



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Haces y teoría de la señal

Patricia Guerra Balboa

2019/2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Haces y teoría de la señal

Patricia Guerra Balboa

13, Julio, 2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Coñecemento: Xeometría e topoloxía
Título: Haces y teoría de la señal
Breve descripción do contido
Introduciremos la teoría de haces clásica, así como el concepto de haz celular y su relación con dicha teoría. Para ello empezaremos presentando todas las herramientas necesarias englobadas en la teoría de categorías. Posteriormente trataremos la cohomología de haces y un ejemplo de aplicación de la misma.
Recomendacións
Tener soltura para leer textos en inglés.
Outras observacións

Índice general

Resumen	VIII
Introducción	XI
1. Teoría de categorías	1
1.1. Teoría de categorías	1
1.2. Funtores	4
1.3. Transformaciones naturales y equivalencia de categorías	6
1.4. Conos y límites	7
1.5. Coconos y colímites	9
2. Prehaces y haces	13
2.1. Prehaces y morfismos de prehaces	13
2.2. Haces	15
3. Haces celulares	21
3.1. Complejos celulares regulares	21
3.2. Haz celular	24
3.3. Conjuntos ordenados y topología de Alexandrov	25
4. Relación entre haces y haces celulares	29
5. Homología y cohomología de haces	41
5.1. Homología simplicial	41
5.2. Cohomología de haces celulares	47
6. Aplicaciones al control del tráfico aéreo	51
6.1. Presentación del problema y contexto	51
6.2. Modelización del problema	52
6.3. Cálculo de la homología del complejo simplicial	54

6.4. Cálculo de la cohomología del haz	54
6.5. Análisis de la robustez del sistema	56
Bibliografía	61

Resumen

En este trabajo haremos una introducción a la teoría de haces y expondremos sus recientes aplicaciones al control de sistemas de información. Para poder abordar estos dos puntos expondremos los elementos básicos de la teoría de categorías. Estos nos proporcionarán el lenguaje necesario para el entendimiento de la teoría de haces. Para las aplicaciones, será útil dar una descripción explícita de haces sobre un complejo celular mediante el concepto auxiliar de los haces celulares.

Será entonces el momento de tratar la homología, centrada en el estudio de complejos simpliciales, y la cohomología con coeficientes en un haz, que se convertirá en el instrumento principal para el análisis de los sistemas del siguiente capítulo.

Con todo esto mostraremos cómo esta teoría tiene aplicaciones prácticas. En este trabajo nos centraremos en el estudio del buen funcionamiento de un sistema de sensores de control del tráfico en un aeropuerto.

Abstract

In this work we will make an introduction to sheaf theory and explain its recent applications to control of information systems. In order to address these two points, we will expose basic elements of category theory. These provide us with the necessary language for understanding sheaf theory. For applications, it will be useful to give an explicit description of sheaves on a cell complex using cell sheaves.

Then, we will explain homology, focused on the study of simplicial complexes, and cohomology with coefficients in a sheaf, which will become the main instrument for the analysis of systems in the next chapter.

All things considered, we will show how this theory has practical applications. In this work we will focus on the traffic control sensor system at an airport monitoring.

Introducción

La teoría de haces se origina con Jean Leray en los años 40. En la siguiente década adquiere un papel importante en la topología algebraica y el análisis complejo. En topología algebraica, motivación original de esta teoría, proporciona un método para estudiar la cohomología de un espacio con coeficientes variables que cambian de forma continua a medida que cambiamos de abierto. Un ejemplo de esta situación es la cohomología de sistemas locales. Esto también hace posible extender la dualidad de Poincaré al caso no orientable mediante la consideración del haz de orientación.

En análisis complejo, el concepto de haz ha permitido establecer la cuestión de la prolongación analítica en varias variables complejas mediante la introducción de haces coherentes y los teoremas de Cartan y Oka.

Casi simultáneamente los haces han jugado un papel fundamental en la renovación de la geometría algebraica a raíz de los trabajos de Serre y posteriormente Grothendieck. Desde entonces los métodos cohomológicos de teoría de haces han jugado una notable posición en esta teoría. La teoría de haces ha seguido extendiendo sus aplicaciones a campos diversos como la física de altas energías.

En los últimos años la consideración de las propiedades topológicas de los conjuntos discretos y de diversos modelos combinatorios han propiciado la aparición de aplicaciones de la topología algebraica a problemas científicos e industriales.

Cada vez que los datos que se tienen que estudiar cambian de forma continua, que podemos suponer a lo largo de un espacio de análisis, se presenta la oportunidad de emplear la noción de haz para su estudio. Recientemente, han surgido diversas aplicaciones prácticas de estas técnicas.

En este trabajo mostraremos una de dichas aplicaciones. Veremos que diversas señales de tipos diferentes en varias estaciones de control de un aeropuerto pueden modelarse mediante un haz sobre un complejo simplicial. La cohomología del haz nos dará información sobre la robustez del sistema de comunicación del tráfico desplegado.

Para ello empezaremos, en el capítulo 1 con la presentación y exposición de conceptos básicos de la teoría de categorías como son la propia noción de categoría, los funtores,

las transformaciones naturales o los límites y colímites. Siempre acompañados de ejemplos ilustrativos que nos hagan comprender y asimilar estos nuevos conceptos.

Proseguiremos en el capítulo 2 presentando el concepto de haz y prehaz desde la definición clásica a partir del ejemplo canónico del haz de funciones, a la par que explicitamos la visión de estos conceptos desde una perspectiva categórica que nos permitirá mayor flexibilidad en la estructura del codominio de nuestros haces y permitirá establecer propiedades importantes en venideros capítulos. También será aquí donde introduciremos el concepto de tallo y el caso particular de los haces flácidos.

En el capítulo 3 estudiaremos la noción de haz celular. Para ello tendremos que presentar primero los complejos celulares y adentrarnos en el caso particular de los complejos simpliciales pues son los que nos proporcionarán el contexto de trabajo del capítulo 6. Hablaremos también en este capítulo de la topología de Alexandrov y su utilidad en complejos celulares.

Una vez hecho esto, llegamos al capítulo 4 donde relacionaremos los conceptos de haz clásico y haz celular demostrando finalmente que son categóricamente equivalentes, es decir, que cuando definimos un haz celular sobre un complejo celular estamos definiendo un haz sobre el espacio topológico formado por el complejo dotado de la topología de Alexandrov.

Con todo este contexto necesitamos ahora las herramientas para trabajar en él, por ello, en el capítulo 5 introduciremos conceptos básicos de homología simplicial y además presentaremos el concepto genérico de cohomología sobre un complejo de cocadenas pudiendo así definir la cohomología de haces celulares.

Llegados a este punto tendremos por fin todas las herramientas en nuestro poder para poder explicar como la teoría de haces puede ser aplicada al control del tráfico aéreo de un aeropuerto. Procederemos pues, en el capítulo 6 a la modelización de un sistema de control de un aeropuerto basado en la información proporcionada por un conjunto de sensores que comunican datos heterogéneos. La cohomología de haces nos permitirá estudiar el buen funcionamiento del sistema y en caso de fallo testar la seguridad y viabilidad del aeropuerto.

Capítulo 1

Teoría de categorías

En este capítulo explicaremos los conceptos fundamentales de la teoría de categorías que necesitamos para el desarrollo del trabajo. Profundizaremos en los conceptos con algunos ejemplos ilustrativos siempre orientados al entendimiento de la teoría de haces y las aplicaciones que vamos a tratar de dicha teoría.

1.1. Teoría de categorías

A continuación introducimos la definición de categoría y algunos ejemplos ilustrativos.

Definición 1.1.1. Una *Categoría* \mathbf{C} consiste en una clase de objetos, denotados $Ob(\mathbf{C})$ y un conjunto de morfismos o flechas entre objetos $a, b \in Ob(\mathbf{C})$, que denotaremos $Fl_{\mathbf{C}}(a, b)$, verificando las siguientes propiedades:

- $\forall a \in Ob(\mathbf{C}) \quad \exists Id_a : a \longrightarrow a \in Fl_{\mathbf{C}}(a, a)$
- Dadas $f : a \longrightarrow b \in Fl_{\mathbf{C}}(a, b)$ y $g : b \longrightarrow c \in Fl_{\mathbf{C}}(b, c)$ estas se pueden componer para obtener otra flecha $g \circ f : a \longrightarrow c \in Fl_{\mathbf{C}}(a, c)$ verificando que:
 - La composición de flechas es asociativa, es decir, si $h : c \longrightarrow d \in Fl_{\mathbf{C}}(c, d)$ entonces $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$
 - Dado $a, b \in Ob(\mathbf{C}) \quad \forall f \in Fl_{\mathbf{C}}(a, b)$ se verifica que $f \circ Id_a = f = Id_b \circ f$

Notación 1.1.2. Denotaremos las categorías en negrita.

Definición 1.1.3. Dada \mathbf{C} una categoría, una flecha $f : a \longrightarrow b \in Fl_{\mathbf{C}}(a, b)$ se dice *Isomorfismo* cuando:

$$\exists g : b \longrightarrow a \in Fl_{\mathbf{C}}(b, a) / g \circ f = Id_a, f \circ g = Id_b$$

Observación 1.1.4. De la propia definición se deduce que g es única.

Notación 1.1.5. g recibe el nombre de *inversa* de f

Ejemplo 1.1.6. Definimos la categoría **Set** como aquella que tiene como objetos conjuntos y como flechas las aplicaciones entre conjuntos. Esta categoría está perfectamente definida ya que :

- Dado un conjunto A existe la aplicación $Id_A : A \longrightarrow A$ mediante $Id_A(a) := a \quad \forall a \in A$ y por ser aplicación entre conjuntos es flecha de la categoría
- la composición de aplicaciones entre conjuntos está bien definida, es asociativa y cualquier aplicación compuesta con la aplicación identidad es ella misma.

Los isomorfismos de esta categoría son las aplicaciones biyectivas entre conjuntos.

Ejemplo 1.1.7. La categoría **Grp** es aquélla cuyos objetos son grupos y cuyas flechas son los homomorfismos de grupos. Es claro que verifica los axiomas de categoría.

Los isomorfismos en este caso son los isomorfismos de grupos.

Ejemplo 1.1.8. Dado k un cuerpo, la categoría **Vect_k** es aquélla cuyos objetos son k -espacios vectoriales y cuyas flechas son las aplicaciones lineales entre k -espacios vectoriales. Es claro que verifica los axiomas de categoría.

Los isomorfismos en este caso son los isomorfismos espacios vectoriales.

Ejemplo 1.1.9. Categoría de los conjuntos abiertos que denotaremos por **Open(X)**:

Dado un espacio topológico X definimos **Open(X)** como la categoría que tiene como objetos los conjuntos abiertos de X y una única flecha o morfismo $U \longrightarrow V$ para cada par de abiertos relacionados por la inclusión $U \subseteq V$

En efecto **Open(X)** verifica las propiedades de categoría ya que :

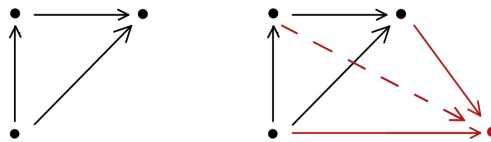
- Si $U \longrightarrow V$ y $V \longrightarrow W$ es porque $U \subseteq V$ y $V \subseteq W$ pero entonces se tiene $U \subseteq V \subseteq W$ y por tanto $U \longrightarrow W$ luego tenemos la composición.
- La asociatividad se tiene de forma trivial ya que nuestra flecha es única y simplemente indica la relación de contenido.
- Claramente dado $U \in Ob(\mathbf{Open}(X))$ tenemos que $U \subseteq U$ y por tanto existe la flecha identidad $U \longrightarrow U$

Ejemplo 1.1.10. Dado un conjunto parcialmente ordenado X se puede definir la categoría **Poset(X)** donde los objetos de la categoría son los elementos de X y existe una única flecha $x \longrightarrow y \quad \forall x, y \in X$ tales que $x \leq y$

la demostración de que es una categoría es análoga al anterior ejemplo solo que usando en vez de las propiedades de la inclusión de conjuntos las propiedades de conjunto parcialmente ordenado.

Ejemplo 1.1.11. Una relación de equivalencia aporta estructura de categoría sobre un conjunto. Basta tomar como objetos los elementos del conjunto y establecer una única flecha entre los elementos relacionados.

Observación 1.1.12. Una categoría \mathbf{C} puede verse intuitivamente como un grafo en el que los nodos son los objetos de la categoría y las aristas las flechas entre ellas que verifica que todo nodo tiene una arista en sí mismo (que graficamente vamos a obviar) que sería la identidad y además dadas dos aristas consecutivas la composición de ambas está en el grafo.



Estos ejemplos nos ilustran como necesariamente al añadir una arista consecutiva a otra tiene que aparecer forzosamente la composición de ambas.

Definición 1.1.13. Una categoría \mathbf{C} se dice *Categoría pequeña* cuando $Ob(\mathbf{C})$ es un conjunto ordinario.

Ejemplo 1.1.14. La categoría $\mathbf{Poset}(X)$ es un ejemplo de categoría pequeña.

Definición 1.1.15. Una categoría \mathbf{C} se dice *Categoría finita* cuando $|Ob(\mathbf{C})| < \infty$

Definición 1.1.16. Un *Grupoide* \mathbf{G} es una categoría pequeña en la que las flechas son invertibles, es decir:

$$\forall x, y \in Ob(\mathbf{G}) \quad \forall f : x \longrightarrow y \quad \exists g : y \longrightarrow x \quad / \quad f \circ g = Id_x \quad y \quad g \circ f = Id_y$$

Observación 1.1.17. Un grupoide con un solo elemento es un grupo

Definición 1.1.18. Dada \mathbf{C} una categoría una *Subcategoría* \mathbf{B} es una categoría que verifica:

- $Ob(\mathbf{B}) \subseteq Ob(\mathbf{C})$
- $Fl_{\mathbf{B}}(x, y) \subseteq Fl_{\mathbf{C}}(x, y) \quad \forall x, y \in Ob(\mathbf{B})$

- la composición y la identidad se mantienen

Cuando $Fl(\mathbf{B}) = Fl(\mathbf{C})$ se suele decir que la subcategoría es plena.

Definición 1.1.19. Dada una categoría \mathbf{C} se define su **Categoría opuesta** \mathbf{C}^{op} como aquélla que tiene los mismos objetos y las flechas en sentido opuesto, es decir:

- $Ob(\mathbf{C}) = Ob(\mathbf{C}^{op})$
- Dada $f : x \rightarrow y \in Fl_{\mathbf{C}}(x, y) \quad \exists f^{op} : y \rightarrow x \in Fl_{\mathbf{C}^{op}}(y, x)$ y recíprocamente.

Definición 1.1.20. $o \in Ob(\mathbf{C})$ es un **Objeto inicial** de $\mathbf{C} : \Leftrightarrow \forall y \in Ob(\mathbf{C}) \quad \exists! f : o \rightarrow y$

Definición 1.1.21. $u \in Ob(\mathbf{C})$ es un **Objeto final** de $\mathbf{C} : \Leftrightarrow \forall y \in Ob(\mathbf{C}) \quad \exists! f : y \rightarrow u$

Notación 1.1.22. los objetos finales se llaman en ocasiones objetos terminales.

Notación 1.1.23. $\exists!$ denota que “existe un único”

Observación 1.1.24. Aunque en ambas definiciones estamos pidiendo unicidad, se entiende que esta unicidad es siempre salvo isomorfismos.

1.2. Funtores

Definición 1.2.1. Dadas \mathbf{C} y \mathbf{D} dos categorías, un **Functor** de \mathbf{C} en \mathbf{D} es una aplicación $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ que lleva objetos de \mathbf{C} en objetos de \mathbf{D} y flechas de \mathbf{C} en flechas de \mathbf{D} verificando:

$$\forall x, y \in Ob(\mathbf{C}) \quad \forall f : x \rightarrow y \quad \exists F(f) : F(x) \rightarrow F(y) \in Fl(\mathbf{D})$$

De modo que :

$$1. \quad F(f' \circ f) = F(f') \circ F(f) \qquad 2. \quad F(Id_a) = Id_{F(a)} \quad \forall a \in Ob(\mathbf{C})$$

Notación 1.2.2. Denotaremos los funtores con letras mayúsculas.

Notación 1.2.3. \mathbf{C} recibirá el nombre de dominio de F y \mathbf{D} el nombre de codominio de F .

