



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

# **Estudio comparativo del desempeño de los métodos FEM y MMT para el cálculo de la atenuación sonora de silenciadores pasivos.**

**Ing. Alexander García Luque**

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de ingeniería, Departamento de Ingeniería Mecánica y Mecatrónica  
Bogotá, Colombia  
2014



# Estudio comparativo del desempeño de los métodos FEM y MMT para el cálculo de la atenuación sonora de silenciadores pasivos.

**Ing. Alexander García Luque**

Tesis presentada como requisito para optar al título de:  
**Magíster en Ingeniería - Ingeniería Mecánica**

Director:

Doctor en Matemáticas, Profesor Jorge Mauricio Ruiz Vera.

Área:

Mecánica computacional y métodos numéricos. Matemática Aplicada.

Línea de investigación:

Métodos numéricos en Ingeniería.

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de ingeniería, Departamento de Ingeniería Mecánica y Mecatrónica

Bogotá, Colombia

2014

*Dedicatoria*

*A mis padres Rafael y Esmeralda,  
y muy especialmente a Lilita (Mi abuela).*

*El silencio es el ruido de las cosas que no escuchamos. (Anónimo)*

## **Agradecimientos**

Al Profesor Mauricio Ruiz director del proyecto, por su gran colaboración y apoyo a un proyecto diferente. A mi familia por su ayuda y aliento incansable.

También a mis colegas los ingenieros de sonido y acústicos, a mis compañeros en la formación de Maestría, a la Universidad Nacional de Colombia por permitir todo esto y ser admirable en tantos aspectos, a FiberGlass Colombia la empresa donde trabajo por brindarme estabilidad y soporte, y a mis amigos por los momentos compartidos, gracias a todos.

## Resumen

El proyecto consiste en un estudio enfocado en el análisis y comparación de dos métodos matemáticos para calcular y evaluar la atenuación acústica en términos de la pérdida por transmisión sonora (TL) de silenciadores pasivos, dispositivos diseñados y utilizados para el control de ruido, los métodos escogidos son Elementos Finitos (FEM) y Matriz de Transferencia (MMT).

Se analiza el comportamiento del sonido por medio de la ecuación de onda acústica y para el caso particular de la propagación sonora en ductos la ecuación de Helmholtz, esta formulación permite la definición del problema matemático y físico para posteriormente resolverlo mediante los métodos mencionados, de igual forma se usan soluciones empírico-analíticas utilizadas como referencia, el modelo definido para el desarrollo del trabajo corresponden a un modelo bidimensional (2D). Se consideran diferentes tipologías de silenciadores pasivos para el estudio comparativo, así mismo para los modelos escogidos se realiza una evaluación de dos condiciones: con y sin absorción sonora en las paredes internas de los ductos. Como punto de partida se toma la propagación sonora en el modelo más sencillo correspondiente a un ducto rectangular, luego se implementan los modelos para las morfologías escogidas inicialmente validándolos con datos experimentales obtenidos de la literatura y posteriormente solucionando casos particulares para diferentes tamaños de silenciadores. Por último se analizan y evalúan los resultados obtenidos de TL por cada uno de los métodos para los distintos tipos de silenciadores permitiendo realizar comparaciones generales y particulares de acuerdo a los datos conseguidos, y se permite concluir la eficiencia del MMT para geometrías simples y su limitación a las características morfológicas del modelo, por otra parte FEM logra gran correspondencia con modelos más complejos y su gran ventaja radica en que tiene en cuenta la propagación sonora y variables como la longitud de onda, por lo cual ofrece una lectura más acertada del comportamiento del fenómeno físico real.

Se destacan como aportes principales del trabajo: Realizar un análisis comparativo para los diferentes casos de estudio de los valores de TL para los métodos FEM y MMT y simular la atenuación sonora para silenciadores mixtos implementando MMT.

**Palabras Clave:** Acústica, Ruido, Silenciadores, Atenuación sonora en ductos, Pérdida por Transmisión (TL), Contaminación Sonora, Método de Elementos Finitos (FEM), Método de Matriz de Transferencia (MMT).

