

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

Universidad Nacional de Córdoba



Estructuras casi-Kähler estáticas en grupos de Lie

TRABAJO ESPECIAL DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICA

Camilla Molina

Dirigido por:

Dr. Jorge Lauret



Estructuras casi-Kähler estáticas en grupos de Lie por Camilla Molina se distribuye bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial Sin Obra Derivada 4.0 Internacional.

RESUMEN

Una ecuación especialmente sofisticada para evolucionar variedades casi-Kähler es el flujo de curvatura simpléctico, introducido por Streets-Tian en [11]. Los puntos fijos de este flujo, que reciben el nombre de estructuras estáticas, son objetos de gran interés y han presentado dificultades en su estudio. En dimensión 4, Streets-Tian y Kelleher probaron que estas estructuras presentan ciertas condiciones de rigidez. En este trabajo se muestra que a partir de dimensión 6 esas propiedades de rigidez ya no son válidas, y se dan los primeros ejemplos de estructuras estáticas que no son ni Kähler ni Einstein.

ABSTRACT

A specially sophisticated equation that evolves almost-Kähler manifolds is the symplectic curvature flow, introduced by Streets-Tian in [11]. The fixed points of this flow, which are called static structures, are objects of interest whose study has presented difficulties. In dimension 4, Streets-Tian and Kelleher have proved certain conditions of rigidity that hold for these structures. We show that in dimension 6 and above, these rigidity properties are no longer valid, and we give the first examples of static structures that are not Kähler nor Einstein.

Palabras Clave: Grupos de Lie - Casi-Kähler - Estático.

Keywords: Lie groups - Almost-Kähler - Static.

Clasificación/Classification: 2010 Mathematics Subject Classification: 53E30 - 53C20 - 53C30.

Índice general

1. Introducción	5
2. Preliminares	9
2.1. Álgebras de Lie y grupos de Lie	9
2.2. Curvatura de Ricci	12
2.3. Grupos de Lie estáticos	15
3. Álgebras de Lie casi-abelianas	19
4. Álgebras de Lie con nilradical abeliano de codimensión 2	23
4.1. Dimensión 6	28
5. Ejemplos de estructuras estáticas invariantes	31
5.1. Ejemplos diagonales	31
5.2. Ejemplos en dimensión 6	33
6. Ejemplos de variedades estáticas compactas de dimensión ≥ 6	35

Capítulo 1

Introducción

El *flujo de curvatura simpléctico*, introducido por Streets-Tian en [11], es una ecuación de evolución especialmente sofisticada utilizada en análisis geométrico y geometría diferencial. Mediante este flujo geométrico evolucionan las estructuras casi-Kähler, i.e., métricas Riemannianas compatibles con estructuras simplécticas en una variedad diferenciable M . Cada una de estas estructuras está definida por una terna (ω, g, J) , donde g es una métrica, J una estructura casi-compleja, ω es una 2-forma cerrada no degenerada y $\omega = g(J\cdot, \cdot)$. La ecuación del flujo de curvatura simpléctico es

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \omega = -2p, \\ \frac{\partial}{\partial t} g = -2p^{1,1}(\cdot, J\cdot) - 2\text{Rc}^{2,0+0,2}, \end{cases}$$

donde p es la forma de Chern-Ricci de (ω, g) , Rc es el tensor de Ricci de g , $p^{1,1} = \frac{1}{2}(p(\cdot, \cdot) + p(J\cdot, J\cdot))$ y $\text{Rc}^{2,0+0,2} = \frac{1}{2}(\text{Rc}(\cdot, \cdot) - \text{Rc}(J\cdot, J\cdot))$. Para más información referimos a [9], donde se estudia este flujo para el caso de estructuras invariantes a izquierda en grupos de Lie.

Una de las razones por la cual esta evolución es considerada muy complicada es que tanto la estructura simpléctica como la métrica evolucionan, determinando también una evolución para la estructura casi-compleja. En particular, el estudio de los puntos fijos del flujo ha presentado grandes dificultades. Dichos puntos fijos son los análogos de las métricas de Einstein para el flujo de Ricci y son llamados *estructuras estáticas*: estructuras casi-Kähler tales que para algún $c \in \mathbb{R}$ se cumple

$$\begin{cases} p = c\omega, \\ \text{Ric}J = J\text{Ric}, \end{cases}$$

donde Ric es el operador de Ricci de la métrica. En consecuencia, en este caso la evolución

está dada simplemente por

$$\begin{cases} \omega(t) = (-2ct + 1)\omega, \\ g(t) = (-2ct + 1)g, \\ J(t) = J, \end{cases}$$

donde (ω, g, J) es la estructura inicial en $t = 0$. Notemos que las estructuras Kähler-Einstein son trivialmente estáticas pues en ese caso se tiene $p = \text{Rc}(J \cdot, \cdot)$ y $\text{Ric} = cI$, y en consecuencia $p = c\omega$.

Una métrica o estructura casi-hermitiana que satisface $\text{Ric}J = J \text{Ric}$ es llamada de *curvatura de Ricci Hermitiana*, la cual es una condición bastante fuerte. Notemos que es necesaria para que la estructura sea estática. En [3], Fino prueba que en dimensión 4 todo grupo de Lie conexo dotado de una estructura casi-Kähler de curvatura de Ricci Hermitiana es soluble. Más aún, prueba que todos resultan isométricos a una única estructura en un único grupo de Lie. En [7], Lauret demuestra que ningún grupo de Lie nilpotente admite una estructura casi-hermitiana de curvatura de Ricci Hermitiana.

En dimensión 4 se han obtenido los siguientes resultados de rigidez para estructuras estáticas:

- En [11, Corollary 9.5], Streets y Tian prueban que *toda variedad diferenciable compacta de dimensión 4 con estructura estática es Kähler-Einstein*.
- Más recientemente, Kelleher obtuvo lo siguiente en [5, Proposition 5.1]: *Sea (M, ω, g, J) una variedad diferenciable completa (no necesariamente compacta) de dimensión 4 con estructura estática con constante $c \leq 0$. Si existe $C_0 \geq 0$ tal que $\text{Vol}(B_R) \leq C_0 R^4$ y $\|\text{Rm}\|_{L^2}^2 \leq C_0$, entonces la estructura es Kähler-Einstein*.

El principal objetivo de este trabajo es mostrar que a partir de dimensión 6, estas propiedades de rigidez ya no son válidas. Damos los primeros ejemplos de estructuras estáticas que no son ni Kähler ni Einstein, los cuales consisten en estructuras invariantes a izquierda en ciertos grupos de Lie solubles. Todos estos ejemplos tienen constante $c = 0$. También probamos que algunos de estos grupos admiten lattices, lo cual produce ejemplos de estructuras estáticas en variedades compactas en toda dimensión mayor o igual a 6 que no son Kähler ni Einstein.

En el Capítulo 2 se presentan algunos preliminares. En el capítulo siguiente se estudian las estructuras estáticas en álgebras de Lie casi-abelianas, concluyendo que admitir una estructura estática es equivalente a una serie de condiciones, entre las cuales destacamos admitir métrica flat y ser Kähler-Einstein. En el Capítulo 4 se obtienen resultados más alentadores respecto a la existencia de estructuras estáticas, estudiando esta condición en álgebras de Lie con nilradical abeliano de codimensión 2. En este caso se considera una familia de álgebras de Lie que dependen de dos matrices A y B , y se obtienen resultados basados en propiedades de estas matrices. Al final del capítulo se trata más en detalle el

caso de dimensión 6. En el Capítulo 5 se dan los primeros ejemplos de estructuras estáticas en dimensión $2n$ para $n \geq 3$, los cuales no son ni Kähler ni Einstein. Finalmente, en el último capítulo se prueba que algunos de los ejemplos hallados anteriormente admiten lattices. Con esto obtenemos una estructura estática en una variedad compacta de dimensión 6, que no resulta ni Kähler ni Einstein. Además el procedimiento utilizado para obtener dicha estructura se generaliza para cualquier dimensión mayor o igual a 6.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo introduciremos definiciones y resultados básicos necesarios para el desarrollo del trabajo. Nuestro objeto de estudio abarca conceptos sobre álgebras de Lie, grupos de Lie, algunas nociones de conexiones, curvatura y estructuras geométricas en variedades Riemannianas. Para la sección de álgebras y grupos de Lie la bibliografía consultada fue [6], mientras que para el resto se consultaron [10] y algunas publicaciones citadas internamente.

2.1. Álgebras de Lie y grupos de Lie

Definición 2.1. Sea \mathbb{F} un cuerpo. Un *álgebra de Lie* es un espacio vectorial \mathfrak{g} sobre \mathbb{F} dotado de una operación bilineal $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, llamada *corchete de Lie*, que satisface:

- a) $[X, X] = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$ (equivalente a $[X, Y] = -[Y, X]$ para cuerpos con característica distinta de 2).
- b) La *identidad de Jacobi*

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0,$$

para cada $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

En este trabajo todas las álgebras de Lie que se considerarán serán álgebras sobre el cuerpo \mathbb{R} .

Definición 2.2. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie. Para cada $X \in \mathfrak{g}$ definimos $\text{ad } X : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ como $(\text{ad } X)(Y) = [X, Y]$. Notemos que $\text{ad } X$ resulta lineal por la bilinealidad del corchete de Lie, luego $\text{ad } X \in \text{End}(\mathfrak{g})$. Podemos definir entonces $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$, que asigna a cada $X \in \mathfrak{g}$ la aplicación lineal $\text{ad } X$.

Ejemplo 2.3. Consideremos el espacio vectorial $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^4$ con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Definimos sobre este espacio vectorial un corchete de Lie mediante

$$[e_i, e_j] = 0 \quad \text{para cada } 1 \leq i, j \leq 3, \quad [e_4, e_i] = a_{1i}e_1 + a_{2i}e_2 + a_{3i}e_3 \quad \text{para cada } 1 \leq i \leq 3.$$

Por definición de corchete de Lie se tiene que $[e_i, e_4] = -[e_4, e_i]$ para cada $1 \leq i \leq 3$, luego podemos escribir:

$$\text{ad } e_4 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{ad } e_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_{1i} \\ 0 & 0 & 0 & -a_{2i} \\ 0 & 0 & 0 & -a_{3i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{para cada } 1 \leq i \leq 3.$$

Denotaremos por A a la matriz $\text{ad } e_4|_{\mathfrak{n}}$, donde $\mathfrak{n} = \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}$, el espacio generado por $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Definición 2.4. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie con corchete de Lie $[\cdot, \cdot]$ y $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ un subespacio vectorial. Decimos que \mathfrak{h} es una *subálgebra de Lie* de \mathfrak{g} si $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ para cada $X, Y \in \mathfrak{h}$. Si $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ para cada $X \in \mathfrak{h}, Y \in \mathfrak{g}$, entonces \mathfrak{h} es un *ideal*. Una subálgebra \mathfrak{h} de \mathfrak{g} se dice *abeliana* si $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0$, donde $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ denota a $\text{span}\{[X, Y] : X, Y \in \mathfrak{h}\}$.