Observación 1.2.4. la situación para cada par de objetos con un flecha entre ellos sería la siguiente:

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & y \\ \downarrow F & & \downarrow F \\ F(x) & \xrightarrow{F(f)} & F(y) \end{array}$$

- $x, y \in \text{Ob}(\mathbf{C}) \Rightarrow F(x), F(y) \in \text{Ob}(\mathbf{D})$
- $F(f)$ es una flecha en \mathbf{D} por lo tanto tiene que respetar la composición y preservar la identidad.

Ejemplo 1.2.5. Dadas una categoría \mathbf{C} y un subcategoría de esta \mathbf{D} la inclusión es un funtor

Ejemplo 1.2.6. Tomemos las categorías \mathbf{Set} y \mathbf{Grp} . Definimos el funtor:

$$F : \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Grp}$$

$$U \rightsquigarrow G = \langle U \rangle$$

Donde $\langle U \rangle$ es el grupo libre generado por los elementos del conjunto U .

Claramente si entre dos conjuntos U, V hay una aplicación f podemos definir el siguiente homomorfismo de grupos entre $F(U)$ y $F(V)$:

$$F(U) \longrightarrow F(V)$$

$$g = \sum_{u_i \in U} \lambda_i u_i \rightsquigarrow \sum_{u_i \in U} \lambda_i f(u_i)$$

Ejemplo 1.2.7. Un ejemplo de funtores son aquellos que se conocen como “funtores de olvido” que lo que hacen a grosso modo es “olvidar la estructura de partida”, por ejemplo:

$$F : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$$

$$G \rightsquigarrow G$$

De forma que el grupo G pierde su estructura de grupo y pasa a verse simplemente como el conjunto de sus elementos.

Ejemplo 1.2.8. Definimos \mathbf{Top}_* como la categoría cuyos objetos son espacios topológicos con un punto base, (X, x_0) , y las flechas las aplicaciones continuas entre espacios punteados, es decir, aquellas que son continuas y además llevan el punto base del dominio en el punto base del codominio. Pues bien;

$$\pi_1 : \mathbf{Top}_* \longrightarrow \mathbf{Grp}$$

$$(X, x_0) \rightsquigarrow \pi_1(X, x_0)$$

Tal que dada $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$, $\pi_1(f) : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0) / \pi_1(f)([\alpha]) = [f \circ \alpha]$ es un funtor.

Notación 1.2.9. $\pi_1(X, x_0)$ denota el grupo fundamental

Definición 1.2.10. Dadas \mathbf{C} y \mathbf{D} un functor *Contravariante* de \mathbf{C} a \mathbf{D} es un functor $F : \mathbf{C}^{op} \rightarrow \mathbf{D}$

Notación 1.2.11. Sean F un functor *Covariante* (que no es contravariante) y G un functor contravariante:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 x & \xrightarrow{F} & F(x) \\
 f \downarrow & & \downarrow F(f) \\
 y & \xrightarrow{F} & F(y)
 \end{array} & g = f^{op} & \begin{array}{ccc}
 x & \xrightarrow{G} & G(x) \\
 \uparrow G(g) & & \uparrow G(g) \\
 y & \xrightarrow{G} & G(y)
 \end{array} & \begin{array}{ccc}
 x & \xrightarrow{G} & G(x) \\
 f \downarrow & & \downarrow G(f) \\
 y & \xrightarrow{G} & G(y)
 \end{array}
 \end{array}$$

En vez de usar es segundo diagrama para representar G se suele usar el tercero , donde f es un flecha en la categoría y no en su opuesta.

Definición 1.2.12. Dadas una categoría pequeña \mathbf{I} y \mathbf{C} una categoría, un *Diagrama* es simplemente un functor $F : \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{C}$

Definición 1.2.13. Dadas \mathbf{I} una categoría pequeña , \mathbf{C} una categoría y $O \in Ob(\mathbf{C})$ Se define el *Diagrama constante* $Const_O$ como el diagrama que lleva cualquier objeto de \mathbf{C} en O y cualquier flecha de \mathbf{C} en Id_O

Definición 1.2.14. Sea k un cuerpo y \mathbf{C} una categoría. Una *Representación de \mathbf{C}* es un functor $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Vect}_k$

Observación 1.2.15. Nótese que esta definición generaliza el concepto de representación de grupos.

1.3. Transformaciones naturales y equivalencia de categorías

Definición 1.3.1. Dados dos funtores $F, G : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$, una *Transformación natural* $\eta : F \Rightarrow G$ consiste en una familia de flechas $\{\eta(x) : F(x) \rightarrow G(x)\}_{x \in Ob(\mathbf{C})}$ verificando que $\forall f : x \rightarrow y$ el siguiente cuadrado es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 F(x) & \xrightarrow{\eta(x)} & G(x) \\
 F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\
 F(y) & \xrightarrow{\eta(y)} & G(y)
 \end{array}$$

Donde ser conmutativo significa que $G(f) \circ \eta(x) = \eta(y) \circ F(f)$

Notación 1.3.2. Las flechas $\{\eta(x) : F(x) \longrightarrow G(x)\}$ reciben el nombre de componentes de la transformación η .

Notación 1.3.3. denotaremos habitualmente las transformaciones naturales del siguiente modo

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ \curvearrowright & & \curvearrowleft \\ \mathbf{C} & \Downarrow \eta & \mathbf{D} \\ \curvearrowleft & & \curvearrowright \\ & G & \end{array}$$

Definición 1.3.4. Decimos que dos funtores F y G son *Naturalmente isomorfos* si entre ellos existe una transformación natural η tal que $\forall x \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ la flecha $\eta(x)$ es un isomorfismo.

Observación 1.3.5. el conjunto de flechas inversas, cada una de las cuales denotaremos por $\eta^{-1}(x)$, da lugar a la transformación natural inversa $\eta^{-1} : G \longrightarrow F$

Observación importante 1.3.6. Si tomamos como objetos los funtores entre dos categorías y como flechas las transformaciones naturales entre ellos tenemos una categoría bien definida que denotaremos por $\mathbf{Fun}(\mathbf{C}, \mathbf{D})$

Al igual que en todas las estructuras que se estudian en matemáticas como los grupos, los espacios vectoriales o los espacios topológicos, aparece la necesidad de compararlas entre sí y saber cuando hay una equivalencia entre ellas. Dados dos grupos tenemos el concepto de ser isomorfos, dados dos espacios topológicos tenemos el concepto de ser homeomorfos, etc. Pues bien, entre categorías también vamos a tener este concepto que se conocerá como equivalencia de categorías.

Definición 1.3.7. Un par de funtores $F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ y $G : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{C}$ definen una *Equivalencia de categorías* cuando existen dos isomorfismos de funtores:

$$\eta : \text{Id}_{\mathbf{C}} \longrightarrow G \circ F \quad \text{y} \quad \theta : F \circ G \longrightarrow \text{Id}_{\mathbf{D}}$$

1.4. Conos y limites

En esta sección trabajaremos con diagramas $F : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{C}$.

Definición 1.4.1. Dado un diagrama $F : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{C}$ un *Cono en F* es una transformación natural de un diagrama constante a F .

Veamos una descripción más explícita de la definición:

Es la elección de un $l \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ y una colección de flechas $\psi_x : l \rightarrow F(x)$ de forma que si $f : x \rightarrow y$ es una flecha en \mathbf{I} el siguiente diagrama conmuta :

$$\begin{array}{ccc} F(x) & \xrightarrow{F(f)} & F(y) \\ & \swarrow \psi(x) & \nearrow \psi(y) \\ & l & \end{array}$$

Es decir; $\psi_y = F(f) \circ \psi_x$

Observación 1.4.2. La colección de los conos de un diagrama F forman una categoría que llamaremos $\mathbf{Cone}(F)$. Los objetos son los conos (l, ψ_x) y las flechas entre conos son flechas $u : l' \rightarrow l$ tales que $\psi'_x = \psi_x \circ u$

Definición 1.4.3. Definimos el **Límite** de un diagrama F como el objeto final o terminal de $\mathbf{Cone}(F)$

Notación 1.4.4. Dado un diagrama $F : \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{C}$ denotamos su límite como $(\varprojlim F, \psi_x)$ aunque habitualmente los denotaremos por $\varprojlim F$ cometiendo un pequeño abuso de notación.

Observación 1.4.5. Si desglosamos un poco la definición nos encontramos con que el límite de F es el par formado por $\varprojlim F \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ y la colección de flechas $\psi_x : \varprojlim F \rightarrow F(x)$ que hacen conmutativo el diagrama, de tal forma que si escogemos otro cono, es decir, otro objeto l' con sus flechas ψ'_x entonces existe una única flecha $u : l' \rightarrow \varprojlim F$ que conmuta con todo lo anterior, es decir, u es una flecha de $\mathbf{Cone}(F)$.

$$\begin{array}{ccc} F(x) & \xrightarrow{F(f)} & F(y) \\ & \swarrow \psi_x & \nearrow \psi_y \\ & \varprojlim F & \\ & \swarrow \psi'_x & \nearrow \psi'_y \\ & l' & \end{array}$$

$\exists! u$

Donde todos los triángulos del diagrama conmutan.

Al final lo que estamos diciendo es que efectivamente dado $(l', \psi'_x) \in \text{Ob}(\mathbf{Cone}(F)) \exists! u$ flecha de (l', ψ'_x) en $(\varprojlim F, \psi_x)$ y por tanto se verifica la definición de ser un objeto final.

Ejemplo 1.4.6. Supongamos \mathbf{I} una categoría finita y discreta con n elementos y como única flecha la identidad. Tomamos X un espacio topológico y su categoría de abiertos asociada $\mathbf{Open}(X)$.

Un funtor $F : \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{Open}(X)$ es simplemente una elección de n abiertos de X (ya que la condición de funtor se va a cumplir trivialmente por ser la identidad la única flecha en \mathbf{I})

Un cono de F va a ser cualquier abierto de X (y por tanto objeto de $\mathbf{Open}(X)$) contenido en toda la selección de abiertos que definen el funtor F (ya que en $\mathbf{Open}(X)$ las flechas quedan determinadas por la inclusión)

$$\begin{array}{ccc}
 F(i) = U_i & & F(j) = U_j \\
 & \swarrow \psi_j & \searrow \psi_i \\
 & l = V &
 \end{array}$$

Donde V es un abierto contenido en $(U_i)_{i \in \text{Ob}(\mathbf{I})}$ y ψ_i simplemente marca la inclusión $V \subseteq U_i$.

El límite de F será por lo tanto el abierto más grande contenido en la selección de abiertos (de forma que cualquier otro abierto que forme un cono estará contenido en este) que por definición es la intersección de los mismos, es decir:

$$\varprojlim F = \bigcap_{i \in \text{Ob}(\mathbf{I})} F(i) = \bigcap_{i \in \text{Ob}(\mathbf{I})} U_i$$

La situación para U_i, U_j abiertos de X que además son $F(i), F(j)$ respectivamente y V abierto de X contenido en U_i y en U_j sería la siguiente:

$$\begin{array}{ccc}
 F(i) & & F(j) \\
 & \swarrow & \searrow \\
 & \varprojlim F = U_j \cap U_i & \\
 & \uparrow \exists! & \\
 & V &
 \end{array}$$

1.5. Coconos y colímites

Vamos ahora a presentar los que serían conceptos duales a los conos y límites.

Definición 1.5.1. Dado un diagrama $F : \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{C}$ un **Cocono** es una transformación natural de F a un diagrama constante.

Más específicamente, es la elección de un $c \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ y una colección de flechas en \mathbf{C} $\psi_x : F(x) \rightarrow c$ de forma que si $f : x \rightarrow y$ flecha en \mathbf{I} el siguiente diagrama conmuta :

$$\begin{array}{ccc} & c & \\ \psi_x \nearrow & & \nwarrow \psi_y \\ F(x) & \xrightarrow{F(f)} & F(y) \end{array}$$

Es decir; $\psi_x = \psi_y \circ F(f)$

Observación 1.5.2. La colección de los coconos de un diagrama F forman una categoría que llamaremos $\mathbf{CoCone}(F)$. Los objetos son los conos (c, ψ_x) y las flechas entre conos son flechas $u : c \rightarrow c'$ tales que $\psi'_x = u \circ \psi_x$

Definición 1.5.3. Definimos el *Colímite* de un diagrama F como el objeto inicial de $\mathbf{CoCone}(F)$

Notación 1.5.4. Dado un diagrama $F : \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{C}$ denotamos su colímite como $(\varinjlim F, \psi_x)$ aunque habitualmente los denotaremos por $\varinjlim F$ cometiendo un pequeño abuso de notación.

Observación 1.5.5. Si desglosamos un poco la definición nos encontramos con que el colímite de F es el par formado por $\varinjlim F \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ y la colección de flechas $\psi_x : F(x) \rightarrow \varinjlim F$ conmutativas con el diagrama, de tal forma que si escogemos otro elemento c' con sus flechas ψ'_x entonces existe una única flecha $u : \varinjlim F \rightarrow c'$ que conmuta con todo lo anterior, es decir, u es una flecha de $\mathbf{CoCone}(F)$.

$$\begin{array}{ccc} & c' & \\ & \uparrow u & \\ \psi'_x \nearrow & \varinjlim F & \nwarrow \psi'_y \\ \psi_x \nearrow & \uparrow & \nwarrow \psi_y \\ F(x) & \xrightarrow{F(f)} & F(y) \end{array}$$

Donde todos los triángulos del diagrama conmutan.

Al final lo que estamos diciendo es que efectivamente dado $(c', \psi'_x) \in \text{Ob}(\mathbf{CoCone}(F)) \quad \exists! u$ flecha de $(\varinjlim F, \psi_x)$ en (c', ψ'_x) y por tanto se verifica la definición de ser un objeto inicial.

Ejemplo 1.5.6. Para ilustrar la dualidad existente entre el límite y el colímite de un funtor veamos el colímite en el ejemplo 1.4.6. Supongamos \mathbf{I} una categoría finita y discreta con n elementos y como única flecha la identidad. Tomamos X un espacio topológico y su categoría de abiertos asociada $\mathbf{Open}(X)$.

Un functor $F : \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{Open}(X)$ es simplemente una elección de n abiertos de X (ya que la condición de functor se va a cumplir trivialmente por ser la identidad la única flecha en \mathbf{I})

Un cocono de F va a ser cualquier abierto de X (y por tanto objeto de $\mathbf{Open}(X)$) que contenga a toda la selección de abiertos que define el functor F (ya que en $\mathbf{Open}(X)$ las flechas quedan determinadas por la inclusión)

$$\begin{array}{ccc}
 & c = V & \\
 \psi_i \nearrow & & \nwarrow \psi_j \\
 F(i) = U_i & & F(j) = U_j
 \end{array}$$

Donde V es un abierto que contiene $(U_i)_{i \in \text{Ob}(\mathbf{I})}$ y ψ_i simplemente marca la inclusión $V \subseteq U_i$.

El límite de F será por lo tanto el abierto más pequeño que contenga la selección de abiertos (de forma que cualquier otro abierto que forme un cono contendrá a este) que por definición es la unión de los mismos, es decir:

$$\varinjlim F = \cup_{i \in \text{Ob}(\mathbf{I})} U_i = \cup_{i \in \text{Ob}(\mathbf{I})} F(i)$$

La situación para U_i, U_j abiertos de X que además son $F(i), F(j)$ respectivamente y V abierto de X contenido en U_i y en U_j sería la siguiente:

$$\begin{array}{ccc}
 & V & \\
 & \uparrow & \\
 \exists! u & & \\
 & \downarrow & \\
 \varinjlim F = U_j \cup U_i & & \\
 \nearrow & & \nwarrow \\
 F(i) & & F(j)
 \end{array}$$

Capítulo 2

Prehaces y haces

En este capítulo introduciremos el concepto clásico de haz y algunos ejemplos. Trabajaremos en este apartado sobre espacios topológicos pues es ahí donde los haces encontrarán su definición. El principal interés que los haces tendrán para nuestro trabajo es la expresión precisa de la relación entre la información expresada localmente y la información global de un sistema cuya relevancia quedará patente en el Capítulo 6.

2.1. Prehaces y morfismos de prehaces

Comenzaremos explicando el concepto de prehaz.