## Abstract

The project presents a comparison for two mathematical methods to calculate and evaluate the sound transmission loss (TL) of passive silencers devices designed and used for noise control, the methods chosen are finite elements (FEM) and transfer matrix (MMT). It analyzes the sound behavior through the acoustic wave equation and for the particular case of sound propagation in ducts Helmholtz equation, this formulation allows the definition of the physical and mathematical problem then solve it by the above methods, the same used as empirical-analytical solutions used as a reference, the model defined for the development of work correspond to a two-dimensional (2D). Are considered different types of passive silencers for comparative study, also for models chosen an assessment is made of two conditions: with and without sound absorption in the inner duct walls. To start it takes the sound propagation in a simple model that is a rectangular duct, then implement models initially chosen shapes validating them with experimental data from the literature and then solving particular cases for different sizes of mufflers.

Finally it's analyze and evaluate the TL results for each method on different types of mufflers allowing general and specific comparisons according to the data collected, and to conclude the efficiency of MMT for simple geometries and likewise the morphological limitation, further FEM had high correlation with more complex models and the great advantage is use the sound propagation and variables such as wavelength, then achieved a major approximation to physical real phenomenon.

Main contributions: comparative analysis for TL values of different case studies with FEM & MMT and simulate the sound attenuation using MMT for mixed silencers.

**Keywords:** Acoustics, Noise, Silencer, Muffler, Sound Attenuation, Transmission Loss in ducts (TL), Noise Pollution, Finite Element Method (FEM), Transfer Matrix Method (MMT).

# Contenido

## Contenido

<b>1. Introducción.....</b>	<b>17</b>
1.1 Motivación del trabajo .....	17
1.2 Planteamiento del problema.....	19
1.3 Objetivos .....	19
1.3.1 General.....	19
1.3.2 Específicos .....	20
1.4 Organización del documento .....	20
<b>2. Recuento Teórico y Formulación del Problema. ....</b>	<b>22</b>
2.1. Conceptos Generales.....	22
2.2. Ecuación de Onda Acústica. ....	25
2.3. Condiciones de Frontera. (CF) .....	28
2.3.1. CF asociadas a la propagación sonora en silenciadores. ....	29
2.4. Silenciadores Acústicos.....	32
2.4.1. Clasificación de Silenciadores Acústicos. ....	33
2.4.2. Frecuencia de Corte .....	37
2.4.3. Atenuación sonora por medio de silenciadores acústicos.....	37
<b>3. Método de Matriz de Transferencia (MMT). ....</b>	<b>39</b>
3.1. Generalidades.....	39
3.2. Ducto rectangular con paredes rígidas .....	40
3.2.1. Casos de Estudio- Tubo Recto. ....	44
3.3. Silenciador con cambios de sección transversal. ....	46
3.3.1. Casos de Estudio – Cámara de Expansión.....	47
3.4. Silenciadores Acoplados. ....	49
3.4.1. Casos de Estudio – Doble cámara de Expansión .....	50
3.5. Ducto lineal con material absorbente en paredes laterales.....	53
3.5.1. Casos de Estudio – Tubo recto con absorción.....	56

