $F_\epsilon \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} O_k$, tenemos que $\mathcal{H}^s(F_\epsilon \setminus E) \leq \mathcal{H}^s(\bigcap_{k=1}^{\infty} O_k \setminus E) = 0$. Por (1) tenemos que $F_\epsilon \setminus E$ está contenido en un conjunto G perteneciente a G_δ tal que $\mathcal{H}^s(G) = 0$. Por tanto, $F_\epsilon \setminus G$ es un conjunto perteneciente a F_σ , contenido en E y que cumple

$$\mathcal{H}^s(F_\epsilon \setminus G) \geq \mathcal{H}^s(F_\epsilon) - \mathcal{H}^s(G) > \mathcal{H}^s(E) - \epsilon.$$

Sea $\{\epsilon_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales positivos que converja a cero. Entonces el conjunto $\bigcup_{l \in \mathbb{N}} (F_l \setminus G)$ es un conjunto perteneciente a F_σ , contenido en E y, por el Teorema 2.17, de igual medida que E . ■

Demostraremos a continuación el Teorema del recubrimiento de Vitali. Este resultado nos permitirá extraer subconjuntos con propiedades interesantes de un tipo de recubrimientos, que definiremos a continuación, llamados *recubrimientos de Vitali*. Este teorema será de particular interés en el Capítulo 3.

Lema 2.34 ([13, Lemma 1.7]). Sean E un conjunto \mathcal{H}^s -medible con $\mathcal{H}^s(E) < \infty$ y $\epsilon > 0$. Entonces existe $\rho > 0$ que depende solo de E y de ϵ tal que, para cualquier colección numerable de conjuntos de Borel $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, con $0 < |U_k| \leq \rho$ para todo $k \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$\mathcal{H}^s\left(E \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k\right) < \sum_{k=1}^{\infty} |U_k|^s + \epsilon.$$

Demostración. De la igualdad (2.15) deducimos que podemos escoger $\rho > 0$ tal que

$$\mathcal{H}^s(E) < \sum_{k=1}^{\infty} |W_k|^s + \frac{\epsilon}{2}, \quad (2.16)$$

para todo ρ -recubrimiento $\{W_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de E . Sea $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una colección numerable de conjuntos de Borel tal que $0 < |U_k| \leq \rho$. De las igualdades (2.15) y (2.14) deducimos que podemos encontrar un ρ -recubrimiento $\{V_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$ tal que

$$\mathcal{H}^s\left(E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k\right) + \frac{\epsilon}{2} > \sum_{k=1}^{\infty} |V_k|^s.$$

Como $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}} \cup \{V_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es un ρ -recubrimiento de E tenemos, por la desigualdad (2.16), que

$$\mathcal{H}^s(E) < \sum_{k=1}^{\infty} |U_k|^s + \sum_{k=1}^{\infty} |V_k|^s + \frac{\epsilon}{2}.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s\left(E \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k\right) &= \mathcal{H}^s(E) - \mathcal{H}^s\left(E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k\right) \\ &< \sum_{k=1}^{\infty} |U_k|^s + \sum_{k=1}^{\infty} |V_k|^s + \frac{\epsilon}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} |V_k|^s + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |U_k|^s + \epsilon. \end{aligned}$$

■

Definición 2.35. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$. Una colección \mathcal{V} de subconjuntos de \mathbb{R}^n se llama *recubrimiento de Vitali* de E si para todo $x \in E$ y para todo $\delta > 0$, existe un $U \in \mathcal{V}$ tal que $x \in U$ y $0 < |U| \leq \delta$.

Teorema 2.36 ([13, Theorem 1.10] Teorema del recubrimiento de Vitali). Sea E un subconjunto \mathcal{H}^s -medible de \mathbb{R}^n y sea \mathcal{V} un recubrimiento de Vitali de conjuntos cerrados para E . Entonces:

- (1) Existe un subconjunto numerable $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathcal{V} tal que sus elementos son disjuntos y, o bien se cumple que $\sum_{n=1}^{\infty} |U_n| = \infty$, o $\mathcal{H}^s(E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n) = 0$.
- (2) Si $\mathcal{H}^s(E) < \infty$, entonces, dado $\epsilon > 0$, podemos pedir también que $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ cumpla que

$$\mathcal{H}^s(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |U_n|^s + \epsilon.$$

Demostración. Sea $\rho > 0$ fijado, podemos asumir que $|U| \leq \rho$ para todo $U \in \mathcal{V}$. Escogeremos los U_n de manera inductiva. Sea U_1 cualquier elemento de \mathcal{V} . Supongamos que U_1, \dots, U_m ya han sido escogidos y sea $d_m = \sup\{|B| : B \in \mathcal{V}, B \cap (\bigcup_{k=1}^m U_k) = \emptyset\}$. Si $d_m = 0$, entonces, como el recubrimiento de Vitali está formado por conjuntos cerrados, tenemos que $E \subset \bigcup_{k=1}^m U_k$ y, por tanto, (1) se cumple y el proceso termina. En otro caso tomaremos U_{m+1} tal que $|U_{m+1}| \geq \frac{d_m}{2}$ y $U_{m+1} \cap (\bigcup_{k=1}^m U_k) = \emptyset$.

Para terminar la demostración de (1), supongamos que este proceso no termina en un número finito de etapas y que $\sum_{k=1}^{\infty} |U_k|^s < \infty$ y veamos que entonces $\mathcal{H}^s(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i) = 0$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, sea B_n una bola con centro en U_n y radio $3|U_n|$. Veamos que para todo $k \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$E \setminus \bigcup_{i=1}^k U_i \subset \bigcup_{i=k+1}^{\infty} B_i. \quad (2.17)$$

Como el proceso de selección de los $\{U_n\}$ no termina en un número finito de etapas, tenemos que, para todo $x \in E \setminus \bigcup_{i=1}^k U_i$, existe $U \in \mathcal{V}$ tal que $x \in U$ y $U \cap (\bigcup_{i=1}^k U_i) = \emptyset$. Como $\sum_{k=1}^{\infty} |U_k|^s < \infty$, tenemos que $|U_n| \rightarrow 0$ y, consecuentemente, $|U| > 2|U_m|$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Por el método de selección de los $\{U_n\}$, U tiene que intersectar a algún U_i con $k < i < m$ para el cual $|U| \leq 2|U_i|$. Consecuentemente, $U \subset B_i$ y, por tanto, se cumple el contenido (2.17).

Tenemos entonces que, para todo $\delta > 0$, se cumple que

$$\mathcal{H}_{\delta}^s\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right) \leq \mathcal{H}_{\delta}^s\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^k U_i\right) \leq \sum_{k+1}^{\infty} |B_i|^s \leq 6^s \sum_{k+1}^{\infty} |U_i|^s,$$

para todo k lo suficientemente grande como para que se cumpla $|B_i| \leq \delta$ para todo $i > k$. Como $\sum_{k+1}^{\infty} |U_i|^s \rightarrow 0$ cuando k tiende a infinito, tenemos que $\mathcal{H}_{\delta}^s(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i) = 0$ para todo $\delta > 0$ y, consecuentemente, $\mathcal{H}^s(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i) = 0$.

Para demostrar (2), supongamos que ρ es el número correspondiente a E y ϵ en el Lema 2.34. Si $\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s = \infty$, entonces (2) se cumple trivialmente. Supongamos que

$\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s < \infty$, entonces, por el apartado (1) y el Lema 2.34 tenemos que

$$\mathcal{H}^s(E) = \mathcal{H}^s(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i) + \mathcal{H}^s(E \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i) = 0 + \mathcal{H}^s(E \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i) < \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s + \epsilon.$$

■

Vistos estos resultados, nos centraremos en estudiar las propiedades de la medida de Hausdorff. Para empezar, demostraremos que es, de alguna forma, una generalización de la medida de Lebesgue. Necesitaremos para ello el siguiente resultado sobre conjuntos convexos.

Teorema 2.37. *La medida de Lebesgue n -dimensional de un subconjunto de \mathbb{R}^n cerrado, convexo y de diámetro d es, como mucho, la de una bola de diámetro d .*

Una demostración de este teorema puede consultarse en [10]. Por otro lado, es conocido que la medida de Lebesgue n -dimensional de una bola n -dimensional de radio 1 es igual a $\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$. Puede consultarse una demostración de este resultado en [11].

Teorema 2.38 ([13, Theorem 1.12]). *Si $E \subset \mathbb{R}^n$ entonces $\mathcal{L}^n(E) = c_n \mathcal{H}^n(E)$, donde \mathcal{L}^n es la medida de Lebesgue n -dimensional y $c_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2^n \Gamma(\frac{n}{2}+1)}$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, teniendo en cuenta la Observación 2.32, podemos construir un recubrimiento de E por conjuntos cerrados y convexos $\{U_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ tal que $\sum_{m=1}^{\infty} U_m \leq \mathcal{H}^s(E) + \epsilon$. Por el Teorema 2.37, $\mathcal{L}^n(U_m) \leq c_n |U_m|^n$ y, por tanto, $\mathcal{L}^n(E) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(U_m) < c_n \mathcal{H}^n(E) + c_n \epsilon$. Consecuentemente $\mathcal{L}^n(E) \leq c_n \mathcal{H}^n(E)$.

Para ver la desigualdad contraria, sea $\{C_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ una colección de conjuntos que sean productos cartesianos de intervalos finitos y que cumplan que

$$\sum_{m=1}^{\infty} \text{vol}^n(C_m) < \mathcal{L}^n(E) + \epsilon. \quad (2.18)$$

Para todo $m \in \mathbb{N}$, el conjunto de todas la bolas cerradas de radio menor o igual a δ forman un recubrimiento de Vitali para C_m . Por el Teorema 2.36, existe una colección de bolas disjuntas $\{B_m^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de radio menor o igual a δ tal que $\mathcal{H}^n(C_m \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_m^k) = 0$ y, por tanto, $\mathcal{H}_\delta^n(C_m \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_m^k) = 0$. Como los conjuntos de Borel son \mathcal{L}^n -medibles, tenemos que $\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(B_m^k) = \mathcal{L}^n(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_m^k) \leq \mathcal{L}^n(C_m)$. Por la desigualdad (2.18) tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\delta^n(E) &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^n(C_m) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^n(B_m^k) + \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^n\left(C_m \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_m^k\right) \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |B_m^k|^n = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_n^{-1} \mathcal{L}^n(B_m^k) \\ &\leq c_n^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(C_m) < c_n^{-1} \mathcal{L}^n(E) + c_n^{-1} \epsilon. \end{aligned}$$

Por tanto, para todo ϵ y δ positivos se cumple $c_n \mathcal{H}_\delta^n(E) \leq \mathcal{L}^n(E) + \epsilon$ y, consecuentemente, $c_n \mathcal{H}^n(E) \leq \mathcal{L}^n(E)$. ■

De esta forma, la medida de Hausdorff generaliza los conceptos de longitud, área y volumen. Serán de utilidad a lo largo del trabajo los dos siguientes resultados sobre cómo se comporta la medida de Hausdorff sobre cierto tipo de transformaciones.

Proposición 2.39 ([12, Proposition 3.1]). Sean $F \subset \mathbb{R}^n$ y $f : F \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación tal que para todo $x, y \in F$,

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$$

con $c \in \mathbb{R}^+$. Sea s un número real positivo, entonces $\mathcal{H}^s(f(F)) \leq c^s \mathcal{H}^s(F)$.

Demostración. Si $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un δ -recubrimiento de F entonces, como

$$|f(F \cap U_n)| \leq c|F \cap U_n| \leq c|U_n|,$$

$\{f(F \cap U_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un $c\delta$ -recubrimiento de $f(F)$. Por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} |f(F \cap U_n)|^s \leq c^s \sum_{n=1}^{\infty} |U_n|^s$, y, consecuentemente, $\mathcal{H}_{c\delta}^s(f(F)) \leq c^s \mathcal{H}_{\delta}^s(F)$. Como esta desigualdad se cumple para todo $\delta > 0$, tomando el límite obtenemos que $\mathcal{H}^s(f(F)) \leq c^s \mathcal{H}^s(F)$. ■

Proposición 2.40 ([12, Scaling property 3.2]). Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación sobreyectiva tal que para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$|f(x) - f(y)| = r|x - y|$$

con $r \in \mathbb{R}^+$. Sea s un número real positivo, entonces $\mathcal{H}^s(f(F)) = r^s \mathcal{H}^s(F)$.

Demostración. Como $|f(x) - f(y)| = r|x - y|$, f es inyectiva. Como por hipótesis f es también sobreyectiva, tenemos que $|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)| = r^{-1}|x - y|$ y el resultado es consecuencia de aplicar la Proposición 2.39 a f y f^{-1} . ■

En particular tenemos que \mathcal{H}^s es invariante por isometrías, como cabría esperar. Nos centraremos ahora en definir una dimensión utilizando la medida de Hausdorff, con este objetivo, estudiaremos cómo varía \mathcal{H}^s en función de s . Tomando $\delta < 1$ en la ecuación (2.14) vemos que \mathcal{H}_{δ}^s es decreciente con s , así que, por la igualdad (2.15), \mathcal{H}^s también lo es. Además, tomando $t > s$, si $\{U_n\}$ es un δ -recubrimiento de F , se cumple que

$$\sum_n |U_n|^t = \sum_n |U_n|^{t-s} |U_n|^s \leq \delta^{t-s} \sum_n |U_n|^s, \quad (2.19)$$

tomando ínfimos obtenemos que $\mathcal{H}_{\delta}^t(F) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_{\delta}^s(F)$. Tomando límites vemos que si $\mathcal{H}^s(F)$ toma un valor finito para cierto s entonces $\mathcal{H}^t(F) = 0$ para todo $t > s$. Por otro lado tenemos que $\delta^{s-t} \mathcal{H}_{\delta}^t(F) \leq \mathcal{H}_{\delta}^s(F)$ así que si $\mathcal{H}^t(F)$ toma un valor positivo entonces $\mathcal{H}^s(F)$ es infinito si $s < t$. Por tanto, $\mathcal{H}^s(F)$, como función de s , tiene un valor crítico antes del cual la medida de Hausdorff vale ∞ y después del cual vale 0. Esto suscita la siguiente definición.

Definición 2.41. Llamaremos *dimensión de Hausdorff* de F , denotado $\dim_H F$ al valor que cumple,

$$\dim_H F = \inf\{s : \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s : \mathcal{H}^s(F) = \infty\}.$$

Por lo tanto

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty & \text{si } s < \dim_H F, \\ 0 & \text{si } s > \dim_H F. \end{cases}$$

Observación 2.42. En el análisis previo a la Definición 2.41 hemos omitido los casos en los que $\mathcal{H}^s(F) = 0$ para todo $s > 0$ y $\mathcal{H}^s(F) = \infty$ para todo $s > 0$. Estos casos se corresponden, respectivamente, con $\dim_H F = 0$ y $\dim_H F = \infty$. El primer caso es, por ejemplo, el de los subconjuntos finitos de \mathbb{R}^n . El segundo caso no se da en el estudio de \mathcal{H}^s sobre \mathbb{R}^n pero puede darse en espacios más generales como espacios de Hilbert.

Si $s = \dim_H F$ entonces $\mathcal{H}^s(F)$ puede tomar cualquier valor en $[0, \infty]$. Llamaremos *s-conjunto* a un conjunto \mathcal{H}^s -medible (en particular un boreliano por el Corolario 2.26) que cumpla que $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$. Los s -conjuntos son los más convenientes para estudiar teóricamente. En la práctica la mayoría de conjuntos que nos encontremos serán s -conjuntos [12, Chapter 5].

Proposición 2.43. *La dimensión de Hausdorff cumple las siguientes propiedades,*

- (1) Si $E \subset F$ entonces $\dim_H E \leq \dim_H F$.
- (2) Si $F \subset \mathbb{R}^n$, entonces $0 \leq \dim_H F \leq n$.
- (3) *Estabilidad numerable, es decir, si $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión numerable de conjuntos, entonces $\dim_H \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{\dim_H F_n\}$.*
- (4) Si F es numerable, entonces $\dim_H F = 0$.
- (5) Si $F \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, entonces $\dim_H F = n$.

Demostración. (1) Si $E \subset F$, entonces $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F)$ para todo $s > 0$ y, consecuentemente, $\dim_H E \leq \dim_H F$.

(2) Como la dimensión de Hausdorff es mayor o igual a cero en general, solo tenemos que probar que si $F \subset \mathbb{R}^n$ entonces $\dim_H F \leq n$. Sea E un subconjunto acotado de \mathbb{R}^n , entonces $\mathcal{H}^s(E) = 0$ para todo $s > n$ ya que E se puede recubrir con un número finito de cubos n dimensionales de diámetro δ para todo $\delta > 0$. Como cualquier subconjunto de \mathbb{R}^n es unión numerable de conjunto acotados, $\mathcal{H}^s(F) = 0$ si $s > n$. Por tanto, $\dim_H F \leq n$.

(3) Como $F_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por la propiedad (1) tenemos que $\dim_H F_n \leq \dim_H \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Por otro lado, si $s > \dim_H F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{H}^s(F_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto $\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_n) = 0$, lo que implica la desigualdad contraria.

(4) $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ donde F_n es un punto para todo $n \in \mathbb{N}$. Como F_n es un punto tenemos que $\mathcal{H}^0(F_n) = 1$ y por tanto $\dim_H F_n = 0$. Luego tenemos por la propiedad (3) que $\dim_H \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = 0$.

(5) Como F es abierto, contiene una bola de volumen n -dimensional positivo, luego $\dim_H F \geq n$. Por (2) obtenemos la desigualdad contraria. ■

Por último en este apartado, un resultado interesante en el que la dimensión de Hausdorff de un conjunto nos da información sobre su topología.

Proposición 2.44 ([12, Proposition 3.5]). *Sea $F \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\dim_H F < 1$, entonces F es totalmente desconexo.*

Demostración. Sean x e y dos puntos distintos de \mathbb{R}^n . Definimos la función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ por $f(z) = |z - x|$. Entonces tenemos que

$$|f(z) - f(w)| = \left| |z - x| - |w - x| \right| \leq |(z - x) - (w - x)| = |z - w|,$$

por lo que f es lipschitziana. Por la Proposición 2.39, tenemos que $\dim_H f(F) \leq \dim_H F < 1$. Luego $f(F)$ es un subconjunto de \mathbb{R} con \mathcal{H}^1 -medida cero y, por tanto, $\mathbb{R} \setminus f(F)$ es denso en \mathbb{R} . Consecuentemente, podemos encontrar un $r \in \mathbb{R} \setminus f(F)$ tal que $0 < r < f(y)$. Entonces tenemos que

$$F = \{z \in F : |z - x| < r\} \cup \{z \in F : |z - x| > r\},$$

por lo que F es igual a la unión de dos conjuntos abiertos disjuntos tales que x e y no pertenecen al mismo. Por tanto x e y no están en la misma componente conexa de F . Como x e y eran dos puntos arbitrarios deducimos que F es totalmente desconexo. ■

2.5. Comparación de dimensiones. Definición de fractal de Mandelbrot

Empezamos este apartado comparando las dos definiciones de dimensión fractal vistas hasta ahora.