Definición 2.5. Si \mathfrak{g} es un álgebra de Lie, se define recursivamente

$$D^0(\mathfrak{g}) := \mathfrak{g}, \quad D^1(\mathfrak{g}) := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \quad D^{k+1}(\mathfrak{g}) := [D^k(\mathfrak{g}), D^k(\mathfrak{g})], \quad k \in \mathbb{N}.$$

La colección decreciente

$$\mathfrak{g} = D^0 \supseteq D^1 \supseteq D^2 \supseteq \dots$$

recibe el nombre de *serie derivada*. Diremos que \mathfrak{g} es *soluble* si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $D^k(\mathfrak{g}) = 0$.

Ejemplo 2.6. Consideremos el álgebra de Lie \mathfrak{g} del Ejemplo 2.3. Sean $X \in \mathfrak{n}, Y \in \mathfrak{g}$ cualesquiera, entonces podemos escribir $X = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3, Y = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 + b_4e_4$. Notemos que $(\text{ad } e_i)(e_4) \in \mathfrak{n}$ para todo $1 \leq i \leq 3$, luego

$$\begin{aligned} [X, Y] &= c_1b_4[e_1, e_4] + c_2b_4[e_2, e_4] + c_3b_4[e_3, e_4] \\ &= b_4(c_1(\text{ad } e_1)(e_4) + c_2(\text{ad } e_2)(e_4) + c_3(\text{ad } e_3)(e_4)) \in \mathfrak{n}. \end{aligned}$$

Es decir, \mathfrak{n} es un ideal. Más aún, por cómo hemos definido el corchete se trata de un ideal abeliano. En vista de lo anterior, notemos que $D^1(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{n}$ y $D^2(\mathfrak{g}) = [[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] \subseteq [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] = 0$. Tenemos entonces que \mathfrak{g} es un álgebra de Lie soluble.

Definición 2.7. Definimos recursivamente

$$C^0(\mathfrak{g}) := \mathfrak{g}, \quad C^1(\mathfrak{g}) := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \quad C^{k+1}(\mathfrak{g}) := [C^k(\mathfrak{g}), \mathfrak{g}], \quad k \in \mathbb{N}.$$

La colección decreciente

$$\mathfrak{g} = C^0 \supseteq C^1 \supseteq C^2 \supseteq \dots$$

se llama *serie central descendente*. Diremos que \mathfrak{g} es *nilpotente* si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $C^k(\mathfrak{g}) = 0$.

Definición 2.8. Para cada álgebra de Lie \mathfrak{g} existe un único ideal soluble maximal, llamado el *radical* de \mathfrak{g} . También existe un único ideal nilpotente maximal, que recibe el nombre de *nilradical* de \mathfrak{g} .

Ejemplo 2.9. Retomando el Ejemplo 2.3, como el álgebra de Lie es soluble se tiene que el radical es \mathfrak{g} . Notemos además que el ideal \mathfrak{n} es nilpotente (por definición es $D^1(\mathfrak{n}) = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] = 0$). Si A no es nilpotente es fácil ver que \mathfrak{n} es el nilradical de \mathfrak{g} , caso contrario resulta que \mathfrak{g} es nilpotente.

Definición 2.10. Sean \mathfrak{g} un álgebra de Lie, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ una subálgebra de Lie y $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ un ideal tales que $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ como espacio vectorial. A nivel de álgebras de Lie, el corchete de \mathfrak{g} queda determinado por los respectivos corchetes de \mathfrak{a} , de \mathfrak{b} y por los $\text{ad } X|_{\mathfrak{b}}$ para cada $X \in \mathfrak{a}$. Esta estructura de álgebra de Lie se denota por $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \ltimes \mathfrak{b}$ y se llama *producto semidirecto (interno)*.

Ejemplo 2.11. Sea \mathfrak{g} el álgebra de Lie sobre \mathbb{R}^{n+1} con base $\{e_1, e_2, \dots, e_{n+1}\}$ y corchete de Lie dado por

$$[e_{n+1}, e_i] = Ae_i \quad \forall 1 \leq i \leq n, \quad [e_i, e_j] = 0 \quad \forall 1 \leq i, j \leq n,$$

donde A es tal que su última fila y columna son cero. Llamemos A_1 a la submatriz de A que se obtiene de eliminar la última fila y columna. Notemos que a nivel de espacio vectorial se tiene $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^n$. Además el corchete de Lie está determinado por los corchetes (nulos) de cada uno de los términos de la descomposición, y por $A_1 = \text{ad } e_{n+1}|_{\mathbb{R}^n}$. Es claro que \mathbb{R} es una subálgebra de Lie de \mathfrak{g} y que, por la forma que tiene la matriz A , \mathbb{R}^n es un ideal (abeliano) de \mathfrak{g} . Resulta entonces que $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^n$.

Definición 2.12. Un *grupo de Lie* es una variedad diferenciable con una estructura de grupo tal que las funciones de multiplicación e inversión son diferenciables (i.e. de clase C^∞).

Definición 2.13. Si G es un grupo de Lie y $a \in G$, podemos considerar la función diferenciable $L_a : G \rightarrow G$ dada por $L_a(b) = ab$. Si $X \in \mathfrak{X}(G)$ satisface $X_a = dL_a|_e X_e \quad \forall a \in G$ decimos que X es un campo *invariante a izquierda*.

Definición 2.14. Dado un grupo de Lie G , si consideramos el conjunto

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{X}(G) : X \text{ es invariante a izquierda}\},$$

entonces \mathfrak{g} es un espacio vectorial y la función $X \rightarrow X_e$ es un isomorfismo de \mathfrak{g} en $T_e(G)$. Además \mathfrak{g} resulta un álgebra de Lie con el corchete de Lie dado por $[V, W] := [X, Y]_e$ con $X, Y \in \mathfrak{g}$ tales que $X_e = V, Y_e = W$ (donde $[X, Y]_e$ denota al corchete de Lie de los campos X e Y en el punto e). Decimos que \mathfrak{g} es el *álgebra de Lie de G* .

Definición 2.15. Si \mathfrak{g} es el álgebra de Lie del grupo de Lie G , definimos la *aplicación exponencial* $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ como $\exp(X) = \alpha(1)$, donde α es la curva integral del campo X que satisface $\alpha(0) = e$.

Proposición 2.16. Sea G un grupo de Lie tal que $G \subset GL_n(\mathbb{R})$ es un subgrupo cerrado. Si \mathfrak{g} es el álgebra de Lie de G , entonces

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) : e^{tX} \in G \quad \forall t \in \mathbb{R}\},$$

donde por $e^{(\cdot)}$ denotamos a la función exponencial de matrices.

Ejemplo 2.17. Sea $G = SL_n(\mathbb{R})$. Como es un subgrupo cerrado de $GL_n(\mathbb{R})$, el resultado anterior nos dice cómo calcular su álgebra de Lie. Notemos que $e^{tX} \in SL_n(\mathbb{R})$ para todo $t \in \mathbb{R}$ si y sólo si $\det(e^{tX}) = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Como $\det(e^{tX}) = e^{t \operatorname{tr} X}$, se tiene que $X \in \mathfrak{g}$ si y sólo si $X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ y $\operatorname{tr} X = 0$.

El siguiente resultado será fundamental para entender la relación entre las álgebras de Lie y los grupos de Lie que consideraremos en las próximas secciones.

Teorema 2.18. Existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de clases de isomorfismo de grupos de Lie simplemente conexos y el conjunto de clases de isomorfismo de álgebras de Lie.

2.2. Curvatura de Ricci

Introduciremos algunas definiciones que están relacionadas con la curvatura de Ricci para variedades Riemannianas y luego nos concentraremos en dar la expresión del operador de Ricci en el caso de un grupo de Lie soluble.

Definición 2.19. Una *conexión afín* en una variedad diferenciable M es una función

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

que satisface:

- a) $\nabla_{fX_1 + gX_2} Y = f\nabla_{X_1} Y + g\nabla_{X_2} Y$, para cada $f, g \in C^\infty(M)$, $X_1, X_2, Y \in \mathfrak{X}(M)$.
- b) $\nabla_X(aY_1 + bY_2) = a\nabla_X Y_1 + b\nabla_X Y_2$, para cada $a, b \in \mathbb{R}$, $X, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$.
- c) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$, para cada $f \in C^\infty(M)$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Definición 2.20. Si (M, ∇) es una variedad diferenciable con una conexión afín, la *torsión* de ∇ es la aplicación $T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$, donde $[\cdot, \cdot]$ denota al corchete usual de campos. Si $T = 0$, entonces decimos que la conexión es *simétrica* o *libre de torsión*.

Definición 2.21. Una *métrica Riemanniana* g en una variedad diferenciable M es una elección diferenciable de un producto interno g_p en cada espacio tangente T_pM . Decimos que el par (M, g) es una *variedad Riemanniana*.

Definición 2.22. Si (M, g) es una variedad Riemanniana, una conexión ∇ en M se dice *compatible con g* si para cada $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ se satisface

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

Teorema 2.23. Dada una variedad Riemanniana (M, g) , existe una *única conexión compatible con g y simétrica*.

Definición 2.24. La conexión del teorema anterior es la *conexión de Levi-Civita* de (M, g) .

Definición 2.25. Si (M, g) es una variedad Riemanniana y ∇ su conexión de Levi-Civita, se definen:

- El *tensor de curvatura de Riemann*, $Rm : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \text{End}(\mathfrak{X}(M))$ dado por

$$Rm(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}.$$

- La *curvatura seccional* en el punto $p \in M$, $K : Gr_2(T_pM) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$K(X, Y) = \frac{g_p(Rm(X, Y)Y, X)}{|X|^2|Y|^2 - g_p(X, Y)^2},$$

donde $Gr_2(T_pM)$ denota al conjunto de subespacios de dimensión 2 de T_pM .

- El *tensor de Ricci* de (M, g) en el punto $p \in M$, $Rc : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$Rc(X, Y) = \sum_i g_p(Rm(X_i, X)Y, X_i),$$

si $\{X_i\}$ es una base ortonormal (respecto de g_p) de T_pM .

- El *operador de Ricci* de (M, g) en el punto $p \in M$, $Ric : T_pM \rightarrow T_pM$ dado por

$$g_p(Ric(X), Y) = Rc(X, Y).$$

Ahora daremos una fórmula para el operador de Ricci de una métrica invariante a izquierda en un grupo de Lie soluble S , es decir un grupo de Lie simplemente conexo cuya álgebra de Lie \mathfrak{s} es soluble. Fijaremos $\{X_1, \dots, X_n\}$ una base de \mathfrak{s} y consideraremos el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ que hace de $\{X_1, \dots, X_n\}$ una base ortonormal.