3.5.2. Silenciador con cámara de expansión y absorción en cámara.....	57
3.6. Silenciador Resonador de Helmholtz.....	57
3.6.1. Casos de Estudio – Resonador de Helmholtz.....	59
<b>4. Método de Elementos Finitos (FEM).....</b>	<b>61</b>
4.1. Generalidades.....	61
4.2. Problema acústico unidimensional por FEM.....	61
4.2.1. Tubo abierto en un extremo y con fuente en el otro.....	62
4.2.2. Tubo cerrado en un extremo y con fuente en el otro.....	65
4.2.3. Tubo extremo Sommerfeld y con fuente en el otro.....	66
4.3. Silenciador con cámara de expansión, Modelo 2D –FEM.....	67
4.3.1. Caso 1. Tubo recto.....	71
4.3.2. Caso 2. Silenciador de una cámara de expansión.....	73
4.3.3. Caso 3. Silenciador de una cámara vs doble cámara de expansión.....	75
4.4. Silenciador disipativo (paredes internas absorbentes).....	76
4.4.1. Silenciador con CF de Impedancia.....	78
4.4.2. Silenciador con subdominio interno absorbente.....	79
4.5. Silenciador Resonador de Helmholtz.....	81
<b>5. Análisis de resultados y comparación.....</b>	<b>84</b>
5.1. Validación de los modelos.....	84
5.1.1. Validación No. 1. Cámara Expansión.....	84
5.1.2. Validación No. 2. Doble cámara de expansión.....	93
De acuerdo al análisis de errores se concluye que en el caso de validación No. 2. La mejor correspondencia con los datos experimentales la tiene la simulación por medio del método FEM con bases lineales.....	100
5.1.3. Validación No. 3. Silenciador Disipativo.....	100
5.1.4. Validación No. 4. Resonador de Helmholtz.....	114
<b>6. Conclusiones y Trabajo Futuro.....</b>	<b>121</b>
6.1. Conclusiones.....	121
6.2. Aportes del proyecto.....	124
6.3. Productos y Publicaciones.....	124
6.4. Trabajo Futuro y perspectiva.....	125
<b>Bibliografía.....</b>	<b>126</b>

## Lista de figuras

	<b>Pág.</b>
<b>Figura 2-1:</b>	Desplazamiento longitudinal de onda plana unidimensional. ....26
<b>Figura 2-2:</b>	Condiciones de Dirichlet y Newmann en un tubo. ....29
<b>Figura 2-3:</b>	Esquema propagación sonora en un ducto. ....30
<b>Figura 2-4:</b>	Tipos de Silenciadores. ....32
<b>Figura 2-5:</b>	Silenciador con una cámara de expansión. ....34
<b>Figura 2-6:</b>	Silenciador con doble cámara de expansión. ....34
<b>Figura 2-7:</b>	Silenciador Resonador de Helmholtz. ....35
<b>Figura 2-8:</b>	Ducto con paredes absorbentes. ....35
<b>Figura 2-9:</b>	Silenciador disipativo de paneles paralelos. ....35
<b>Figura 2-10:</b>	Modo de resonancia en altas frecuencias al interior de un ducto. ....37