Proposición 2.45 ([12, Proposition 3.4]). *Sea $F \subset \mathbb{R}^n$ no vacío y acotado. Entonces*

$$\dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F.$$

Demostración. Distinguimos dos casos. En primer lugar, supongamos que $\mathcal{H}^s(F) = 0$ para todo $s > 0$, entonces $\dim_H F = 0$ y el resultado se cumple ya que, por definición, $0 \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F$. En segundo lugar, supongamos que existe $s > 0$ tal que $1 < \mathcal{H}^s(F)$. Como $\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F)$, podemos tomar $\delta > 0$ tal que

$$1 < \mathcal{H}_\delta^s(F) \leq N_\delta(F) \delta^s,$$

usando la igualdad (2.14). Tomando logaritmos obtenemos que $0 < \log N_\delta(F) + s \log \delta$ y, por lo tanto, $s \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$, de lo que se deduce el resultado. ■

Por desgracia, existen ejemplos en los que las desigualdades de la Proposición 2.45 son estrictas. Por lo tanto, en general, si conocemos (o podemos estimar) el valor de una de las dimensiones solo obtendremos una cota para la otra. En el Capítulo 4 veremos una condición suficiente para que ambas dimensiones coincidan sobre un conjunto.

Para comparar las dimensiones fractales con la dimensión topológica hay que tener en cuenta que la segunda está definida para cualquier espacio topológico sea o no metrizable. Dicho esto, otra diferencia sustancial es que, como comentábamos anteriormente, a diferencia de las dimensiones de conteo de cajas y de Hausdorff, la dimensión topológica es un número entero. Por otro lado, en cualquier espacio métrico, se cumple la desigualdad $\dim F \leq \dim_H F$, una demostración de este resultado se puede consultar en [8, Chapter 3].

Como comentamos en la introducción, Mandelbrot originalmente definió un fractal como un conjunto cuya dimensión de Hausdorff excedía estrictamente su dimensión topológica. Expondremos un par de ejemplos que ilustren, por un lado, cuál era la motivación de esta definición y, por otro lado, por qué no era una “buena” definición. A priori, parecería razonable definir un fractal como un conjunto tal que su dimensión de Hausdorff no sea un entero puesto que, intuitivamente, parece que para esto suceda, dicho conjunto tiene que ser “irregular” de alguna forma (exploraremos con detalle dicha “irregularidad” en el Capítulo 3). No obstante, existen conjuntos con dimensión de Hausdorff entera y que, sin embargo, parecen tener ciertas características que habíamos asociado con los fractales en la introducción. Por ejemplo, consideremos el siguiente resultado, cuya demostración se puede consultar en el Apéndice B.

Teorema 2.46 ([25, Theorem 44.1]). *Sea $I = [0, 1]$. Existe una aplicación continua y sobreyectiva $f : I \rightarrow I^2$.*

Tenemos entre manos una curva que “llena el espacio”. Como habíamos comentado, el primer ejemplo de una curva de este tipo fue dado por Peano a finales del siglo XIX y se trata de uno de los monstruos a los que Mandelbrot consideraba fractales. No obstante, al “llenar el espacio”, vemos que su dimensión de Hausdorff es 2, es decir, un número entero. Por tanto, para poder incluir este tipo de curvas como fractales, Mandelbrot amplía la definición usando la dimensión topológica. De esta manera, este tipo de curvas son fractales en el sentido de Mandelbrot pues su dimensión topológica es 1.

Como comentábamos en el primer capítulo, en la actualidad no existe ninguna convención sobre la definición de fractal. Por ejemplo, la definición de Mandelbrot no se acepta pues existen ciertos conjuntos cuya dimensión de Hausdorff es igual a su dimensión topológica y, sin embargo, son lo suficientemente irregulares como para que se consideren fractales. Un ejemplo de uno de estos conjuntos es el grafo de la función de Cantor, también conocido como “la escalera del diablo”, que podemos ver en la Figura 2.3. Para su definición y más detalles se pueden consultar [21, 28].

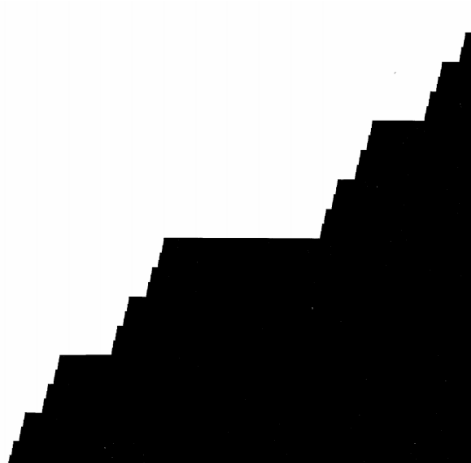


Fig. 2.3. Función de Cantor. Imagen obtenida de [20].

3. Propiedades locales de s -conjuntos

En esta sección estudiaremos, con el objetivo de dar una definición formal de “irregularidad”, las propiedades locales de s -conjuntos de \mathbb{R}^n , es decir, estudiaremos los entornos de los puntos de un s -conjunto. Como las demostraciones de muchos de los siguientes resultados son muy laboriosas no las incluiremos en este trabajo. Nuestra forma de proceder será probar con rigurosidad un resultado más sencillo que el general y después enunciar el resultado general citando dónde se puede encontrar una demostración. Todos los resultados presentados en esta parte se enuncian en los Capítulos 2, 3 y 4 de [13].

3.1. Densidad y regularidad

En primer lugar buscaremos un análogo al siguiente teorema de densidad de Lebesgue para s -conjuntos. Denotaremos por $B_r(x)$ la bola cerrada de centro x y radio r .

Teorema 3.1 ([13, Theorem 1.13]). *Sea E un subconjunto \mathcal{L}^n -medible de \mathbb{R}^n . Entonces la densidad de Lebesgue de E en x , definida como*

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{L}^n(E \cap B_r(x))}{\mathcal{L}^n(B_r(x))},$$

existe, es igual a 1 si $x \in E$ y es igual a 0 si $x \notin E$, excepto para un conjunto de \mathcal{L}^n -medida cero.

Empezaremos definiendo el análogo para s -conjuntos a la densidad de Lebesgue. Gracias a este nuevo concepto de densidad podremos dar una definición de regularidad para s -conjuntos.

Definición 3.2. Dado $s > 0$, definimos las *densidades superior e inferior* de un s -conjunto E en un punto $x \in \mathbb{R}^n$ respectivamente como

$$\begin{aligned} \overline{D}^s(E, x) &= \limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{H}^s(E \cap B_r(x))}{(2r)^s}, \\ \underline{D}^s(E, x) &= \liminf_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{H}^s(E \cap B_r(x))}{(2r)^s}. \end{aligned}$$

Si $\overline{D}^s(E, x) = \underline{D}^s(E, x)$ decimos que la densidad de E en x existe y la denotamos por $D^s(E, x)$, siendo esta el valor común.

Definición 3.3. Sea E un s -conjunto. Un punto $x \in E$ tal que $\overline{D}^s(E, x) = \underline{D}^s(E, x) = 1$ se dice punto *regular* de E . Un punto $x \in E$ que no sea regular se dice *irregular*. Un s -conjunto E se dice *regular* si \mathcal{H}^s -casi todos sus puntos son regulares y se dice *irregular* si \mathcal{H}^s -casi todos sus puntos son irregulares.

Definición 3.4. Sea E un s -conjunto, definimos la *densidad convexa superior* de E en el punto x como

$$\overline{D}_c^s(E, x) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \left\{ \sup \frac{\mathcal{H}^s(E \cap U)}{|U|^s} \right\},$$

donde el supremo se toma sobre todos los conjuntos convexos U tales que $x \in U$ y $0 < |U| \leq r$.

Como $B_r(x)$ es un conjunto convexo tenemos que $\overline{D}^s(E, x) \leq \overline{D}_c^s(E, x)$. Además, si $x \in U$ entonces $U \subset B_{|U|}(x)$. Por tanto,

$$\frac{\mathcal{H}^s(E \cap U)}{(2|U|)^s} \leq \frac{\mathcal{H}^s(E \cap B_{|U|}(x))}{(2|U|)^s},$$

para todo conjunto U tal que $|U| \neq 0$. Como $|B_{|U|}(x)| = 2|U|$, tenemos que $2^{-s}\overline{D}_c^s(E, x) \leq \overline{D}^s(E, x)$. En resumen, se cumple que

$$2^{-s}\overline{D}_c^s(E, x) \leq \overline{D}^s(E, x) \leq \overline{D}_c^s(E, x). \quad (3.1)$$

Trataremos ahora de dar una caracterización de s -conjuntos regulares e irregulares. Para ello necesitaremos unos resultados sobre las densidades que veremos a continuación. Para empezar, como trabajaremos con la medida de Hausdorff, necesitamos probar que los conjuntos con los que vamos a trabajar son \mathcal{H}^s -medibles. Demostraremos en el siguiente lema algunos casos sencillos.

Lema 3.5 ([13, Lemma 2.1]). Sea E un s -conjunto de \mathbb{R}^n . Entonces se cumple que:

- (1) $\mathcal{H}^s(E \cap B_r(x))$ es, como función de x , Borel-medible para todo r , es decir, el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{H}^s(E \cap B_r(x)) < c\}$ es un boreliano para todo $c \in \mathbb{R}^+$.
- (2) $\underline{D}^s(E, x)$ y $\overline{D}^s(E, x)$ son, como funciones de x , Borel-medibles.

Demostración. (1) Sean $r, \alpha > 0$ y $F = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{H}^s(E \cap B_r(x)) < \alpha\}$. Sea $x \in F$. Por el Teorema 2.17 tenemos que, para cualquier sucesión $\{\delta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de números reales positivos decreciente y que converge a cero,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}^s(E \cap B_{r+\delta_n}(x)) = \mathcal{H}^s(E \cap B_r(x)).$$

Por tanto podemos encontrar un $\epsilon > 0$ tal que $\mathcal{H}^s(E \cap B_{r+\epsilon}(x)) < \alpha$. Si $y \in B_\epsilon(x)$, tenemos que $B_r(y) \subset B_{r+\epsilon}(x)$ y, consecuentemente, $\mathcal{H}^s(E \cap B_r(y)) < \alpha$. Entonces $B_\epsilon(x)$ es un entorno de x contenido en F y, como esto se cumple para todo $x \in F$, F es un conjunto abierto de \mathbb{R}^n . Como esto es cierto para todo $\alpha > 0$, concluimos que $\mathcal{H}^s(E \cap B_r(x))$ es Borel-medible.

(2) Demostraremos que $\underline{D}^s(E, x)$ es Borel-medible, el caso de $\overline{D}^s(E, x)$ se prueba de forma parecida. Sea $\alpha > 0$, veamos que el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : \underline{D}^s(E, x) < \alpha\}$ es un conjunto de Borel. Usando el apartado (1) tenemos que el conjunto $G_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{H}^s(E \cap B_r(x)) < \alpha(2r)^s\}$ es un abierto para todo $r \in \mathbb{R}^+$. Veamos que el conjunto

$$F_\rho = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{H}^s(E \cap B_r(x)) < \alpha(2r)^s \text{ para algún } r < \rho\},$$

es abierto. Sea $x \in F_\rho$, entonces existe $r_0 < \rho$ tal que $\mathcal{H}^s(E \cap B_{r_0}(x)) < \alpha(2r_0)^s$. Entonces, $x \in G_{r_0} \subset F_\rho$ donde, como acabamos de ver, G_{r_0} es un abierto.

Por la definición de $\underline{D}^s(E, x)$, tenemos que

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \underline{D}^s(E, x) < \alpha\} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \inf_{r < \rho} \left\{ \frac{\mathcal{H}^s(E \cap B_r(x))}{(2r)^s} \right\} < \alpha\right\} = \bigcap_{\rho > 0} F_\rho = \bigcap_{\rho \in \mathbb{Q}^+} F_\rho,$$

ya que si $\rho_1 \geq \rho_2$ entonces $F_{\rho_1} \subset F_{\rho_2}$. Luego, $\{x \in \mathbb{R}^n : \underline{D}^s(E, x) < \alpha\}$ es un conjunto perteneciente a G_δ y, por tanto, un conjunto de Borel para todo $\alpha > 0$. Consecuentemente $\underline{D}^s(E, x)$ es una función de x Borel-medible. ■

Demostrar que la densidad convexa superior es Borel-medible es más complicado por lo que en este trabajo asumiremos que los conjuntos definidos usando dicha densidad son medibles. El lector interesado puede encontrar una demostración completa de los siguientes resultados en [8] donde en vez de la densidad convexa superior se utiliza una densidad basada en una dimensión fractal no vista en este trabajo (en [13] no se demuestra que la densidad convexa superior sea Borel-medible).

Los dos siguientes teoremas son resultados sobre la densidad convexa superior que utilizaremos más adelante, junto a la desigualdad (3.1), para obtener los resultados que buscamos sobre las densidades superior e inferior.

Teorema 3.6 ([13, Theorem 2.2]). *Sea E un s -conjunto de \mathbb{R}^n , entonces $\overline{D}_c^s(E, x) = 0$ para \mathcal{H}^s -casi todo $x \notin E$.*

Demostración. Sea $\alpha > 0$, vamos a probar que el conjunto medible $F = \{x \notin E : \overline{D}_c^s(E, x) > \alpha\}$ es de medida cero. Sea $\delta > 0$. Por el Teorema 2.33 existe un conjunto cerrado $E_1 \subset E$ tal que $\mathcal{H}^s(E \setminus E_1) < \delta$. Sean $\rho > 0$ y

$$\mathcal{V} = \{U \subset \mathbb{R}^n : U \text{ es cerrado y convexo}, 0 < |U| \leq \rho, U \cap E_1 = \emptyset \text{ y } \mathcal{H}^s(E \cap U) > \alpha|U|^s\}.$$

Veamos que \mathcal{V} es un recubrimiento de Vitali de conjuntos cerrados para F , es decir, para todo $x \in F$ y para todo $\epsilon > 0$ existe un conjunto cerrado y convexo $V \in \mathcal{V}$ tal que $x \in V$ y $0 < |V| < \epsilon$. Sean $x \in F$, $\epsilon > 0$ y definimos $\epsilon_1 = d(x, E_1) > 0$, que es mayor estrictamente que 0 por ser E_1 cerrado. Sea $\epsilon_2 = \min\{\epsilon_1, \epsilon, \rho\}$. Como $x \in F$, tenemos que $\overline{D}_c^s(E, x) > \alpha$ y, por tanto, existe un conjunto convexo U tal que $\mathcal{H}^s(F \cap U) > \alpha|U|^s$ y $0 < |U| < \epsilon_2$. Luego $V = \overline{U}$ es el conjunto que buscábamos.

Por tanto, por el Teorema 2.36, existe una sucesión $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de conjuntos disjuntos pertenecientes a \mathcal{V} tal que $\sum_{k=1}^{\infty} |U_k|^s = \infty$ o $\mathcal{H}^s(F \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k) = 0$. Como $U_k \in \mathcal{V}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}^s(E \cap U_k) > \alpha|U_k|^s$ tenemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |U_k|^s < \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(E \cap U_k) = \frac{1}{\alpha} \mathcal{H}^s(E \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k) \leq \frac{1}{\alpha} \mathcal{H}^s(E \setminus E_1) < \frac{\delta}{\alpha} < \infty,$$

ya que los $\{U_k\}$ son disjuntos y no intersecan a E_1 . Por tanto se cumple que $\mathcal{H}^s(F \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k) = 0$. Consecuentemente,

$$\mathcal{H}_\rho^s(F) \leq \mathcal{H}_\rho^s(F \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k) + \mathcal{H}_\rho^s(F \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k) \leq \mathcal{H}^s(F \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k) + \sum_{k=1}^{\infty} |U_k|^s < 0 + \frac{\delta}{\alpha}.$$

Como esto es cierto para todo $\delta > 0$ y para todo $\rho > 0$, concluimos que $\mathcal{H}^s(F) = 0$. ■

Teorema 3.7 ([13, Theorem 2.3]). *Sea E un s -conjunto de \mathbb{R}^n , entonces $\overline{D}_c^s(E, x) = 1$ para \mathcal{H}^s -casi todo $x \in E$.*

Revisar. Empezaremos demostrando que $\overline{D}_c^s(E, x) \geq 1$ para casi todo $x \in E$. Sean $\alpha < 1$ y $\rho > 0$ y sea

$$F_\rho = \{x \in E : \mathcal{H}^s(E \cup U) < \alpha|U|^s \text{ para todo } U \text{ convexo tal que } x \in U, |U| < \rho\}.$$

Teniendo en cuenta la Observación 2.32, podemos encontrar, para todo $\epsilon > 0$, un ρ -recubrimiento de F_ρ formado por conjuntos convexos $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |U_k|^s < \mathcal{H}^s(F) + \epsilon.$$

Podemos asumir que U_k contiene un punto de F_ρ para todo $k \in \mathbb{N}$ ya que, en caso contrario, podemos tomar los conjuntos que sí tengan puntos de F_ρ como nuestro recubrimiento. Por tanto, por la definición de F_ρ , tenemos que

$$\mathcal{H}^s(F_\rho) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_\rho \cap U_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(E \cap U_k) < \alpha \sum_{k=1}^{\infty} |U_k|^s < \alpha(\mathcal{H}^s(F_\rho) + \epsilon).$$

Como $\alpha < 1$ y la desigualdad es cierta para todo $\epsilon > 0$, deducimos que $\mathcal{H}^s(F_\rho) = 0$. Como esto se cumple para todo $\rho > 0$, deducimos que $\overline{D}_c^s(E, x) \geq \alpha$ para casi todo $x \in E$. Finalmente, como esto se cumple para todo $\alpha < 1$, concluimos que $\overline{D}_c^s(E, x) \geq 1$ para casi todo $x \in E$.

Probaremos ahora que $\overline{D}_c^s(E, x) \leq 1$ para casi todo $x \in E$. Sea $\alpha > 1$, definimos el conjunto medible $F_\alpha = \{x \in E : \overline{D}_c^s(E, x) > \alpha\}$. Vamos a demostrar que $\mathcal{H}^s(F_\alpha) = 0$ para todo $\alpha > 1$. Sea $F'_\alpha = \{x \in F_\alpha : \overline{D}_c^s(E \setminus F_\alpha, x) = 0\}$. Por el Teorema 3.6, tenemos que $\mathcal{H}^s(F_\alpha \setminus F'_\alpha) = 0$. Como E es medible en tanto que s -conjunto, y $F_\alpha \subset E$, tenemos que $\mathcal{H}^s(E) = \mathcal{H}^s(F_\alpha) + \mathcal{H}^s(E \setminus F_\alpha)$. Por tanto, usando la Definición 3.4, tenemos que $\overline{D}_c^s(F_\alpha, x) + \overline{D}_c^s(E \setminus F_\alpha, x) \geq \overline{D}_c^s(E, x)$. Luego si $x \in F'_\alpha$, entonces $\overline{D}_c^s(F_\alpha, x) \geq \overline{D}_c^s(E, x) - \overline{D}_c^s(E \setminus F_\alpha, x) > \alpha$. Consecuentemente, el conjunto

$$\mathcal{V} = \{U \subset \mathbb{R}^n : U \text{ es cerrado y convexo y } \mathcal{H}^s(F_\alpha \cap U) > \alpha|U|^s\}, \quad (3.2)$$

es un recubrimiento de Vitali de conjuntos cerrados para F'_α . Sea $\epsilon > 0$, por el segundo apartado del Teorema 2.36, podemos encontrar una sucesión $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de conjuntos disjuntos pertenecientes a \mathcal{V} tales que $\mathcal{H}^s(F'_\alpha) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |U_k|^s + \epsilon$. Por la definición de \mathcal{V} tenemos que

$$\mathcal{H}^s(F_\alpha) = \mathcal{H}^s(F'_\alpha) < \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_\alpha \cap U_k) + \epsilon \leq \frac{1}{\alpha} \mathcal{H}^s(F_\alpha) + \epsilon.$$

Como esta desigualdad es cierta para todo $\epsilon > 0$, concluimos que $\mathcal{H}^s(F_\alpha) = 0$ si $\alpha > 1$, como queríamos demostrar. ■

Una vez demostrados estos resultados, recopilamos una serie de consecuencias interesantes que, además, utilizaremos después para estudiar la estructura de s -conjuntos.