Definición 2.26. Una métrica Riemanniana g en un grupo de Lie G se dice *invariante a izquierda* si

$$g_a(dL_a|_{e \cdot}, dL_a|_{e \cdot}) = g_e(\cdot, \cdot) \quad \forall a \in G,$$

donde L_a es la traslación a izquierda por a .

Observación 2.27. Notemos que dado un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en el álgebra de Lie \mathfrak{g} de G (i.e. $g_e(\cdot, \cdot) = \langle \cdot, \cdot \rangle$), definiendo $g_a(\cdot, \cdot) := \langle dL_{a^{-1}}|_{e \cdot}, dL_{a^{-1}}|_{e \cdot} \rangle$ obtenemos una métrica invariante a izquierda. Esto será útil pues cuando tengamos un producto interno en el álgebra de Lie de un cierto grupo de Lie G , consideraremos la métrica invariante a izquierda inducida en G por la construcción anterior.

Sea g la métrica invariante a izquierda en S definida como en la Observación 2.27. Consideraremos la descomposición ortogonal del álgebra de Lie $\mathfrak{s} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, donde \mathfrak{n} es el nilradical de \mathfrak{s} .

Definición 2.28. Definimos:

- $M : \mathfrak{s} \rightarrow \mathfrak{s}$ el operador simétrico dado por

$$\begin{aligned} \langle MX, Y \rangle &= -\frac{1}{2} \sum \langle [X, X_i], X_j \rangle \langle [Y, X_i], X_j \rangle \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum \langle [X_i, X_j], X \rangle \langle [X_i, X_j], Y \rangle, \end{aligned}$$

para cada $X, Y \in \mathfrak{s}$.

- $B : \mathfrak{s} \rightarrow \mathfrak{s}$ el operador simétrico dado por $\langle BX, Y \rangle = \text{tr ad } X \text{ ad } Y$ para cada $X, Y \in \mathfrak{s}$.
- El *vector de curvatura media*, como el único elemento $H \in \mathfrak{a}$ tal que $\langle H, X \rangle = \text{tr ad } X$ para todo $X \in \mathfrak{s}$.

El operador de Ricci de (S, g) está dado por (ver [8, Section 4]):

$$\text{Ric} = M - \frac{1}{2}B - S(\text{ad } H), \tag{2.1}$$

donde $S(\text{ad } H) = \frac{1}{2}(\text{ad } H + \text{ad } H^t)$ es la parte simétrica de $\text{ad } H$. Si $X \in \mathfrak{n}, Y \in \mathfrak{a}$ podemos escribir de manera más explícita:

$$\begin{aligned} \langle \text{Ric } Y, Y \rangle &= -\frac{1}{2} \|[Y, Y_i]\|^2 - \text{tr } S(\text{ad } Y|_{\mathfrak{n}})^2, \\ \langle \text{Ric } Y, X \rangle &= -\frac{1}{2} \sum \langle [Y, Y_i], [X, Y_i] \rangle - \frac{1}{2} \text{tr} (\text{ad } Y|_{\mathfrak{n}})^t \text{ad } X|_{\mathfrak{n}} - \frac{1}{2} \langle [H, Y], X \rangle, \\ \langle \text{Ric } X, X \rangle &= \frac{1}{4} \sum \langle [Y_i, Y_j], X \rangle^2 + \frac{1}{2} \langle [\text{ad } Y_i|_{\mathfrak{n}}, (\text{ad } Y_i|_{\mathfrak{n}})^t](X), X \rangle \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum \langle [X, X_i], X_j \rangle^2 + \frac{1}{4} \sum \langle [X_i, X_j], X \rangle^2 - \langle [H, X], X \rangle, \end{aligned}$$

donde $\{Y_i\}$ y $\{X_i\}$ son bases ortonormales de \mathfrak{a} y \mathfrak{n} respectivamente (para ser coherentes con nuestra notación anterior donde $\{X_1, \dots, X_n\}$ era una base ortonormal de \mathfrak{s} , podemos considerar que $Y_i = X_{k_i}$, para $k_i \in \{1, \dots, n\}$ un subconjunto de índices).

2.3. Grupos de Lie estáticos

Para poder definir *variedad estática* será necesario introducir la definición de ciertas estructuras geométricas involucradas y recordar algunas nociones básicas de álgebra multilineal. Definiremos también la conexión de Chern y la forma de Chern-Ricci. Por último nos centraremos en la definición en el caso de los grupos de Lie, que será de nuestro particular interés.

Definición 2.29. Sea V un espacio vectorial y V^* su dual. Una k -forma en V es una función $\omega : V^k \rightarrow \mathbb{R}$ k -lineal y alternante. Denotaremos por $\Lambda^k(V^*)$ al espacio vectorial de las k -formas en V . Recordemos que para una variedad diferenciable M de dimensión m podemos definir una k -forma diferencial ω , con $k \leq m$, mediante una elección diferenciable de una $\omega_p \in \Lambda^k(T_p M^*)$ para cada $p \in M$. Una k -forma diferencial ω se dice *cerrada* si $d\omega = 0$, donde d denota a la derivada exterior.

Definición 2.30. Sea M una variedad diferenciable de dimensión $2n$. Una estructura *casi-compleja* J sobre M es una elección diferenciable de una transformación lineal $J_p : T_p M \rightarrow T_p M$ tal que $J_p^2 = -I$ para cada $p \in M$.

Una métrica Riemanniana g en la variedad casi-compleja (M, J) es *compatible* si $g(J\cdot, J\cdot) = g(\cdot, \cdot)$. En tal caso decimos que (M, g, J) es una variedad *casi-hermitiana*.

Decimos que (M, ω, g, J) es *casi-Kähler* si (M, g, J) es una variedad casi-hermitiana y ω es una 2-forma cerrada tal que $\omega(\cdot, \cdot) = g(J\cdot, \cdot)$. Una variedad casi-Kähler (M, ω, g, J) es *Kähler* si J es integrable, i.e.

$$[JX, JY] = [X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M). \quad (2.2)$$

Si ω es una 2-forma diferencial cerrada no degenerada (i.e. $\omega_p(v, w) = 0$ para todo $w \in T_p M$ si y sólo si $v = 0$) en M , entonces decimos que el par (M, ω) es una *variedad simpléctica*.

Observación 2.31. Es inmediato de las definiciones anteriores que si (M, ω, g, J) es casi-Kähler, entonces (M, ω) es una variedad simpléctica.

Recordemos de la sección anterior la definición de la conexión de Levi-Civita. Si consideramos una variedad dotada de una estructura casi-hermitiana, podemos definir otra conexión de la misma manera: como la única que cumple ciertas propiedades.

Definición 2.32. Sea (M, ω, g, J) una variedad con una estructura casi-hermitiana (con $\omega(\cdot, \cdot) = g(J\cdot, \cdot)$). La *conexión de Chern*, que denotaremos por ∇^C , se define como la úni-

ca conexión hermitiana (i.e $\nabla^C \omega = 0, \nabla^C g = 0, \nabla^C J = 0$) tal que su torsión T^C satisface $T^C(J \cdot, J \cdot) + T^C(\cdot, \cdot) = 0$.

Alternativamente puede ser definida en términos de la conexión de Levi-Civita de (M, g) como (ver [9, Section 2]):

$$\nabla_X^C Y = \nabla_X Y + \frac{1}{2}(\nabla_X J)JY.$$

Esta nueva conexión tiene asociado su tensor de curvatura, tal como sucedía con el tensor de curvatura de Riemann para Levi-Civita en la Definición 2.25.

Definición 2.33. En este contexto, la *forma de Chern-Ricci* p de (M, ω, g, J) se define como

$$p(X, Y) = \sum_i g((RX, Y)e_i, Je_i),$$

donde R es el tensor de curvatura de ∇^C y $\{Je_i, e_i\}$ es un marco local ortonormal.

Definición 2.34. Una variedad casi-Kähler (M, ω, g, J) se dice *estática* si existe algún $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} p = c\omega, \\ \text{Ric}J = J \text{Ric}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Observación 2.35. La segunda ecuación nos dice que la variedad tiene tensor de Ricci hermitiano, lo cual es equivalente a

$$\text{Ric}^{\text{ac}} = 0,$$

donde $\text{Ric}^{\text{ac}} = \frac{1}{2}(\text{Ric} + J \text{Ric} J)$ es el operador de Ricci anticomplejificado.

Definición 2.36. Sea G un grupo de Lie con álgebra de Lie \mathfrak{g} . Una k -forma diferencial ω en G se dice *invariante a izquierda* si

$$(L_a \omega)_e^* = \omega_e \quad \forall a \in G,$$

donde $(L_a \omega)_e^*$ denota al pullback de $L_a \omega$ en el elemento neutro del grupo, dado por:

$$(L_a \omega)_e^*(X_1, \dots, X_k) = \omega_a(dL_a|_e(X_1), \dots, dL_a|_e(X_k)) \quad \text{para cada } X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{g}.$$

Consideraremos ahora un grupo de Lie casi-Kähler invariante a izquierda (G, ω, g, J) . Es decir que (G, ω, g, J) es una estructura casi-Kähler donde G es un grupo de Lie, g es una métrica invariante a izquierda y ω es la 2-forma invariante a izquierda correspondiente. Denotaremos por \mathfrak{g} al álgebra de Lie de G y por $[\cdot, \cdot]$ a su corchete de Lie.

En este contexto, una 2-forma no degenerada invariante a izquierda ω es cerrada si y sólo si

$$\omega([X, Y], Z) + \omega([Y, Z], X) + \omega([Z, X], Y) = 0, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}. \quad (2.4)$$

Definición 2.37. Consideremos una estructura casi-hermitiana invariante a izquierda (ω, g, J) en un grupo de Lie G con álgebra de Lie \mathfrak{g} . Entonces la *forma de Chern-Ricci* p de (G, ω, g, J) está dada por (ver [9, Section 2]):

$$p(X, Y) = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} J \operatorname{ad} [X, Y] + \frac{1}{2} \operatorname{tr} \operatorname{ad} J[X, Y], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}. \quad (2.5)$$

El *operador de Chern-Ricci* P está definido por $p = \omega(P\cdot, \cdot)$.

Podemos reescribir (2.3) de forma equivalente en términos del operador de Chern-Ricci como

$$\begin{cases} P = cI, \\ \operatorname{Ric}^{\operatorname{ac}} = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

En general optaremos por utilizar esta expresión al estudiar grupos de Lie estáticos, en lugar de (2.3).