<b>Figura 2-11:</b>	Gráfica de Pérdida por Transmisión Sonora TL. ....38
<b>Figura 3-1:</b>	Analogía electrónica silenciador. ....39
<b>Figura 3-2:</b>	Modelo de análisis del MMT. ....40
<b>Figura 3-3:</b>	Propagación de onda plana armónica en un ducto – Esquema 2D. ....41
<b>Figura 3-4:</b>	TL ducto recto con paredes duras – Caso 1 varía diámetro. ....44
<b>Figura 3-5:</b>	TL ducto recto con paredes duras – Caso 2, varía longitud. ....45
<b>Figura 3-6:</b>	Cambio de Sección en ducto – Esquema 2D. ....46
<b>Figura 3-7:</b>	Silenciador de cámara de expansión – Esquema 2D Ducto Reactivo. ....47
<b>Figura 3-8:</b>	TL Silenciador con cámara de Expansión – Caso 1, varía $L_c$ . ....47
<b>Figura 3-9:</b>	TL Silenciador con cámara de Expansión – Caso 2, varía $D$ . ....48
<b>Figura 3-10:</b>	Esquema 2D Silenciador Combinado. ....49
<b>Figura 3-11:</b>	Esquema 2D Silenciador Doble cámara de expansión. ....50
<b>Figura 0-12:</b>	Comparación TL Silenciador combinado – Caso 1, vs una cámara. ....51
<b>Figura 3-13:</b>	Comparación TL Silenciador combinado – Caso 2, varía $L$ de conector. ....52
<b>Figura 3-14:</b>	Comparación TL Silenciador combinado – Caso 3, varía $L$ de segunda cámara. ....52
<b>Figura 3-15:</b>	Comparación TL Silenciador combinado – Caso 4, varía $d$ del conector. ....53
<b>Figura 0-16:</b>	Propagación sonora transversal en un tubo rígido. ....54
<b>Figura 0-17:</b>	Modelo bidimensional de ducto con paredes absorbentes. ....54
<b>Figura 3-18:</b>	TL ducto recto con paredes absorbentes – Caso 1, varía diámetro. ....56
<b>Figura 3-19:</b>	TL ducto recto con paredes absorbentes – Caso 2, varía longitud. ....57
<b>Figura 3-20:</b>	Modelo bidimensional para resonador de Helmholtz. ....58
<b>Figura 3-21:</b>	TL Resonador de Helmholtz, varía longitud del cuello. ....59
<b>Figura 3-22:</b>	TL Resonador de Helmholtz, varía longitud cuello. ....60
<b>Figura 4-1:</b>	Modelo unidimensional de un tubo de longitud $L$ . ....62
<b>Figura 4-2:</b>	Funciones de forma para un sistema 1D para $0 \leq x \leq L$ . ....63
<b>Figura 4-3:</b>	Presión sonora en Tubo abierto con fuente. ....64
<b>Figura 4-4:</b>	Esquema Tubo cerrado con fuente. ....65
<b>Figura 4-5:</b>	Presión sonora en Tubo cerrado con fuente. ....65
<b>Figura 4-6:</b>	Esquema Tubo con fuente y extremo Sommerfeld. ....66
<b>Figura 4-7:</b>	Presión Sonora en Tubo con fuente y extremo Sommerfeld. ....67
<b>Figura 4-8:</b>	Esquema 2D Silenciador cámara de expansión FEM. ....68