Corolario 3.8 ([13, Corollary 2.4 & 2.5]). *Si E es un s -conjunto de \mathbb{R}^n . Entonces*

- (1) $D^s(E, x) = 0$ para \mathcal{H}^s -casi todo $x \notin E$,
- (2) $2^{-s} \leq \overline{D}^s(E, x) \leq 1$ para \mathcal{H}^s -casi todo $x \in E$.

Demostración. Ambos resultados se deducen inmediatamente de la cadena de desigualdades (3.1) y los Teoremas 3.6 y 3.7. ■

Corolario 3.9 ([13, Corollary 2.6]). *Sea F un subconjunto medible de un s -conjunto E . Entonces $\overline{D}^s(F, x) = \overline{D}^s(E, x)$ y $\underline{D}^s(F, x) = \underline{D}^s(E, x)$ para casi todo $x \in F$.*

Demostración. Sea $H = E \setminus F$, entonces tenemos, por el Corolario 3.8, que $D^s(H, x) = 0$ para casi todo $x \in F$. Luego para estos x se cumple que

$$\begin{aligned}\overline{D}^s(E, x) &= \overline{D}^s(F, x) + D^s(H, x) = \overline{D}^s(F, x), \\ \underline{D}^s(E, x) &= \underline{D}^s(F, x) + D^s(H, x) = \underline{D}^s(F, x).\end{aligned}$$

■

Corolario 3.10 ([13, Corollary 2.7]). *Sea $E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k$ una unión disjunta numerable de s -conjuntos de forma que $\mathcal{H}^s(E) < \infty$. Entonces, para todo $k \in \mathbb{N}$ y para casi todo $x \in E_k$,*

$$\underline{D}^s(E_k, x) = \underline{D}^s(E, x) \text{ y } \overline{D}^s(E_k, x) = \overline{D}^s(E, x).$$

Demostración. Se deduce aplicando el Corolario 3.9 a E_k como subconjunto de E . ■

Corolario 3.11 ([13, Corollary 2.8]). *Sea E un s -conjunto. Si E es regular (resp. irregular) entonces cualquier subconjunto medible de E con medida positiva es regular (resp. irregular).*

Demostración. Se deduce inmediatamente del Corolario 3.9 y la definición de regularidad. ■

El siguiente resultado nos permite descomponer un s -conjunto en un conjunto regular y uno irregular. En la Figura 3.1 se puede ver este proceso en el caso de un 1-conjunto.

Corolario 3.12 ([13, Corollary 2.10] Teorema de descomposición). *Si E es un s -conjunto, entonces el conjunto de los puntos regulares de E es un conjunto regular y el conjunto de los puntos irregulares de E es un conjunto irregular.*

Demostración. Por el Lema 3.5, el conjunto de puntos regulares y el conjunto de puntos irregulares de E son ambos medibles. Por tanto el resultado se deduce del Corolario 3.9. ■

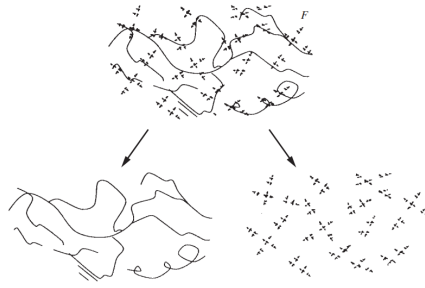


Fig. 3.1. Descomposición de un 1-conjunto F en una parte regular y otra irregular. Imagen obtenida de [12].

3.2. Estructura de conjuntos de dimensión entera

En este apartado estudiaremos los s -conjuntos regulares para el caso $s \in \mathbb{N}$. Empezaremos centrándonos en los 1-conjuntos. Aquí será de gran importancia el concepto de curva.

Definición 3.13. Definimos una *curva* (o una *curva de Jordan*) como la imagen de una aplicación continua e inyectiva $\Psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ donde $[a, b]$ es un intervalo cerrado no degenerado.

Tenemos entonces que, bajo nuestra definición, las curvas no se autointersecan, son compactas y son conexas.

Definición 3.14. La *longitud de una curva* C , $\mathcal{L}(C)$, se define como

$$\mathcal{L}(C) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^m |\Psi(t_k) - \Psi(t_{k-1})| \right\} \in [0, \infty],$$

donde el supremo se toma sobre toda partición $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ del intervalo $[a, b]$. Si una curva C cumple que $\mathcal{L}(C) < \infty$ diremos que es una *curva rectificable*.

Observamos que siempre es posible parametrizar una curva rectificable C por el parámetro longitud de arco. Es decir, podemos representar C como la imagen de una función $\Psi_0 : [0, \mathcal{L}(C)] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de manera que la longitud de $\Psi_0([0, t])$ sea igual a t para todo $t \in [0, \mathcal{L}(C)]$. Además, si Ψ es la parametrización por la longitud de arco de una curva C , se obtiene de la Definición 3.14 que

$$|\Psi(t_1) - \Psi(t_2)| \leq |t_1 - t_2|, \quad (3.3)$$

para todo t_1 y t_2 en el intervalo de definición de Ψ . Demostraremos a continuación que toda curva rectificable es un 1-conjunto regular.

Lema 3.15 ([13, Lemma 3.2]). Si C es una curva rectificable entonces $\mathcal{H}^1(C) = \mathcal{L}(C)$.

Demostración. Sea C una curva rectificable uniendo z y w . Denotamos por “proj” la proyección ortogonal de \mathbb{R}^n a la recta que pasa por z y w y por $[z, w]$ el segmento de dicha recta que une z con w . Entonces tenemos que $|\text{proj } x - \text{proj } y| \leq |x - y|$ si $x, y \in \mathbb{R}^n$. Por la Proposición 2.39 y el Teorema 2.38, tenemos que $\mathcal{H}^1(C) \geq \mathcal{H}^1([z, w]) = \mathcal{L}^1([z, w]) = |z - w|$ ya que el segmento $[z, w] \subset \text{proj } C$.

Supongamos que C es la imagen de $\Psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Por lo visto anteriormente tenemos que $\mathcal{H}^1(\Psi([t, u])) \geq |\Psi(t) - \Psi(u)|$ para cualquier $t, u \in [a, b]$. Entonces si $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ es una partición de $[a, b]$ tenemos que

$$\sum_{k=1}^m |\Psi(t_k) - \Psi(t_{k-1})| \leq \sum_{k=1}^m \mathcal{H}^1(\Psi([t_{k-1}, t_k])) = \mathcal{H}^1(C),$$

ya que los arcos $\Psi([t_{k-1}, t_k])$ son disjuntos excepto por sus puntos extremos. Por tanto, $\mathcal{L}(C) \leq \mathcal{H}^1(C)$.

Veamos ahora la desigualdad contraria. Sea Ψ la parametrización por la longitud del arco de C , entonces Ψ es una aplicación sobreyectiva del intervalo $[0, \mathcal{L}(C)]$ en C que cumple la desigualdad (3.3). Por la Proposición 2.39 tenemos que $\mathcal{H}^1(C) \leq \mathcal{H}^1([0, \mathcal{L}(C)]) = \mathcal{L}(C)$. ■

Proposición 3.16 ([13, Lemma 3.5]). *Una curva rectificable es un 1-conjunto regular.*

Demostración. Como C es rectificable tenemos que $\mathcal{L}(C) < \infty$. Por otro lado, C tiene dos extremos distintos p y q y, claramente, $\mathcal{L}(C) \geq |p - q| > 0$. Por tanto, gracias al Lema 3.15, tenemos que $0 < \mathcal{H}^1(C) < \infty$ y, consecuentemente, C es un 1-conjunto.

Veamos que C es regular. Sea $x \in C$ que no sea un extremo, entonces x divide a C en dos partes que denotaremos $C_{p,x}$ y $C_{x,q}$. Si r es lo suficientemente pequeño, podemos encontrar un punto $y \in C_{x,q}$ tal que $|x - y| = r$ y $C_{x,y} \subset B(x, r)$. Tenemos que

$$r = |x - y| \leq \mathcal{L}(C_{x,y}) = \mathcal{H}^1(C_{x,y}) \leq \mathcal{H}^1(C_{x,q} \cap B(x, r)).$$

De manera análoga vemos que $r \leq \mathcal{H}^1(C_{p,x} \cap B(x, r))$ y, por tanto, $2r \leq \mathcal{H}^1(C \cap B(x, r))$. Consecuentemente

$$\underline{D}^1(C, x) = \liminf_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{H}^1(C \cap B(x, r))}{2r} \geq 1.$$

Como además tenemos, por el segundo apartado del Corolario 3.8, que $\underline{D}^1(C, x) \leq \overline{D}^1(C, x) \leq 1$ para \mathcal{H}^1 -casi todo x , $\underline{D}^1(C, x)$ existe y es igual a 1 para casi todo $x \in C$. Consecuentemente, C es regular. ■

Ahora que sabemos que toda curva rectificable es un 1-conjunto, nos preguntamos si podemos expresar todo 1-conjunto como unión de curvas rectificables. Esta pregunta suscita la introducción de los dos siguientes conceptos.

Definición 3.17. Diremos que un 1-conjunto contenido en una unión numerable de curvas rectificables es un Y -conjunto.

Corolario 3.18 ([13, Corollary 3.9]). *Un Y -conjunto es un 1-conjunto regular.*

Demostración. Aplicando el Corolario 3.11 y la Proposición 3.16 tenemos que un 1-conjunto contenido en una curva rectificable tiene densidad 1 en casi todos sus puntos. Por el Corolario 3.10 tenemos que esta propiedad también es cierta para Y -conjuntos. ■

Definición 3.19. Decimos que un 1-conjunto es un Z -conjunto si su intersección con cualquier curva rectificable es de \mathcal{H}^1 -medida cero.

Con esta definición ya tenemos todos los elementos para enunciar el teorema de caracterización de 1-conjuntos. No obstante, para poder demostrarlo necesitamos el siguiente lema cuya demostración puede consultarse en [13].

Lema 3.20 ([13, Theorem 3.23]). *Sea E un Z -conjunto de \mathbb{R}^2 . Entonces $\underline{D}^1(E, x) \leq \frac{3}{4}$ para casi todo $x \in E$.*

Teorema 3.21 ([13, Theorem 3.25]).

- (a) *Un 1-conjunto de \mathbb{R}^2 es irregular si y solo si es un Z -conjunto.*
- (b) *Un 1-conjunto de \mathbb{R}^2 es regular si y solo si es la unión de un Y -conjunto y un conjunto de \mathcal{H}^1 -medida cero.*

Demostración. (a) Un Z -conjunto es irregular por la Lema 3.20. Para demostrar el recíproco supongamos que F es un 1-conjunto irregular y C una curva rectificable, luego $F \cap C$ es un subconjunto de un conjunto regular y de uno irregular. Entonces, por el Corolario 3.11, $F \cap C$ tiene \mathcal{H}^1 -medida cero y, consecuentemente, F es un Z -conjunto.

(b) Por el Corolario 3.18 un Y -conjunto es regular y añadir un conjunto de medida cero no afecta a las densidades, por tanto, tampoco a la regularidad.

Sea E un 1-conjunto regular. Entonces, por definición, $\underline{D}^1(E, x) = 1$ para casi todo $x \in E$. Así, por el Lema 3.20 y el Corolario 3.9, tenemos que cualquier subconjunto medible de E con medida positiva interseca a una curva rectificable en un conjunto de medida positiva. Utilizaremos este hecho para definir una sucesión de curvas rectificables $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de manera inductiva. Escogemos C_1 una curva rectificable de manera que

$$\mathcal{H}^1(C_1 \cap E) \geq \frac{1}{2} \sup\{\mathcal{H}^1(C \cap E) : C \text{ es una curva rectificable}\}.$$

Si $\{C_1, \dots, C_m\}$ han sido ya seleccionadas y $E_m = E \setminus \bigcup_{k=1}^m C_k$ es de medida positiva, escogemos C_{m+1} una curva rectificable que cumpla

$$\mathcal{H}^1(C_{m+1}) \geq \frac{1}{2} \sup\{\mathcal{H}^1(C \cap E_k) : C \text{ es una curva rectificable}\} > 0.$$

El proceso termina en un número finito de etapas si $\{C_k\}_{k=1}^m$ recubre casi todo E , en cuyo caso el resultado se cumple. En caso de que el proceso no termine en un número finito de etapas tenemos que

$$\infty > \mathcal{H}^1(E) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}^1(C_k \cap E),$$

y por tanto $\mathcal{H}^1(C_k \cap E) \rightarrow 0$. Veamos que $\mathcal{H}^1(E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k) = 0$. Por reducción al absurdo supongamos que $\mathcal{H}^1(E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k) > 0$. Entonces existe una curva rectificable C tal que $\mathcal{H}^1(C \cap (E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k)) = d > 0$, pero como $\mathcal{H}^1(C_k \cap E) \rightarrow 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{H}^1(C_N \cap E) < \frac{d}{2}$. Entonces C hubiera sido escogida como C_{N+1} lo cual es una contradicción. Por tanto, $\mathcal{H}^1(E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k) = 0$, y, consecuentemente, E consiste en el Y -conjunto $E \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$ y el conjunto de medida cero $E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$. ■

Por último enunciaremos una caracterización de s -conjuntos regulares para $s \in \mathbb{N}$. Para ello deberemos definir el análogo a los Y -conjuntos para dimensiones mayores que uno, la rectificación numerable.

Definición 3.22. Un s -conjunto, $s \in \mathbb{N}$, de \mathbb{R}^n se dice *numerablemente rectificable* si es de la forma

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} f_k(E_k) \cup G,$$

donde $\mathcal{H}^s(G) = 0$ y f_k es una función lipschitziana que va de un subconjunto acotado E_k de \mathbb{R}^s a \mathbb{R}^n .

Definiremos también el concepto de tangencia para s -conjuntos pues, como veremos, tendrá una gran relevancia.

Definición 3.23. Diremos que el s -conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ tiene *tangente en x en la dirección v* , donde v es un vector unitario, si

$$\bar{D}^s(F, x) > 0,$$

y, para todo ángulo $\phi > 0$,

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{H}^s(F \cap (B(x, r) \setminus S(x, v, \phi)))}{r^s} = 0,$$

donde $S(x, v, \phi)$ es el conjunto de los $y \in \mathbb{R}^n$ tales que $|\langle y - x, v \rangle| \leq \|y - x\| \cos \phi$, como se indica en la Figura 3.2.

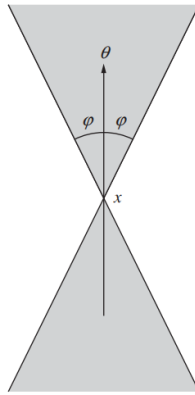


Fig. 3.2. Representación de $S(x, \theta, \phi)$. Imagen obtenida de [12].

Teorema 3.24 ([13, Theorem 3.33]). Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un s -conjunto donde s es un entero. Entonces son equivalentes:

- (1) E es regular.
- (2) E es numerablemente rectificable.
- (3) E tiene tangente en alguna dirección en casi todos sus puntos.

En [13] solo se enuncia el Teorema 3.24. La demostración de la equivalencia de (2) y (3) y la implicación (2) \Rightarrow (1) puede encontrarse en [14]. La demostración de la implicación (1) \Rightarrow (2) puede encontrarse en [24].

3.3. Estructura de conjuntos de dimensión no entera

El resultado para s -conjuntos con s no entero es fácil de enunciar pero difícil de demostrar. Como veremos, tales conjuntos serán siempre irregulares. Demostraremos en este trabajo el caso $0 < s < 1$.

Teorema 3.25 ([13, Theorem 4.2]). *Si E es un s -conjunto con $0 < s < 1$, la densidad $D^s(E, x)$ no existe para casi todo punto de E .*

Demostración. Lo demostraremos por reducción al absurdo. Supongamos pues que existe un subconjunto medible E_1 de E con medida positiva donde la densidad exista. Por el Corolario 3.8 tenemos que $\frac{1}{2} < 2^{-s} \leq D^s(E, x)$ si $x \in E_1$. Por el Teorema de Egoroff [26, Theorem 21.3], podemos encontrar un $r_0 > 0$ y un conjunto de Borel $F \subset E_1$ con $\mathcal{H}^s(F) > 0$ y de forma que

$$\mathcal{H}^s(E \cap B(x, r)) > \frac{1}{2}(2r)^s, \quad (3.4)$$

para todo $x \in F$ y todo $r < r_0$. Sea $y \in F$ un punto de acumulación de F . Sea η un número real tal que $0 < \eta < 1$. Definimos la corona circular $A_{r,\eta} = B(y, r(1 + \eta)) \setminus B(y, r(1 - \eta))$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{H}^s(E \cap A_{r,\eta})}{(2r)^s} &= \frac{\mathcal{H}^s(E \cap B(y, r(1 + \eta))) - \mathcal{H}^s(E \cap B(y, r(1 - \eta)))}{(2r)^s} \\ &\rightarrow D^s(E, y)((1 + \eta)^s - (1 - \eta)^s) \end{aligned} \quad (3.5)$$

cuando $r \rightarrow 0^+$. Como y era un punto de acumulación de F , podemos encontrar, para ciertos valores de r arbitrariamente pequeños, un $x_r \in F$ tal que $|x_r - y| = r$. Por tanto, para dichos valores de r , tenemos que $B(x_r, \frac{r\eta}{2}) \subset A_{r,\eta}$. Consecuentemente, por la desigualdad (3.4), tenemos que

$$\frac{r^s \eta^s}{2} < \mathcal{H}^s(E \cap B(x_r, \frac{r\eta}{2})) \leq \mathcal{H}^s(E \cap A_{r,\eta}),$$

para valores arbitrariamente pequeños de r . Usando la igualdad (3.5) concluimos que

$$2^{-s-1} \eta^s \leq D^s(E, y)((1 + \eta)^s - (1 - \eta)^s) = D(E, y)(2s\eta + O(\eta^2)),$$

cuando $\eta \rightarrow 0^+$. Lo cual es imposible cuando $0 < s < 1$. ■

Corolario 3.26 ([13, Corollary 4.3]). *Cualquier s -conjunto con $0 < s < 1$ es irregular.*

Como habíamos anticipado, el teorema general es el siguiente.

Teorema 3.27 ([13, Theorem 4.12]). *Un s -conjunto de \mathbb{R}^n con $s \notin \mathbb{N}$ es irregular.*

La demostración del Teorema 3.27 puede encontrarse en [23]. Gracias al Teorema 3.27 ya podemos justificar el hecho, que anteriormente calificábamos de intuitivo, de que todo s -conjunto cuya dimensión de Hausdorff, s , sea un real no entero debe ser considerado un fractal.

4. Sistema iterativo de funciones

Muchos fractales tienen una parte que es similar de alguna forma al total. Observamos este fenómeno ya desde los primeros ejemplos con el conjunto de Cantor, la curva de Koch o el triángulo de Sierpinski. Lo importante de esta “autosimilitud” es que nos puede servir no sólo para crear nuevos fractales sino también para poder calcular su dimensión fractal de manera sencilla. Para poder estudiar la autosimilitud fractal, introducimos el concepto de sistema iterativo de funciones.