Definición 2.1.1. Un *Prehaz sobre conjuntos* \mathcal{F} en un espacio topológico X consiste en una aplicación tal que:

- $\forall U$ abierto de X , $\mathcal{F}(U)$ es un conjunto
- $\forall U, V$ abiertos de X , $U \subseteq V$, existe una aplicación $res_U^V : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ verificando:
 - $res_U^U = Id_{\mathcal{F}(U)}$, $\forall U \subseteq X$ abierto.
 - Dados $U \subseteq V \subseteq W$ abiertos de X se tiene $res_U^W = res_U^V \circ res_V^W$

Notación 2.1.2. La aplicación $res_U^V : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ recibe el nombre de ***Aplicación restricción***

Notación 2.1.3. Los elementos $\mathcal{F}(U)$ se denominan ***Secciones*** de \mathcal{F} en U

Notación 2.1.4. Dados $U \subseteq V$ abiertos de X y $s \in \mathcal{F}(V)$ denotamos $s|_U = res_U^V(s)$

Observación 2.1.5. Es interesante comparar esta noción de prehaz con la ya vista noción de funtor.

Tomemos la categoría $\mathbf{Open}(X)$ y la categoría \mathbf{Set} ambas explicadas en los ejemplos 1.1.9 y 1.1.6 respectivamente.

Los objetos de $\mathbf{Open}(X)$ son los abiertos de X que un prehaz \mathcal{F} lleva en un conjunto que es por tanto un objeto de la categoría \mathbf{Set} .

Por otra parte entre dos abiertos U y V objetos de $\mathbf{Open}(X)$ existe una flecha $U \rightarrow V$ si y solo si $U \subseteq V$ en cuyo caso $\exists \text{res}_U^V : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ que por ser una aplicación ente conjuntos pertenece al conjunto de flechas $\text{Fl}_{\mathbf{Set}}(\mathcal{F}(V), \mathcal{F}(U))$ de \mathbf{Set} .

Además las condiciones impuestas sobre esta restricción hacen que lleve la flecha identidad en $\mathbf{Open}(X)$ a la identidad en \mathbf{Set} y que se respete la composición de flechas.

Concluimos entonces que un prehaz es un caso particular de funtor contravariante en el que el dominio es $\mathbf{Open}(X)$ y el codominio es \mathbf{Set} .

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & V \\ \mathcal{F} \downarrow & & \downarrow \mathcal{F} \\ \mathcal{F}(U) & \xleftarrow{\text{res}_U^V} & \mathcal{F}(V) \end{array}$$

Definición 2.1.6. Sean $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ prehaces en X . Un **Morfismo de prehaces** $\varphi : \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$ es una familia de aplicaciones $\varphi_U : \mathcal{F}_1(U) \rightarrow \mathcal{F}_2(U) \quad \forall U$ abierto en de X , verificando que dados $U \subseteq V$ abiertos de X el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_1(V) & \xrightarrow{\varphi_V} & \mathcal{F}_2(V) \\ \text{res}_U^V \downarrow & & \downarrow \text{res}_U^V \\ \mathcal{F}_1(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & \mathcal{F}_2(U) \end{array}$$

Observación 2.1.7. Teniendo en cuenta la observación 2.1.5 se puede ver claramente que si vemos los prehaces como funtores un morfismo de prehaces no es más que una transformación natural entre ellos.

Observación 2.1.8. Aunque la definición original establece que el codominio de un prehaz es la categoría \mathbf{Set} aportar estructura a los conjuntos de llegada como por ejemplo la de grupos o módulos, no modificará sus propiedades y comportamiento y por ello admitiremos los funtores que acaben en categorías con más estructura sobre la de conjuntos como validos. No obstante tendremos que requerir que las restricciones respeten la estructura definida, es decir, si el codominio es la categoría \mathbf{Grp} entonces las restricciones tendrán que ser homomorfismos de grupos ya que tienen que ser flechas de la categoría a la que llegamos para ser el prehaz un funtor.

Concluimos entonces que un **Prehaz sobre una categoría \mathbf{D}** va a ser cualquier funtor $\mathcal{F} : X \rightarrow \mathbf{D}$ con \mathbf{D} una categoría cuyos objetos sean conjuntos pudiendo ser estos dotados de una estructura algebraica.

Definición 2.1.9. Tomando los prehaces sobre conjuntos en X como objetos y los morfismos entre prehaces como flechas se define una categoría que denotaremos como $\mathbf{PSh}(X)$. Cuando en vez de la categoría \mathbf{Set} estemos tomando otra como codominio será recomendable marcarlo en la notación del siguiente modo: $\mathbf{PSh}(X;\mathbf{D})$, donde \mathbf{D} es la categoría a la que llega nuestro prehaz.

Veamos algunos ejemplos de este nuevo concepto:

Ejemplo 2.1.10. Sea X un espacio topológico, V un abierto de X y E un conjunto arbitrario. Tomamos $Map_E(V)$ como el conjunto formado por todas las aplicaciones entre V y E , $f : V \rightarrow E$.

Dados $U \subseteq V$ abiertos definimos:

$$\begin{aligned} res_U^V : Map_E(V) &\longrightarrow Map_E(U) \\ f &\rightsquigarrow res_U^V(f) = f|_U \end{aligned}$$

Tal y como lo hemos definido Map_E es un prehaz.

Ejemplo 2.1.11. Dados X, Y espacios topológicos. U abierto de X . Definimos

$$\mathcal{C}_{X,Y}(U) := \{f : U \rightarrow Y \mid f \text{ continua}\}$$

Tomando nuevamente como aplicación restricción la restricción usual de aplicaciones tenemos que $\mathcal{C}_{X,Y}$ es un prehaz.

Añadiendo la condición adecuada sobre definición de prehaz obtendremos la noción de haz.

2.2. Haces

El concepto de haz viene históricamente motivado por la siguiente situación:

Ejemplo 2.2.1. Sea X un espacio topológico arbitrario y U un abierto de este con un recubrimiento por abiertos $U = \{U_i\}_{i \in I}$.

Sabemos que dadas $\{f_i\}_{i \in I}$ un conjunto de aplicaciones tales que $f_i : U_i \rightarrow E$, siendo E un conjunto arbitrario, si se verifica que $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j} \forall i, j \in I$ entonces se puede definir una única aplicación extensión $f : U \rightarrow E$ tal que $f|_{U_i} = f_i \forall i \in I$

Tomemos en este contexto el prehaz $\mathcal{F} = Map_E$ haz de funciones ya visto en el ejemplo 2.1.10 se tiene que:

Dadas $\{f_i\}_{i \in I}$ de modo que $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ verificando $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j} \forall i, j \in I$ entonces

$\exists! f : U \rightarrow E$ extensión de las anteriores pero esto significa que $f \in \mathcal{F}(U)$ y además $f|_{U_i} = f_i$. Esta situación en la que al pasar a un contexto global mediante f no perdemos en absoluto la información local que nos aportaban las f_i motiva la siguiente definición:

Definición 2.2.2. Sea X un espacio topológico. Un prehaz \mathcal{F} de X se dice **Haz** cuando $\forall U$ abierto de X y $\forall \{U_i\}_{i \in I}$ recubrimiento abierto de U se verifica que:

1. Dados $s_i \in \mathcal{F}(U_i) \quad \forall i \in I \quad / \quad s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j} \quad \Rightarrow \quad \exists s \in \mathcal{F}(U) / \quad s|_{U_i} = s_i$
2. $s, s' \in \mathcal{F}(U) \quad / \quad s|_{U_i} = s'|_{U_i} \quad \forall i \in I \quad \Rightarrow \quad s = s'$

Observación 2.2.3. Dado que un haz es por definición un prehaz no hay ninguna incongruencia en la definir un morfismo de haces tal y como se estableció en prehaces pero para el caso de un haz.

Definición 2.2.4. La categorías cuyos elementos son haces en X y sus flechas los morfismos de haces se denotará por $\mathbf{Sh}(X)$. De igual modo cuando el codominio del funtor sea diferente de la categoría \mathbf{Set} lo marcaremos con la notación $\mathbf{Sh}(X; \mathbf{D})$

Ejemplo 2.2.5. El ejemplo 2.1.11 es un ejemplo de haz.

Este hecho se debe a la aplicación directa del teorema de la función combinada que establece que la extensión f de un conjunto de funciones continuas $\{f_i\}_{i \in I}$ que verifican la condición necesaria para que su extensión esté bien definida como función ($f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j} \quad \forall i, j \in I$) es continua si y solo si cada una de las f_i lo son.

Ejemplo 2.2.6. En un principio podríamos caer en el error de pensar que el concepto de haz es completamente general y que la globalización conserva siempre las propiedades locales pero basta ver el siguiente ejemplo para percatarse de que esto es un equívoco: La conocida Esfera de Riemann es un compacto. Por tanto el estudio de la variable compleja nos enseña que las únicas funciones holomorfas cuyo dominio sea la Esfera de Riemann son las constantes.

Supongamos ahora una $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa no constante, su extensión a la Esfera de Riemann de forma holomorfa es imposible ya que no puedo tener una función constante que restringida a un abierto no lo sea, por lo tanto cualquier extensión de f a la Esfera de Riemann va a perder la propiedad local de ser holomorfa.

En otras palabras, si U es un abierto de \mathbb{C} y \mathcal{F} es el prehaz de las funciones holomorfas (que lleva cada abierto en el conjunto de las funciones holomorfas que tienen como dominio dicho abierto) tendremos que $\mathcal{F}(\mathbb{C}^*) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ dista de ser inyectiva, lo que significa que no toda la información local se integra globalmente.

Notación 2.2.7. \mathbb{C}^* denota la Esfera de Riemann

Como ya hemos visto en la observación 2.1.5 un prehaz \mathcal{F} se puede ver como un funtor contravariante es decir $\mathcal{F} : (\mathbf{Open}(X))^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$, pudiendo el codominio \mathbf{Set} ser sustituido por otra categoría con más estructura \mathbf{D} , viendo los haces desde esta perspectiva podemos introducir el concepto de tallo:

Definición 2.2.8. Dado un prehaz \mathcal{F} y un $x \in X$ llamamos **Tallo** de \mathcal{F} en x de X al colímite :

$$\mathcal{F}_x := \varinjlim_{U(x)} \mathcal{F}(U)$$

Donde $U(x) := \{U \text{ abierto de } X / x \in U\}$

Ejemplo 2.2.9. Dado el prehaz definido en el ejemplo 2.1.11 se puede ver facilmente que dado un $p \in X$ su tallo se corresponde con el concepto clásico de conjunto de gérmenes de funciones en un punto.

Por un lado recordemos que nuestro prehaz (que de hecho hemos visto que es un haz) actúa sobre cada abierto de X del siguiente modo:

$$\mathcal{C}_{X,Y}(U) := \{f : U \rightarrow Y \ / \ f \text{ continua}\}$$

En pos de simplificar la notación y fijados los espacios X, Y denotaremos de aquí en adelante $\mathcal{C}_{X,Y}(U)$ como $\mathcal{C}(U)$.

Por definición de tallo tenemos que $\mathcal{C}_p := \varinjlim_{U(p)} \mathcal{C}(U)$ de forma que dado $A \in \mathbf{Ob}(\mathbf{Set})$ se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ \psi'_U \nearrow & \uparrow \exists! u & \searrow \psi'_V \\ \varinjlim \mathcal{C} = \mathcal{C}_p & & \\ \psi_U \nearrow & & \searrow \psi_V \\ \mathcal{C}(U) & \xrightarrow{\text{res}_U^V} & \mathcal{C}(V) \end{array}$$

Siendo U, V entornos abiertos de p tales que $V \subseteq U$.

Sea $\mathcal{P} = \{(U, f) / p \in U \text{ abierto de } X, f : U \rightarrow Y \text{ continua}\}$ definimos la siguiente relación de equivalencia sobre \mathcal{P} :

$$(U, f) \sim (V, g) \Leftrightarrow \exists W \subseteq U \cap V \ / \ f|_W = g|_W$$

Tenemos entonces el conjunto de los gérmenes de aplicaciones continuas en p , $\mathcal{C}_p^G = \frac{\mathcal{P}}{\sim}$, que por ser un conjunto cociente es objeto de la categoría \mathbf{Set}

Dado cualquier U entorno abierto de p tenemos la aplicación de paso al cociente que por ser aplicación entre conjuntos es una flecha en **Set**;

$$\begin{aligned} \pi_U : \mathcal{C}(U) &\longrightarrow \mathcal{C}_p^G \\ f &\longrightarrow [(U, f)] \end{aligned}$$

Por aplicación directa de que \mathcal{C}_p es colímite tenemos:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{C}_p^G & \\ \pi_U \nearrow & \uparrow \exists! & \nwarrow \pi_V \\ & \mathcal{C}_p & \\ \psi_U \nearrow & & \nwarrow \psi_V \\ \mathcal{C}(U) & \xrightarrow{\text{res}_U^V} & \mathcal{C}(V) \end{array}$$

Donde :

$$\begin{aligned} u : \mathcal{C}_p &\longrightarrow \mathcal{C}_p^G \\ s &\longrightarrow [(U, f)] / \psi_U(f) = s \end{aligned}$$

Pues bien se puede ver facilmente que u es un isomorfismo (aplicación biyectiva) y por tanto \mathcal{C}_p^G es el tallo que buscábamos:

- u es trivialmente sobreyectiva ya que dado $[(U, f)]$ se tiene que $f \in \mathcal{C}(U) \Rightarrow \exists \psi_U(f) = s \in \mathcal{C}_p / u(s) = [(U, f)]$
- u es inyectiva ya que dados $s, s' / u(s) = u(s') \Rightarrow \exists (U, f) \sim (V, g) / \psi_U(f) = s$ y $\psi_V(g) = s' \Rightarrow \exists W \subseteq U \cap V$ entorno abierto de p tal que $f|_W = g|_W$ lo que da lugar al siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{C}_p & \\ \psi_U \nearrow & \uparrow & \nwarrow \psi_V \\ & \mathcal{C}(W) & \\ \text{res}_W^U \nearrow & & \nwarrow \text{res}_W^U \\ \mathcal{C}(U) & & \mathcal{C}(V) \end{array}$$

Provocando que $s = \psi_U(f) = \psi_W(f|_W) = \psi_W(g|_W) = \psi_V(g) = s'$

Definición 2.2.10. Un haz $\mathcal{F} : \text{Open}(X)^{op} \rightarrow \mathbf{D}$ se dice **Flácido** si cada sección de \mathcal{F} en un abierto U de X puede ser extendida a una sección global, es decir:

$$\text{res}_U^X : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(U) \quad \text{es sobreyectiva}$$

Observación 2.2.11. Los haces flácidos se caracterizan porque toda la información local procede de datos globales. Esto es una condición especial del haz que se da en casos muy concretos.

Capítulo 3

Haces celulares

En este capítulo introduciremos el concepto de haz celular que va a ser elemento crucial en el entendimiento del capítulo 6. Este concepto nos proporcionará una descripción combinatoria cómoda de un haz sobre un complejo celular finito.

Para ello primero debemos comprender la noción de complejo celular regular:

3.1. Complejos celulares regulares

En esta sección estudiaremos el concepto de complejo celular, lo ilustraremos con ejemplos y le daremos estructura de categoría.