<b>Figura 4-9:</b>	TL ducto recto con paredes duras – Caso 1, varía diámetro. ....	71
<b>Figura 4-10:</b>	TL ducto recto con paredes duras – Caso 2, varía longitud. ....	72
<b>Figura 4-11:</b>	TL FEM Silenciador con cámara de Expansión – Caso 2A. ....	73
<b>Figura 4-12:</b>	TL FEM Silenciador con cámara de Expansión – Caso 2B. ....	74
<b>Figura 4-13:</b>	Esquema 2D silenciador con doble cámara de expansión. ....	75
<b>Figura 4-14:</b>	TL doble cámara de expansión vs. una cámara. ....	76
<b>Figura 4-15:</b>	Esquema 2D silenciador de cámara de expansión y CF de Impedancia. ....	76
<b>Figura 4-16:</b>	TL Ducto recto CF de Impedancia – Caso 1, varía diámetro. ....	78
<b>Figura 4-17:</b>	TL Ducto recto CF de Impedancia – Caso 2, varía longitud. ....	79
<b>Figura 4-18:</b>	Esquema 2D silenciador de cámara de expansión y subdominio absorbente. ....	80
<b>Figura 4-19:</b>	TL ducto recto con paredes absorbentes – caso1, varía diámetro. ....	81
<b>Figura 4-20:</b>	Esquema 2D Resonador de Helmholtz. ....	81
<b>Figura 4-21:</b>	TL Resonador de Helmholtz, varía longitud del cuello - FEM. ....	82
<b>Figura 4-22:</b>	TL Resonador de Helmholtz, varía longitud cuello - FEM. ....	83
<b>Figura 5-1:</b>	Esquema de montaje validación No. 1. ....	84
<b>Figura 5-2:</b>	TL experimental del ensayo, validación No. 1. ....	84
<b>Figura 5-3:</b>	Comparación TL Validación No. 1. ....	85
<b>Figura 5-4:</b>	Enmallado y solución gráfica Validación No. 1. ....	86
<b>Figura 5-5:</b>	Comparación TL FEM - Validación No. 1. ....	86
<b>Figura 5-6:</b>	Comparación TL FEM Espectros en extremos– Valid. No. 1. ....	87
<b>Figura 5-7:</b>	Gradientes de presión - FEM Valid. No. 1. ....	89
<b>Figura 5-8:</b>	SPL 2D Superficie y Contorno - FEM Valid. No. 1. ....	90
<b>Figura 5-9:</b>	Error Relativo - Validación. No. 1. ....	91
<b>Figura 5-10:</b>	Error Relativo (Log) - Validación. No. 1. ....	91
<b>Figura 5-11:</b>	Error Absoluto ( $\Delta$ dB) - Validación. No. 1. ....	92
<b>Figura 5-12:</b>	Esquema de montaje - Validación. No. 2. ....	93
<b>Figura 5-11:</b>	TL experimental del ensayo - Validación. No. 2. ....	93
<b>Figura 5-14:</b>	Comparación TL - Validación. No. 2. ....	94
<b>Figura 5-15:</b>	Simulación por FEM en Comsol - Validación. No. 2. ....	94
<b>Figura 5-16:</b>	Comparación TL FEM - Validación. No. 2. ....	95
<b>Figura 5-17:</b>	Comparación TL FEM, espectros en extremos - Validación. No. 2. ....	95
<b>Figura 5-18:</b>	Gradientes de presión - FEM Valid. No. 2. ....	97
<b>Figura 5-19:</b>	SPL 2D Superficie y Contorno - FEM Valid. No. 2. ....	98
<b>Figura 5-20:</b>	Error Relativo - Validación. No. 2. ....	99
<b>Figura 5-21:</b>	Error Relativo (Escala logarítmica) - Validación. No. 2. ....	99
<b>Figura 5-22:</b>	Error Absoluto ( $\Delta$ dB)- Validación. No. 2. ....	100
<b>Figura 5-23:</b>	TL y Esquema de montaje - Validación. No. 3. ....	100
<b>Figura 5-20:</b>	Comparación TL - Validación. No. 3. ....	101
<b>Figura 5-21:</b>	Simulación por FEM media geometría - Validación. No. 3. ....	102
<b>Figura 5-22:</b>	TL FEM media geometría - Validación. No. 3. ....	102
<b>Figura 5-27:</b>	FEM espectros, media geometría - Validación. No. 3. Media geometría. ....	103
<b>Figura 5-28:</b>	Gradientes de presión - FEM Valid. No. 3. (Media geometría). ....	104
<b>Figura 5-29:</b>	SPL 2D Superficie y Contorno - FEM Valid. No. 3. (Media geometría). ....	104
<b>Figura 5-30:</b>	FEM Error relativo, media geometría - Validación. No. 3. ....	106
<b>Figura 5-31:</b>	FEM Error relativo (Logarítmico), media geometría - Validación. No. 3. ....	106
<b>Figura 5-32:</b>	FEM Error absoluto ( $\Delta$ dB), media geometría - Validación. No. 3. ....	107
<b>Figura 5-33:</b>	Simulación FEM, geometría completa - Validación. No. 3. ....	108
<b>Figura 5-34:</b>	TL FEM, geometría completa - Validación. No. 3. ....	108
<b>Figura 5-35:</b>	Espectros FEM, geometría completa - Validación. No. 3. ....	109
<b>Figura 5-36:</b>	Dibujo del software Comsol geometría completa - Validación. No. 3. ....	109
<b>Figura 5-37:</b>	Gradientes de presión - FEM Valid. No. 3. (Geometría completa). ....	110
<b>Figura 5-38:</b>	SPL 2D Superficie y Contorno - FEM Valid. No. 3. (Geometría completa). ....	111
<b>Figura 5-39:</b>	Error relativo, geometría completa - Validación. No. 3. ....	113