Capítulo 3

Álgebras de Lie casi-abelianas

Dado un espacio vectorial real \mathfrak{g} de dimensión $2n$, podemos dotarlo de una estructura de álgebra de Lie soluble como sigue: si A es una matriz real de tamaño $(2n - 1) \times (2n - 1)$ y $\{e_1, \dots, e_{2n}\}$ es una base de \mathfrak{g} , definimos el corchete de Lie μ_A tal que $\mathfrak{n} := \text{span}\{e_1, \dots, e_{2n-1}\}$ es un ideal abeliano y $\text{ad } e_{2n}|_{\mathfrak{n}} := A$. De esta manera se obtiene el álgebra de Lie (\mathfrak{g}, μ_A) . Denotaremos por G_A al grupo de Lie simplemente conexo cuya álgebra de Lie es (\mathfrak{g}, μ_A) , enfatizando la dependencia de A .

Sabemos que si $(\mathfrak{g}, \mu_A, \omega, g, J)$ es casi-Kähler, entonces existe una base $\{e_1, \dots, e_{2n}\}$ de \mathfrak{g} tal que g es la métrica invariante a izquierda inducida por el producto interno respecto del cual dicha base es ortonormal (Observación 2.27), y:

$$\omega = e^1 \wedge e^{2n} + \omega_1, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & J_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

donde $\{e^i\}$ denota a la base dual de $\{e_i\}$, ω_1 es una 2-forma no degenerada sobre $\mathfrak{n}_1 := \text{span}\{e_2, \dots, e_{2n-1}\}$ y $\omega_1 = g(J_1 \cdot, \cdot)$ ([9, Section 4]). En esta sección consideraremos las álgebras de Lie casi-Kähler $(\mathfrak{g}, \mu_A, \omega, g, J)$ con (ω, g, J) como arriba.

Definición 3.1. Dos álgebras de Lie casi-Kähler $(\mathfrak{g}_1, \omega_1, g_1, J_1)$ y $(\mathfrak{g}_2, \omega_2, g_2, J_2)$ se dicen *equivalentes* si existe un isomorfismo de álgebras de Lie $\varphi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ tal que $\omega_1 = \varphi^* \omega_2$, $g_1 = \varphi^* g_2$ y $J_1 = \varphi^* J_2$.

Teorema 3.2. [9, Proposition 4.1] *Toda álgebra de Lie casi-Kähler con un ideal abeliano de codimen-*

sión uno es equivalente a

$$(\mathfrak{g}, \mu_A, \omega, g), \quad A = \left[\begin{array}{c|c} a & v^t \\ \hline 0 & A_1 \end{array} \right],$$

para algún $a \geq 0$, $v \in \mathbb{R}^{2n-2}$ y $A_1 \in \mathfrak{sp}(\omega_1)$ (i.e. $A_1^t J_1 + J_1 A_1 = 0$).

En [9, Section 4] se computan el operador de Chern-Ricci P , el operador de Ricci Ric y Ric^{ac} de un álgebra de Lie casi-Kähler $(\mathfrak{g}, \mu_A, \omega, g)$:

$$P = \left[\begin{array}{c|c|c} -a^2 & -\left(\frac{1}{2}A_1^t v + av\right)^t & 0 \\ \hline 0 & 0 & -J_1 \left(\frac{1}{2}A_1^t v + av\right) \\ \hline 0 & 0 & -a^2 \end{array} \right], \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \text{Ric} &= \left[\begin{array}{c|c} \frac{1}{2}[A, A^t] - aS(A) & 0 \\ \hline 0 & -\text{tr } S(A)^2 \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c|c} -a^2 + \frac{1}{2}|v|^2 & \left(\frac{1}{2}A_1 v - av\right)^t & 0 \\ \hline \frac{1}{2}A_1 v - av & \frac{1}{2}[A_1, A_1^t] - \frac{1}{2}v v^t - aS(A_1) & 0 \\ \hline 0 & 0 & -a^2 - \frac{1}{2}|v|^2 - \text{tr } S(A_1)^2 \end{array} \right], \quad (3.3) \end{aligned}$$

$$\text{Ric}^{\text{ac}} = \left[\begin{array}{c|c|c} \frac{1}{2}(|v|^2 + \text{tr } S(A_1)^2) & \left(\frac{1}{4}A_1 v - \frac{a}{2}v\right)^t & 0 \\ \hline \frac{1}{4}A_1 v - \frac{a}{2}v & \frac{1}{2}[A_1, A_1^t] - aS(A_1) - \frac{1}{2}(v v^t)^{\text{ac}} & J_1 \left(\frac{1}{4}A_1 v - \frac{a}{2}v\right) \\ \hline 0 & \left(J_1 \left(\frac{1}{4}A_1 v - \frac{a}{2}v\right)\right)^t & -\frac{1}{2}(|v|^2 + \text{tr } S(A_1)^2) \end{array} \right]. \quad (3.4)$$

En las expresiones anteriores recordemos que $S(A)$ denota a la parte simétrica de A .

Proposición 3.3. *Un grupo de Lie casi-Kähler (G_A, ω, g, J) es estático si y sólo si*

$$A = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & A_1 \end{array} \right],$$

con A_1 antisimétrica (i.e. $A \in \mathfrak{u}(n-1)$) y tal que $A_1^t J_1 + J_1 A_1 = 0$.

Demostración. De (3.2) y (3.4) se deduce que (G_A, ω, g, J) es estático si y sólo si $P = 0$ y $\text{Ric}^{\text{ac}} = 0$, lo cual vale si y sólo si $a = 0, v = 0$ y $S(A_1) = 0$. \square

Corolario 3.4. *Un grupo de Lie casi-Kähler (G_A, ω, g, J) es estático si y sólo si es Ricci-flat y Chern-flat (i.e. $P = 0$).*

Demostración. Inmediato del resultado anterior y de la expresión (3.3). \square

Para un grupo de Lie (G, g) con álgebra de Lie \mathfrak{g} , la curvatura seccional está dada por la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} K(X, Y) = & -\frac{3}{4}||[X, Y]|^2 - \frac{1}{2}g([X, [X, Y]], Y) - \frac{1}{2}g([Y, [Y, X]], X) \\ & + |U(X, Y)|^2 - g(U(X, X), U(Y, Y)) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde $U(X, Y) = -\frac{1}{2}(\text{ad } X)^t(Y) - \frac{1}{2}(\text{ad } Y)^t(X)$.

Observación 3.5. En el caso de un grupo de Lie (G_A, g) se tiene:

$$\begin{cases} U(e_{2n}, e_{2n}) = 0, \\ U(e_{2n}, X) = -\frac{1}{2}A^t X, \\ U(X, Y) = g(S(A)X, Y)e_{2n}, \end{cases} \quad (3.6)$$

para $X, Y \in \mathfrak{n}$ cualesquiera.

Corolario 3.6. *Un grupo de Lie casi-Kähler (G_A, ω, g, J) es estático si y sólo si g es flat (i.e. tiene curvatura seccional cero).*

Demostración. Consideremos un plano $\sigma = \langle ce_{2n} + X, Y \rangle$, con $X, Y \in \mathfrak{n}$. Por (3.5) y (3.6) tenemos:

$$\begin{aligned} K(ce_{2n} + X, Y) = & -\frac{3}{4}c^2|AY|^2 - \frac{1}{2}c^2g(A^2Y, Y) - \frac{1}{2}g(-c[Y, AY], ce_{2n} + X) \\ & + |cU(e_{2n}, Y) + U(X, Y)|^2 - g(c^2U(e_{2n}, e_{2n}) + 2cU(e_{2n}, X) \\ & + U(X, X), U(Y, Y)) \\ = & -\frac{3}{4}c^2|AY|^2 - \frac{1}{2}c^2g(AY, A^tY) + |-\frac{1}{2}cA^tY + g(S(A)X, Y)e_{2n}|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -g(-\frac{1}{2}c^2A^tX + g(S(A)X, X)e_{2n}, g(S(A)Y, Y)e_{2n}) \\
& = -\frac{3}{4}c^2|AY|^2 - \frac{1}{2}c^2g(AY, A^tY) + \frac{1}{4}c^2|A^tY|^2 + g(S(A)X, Y)^2 \\
& - g(S(A)X, X)g(S(A)Y, Y).
\end{aligned}$$

Por Proposición 3.3 se tiene que si (G_A, ω, g, J) es estático entonces $S(A) = 0$, luego $K(ce_{2n} + X, Y) = 0 \forall X, Y \in \mathfrak{n}$. Así (G_A, ω, g, J) resulta flat. Recíprocamente, como flat implica Ricci-flat, por Corolario 3.4 tenemos que (G_A, ω, g, J) es estático. \square

Observación 3.7. Una prueba alternativa al corolario anterior consiste en notar que en el caso homogéneo, Ricci-flat implica flat (ver [1]).

Corolario 3.8. *Un grupo de Lie casi-Kähler (G_A, ω, g, J) es estático si y sólo si es Kähler-Einstein.*

Demostración. Tenemos que (G_A, ω, g, J) es Kähler si y sólo si $\text{Ric}^{\text{ac}} = 0$ (ver [9, Section 4]). Si suponemos que el grupo de Lie es estático entonces tenemos $\text{Ric}^{\text{ac}} = 0$, lo cual implica Kähler. También sabemos que estático implica $\text{Ric} = 0$, de modo que resulta Einstein.

Si ahora suponemos que la estructura es Kähler, por la equivalencia mencionada anteriormente tenemos $\text{Ric}^{\text{ac}} = 0$. Observando el bloque superior izquierdo de la matriz Ric^{ac} en (3.4), concluimos que $v = \text{tr } S(A)^2 = 0$. Esto implica $v = 0$ y A antisimétrica, de lo que se obtiene

$$\text{Ric} = P = \left[\begin{array}{c|c|c} -a^2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -a^2 \end{array} \right].$$

Si suponemos además que la métrica es de Einstein, entonces $0 = \text{Ric} = P$. De esta manera obtuvimos que el grupo de Lie es estático. \square

A continuación damos un corolario donde se presenta de manera más compacta lo hallado en esta sección.

Corolario 3.9. *Si (G_A, ω, g, J) es un grupo de Lie casi-Kähler, entonces las siguientes son equivalentes:*

1. (G_A, ω, g, J) es estático.
2. (G_A, ω, g, J) es Chern-flat y Ricci-flat.
3. (G_A, g) es flat.
4. (G_A, ω, g, J) es Kähler-Einstein.

Capítulo 4

Álgebras de Lie con nilradical abeliano de codimensión 2

En esta sección trabajaremos sobre una familia de álgebras de Lie que se obtendrá haciendo variar el corchete de Lie sobre un mismo espacio vectorial, en función de dos matrices A y B . Estudiaremos bajo qué condiciones un grupo de Lie con álgebra de Lie perteneciente a esa familia es estático.