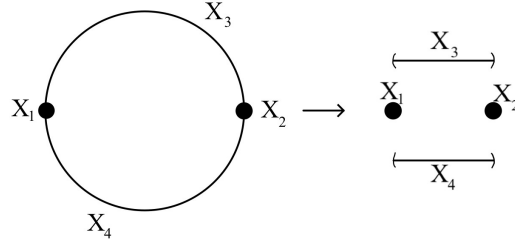
Definición 3.1.1. Un *Complejo celular regular* X es un espacio topológico dotado de una partición $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{P}_x}$ que verifica las siguientes propiedades:

- X localmente finito:
 $\forall x \in X \quad \exists U$ entorno abierto de $x \quad / \quad U$ interseca con un número finito de X_α
- X_α homeomorfo a \mathbb{R}^k para algún k
- Axioma de frontera: Si $\overline{X_\alpha} \cap X_\beta \neq \emptyset \Rightarrow X_\beta \subseteq \overline{X_\alpha}$
- El par $X_\alpha \subseteq \overline{X_\alpha}$ es homeomorfo al par $Int(B^k) \subseteq B^k$ es decir;
 $\exists \varphi : B^k \longrightarrow \overline{X_\alpha}$ homeomorfismo tal que $\varphi(Int(B^k)) = X_\alpha$

Notación 3.1.2. $\overline{X_\alpha}$ denota la frontera topológica de X_α y B^k denota una bola cerrada de \mathbb{R}^k

Notación 3.1.3. Cuando X_α sea homeomorfa a \mathbb{R}^k diremos que es una *Celda de dimensión k* o *k -celda*

Ejemplo 3.1.4. La circunferencia \mathcal{S}^1 puede verse como un complejo celular regular donde $X = \mathcal{S}^1$ y tomamos la partición $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{P}_x} = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ donde $X_1 = \{(1, 0)\}$, $X_2 = \{(-1, 0)\}$, $X_3 = \{(x, y) \in \mathcal{S}^1 / y > 0\}$, $X_4 = \{(x, y) \in \mathcal{S}^1 / y < 0\}$



Veamos que efectivamente se verifica la definición:

- la condición de ser localmente finito se verifica trivialmente puesto que la partición que hemos dado es finita.
- $X_1 = \{(1, 0)\}$, $X_2 = \{(-1, 0)\}$ son puntos, luego homeomorfos a \mathbb{R}^0 y X_3, X_4 son homeomorfos al intervalo abierto $(0, 1)$ y por tanto homeomorfos a \mathbb{R}
- Se verifica el axioma de frontera ya que:
 - $\bar{X}_3 = X_3 \cup (X_1 \cup X_2)$, $\bar{X}_4 = X_4 \cup (X_1 \cup X_2)$
 - $X_i \cap \bar{X}_3 = X_i \neq \emptyset \quad \forall i \in \{1, 2\}$, $X_i \cap \bar{X}_4 = X_i \neq \emptyset \quad \forall i \in \{1, 2\}$
 - $\bar{X}_3 \cap X_4 = \emptyset$ y $\bar{X}_4 \cap X_3 = \emptyset$
 - $\bar{X}_i = X_i \quad \forall i \in \{1, 2\}$ y su intersección es vacía
- Por último se tiene que:
 - El par $X_i = \bar{X}_i$ es homeomorfo a $Int(B^0) = B^0 \quad \forall i \in \{1, 2\}$
 - El par $X_j \subset \bar{X}_j$ es homeomorfo al par $Int(B^1) = (0, 1) \subset B^1 = [0, 1] \quad \forall j \in \{3, 4\}$

Notación 3.1.5. Cuando se verifica que $\bar{X}_\alpha \cap X_\beta \neq \emptyset \Rightarrow X_\beta \subseteq \bar{X}_\alpha$ decimos que X_β es una **cara** de X_α

En el ejemplo 3.1.4 tendríamos que X_1, X_2 son caras de X_3

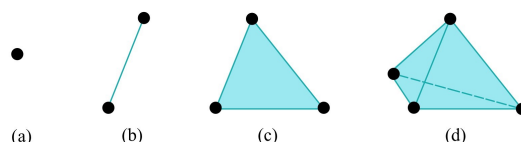
Complejos simpliciales

los complejos simpliciales son un caso particular de complejos celulares regulares. Este es un ejemplo de vital importancia para el capítulo 6.

Para empezar, es primordial comprender que es un p -símplice:

Definición 3.1.6. Un p -*Símplice* s en \mathbb{R}^n consiste en la envoltura convexa de una colección de $(p+1)$ puntos $\{x_0, \dots, x_p\}$ de \mathbb{R}^n donde $\{x_1 - x_0, \dots, x_p - x_0\}$ forman un conjunto linealmente independiente.

Ejemplo 3.1.7. En la siguiente imagen encontramos ejemplos de diferentes p -símplices:

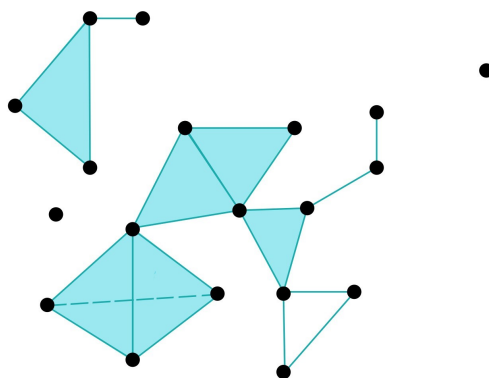


(a) es un ejemplo de 0-símplice, (b) es un ejemplo de 1-símplice, (c) es un ejemplo de 2-símplice y (d) es un ejemplo de 3-símplice.

Definición 3.1.8. Una envoltura convexa de cualquier conjunto no vacío de p puntos de un p -símplice se llama *Cara* del símplice.

Definición 3.1.9. Un *Complejo simplicial* (finito) s consiste en un conjunto finito de puntos (vértices), líneas (aristas), triángulos y sus generalizaciones n -dimensionales (n -símplices) verificando:

- Si un símplice pertenece a s entonces todas sus caras pertenecen a s
- si dos símplices de s se cortan entonces su intersección es una cara común.



Ejemplo 3.1.10. Los grafos (vistos como subespacios topológicos de \mathbb{R}^3) son un caso particular de complejos simpliciales donde el mayor n -símplice que podemos encontrar es un 1-símplice.

Estos complejos simpliciales tal y como están definidos pueden entenderse como complejos celulares donde las n -celdas coinciden con el interior de los n -símplices. Para ello simplemente tenemos que tener cuidado de definir la partición de forma adecuada.

Observación 3.1.11. A partir del axioma de frontera (Véase 3.1.1) podemos definir una relación de orden en la partición:

$$\beta \leq \alpha \Leftrightarrow X_\beta \subseteq \overline{X_\alpha}$$

Definición 3.1.12. Dado X un complejo celular podemos definir una categoría donde los objetos serán los elementos de la partición $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{P}_X}$ y las flechas son las dadas por la relación de orden (Entre X_β y X_α existe una única flecha $X_\beta \rightarrow X_\alpha \Leftrightarrow X_\beta \subseteq \overline{X_\alpha}$). Denotaremos esta categoría como $\mathbf{Cell}(X)$.

Así mismo tenemos una categoría inducida sobre \mathcal{P}_X donde los objetos son los elementos $\{\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{P}_X}$ y las flechas las dadas por la relación de orden. Denotaremos esta categoría mediante \mathbf{P} .

Observación 3.1.13. Cabe señalar que las categorías $\mathbf{Cell}(X)$ y \mathbf{P} no son solo equivalentes sino que entre ellas hay un isomorfismo de categorías total. Esto se debe a que realmente entre las dos categorías la única diferencia real es el cambio de notación entre los elementos de la partición y los subíndices que los identifican.

Con lo visto hasta el momento estamos ahora sí en disposición de definir el concepto de haz celular:

3.2. Haz celular

Definición 3.2.1. Dado un complejo celular regular X y \mathbf{D} una categoría ¹ un *Haz celular* \mathcal{F} evaluado en \mathbf{D} sobre X es un funtor:

$$\mathcal{F} : \mathbf{Cell}(X) \longrightarrow \mathbf{D}$$

Observación 3.2.2. Como ya hemos visto, se tiene una equivalencia entre las categorías $\mathbf{Cell}(X)$ y \mathbf{P} de forma que $\mathcal{F}(X_\alpha)$ puede ser denotado como $\mathcal{F}(\alpha)$ sin dar lugar a ninguna clase de error.

¹Solo se admiten categorías \mathbf{D} cuyos objetos sean conjuntos y las flechas aplicaciones entre ellos aunque estos puedan haber sido dotados de una estructura de mayor complejidad que debe ser respetada por dichas aplicaciones.

$$\begin{array}{ccccc}
 \beta & \dashleftarrow & X_\beta & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{F}(\beta) \\
 \beta \leq \alpha \downarrow & & X_\alpha \subseteq \bar{X}_\alpha \downarrow & & \downarrow \rho_{\alpha,\beta} \\
 \alpha & \dashleftarrow & X_\alpha & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{F}(\alpha)
 \end{array}$$

Definición 3.2.3. Tomando los haces celulares sobre \mathbf{D} en X como objetos y como flechas las transformaciones naturales entre ellos tenemos la categoría que denotaremos como $\mathbf{ShCell}(X;\mathbf{D})$.

Dado que los haces celulares son por definición funtores y ya hemos visto que la categoría cuyos elementos son funtores y sus flechas transformaciones naturales está bien definida como tal la anterior definición es coherente.

Ejemplo 3.2.4. Tomemos como complejo celular el ya visto en el ejemplo 3.1.4 y $\mathbf{Cell}(\mathcal{S}^1)$ la categoría asociada.

Por otra parte tomamos $\mathbf{D}=\mathbf{Grp}$ (la categoría que como objetos tiene grupos y como flechas los homomorfismos de grupos).

$\mathcal{F} : \mathbf{Cell}(\mathcal{S}^1) \longrightarrow (\mathbf{Grp})^{op}$ que lleva cada X_α en el $H_i(\mathcal{S}^1)$ (Véase capítulo 5) con $i = \text{Dim}(X_\alpha)$ es un ejemplo de haz celular.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & \mathcal{F} & \\
 & & & \sim & \\
 3 & \xrightarrow{\mathcal{F}} & 4 & \xrightarrow{\mathcal{F}} & H_1(\mathcal{S}^1) \cong \mathbb{Z} \\
 \uparrow & \swarrow & \uparrow & & \downarrow \\
 1 & & 2 & \xrightarrow{\mathcal{F}} & H_0(\mathcal{S}^1) \cong \mathbb{Z} \\
 & \searrow & & \sim & \\
 & & & \mathcal{F} &
 \end{array}$$

Donde la flecha de $H_1(\mathcal{S}^1)$ a $H_0(\mathcal{S}^1)$ es el homomorfismo de grupos inducido por la sucesión de Mayer-Vietoris.

3.3. Conjuntos ordenados y topología de Alexandrov

Veremos a continuación una serie de definiciones y resultados sobre la topología de Alexandrov y los complejos celulares que a priori podrían parecer carecer de interés sin embargo nos proporcionarán la estructura clave para ver un haz celular como un prehaz en el siguiente capítulo.

Definición 3.3.1. Un *Conjunto preordenado* es un par (P, \leq) donde P es un conjunto y \leq es una relación reflexiva y transitiva.

Observación 3.3.2. Un Poset (P, \leq) es un conjunto preordenado cuya relación es también antisimétrica.

Observación 3.3.3. Dado (P, \leq) un conjunto preordenado siempre se va a tener uno parcialmente ordenado asociado inducido por la relación de equivalencia :

$$x \sim y \Leftrightarrow \begin{matrix} x \leq y \\ \wedge \\ y \leq x \end{matrix}$$

Diremos que una aplicación de un conjunto preordenado (P, \leq) a otro conjunto (Q, \leq) es cualquier aplicación entre sus elementos que respete la relación de orden es decir;

$$\text{Dados } x, y \in P / x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

Definición 3.3.4. Si tomamos como objetos los conjuntos ordenados y como flechas las aplicaciones que preservan el orden tenemos una categoría que llamaremos **PreorSet** Si en vez de partir de un conjunto preordenado partimos de uno parcialmente ordenado tendremos una categoría análoga que llamaremos **Poset**

Observación 3.3.5. Por otra parte se tiene que dado un conjunto parcialmente ordenado (P, \leq) ya vimos en 1.1.10 que define una categoría **Poset(P)**, que en el caso del conjunto parcialmente ordenado asociado a la partición de un complejo celular regular coincide exactamente con la categoría **P** (Véase 3.1.12).

Dado un conjunto preordenado este se puede dotar de una topología canónica de especial interés para nuestro trabajo:

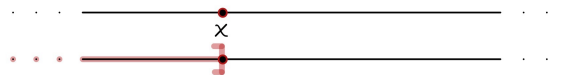
Definición 3.3.6. Se define la **Topología de Alexandrov** sobre un conjunto preordenado (P, \leq) como aquella cuyos abiertos satisfacen la siguiente condición:

$$\begin{matrix} x \in U \\ \wedge \\ x \leq y \end{matrix} \Rightarrow y \in U$$

Observación 3.3.7. El conjunto de abiertos $\mathcal{U}_x = \{y \in \mathcal{P} / x \leq y\}$ con $x \in \mathcal{P}$ forma una base de la topología B



Observación 3.3.8. $\overline{\{x\}} = \{y \in \mathcal{P} / y \leq x\}$



Veamos como esta topología puede relacionarse con nuestros complejos celulares.

Definición 3.3.9. Dado un complejo celular $(X, \{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{P}_X})$ cada célula X_β tiene una **Estrella** que consiste en todas las células X_α tales que $X_\beta \subseteq \overline{X_\alpha}$, es decir:

$$Star(X_\beta) := \{X_\alpha \mid \beta \leq \alpha\}$$

Observación 3.3.10. Dado que esta definición solo depende de la relación entre las células podemos usar indistintamente X_α y α de forma que $Star(\beta) = \{\alpha \mid \beta \leq \alpha\}$

Ejemplo 3.3.11. Volviendo al ejemplo 3.1.4 tendríamos que $Star(X_1) = \{X_1, X_3, X_4\}$ lo que en términos de \mathcal{P}_X se entendería como $Star(1) = \{1, 3, 4\}$

Observación 3.3.12. La topología de Alexandrov es valida en cualquier conjunto ordenado por eso convierte tanto \mathcal{P}_X como el propio complejo celular X en espacios topológicos cuyas estrellas dan una base de la topología.

Dotar a nuestro complejo celular de esta topología permite establecer cierta equivalencia entre la categoría $\mathbf{ShCell}(X)$ y $\mathbf{Sh}(X)$ en la que profundizaremos en el siguiente capítulo.

Capítulo 4

Relación entre haces y haces celulares

Partiendo de un complejo celular regular $X = \{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{P}_X}$ dado y denotando por P al espacio topológico formado por el conjunto \mathcal{P}_X dotado de la topología de Alexandrov, el objetivo de este capítulo es ilustrar la equivalencia categórica entre las categorías **Sh-Cell**($P; \mathbf{D}$) y **Sh**($P; \mathbf{D}$), lo cual será de gran utilidad ya que nos permitirá entender un haz celular como un haz, de forma que trabajando con uno podamos gozar de las propiedades del otro.

Para ello empecemos con la siguiente observación:

Observación 4.0.1. Dado un conjunto parcialmente ordenado P dotado con la topología de Alexandrov podemos definir el siguiente funtor contravariante:

$$\begin{array}{ccc} \beta & \rightsquigarrow & i(\beta) := U_\beta \\ \beta \leq \alpha \downarrow & & \uparrow U_\beta \subseteq U_\alpha \\ \alpha & \rightsquigarrow & i(\alpha) := U_\alpha \end{array}$$

Donde $U_\alpha = \{\gamma \in P / \alpha \leq \gamma\}$ abierto básico ya visto en 3.3.7

Notación 4.0.2. \mathbf{P} está denotando la categoría cuyos objetos son los elementos de P y entre dos elementos existe una única flecha si y solo si uno es menor o igual que el otro bajo la relación de orden establecida en el Poset, es decir, **Poset**(P)

Por otra parte **Open**(P)^{op} está tomando como topología de referencia la topología de Alexandrov sobre el conjunto parcialmente ordenado P .

Claramente este funtor contravariante está bien definido ya que entre β y α existe una única flecha $\beta \rightarrow \alpha \Leftrightarrow \beta \leq \alpha$ pero $\beta \leq \alpha \Rightarrow U_\alpha = \{\gamma \in P / \alpha \leq \gamma\} \subseteq U_\beta = \{\gamma \in P / \beta \leq \gamma\}$

ya que si $\gamma \in U_\alpha \Rightarrow \gamma \geq \alpha \geq \beta \Rightarrow \gamma \in U_\beta$ lo cual por definición de la categoría $\mathbf{Open}(P)$ significa que existe una única flecha $U_\alpha \longrightarrow U_\beta$

Notación 4.0.3. A partir de este momento por simplificar la notación en vez de letras griegas como α, β o γ usaremos letras minúsculas usuales como p, q o r para denotar los elementos de nuestro conjunto parcialmente ordenado P

Hemos dicho que nuestro objetivo es ver que los haces celulares y los haces usuales son categóricamente equivalentes. Para demostrar este hecho necesitamos definir un funtor que vaya de $\mathbf{ShCell}(P; \mathbf{D})$ a $\mathbf{Sh}(P; \mathbf{D})$ y ver que es una equivalencia de categorías (Véase 1.3.7). Procedamos entonces a la definición de un funtor G de la forma:

$$G : \quad \mathbf{ShCell}(P; \mathbf{D}) \longrightarrow \mathbf{Sh}(P; \mathbf{D})$$

$$\begin{array}{ccc} F \rightsquigarrow & R \longleftarrow & G(F) \\ \eta \downarrow & & \downarrow G(\eta) \\ F' \rightsquigarrow & R' \longleftarrow & G(F') \end{array}$$

Donde F es un haz celular, R un haz y tanto η como $G(\eta)$ transformaciones naturales. Vamos entonces, a partir de un funtor $F : \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{D}$ con P la partición asociada a complejo celular X , de forma que F es un haz celular, a definir su imagen por G , es decir, un haz R . Partimos de la siguiente situación:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P} & \xrightarrow{F} & \mathbf{D} \\ \downarrow i & & \\ \mathbf{Open}(P)^{op} & & \end{array}$$

Y tomamos R de forma que haga conmutativo el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P} & \xrightarrow{F} & \mathbf{D} \\ \downarrow i & \nearrow R & \\ \mathbf{Open}(P)^{op} & & \end{array}$$

Recordemos que $\{U_p/p \in P\}$ es base de la topología de Alexandrov con la que hemos dotado a P , por tanto, dado U abierto de P ($U \in \mathbf{Ob}(\mathbf{Open}(P))$) tenemos que U se puede escribir como unión de abiertos básicos $U = \bigcup_{U_p \subseteq U} U_p$.