Definición 4.1. Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado. Una aplicación $S : D \rightarrow D$ se dice que es una *contracción* si existe $r \in (0, 1)$ tal que $|S(x) - S(y)| \leq r|x - y|$ para todo $x, y \in D$.

Definición 4.2. Una familia finita de contracciones $\{S_1, S_2, \dots, S_m\}$, con $m \geq 2$, se llama *sistema iterativo de funciones*, usualmente abreviado como SIF (o IFS por sus siglas en inglés).

Definición 4.3. Un conjunto compacto $F \subset D$ se llama *conjunto invariante* para el SIF $\{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ si

$$F = \bigcup_{\lambda=1}^m S_\lambda(F).$$

Ejemplo 4.4. Sea F el conjunto de Cantor y sean $S_1, S_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas como $S_1(x) = \frac{x}{3}$ y $S_2(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$. Entonces $S_1(F)$ y $S_2(F)$ son respectivamente la mitad de la izquierda y la de la derecha de F y, por tanto, $F = S_1(F) \cup S_2(F)$. Consecuentemente, F es un conjunto invariante para el SIF $\{S_1, S_2\}$.

Nuestro siguiente objetivo será demostrar que el conjunto invariante de un SIF es único. De esta manera, el conjunto invariante queda completamente especificado por el SIF. Para poder demostrar esto introduciremos un espacio métrico completo con el objetivo de aplicar el Teorema del punto fijo de Banach. Empezamos definiendo la distancia de dicho espacio métrico.

Definición 4.5. Sea A un subconjunto de \mathbb{R}^n . Definimos la δ -*vecindad*, A_δ , de A como el conjunto de puntos a distancia menor o igual a δ de A , es decir,

$$A_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| \leq \delta \text{ para algún } a \in A\}.$$

Definición 4.6. Sea \mathcal{S} el conjunto de todos los compactos no vacíos de D . Decimos que la distancia definida sobre \mathcal{S} como

$$d_H(A, B) = \inf\{\delta \geq 0 : A_\delta \subset B \text{ y } B_\delta \subset A\},$$

es la *distancia de Hausdorff*.

Teorema 4.7 ([7, Theorem 2.5.1]). *La distancia de Hausdorff define una métrica sobre \mathcal{S} .*

Demostración. En primer lugar vemos que claramente $d_H(A, B) \geq 0$ y $d_H(A, B) = d_H(B, A)$. Como A y B son compactos están acotados y, por tanto, $d_H(A, B) < +\infty$.

Veamos que $d_H(A, B) = 0$ si y solo si $A = B$. Si $A = B$ para todo $\epsilon > 0$, $A \subset B_\epsilon$ y entonces $d_H(A, B) = 0$. Por otro lado, si $A, B \in \mathcal{S}$ satisfacen $d_H(A, B) = 0$, entonces si $x \in A$ tenemos que, para todo $\epsilon > 0$, $x \in B_\epsilon$. Consecuentemente, $d(x, B) = 0$ y como B es compacto y, por tanto, cerrado, $x \in B$. Luego $A \subset B$. Podemos ver de forma análoga que $B \subset A$ por lo que $A = B$.

Por último veamos que se cumple la desigualdad triangular. Sean $\epsilon > 0$, $A, B, C \in \mathcal{S}$ y $x \in A$. Entonces existen $y \in B$ tal que $|x - y| < d_H(A, B) + \epsilon$ y $z \in C$ tal que $|y - z| < d_H(B, C) + \epsilon$. Por tanto, $|x - z| \leq |x - y| + |y - z| < d_H(A, B) + d_H(B, C) + 2\epsilon$, es decir, A está contenido en la $(d_H(A, B) + d_H(B, C) + 2\epsilon)$ -vecindad de C . De forma análoga vemos que C está contenido en la $(d_H(A, B) + d_H(B, C) + 2\epsilon)$ -vecindad de A . Consecuentemente, $d_H(A, C) \leq d_H(A, B) + d_H(B, C) + 2\epsilon$ para todo $\epsilon > 0$ y por lo tanto $d_H(A, C) \leq d_H(A, B) + d_H(B, C)$. ■

Nuestro objetivo ahora será probar que (\mathcal{S}, d_H) es un espacio métrico completo. Para esto necesitaremos previamente introducir algún concepto de topología en espacios métricos necesario para la demostración.

Definición 4.8. Diremos que un espacio métrico S es *secuencialmente compacto* si cada sucesión de elementos de S tiene por lo menos un punto de acumulación.

Definición 4.9. Sea $r > 0$. Diremos que un subconjunto A de un espacio métrico S es una *r-red* para S si cada punto de S está a una distancia menor o igual a r de un punto de A .

Proposición 4.10 ([7, Proposition 2.3.5]). Sean S un espacio métrico secuencialmente compacto y $r > 0$, entonces S tiene una *r-red* finita.

La demostración de la Proposición 4.10 se puede encontrar en el Apéndice B.

Definición 4.11. Diremos que un espacio métrico S es *compacto de punto límite* si cada subconjunto infinito de S tiene por lo menos un punto de acumulación.

Necesitaremos también el siguiente teorema sobre compacidad en espacios métricos.

Teorema 4.12 ([25, Theorem 28.2]). En espacios métricos la compacidad secuencial, la compacidad de punto límite y la compacidad son equivalentes.

Teorema 4.13 ([7, Theorem 2.5.3]). El espacio métrico (\mathcal{S}, d_H) es un espacio métrico completo.

Demostración. Tenemos que demostrar que cualquier sucesión de Cauchy de \mathcal{S} converge. Supongamos que $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en \mathcal{S} . Sea

$$A = \{x \in D : \exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ tal que } x_n \in A_n \text{ y } x_n \rightarrow x\},$$

vamos a demostrar que $d_H(A_n, A) \rightarrow 0$ y que A es no vacío y compacto.

Empezaremos probando que $d_H(A_n, A) \rightarrow 0$ y que A es no vacío. Sea $\epsilon > 0$. Como $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m, l \geq N$ entonces $d_H(A_m, A_l) < \frac{\epsilon}{2}$. Sea $m > N$,

veamos que $d_H(A_m, A) < \epsilon$. Si $x \in A$, entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_n \in A_n$ y $x_n \rightarrow x$. Entonces, para n suficientemente grande, $d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$. Si $k > N$, entonces existe un $y \in A_m$ tal que $d(x_k, y) < \frac{\epsilon}{2}$. Por tanto, tenemos que $d(y, x) \leq d(y, x_k) + d(x_k, x) < \epsilon$. Consecuentemente, $A \subset N_\epsilon(A_m)$. Para ver que $A_m \subset N_\epsilon(A)$, supongamos $y \in A_m$ y escojamos un sucesión de naturales estrictamente creciente $k_1 < k_2 < \dots$ de forma que $k_1 = m$ y $d_H(A_{k_j}, A_l) < 2^{-j}\epsilon$ para todo $l \geq k_j$. Definimos una sucesión $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ con $y_k \in A_k$ de manera inductiva. Para $k < m$, escogemos $y_k \in A_k$ de manera arbitraria. Escogemos $y_m = y$. Si y_{k_j} ha sido ya escogido y $k_j < k \leq k_{j+1}$, escogemos $y_k \in A_k$ tal que $d(y_{k_j}, y_k) < 2^{-j}\epsilon$. De esta forma $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en D y, como D es cerrado, converge a un valor $x \in D$. Claramente $x \in A$ y además tenemos que $d(y, x) = \lim_{k \rightarrow \infty} d(y, y_k) < \epsilon$ lo que implica que $y \in N_\epsilon(A)$ y, por tanto, $A_m \subset N_\epsilon(A)$. Además, tomando $\epsilon = 1$, vemos que $A \neq \emptyset$.

Por último, veamos que A es compacto. Gracias al Teorema 4.12 esto es equivalente a probar que A es compacto de punto límite. Empezaremos probando que para todo $\epsilon > 0$ existe una ϵ -red finita en A . Sea n tal que $d_H(A_n, A) < \frac{\epsilon}{3}$. Por la Proposición 4.10, tenemos que existe una $\frac{\epsilon}{3}$ -red finita para A_n que denotaremos $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$. Para cada y_i de la $\frac{\epsilon}{3}$ -red existe un $x_i \in A$ tal que $d(y_i, x_i) < \frac{\epsilon}{3}$. Por tanto, el conjunto finito $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ es una ϵ -red para A .

En segundo lugar probaremos que A es un conjunto cerrado. Sea $x \in \bar{A}$, entonces existe una sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de A tal que $d(x, y_n) < 2^{-n}$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, tomamos un $z_n \in A_n$ tal que $d(y_n, z_n) < d_H(A_n, A) + 2^{-n}$. De esta forma tenemos que

$$d(z_n, x) \leq d(z_n, y_n) + d(y_n, x) < d_H(A_n, A) + 2^{-n} + 2^{-n}.$$

Como $d_H(A_n, A) + 2^{-n} + 2^{-n} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, tenemos que $z_n \rightarrow x$ y, por tanto, $x \in A$, luego A es un conjunto cerrado.

Finalmente, veamos que A es un compacto de punto límite. Sea F un subconjunto infinito de A . Sabemos que existe una $\frac{1}{2}$ -red B para A , entonces, por ser F subconjunto de A , todo punto de F está a distancia menor o igual a $\frac{1}{2}$ de algún punto de B . Como F es infinito y B es finito, existe un elemento de B que está a distancia menor o igual que $\frac{1}{2}$ a un número infinito de elementos de F . Sea $F_1 \subset F$ ese conjunto infinito. Como todo elemento de F_1 está a distancia menor o igual que 1 de cualquier otro elemento de F_1 tenemos que $|F_1| \leq 1$. Podemos razonar de manera análoga, escogiendo esta vez una $\frac{1}{4}$ -red de A , y obtener un conjunto infinito $F_2 \subset F_1$ con $|F_2| \leq \frac{1}{2}$. De esta manera podemos obtener una sucesión de conjuntos $\{F_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $|F_k| \leq 2^{-k+1}$ y $F_{k+1} \subset F_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Consideramos ahora una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_k \in F_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Tenemos que $d(x_j, x_k) \leq 2^{-j+1}$ si $j < k$ y, por tanto, la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy y, consecuentemente, converge a un elemento x . Como A es cerrado tenemos que $x \in A$. Por tanto, x es un punto de acumulación de F como queríamos probar. ■

Teorema 4.14 ([12, Theorem 9.1]). *Sea $\{S_1 \dots S_m\}$ un SIF definidas en un subconjunto cerrado $D \subset \mathbb{R}^n$ de forma que para todo $x, y \in D$,*

$$|S_\lambda(x) - S_\lambda(y)| \leq r_\lambda |x - y|,$$

con $r_\lambda \in (0, 1)$ para todo $\lambda \in \{1, \dots, m\}$. Entonces el SIF tiene un único conjunto invariante F .

Además, si denotamos por $S : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ la aplicación

$$S(A) = \bigcup_{n=1}^m S_n(A), \quad (4.1)$$

se cumple que

$$F = \bigcap_{k=0}^{\infty} S^k(E), \quad (4.2)$$

para todo $E \subset D$ compacto, no vacío y tal que $S_\lambda(E) \subset E$ para todo $\lambda \in \{1, \dots, m\}$.

Demostración. Sea \mathcal{S} el conjunto de todos los compactos no vacíos de D y d_H la distancia de Hausdorff sobre \mathcal{S} . Por el Teorema 4.13 sabemos que (\mathcal{S}, d_H) es un espacio métrico completo. Si $A \in \mathcal{S}$, entonces $S(A)$ definido en la igualdad (4.1) es compacto ya que la imagen continua de un compacto es un compacto y la unión finita de compactos también, luego S es en efecto una aplicación de \mathcal{S} en \mathcal{S} . Sea $r = \max\{r_1, \dots, r_m\} < 1$, veamos que S cumple que para todo $A, B \in \mathcal{S}$

$$d_H(S(A), S(B)) \leq r d_H(A, B). \quad (4.3)$$

Sean $q > d_H(A, B)$ y $x \in S(A)$, entonces $x = f_n(x')$ para algún $n \in \{1, \dots, m\}$ y algún $x' \in A$. Como $q > d_H(A, B)$, existe un punto $y' \in B$ tal que $d(x', y') < q$. Entonces el punto $y = f_n(y') \in S(B)$ satisface que $d(x, y) = r_n d(x', y') < r q$. Como esto se cumple para todo punto $x \in S(A)$, tenemos que $S(A)$ está contenido en la $r q$ -vecindad de $S(B)$. Análogamente, vemos que $S(B)$ está contenido en $r q$ -vecindad de $S(A)$. Por tanto $d_H(S(A), S(B)) < r q$, y, como esto es cierto para todo $q > d_H(A, B)$, concluimos que $d_H(S(A), S(B)) \leq r d_H(A, B)$.

Entonces, S es una contracción en un espacio métrico completo y, por el Teorema del punto fijo de Banach, S tiene un único punto fijo, es decir, existe un único conjunto $F \in \mathcal{S}$ que es invariante para el SIF, y, además, $d_H(S^k(E_0), F) \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$ para todo $E_0 \in \mathcal{S}$. En particular si tomamos $E \in \mathcal{S}$ tal que $S_\lambda(E) \subset E$ para todo $\lambda \in \{1, \dots, m\}$, entonces $S(E) \subset E$ y, por tanto, $\{S^k(E)\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de elementos de \mathcal{S} que contienen a F . Consecuentemente, $F = \bigcap_{k=0}^{\infty} S^k(E)$. ■

Una vez sabemos que el conjunto invariante de un SIF es único, surgen dos problemas. El primero, que comentaremos a continuación, consiste en, dado un SIF, encontrar su conjunto invariante y el segundo, que abordaremos en el Capítulo 5, consiste en, dado un conjunto, encontrar un SIF del que sea conjunto invariante. Para el primer problema, utilizaremos la segunda parte del Teorema 4.14, pues la aplicación S , definida en la igualdad (4.1), es clave para poder computar el conjunto invariante de un SIF. Como vimos en la demostración de dicho teorema, la sucesión $\{S^k(E)\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge a F respecto a la distancia de Hausdorff y, por tanto, se trata de una sucesión de aproximaciones del fractal F cada vez mejores. Para todo $k \in \mathbb{N}$

$$S^k(E) = \bigcup_{I_k} S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(E) = \bigcup_{I_k} S_{i_1}(S_{i_2}(\dots(S_{i_k}(E)\dots))), \quad (4.4)$$

donde la unión se toma sobre el conjunto I_k de todas la k -uplas (i_1, \dots, i_k) con $i_j \in \{1, \dots, m\}$. Si $S_\lambda(E) \subset E$ para todo $\lambda \in \{1, \dots, m\}$, y $x \in F$, podemos definir la aplicación

$$\Phi : \{(i_1, i_2, \dots) : i_j \in \{1, \dots, m\}\} \rightarrow F \quad (4.5)$$

que hace corresponder (i_1, i_2, \dots) con $x_{i_1, i_2, \dots} := \bigcap_{k=1}^{\infty} S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(E)$. Además Φ es sobreyectiva ya que, por la igualdad (4.2), cualquier elemento de F está contenido en $S^k(E)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y entonces, por la igualdad (4.4), se cumple que, para todo $k \in \mathbb{N}$, existe una secuencia $(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{I}_k$ tal que $x \in S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(E)$. Además, la expresión $x_{i_1, i_2, \dots}$ no depende del conjunto E escogido siempre y cuando se cumpla que $S_\lambda(E) \subset E$ para todo $\lambda \in \{1, \dots, m\}$ [12, Chapter 9].

De todo esto podemos extraer dos métodos para aproximar conjuntos invariantes computacionalmente. El primer método consiste en escoger un conjunto inicial cualquiera y dibujar la aproximación k -ésima $S^k(E)$. Este es, por ejemplo, el método usado en la Figura 1.3.

El segundo método se denomina “juego del caos” (“chaos game” en inglés). Consiste en crear una sucesión de puntos de la siguiente manera: tomamos un punto inicial x_0 cualquiera, seleccionamos, de manera aleatoria, una contracción S_{i_1} del SIF y definimos x_1 como $S_{i_1}(x_0)$. Continuamos de esta forma seleccionando un S_{i_k} y definiendo $x_k = S_{i_k}(x_{k-1})$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Ilustramos este proceso en la Figura 4.1. Para más detalles sobre este método se puede consultar [28, Chapter 6].

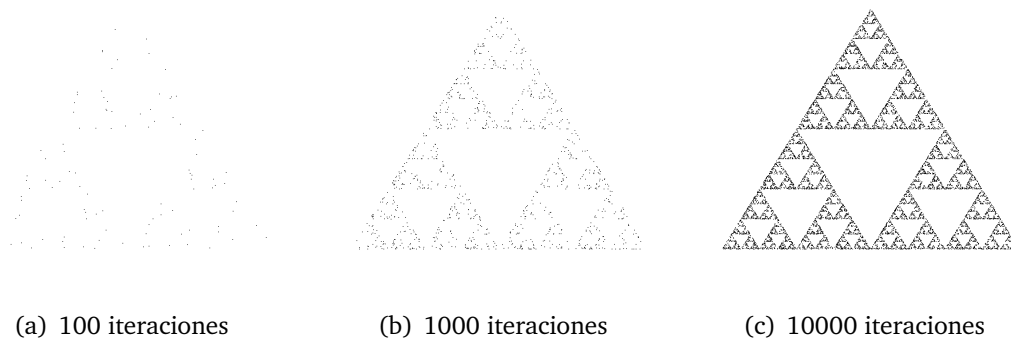


Fig. 4.1. Primeras iteraciones del juego del caos asociado al triángulo de Sierpinski.

4.1. Autosimilitud. Dimensión de conjuntos autosimilares

Retornamos al estudio de la autosimilitud. Para ello, nos centraremos en el caso de los SIF en los que los S_λ sean *similitudes*, es decir, que cumplen que para todo $x, y \in D$

$$|S_\lambda(x) - S_\lambda(y)| = r_\lambda |x - y|,$$

con $r_\lambda \in (0, 1)$ para todo λ . Diremos que r_λ es la *proporción* de la similitud S_λ . Observamos que se deduce directamente de la definición que cualquier similitud es inyectiva.

Definición 4.15. Diremos que el conjunto invariante de un SIF de similitudes es un conjunto *exactamente autosimilar* o, simplemente, *autosimilar*.

Coméntabamos al principio del capítulo que la autosimilitud era útil para calcular la dimensión fractal. Comenzaremos ahora a introducir resultados para llegar a este objetivo.

Proposición 4.16 ([7, Theorem 4.1.1]). Sea $\{r_k\}_{k=1}^m$ un conjunto de números reales tales que $r_k \in (0, 1)$ para todo $1 \leq k \leq m$. Entonces existe un único $s \in \mathbb{R}^+$ tal que $\sum_{k=1}^m r_k^s = 1$.

Demostración. Consideramos la función $\Phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ definida por

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^m r_k^x.$$

Entonces Φ es una función continua que cumple que $\Phi(0) = m \geq 1$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x) = 0 < 1$. Por tanto, en virtud del Teorema de los Valores Intermedios, existe por lo menos un s tal que $\Phi(s) = 1$. La derivada de Φ es

$$\sum_{k=1}^m r_k^x \log(r_k),$$

que es estrictamente menor que cero. Luego Φ es estrictamente decreciente y por tanto s es la única solución de $\Phi(x) = 1$. ■

Definición 4.17. Sea F el conjunto invariante del SIF $\{S_1, \dots, S_m\}$ tales que S_k es una similitud de proporción $r_k \in (0, 1)$ para todo $1 \leq k \leq m$. Diremos que el único número real s que cumple que

$$\sum_{k=1}^m r_k^s = 1,$$

es la *dimensión de similitud* de F .