---

<b>Figura 5-40:</b>	Error relativo (Logarítmico), geometría completa - Validación. No 3. ....	113
<b>Figura 5-41:</b>	Error absoluto (Logarítmico), geometría completa - Validación. No 3. ....	113
<b>Figura 5-42:</b>	TL medido - Validación. No 4. ....	114
<b>Figura 5-43:</b>	Comparación TL - Validación. No 4. ....	115
<b>Figura 5-44:</b>	Simulación por FEM en Comsol - Validación. No 4. ....	116
<b>Figura 5-45:</b>	Comparación TL FEM en Comsol - Validación. No 4. ....	116
<b>Figura 5-46:</b>	Espectros FEM en Comsol - Validación. No 4. ....	117
<b>Figura 5-47:</b>	Comparación TL MMT - Validación. No 4. ....	117
<b>Figura 5-48:</b>	Gradientes de presión - FEM - Validación. No 4. ....	118
<b>Figura 5-49:</b>	SPL 2D Superficie y Contorno - FEM Valid. No. 4. ....	118
<b>Figura 5-50:</b>	Error Relativo - Validación. No 4. ....	119
<b>Figura 5-51:</b>	Error Relativo (Escala logarítmica) - Validación. No 4. ....	119
<b>Figura 5-52:</b>	Error Relativo ( $\Delta$ dB) - Validación. No 4. ....	119

## Lista de tablas

	<b>Pág.</b>
<b>Tabla 5-1:</b> Comparación Bases FEM - Validación No. 1.....	88
<b>Tabla 5-2:</b> Errores promedio - Validación No. 1.....	92
<b>Tabla 5-3:</b> Error absoluto promedio ( $\Delta$ dB) - Validación No. 1.....	92
<b>Tabla 5-4:</b> Comparación Bases FEM - Validación No. 2.....	96
<b>Tabla 5-5:</b> Error promedio - Validación No. 2.....	100
<b>Tabla 5-6:</b> Bases media geometría - Validación No. 3.....	103
<b>Tabla 5-7:</b> Error absoluto promedio ( $\Delta$ dB) - Validación No. 3, Media geometría.....	107
<b>Tabla 5-8:</b> Bases FEM, geometría completa - Validación No. 3.....	109
<b>Tabla 5-9:</b> Error absoluto promedio ( $\Delta$ dB) - Validación No. 3 - geometría completa.....	114
<b>Tabla 5-10:</b> Comparación Bases FEM - Validación No. 4.....	116
<b>Tabla 5-11:</b> Error promedio - Validación No. 4.....	120

## Lista de símbolos y abreviaturas

### Símbolos con letras latinas.

Símbolo	Término
$A, B$	Amplitud de una función.
$A, B, C, D.$	4 polos, matriz de transferencia.
$b$	Ancho de ducto.
$c$	Velocidad del sonido en un medio.
$c_c$	Velocidad del sonido en medio absorbente.
$c_p$	Capacidad calorífica (molar) a presión constante.
$c_v$	Capacidad calorífica (molar) a volumen constante.
$d$	Diámetro de tubo. (Tubo recto).
	Diámetro de conducto de entrada y o salida.
$D$	Diámetro de cámara.
$f$	Frecuencia. (en Hertz, $Hz$ )
$\hat{F}$	Vector dependiente de las CF (FEM).
$h$	Alto de ducto.
$H^1$	Espacio vectorial funcional Sobolev.
$j$	Número complejo.
$k$	Número de onda.
$K$	Constante de proporcionalidad
$k_c$	Vector número de onda de medio absorbente.
$k_x$	Vector número de onda axial.
$k_y$	Vector número de onda transversal.
$\hat{K}$	Matriz de Rigidez (FEM).
$L$	Longitud del ducto.
$L_c$	Longitud de cámara. (Cámara de expansión).
$L_{c1}, L_{c2}$	Longitud cámaras. (Doble cámara de expansión).
$l_T$	Longitud de conducto de entrada y/o salida.
$\bar{M}$	Matriz de transferencia. (MMT).
$\hat{M}$	Matriz de Masa. (FEM).
$n$	Vector normal a la frontera, (con dirección hacia afuera de la frontera).
$p$	Presión sonora variante en el tiempo. (en Pascales, Pa).
$\hat{p}$	Parte real de la Presión sonora.
$\mathcal{P}$	Presión en un gas.
$p_0$	Presión barométrica (estática) o presión atmosférica.