Empecemos entonces definiendo R en los abiertos de la base:

$$\forall U_p \quad \text{definimos} \quad R(U_p) := F(p)$$

Hasta aquí tenemos que R hace claramente conmutativo el diagrama y además está bien definido como funtor ya que:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Dada una flecha } U_q \longrightarrow U_p & \xRightarrow{i \text{ funtor}} & \exists p \longrightarrow q \text{ flecha en } P \\
 \exists p \longrightarrow q \text{ flecha en } P & \xRightarrow{F \text{ funtor}} & \exists F(p) \longrightarrow F(q)
 \end{array}$$

contravariante

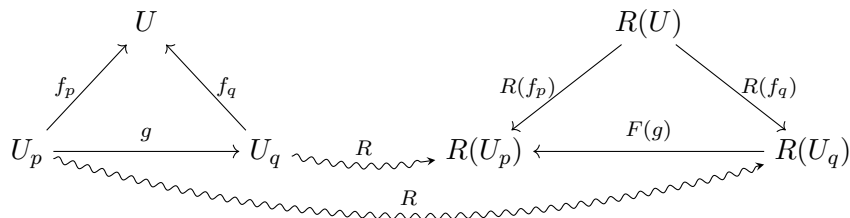
Información que se resume en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 U_p & \xrightarrow{R} & R(U_p) = F(p) \\
 \subseteq \downarrow & & \uparrow \\
 U_q & \xrightarrow{R} & R(U_q) = F(q)
 \end{array}$$

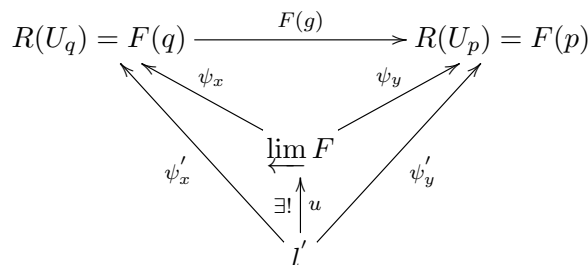
El problema es que hasta el momento solo tenemos R definido para la subcategoría $i(\mathbf{P})$ de $\mathbf{Open}(P)^{op}$ así que necesitamos definirlo para el resto de abiertos de P .

Tengamos en cuenta que un abierto U se puede escribir como unión de abiertos básicos y de hecho podemos tomar la unión maximal, es decir, $U = \bigcup_{U_p \subseteq U} U_p$ de forma que nuestro recubrimiento por abiertos básicos de U es el más fino posible.

Dados $U_p, U_q \in \bigcup_{U_p \subseteq U} U_p$ tales que $\exists U_p \xrightarrow{g} U_q$ para que R sea un funtor (contravariante) se necesita la siguiente situación:



Pero resulta que:

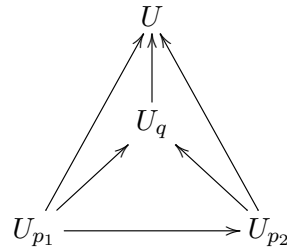


Por consiguiente, basta definir $R(U) := \varprojlim_{U_p \subseteq U} F(p)$

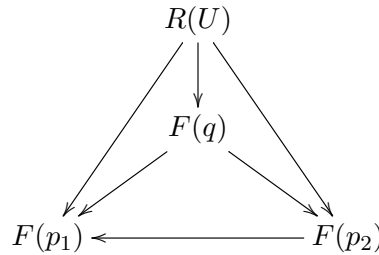
No obstante, no se puede uno olvidar de que para los abiertos básicos definimos R de otro

modo así que tenemos que comprobar que esta definición es consistente (salvo isomorfismos), es decir, que $\varprojlim_{U_p \subseteq U_q} F(p) \simeq F(q)$

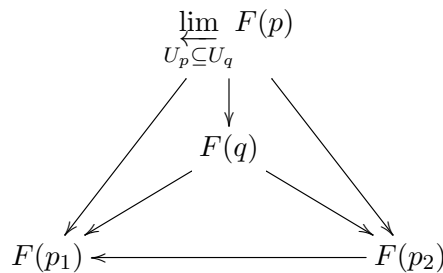
Pero efectivamente así es ya que, si U_{q_1}, U_{q_2} son dos abiertos básicos pertenecientes al recubrimiento maximal de U_q entre los cuales existe una flecha, dado cualquier abierto, U , que contenga a U_q , U va a contener también a los dos abiertos básicos anteriores lo que supone la existencia de las siguientes flechas en $\mathbf{Open}(P)$:



Pero tal y como tenemos definido $R(U)$ como límite de los $F(p)$ tenemos, que tienen que existir las siguientes flechas:



En particular se tiene que que $U_q \subseteq U_q$, entonces si tomamos $U = U_q$ tendremos:



y dado que la flecha inversa se tiene por definición de límite tenemos que entre $\varprojlim_{U_p \subseteq U_q} F(p)$ y $F(q)$ hay un isomorfismo de flechas y por tanto concluimos que la definición es consistente.

Tenemos hasta aquí definido $R : \mathbf{Open}(P)^{op} \rightarrow \mathbf{D}$ un functor y por tanto en base a 2.1.5 es un prehaz en P . Veamos entonces que verifica la condición 2.2.2 y por consiguiente es realmente un haz.

Dado U abierto de P basta ver que la condición se verifica para el recubrimiento maximal

$U = \bigcup_{U_p \subseteq U} U_p$ que llevamos usando hasta ahora ya que por esta condición de maximalidad cualquier otro recubrimiento de U estará contenido en este y verificará por tanto las mismas condiciones.

Tenemos:

$$R: \mathbf{Open}(P)^{op} \longrightarrow \mathbf{D}$$

$$U \rightsquigarrow R(U) := \varprojlim_{U_p \subseteq U} F(p)$$

Y queremos probar:

Dado un abierto $U = \bigcup_{U_p \subseteq U} U_p$ (siendo este el recubrimiento maximal por abiertos básicos), se verifica que:

$$\text{Dados } s_p \in R(U_p) \quad \forall U_p \subseteq U / s_p|_{U_p \cap U_q} = s_q|_{U_p \cap U_q} \Rightarrow \exists! s \in R(U) / s|_{U_p} = s_p$$

Recordemos que $res_{U_p}^U : R(U) \longrightarrow R(U_p) = F(p)$, $res_{U_p \cap U_q}^U : R(U_p) \longrightarrow R(U_p \cap U_q)$ y $s|_{U_p} = res_{U_p}^U(s)$, $s_p|_{U_p \cap U_q} = res_{U_p \cap U_q}^{U_p}(s_p)$ y estas flechas res_u^v son simplemente las dadas por la definición de R como prehaz (y por tanto functor).

Dicho esto analicemos la siguiente situación:

Sea $R(U_p) \times R(U_q) = \{(s_p, s_q) / s_p \in U_p, s_q \in U_q\}$ tenemos la existencia evidente de las siguientes flechas:

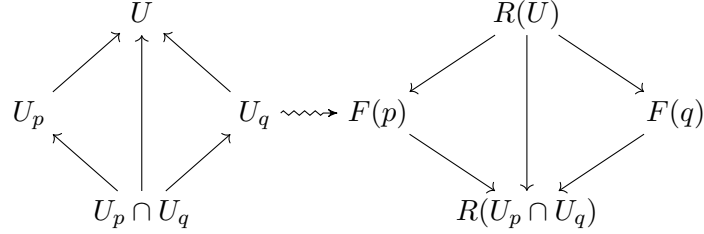
$$\begin{array}{ccc} & R(U_p) \times R(U_q) & \\ \pi_p \swarrow & & \searrow \pi_q \\ R(U_p) & & R(U_q) \end{array}$$

Donde π_p, π_q son las proyecciones canónicas ($\pi_p(s_p, s_q) = s_p$, $\pi_q(s_p, s_q) = s_q$)

Por otra parte, $R(U) := \varprojlim_{U_p \subseteq U} F(p)$ lo cual supone por la definición de límite que $\exists! u : R(U_p) \times R(U_q) \longrightarrow R(U)$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:

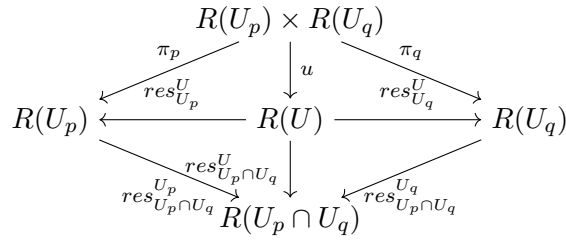
$$\begin{array}{ccc} & R(U_p) \times R(U_q) & \\ & \downarrow u & \\ & R(U) & \\ \pi_p \swarrow & & \searrow \pi_q \\ R(U_p) & & R(U_q) \end{array}$$

Por otra parte se tiene que :

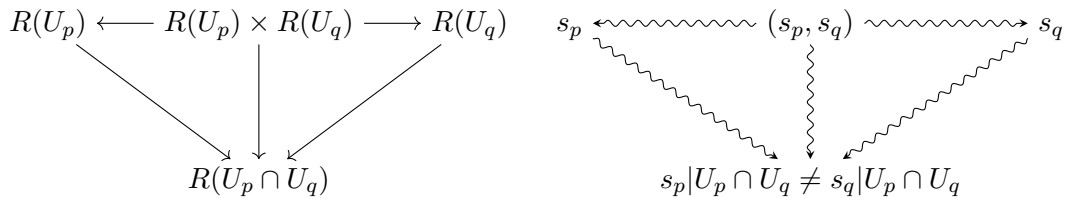


Donde ambos diagramas son conmutativos

El siguiente diagrama tiene que ser necesariamente conmutativo :



Sin embargo, dado $(s_p, s_q) \in R(U_p) \times R(U_q)$ tenemos que :



Entonces la única forma de que el diagrama global sea conmutativo es que $R(U) = \{(s_p, s_q) / s_p|_{U_p \cap U_q} = s_q|_{U_p \cap U_q}\}$. Pero entonces dados $s_p \in R(U_p)$ y $s_q \in R(U_q)$ tal que $s_p|_{U_p \cap U_q} = s_q|_{U_p \cap U_q}$ existirá $(s_p, s_q) \in R(U)$ tales que $(s_p, s_q)|_{U_p} = s_p$ y $(s_p, s_q)|_{U_q} = s_q$ y por lo tanto tenemos que R es un haz.

Tenemos entonces ya una aplicación G entre categorías que lleva nuestro haz celular F en un haz R . Ahora necesitamos verificar que esta aplicación es efectivamente un funtor. La parte de llevar objetos de una categoría en la otra está claramente cubierta por lo que acabamos de resumir, no obstante, tenemos que probar que si entre dos objetos de $\mathbf{ShCell}(P; \mathbf{D})$, F y F' , existe una flecha (que en nuestra categoría se corresponde con una transformación natural entre funtores η) entonces entre $G(F) = R$ y $G(F') = R'$ objetos

de $\mathbf{Sh}(P; \mathbf{D})$ existe una flecha $G(\eta)$.

$$\begin{array}{ccc}
 G : & \mathbf{ShCell}(P; \mathbf{D}) & \longrightarrow & \mathbf{Sh}(P; \mathbf{D}) \\
 & F : P \longrightarrow D \rightsquigarrow R : \mathbf{Open}(P)^{op} \longrightarrow D & & \\
 & \downarrow & & \downarrow \\
 & F' : P \longrightarrow D \rightsquigarrow R' : \mathbf{Open}(P)^{op} \longrightarrow D & &
 \end{array}$$

Que η sea una transformación natural entre F y F' significa que $\eta = \{\eta_p / p \in P\}$ donde dados $p, q \in P$ entre los cuales existe una flecha, el siguiente diagrama conmuta;

$$\begin{array}{ccccc}
 p & \dashrightarrow & F(p) & \xrightarrow{\eta_p} & F'(p) \\
 \downarrow f & & \downarrow F(f) & & \downarrow F'(f) \\
 q & \dashrightarrow & F(q) & \xrightarrow{\eta_q} & F'(q)
 \end{array}$$

Tenemos que definir entonces una transformación natural $G(\eta) := \{\eta_U / U \text{ abierto de } P\}$ entre R y R' De forma que dados $U \subseteq V$ abiertos de P se tenga el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 U & \rightsquigarrow & R(U) & \xrightarrow{\eta_U} & R'(U) \\
 \subseteq \uparrow & & \downarrow R(f) & & \downarrow R'(f) \\
 V & \rightsquigarrow & R(V) & \xrightarrow{\eta_V} & R'(V)
 \end{array}$$

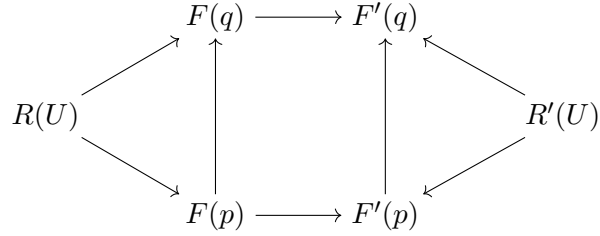
Pues bien, resulta que dados $p, q / U_p, U_q \in U \subseteq V$ entre los cuales existe una flecha, pues $U_q \subseteq U_p$, se tiene la siguiente situación:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & R(V) & & R'(V) \\
 & \swarrow & & \searrow & \swarrow \\
 & & R(U) & & R'(U) \\
 & \swarrow & & \searrow & \swarrow \\
 R(U_p) & \xrightarrow{\eta_p} & R(U_q) & \rightsquigarrow & R'(U_p) \xrightarrow{\eta_q} R'(U_q)
 \end{array}$$

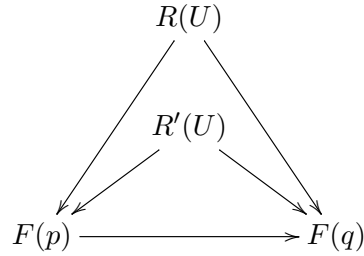
Donde:

$$\begin{array}{cccc}
 R(U_p) := F(p) & R(U_q) := F(q) & R'(U_p) := F'(p) & R'(U_q) := F'(q) \\
 R(U) := \varprojlim_{U_p \subseteq U} F(p) & R'(U) := \varprojlim_{U_p \subseteq U} F'(p) & R(V) := \varprojlim_{U_p \subseteq V} F(p) & R'(V) := \varprojlim_{U_p \subseteq V} F'(p)
 \end{array}$$

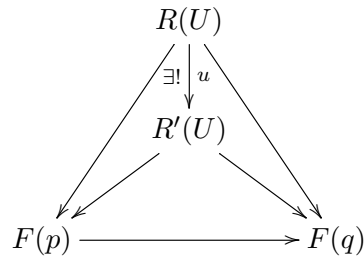
Fijémonos en el siguiente fragmento del anterior diagrama:



Como se tiene que la composición de flechas en una categoría es una flecha (1.1.1) se tiene la siguiente situación:

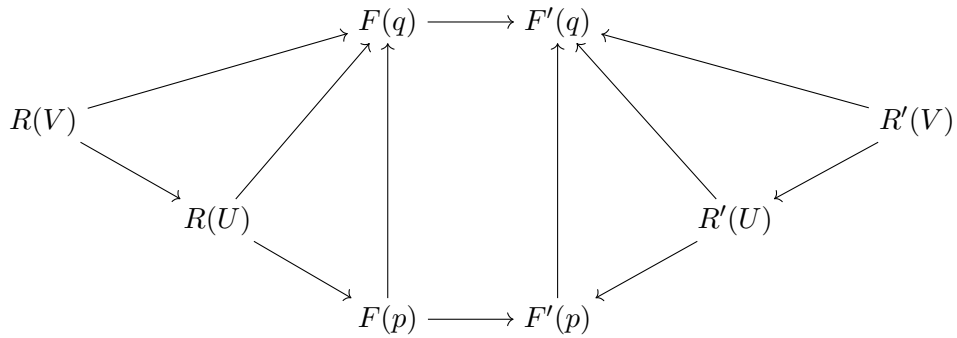


Pero $R'(U) := \varprojlim_{U_p \subseteq U} F'(p)$ luego por definición de límite se tiene que $\exists! u$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:



Definimos entonces $\eta_U := u$

Para V nos vamos a encontrar con la misma situación ya que:



Pero dado que la composición de flechas es una flecha se tiene:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & F(q) & \longrightarrow & F'(q) \\
 & \nearrow & \uparrow & & \uparrow & \nwarrow \\
 R(V) & & & & & R'(V) \\
 & \searrow & \uparrow & & \uparrow & \swarrow \\
 & & F(p) & \longrightarrow & F'(p) &
 \end{array}$$

Y por lo tanto:

$$\begin{array}{ccc}
 & R(V) & \\
 & \swarrow & \searrow \\
 & R'(V) & \\
 \swarrow & & \searrow \\
 F(p) & \longrightarrow & F(q)
 \end{array}$$

Pero $R'(V) := \varprojlim_{U_p \subseteq V} F'(p)$ luego por definición de límite se tiene que $\exists! v$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 & R(V) & \\
 & \swarrow & \searrow \\
 & \exists! v \downarrow & \\
 & R'(V) & \\
 \swarrow & & \searrow \\
 F(p) & \longrightarrow & F(q)
 \end{array}$$

Definimos entonces $\eta_V := v$

Tenemos entonces $G(\eta)$ bien definida como transformación natural ya que $\forall U \subseteq V$ se tiene que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 U & \dashrightarrow & R(U) & \xrightarrow{\eta_U := u} & R'(U) \\
 \uparrow & & \downarrow R(f) & & \downarrow R'(f) \\
 \subseteq & & & & \\
 V & \dashrightarrow & R(V) & \xrightarrow{\eta_V := v} & R'(V)
 \end{array}$$

Hemos conseguido llegar por tanto a la definición consistente de G como funtor

$$\begin{array}{ccc}
 G : \mathbf{ShCell}(P; \mathbf{D}) & \longrightarrow & \mathbf{Sh}(P; \mathbf{D}) \\
 F : P \longrightarrow D \rightsquigarrow R : \mathbf{Open}(P)^{op} \longrightarrow D & & \\
 \eta \downarrow & & \downarrow G(\eta) \\
 F' : P \longrightarrow D \rightsquigarrow R' : \mathbf{Open}(P)^{op} \longrightarrow D & &
 \end{array}$$

Pero realmente nuestro objetivo es probar que hay una equivalencia de categorías y para ello necesitamos definir un funtor $H : \mathbf{Sh}(P; \mathbf{D}) \longrightarrow \mathbf{ShCell}(P; \mathbf{D})$ de forma que $\exists \epsilon, \eta$ dos transformaciones naturales tales que:

$$1. \quad \epsilon : Id_{\mathbf{Sh}(P; \mathbf{D})} \longrightarrow G \circ H \quad 2. \quad \eta : H \circ G \longrightarrow Id_{\mathbf{ShCell}(P; \mathbf{D})}$$

Empecemos entonces por definir H , dado:

$$\begin{array}{ccc}
 R : \mathbf{Open}(P)^{op} & \longrightarrow & \mathbf{D} \\
 U & \rightsquigarrow & R(U)
 \end{array}$$

Definimos $H(R)$ como sigue:

$$\begin{array}{ccc}
 H(R) : \mathbf{P} & \longrightarrow & \mathbf{D} \\
 p & \rightsquigarrow & H(R)(p) := R(U_p)
 \end{array}$$

$H(R)$ es trivialmente un funtor ya que dados $p, q \in P / p \longrightarrow q$ entonces $U_q \subseteq U_p$ y por lo tanto por ser R haz (y por consiguiente funtor contravariante) tenemos que $\exists R(U_p) \longrightarrow R(U_q)$ y por tanto se verifica la condición de funtor ya que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 p & \longrightarrow & q \\
 H(R) \downarrow & & \downarrow H(R) \\
 R(U_p) & \longrightarrow & R(U_q)
 \end{array}$$

Además, H está bien definido como funtor ya que si entre dos objetos de $\mathbf{Sh}(P; \mathbf{D})$, R y R' , existe una flecha, es decir, una transformación natural $\eta = \{\eta_U : R(U) \longrightarrow R'(U) / U \text{ abierto de } P\}$ tenemos la fecha $H(\eta) = \{H(\eta)_p : H(R)(p) \longrightarrow H(R')(p) / p \in P\} = \{\eta_{U_p} : R(U_p) \longrightarrow R'(U_p) / p \in P\}$ perfectamente definida como transformación natural.

Ahora que ya tenemos los dos funtores tenemos que encontrar las transformaciones naturales ϵ y η . Pues bien:

$$\begin{array}{ccccc}
H \circ G : & \mathbf{ShCell}(P; \mathbf{D}) & \longrightarrow & \mathbf{Sh}(P; \mathbf{D}) & \longrightarrow & \mathbf{ShCell}(P; \mathbf{D}) \\
F : P & \longrightarrow & D & R : \mathbf{Open}(P)^{op} & \longrightarrow & D & H(R) : P & \longrightarrow & D \\
p \rightsquigarrow & F(p) & & U \rightsquigarrow & R(U) = \varprojlim_{U_p \subseteq U} F(p) & & p \rightsquigarrow & R(U_p) := F(p)
\end{array}$$

Por lo tanto $H \circ G = Id_{\mathbf{ShCell}(P; \mathbf{D})}$ y por lo tanto ya tenemos $\eta = Id$

Vamos ahora con ϵ :

$$\begin{array}{ccccc}
G \circ H : & \mathbf{Sh}(P; \mathbf{D}) & \longrightarrow & \mathbf{ShCell}(P; \mathbf{D}) & \longrightarrow & \mathbf{Sh}(P; \mathbf{D}) \\
R : \mathbf{Open}(P)^{op} & \longrightarrow & D & H(R) = F : P & \longrightarrow & D & G(F) : \mathbf{Open}(P)^{op} & \longrightarrow & D \\
U \rightsquigarrow & R(U) & & p \rightsquigarrow & F(p) := R(U_p) & & U \rightsquigarrow & G(F)(U) := \varprojlim_{U_p \subseteq U} F(p)
\end{array}$$

Teniendo en cuenta que $G(F)(U) := \varprojlim_{U_p \subseteq U} F(p) = \varprojlim_{U_p \subseteq U} R(U_p)$ tenemos por definición de límite el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
& R(U) & \\
& \swarrow & \searrow \\
& \exists! \downarrow u & \\
& G(F)(U) & \\
& \swarrow & \searrow \\
R(U_p) & \longrightarrow & R(U_q)
\end{array}$$

Lo cual supone que basta definir la transformación natural $\epsilon := \{\epsilon_R / R \in \mathbf{Sh}(P; \mathbf{D})\}$ donde $\epsilon_R := \{(\epsilon_R)_U / U \text{abierto de } P\}$ siendo $(\epsilon_R)_U := u$ de forma que

$$\begin{array}{ccc}
R(U) & \xrightarrow{\exists! u} & G \circ H(R)(U) := \varprojlim_{U_p \subseteq U} R(U_p) \\
\downarrow & & \downarrow \\
R(V) & \xrightarrow{\exists! v} & G \circ H(R)(V) := \varprojlim_{U_p \subseteq V} R(U_p)
\end{array}$$

Por otra parte tenemos que R es un haz, lo cual por definición de haz implica que:

$$\text{Dados } s_p \in R(U_p) \quad \forall p \in P \quad / \quad s_p|_{U_p \cap U_q} = s_q|_{U_p \cap U_q} \quad \Rightarrow \quad \exists! s \in R(U) / \quad s|_{U_p} = s_p$$

Como hemos visto que $\varprojlim_{U_p \subseteq U} R(U_p) = \{(s_p, s_q) / s_p|_{U_p \cap U_q} = s_q|_{U_p \cap U_q}\}$ tenemos que existe la flecha:

$$\begin{array}{c}
f_U : \quad \varprojlim_{U_p \subseteq U} R(U_p) \rightarrow R(U) \\
\quad \quad \quad (s_p, s_q) \rightsquigarrow s
\end{array}$$

Por lo tanto tenemos que para cada flecha (transformación natural) $\epsilon_R = \{(\epsilon_R)_U / U \text{ abierto de } P\}$ siendo $(\epsilon_R)_U := u$ podemos definir una flecha inversa $\epsilon_R^{-1} = \{f_U / U \text{ abierto de } P\}$ de modo que la transformación natural ϵ es un isomorfismo.

Concluimos entonces la equivalencia de categorías que pretendíamos demostrar.

Capítulo 5

Homología y cohomología de haces

En este capítulo hablaremos sobre el concepto de homología de espacios topológicos desde la visión simplicial de la misma ya que no trabajaremos fuera de complejos simpliciales en el capítulo 6 así que no necesitamos profundizar más. Por otra parte hablaremos de la cohomología de haces, construyendo la misma sobre el concepto de espacio vectorial graduado.

5.1. Homología simplicial

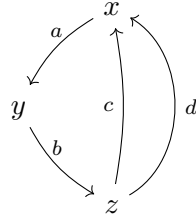
El estudio homológico de un espacio topológico expresa en un cierto sentido el conteo de agujeros n -dimensionales del mismo, aunque al trabajar sobre grupos nos da información sobre más invariantes como la torsión ya que un grupo visto como un D -módulo donde D es un D.I.P. se puede expresar como suma directa de un módulo libre y uno de torsión.

Esta rama de la topología procede de dos formas distintas; la homología singular que es más general y la homología simplicial que es en la que profundizaremos en este apartado por ser más sencilla de computar cuando trabajamos con complejos simpliciales y en concreto con grafos como será el caso en el capítulo 6.

Cabe destacar que ambos procedimientos son equivalentes, de hecho son dos perspectivas desde las que atacar un mismo problema mediante las cuales se llegan a los mismo resultados, solo que la simplicial tiene su campo de acción acotado a complejos simpliciales y la singular a cualquier espacio topológico conocido.

Para comprender este concepto empecemos por un caso particular de complejo simplicial; el grafo dirigido.

Ejemplo 5.1.1.



Definición 5.1.2. Dado X un grafo dirigido definimos :

- $C_0 :=$ Grupo abeliano libre generado por los nodos del grafo
- $C_1 :=$ Grupo abeliano libre generado por las aristas del grafo

En el ejemplo 5.1.1 $C_0 = \langle x, y, z \rangle = \{\alpha x + \beta y + \mu z \mid \alpha, \beta, \mu \in \mathbb{Z}\}$ y $C_1 = \langle a, b, c, d \rangle = \{\alpha a + \beta b + \mu c + \gamma d \mid \alpha, \beta, \mu, \gamma \in \mathbb{Z}\}$

Definición 5.1.3. Dado X un grafo dirigido definimos la aplicación **Borde** σ como el homomorfismo de grupos tal que:

$$\sigma : C_1 \longrightarrow C_0$$

$$arista \longrightarrow \text{punto final} - \text{punto inicial}$$

Observación 5.1.4. Dado que σ es un homomorfismo de grupos libres queda perfectamente definido a partir de la imagen de una base tal y como hemos hecho.

En el ejemplo 5.1.1 tenemos la siguiente aplicación σ :

$$\sigma : C_1 \longrightarrow C_0$$

$$a \longrightarrow y - x$$

$$b \longrightarrow z - y$$

$$c \longrightarrow x - z$$

$$d \longrightarrow x - z$$

De forma que dado $w \in C_1 \mid w = \alpha a + \beta b + \mu c + \gamma d \Rightarrow \sigma(w) = \alpha(y - x) + \beta(z - y) + \mu(x - z) + \gamma(x - z)$

Definición 5.1.5. Dado X un grafo dirigido decimos que $w \in C_1$ es un **ciclo** si y solo si $w \in \text{Ker}(\sigma)$

En nuestro ejemplo 5.1.1 $Ker(\sigma) = \langle a + b + c, a + b + d \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Observación 5.1.6. Podemos extender el concepto de aplicación borde se puede generalizar a C_0 del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \sigma : \quad C_0 &\longrightarrow 0 \\ \text{nodo} &\longrightarrow \text{nodo} - \text{nodo} = 0 \end{aligned}$$

Notación 5.1.7. A partir de ahora denotaremos σ_1 a la aplicación borde sobre C_1 y σ_0 a la aplicación borde sobre C_0

Definición 5.1.8. Dado X un grafo dirigido definimos sus grupos de homología como:

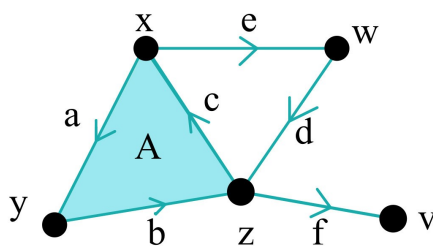
- $H_0(X) := \frac{Ker(\sigma_0)}{Img(\sigma_1)}$
- $H_1(X) := Ker(\sigma_1)$

En nuestro ejemplo 5.1.1 tenemos que $H_1(X) = Ker\sigma_1 = \langle a + b + c, a + b + d \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y $H_0(X) = \frac{Ker(\sigma_0)}{Img(\sigma_1)} = \frac{C_0}{Img(\sigma_1)}$. Pero $C_0 = \langle x, y, z \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^3$ y $Img(\sigma_1) \cong \frac{C_1}{Ker(\sigma_1)} \cong \frac{\mathbb{Z}^4}{\mathbb{Z}^2} \cong \mathbb{Z}^2$, por lo tanto $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$

Ahora que más o menos se empieza a intuir como $H_1(X)$ cuenta el número de agujeros 1-dimensionales (en el ejemplo 5.1.1) pasemos a una definición más general de la homología pasando del caso particular de un grafo al caso de un complejo simplicial.

Definición 5.1.9. Dado X un complejo simplicial definimos $C_n :=$ Grupo libre conmutativo generado por los n -símplices

Ejemplo 5.1.10. Aquí tenemos un ejemplo de complejo simplicial X al que hemos dotado de una orientación.



$$\begin{aligned} C_0 &= \langle x, y, z, w, v \rangle \cong \mathbb{Z}^5 & C_2 &= \langle A \rangle \cong \mathbb{Z} \\ C_1 &= \langle a, b, c, d, e, f \rangle \cong \mathbb{Z}^6 & C_n &= \langle 0 \rangle = \{0\} \quad \forall n \geq 3 \end{aligned}$$

Observación 5.1.11. Tal y como vimos en la definición 3.1.6 un n -símplice es la envoltura convexa de $(n + 1)$ puntos $\{x_0, \dots, x_n\}$ de forma que $\{x_1 - x_0, \dots, x_n - x_0\}$ linealmente independiente.

Esto supone que cada punto del n -símplice admite representación única como $\sum \alpha_i x_i$ con $\alpha_i \geq 0$ y $\sum \alpha_i = 1$, lo cual hace que tenga sentido identificar cada punto del n -símplice con la n -upla $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$

Definición 5.1.12. Dado $p = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ punto de un n -símplice, llamamos **Cara** de p al punto $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})$ perteneciente a un $(n - 1)$ -símplice.

Definición 5.1.13. Dado un n -símplice s llamamos **Borde** de s al conjunto de caras de sus puntos.

Observación 5.1.14. El borde de un n -símplice es un $(n - 1)$ -símplice.

Definición 5.1.15. Dado X un complejo simplicial definimos el homomorfismo de grupos σ_n como aquel que lleva cada n -símplice del complejo en su borde.

En nuestro ejemplo 5.1.10 tendríamos los siguientes homomorfismos borde definidos por como actúan sobre los generadores de su dominio:

$$\sigma_0 : C_0 \longrightarrow \{0\} / \sigma_0(i) = 0, \quad \sigma_1 : C_1 \longrightarrow C_0 / \sigma_1(a) = y - x, \sigma_1(b) = z - y, \sigma_1(c) = x - z, \\ \sigma_1(d) = z - w, \sigma_1(e) = w - x, \sigma_1(f) = v - z, \quad \sigma_2 : C_2 \longrightarrow C_1 / \sigma_2(A) = a + b + c$$

Y los σ_n con $n \geq 3$ ya no los ponemos porque son la aplicación nula de $\{0\}$ en sí mismo. La situación general es por tanto:

$$0 \xrightarrow{\sigma_{n+1}=0} C_n \xrightarrow{\sigma_n} C_{n-1} \xrightarrow{\sigma_{n-1}} \dots \xrightarrow{\sigma_3} C_2 \xrightarrow{\sigma_2} C_1 \xrightarrow{\sigma_1} C_0 \xrightarrow{\sigma_0} 0$$

Además como $\sigma_{n-1} \circ \sigma_n = 0$ se tiene que $Im(\sigma_n)$ es un subgrupo (de un abeliano y por ello normal) de $Ker(\sigma_{n-1})$.