Observamos que un mismo conjunto F puede ser el conjunto invariante de dos SIF distintos dando lugar a dos posibles dimensiones de similitud. Por ejemplo el intervalo $[0, 1]$ se puede obtener por un lado como la unión de $[0, \frac{1}{2}]$ y $[\frac{1}{2}, 1]$ ambos obtenidos de $[0, 1]$ a través de similitudes de proporción $\frac{1}{2}$, lo que daría a una dimensión de similitud de 1. Sin embargo, $[0, 1]$ también se puede obtener como la unión de los intervalos $[0, \frac{2}{3}]$ y $[\frac{1}{3}, 1]$, ambos obtenidos a través de similitudes de proporción $\frac{2}{3}$ que inducirían una dimensión de similitud estrictamente mayor que 1. Intuitivamente este ejemplo nos hace pensar que para que la dimensión de similitud dependa solo del conjunto habría que limitar el solapamiento de los intervalos. Veremos a continuación que en efecto esto es así pues, bajo ciertas hipótesis que nos limiten este solapamiento, la dimensión de similitud será la misma que la dimensión de Hausdorff.

Definición 4.18. Diremos que un SIF $\{S_1, \dots, S_m\}$ satisface la *condición del conjunto abierto* si existe un conjunto no vacío, abierto y acotado V tal que

$$\bigsqcup_{k=1}^m S_k(V) \subset V,$$

siendo esta unión una unión disjunta.

Vamos a probar que si un SIF cumple la condición del conjunto abierto, entonces la dimensión de similitud es la misma que la dimensión de Hausdorff. Para ello necesitamos un par de resultados previos.

Lema 4.19 ([12, Lemma 9.2]). Sean $a_1, a_2 > 0$. Sea $\{V_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una colección de abiertos disjuntos de \mathbb{R}^n tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$, V_k contiene una bola de radio $a_1 r$ y está contenido en una bola de radio $a_2 r$. Entonces cualquier bola B de radio r interseca como mucho a $(1 + 2a_2)^n a_1^{-n}$ elementos de $\{\overline{V}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$.

Demostración. Sea B una bola de radio r , veamos que, como mucho, interseca a $(1 + 2a_2)^n a_1^{-n}$ elementos de $\{\overline{V}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Si B no interseca a ningún elemento de $\{\overline{V}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ entonces el resultado se cumple trivialmente. Podemos suponer entonces que B interseca por lo menos a un conjunto de $\{\overline{V}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Sea V_{k_0} con $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $B \cap \overline{V}_{k_0} \neq \emptyset$. Tenemos que, como V_{k_0} está contenido en una bola de radio $a_2 r$, V_{k_0} está contenida en cualquier bola centrada en un punto de \overline{V}_{k_0} y de radio $2a_2 r$. Deducimos que \overline{V}_{k_0} está contenido en una bola concéntrica con B y de radio $(1 + 2a_2)r$ que denotaremos A . Supongamos que el número de conjuntos pertenecientes a $\{\overline{V}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ que intersecan a B es igual a $q \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Como hemos visto, si un elemento de $\{\overline{V}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ interseca a B , entonces está contenido en A , por tanto, puesto que los elementos de $\{\overline{V}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ son disjuntos, contienen cada uno una bola de radio $a_1 r$ y A es un conjunto acotado, $q \in \mathbb{N}$. Denotaremos los q conjuntos que intersecan a B como $\{\overline{V}_{k_1}, \dots, \overline{V}_{k_q}\}$. Como para todo $1 \leq i < j \leq q$, V_{k_i} y V_{k_j} son disjuntos, tenemos que el volumen n -dimensional de la unión de las bolas de radio $a_1 r$ contenidas en cada $\{V_{k_i}\}_{1 \leq i \leq q}$ es igual a $q(a_1 r)^n$. Como $\bigcup_{i=1}^q \overline{V}_{k_i} \subset A$, tenemos que $q(a_1 r)^n \leq (1 + 2a_2)^n r^n$ y, consecuentemente, $q \leq (1 + 2a_2)^n a_1^{-n}$ como queríamos probar. ■

Proposición 4.20 ([12, Mass distribution principle 4.2]). Sea μ una medida exterior definida sobre los subconjuntos de un conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ tal que $0 < \mu(F) < \infty$. Si para algún $s > 0$ existen dos constantes positivas c y ϵ tales que

$$\mu(U) \leq c|U|^s,$$

para todo U tal que $|U| \leq \epsilon$, entonces $\mathcal{H}^s(F) \geq \frac{\mu(F)}{c}$ y, por tanto, $s \leq \dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F$.

Demostración. Sea $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un ϵ -recubrimiento de F , entonces

$$0 < \mu(F) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n) \leq c \sum_{n=1}^{\infty} |U_n|^s.$$

Tomando ínfimos, tenemos que $\mathcal{H}_\delta^s(F) \geq \frac{\mu(F)}{c}$ para $\delta \in (0, \epsilon)$. Por tanto $\mathcal{H}^s(F) \geq \frac{\mu(F)}{c}$ y, como $\mu(F) > 0$, $\dim_H F \geq s$. ■

Para los siguientes resultados necesitaremos introducir notación sobre secuencias de índices.

Notación 4.21. Sea $\{S_1, \dots, S_m\}$ un SIF compuesto por similitudes de proporción $\{r_1, \dots, r_m\}$. Empezamos recordando que denotamos por $x_{i_1, i_2, \dots} = \bigcap_{k=1}^{\infty} S_{i_k} \circ \dots \circ S_{i_1}(E)$ y \mathcal{I}_k el conjunto de todas las k -uplas (i_1, \dots, i_k) donde $i_j \in \{1, \dots, m\}$ para todo $j \in \{1, \dots, k\}$. Además, denotaremos por

- (1) \mathcal{I} el conjunto de las sucesiones de índices entre 1 y m .

- (2) $\mathcal{S}_{i_1, \dots, i_k}$, al subconjunto de \mathcal{S} en el que los k primeros términos de cada sucesión sean (i_1, \dots, i_k) .
- (3) $A_{i_1, \dots, i_k} = S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(A)$, donde A es un conjunto cualquiera y $(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{S}_k$.

Lema 4.22 ([12, Theorem 9.3]). Sean $\{S_1, \dots, S_m\}$ un SIF compuesto por similitudes de proporción $\{r_1, \dots, r_m\}$, F su único conjunto invariante y s su dimensión de similitud. Supongamos que se satisface la condición del conjunto abierto. Entonces la aplicación $\tilde{\mu}$ definida sobre los subconjuntos de F por

$$\tilde{\mu}(A) = \mu(\{(i_1, i_2, \dots) \in \mathcal{S} : x_{i_1, i_2, \dots} \in A\}),$$

donde $A \subset F$ y μ es la medida exterior sobre el conjunto \mathcal{S} construida por el Método I mediante la función $\mathbf{c}(\mathcal{S}_{i_1, \dots, i_k}) = (r_{i_1} \cdots r_{i_k})^s$, es una medida exterior que está en las condiciones de la Proposición 4.20.

Demostración. En primer lugar, veamos que $\tilde{\mu}$ es una medida exterior sobre los subconjuntos de F . Sea $\Phi : \mathcal{S} \rightarrow F$ la aplicación sobreyectiva definida en (4.5). De esta forma, si $A \subset F$, $\tilde{\mu}(A) = \mu(\Phi^{-1}(A))$. Por tanto, $\tilde{\mu}(\emptyset) = \mu(\Phi^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$. Si $A \subset B$, entonces $\Phi^{-1}(A) \subset \Phi^{-1}(B)$ y, consecuentemente, $\tilde{\mu}(A) = \mu(\Phi^{-1}(A)) \leq \mu(\Phi^{-1}(B)) = \tilde{\mu}(B)$. Por último, si $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una colección numerable de subconjuntos de F , entonces $\tilde{\mu}(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \mu(\Phi^{-1}(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)) = \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} \Phi^{-1}(A_k)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\Phi^{-1}(A_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\mu}(A_k)$.

Veamos que $\tilde{\mu}$ está en las condiciones de la Proposición 4.20. En primer lugar, veamos que $0 < \tilde{\mu}(F) < \infty$, observamos que $\tilde{\mu}(F) = \mu(\Phi^{-1}(F)) = \mu(\mathcal{S})$ por ser Φ sobreyectiva. Por las propiedades de una medida exterior construida por el Método I tenemos que $\mu(\mathcal{S}) = \mu(\bigcup_{\lambda=1}^m \mathcal{S}_\lambda) \leq \sum_{\lambda=1}^m \mu(\mathcal{S}_\lambda) \leq \sum_{\lambda=1}^m \mathbf{c}(\mathcal{S}_\lambda) = \sum_{\lambda=1}^m r_\lambda^s = 1$. De hecho, utilizando que $(r_{i_1} \cdots r_{i_k})^s = \sum_{\lambda=1}^m (r_{i_1} \cdots r_{i_k} r_\lambda)^s$ se puede demostrar que $\mu(\mathcal{S}) = 1$, los detalles se pueden consultar en [7, Theorem 5.5.4].

En segundo lugar, veamos que existe una constante q tal que $\tilde{\mu}(U) \leq |U|^s q$ para todo $U \subset F$ tal que $|U| < 1$. Sea B cualquier bola de radio $r < 1$, buscaremos una cota de $\tilde{\mu}(B)$. Sea V un conjunto abierto que satisfaga la condición del conjunto abierto, vamos a recubrir $F \cap B$ con unos ciertos subconjuntos de V de la forma V_{i_1, \dots, i_k} y después estimar la medida de estos subconjuntos. El reto es encontrar un conjunto de secuencias de índices (i_1, \dots, i_k) lo suficientemente bueno.

Definimos un nuevo conjunto \mathcal{Q} a partir de los elementos de \mathcal{S} . Para cada $(i_1, i_2, \dots) \in \mathcal{S}$, sea i_k el primer elemento que cumpla que

$$r_{i_1} \cdots r_{i_k} \leq r. \quad (4.6)$$

Observamos que entonces también se cumple que

$$\left(\min_{1 \leq i \leq m} r_i \right) r \leq r_{i_1} \cdots r_{i_k} \quad (4.7)$$

ya que $r_{i_1} \cdots r_{i_k} \leq r < r_{i_1} \cdots r_{i_{k-1}}$ implica que $(\min_{1 \leq i \leq m} r_i) r \leq r r_{i_k} < r_{i_1} \cdots r_{i_{k-1}} r_{i_k}$.

Sea \mathcal{Q} el conjunto de todas las secuencias finitas obtenidas de esta forma. Para cada $(i_1, i_2, \dots) \in \mathcal{S}$, existe un único $k \in \mathbb{N}$ tal que $(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{Q}$. Observamos que si $(i_1, \dots, i_k) \in$

\mathcal{Q} , entonces no existe ningún otro elemento en \mathcal{Q} cuyos k primeros términos sean i_1, \dots, i_k en ese orden.

Probaremos ahora que $\bigcup_{q \in \mathcal{Q}} \bar{V}_q$ es un recubrimiento de F , para ello veamos que

$$F = \bigcup_{q \in \mathcal{Q}} F_q \subset \bigcup_{q \in \mathcal{Q}} \bar{V}_q. \quad (4.8)$$

En primer lugar, por satisfacer la condición del conjunto abierto, tenemos que $\bigcup_{k=1}^m S_k(\bar{V}) \subset \bar{V}$ y, por el Teorema 4.14, tenemos que $F = \bigcap_{k=0}^{\infty} S^k(\bar{V})$. Por tanto, $F \subset \bar{V}$ y $F_{i_1, \dots, i_k} \subset \bar{V}_{i_1, \dots, i_k}$ para toda secuencia finita (i_1, \dots, i_k) . En particular, $\bigcup_{q \in \mathcal{Q}} F_q \subset \bigcup_{q \in \mathcal{Q}} \bar{V}_q$.

Probemos la primera igualdad de la ecuación (4.8). En primer lugar, observamos que el elemento de \mathcal{Q} obtenido a partir de la sucesión constante $(\min_{1 \leq i \leq m} r_i, \min_{1 \leq i \leq m} r_i, \dots)$ es de longitud maximal en \mathcal{Q} . Supongamos que la longitud de dicho elemento de \mathcal{Q} es igual a $K \in \mathbb{N}$. Esto quiere decir que si $q \in \mathcal{Q}$ tenemos que q es una k -upla con $k \leq K$. Sea \mathcal{Q}^K el subconjunto de \mathcal{Q} formado por todas las K -uplas de \mathcal{Q} . Sea $(i_1, i_2, \dots, i_K) \in \mathcal{Q}^K$, entonces, por definición de \mathcal{Q} , $r_{i_1} r_{i_2} \cdots r_{i_{K-1}} > r$. Por tanto, $(i_1, i_2, \dots, i_{K-1}, j) \in \mathcal{Q}^K$ para todo $j \in \{1, \dots, m\}$. Consideramos la partición de \mathcal{Q}^K formada por la relación de equivalencia

$$(i_1, i_2, \dots, i_{K-1}, i_K) \sim_K (j_1, j_2, \dots, j_{K-1}, j_K) : \Leftrightarrow (i_1, i_2, \dots, i_{K-1}) = (j_1, j_2, \dots, j_{K-1}).$$

De esta forma, todos los elementos de una clase de equivalencia tienen los $K-1$ primeros términos iguales. Entonces, por lo comentado anteriormente, cada clase de equivalencia está formada por m K -uplas cuyos K -ésimos términos son $\{1, \dots, m\}$. Sea $\{q_1, q_2, \dots, q_m\} = \{(i_1, \dots, i_{K-1}, 1), \dots, (i_1, \dots, i_{K-1}, m)\}$ una de las clases de equivalencia, utilizando que $F = \bigcup_{i=1}^m F_i$ tenemos que $F_{i_1, \dots, i_{K-1}} = \bigcup_{j=1}^m F_{q_j}$. Aplicando esto a todas las clases de equivalencia obtenemos que $\bigcup_{q \in \mathcal{Q}_1} F_q = \bigcup_{q \in \mathcal{Q}} F_q$ donde \mathcal{Q}_1 es el conjunto obtenido a partir de \mathcal{Q} de la siguiente manera:

- (1) Si $q \notin \mathcal{Q}^K$ entonces $q \in \mathcal{Q}_1$,
- (2) Por cada clase de equivalencia $\{q_1, q_2, \dots, q_m\} = \{(i_1, \dots, i_{K-1}, 1), \dots, (i_1, \dots, i_{K-1}, m)\}$ tenemos que $(i_1, \dots, i_{K-1}) \in \mathcal{Q}_1$.

El conjunto \mathcal{Q}_1 está formado por k -uplas con $k \leq K-1$ y, nuevamente, si $(i_1, i_2, \dots, i_{K-1}) \in \mathcal{Q}_1$ tenemos que $r_{i_1} r_{i_2} \cdots r_{i_{K-2}} > r$, y, por tanto, $(i_1, i_2, \dots, i_{K-1}, j) \in \mathcal{Q}_1$ para todo $j \in \{1, \dots, m\}$. Luego podemos considerar el conjunto \mathcal{Q}^{K-1} formado por todas las $(K-1)$ -uplas de \mathcal{Q}_1 y la relación de equivalencia sobre \mathcal{Q}^{K-1}

$$(i_1, i_2, \dots, i_{K-2}, i_{K-1}) \sim_{K-1} (j_1, j_2, \dots, j_{K-2}, j_{K-1}) \Leftrightarrow (i_1, i_2, \dots, i_{K-2}) = (j_1, j_2, \dots, j_{K-2}).$$

Así, obtenemos de manera análoga un conjunto \mathcal{Q}_2 tal que $\bigcup_{q \in \mathcal{Q}_2} F_q = \bigcup_{q \in \mathcal{Q}_1} F_q$. Siguiendo este razonamiento llegaremos a obtener un conjunto \mathcal{Q}_{K-1} formado por m 1-uplas distintas (es decir, $\mathcal{Q}_{K-1} = \{(1), (2), \dots, (m)\}$) tal que $\bigcup_{q \in \mathcal{Q}_{K-1}} F_q = \bigcup_{q \in \mathcal{Q}_1} F_q$. Utilizando nuevamente $F = \bigcup_{i=1}^m F_i$, tenemos que $F = \bigcup_{i=1}^m F_i = \bigcup_{q \in \mathcal{Q}_{K-1}} F_q = \bigcup_{q \in \mathcal{Q}} F_q$.

Aplicaremos el Lema 4.19 a una subcolección de $\{V_{i_1, \dots, i_k} : (i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{Q}\}$ que definiremos más adelante. No obstante, vamos a demostrar que la colección $\{V_{i_1, \dots, i_k} : (i_1, \dots, i_k) \in$

\mathcal{Q} cumple las hipótesis del lema y, por tanto, cualquier subcolección también las cumplirá. Como V cumple la condición del conjunto abierto, los conjuntos V_1, \dots, V_m son disjuntos. Entonces, como cualquier par de secuencias de \mathcal{Q} difieren por lo menos en un elemento y los S_i son inyectivos, la colección de conjuntos abiertos $\{V_{i_1, \dots, i_k} : (i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{Q}\}$ es disjunta. Probaremos ahora que cumple también la segunda hipótesis del Lema 4.19, para ello escogemos a_1 y a_2 de forma que V contenga a una bola de radio a_1 y esté contenido en una bola de radio a_2 . Entonces, para todo $(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{Q}$ el conjunto V_{i_1, \dots, i_k} contiene una bola de radio $r_{i_1} \cdots r_{i_k} a_1$ y, por la desigualdad (4.7), también una bola de radio $(\min_{1 \leq i \leq m} r_i) a_1 r$. Por otro lado, V_{i_1, \dots, i_k} está contenido en una bola de radio $r_{i_1} \cdots r_{i_k} a_2$ y, por la desigualdad (4.6), también en una bola de radio $a_2 r$.

Denotaremos por \mathcal{R} el conjunto de las secuencias $q \in \mathcal{Q}$ tales que B interseca a \bar{V}_q . Por el Lema 4.19, tenemos que hay, como mucho, $q = (1 + 2a_2)^n a_1^{-n} (\min_{1 \leq i \leq m} r_i)^{-n}$ elementos en \mathcal{R} .

Ya estamos en condiciones de estimar $\tilde{\mu}(B)$ usando lo demostrado hasta ahora. Tenemos que

$$\tilde{\mu}(B) = \tilde{\mu}(F \cap B) = \mu\{(i_1, i_2, \dots) \in \mathcal{I} : x_{i_1, i_2, \dots} \in F \cap B\} \leq \tilde{\mu} \left\{ \bigcup_{\mathcal{R}} \mathcal{I}_{j_1, \dots, j_k} \right\},$$

ya que, por la ecuación (4.8) y la definición de \mathcal{R} , si $x_{i_1, i_2, \dots} \in F \cap B \subset \bigcup_{\mathcal{R}} \bar{V}_{j_1, \dots, j_k}$, entonces existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{R}$. Por tanto,

$$\tilde{\mu}(B) \leq \sum_{q \in \mathcal{R}} \mu(\mathcal{I}_q) \leq \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{R}} (r_{i_1} \cdots r_{i_k})^s \leq \sum_{\mathcal{R}} r^s \leq r^s q,$$

usando la desigualdad (4.6). Como cualquier conjunto U está contenido en una bola de radio $|U|$, tenemos que $\tilde{\mu}(U) \leq |U|^s q$. \blacksquare

Teorema 4.23 ([12, Theorem 9.3]). *Sea $\{S_1 \dots S_m\}$ un SIF de similitudes. Si S_λ satisface la condición del conjunto abierto para todo λ y F es el conjunto invariante del SIF, se cumple que $\dim_H(F) = \dim_B(F) = s$ donde s es la dimensión de similitud, es decir, el número real que cumple que*

$$\sum_{\lambda=1}^m r_\lambda^s = 1. \quad (4.9)$$

Además, para este valor de s , se cumple que $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$.