$p_h$	Presión $\in V_h$ .
$P_{ref}$	Presión de referencia (atmosférica), $20\mu Pa$ .
$p_1, p_2$	Presiones en extremos de entrada y salida en un ducto.
$q$	Constante de proporcionalidad para CF.
$r$	Relación entre las amplitudes $A$ y $B$ .
$Re$	Parte real de la expresión.
$Rf$	Resistividad de flujo.
$t$	Tiempo.
$T$	Triángulo. (Discretización FEM)
$U$	Velocidad de partícula en el medio.
$u_1, u_2$	Velocidades en extremos de entrada y salida en un ducto.
$V_h$	Subespacio vectorial asociado a la discretización.
$\mathcal{V}$	Volumen del gas.
$x, y, z$	Coordenadas cartesianas para denotar dimensiones.
$Z$	Impedancia Acústica.
$Z_h$	Impedancia del cuello (Silenciador Helmholtz).
$Z_t$	Impedancia del resonador (Silenciador Helmholtz).

## Símbolos con letras griegas.

Símbolo	Término
$\alpha$	Coefficiente de absorción sonora.
$\beta$	Constante de simplificación (CF Absorción).
$\gamma$	Relación entre calores específicos.
$\Gamma_i$	Denota la frontera $i$ .
$\lambda$	Longitud de onda.
$\xi$	Desplazamiento de partícula.
$\rho$	Densidad.
$\rho_c$	Densidad de medio absorbente.
$\rho_0$	Densidad del aire.
$\rho_{tot}$	Densidad del total.
$\mathcal{T}$	Triangulación (Discretización FEM)
$\theta$	Fase.
$\phi$	Función $\phi$ , perteneciente a espacio Sobolev.
$\phi_i$	Funciones base.
$\Omega$	Domino bajo estudio.
$\omega$	Frecuencia angular.
$\partial\Omega$	Frontera.

## Abreviaturas.

<b>Abreviatura</b>	<b>Término</b>
1D	Una dimensión.
2D	Dos dimensiones.
CF	Condición de frontera.
dB	Decibeles. (Unidad de nivel de presión sonora).
Fc	Frecuencia de corte.
FEM	Método de elementos finitos.
MMT	Método de matriz de transferencia.
TL	Pérdida por transmisión Sonora.

# 1.Introducción

## 1.1 Motivación del trabajo

La principal motivación para el desarrollo del presente trabajo es la temática a la cual pertenece: la *contaminación sonora*, pues muchas veces no se atiende como debería y su impacto es tal que calificarla como un *problema de salud pública* es acertado.

Se observa con preocupación noticias como la siguiente: “Más de 13mil quejas por exceso de ruido se han registrado desde 2006” la publicación la hace el periódico El Espectador[1] en su edición digital en agosto 2010 y se refiere únicamente a Bogotá.

La insuficiente sensibilización acerca de la problemática, la flexibilidad en la aplicación de la legislación, la imitación de tratamientos empíricos replicados a riesgo, el empirismo en diseño, la escasez formal y argumentativa son debilidades tangibles en el país lo que lleva a considerar un insuficiente conocimiento del tema en general y aún más de cómo solucionarlo de efectivamente para casos específicos y particulares.

La maquinaria industrial (Desfogues de equipos técnicos, escapes de vehículos, plantas eléctricas, extractores, ventiladores, compresores, sistemas de aire acondicionado, unidades enfriadoras, etc.) representa un importante porcentaje de las fuentes de ruido que afectan la salud y la tranquilidad de la comunidad, de acuerdo a la noticia de El Espectador citada anteriormente 2308 quejas corresponden a molestias generadas por ruido industrial, es decir, más de 1 queja diaria en el periodo por este motivo solo en Bogotá.

Con la expedición y entrada en vigencia de la Resolución 0627 de 2006 por la cual se establece la norma nacional de emisión de ruido y ruido ambiental (Resolución del Ministerio de Ambiente, Vivienda y Desarrollo Territorial). Se retoman labores que buscan regular y preservar la problemática del ruido, por ejemplo de acuerdo al *Documento soporte norma de ruido ambiental - Ideam 2006[2]* se hace una inversión (Costos Estimados) para estudios de Ruido en la ciudad de Bogotá de \$ 1.288.525.000, y se comienzan a costear los posibles tratamientos a implementar como soluciones.