Observación 5.1.16. Dado que C_n libre y abeliano cualquier subgrupo (incluido el $ker(\sigma_n)$) es un subgrupo normal.

Esto da pie a que la siguiente definición no tenga incongruencias:

Definición 5.1.17. Dado X un complejo simplicial definimos su **n -ésimo grupo de homología** como:

$$H_n(X) := \frac{Ker(\sigma_n)}{Im(\sigma_{n+1})}$$

Definición 5.1.18. Un **Grupo graduado** G es una colección de grupos $\{G_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ indexados con la operación de componer grado a grado.

Definición 5.1.19. Definimos la **Homología** de un complejo simplicial X , $H(X)$, como el grupo graduado formado por la colección $\{H_n(X)\}_{n \in \mathbb{N}}$

Observación 5.1.20. La intuición de que la homología cuenta agujeros es coherente con la definición que acabamos de dar ya que básicamente estamos cogiendo los grupos generados por ciclos n -dimensionales (que son los que pueden dar lugar a agujeros) y los estamos cocientando (eliminando o anulando) por aquellos que están “reellenos” ya que son frontera de $(n + 1)$ -símplices y por consiguiente no provocan agujeros.

En nuestro ejemplo 5.1.10 tendríamos por lo tanto que:

- $Ker(\sigma_0) = C_0 \cong \mathbb{Z}^5$
- $Im(\sigma_1) = \langle y - x, z - y, z - w, v - z \rangle \cong \mathbb{Z}^4$
- $Ker(\sigma_1) \cong \mathbb{Z}^2$
- $Im(\sigma_2) = \langle a + b + c \rangle \cong \mathbb{Z}$
- $Ker(\sigma_2) = \{0\}$
- $Im(\sigma_3) = \{0\}$

Por lo tanto:

- $H_0(X) \cong \frac{\mathbb{Z}^5}{\mathbb{Z}^4} \cong \mathbb{Z}$
- $H_2(X) = 0$
- $H_1(X) \cong \frac{\mathbb{Z}^2}{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}$
- $H_n(X) = 0 \forall n \geq 3$

Lo cual concuerda con nuestra visión de la homología como cuantificadora de agujeros n -dimensionales ya que solo tiene un agujero 1-dimensional (el formado por el ciclo $e + c + d$) y efectivamente el primer grupo de homología de isomorfo a \mathbb{Z} y no tiene agujeros de dimensión mayor y por eso las homologías superiores dan todas nulas. Sin embargo es razonable llegados a este punto preguntarse que es lo que está cuantificando $H_0 \cong \mathbb{Z}$.

Proposición 5.1.21. $X \neq \emptyset$ es un complejo simplicial conexo por caminos entonces:

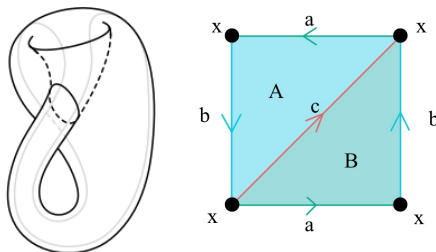
$$H_0(X) \cong \mathbb{Z}$$

Demostración. Primero debemos entender que un complejo simplicial es conexo por caminos si dados dos vértices x, y existe un camino “simplicial” que lo conecta, es decir, existe un 1-símplice entre ellos. Por otra parte, la frontera de cualquier camino a que los conecte será tal y como hemos visto $\sigma_1(a) = y - x$. Dado que $\sigma_0 = 0$ es claro que $Ker\sigma_0 = C_0 \cong \mathbb{Z}^{n^0}$ de vertices del complejo. $H_0(X) := \frac{Ker(\sigma_0)}{Im(\sigma_1)}$ pero como hemos dicho que dados dos vértices x, y siempre hay un $a \in C_1$ cuya resta es $y - x$ eso significa que $y - x \in Im(\sigma_1) \Rightarrow [x] = [y] \Rightarrow H_0(X) = \langle x \rangle$ siendo x cualquier vértice del complejo ya que todos están conectados entre sí. Luego tenemos que $H_0 = \langle x \rangle \cong \mathbb{Z}$

□

Observación 5.1.22. Podemos ir más allá de la anterior proposición y afirmar que $H_0(X)$ cuenta las componentes conexas del complejo ya que si el complejo es conexo por caminos acabamos de ver que $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$, ahora bien supongamos que hubiese dos componentes conexas, tal y como razonamos en la anterior demostración tenemos que dentro de cada componente conexa todos los vértices van a estar relacionados por la relación de equivalencia pero si tomamos un vértice de cada componente no va a haber ningún 1-símplice que los tenga como frontera ya que de ser así habría un camino entre ellos, por lo tanto, tenemos dos clases de equivalencia de forma que $H_0(X) = \langle [x], [y] \rangle \cong \mathbb{Z}^2$ donde x pertenece a una componente conexa e y a otra. Por inducción se extiende a cualquier número de componentes conexas por caminos.

Observación 5.1.23. En una primera aproximación a la homología simplicial hemos llegado a la conclusión de que esta nos da información sobre los agujeros n -dimensionales del espacio y en el caso particular de $H_0(X)$ el número de componentes conexas por caminos. Sin embargo, a esta idea le faltan otros conceptos que mide la homología como la torsión. Así es, por ejemplo, que si efectuamos el cálculo de la homología de la conocida Botella de Klein tenemos la siguiente situación:



- $H_0(X) = \langle x \rangle \cong \mathbb{Z}$ (lo cual ya sabíamos pues la botella de Klein es conexa por caminos)
- $H_1(X) = \frac{\langle a, b, c \rangle}{\langle a+b+c, 2c \rangle} \cong \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\mathbb{Z} \oplus 2\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$
- $H_2(X) = \ker \sigma_2 = 0$
- $H_n(X) = 0 \quad \forall n \geq 3$

El $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ que aparece como módulo de torsión en $H_1(X)$ expresa torsión. No obstante, si en vez de trabajar sobre grupos (\mathbb{Z}) trabajamos sobre cuerpos (\mathbb{R}) la torsión desaparece y lo único que vamos a medir son los agujeros del espacio. Así pues, aunque la homología

se estudia de forma tradicional sobre grupos para obtener la máxima información posible sobre nuestro espacio, en nuestro caso bastará sobre cuerpos pues realmente en nuestro estudio sólo emplearemos la homología para el computo de agujeros en la información de nuestro sistema.

5.2. Cohomología de haces celulares

En esta sección hablaremos sobre cohomología de haces, para poder llegar a la definición y computo de la misma iremos construyendo un contexto similar al que podríamos encontrar en un capítulo sobre homología singular solo que el espacio que normalmente ocupaban los grupos será suplido en este caso por los espacios vectoriales.

Definición 5.2.1. Un *Espacio vectorial \mathbb{Z} -graduado* V^* es una colección de k -espacios vectoriales $\{V_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$

Definición 5.2.2. Una *aplicación \mathbb{Z} -graduada* f^* es una colección de aplicaciones lineales $\{f_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ tales que $f_i : V_i \rightarrow W_i$ donde V, W son espacios vectoriales graduados.

Observación 5.2.3. Tomando como objetos los espacios vectoriales graduados y como flechas las aplicaciones graduadas entre ellos obtenemos una categoría que denotaremos \mathbf{grVect}_k

Definición 5.2.4. Definimos un *complejo de cocadenas* (V^\bullet, d^\bullet) como una colección de k -espacios vectoriales $\{V^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ (que llamaremos grupo de cocadenas) y una colección de aplicaciones lineales $d^i : V^i \rightarrow V^{i+1}$ (que llamaremos diferenciales) verificando que $d^{i+1} \circ d^i = 0$

Observación 5.2.5. Un complejo de cocadenas es un caso particular de par formado por un espacio vectorial graduado y una aplicación graduada.

Definición 5.2.6. Definimos un *complejo de cadenas* (V_\bullet, d_\bullet) como una colección de k -espacios vectoriales $\{V_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ (que llamaremos grupo de cadenas) y una colección de aplicaciones lineales $\sigma_i : V_i \rightarrow V_{i-1}$ (que llamaremos aplicaciones borde) verificando que $\sigma_{i-1} \circ \sigma_i = 0$

Observación 5.2.7. Si cambiamos los grupos C_n en 5.1.9 por los k -espacios vectoriales que tienen como base los n -símplices y tomamos la aplicación borde 5.1.15 tenemos un ejemplo de complejo de cadenas.

Observación 5.2.8. Dado que los complejos de cocadenas son pares formados por espacios graduados y aplicaciones graduadas tiene sentido definir la categoría $\mathbf{Ch}^\bullet(\mathbf{Vect}_k)$ como

aquella cuyos objetos son complejos de cocadenas y las flechas aplicaciones entre ellos. Así mismo, podemos definir la categoría análoga para complejos de cadenas $\mathbf{Ch}_\bullet(\mathbf{Vect}_k)$

Definición 5.2.9. Definimos la *Cohomología* como el funtor:

$$H^* : \mathbf{Ch}^\bullet(\mathbf{Vect}_k) \longrightarrow \mathbf{grVect}_k$$

$$(V, d) \rightsquigarrow H^*(V, d) = \{H^i(V, d)\}_{i \in \mathbb{Z}}$$

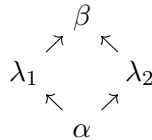
Donde $H^i(V, d) := \frac{Ker(d^i)}{Img(d^{i-1})}$

Observación 5.2.10. Sin en vez de definirlo para complejos de cocadenas hacemos lo propio para complejos de cadenas obtenemos H_* tal que $H_i = \frac{ker(\sigma_i)}{Img(\sigma_{i+1})}$ tenemos la homología usual. Dado un complejo simplicial X y su complejo de cadenas asociado visto en 5.2.7 la homología H_* coincide con la homología simplicial estudiada en la anterior sección solo que sobre k -espacios vectoriales en vez de grupos.

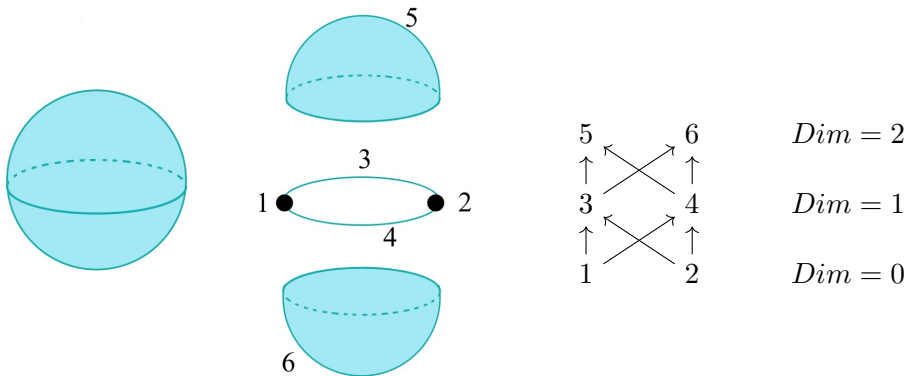
Definición 5.2.11. Sea $X = \{X_\alpha\}_{\alpha \in P_x}$ un complejo celular regular y P el poset asociado a la partición de dicho complejo decimos que:

$$\alpha \leq_i \beta :\Leftrightarrow Dim(X_\beta) - Dim(X_\alpha) = i$$

Lema 5.2.12. $\alpha \leq_2 \beta :\Leftrightarrow$ existen exactamente dos celdas λ_1, λ_2 tales que $\alpha \leq_1 \lambda_i \leq_1 \beta$



Ejemplo 5.2.13. Supongamos $X = \mathcal{S}^2$ y tomemos la siguiente descomposición como complejo regular

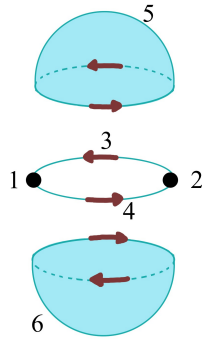


Definición 5.2.14. Una **relación de incidencia signada** es la asignación a cada pareja $\alpha, \beta \in P_X$ un número $[\alpha : \beta] \in \{\pm 1, 0\}$ verificando:

- $[\alpha : \beta] \neq 0 \Rightarrow \alpha \leq_1 \beta$
- Fijadas α, β entonces $\sum_{\sigma} [\alpha : \sigma][\sigma : \beta] = 0$

Observación 5.2.15. Una forma de establecer una relación de incidencia signada es dotando a la estructura celular de una orientación local (sin ser necesario que está sea consistente globalmente) y después asignar $[\alpha : \beta] = +1$ cuando la orientación de las celdas X_{α} y X_{β} coinciden y -1 cuando no lo hacen.

Ejemplo 5.2.16. Prosigamos con el mismo caso del ejemplo 5.2.13 y dotemos a nuestras celdas de la siguiente orientación:



$[1 : 5] = [1 : 6] = [2 : 5] = [2 : 6] = 0$ veamos entonces que pasa con el resto y que efectivamente se verifica que la orientación está dando lugar a una relación de incidencia signada bien definida:

- | | |
|--|------------------|
| ▪ $[1 : 3] = 1$ (entra en en el nodo) | ▪ $[3 : 5] = 1$ |
| ▪ $[1 : 4] = -1$ (sale en en el nodo) | ▪ $[3 : 6] = -1$ |
| ▪ $[2 : 3] = -1$ (sale en en el nodo) | ▪ $[4 : 5] = +1$ |
| ▪ $[2 : 4] = +1$ (entra en en el nodo) | ▪ $[4 : 6] = -1$ |

Por lo tanto tenemos que :

- $[1 : 3][3 : 5] + [1 : 4][4 : 5] = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 1 - 1 = 0$
- $[1 : 3][3 : 6] + [1 : 4][4 : 6] = 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) = -1 + 1 = 0$
- $[2 : 3][3 : 5] + [2 : 4][4 : 5] = -1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = -1 + 1 = 0$

$$\blacksquare [2 : 3][3 : 6] + [2 : 4][4 : 6] = -1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) = 1 - 1 = 0$$

Observación 5.2.17. Dado un complejo celular regular $X = \{X_\alpha\}_{\alpha \in P_X}$ siempre vamos a poder subdividir sus celdas en complejos simpliciales y por tanto identificar las mismas por el conjunto de sus vértices. Si les damos a estos vértices un orden tendremos una orientación para nuestra celda

Definición 5.2.18. Sea X un complejo celular regular dotado de una relación de incidencia signada. Denotemos $C^n(X; \mathcal{R}) = \{\alpha \in P_X / \text{Dim}(\alpha) = n\} \cong \mathcal{R}^n \oplus \dots \oplus \mathcal{R}^n$. Definimos:

$$\begin{aligned} d^n : C^n &\longrightarrow C^{n+1} \\ \alpha &\rightsquigarrow \sum_{\beta} [\alpha : \beta] \beta \end{aligned}$$

Observación 5.2.19. Claramente $d^{n+1} \circ d^n = 0$

Definición 5.2.20. Sea $F : \text{Cell}(X) \longrightarrow \text{Vect}_k$ definimos las *n-cocadenas* como la suma directa de los k -espacios vectoriales imagen por F de las celdas n -dimensionales de X :

$$C^n(X; F) = \bigoplus_{\alpha / \text{Dim}(\alpha)=n} F(\alpha)$$

Observación 5.2.21. Estos C^n forman las componentes de un espacio vectorial graduado que denotaremos $C(X; F)$ donde las diferenciales las definiremos como:

$$d^n = \sum_{\alpha \leq \beta} [\alpha : \beta] \rho_{\alpha, \beta}$$

Donde :

$$\begin{array}{ccc} F : \text{Cell}(X) & \longrightarrow & \text{Vect} \\ & & \alpha \rightsquigarrow F(\alpha) \\ & & \geq \downarrow \qquad \qquad \downarrow \rho_{\alpha, \beta} \\ & & \beta \rightsquigarrow F(\beta) \end{array}$$

Dando lugar a la siguiente sucesión exacta de espacios vectoriales:

$$0 \xrightarrow{0} F(\text{vértices}) \xrightarrow{d^0} F(\text{aristas}) \xrightarrow{d^1} F(\text{caras}) \xrightarrow{d^2} \dots \xrightarrow{d^n} C^n \xrightarrow{d^{n+1}} \dots \longrightarrow 0$$

Podemos definir, por lo tanto, la cohomología de este complejo:

$$H^n(X; F) = \frac{\text{Ker}(d^n)}{\text{Img}(d^{n-1})}$$

Capítulo 6

Aplicaciones al control del tráfico aéreo

El propósito de este capítulo es ofrecer una aplicación real de la teoría estudiada que en un principio puede parecer muy abstracta pero que acaba siendo aplicable a algo tan tangible y práctico como es el control del tráfico aéreo en un aeropuerto.