Demostración. Sea s la dimensión de similitud de F . Aplicando sucesivamente la Definición 4.3 obtenemos que $F = \bigcup_{q \in \mathcal{I}_k} F_q$. Como la aplicación $S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(A)$ es una similitud de proporción $r_{i_1} \cdots r_{i_k}$ tenemos, por la igualdad (4.9), que

$$\sum_{q \in \mathcal{I}_k} |F_q|^s = \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{I}_k} (r_{i_1} \cdots r_{i_k})^s |F|^s = \left(\sum_{i_1=1}^m r_{i_1}^s \right) \cdots \left(\sum_{i_k=1}^m r_{i_k}^s \right) |F|^s = |F|^s.$$

Para todo $\delta > 0$, podemos escoger un $k \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande como para que $|F_{i_1, \dots, i_k}| \leq (\max_{1 \leq i \leq k} \{r_i\})^k |F|^k \leq \delta$. De esta manera, para todo $\delta > 0$, $\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq |F|^s$ y, por tanto, $\mathcal{H}^s(F) \leq |F|^s$. Consecuentemente, $\dim_H F \leq s$.

Probemos ahora la desigualdad contraria, para ello consideramos la medida $\tilde{\mu}$ definida en el Lema 4.22. Hemos visto en la demostración anterior que $\tilde{\mu}$ cumple que $\tilde{\mu}(U) \leq |U|^s q$ para cierto $q > 0$. Entonces, por la Proposición 4.20 tenemos que $\mathcal{H}^s(F) \geq q^{-1} > 0$, lo que implica que $\dim_H F \geq s$.

Veamos ahora que $\overline{\dim}_B F \leq s$. Sea $r < 1$ y \mathcal{Q} definido como en la demostración del Lema 4.22. Con un argumento análogo a la demostración de la igualdad en la ecuación (4.8) y usando la misma notación podemos construir una secuencia de conjuntos $\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_{K-1}$ tales que

$$\sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{Q}} (r_{i_1} \cdots r_{i_k})^s = \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{Q}_1} (r_{i_1} \cdots r_{i_k})^s = \dots = \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{Q}_{K-1}} (r_{i_1} \cdots r_{i_k})^s,$$

usando la igualdad (4.9) en cada una de las clases de equivalencia. Así, tenemos que

$$\sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{Q}} (r_{i_1} \cdots r_{i_k})^s = \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{Q}_{K-1}} (r_{i_1} \cdots r_{i_k})^s = \sum_{i=1}^m r_i^s = 1,$$

usando nuevamente la igualdad (4.9). Por tanto, podemos deducir, gracias a la desigualdad (4.7), que \mathcal{Q} tiene, como mucho, $(\min_{1 \leq i \leq m} r_i)^{-s} r^{-s}$ elementos. Para cada $(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{Q}$ tenemos, por la desigualdad (4.6), que $|\overline{V}_{i_1, \dots, i_k}| = r_{i_1} \cdots r_{i_k} |V| \leq r |V|$. Entonces, por la ecuación (4.8), tenemos que $\bigcup_{\mathcal{Q}} \overline{V}_{i_1, \dots, i_k}$ es un recubrimiento de F con un máximo de $(\min_{1 \leq i \leq m} r_i)^{-s} r^{-s}$ elementos. Por tanto,

$$\begin{aligned} \overline{\dim}_B F &= \limsup_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\log (\min_{1 \leq i \leq m} r_i)^{-s} r^{-s}}{-\log(r|V|)} \\ &= \limsup_{\delta \rightarrow 0^+} s \frac{\log (\min_{1 \leq i \leq m} r_i) + \log r}{\log r + \log |V|} = s. \end{aligned}$$

Por la Proposición 2.45 tenemos que $s = \dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F \leq s$, lo que concluye la demostración. ■

El Teorema 4.23 nos permite calcular la dimensión de muchos fractales autosimilares de forma sencilla. En particular si un SIF formado por m similitudes todas de proporción r cumple la condición del conjunto abierto, entonces la dimensión del conjunto invariante será $\frac{\log m}{-\log r}$.

Ejemplo 4.24. Sea F el triángulo de Sierpinski. Entonces $\dim_H = \dim_B = \frac{\log 3}{\log 2}$.

En la notación del Ejemplo 1.3, F es el conjunto invariante de tres similitudes que llevan el triángulo E_0 a los triángulos de E_1 . La condición del conjunto abierto se cumple tomando V como el interior de E_0 . Por tanto, por el Teorema 4.23, $\dim_H = \dim_B = \frac{\log 3}{\log 2}$.

De manera análoga, obtenemos fácilmente que la dimensión de Hausdorff de la curva de Koch es $\frac{\log 4}{\log 3}$ y la del conjunto de Cantor $\frac{\log 2}{\log 3}$.

5. Aplicaciones

Nos centraremos en lo que resta del trabajo en comentar alguna de las aplicaciones de los fractales. Empezaremos comentando el problema, que habíamos dejado en el aire en el capítulo anterior, de, dado un conjunto, encontrar un SIF del que sea conjunto invariante. Esto nos conducirá a una aplicación sobre la comprensión de imágenes. En segundo lugar, presentaremos algunos ejemplos sencillos de fractales que aparecen trabajando con sistemas dinámicos. Por último, terminaremos recopilando otras aplicaciones.

5.1. Teorema del collage. Aplicación a la compresión de imágenes

Anteriormente dejamos en el aire el problema de, dado un conjunto cualquiera, encontrar un SIF del que sea conjunto invariante. Los siguientes resultados aseguran la existencia de un SIF cuyo conjunto invariante sea razonablemente parecido al conjunto deseado.

Teorema 5.1 ([12, Theorem 9.13] Teorema del collage). *Sea $\{S_1, \dots, S_m\}$ un SIF sobre $D \subset \mathbb{R}^n$ tal que $|S_k(x) - S_k(y)| \leq c|x - y|$ con $c < 1$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ y todo $1 \leq k \leq m$. Sea $E \subset D$ un conjunto compacto no vacío. Entonces*

$$d_H(E, F) \leq \frac{1}{(1-c)} d_H\left(E, \bigcup_{k=1}^m S_k(E)\right),$$

donde F es el conjunto invariante del SIF

Demostración. Usando la desigualdad triangular, la definición de conjunto invariante y la desigualdad (4.3) tenemos que

$$\begin{aligned} d_H(E, F) &\leq d_H\left(E, \bigcup_{k=1}^m S_k(E)\right) + d_H\left(\bigcup_{k=1}^m S_k(E), F\right) \\ &= d_H\left(E, \bigcup_{k=1}^m S_k(E)\right) + d_H\left(\bigcup_{k=1}^m S_k(E), \bigcup_{k=1}^m S_k(F)\right) \\ &\leq d_H\left(E, \bigcup_{k=1}^m S_k(E)\right) + cd_H(E, F), \end{aligned}$$

de lo que se deduce el resultado. ■

Corolario 5.2 ([12, Corollary 9.14]). *Sean $E \subset \mathbb{R}^n$ compacto y no vacío y $\delta > 0$, entonces existe un SIF de similitudes $\{S_1, \dots, S_m\}$ tal que su conjunto invariante F cumple que $d_H(E, F) \leq \delta$.*

Demostración. Sea B_1, \dots, B_m una colección de bolas que recubran E de forma que tengan sus centros en E y sus radios sean menores o iguales que $\frac{\delta}{4}$. Entonces $E \subset \bigcup_{k=1}^m B_k \subset E_{\frac{\delta}{4}}$. Para todo $k \in \{1, \dots, m\}$, sea S_k una similitud de proporción menor que $\frac{1}{2}$ tal que $S_k(E) \subset B_k$. Entonces $S_k(E) \subset B_k \subset (S_k(E))_{\frac{\delta}{2}}$, y por lo tanto tenemos que $(\bigcup_{k=1}^m S_k(E)) \subset E_{\frac{\delta}{4}}$ y $E \subset \bigcup_{k=1}^m (S_k(E))_{\frac{\delta}{2}}$. Por la definición de distancia de Hausdorff tenemos que $d_H(E, \bigcup_{k=1}^m S_k(E)) \leq \frac{\delta}{2}$. Luego, por el Teorema 5.1, concluimos que $d_H(E, F) < \delta$, donde F es el conjunto invariante del SIF $\{S_1, \dots, S_m\}$. ■

Esto tiene una evidente aplicación directa a la comprensión de imágenes. Por ejemplo, en la Figura 5.1 representamos lo que podría ser la hoja de una planta como el conjunto invariante de un SIF. En general, el método propuesto en la demostración del Corolario 5.2 no es el más eficiente pues no tiene en cuenta las posibles autosimilitudes del conjunto. Para más detalles sobre el uso de SIF para representar imágenes puede consultarse [28].



Fig. 5.1. La hoja de Barnsley. Se trata de un conjunto invariante de cuatro similitudes afines [31].

5.2. Sistemas dinámicos

El estudio de sistemas dinámicos es una parte importante de la matemática actual debido a sus aplicaciones en diversas disciplinas científicas. Se trata por tanto de un tema muy extenso y no pretenderemos meternos con profundidad. Por contra, comentaremos ejemplos sencillos en los que los fractales juegan un papel importante. Para ampliar información sobre los temas que vamos a tratar o sobre la relación entre fractales y sistemas dinámicos en general pueden consultarse [12, 18, 28, 29].

Sea X un conjunto cualquiera y f una aplicación de X en sí mismo. Pensaremos un elemento de X como una configuración particular de un sistema, de esta forma f codifica la regla mediante la cual el sistema evoluciona de un estado al siguiente. Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ y $f : D \rightarrow D$ una aplicación de D en sí mismo. Sea $x \in D$, como la imagen $f(x)$ sigue perteneciendo a D , podemos volver a tomar su imagen por f , es decir, $f(f(x))$ que denotaremos por $f^2(x)$. De

esta forma, podemos seguir iterando $f^3(x) = f(f(f(x)))$ y, en general, $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$ para $n \in \mathbb{N}$.

Definición 5.3. Sea $f : D \rightarrow D$ una aplicación y $x \in D$, diremos que $\{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es la *órbita* de x .

En general estaremos interesados en el comportamiento de un órbita $\{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ cuando n sea grande. Como comprobaremos visualmente en el siguiente apartado, puede que $f^n(x)$ converja a un punto fijo w , esto es, un punto tal que $f(w) = w$. Más en general, podría suceder que $\{f^k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ converja a una órbita periódica de p puntos $\{w, f(w), \dots, f^{p-1}(w)\}$, donde p es el menor entero tal que $f^p(w) = w$, en el sentido que $|f^k(x) - f^k(w)| \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$. No obstante, en algunas situaciones, $\{f^k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ parece moverse de forma aparentemente aleatoria, esto puede ser debido a un conjunto invariante fractal, también llamado *atractor extraño*. En este contexto llamaremos *atractor* a un subconjunto cerrado F de D que sea invariante por f , es decir, $f(F) = F$, y que cumpla que la distancia de $f^k(x)$ a F tienda a 0 cuando $k \rightarrow \infty$ para todo $x \in V$ donde V es un conjunto abierto que contiene a F . El mayor de estos conjuntos V se llama *cuenca de atracción* de F .

Para dar una intuición de por qué pueden aparecer atractores fractales observamos que $f(D) \subset D$ y, por tanto, $f^k(D) \subset f^{k-1}(D) \subset \dots \subset f(D) \subset D$. Consecuentemente, $f^k(D) = \bigcap_{i=1}^k f^i(D)$ y, por tanto, el conjunto $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} f^k(D)$ es invariante por f y $f^k(x) \in \bigcap_{i=1}^k f^i(D)$ para todo $x \in D$. Así, la sucesión de iteraciones $\{f^k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ se acerca a F cuando $k \rightarrow \infty$. Usualmente F será un atractor del sistema dinámico y, como vimos en el capítulo anterior, esta forma de construir conjuntos puede producir fractales.

5.2.1. El modelo logístico

Supongamos que queremos modelizar, mediante un sistema dinámico, el crecimiento de una población. Así, si la variable x representa el tamaño de la población, queremos predecir cuál será el tamaño de esta población después de un cierto periodo de tiempo. Para ello necesitamos una función adecuada f que modelice esta situación. Un primer acercamiento consistiría en suponer que la población se reproduce de forma constante y por tanto, si x es la población al comienzo, rx , donde r es un número real positivo, será la población al cabo de un cierto periodo de tiempo. El modelo resultante produce un crecimiento exponencial si $r > 1$ y por tanto solo será útil mientras la población disponga de unos recursos ilimitados que le permitan seguir creciendo a un ritmo constante. Para que el modelo tenga en cuenta factores externos que limiten el crecimiento exponencial, suponemos que existe una población máxima P de forma que si la población se acerca a P , limitará su crecimiento. Modelamos esta situación con la fórmula $x \mapsto rx(P - x)$. Para simplificar las ecuaciones consideraremos la cantidad $\tilde{x} = \frac{x}{P}$ que representa la proporción de la máxima población P . De esta forma tenemos

$$\tilde{f}(\tilde{x}) := f(\tilde{x}P) = r\tilde{x}P(P - \tilde{x}P) = \tilde{r}\tilde{x}(1 - \tilde{x}),$$

donde $\tilde{r} = rP^2$. Por simplicidad de la notación definimos f_λ como

$$\begin{aligned} f_\lambda : [0, 1] &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto \lambda x(1 - x), \end{aligned}$$

donde $\lambda \in [0, 4]$ es un parámetro que codifica información sobre el sistema. Este modelo se conoce como *modelo logístico*.

Un herramienta interesante para tener un primer acercamiento visual al estudio de las órbitas del modelo logístico son los *diagramas de coweb*, también conocidos como *diagramas de Verthulst*, cuyo funcionamiento se explica en la Figura 5.2.

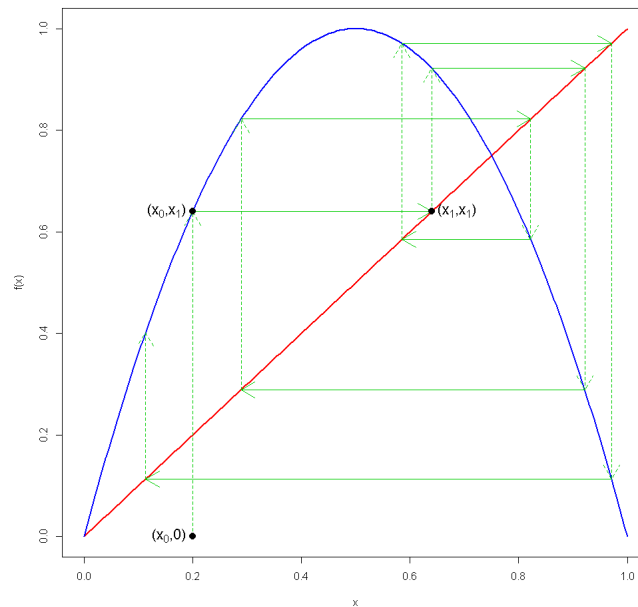
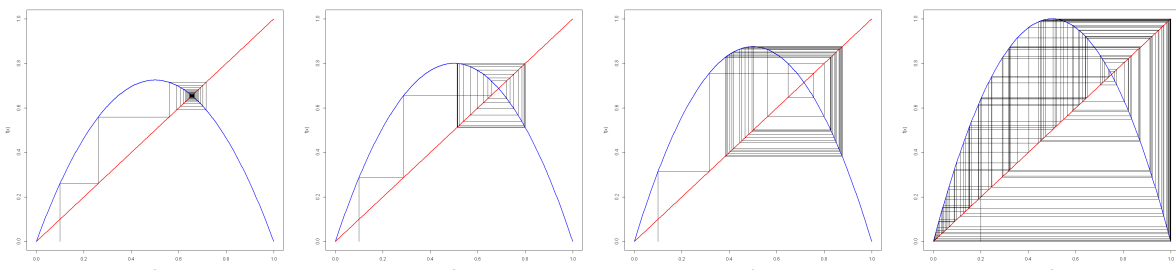


Fig. 5.2. Diagrama de coweb del modelo logístico para $\lambda = 4$. En azul representamos la gráfica de $4x(1-x)$ y en rojo la recta $f(x) = x$. Usualmente reemplazaremos las flechas por segmentos.

En la Figura 5.3 se observan comportamientos muy diferentes para distintos valores de r . Por ejemplo, en la Figura 5.3 (a), observamos que la sucesión de los $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge hacia un punto fijo. En la Figura 5.3 (b), los $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tienden hacia un ciclo de dos elementos. Por último, en las restantes se observa un comportamiento más extraño. En particular en la Figura 5.3 (d) se observa lo que llamaremos un comportamiento caótico. Existen diversas



(a) Punto fijo.

(b) Ciclo de dos puntos.

(c) Ciclo con mayor número de elementos.

(d) Comportamiento caótico.

Fig. 5.3. Diferentes comportamientos para distintos valores de r .

definiciones de caos en matemáticas. Una de ellas es la siguiente.

Definición 5.4. Una aplicación f se dice *caótica* sobre F si se cumple:

- (1) Para algún $x \in F$, la órbita de x es densa en F .
- (2) Los puntos $x \in F$ tales que $f^p(x) = x$ para algún $p \in \mathbb{N}$ son densos en F .
- (3) Existe un $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in F$, existen puntos $y \in F$ arbitrariamente cercanos a x tales que $|f^k(x) - f^k(y)| \geq \delta$ para algún $k \in \mathbb{N}$.

Estamos interesados en saber cuál es el comportamiento a largo plazo de las órbitas del modelo logístico en función del parámetro λ . Para ello nos apoyaremos en la Figura 5.4 donde encontramos el *diagrama de bifurcación* del modelo logístico, es decir, una gráfica donde se aproxima dicho comportamiento de las órbitas del modelo en función de su parámetro. En este caso, para un cierto valor x_0 , hemos dibujado $\{f_\lambda^k(x_0)\}_{k=501}^{750}$ para distintos valores de λ con el objetivo de hacer una aproximación visual del comportamiento a largo plazo de las órbitas de f_λ .

Resumimos a continuación los resultados del estudio del diagrama de bifurcación del modelo logístico, para más detalles se puede consultar [29, Chapter 6]. Si $0 < \lambda \leq 1$, entonces f_λ tiene un punto fijo en 0 que es atractivo en el sentido de que $f_\lambda^k \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$ para todo $x \in [0, 1]$. Para $1 < \lambda < 3$, la función f_λ tiene un punto fijo inestable en 0 y un punto fijo estable en $1 - \frac{1}{\lambda}$, de tal forma que $f_\lambda^k(x) \rightarrow 1 - \frac{1}{\lambda}$ para todo $x \in (0, 1)$. Cuando λ sobrepasa el valor $\lambda_1 = 3$, el punto fijo $1 - \frac{1}{\lambda}$ se vuelve inestable y se “bifurca” en una órbita estable de periodo 2 a la que son atraídos todos los puntos de $(0, 1)$ salvo una colección numerable. Dicha bifurcación se aprecia claramente en la Figura 5.4. Cuando λ alcanza el valor $\lambda_2 = 1 + \sqrt{6}$, las órbitas de periodo 2 se vuelven inestables y son remplazadas por órbitas estables de periodo 4. Mientras λ sigue incrementando, esta duplicación del periodo de la órbita estable sigue ocurriendo. Así, definimos λ_q como el valor del parámetro λ en el que aparece una órbita estable de periodo 2^q . Además, dicha duplicación sucede de manera cada vez más rápida de modo que $\lambda_q \rightarrow \lambda_\infty$ cuando $q \rightarrow \infty$, donde $\lambda_\infty \simeq 3,570$.