Sea \mathfrak{g} un espacio vectorial real de dimensión $2n$ para algún $n \geq 2$, con base $\{e_1, e_2, \dots, e_{2n}\}$. De manera similar a lo hecho en la sección anterior, dotamos a \mathfrak{g} de una estructura de álgebra de Lie soluble haciendo de $\mathfrak{n} := \text{span}\{e_3, \dots, e_{2n}\}$ un ideal abeliano y definiendo $\text{ad } e_1|_{\mathfrak{n}} := A$, $\text{ad } e_2|_{\mathfrak{n}} := B$ y $[e_1, e_2] = 0$, para A y B dos matrices que conmutan.

Observación 4.1. Cuando tengamos un producto de A o B y una matriz M de tamaño $2n \times 2n$, interpretaremos que estamos extendiendo a A y B de la siguiente manera:

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & A \end{array} \right], \quad \tilde{B} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right].$$

Observación 4.2. La condición de que las matrices A y B conmuten es necesaria para que la construcción anterior defina un álgebra de Lie. En efecto, la identidad de Jacobi nos impone que para todo $k \geq 3$ se satisfaga

$$[e_1, [e_2, e_k]] + [e_k, [e_1, e_2]] + [e_2, [e_k, e_1]] = 0.$$

Podemos escribir la ecuación anterior como $[e_1, Be_k] + [e_2, -Ae_k] = 0$, luego para cada $k \geq 3$ debe cumplirse $ABe_k - BAe_k = 0$.

En esta sección consideraremos g la métrica invariante a izquierda obtenida al fijar en \mathfrak{g} el producto interno g_e que hace de $\{e_1, e_2, \dots, e_{2n}\}$ una base ortonormal (Observación 2.27).

Fijaremos además

$$J := \begin{bmatrix} 0 & -1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & -1 \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta elección de J y g nos determina una estructura casi-hermitiana (g, J) sobre un grupo de Lie $G_{A,B}$ con álgebra de Lie \mathfrak{g} . Definimos además la 2-forma $\omega(\cdot, \cdot) := g(J\cdot, \cdot)$. Denotaremos por J_1 a la matriz de tamaño $(2n - 2) \times (2n - 2)$ que se obtiene de eliminar las primeras dos filas y columnas de J .

Proposición 4.3. *Un grupo de Lie $(G_{A,B}, \omega, g, J)$ es casi-Kähler si y sólo si*

$$\begin{cases} J_1 A + A^t J_1 = 0, \\ J_1 B + B^t J_1 = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

i.e. $A, B \in \mathfrak{sp}(n - 1, \mathbb{R})$.

Demostración. Utilizaremos la fórmula (2.4). Sean $e_k, e_j \in \mathfrak{n}$, luego

$$\begin{aligned} d\omega(e_1, e_2, e_k) &= \omega([e_1, e_2], e_k) + \omega([e_2, e_k], e_1) + \omega([e_k, e_1], e_2) \\ &= \omega(Be_k, e_1) + \omega(-Ae_k, e_2) \\ &= g(JBe_k, e_1) + g(-JAe_k, e_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\omega(e_1, e_j, e_k) &= \omega([e_1, e_j], e_k) + \omega([e_j, e_k], e_1) + \omega([e_k, e_1], e_j) \\ &= \omega(Ae_j, e_k) + \omega(-Ae_k, e_j) \\ &= g(JAe_j, e_k) + g(-JAe_k, e_j) \\ &= g(JAe_j, e_k) + g(A^t J e_j, e_k) \\ &= g((JA + A^t J)e_j, e_k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\omega(e_2, e_j, e_k) &= \omega([e_2, e_j], e_k) + \omega([e_j, e_k], e_2) + \omega([e_k, e_2], e_j) \\ &= \omega(Be_j, e_k) + \omega(-Be_k, e_j) \\ &= g(JBe_j, e_k) + g(-JBe_k, e_j) \\ &= g(JBe_j, e_k) + g(B^t J e_j, e_k) \\ &= g((JB + B^t J)e_j, e_k). \end{aligned}$$

Notemos que $JAe_k, JBe_k \in \mathfrak{n}$ puesto que $Ae_k, Be_k \in \mathfrak{n}$. Así, por la ortonormalidad de la

base de \mathfrak{g} respecto de g , se tiene que $g(JBe_k, e_1) + g(-J Ae_k, e_2) = 0$. Basta reescribir las dos ecuaciones restantes en términos de A, B y J_1 para obtener lo que queríamos probar. \square

Proposición 4.4. *Si $(G_{A,B}, \omega, g, J)$ es casi-Kähler, entonces las matrices A y B satisfacen*

$$\begin{cases} (A)_{2i-1, 2j-1} = -(A)_{2j, 2i}, \\ (B)_{2i-1, 2j-1} = -(B)_{2j, 2i}, \end{cases}$$

para cada $1 \leq i, j \leq 2(n-1)$.

Demostración. Notemos que $J_1 A$ es la matriz que se obtiene como resultado de multiplicar por -1 la fila $2k$ -ésima de A e intercambiarla por su fila $(2k-1)$ -ésima, para $1 \leq k \leq n-1$. Por otra parte, $A^t J_1$ es la matriz que se obtiene de multiplicar por -1 la columna $(2k-1)$ -ésima de A^t e intercambiarla por su columna $2k$ -ésima, para $1 \leq k \leq n-1$. Esto nos produce para cada $1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq 2(n-1)$ las igualdades

$$\begin{cases} (J_1 A)_{2i, j} = (A)_{2i-1, j}, \\ (J_1 A)_{2i-1, j} = -(A)_{2i, j}. \end{cases}$$

Y para cada $1 \leq i \leq 2(n-1), 1 \leq j \leq n-1$,

$$\begin{cases} (A^t J_1)_{i, 2j-1} = (A^t)_{i, 2j} = (A)_{2j, i}, \\ (A^t J_1)_{i, 2j} = -(A^t)_{i, 2j-1} = -(A)_{2j-1, i}. \end{cases}$$

De lo anterior se deduce que $(J_1 A)_{2i, 2j-1} = -(A^t J_1)_{2i, 2j-1}$, y de ésto último se sigue que $(A)_{2i-1, 2j-1} = -(A)_{2j, 2i}$ para $1 \leq i, j \leq n-1$. \square

Observación 4.5. En particular la proposición anterior implica que $\text{tr } A = \text{tr } B = 0$. En efecto, para ambas matrices la traza resulta ser una suma de $2(n-1)$ términos que, agrupados de a pares consecutivos, se cancelan entre sí. Alternativamente, notemos que la Proposición 4.3 nos dice que si $(G_{A,B}, \omega, g, J)$ es casi-Kähler entonces $A_1 = J_1 A_1^t J_1$ (multiplicando por J_1 a izquierda miembro a miembro). De ahí se obtiene que $\text{tr } A_1 = \text{tr } J_1^2 A_1^t = -\text{tr } A_1$, y es análogo para B .

Proposición 4.6. *Un grupo de Lie casi-Kähler $(G_{A,B}, \omega, g, J)$ es Kähler si y sólo si*

$$A + J_1 B + J_1(A + J_1 B)J_1 = 0. \quad (4.2)$$

Demostración. Recordemos que la estructura es Kähler si y sólo si

$$[X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY] = 0 \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Como $Je_1 = e_2$ y $Je_2 = -e_1$, tenemos

$$[e_1, e_2] + J[J e_1, e_2] + J[e_1, J e_2] - [J e_1, J e_2] = J[e_2, e_2] + J[e_1, -e_1] - [e_2, -e_1] = 0.$$

Para $X, Y \in \mathfrak{n}$ también se cumple la ecuación de arriba, pues $JX, JY \in \mathfrak{n}$. Nos resta solamente calcular los casos $X = e_1, Y = e_k$ y $X = e_2, Y = e_k$ para cada $3 \leq k \leq 2n$:

$$\begin{aligned} [e_1, e_k] + J[J e_1, e_k] + J[e_1, J e_k] - [J e_1, J e_k] &= A e_k + J[e_2, e_k] + J[e_1, J e_k] - [e_2, J e_k] \\ &= A e_k + J_1 B e_k + J_1 A J_1 e_k - B J_1 e_k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [e_2, e_k] + J[J e_2, e_k] + J[e_2, J e_k] - [J e_2, J e_k] &= B e_k + J[-e_1, e_k] + J[e_2, J e_k] - [-e_1, J e_k] \\ &= B e_k - J_1 A e_k + J_1 B J_1 e_k + A J_1 e_k. \end{aligned}$$

Notemos que

$$J_1(B e_k - J_1 A e_k + J_1 B J_1 e_k + A J_1 e_k) = A e_k + J_1 B e_k + J_1 A J_1 e_k - B J_1 e_k.$$

Esto nos dice que la estructura resulta Kähler si y sólo si satisface

$$A + J_1 B + J_1 A J_1 - B J_1 = 0,$$

lo cual puede reescribirse como

$$A + J_1 B + J_1(A + J_1 B)J_1 = 0.$$

□

Proposición 4.7. *Todo grupo de Lie casi-Kähler $(G_{A,B}, \omega, g, J)$ es Chern-flat.*

Demostración. Utilizaremos la Ecuación (2.5) para computar la forma de Chern-Ricci de nuestro grupo de Lie.

Es claro que $p(e_j, e_k) = 0$ para $3 \leq j, k \leq 2n$ y para $j = 1, k = 2$. Ahora si $3 \leq k \leq 2n$, tenemos

$$\begin{aligned} p(e_1, e_k) &= -\frac{1}{2} \operatorname{tr} J \operatorname{ad} [e_1, e_k] + \frac{1}{2} \operatorname{tr} \operatorname{ad} J[e_1, e_k] \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{tr} J \operatorname{ad} A e_k + \frac{1}{2} \operatorname{tr} \operatorname{ad} J A e_k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(e_2, e_k) &= -\frac{1}{2} \operatorname{tr} J \operatorname{ad} [e_2, e_k] + \frac{1}{2} \operatorname{tr} \operatorname{ad} J[e_2, e_k] \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{tr} J \operatorname{ad} B e_k + \frac{1}{2} \operatorname{tr} \operatorname{ad} J B e_k. \end{aligned}$$

Notemos de nuevo que $Ae_k, Be_k \in \mathfrak{n}$ por cómo hemos definido el corchete del álgebra de Lie. Esto implica inmediatamente que $\text{ad } Ae_k, \text{ad } Be_k$ tienen traza cero, pues son matrices de la forma

$$\left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline * & 0 \end{array} \right],$$

donde el bloque superior izquierdo es de tamaño 2×2 .