6.1. Presentación del problema y contexto

La monitorización mediante sensores del tráfico aéreo de un aeropuerto es crucial para el control del mismo sin incidentes. La posición, la velocidad o la dirección de entrada de un avión son datos cruciales a la hora de coordinar el tráfico. Para obtener los datos se cuenta con diferentes sensores como radares o dispositivos GPS que se utilizan en el sistema y nos dan datos heterogéneos de los cuales se necesita una adquisición de información integrada. Un sistema típico de control podría consistir en una colección de sensores como los mostrados en la siguiente tabla:

Tipo de sensor	número de duplicados
Radar (R)	n
GPS(G)	m
Detectores de superficie del aeropuerto (K)	p
Sensores de rayos infrarrojos(I)	q

Los sensores del mismo tipo comunican datos comunes. Por otra parte, en un instante $t = t_0$ dado se reciben una serie de datos heterogéneos de distintos sensores:

- Estado del avión (e), (Espacio de medición= \mathbb{R})

- Coordenadas del avión (c), (Espacio de medición= \mathbb{R}^3)
- Dirección(d), (Espacio de medición= \mathbb{R}^3)
- Velocidad (s), (Espacio de medición= \mathbb{R})

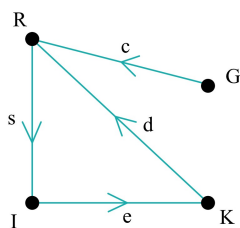
Estos datos son medidos por diversos sensores siguiendo la correlación establecida en la siguiente tabla:

Sensor	(e)	(c)	(d)	(s)
R	no	si	si	si
G	no	si	no	no
K	si	no	si	no
I	si	no	no	si

6.2. Modelización del problema

Dada esta situación surge la necesidad de analizar el funcionamiento del sistema para saber si los datos de los sensores llegan enteros y correctamente integrados aportando así la información global correcta y necesaria sobre el avión en cuestión. Nuestro propósito va a ser abordar el problema con teoría de haces y cohomología. Para ello, y teniendo en cuenta el capítulo 4 en el que se establece la equivalencia entre haces celulares y haces, el primer paso será la construcción de un complejo celular, concretamente un complejo simplicial, sobre el que poder trabajar.

Pues bien, tomando los sensores como nodos y como aristas la información compartida entre ellos obtenemos el siguiente grafo (caso particular de complejo simplicial):



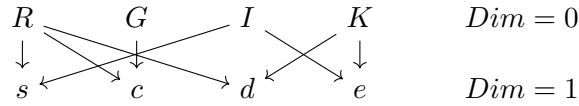
Observación 6.2.1. A este grafo lo hemos dotado de una orientación arbitraria que será necesaria para el cálculo de la cohomología

Ahora que ya tenemos nuestro complejo celular, lo que vamos a hacer es construir un haz celular sobre él, es decir, un funtor $F : \mathbf{Cell}(X) \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$.

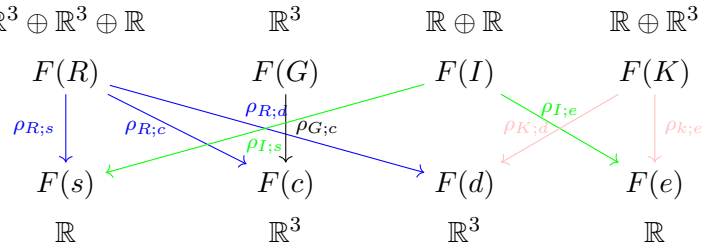
Este haz lo que va a hacer es llevar cada sensor y cada tipo de datos en el espacio de medición de datos en el que se mueven:

- $F(c) = \mathbb{R}^3$
- $F(d) = \mathbb{R}^3$
- $F(e) = \mathbb{R}$
- $F(s) = \mathbb{R}$
- R recaba datos de coordenadas, dirección y velocidad por lo tanto; $F(R) = \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}$
- G recoge datos de las coordenadas por ello; $F(G) = \mathbb{R}^3$
- K aporta datos de estatus y dirección, por consiguiente; $F(K) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$
- I mide estatus del avión y velocidad luego; $F(I) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$

Analizando nuestra categoría $\mathbf{Cell}(X)$ nos encontramos con la siguiente situación:



Pero dado que F es un haz celular el diagrama anterior induce las siguientes flechas (restricciones) en la categoría $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$:



Donde las aplicaciones restricción son, por estar en la categoría $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$, aplicaciones lineales que podemos expresar por tanto en forma matricial:

$$\begin{aligned}
 \rho_{R;s} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rho_{R;c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rho_{R;d} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 \rho_{G;c} &= \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \rho_{I;s} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \rho_{I;e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 \rho_{K;d} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rho_{K;e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

6.3. Cálculo de la homología del complejo simplicial

Hagamos pues, un sencillo cálculo de la homología de nuestro complejo.

Siendo $C_n = \mathbb{R}$ -espacio vectorial generado por los n -símplices se tiene:

- $C_n = \{0\} \quad \forall n \geq 2$
- $C_1 = \langle e, s, d, c \rangle \cong \mathbb{R}^4$
- $C_0 = \langle R, G, I, K \rangle \cong \mathbb{R}^4$

Por un lado tenemos que nuestro grafo es conexo y esto supone automáticamente que $H_0(X) \cong \mathbb{R}$

Por otro lado tenemos:

$$0 \xrightarrow{\sigma_3 = 0} C_2 \xrightarrow{\sigma_2 = 0} C_1 \xrightarrow{\sigma_1} C_0 \xrightarrow{\sigma_0 = 0} 0$$

Luego se tiene que $H_1(X) = \frac{Ker(d_1)}{Img(0)} = Ker(d_1) \cong \mathbb{R}$.

Trivialmente $H_n(X) = 0 \quad \forall n \geq 2$

6.4. Cálculo de la cohomología del haz

Ahora que ya tenemos nuestro sistema modelizado procedamos al cálculo de su cohomología y veamos que información sobre el sistema nos aporta dicha cohomología que nos sirve además como modelo del haz.

- $C^0 := F(R) \oplus F(G) \oplus F(I) \oplus F(K) = \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^{16}$
- $C^1 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^8$
- $C^n = \{0\} \quad \forall n \geq 2$

Tal y como vimos en 5.2.21 $H^n(X) = \frac{Ker(d^n)}{Img(d^{n-1})}$ y $d^n = \sum_{\alpha \leq \beta} [\alpha; \beta] \rho_{\alpha, \beta}$ d^n es una aplicación lineal entre espacios vectoriales así que va admitir representación matricial.

- $d^n = 0 \quad \forall n \geq 1$
- Calculemos d^0 :
 - Primero calculemos las incidencias:

$$[R; c] = +1, [R; s] = -1, [R; d] = +1, [G; c] = -1, [I; s] = +1, [I; e] = -1, [K; d] = -1, [K; e] = +1$$

- Dado que ya hemos calculado las restricciones tenemos todos los ingredientes para dar la expresión matricial de d^0 :

$$d^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ya que ordenando las filas de d^0 adecuadamente tenemos una matriz escalonada sabemos que tiene rango 8, por tanto:

$$Dim(C^0) = Rang(d^0) + Dim(Ker(d^0)) \Rightarrow Dim(Ker(d^0)) = 16 - 8 = 8 \Rightarrow Ker(d^0) = \mathbb{R}^8 \Rightarrow H^0(X) = \mathbb{R}^8$$

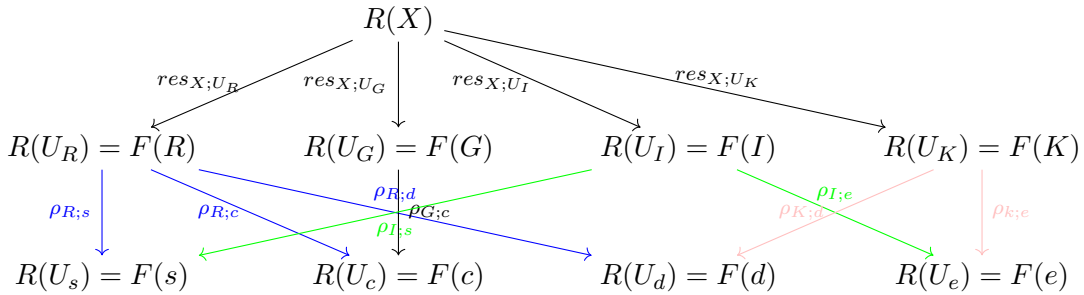
Esto supone que toda la información local se expone globalmente mediante 8 parámetros. Por otro lado tenemos que:

$$H^1(X) = \frac{Ker(d^1)}{Img(d^0)} = \frac{\mathbb{R}^8}{\mathbb{R}^8} = \{0\}$$

Esto va a suponer que nuestro haz es flácido y por lo tanto toda la información local ha pasado al cómputo global sin perderse ningún dato.

Recordemos que como ya vimos en 2.2.10 lo que tenemos que demostrar es que las restricciones son sobreyectivas, pues bien:

Sea R el haz asociado al haz celular F que como vimos en el capítulo 4 es de la forma $R(U) := \varprojlim_{U_p \subseteq U} F(p)$. En nuestro caso es claro que $R(X) = \varprojlim_{U_p} F(p) = F(R) \oplus F(G) \oplus F(K) \oplus F(I)$ dando lugar al siguiente diagrama:



Donde $res_X^{U_\alpha} \forall \alpha \in \{R, G, I, K\}$ es simplemente la proyección del producto en las correspondientes componentes, lo cual es trivialmente sobreyectivo. Por otra parte $\forall \alpha \in \{s, c, d, e\}$,

$res_X^{U_\beta} = res_{U_\alpha}^{U_\beta} \circ res_X^{U_\alpha}$ para cualquier $\beta/[\alpha : \beta] \neq 0$ por lo tanto si todos los $res_{U_\alpha}^{U_\beta}$ son sobreyectivos tendremos que nuestro haz es flácido. Pero resulta que $res_{U_\alpha}^{U_\beta} = \rho_{\beta;\alpha}$ y además $H^1(X) = 0$ lo cual implica que $Rang(d^0) = 8$ lo cual teniendo en cuenta definición de d^0 solo puede ocurrir si todos los $\rho_{\beta;\alpha}$ son sobreyectivos. Concluimos entonces que R es flácido y por tanto no perdemos información local en ningún momento.

Obviamente todos los $H^n(X) = 0 \quad \forall n \geq 2$

6.5. Análisis de la robustez del sistema

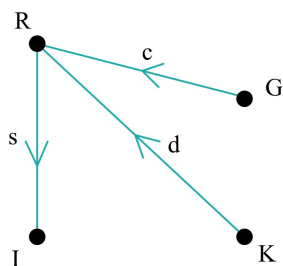
En este apartado, veremos como la cohomología de haces puede ser utilizada para comparar la robustez del sistema de control aéreo. Para ello supongamos que ahora en el mismo sistema tenemos i sensores que están fuera de servicio obteniéndose la siguiente tabla:

Tipo de sensor	número de duplicados
Radar (R)	n
GPS(G)	m
Detectores de superficie del aeropuerto (K)	$p - i$
Sensores de rayos infrarrojos(I)	q

Nos surgen preguntas como si el sistema sigue siendo fiable o nos falta ahora alguna clase de información. Como resultado de este fallo, el sensor K deja de detectar el estatus del avión y por consiguiente nos situamos en el siguiente contexto:

Sensor	(e)	(c)	(d)	(s)
R	no	si	si	si
G	no	si	no	no
K	fuera de servicio	no	si	no
I	si	no	no	si

el nuevo complejo simplicial pasa a ser:



Si calculamos la homología del nuevo complejo tenemos:

- $C_n = \{0\} \forall n \geq 2$
- $C_1 = \langle s, d, c \rangle \cong \mathbb{R}^3$
- $C_0 = \langle R, G, I, K \rangle \cong \mathbb{R}^4$

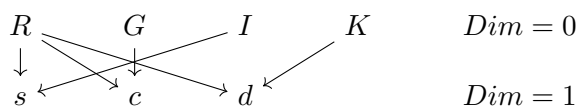
$$0 \xrightarrow{\sigma_3 = 0} C_2 \xrightarrow{\sigma_2 = 0} C_1 \xrightarrow{\sigma_1} C_0 \xrightarrow{\sigma_0 = 0} 0$$

Luego se tiene que $H_0(X) = \frac{Ker(d_0)}{Img(d_1)} = \frac{\mathbb{R}^4}{\mathbb{R}^3} \cong \mathbb{R}$ y $H_1(X) = \frac{Ker(d_1)}{Img(d_0)} = Ker(d_1) = \{0\}$.
 Trivialmente $H_n(X) = 0 \forall n \geq 2$

Siguiendo el cálculo anterior tenemos ahora lo siguiente:

- $F(c) = \mathbb{R}^3$
- $F(d) = \mathbb{R}^3$
- $F(s) = \mathbb{R}$
- R recaba datos de coordenadas, dirección y velocidad por lo tanto; $F(R) = \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}$
- G recoge datos de las coordenadas por ello; $F(G) = \mathbb{R}^3$
- K aporta datos de estatus y dirección, por consiguiente; $F(K) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$
- I mide estatus del avión y velocidad luego; $F(I) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$

Analizando nuestra categoría $\mathbf{Cell}(X)$ nos encontramos con la siguiente situación:



Pero dado que F es un haz celular se el diagrama anterior induce las siguientes flechas (restricciones) en la categoría $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$:

$$\begin{array}{cccc}
 \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R} & \mathbb{R}^3 & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3 \\
 F(R) & F(G) & F(I) & F(K) \\
 \downarrow \rho_{R;s} & \swarrow \rho_{R;c} & \downarrow \rho_{R;d} & \swarrow \rho_{K;d} \\
 F(s) & F(c) & F(d) & \\
 \mathbb{R} & \mathbb{R}^3 & \mathbb{R}^3 & \\
 & \downarrow \rho_{G;c} & & \\
 & & & \\
 & \downarrow \rho_{I;s} & & \\
 & & &
 \end{array}$$

Donde las aplicaciones restricción son, por estar en la categoría $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$, aplicaciones lineales que podemos expresar por tanto en forma matricial:

$$\rho_{R;s} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rho_{R;c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rho_{R;d} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho_{G;c} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho_{I;s} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho_{K;d} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tenemos entonces la siguiente matriz d^0 :

$$d^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

De modo que $Rang(d^0) = 7 \Rightarrow DimKer(d^0) = 9 \Rightarrow H^0(X) = 9$

Esto nos viene a decir por una parte que ahora los nodos esenciales son el K,G e I y que además hay dos medidas que no se están integrando bien el la información global.

Por otro lado $Ker(d^1) = C^1 = F(c) \oplus F(s) \oplus F(d) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \cong \mathbb{R}^7$ así que se tiene:

$$H^1 = \frac{Ker(d^1)}{Img(d^0)} = \frac{\mathbb{R}^7}{\mathbb{R}^7}$$

Conclusión: Del estudio del sistema mediante cohomología de haces se deduce que el fallo de una serie concreta de sensores tipo K no produce una pérdida de datos en el control global de la aeronave, por lo que, a pesar del fallo, es razonable seguir trabajando en el aeropuerto con normalidad

Bibliografía

- [1] Curry, Justin. *Sheaves, cosheaves and applications*, Ph. D. thesis, preprint [arXiv:1303.3255](https://arxiv.org/abs/1303.3255)
- [2] Hatcher, Allen. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [3] Leinster, Tom. *Basic category theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **143**. Cambridge University Press, Cambridge, 2014.
- [4] Mansourbeigi, Seyed. Sheaf Theory Approach to Distributed Applications. Analysing Heterogeneous Data in Air Traffic Monitoring, *International Journal of Data Science and Analysis*. Vol. **3**, No. 5, 2017, pp. 34-39.
- [5] Wedhorn, Torsten. *Manifolds, sheaves, and cohomology*. Springer Studium Mathematik–Master. Springer Spektrum, Wiesbaden, 2016.