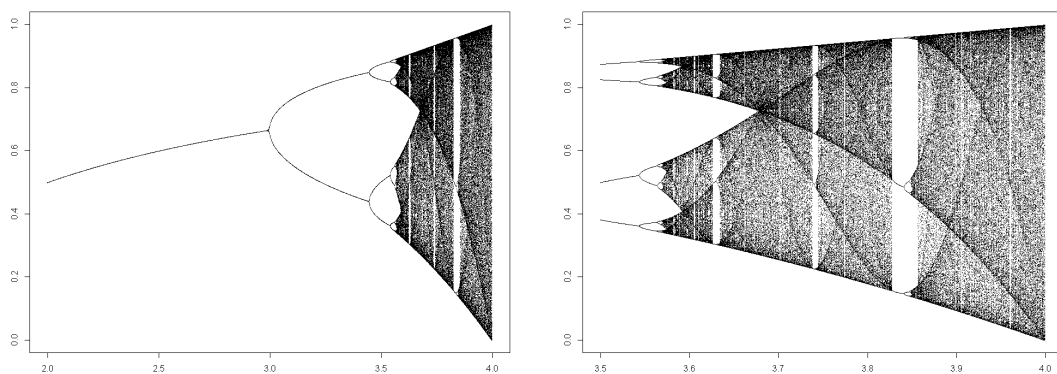


Fig. 5.4. Diagrama de bifurcación para el modelo logístico.

Una de las características más interesantes de este proceso es su universalidad. Resulta que el comportamiento del modelo logístico es similar al de cualquier transformación de un intervalo $h_\lambda(x) := \lambda h(x)$ en la que h sea una función diferenciable y unimodal. Aunque los valores $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en los que se produzcan la duplicación del periodo de la órbita estable dependan de h_λ , siempre se cumple que $\lambda_\infty - \lambda_k \simeq c\delta^{-k}$, donde c es una constante que depende de h_λ y $\delta = 4,6692\dots$ es la *constante de Feigenbaum*. Además, el comportamiento de h_{λ_∞} será caótico debido a la existencia de un atractor fractal cuya dimensión de Hausdorff es aproximadamente igual a 0,538 [12, Section 13.2].

Pensando ya en el siguiente apartado y con el objetivo de simplificar al máximo la función del modelo logístico, introduciremos el concepto de conjugación topológica para ver que estudiar el comportamiento de f_λ es de alguna forma equivalente a estudiar el comportamiento de $g_c(x) := x^2 + c$ para alguna constante c . Diremos que dos aplicaciones continuas $f : X \rightarrow X$, $g : Y \rightarrow Y$ son *topológicamente conjugadas* si existe un homeomorfismo $\phi : Y \rightarrow X$ tal que $f \circ \phi = \phi \circ g$. Esta relación nos es útil ya que las propiedades relacionadas con los sistemas dinámicos de f y de g serán las mismas. Las aplicaciones $f_\lambda : x \mapsto \lambda x(1-x)$ y $g_c : y \mapsto y^2 + c$ son topológicamente conjugadas por el homeomorfismo $\phi : x \mapsto \frac{\lambda}{2}(1-2x)$ en el apropiado rango de definición, donde c y λ están relacionados por la ecuación $4c = \lambda(2-\lambda)$ [29, Lecture 25].

5.2.2. El conjunto de Mandelbrot. Conjuntos de Julia

Nos preguntamos ahora qué pasa con el comportamiento de $g_c : x \mapsto x^2 + c$ como una función definida de \mathbb{C} en \mathbb{C} y $c \in \mathbb{C}$. Empezaremos centrándonos en el estudio para el valor inicial 0. En particular, nos interesará conocer para qué valores de c la órbita del cero está acotada.

Definición 5.5. Llamaremos *conjunto de Mandelbrot*, denotado por M , al conjunto de c para los que $\{g_c^k(0)\}_{k \in \mathbb{N}}$ está acotado.

Como f_λ y la restricción a \mathbb{R} de g_c son topológicamente conjugadas, los valores de c correspondientes a aquellos de λ para los que las órbitas del modelo logístico estaban acotadas pertenecerán al conjunto de Mandelbrot. En la Figura 5.5, podemos ver una representación del conjunto de Mandelbrot junto a la correspondencia de los valores pertenecientes a \mathbb{R} con el diagrama de bifurcación del modelo logístico. El conjunto de Mandelbrot tiene una sorprendente conexión con el estudio de la iteración de funciones complejas de Julia y Fatou que comentábamos en la introducción. Ellos estudiaron el comportamiento de un polinomio con coeficientes complejos (en particular, g_c) para cualquier valor inicial $z \in \mathbb{C}$.

Definición 5.6. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un polinomio de grado mayor o igual que 2 con coeficientes complejos. Sea $K(f) = \{z \in \mathbb{C} : \{f^k(z)\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ está acotado}\}$. Decimos que el *conjunto de Julia* de f , denotado $J(f)$ es la frontera de $K(f)$, es decir, $J(f) = \partial K(f)$.

Nos centraremos en los conjuntos $J(g_c)$. Como se puede apreciar en la Figura 5.6, estos conjuntos son muy diferentes dependiendo del parámetro c escogido. Precisamente el conjunto de Mandelbrot nos ayudará a saber cuales de estos conjuntos son conexos.

Teorema 5.7 ([12, Theorem 14.14]). *Para todo $c \in \mathbb{C}$, el conjunto de Julia $J(g_c)$ es conexo*

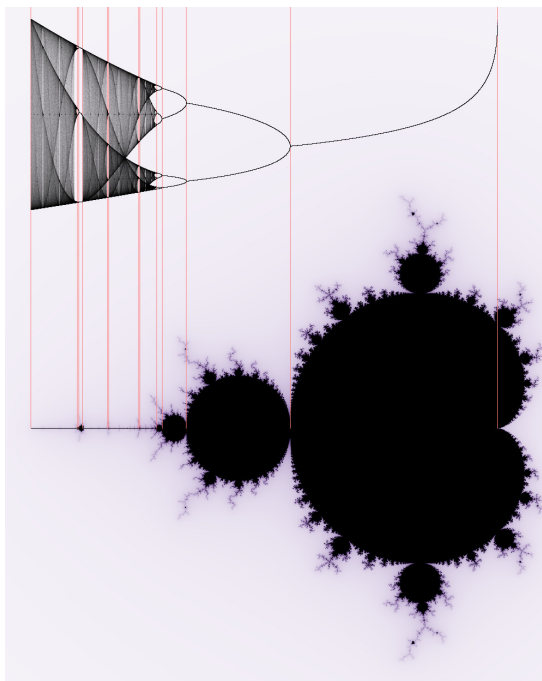
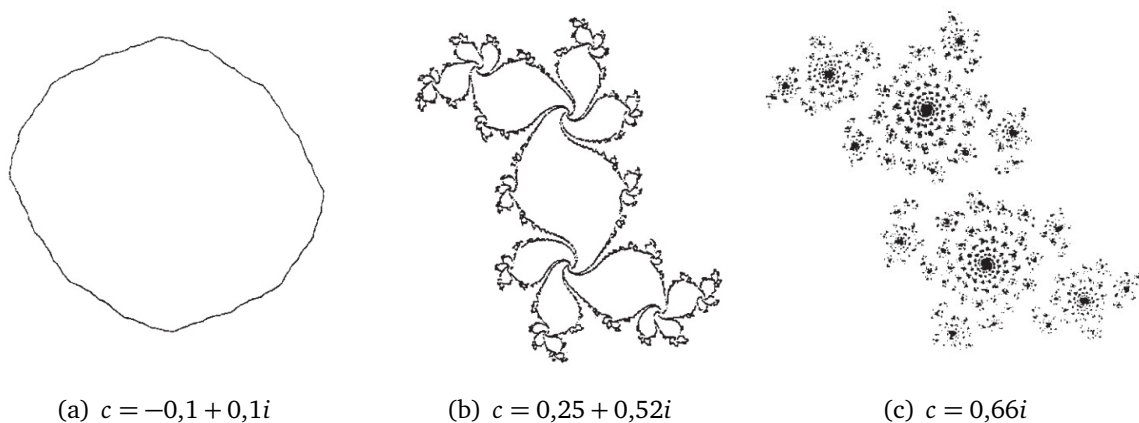


Fig. 5.5. El conjunto de Mandelbrot y su correspondencia con el diagrama de bifurcación del modelo logístico. Imagen obtenida en [32].



(a) $c = -0,1 + 0,1i$

(b) $c = 0,25 + 0,52i$

(c) $c = 0,66i$

Fig. 5.6. Representación de conjuntos de Julia de g_c para distintos valores de c . Imagen obtenida en [12].

si $\{g_c^k(0)\}_{k \in \mathbb{N}}$ está acotado y es totalmente desconexo en caso contrario. Por tanto,

$$M = \{c \in \mathbb{C} : \{g_c^k(0)\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ está acotado}\} = \{c \in \mathbb{C} : J(g_c) \text{ es conexo}\}.$$

Si nos fijamos en conjunto $J(g_0)$, es decir, el conjunto de Julia asociado a la función compleja $g_0 : x \mapsto x^2$, vemos que se corresponde con la circunferencia $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ que no es un fractal. Veremos a través de los dos siguientes resultados que esto es una excepción pues, en la mayoría de los casos, $J(g_c)$ es un fractal.

Teorema 5.8 ([12, Theorem 14.15]). Si $|c| > \frac{5+2\sqrt{6}}{4}$, entonces $J(g_c)$ es el conjunto invariante

del SIF $\{(z-c)^{\frac{1}{2}}, -(z-c)^{\frac{1}{2}}\}$ para z cerca de $J(g_c)$. Además, si $|c|$ es grande, tenemos que

$$\dim_B J(g_c) = \dim_H J(g_c) \simeq \frac{2 \log 2}{\log 4|c|}.$$

Teorema 5.9 ([12, Theorem 14.16]). Si $|c| < \frac{1}{4}$, entonces $J(g_c)$ es una curva simple cerrada. Además, si $|c|$ es pequeño se tiene que

$$\dim_B J(g_c) = \dim_H J(f_c) = 1 + \frac{|c|^2}{4 \log 2} + O(|c|^3).$$

5.3. Otras aplicaciones

Una de las características más interesantes de los fractales son sus múltiples aplicaciones en diversas disciplinas. En este trabajo nos hemos centrado en estudiar las matemáticas detrás de los fractales pero no podemos finalizar sin comentar algunas de estas aplicaciones. Así, aprovecharemos este apartado para comentar algunas de las aplicaciones más interesantes que no se hayan comentado a lo largo del trabajo.

En primer lugar, en el libro [19] encontramos métodos usados en análisis matemático que están basados en fractales, en particular usan ideas en la autosimilitud como, por ejemplo, la construcción de SIF en distintos espacios con el objetivo de obtener aproximaciones de un cierto objeto matemático deseado. Así, podemos encontrar, por ejemplo, una generalización del Teorema del Collage [19, Theorem 8.5].

Por otro lado, ciertas construcciones fractales han sido útiles para crear contraejemplos o resolver problemas en diversas áreas de matemáticas puras. A modo de ejemplo comentaremos brevemente el problema de *Keakeya*. A principios del siglo XX, Besicovitch estaba trabajando sobre una conjetura relacionada con la integral de Riemann sobre la que se dio cuenta que podría encontrar un contraejemplo si era capaz de construir un subconjunto de \mathbb{R}^2 que contuviera un segmento en todas las direcciones y fuera de medida cero. Finalmente, en [1] fue capaz de construir un conjunto de dichas características conocido como *conjunto de Besicovitch*. Paralelamente, los matemáticos japoneses *Keakeya* y *Fujiwara* trabajaban sobre el problema de encontrar el subconjunto convexo de \mathbb{R}^2 con menor área dentro del cual era posible invertir un segmento unidad, es decir, dentro del cual se puede maniobrar continuamente un segmento de longitud uno de forma que termine en su posición original pero rotado 180° . En [15] conjeturaron que la solución era un triángulo equilátero de altura uno y, además, observaron que si se quitaba la restricción de la convexidad el problema aceptaba soluciones con menor área que la del triángulo equilátero. El problema de encontrar el conjunto con menor área en el que se puede rotar un segmento unidad pasó a llamarse *problema de Keakeya*. Unos años más tarde, Besicovitch resolvió el problema de *Keakeya* de una forma sorprendente pues, con una simple modificación del conjunto de Besicovitch, se podían obtener conjuntos de medida arbitrariamente pequeña en los que era posible invertir un segmento unidad. Se pueden encontrar más detalles sobre el tema, incluyendo la construcción de los conjuntos mencionados, en [13, Chapter 7].

Los fractales se utilizan también en modelización. Por un lado, como comentábamos en la introducción, modelizan ciertos fenómenos naturales. Para ello se utiliza, entre otras cosas,

el llamado “movimiento browniano” en honor del científico Robert Brown que, en 1827, se dio cuenta de que la trayectoria seguida por una partícula de polen en la superficie del agua es muy irregular. La modelización de estas trayectorias irregulares es útil para modelizar múltiples fenómenos, un ejemplo lo encontramos en la Figura 5.7. Para más detalles sobre el estudio del movimiento browniano se puede consultar de [12, Chapter 16]. Un libro específico sobre el uso de fractales en modelización biológica es [17], en el que se incluyen múltiples ilustraciones relacionadas con el tema. Por otro lado, los fractales también son útiles en el estudio del flujo turbulento. Para más detalles se puede consultar [22].

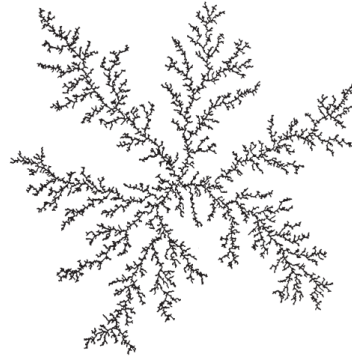


Fig. 5.7. Ejemplo de aplicación del movimiento browniano. Imagen obtenida de [12].

A. Código utilizado

Código usado para generar la Figura 1.1. Primero definimos la función «weiestrass», que asigna a cada x la suma parcial n -ésima para los parámetros a y b , de forma recursiva. A continuación, dibujamos una aproximación de la función usando 500 sumandos.

```
1 weiestrass<-function(a,b,n,x) {
2 f<-0
3 for (i in 0:n){
4 f=f+(b**i)*cos((a**i)*x*pi)
5 }
6 return(f)
7 }
8 x<-seq(0,2,0.005)
9 plot(x,weiestrass(3,0.5,500,x),type='l',ylab='')
10 plot(x,weiestrass(3,0.75,500,x),type='l',ylab='')
```

Código usado para generar la Figura 1.3. Definimos la función una función que para cada n nos dibuja E_n (en la notación del Ejemplo 1.3). Empezamos obteniendo las coordenadas de los vértices de todos los triángulos de E_n en dos vectores x e y . Por último utilizamos el paquete «ggplot2» para dibujar E_n . Para ello definimos el vector id que indica como agrupar los vértices de x e y .

```
1 library("ggplot2")
2
3 triang_sierpinski<-function(n){
4 x<-c(0,0.5,1)
5 y<-c(0,sqrt(3)/2,0)
6 id<-c(1,1,1)
7 for (k in 1:n){
8 x_new<-c()
9 y_new<-c()
10 for (i in 1:(max(id)/3)){
11 x_1<-(x[2+(i-1)*3]+x[1+(i-1)*3])/2
12 x_2<-(x[3+(i-1)*3]+x[2+(i-1)*3])/2
13 y_1<-(y[2+(i-1)*3]+y[1+(i-1)*3])/2
14 x_new1<-c(x[1+(i-1)*3],x_1,x[2+(i-1)*3])
15 y_new1<-c(y[1+(i-1)*3],y_1,y[1+(i-1)*3])
16 x_new2<-c(x_1,x[2+(i-1)*3],x_2)
17 y_new2<-c(y_1,y[2+(i-1)*3],y_1)
18 x_new3<-c(x[2+(i-1)*3],x_2,x[3+(i-1)*3])
19 y_new3<-c(y[1+(i-1)*3],y_1,y[1+(i-1)*3])
20 x_new<-c(x_new,x_new1,x_new2,x_new3)
21 y_new<-c(y_new,y_new1,y_new2,y_new3)
```



```

22 }
23 x<-x_new
24 y<-y_new
25 id<-c()
26 for (j in 1:length(x)){
27 id<-c(id,rep(j,3))
28 }
29 }
30 r<-data.frame(x,y,id)
31 p <- ggplot(r, aes(x = x, y = y)) +
32 geom_polygon(aes(group = id),fill="black",colour="black")+
33 theme_bw() +
34 theme(axis.line =element_blank(),panel.grid.major = element_blank(),
        panel.grid.minor = element_blank(),panel.border = element_blank()
        ,panel.background = element_blank(),axis.text.x = element_blank()
        , axis.ticks.x = element_blank(),axis.text.y = element_blank(),
        axis.ticks.y = element_blank(),axis.title.x = element_blank(),
        axis.title.y = element_blank(),legend.position="none")
35 p
36 }

```

Código usado para generar la Figura 2.2. Utilizamos el paquete “sp” para obtener los datos geográficos necesarios. Utilizamos después la función “fortify” para transformar dichos datos en un data frame con el que podamos trabajar con el paquete “spatstat”. Continuamos utilizando la función “as.ppp” para crear un archivo .ppp al que poder aplicar la función “quadratcount” que sirve para dividir en una cuadrícula las coordenadas. Gracias a esta función detectamos en que cuadrados de dicha cuadrícula hay puntos de la frontera. Por último, utilizamos el paquete “ggplot2” para dibujar lo que nos interesa.

```

1 library("raster")
2 library("sp")
3 spain <- getData('GADM', country = 'spain', level = 1)
4 galicia <- spain[spain$NAME_1 == "Galicia",]
5 library("spatstat")
6 library("ggplot2")
7 fgal<-fortify(galicia)
8 x<-fgal[,1]
9 y<-fgal[,2]
10 gal<-data.frame(x,y)
11 anchura<-max(gal[,1])-min(gal[,1])
12 altura<-max(gal[,2])-min(gal[,2])
13 c_x<-(max(gal[,1])+min(gal[,1]))/2
14 c_y<-(max(gal[,2])+min(gal[,2]))/2
15 h<-max(altura/2,anchura/2)
16 h<-h+h/10
17 gal_owin<-owin(c(c_x-h,c_x+h),c(c_y-h,c_y+h))
18 gal_ppp<-as.ppp(gal,gal_owin)