De esta observación también se deduce que $\text{tr } J \text{ad } Be_k = \text{tr } \text{ad } JBe_k = 0$. Lo mismo vale reemplazando B por A , de modo que resulta $p = 0$. \square

En nuestra álgebra de Lie \mathfrak{g} con la métrica g que fijamos previamente, se tiene (ver [8, Section 4]):

$$\text{Ric} = \left[\begin{array}{cc|c} -\text{tr } S(A)^2 & -\text{tr } S(A)S(B) & 0 \\ -\text{tr } S(A)S(B) & -\text{tr } S(B)^2 & \\ \hline 0 & & \frac{1}{2}[A, A^t] + \frac{1}{2}[B, B^t] - (\text{tr } A)S(A) - (\text{tr } B)S(B) \end{array} \right]. \quad (4.3)$$

Recordemos que por la Observación 4.5, si la estructura es casi-Kähler se tiene que las trazas de A y B son cero. Luego obtenemos:

$$\text{Ric} = \left[\begin{array}{cc|c} -\text{tr } S(A)^2 & -\text{tr } S(A)S(B) & 0 \\ -\text{tr } S(A)S(B) & -\text{tr } S(B)^2 & \\ \hline 0 & & \frac{1}{2}[A, A^t] + \frac{1}{2}[B, B^t] \end{array} \right], \quad (4.4)$$

$$\text{Ric}^{\text{ac}} = \left[\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2}(\text{tr } S(B)^2 - \text{tr } S(A)^2) & -\text{tr } S(A)S(B) & 0 \\ -\text{tr } S(A)S(B) & \frac{1}{2}(\text{tr } S(A)^2 - \text{tr } S(B)^2) & \\ \hline 0 & & (\frac{1}{2}[A, A^t] + \frac{1}{2}[B, B^t])^{\text{ac}} \end{array} \right]. \quad (4.5)$$

Proposición 4.8. *Para un grupo de Lie casi-Kähler $(G_{A,B}, \omega, g, J)$ las siguientes son equivalentes:*

1. *La métrica es de Einstein.*
2. *La métrica es Ricci-flat.*
3. *A y B son antisimétricas.*

4. La métrica es flat.

Demostración. Recordemos que la métrica es de Einstein si y sólo si $\text{Ric} = cI$ para algún $c \in \mathbb{R}$. Notemos que esto implica $\text{tr Ric} = 2nc$.

Probaremos ahora la equivalencia entre los dos primeros ítems. Supongamos que vale $\text{Ric} = cI$ para algún $c \in \mathbb{R}$, entonces por (4.4) se tiene

$$\begin{aligned}\text{tr Ric} &= -\text{tr } S(A)^2 - \text{tr } S(B)^2 + \frac{1}{2}(\text{tr } [A, A^t] + \text{tr } [B, B^t]) \\ &= 2c + \frac{1}{2}(\text{tr } [A, A^t] + \text{tr } [B, B^t]) \\ &= 2c,\end{aligned}$$

pues $\text{tr } [A, A^t] = \text{tr } [B, B^t] = 0$. Resulta entonces $2nc = 2c$, luego debe ser $c = 0$ y así $\text{Ric} = 0$. La recíproca es clara.

Supongamos ahora que la métrica es Ricci-flat, entonces se tiene que $0 = \text{tr } S(A)^2 = \text{tr } S(A)S(A)^t$. La última igualdad nos dice que $S(A) = 0$, es decir que A es antisimétrica. Lo mismo vale para B y se prueba repitiendo el razonamiento. Por último, si A y B son ambas antisimétricas entonces la métrica resulta Ricci-flat, observando (4.4).

Para la última equivalencia basta recordar que en el caso homogéneo Ricci-flat implica flat (ver [1]). \square

Corolario 4.9. *Un grupo de Lie $(G_{A,B}, \omega, g, J)$ es estático si y sólo si*

$$\begin{cases} J_1 A + A^t J_1 = 0, \\ J_1 B + B^t J_1 = 0, \\ \text{tr } S(B)^2 - \text{tr } S(A)^2 = 0, \\ \text{tr } S(A)S(B) = 0, \\ J_1([A, A^t] + [B, B^t])J_1 + [A, A^t] + [B, B^t] = 0. \end{cases}$$

Demostración. Es inmediato de la Proposición 4.3 y de la expresión (4.5). \square

4.1. Dimensión 6

Nos interesará entender los grupos de Lie estáticos $G_{A,B}$ de dimensión 6, de manera tal que la tarea de hallar ejemplos resulte menos ardua. No nos detendremos en hacer esto en dimensión 4, pues los grupos de Lie con tensor de Ricci hermitiano en esa dimensión ya se ha estudiado de manera más general en [3].

En este caso las matrices A y B a considerar serán de tamaño 4×4 . Recordemos que para obtener un ejemplo estático, estas matrices deben estar sujetas a las restricciones de la Proposición 4.9. Dejaremos expresadas algunas de ellas.

Proposición 4.10. Si $(G_{A,B}, \omega, g, J)$ es un grupo de Lie casi-Kähler de dimensión 6, entonces

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_5 & -a_1 & a_6 & a_7 \\ -a_7 & a_4 & a_8 & a_9 \\ a_6 & -a_3 & a_{10} & -a_8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_5 & -b_1 & b_6 & b_7 \\ -b_7 & b_4 & b_8 & b_9 \\ b_6 & -b_3 & b_{10} & -b_8 \end{bmatrix}.$$

Demostración. Utilizaremos la Condición (4.1) de la Proposición 4.3. Notemos que ese resultado nos impone las mismas ecuaciones para ambas matrices, luego nos bastará hacer los cálculos para A . Comenzaremos denotando por a_{ij} a los coeficientes ij -ésimos de A . Computando obtenemos:

$$J_1 A + A^t J_1 = \begin{bmatrix} 0 & -a_{22} - a_{11} & -a_{23} + a_{41} & -a_{24} - a_{31} \\ a_{22} + a_{11} & 0 & a_{13} + a_{42} & a_{14} - a_{32} \\ -a_{41} + a_{23} & -a_{42} - a_{13} & 0 & -a_{44} - a_{33} \\ a_{31} + a_{24} & a_{32} - a_{14} & a_{33} + a_{44} & 0 \end{bmatrix},$$

e igualando la matriz a 0 se deducen las siguientes igualdades:

$$\begin{cases} a_{22} = -a_{11}, \\ a_{44} = -a_{33}, \\ a_{31} = -a_{24}, \\ a_{41} = a_{23}, \\ a_{42} = -a_{13}, \\ a_{32} = a_{14}. \end{cases}$$

Notemos que las primeras dos ya se deducían de la Proposición 4.4. Ahora renombramos:

$$\begin{cases} a_i = a_{1i} & \text{para cada } 1 \leq i \leq 4, \\ a_5 = a_{21}, \\ a_6 = a_{23}, \\ a_7 = a_{24}, \\ a_8 = a_{33}, \\ a_9 = a_{34}, \\ a_{10} = a_{43}. \end{cases}$$

De esta manera se obtienen las matrices del enunciado. □

Observación 4.11. La condición de que A y B conmuten (necesaria para la identidad de Jacobi)

no se dejará expresada para dimensión 6, ya que no aporta una mejor interpretación para los ejemplos.

Proposición 4.12. *Si $(G_{A,B}, \omega, g, J)$ es un grupo de Lie casi-Kähler de dimensión 6, entonces es Kähler si y sólo si*

$$\begin{cases} 2a_1 - b_5 - b_2 = 0, \\ 2b_1 + a_5 + a_2 = 0, \\ -a_7 + a_3 - b_6 - b_4 = 0, \\ a_6 + a_4 - b_7 + b_3 = 0, \\ 2a_8 - b_{10} - b_9 = 0, \\ a_{10} + a_9 + 2b_8 = 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

Demostración. Utilizaremos las igualdades de (4.2) para dos matrices A y B como en la Proposición 4.3. Notemos que

$$A + J_1B = \begin{bmatrix} a_1 - b_5 & a_2 + b_1 & a_3 - b_6 & a_4 - b_7 \\ a_5 + b_1 & -a_1 + b_2 & a_6 + b_3 & a_7 + b_4 \\ -a_7 - b_6 & a_4 + b_3 & a_8 - b_{10} & a_9 + b_8 \\ a_6 - b_7 & -a_3 + b_4 & a_{10} + b_8 & -a_8 + b_9 \end{bmatrix},$$

$$J_1(A + J_1B)J_1 = \begin{bmatrix} a_1 - b_2 & a_5 + b_1 & -a_7 - b_4 & a_6 + b_3 \\ a_2 + b_1 & -a_1 + b_5 & a_4 - b_7 & -a_3 + b_6 \\ a_3 - b_4 & a_6 - b_7 & a_8 - b_9 & a_{10} + b_8 \\ a_4 + b_3 & a_7 + b_6 & a_9 + b_8 & -a_8 + b_{10} \end{bmatrix}.$$

Luego $(A + J_1B) + J_1(A + J_1B)J_1$ es igual a

$$\begin{bmatrix} 2a_1 - b_5 - b_2 & 2b_1 + a_2 + a_5 & a_3 - b_6 - a_7 - b_4 & a_4 - b_7 + a_6 + b_3 \\ 2b_1 + a_5 + a_2 & -2a_1 + b_2 + b_5 & a_6 + b_3 + a_4 - b_7 & a_7 + b_4 - a_3 + b_6 \\ -a_7 + a_3 - b_6 - b_4 & a_4 + b_3 + a_6 - b_7 & 2a_8 - b_9 - b_{10} & 2b_8 + a_9 + a_{10} \\ a_6 + a_4 - b_7 + b_3 & -a_3 + a_7 + b_4 + b_6 & 2b_8 + a_{10} + a_9 & -2a_8 + b_9 + b_{10} \end{bmatrix}.$$

Igualando a cero esta última matriz y descartando las ecuaciones no linealmente independientes, se obtiene lo enunciado. \square

Capítulo 5

Ejemplos de estructuras estáticas invariantes

5.1. Ejemplos diagonales

Sean A, B matrices diagonales de tamaño $2(n-1) \times 2(n-1)$, $n \geq 2$. Dado que dos matrices así siempre conmutan podemos considerar la estructura de álgebra de Lie inducida por ellas, construida como se detalla en la Sección 4.

La estructura resulta casi-Kähler si y sólo si se satisface (4.1). Utilizando el mismo argumento que en la Proposición 4.4, esa condición puede reescribirse como

$$(A)_{2i-1,2i-1} = -(A)_{2i,2i}, \quad (B)_{2i-1,2i-1} = -(B)_{2i,2i} \quad \forall 1 \leq i \leq 2n-1. \quad (5.1)$$

Nos resta ver bajo qué condiciones $\text{Ric}^{\text{ac}} = 0$, y lo haremos utilizando (4.5). Es claro que por ser matrices diagonales se tiene $0 = [A, A^t] = [B, B^t]$, luego el bloque inferior izquierdo de Ric^{ac} es 0. Mirando el bloque superior derecho, obtenemos que $\text{Ric}^{\text{ac}} = 0$ si y sólo si $\frac{1}{2}(\text{tr} A^2 - \text{tr} B^2) = 0$ y $\text{tr} S(A)S(B) = 0$. En este caso, esto último es equivalente a que se satisfagan $\text{tr} AB = 0$ y

$$\sum_{i=1}^{n-1} (A)_{2i,2i}^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (B)_{2i,2i}^2 \quad (5.2)$$

Proposición 5.1. *Si $(G_{A,B}, \omega, g, J)$ es un grupo de Lie casi-Kähler tal que A y B son matrices diagonales, entonces es Kähler si y sólo si $A = B = 0$.*

Demostración. Para A, B diagonales y suponiendo que la estructura es casi-Kähler, por (4.1) se tiene que $J_1 A J_1 = A$ y $B J_1 = -J_1 B$. Luego

$$\begin{aligned} J_1(A + J_1 B)J_1 &= J_1 A J_1 - B J_1 \\ &= A + J_1 B. \end{aligned}$$

Recordemos que la estructura es Kähler si y sólo si se cumple (4.2), es decir si y sólo si $2(A + J_1B) = 0$.

Ahora notemos que la Proposición 4.4 nos permite escribir a las matrices A y B de la forma

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_m \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -b_m \end{bmatrix},$$

con $m = 2(n - 1)$, si $2n$ es la dimensión del grupo de Lie. Así, se tiene que

$$A + J_1B = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_1 & -a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_m & b_m \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_m & -a_m \end{bmatrix}.$$

Luego hemos probado que la estructura es Kähler si y sólo si

$$\begin{cases} b_1 = 0, \\ a_1 = 0, \\ \vdots \\ b_m = 0, \\ a_m = 0, \end{cases}$$

es decir si y sólo si $A = B = 0$. □

Ejemplo 5.2. Construimos para cada $n \geq 2$ un álgebra de Lie de dimensión $2n$, eligiendo las matrices A y B de la siguiente forma: para cualquier $r \in \mathbb{R}$ distinto de cero definimos $(A)_{2(n-1),2(n-1)} = r$, $(A)_{2i,2i} = 0$ para $1 \leq i \leq n - 2$ y $(B)_{2,2} = r$, $(B)_{2i,2i} = 0$ para $2 \leq i \leq n - 1$, e imponemos la Condición (5.1).

Proposición 5.3. *Un grupo de Lie $(G_{A,B}, \omega, g, J)$ con A y B como en el Ejemplo 5.2 es estático, estrictamente casi-Kähler y tiene métrica no Ricci-flat.*

Demostración. Por cómo las hemos definido las matrices A y B satisfacen (4.10), lo cual nos

dice que la estructura es casi-Kähler. Además es claro que $\text{tr } AB = 0$, y se cumple (5.2) pues

$$\sum_{i=1}^{n-1} (B)_{2i,2i}^2 = (B)_{2,2}^2 = r^2 = (A)_{2(n-1),2(n-1)}^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (A)_{2i,2i}^2.$$

Así, un grupo de Lie perteneciente a la familia del Ejemplo 5.2 resulta estático.

Para ver que la métrica no es Ricci-flat, basta notar que por (4.4) tenemos

$$\text{Ric} = \left[\begin{array}{cc|c} -2r^2 & 0 & 0 \\ 0 & -2r^2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Por último, la Proposición 5.1 nos asegura que como A y B no son cero, entonces se trata de estructuras estrictamente casi-Kähler. \square

5.2. Ejemplos en dimensión 6

Ejemplo 5.4. Si elegimos

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

entonces tenemos dos matrices simétricas que satisfacen $AB = BA = 0$. En particular conmutan y $\text{tr } S(A)S(B) = \text{tr } AB = 0$. Si observamos la forma de Ric en (4.4), vemos que la simetría de A y B nos dice que el bloque inferior derecho será 0. Para ver que esta elección nos produce un ejemplo estático nos resta comprobar que $\text{tr } S(A)^2 = \text{tr } S(B)^2$. Notemos que

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

luego $\text{tr } S(A)^2 = \text{tr } A^2 = 2 = \text{tr } B^2 = \text{tr } S(B)^2$. Así hemos verificado que este ejemplo es estático según la Proposición 4.9, y además

$$\text{Ric} = \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ \hline 0 & & 0 \end{array} \right],$$

osea que resulta no Ricci-flat. Observemos que bajo la notación de la Proposición 4.3 tenemos que $a_8 = 1, b_2 = 1, b_5 = 1$ y el resto de los coeficientes son 0, luego $2a_8 - b_{10} - b_9 = 2 \neq 0$. Esto nos dice que no se satisfacen todas las igualdades de (4.2) y por lo tanto la estructura no es Kähler.

Capítulo 6

Ejemplos de variedades estáticas compactas de dimensión ≥ 6

Definición 6.1. Sea G un grupo de Lie. Decimos que Γ es un *lattice* en G si es un subgrupo discreto y cocompacto de G (i.e. G/Γ es compacto).

Definición 6.2. Un grupo de Lie soluble conexo y simplemente conexo G con nilradical N se llama *casi-nilpotente* si su nilradical tiene codimensión uno. En tal caso se tiene $G = \mathbb{R} \ltimes_{\varphi} N$, para alguna acción φ de \mathbb{R} en N .

Un grupo de Lie casi-nilpotente con nilradical abeliano $N = \mathbb{R}^n$ se llama un grupo de Lie *casi-abeliano*. En este caso la acción φ está dada por

$$\varphi = e^{t \operatorname{ad} X_{n+1}},$$

donde $t \in \mathbb{R}$, $X_{n+1} = \partial_t$ y $n = \dim N$.

A continuación se enuncia un criterio para la existencia de lattices en grupos de Lie casi-abelianos:

Proposición 6.3. [2, Proposition 2.1] Sea $G = \mathbb{R} \ltimes_{\varphi} \mathbb{R}^n$ un grupo de Lie soluble casi-abeliano. Entonces G admite un lattice si y sólo si existe un $t_0 \neq 0$ para el cual $\varphi(t_0)$ puede ser conjugado a una matriz entera.

Recordemos la familia de álgebras de Lie estudiada en la Sección 3 de este trabajo. Cualquier álgebra de Lie perteneciente a dicha familia puede expresarse como producto semidirecto de la forma $\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^{2n-1}$, luego el grupo de Lie simplemente conexo G_A resulta casi-abeliano (de acuerdo con la definición 6.2). El resultado anterior nos dice que para A de tamaño $(2n - 1) \times (2n - 1)$, el grupo de Lie G_A admite un lattice si y sólo si

$$e^{\alpha A} = \sigma A_1 \sigma^{-1}, \tag{6.1}$$

para algún $A_1 \in SL_{2n-1}(\mathbb{Z})$, $\alpha \in \mathbb{R}$ distinto de cero y $\sigma \in GL_{2n-1}(\mathbb{R})$. En ese caso, un lattice está dado por (ver [9, Section 4.5]):

$$\Gamma = \exp(\mathbb{Z}\alpha e_{2n} \ltimes \sigma \mathbb{Z}^{2n-1}).$$

Consideremos ahora el álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \ltimes \mathbb{R}^4$, donde \mathfrak{a} denota al subespacio de $\mathfrak{sl}_4(\mathbb{R})$ generado por las siguientes matrices diagonales:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Observación 6.4. No habrá ambigüedad al referirnos al producto semidirecto $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \ltimes \mathbb{R}^4$ porque consideraremos, como es natural, que $\text{ad } X|_{\mathbb{R}^4} = X$ para cada $X \in \mathfrak{a}$.

Observación 6.5. Sea \mathfrak{h} un álgebra de Lie con nilradical abeliano de codimensión 2, definida como en la Sección 4 de este trabajo. Supongamos que las matrices que inducen su estructura de álgebra de Lie forman una base de \mathfrak{a} . Entonces \mathfrak{g} es isomorfa como álgebra de Lie a \mathfrak{h} , pues el espacio vectorial de base coincide y el corchete claramente también.

El grupo de Lie simplemente conexo correspondiente a esta álgebra de Lie está dado por $G = \exp(\mathfrak{a}) \ltimes \mathbb{R}^4$, lo cual nos sitúa por fuera del caso casi-nilpotente de la Proposición 6.3. A continuación seguiremos un procedimiento similar al utilizado en [4, Section 2] para fabricarnos un lattice en este grupo de Lie. Sean $A, B \in \mathfrak{a}$ tales que

$$\begin{cases} e^A = \phi A_1 \phi^{-1} \\ e^B = \phi B_1 \phi^{-1}, \end{cases}$$

para ciertos $A_1, B_1 \in SL_4(\mathbb{Z})$ y $\phi \in GL_4(\mathbb{R})$. Si denotamos por Λ al grupo abeliano libre generado por $\{\phi A_1 \phi^{-1}, \phi B_1 \phi^{-1}\}$, entonces tenemos lo siguiente:

- $\Lambda \subset \exp(\mathfrak{a})$.

Podemos comprobarlo notando que si $M \in \Lambda$ entonces existen $i, j \in \mathbb{N}$ tales que

$$\begin{aligned} M &= (\phi A_1 \phi^{-1})^i (\phi B_1 \phi^{-1})^j \\ &= (e^A)^i (e^B)^j \\ &= e^{iA+jB} \in \exp(\mathfrak{a}), \end{aligned}$$

donde la última igualdad es válida porque A y B conmutan.

- Λ es un subgrupo de $\exp(\mathfrak{a})$.

- Λ es discreto, pues $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^2$ como grupos.
- $\exp(\mathfrak{a})/\Lambda$ es compacto, pues $\exp(\mathfrak{a})/\Lambda \simeq \mathbb{R}^2/\Lambda$ y éste último es compacto dado que $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ lo es.

Así, hemos visto que Λ es un lattice en $\exp(\mathfrak{a})$. Si definimos

$$\Gamma = \Lambda \ltimes \phi\mathbb{Z}^{2n-2}, \quad (6.2)$$

entonces tenemos que:

- Γ es un subgrupo de G .

Sean $(M_1, x), (M_2, y) \in \Gamma$. Tenemos que

$$\begin{aligned} (M_1, x) \cdot (M_2, y)^{-1} &= (M_1, x) \cdot (M_2^{-1}, -y) \\ &= (M_1 M_2^{-1}, x - M_1 y), \end{aligned}$$

Como $M_1 \in \Lambda, y \in \phi\mathbb{Z}^{2n-2}$, entonces existen $k, m \in \mathbb{N}$ y $Z \in \mathbb{Z}^{2n-2}$ tales que

$$\begin{aligned} M_1 y &= (\phi A_1 \phi^{-1})^k (\phi B_1 \phi^{-1})^m \phi Z \\ &= \phi A_1^k B_1^m \phi^{-1} \phi Z \\ &= \phi A_1^k B_1^m Z. \end{aligned}$$

Notemos que como A_1 y B_1 eran matrices con coeficientes en \mathbb{Z} , obtuvimos que $M_1 y \in \phi\mathbb{Z}^{2n-2}$. Así resulta $(M_1, x) \cdot (M_2, y)^{-1} \in \Gamma$.