```

```

19 | cuadr_gal<-function(a){
20 |   Q<-quadratcount(gal_ppp,nx=a,ny=a)
21 |   xx<-seq(c_x-h,c_x+h,length.out = a+1)
22 |   yy<-seq(c_y+h,c_y-h,length.out = a+1)
23 |   xmin<-c()
24 |   xmax<-c()
25 |   ymin<-c()
26 |   ymax<-c()
27 |   for (i in 1:nrow(Q)){
28 |     for (j in 1:ncol(Q)){
29 |       if (Q[i,j]!=0) {
30 |         xmin<-c(xmin,xx[j])
31 |         xmax<-c(xmax,xx[j+1])
32 |         ymin<-c(ymin,yy[i+1])
33 |         ymax<-c(ymax,yy[i])
34 |       }
35 |     }
36 |   }
37 |   r<-data.frame(xmin,xmax,ymin,ymax)
38 |   ggplot()+
39 |   geom_polygon(data=fgal,aes(x=long, y=lat, group = group),colour="
    black",fill=NA)+
40 |   geom_vline(xintercept = xx)+
41 |   geom_hline(yintercept = yy)+
42 |   geom_rect(data=r,aes(xmin=xmin,xmax=xmax,ymin=ymin,ymax=ymax,alpha
    =0.5),colour="black",fill="yellow")+
43 |   theme_bw() +
44 |   theme(axis.line =element_blank(),panel.grid.major = element_blank(),
    panel.grid.minor = element_blank(),panel.border = element_blank()
    ,panel.background = element_blank(),axis.text.x = element_blank()
    , axis.ticks.x = element_blank(),axis.text.y = element_blank(),
    axis.ticks.y = element_blank(),axis.title.x = element_blank(),
    axis.title.y = element_blank(),legend.position="none")
45 | }
46 | cuadr_gal(4)
47 | cuadr_gal(8)
48 | cuadr_gal(16)

```

Código utilizado para generar la Figura 4.1. El juego del caos asociado al triángulo de Sierpinski es equivalente a, en cada iteración, calcular el punto medio entre el punto iterativo y uno de los tres vértices (escogido de manera aleatoria en cada iteración).

```

1 | n_iter<-10000
2 | vertices<-data.frame(x=c(0, 1, 0.5),y=c(0, 0, sqrt(3)/2))
3 | pto_iterativo<-runif(2)
4 | pto_finales<-data.frame(x=rep(0,n_iter),y=rep(0,n_iter))
5 | for(i in 1:n_iter){

```

```

6 pto_iterativo<-(vertices[sample(3,1),]+pto_iterativo)/2
7 ptos_finales[i,]<-pto_iterativo
8 }
9 plot.new()
10 points(ptos_finales$x,ptos_finales$y, col="black",pch=20, cex =0.5)

```

Código utilizado para generar la Figura 5.1. Consultado en la página web [31].

```

1 fractal_fern2 <- function(x, p){
2   if (p <= 0.01) {
3     m <- matrix(c(0, 0, 0, .16), 2, 2)
4     f <- c(0, 0)
5   } else if (p <= 0.86) {
6     m <- matrix(c(.85, -.04, .04, .85), 2, 2)
7     f <- c(0, 1.6)
8   } else if (p <= 0.93) {
9     m <- matrix(c(.2, .23, -.26, .22), 2, 2)
10    f <- c(0, 1.6)
11  } else {
12    m <- matrix(c(-.15, .26, .28, .24), 2, 2)
13    f <- c(0, .44)
14  }
15  m %*% x + f
16  }
17  reps <- 1000000
18  p <- runif(reps)
19  coords <- c(0, 0)
20  m <- Reduce(fractal_fern2, p, accumulate = T, init = coords)
21  m <- t(do.call(cbind, m))
22  plot(m, type = "p", cex = 0.1, col = "darkgreen",
23  xlim = c(-3, 3), ylim = c(0, 10),
24  xlab = NA, ylab = NA, axes = FALSE)

```

Código usado para generar la Figura 5.4. Con el objetivo de aproximar el comportamiento de las órbitas del modelo logístico, iteramos la función f_λ (aquí definida como «map») 500 veces antes de guardar ningún valor. Repetimos el proceso para distintos valores del parámetro λ (en el código es el parámetro r).

```

1 map<-function(r,x){
2   y<-r*x*(1-x)
3   return(y)
4   }
5 r<-3.5
6 x_0<-0.5
7 x_plot<-c()
8 r_plot<-c()
9 while(r<4){
10  x<-x_0

```

```
11 | for (i in 1:500){
12 |   x<-map(r,x)
13 | }
14 | for (i in 1:250){
15 |   x<-map(r,x)
16 |   x_plot<-c(x_plot,x)
17 | }
18 | r_plot<-c(r_plot,rep(r,250))
19 | r<-r+0.0005
20 | }
21 | plot(r_plot,x_plot,pch=".",xlab="",ylab="")
```


B. Demostraciones auxiliares

En este apéndice incluiremos algunas demostraciones de carácter más auxiliar.

Demostración del Teorema 2.46. Construiremos la aplicación continua f como el límite de una sucesión de aplicaciones continuas $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Empezaremos describiendo una operación sobre caminos que usaremos para definir los f_n .

Consideramos un intervalo compacto arbitrario de la recta real $[a, b]$ y un cuadrado arbitrario del plano con lados paralelos a los ejes coordenados. Sea g el camino descrito en la Figura B.1, que podemos pensar como una aplicación continua de $[a, b]$ en el cuadrado.

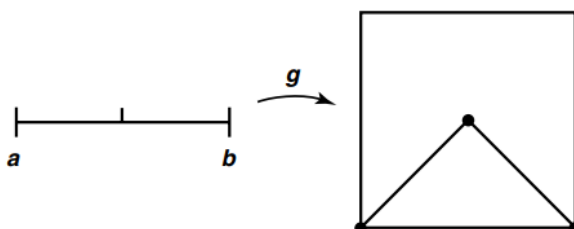


Fig. B.1. Definición de g . Imagen obtenida de [25].

La operación que queremos definir reemplaza el camino g por el camino g' descrito en la Figura B.2. Se trata de un camino hecho por cuatro caminos triangulares de la mitad de tamaño que g . Observamos que g y g' tienen el mismo punto inicial y el mismo punto final y que esta operación se puede aplicar a cualquier camino triangular h como se indica en la Figura B.3.

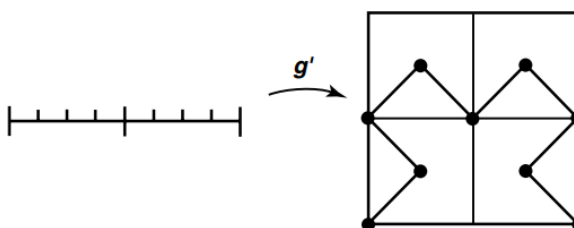


Fig. B.2. Definición de g' . Imagen obtenida de [25].

Definimos la sucesión de funciones $f_n : I \rightarrow I^2$ de manera inductiva. Sea f_0 el camino triangular descrito en la Figura B.1 con $a = 0$ y $b = 1$. La aplicación f_1 se obtiene aplicando la operación descrita en la Figura 2 a la aplicación f_0 . Para obtener f_2 aplicamos la misma operación a cada uno de los cuatro caminos triangulares de f_1 , como se recoge en la Figura B.4. En el caso general, f_{n+1} es un camino creado a partir de aplicar esta operación a cada uno de los 4^n caminos triangulares, cada uno contenido en un cuadrado de lado 2^{-n} , de f_n .

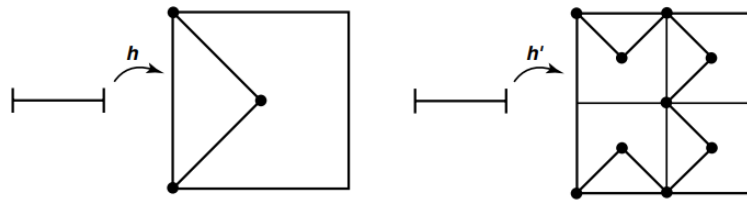


Fig. B.3. Definición de g' . Imagen obtenida de [25].

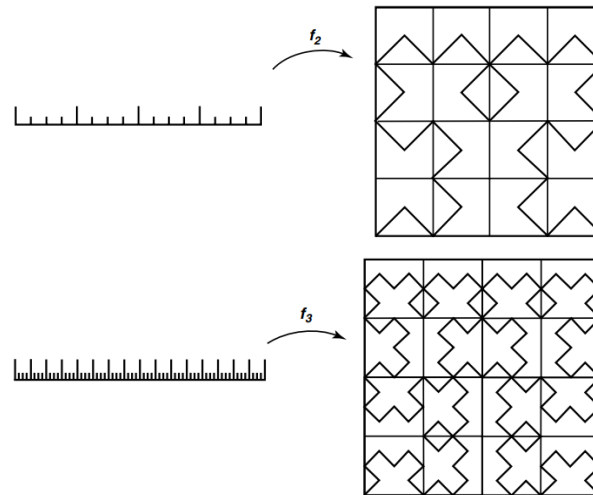


Fig. B.4. Visualización de f_2 y f_3 . Imagen obtenida de [25].

Consideramos la siguiente métrica sobre \mathbb{R}^2 ,

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}.$$

Denotaremos por ρ la métrica sobre $\mathcal{C}(I, I^2)$ definida por

$$\rho(f, g) = \sup\{d(f(t), g(t)) : t \in I\}.$$

Como I^2 es cerrado en \mathbb{R}^2 , el espacio métrico (I^2, d) es completo. Por tanto, el espacio métrico $(\mathcal{C}(I, I^2), \rho)$ es también completo [25, Theorem 43.6].

Probaremos que la sucesión de aplicaciones continuas $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en el espacio métrico $(\mathcal{C}(I, I^2), \rho)$. Observamos que cada uno de los caminos triangulares de f_n está dentro de un cuadrado de lado 2^{-n} . La operación usada para definir f_{n+1} reemplaza cada camino triangular por cuatro caminos triangulares que están dentro del mismo cuadrado que el original. Por tanto, la distancia en (I^2, d) entre $f_n(t)$ y $f_{n+1}(t)$ es, como mucho, 2^{-n} . Consecuentemente, $\rho(f_n, f_{n+1}) \leq 2^{-n}$. Concluimos que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{C}(I, I^2), \rho)$ ya que

$$\rho(f_n, f_{n,m}) \leq 2^{-n} + 2^{-n-1} + \dots + 2^{-n-m+1} < 2^{-n+1},$$

para todo $n, m \in \mathbb{N}$.

Como $(\mathcal{C}(I, I^2), \rho)$ es completo, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a una función continua $f : I \rightarrow I^2$. Nos falta probar que f es sobreyectiva. Sea $\mathbf{x} \in I^2$, veamos que $\mathbf{x} \in f(I)$. En primer lugar,

observamos que, dado $n \in \mathbb{N}$, el camino f_n pasa a una distancia menor o igual a 2^{-n} de \mathbf{x} ya que f_n pasa por cada uno de los cuadrados de lado 2^{-n} en los que hemos dividido I^2 . Usando este hecho, probaremos que, dado $\epsilon > 0$, la ϵ -vecindad de \mathbf{x} interseca a $f(I)$. Podemos escoger N lo suficientemente grande como para que

$$\rho(f_N, f) < \frac{\epsilon}{2} \text{ y } 2^{-N} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Con lo que hemos probado, podemos asegurar que existe $t_0 \in I$ tal que $d(\mathbf{x}, f_N(t_0)) \leq 2^{-N}$. Luego, ya que $d(f_N(t), f(t)) < \frac{\epsilon}{2}$ para todo t , deducimos que

$$d(\mathbf{x}, f(t_0)) < \epsilon,$$

y, consecuentemente, la ϵ -vecindad de \mathbf{x} interseca a $f(I)$. Por lo tanto, \mathbf{x} pertenece a la clausura de $f(I)$. Como I es compacto, tenemos que $f(I)$ también es compacto y, consecuentemente, es cerrado. Por tanto, \mathbf{x} pertenece a $f(I)$ como queríamos probar. ■

Demostración de la Proposición 4.10. Supongamos que S no tiene una r -red finita. Vamos a definir una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, de forma inductiva, tal que $d(x_n, x_m) > r$ para todo $n \neq m$. En primer lugar, como $S \neq \emptyset$, ya que sino \emptyset sería una r -red finita, podemos escoger $x_1 \in S$. Supongamos ahora que x_1, x_2, \dots, x_n ya han sido escogidos. Como por hipótesis $\{x_1, \dots, x_n\}$ no es una r -red, podemos tomar x_{n+1} tal que $d(x_j, x_{n+1}) > r$ para todo $1 \leq j \leq n$.

Veamos que la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no tiene punto de acumulación, lo que supondría una contradicción pues S es secuencialmente compacto. Por reducción al absurdo, supongamos que existe un punto de acumulación x . Por ser punto de acumulación tendríamos que en la bola $B_{\frac{r}{2}}(x)$ contendría dos puntos de la sucesión lo cual es imposible pues la distancia entre dos puntos de la sucesión es estrictamente mayor que r . ■

Bibliografía

- [1] Besicovitch, A.S.: Sur deux questions de l'intégrabilité des fonctions, vol. 2. J. Soc. Phys. Math. (1919)
- [2] Besicovitch, A.S.: *On the fundamental geometrical properties of linearly measurable plane sets of points*. Math. Ann. **98**(1), 422–464 (1928)
- [3] Besicovitch, A.S.: *On the fundamental geometrical properties of linearly measurable plane sets of points (II)*. Math. Ann. **115**(1), 296–329 (1938)
- [4] Besicovitch, A.S.: *On the fundamental geometrical properties of linearly measurable plane sets of points (III)*. Math. Ann. **116**(1), 349–357 (1939)
- [5] Cohn, D.L.: Measure theory. Birkhäuser, Boston, Mass. (1980)
- [6] Davies, R.O.: *A property of Hausdorff measure*. Proc. Cambridge Philos. Soc. **52**, 30–34 (1956)
- [7] Edgar, G.: Measure, topology, and fractal geometry. Springer Science & Business Media (2007)
- [8] Edgar, G.A.: Integral, probability, and fractal measures. Springer-Verlag, New York (1998)
- [9] Edgar, G.A.: Classics on fractals. Studies in Nonlinearity. Westview Press. Advanced Book Program, Boulder, CO (2004)
- [10] Eggleston, H.G.: Convexity. Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 47. Cambridge University Press, New York (1958)
- [11] Erwe, F.: Cálculo diferencial e integral. Madrid : Selecciones Científicas (1968)
- [12] Falconer, K.: Fractal geometry. Mathematical foundations and applications, third edn. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester (2014)
- [13] Falconer, K.J.: The geometry of fractal sets, vol. 85. Cambridge university press (1986)
- [14] Federer, H.: *The (φ, k) rectifiable subsets of n -space*. Trans. Amer. Math. Soc. **62**, 114–192 (1947)
- [15] Fujiwara M. & Takeya, S.: *On some problems of maxima and minima for the curve of constant breadth and the in-revolvable curve of the equilateral triangle*. Tôhoku Mathematical Journal **11**, 92–100 (1917)
- [16] Hausdorff, F.: *Dimension und äußeres Maß*. Math. Ann. **79**(1-2), 157–179 (1918)

- [17] Kaandorp, J.A.: *Fractal Modelling: Growth and Form in Biology*. Springer-Verlag, Berlin (1994)
- [18] Katok, A., Hasselblatt, B.: *Introduction to the modern theory of dynamical systems, Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, vol. 54. Cambridge University Press, Cambridge (1995)
- [19] Kunze, H., La Torre, D., Mendivil, F., Vrscay, E.R.: *Fractal-based methods in analysis*. Springer, New York (2012)
- [20] Mandelbrot, B.B.: *The fractal geometry of nature*. Freeman, New York (1977)
- [21] Mandelbrot, B.B.: *La geometría fractal de la naturaleza, Metatemas*, vol. 49. Tusquets Editores, S.A., Barcelona (1997)
- [22] Manneville, P.: *Instabilities, chaos and turbulence*. Imperial College Press, London (2004)
- [23] Marstrand, J.M.: *The (φ, s) regular subsets of n -space*. *Trans. Amer. Math. Soc.* **113**, 369–392 (1964)
- [24] Mattila, P.: *Hausdorff m regular and rectifiable sets in n -space*. *Trans. Amer. Math. Soc.* **205**, 263–274 (1975)
- [25] Munkres, J.R.: *Topology*. Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ (2000)
- [26] Munroe, M.E.: *Measure and integration*, second edn. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont. (1971)
- [27] Peano, G.: *Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane*. *Math. Ann.* **36**(1), 157–160 (1890)
- [28] Peitgen, H.O., Jürgens, H., Saupe, D.: *Chaos and fractals: New frontiers of science*, second edn. Springer-Verlag, New York (2004)
- [29] Pesin, Y., Climenhaga, V.: *Lectures on fractal geometry and dynamical systems, Student Mathematical Library*, vol. 52. American Mathematical Society, Providence, RI (2009)
- [30] Weierstrass, K.: *Über Continuirliche Functionen Eines Reellen Arguments, die für Keinen Werth des Letzteren Einen Bestimmten Differentialquotienten Besitzen*. Siegmund-Schultze R. (eds) *Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre*. Teubner-Archiv zur Mathematik, **9** (1872)
- [31] Wikipedia contributors: *Barnsley fern* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia* (2020). URL https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Barnsley_fern&oldid=943279194. [Online; accessed 18-March-2020]
- [32] Wikipedia contributors: *Mandelbrot set* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia* (2020). URL https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Mandelbrot_set&oldid=962341088. [Online; accessed 23-June-2020]

Índice alfabético

A

atractor extraño, 55
autosimilitud exacta, 45

B

Borel-medible, 32
borelianos, 17

C

caos, 57
compacidad
 de punto límite, 42
 secuencial, 42
condición del conjunto abierto, 46
conjugación topológica, 58
conjunto
 de Besicovitch, 60
 de Borel, 17
 de Cantor, 2, 11, 51
 de Julia, 58
 de Mandelbrot, 58
 invariante, 41
 medible, 15
conjuntos positivamente separados, 17
constante de Feigenbaum, 58
continuidad de la medida, 14
contracción, 41
cuenca de atracción, 55
curva, 36
 de Koch, 2, 51
 rectificable, 36

D

δ -recubrimiento, 8
 δ -vecindad, 41
densidad, 31
 convexa superior, 32
diámetro, 8
diagrama
 de bifurcación, 57
 de coweb, 56
dimensión
 de conteo de cajas, 9

 de Hausdorff, 3, 27
 de similitud, 46
 topológica, 8
distancia de Hausdorff, 41

E

Estabilidad finita, 12

F

fractal, 4
función de Cantor, 30

H

hoja de Barnsley, 54

I

irregularidad, 31

J

juego del caos, 45

L

longitud de una curva, 36

M

Método I, 19
Método II, 21
medida, 14
 medida de Lebesgue n -dimensional, 21
 exterior, 15
 regular, 17
 métrica exterior, 17
 medida s -dimensional de Hausdorff, 22
modelo logístico, 56
movimiento Browniano, 60

P

problema de Kakeya, 60
proporción de una similitud, 45

R

r -red, 42
rectificación numerable, 39
recubrimiento de Vitali, 24
refinamiento, 7

regularidad, 31

S

s -conjunto, 28

σ -álgebra, 13

σ -álgebra generada por \mathcal{C} , 14

σ -aditividad, 14

σ -subaditividad, 15

similitud, 45

sistema iterativo de funciones, 41

T

tangente, 39

Teorema del Collage, 53

triángulo de Sierpinski, 2, 11, 51

V

volumen n -dimensional, 21

Y

Y -conjunto, 37

Z

Z -conjunto, 37