- Γ es discreto, pues Λ y $\phi\mathbb{Z}^{2n-2}$ son dos subgrupos discretos de G .
- Γ es cocompacto. Esto vale porque $\exp(\mathfrak{a})/\Lambda$ y $\mathbb{R}^{2n-2}/\phi\mathbb{Z}^{2n-2}$ lo son.

Consideraremos las siguientes matrices diagonales:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b_2 \end{bmatrix}$$

Nos concentraremos primero en la matriz A . Para hallar coeficientes a_1, a_2 tales que $e^A = \phi A_1 \phi^{-1}$ con $A_1 \in \text{SL}_4(\mathbb{Z})$, es condición necesaria que el polinomio característico p de e^A tenga coeficientes en \mathbb{Z} . Notemos que

$$\begin{aligned} p(x) &= x^4 - (e^{-a_2} + e^{a_2} + e^{-a_1} + e^{a_1})x^3 \\ &\quad + (2 + e^{-(a_1+a_2)} + e^{(a_1-a_2)} + e^{-(a_1-a_2)} + e^{(a_1+a_2)})x^2 \end{aligned}$$

$$-(e^{-a_2} + e^{a_2} + e^{-a_1} + e^{a_1})x + 1,$$

luego deben satisfacerse

$$\begin{cases} e^{-a_2} + e^{a_2} + e^{-a_1} + e^{a_1} \in \mathbb{Z}, \\ e^{-(a_1+a_2)} + e^{(a_1-a_2)} + e^{-(a_1-a_2)} + e^{(a_1+a_2)} \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Supongamos ahora $a_1 = \ln c_1$ y $a_2 = \ln c_2$ con c_1, c_2 a determinar. Reemplazando en las ecuaciones anteriores obtenemos

$$\begin{cases} \frac{1}{c_2} + c_2 + \frac{1}{c_1} + c_1 \in \mathbb{Z}, \\ \frac{1 + c_1^2 + c_2^2 + c_1^2 c_2^2}{c_1 c_2} \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Equivalentemente,

$$\begin{cases} \frac{c_1 + c_2^2 c_1 + c_1^2 c_2 + c_2}{c_1 c_2} \in \mathbb{Z}, \\ \frac{1 + c_1^2 + c_2^2 + c_1^2 c_2^2}{c_1 c_2} \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Eligiendo $c_1 = 1$ y $c_2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ se obtiene el polinomio característico

$$p(x) = x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1,$$

cuyas raíces son $1, \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ y $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$, donde la raíz 1 tiene multiplicidad 2.

Bajo esta elección de coeficientes es fácil ver que e^A es semejante a la matriz

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in \text{SL}_4(\mathbb{Z}),$$

pues tienen la misma forma de Jordan. Más explícitamente podemos escribir $e^A = \phi A_1 \phi^{-1}$, donde

$$\phi = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{5+3\sqrt{5}}{10} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{5-3\sqrt{5}}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \end{bmatrix}.$$

Si tomamos

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ln\left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right) & \\ & & & -\ln\left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right) \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} \ln\left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right) & & & \\ & -\ln\left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right) & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix},$$

entonces e^B se conjuga a la matriz

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_4(\mathbb{Z})$$

mediante la misma ϕ que habíamos considerado antes. Es decir que hemos hallado $A_1, B_1 \in \mathrm{SL}_4(\mathbb{Z})$ y $\phi \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ tales que:

$$\begin{cases} e^A = \phi A_1 \phi^{-1} \\ e^B = \phi B_1 \phi^{-1}. \end{cases}$$

Esto nos dice que Γ definido como en (6.2), es un lattice en G . Notemos además que $\{A, B\}$ es una base de \mathfrak{a} , luego por la Observación 6.5 se tiene que $G_{A,B}$ admite lattice.

Habiendo hallado este lattice consideraremos la variedad compacta $G_{A,B}/\Gamma$. Veremos que es posible dotarla de una estructura geométrica, definida mediante la de G , que preserve ciertas propiedades.

Lema 6.6. [10, Ex. 3.6] Sea (\tilde{M}, \tilde{g}) una variedad Riemanniana y $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ un cubrimiento. Si \tilde{g} es invariante por toda transformación del cubrimiento, entonces existe una única métrica Riemanniana g en M tal que $\tilde{g} = \pi^*g$.

Consideremos ahora $\tilde{M} = G_{A,B}$, $M = G_{A,B}/\Gamma$ y $\pi : G_{A,B} \rightarrow G_{A,B}/\Gamma$ la proyección al cociente. Si tenemos \tilde{g} una métrica Riemanniana en \tilde{M} , aplicando el lema anterior obtenemos una métrica g en $G_{A,B}/\Gamma$. Podemos aplicar el resultado anterior porque el grupo de transformaciones del cubrimiento en este caso es precisamente Γ , y la métrica resulta

invariante por Γ puesto que lo es por G (en el sentido de la invariancia a izquierda). Renombremos como $(\tilde{\omega}, \tilde{g}, \tilde{J})$ a la estructura casi-Kähler fijada previamente para $G_{A,B}$. Entonces la métrica g obtenida viene acompañada por la 2-forma ω definida por $\pi^*\omega = \tilde{\omega}$. También podemos considerar J dada por $\pi^*J = \tilde{J}$, i.e. $d\pi^{-1}Jd\pi = \tilde{J}$. Notemos que la definición es buena también en este caso, pues π es un difeomorfismo local. Esto último nos dice que $d\pi|_p : T_p G_{A,B} \rightarrow T_{\pi(p)} G_{A,B}/\Gamma$ es un isomorfismo para cada $p \in G_{A,B}$.

Proposición 6.7. $(G_{A,B}/\Gamma, \omega, g, J)$ es una variedad compacta con una estructura estrictamente casi-Kähler estática cuya métrica no es de Einstein.

Demostración. La compacidad ya fue probada previamente. Veremos primero que la estructura es casi-Kähler. Como $\tilde{g}(\tilde{J}\cdot, \tilde{J}\cdot) = \tilde{g}(\cdot, \cdot)$ tenemos que $\pi^*g(\tilde{J}\cdot, \tilde{J}\cdot) = \pi^*g(\cdot, \cdot)$, es decir $g(d\pi(d\pi^{-1}Jd\pi)\cdot, d\pi(d\pi^{-1}Jd\pi)\cdot) = g(d\pi\cdot, d\pi\cdot)$. Obtenemos así $g(Jd\pi\cdot, Jd\pi\cdot) = g(d\pi\cdot, d\pi\cdot)$. Además $0 = d\tilde{\omega} = d(\pi^*\omega) = \pi^*(d\omega)$, de lo que resulta $d\omega = 0$. Notemos que si la estructura del cociente fuese Kähler entonces lo sería también la del grupo de Lie, lo cual no ocurre. Así obtuvimos que la estructura geométrica es estrictamente casi-Kähler.

Lo siguiente es comprobar que la variedad es estática. En este caso utilizaremos la expresión (2.3). Como las métricas son localmente isométricas obtenemos que la condición deseada para el operador de Ricci de $(G_{A,B}/\Gamma, g)$ se cumple. Para la condición que debe cumplir la forma de Chern-Ricci p , si recordamos que en este caso el grupo de Lie $(G_{A,B}, \tilde{\omega}, \tilde{g}, \tilde{J})$ era Chern-flat, resulta $p = 0$.

Por último, la métrica en el cociente no es de Einstein debido a la isometría local existente con la métrica del grupo de Lie. □

Observación 6.8. Para cada $n \geq 3$, podemos construir una variedad de dimensión $2n$ de la forma $G_{A,B}/\Gamma$ que satisfaga las propiedades de la Proposición 6.7. Para ello consideramos las siguientes matrices A y B : si $r = \ln(\frac{3+\sqrt{5}}{2})$, entonces definimos $(A)_{2(n-1)-1, 2(n-1)-1} = r$, $(A)_{2(n-1), 2(n-1)} = -r$, $(A)_{i,i} = 0$ para cada $1 \leq i \leq 2(n-2)$ y $(B)_{1,1} = r$, $(B)_{2,2} = -r$, $(B)_{i,i} = 0$ para cada $3 \leq i \leq 2(n-1)$. Imitando lo hecho en el caso de dimensión 6 se ve que $G_{A,B}$ admite un lattice Γ , de modo que $G_{A,B}/\Gamma$ resulta una variedad compacta de dimensión $2n$. La estructura casi-Kähler a considerar se construye repitiendo exactamente el mismo procedimiento que antes, por lo tanto vale la Proposición 6.7 también en este caso.

Bibliografía

- [1] D. ALEKSEEVSKII, B. KIMEL'FEL'D, Structure of homogeneous Riemannian spaces with zero Ricci curvature, *Funktional Anal. i Prilozen* **9** (1975), 5-11 (English translation: *Functional Anal. Appl.* **9** (1975), 97-102).
- [2] S. CONSOLE, M. MACRÌ, Lattices, cohomology and models of six dimensional almost abelian solvmanifolds, *Rend. Semin. Mat., Univ. Politec. Torino* **74** (2016), 95-119.
- [3] A. FINO, Almost-Kähler 4-dimensional Lie groups with J-invariant Ricci tensor, *Diff. Geom. Appl.* **23** (2005), 26-37.
- [4] I. KATH, J. LAURET, A new example of a compact ERP- G_2 structure, preprint 2020 (arXiv).
- [5] C.L. KELLEHER, Symplectic curvature flow revisited, *Adv. Math.* **349** (2019), 426-458.
- [6] A. KNAPP, *Lie groups beyond an introduction*, Birkhäuser (1996).
- [7] J. LAURET, A canonical compatible metric for geometric structures on nilmanifolds, *Ann. Global Anal. Geom.* **30** (2006), 107-138.
- [8] J. LAURET, Ricci soliton solvmanifolds, *J. Reine Angew. Math.* **650** (2011), 1-21.
- [9] J. LAURET, C. WILL, On the symplectic curvature flow for locally homogeneous manifolds, *J. Symp. Geom.* **15** (2017), 1-49.
- [10] J. LEE, *Riemannian manifolds*, Springer-Verlag (1997).
- [11] J. STREETS, G. TIAN, Symplectic curvature flow, *J. Reine Angew. Math.* **696** (2014), 143-185.