Entonces se cuenta con una problemática cada vez más latente y con atención para presupuestar inversiones que logren soluciones satisfactorias. De acuerdo a esto toma gran validez y utilidad tener en cuenta elementos y dispositivos que logren atenuar niveles de ruido generados por equipos industriales. También cabe resaltar que a las empresas nacionales dedicadas a soluciones de control de ruido especializado como FiberGlass, Inproyec, Ecustic, Acustec, etc, llegan continuamente solicitudes para

atender requerimientos de este tipo, razones adicionales que demuestran la importancia del tema.

En cuanto a la referencia bibliográfica al respecto comúnmente para los cursos y bibliografía general (ecuaciones diferenciales parciales, simulación numérica y modelado matemático) los ejemplos que se resuelven cuando se trata la ecuación de onda acústica tratan usualmente el problema de la cuerda (oscilación, cuerda tensada y/o libre) y realmente no se estudia con profundidad el fenómeno acústico (propagación sonora en términos de presión). El problema físico y la formulación matemática pertinente al proyecto aquí desarrollado atienden un caso particular cuyos alcances son aplicaciones concretas que buscan solucionar problemáticas de casos reales.

Diversos autores que han trabajado la atenuación sonora en silenciadores estudiando el fenómeno desde distintas perspectivas, a continuación se destacan algunos de sus trabajos agrupados de acuerdo al enfoque:

- Pioneros, los desarrollos de Sivian(1937) [3], Morse(1939) [4], Rochester(1941) [5], Ingard(1953) [6], Davis(1954) [7], entre otros, se convirtieron en los primeros aportes en el tema, contribuyendo con la deducción y formulación matemática, equivalencias y analogías mecánicas y electrónicas, y los fundamentos de las soluciones empíricas y semi-analíticas.
- Silenciadores reactivos y solución por medio de MMT los trabajos de Munjal(1970) [8], Mohanty(2005) [9], Galdámez(2005)[10], Gerges(2005) [11], pueden considerarse como algunos de los referentes más destacados. Independiente de sus particularidades todos coinciden en la temática, evalúan la atenuación sonora de tipologías únicamente reactivas de ductos, comparan los resultados de matriz de transferencia con datos experimentales.
- El tema correspondiente a Ductos Disipativos no ha contado con tanto renombre ni publicaciones como el de ductos reactivos, sin embargo, se han desarrollado trabajos desde las investigaciones preliminares como Molloy(1944) [12], pasando por trabajos que usan MMT como Mechel(1990) [13] y Peat(1991) [14] con la propuesta de solución analítica, hasta la implementación computacional numérica por ejemplo Kirby(2001) [15], se han desarrollado trabajos cuyo interés radica en la atenuación de ruido aportada por fronteras (y/o obstáculos) absorbentes en los ducto.
- FEM es la herramienta numérica más usada para evaluar la transmisión sonora en ductos por diversos autores, algunos referentes son: De Vicente(1991) [16], Bilawchuck(2002) [17], Thompson(2006) [18], Streck(2010) [19], Vasile(2011) [20], en cada trabajo luego de formular el problema de interés, se implementa el método numérico, se discretiza la ecuación de onda sonora y por medio de ayuda computacional se resuelve el modelo acústico escogido, algunos utilizan software especializado como Ansys, Nastran, Comsol, Sysnoise, etc., y luego realizan la validación con mediciones propias o referenciando trabajos experimentales.

De acuerdo a la literatura seleccionada y analizada las comparaciones ya sea entre métodos matemáticos o entre configuraciones de dispositivos reactivos o disipativos se han realizado para casos particulares sin llegar a una evaluación para diferentes tipologías y condiciones acústicas de los ductos, por otra parte la bibliografía especializada trata con escasez los silenciadores mixtos (paredes absorbentes en ductos reactivos) siendo la solución por MMT el caso menos explorado.

De acuerdo a lo mencionado se concluye la importancia y necesidad de un enfoque académico y de ingeniería para afrontar la temática en cuestión y de igual forma es interés particular de este trabajo contribuir a un campo investigativo y de profundización que apenas surge a nivel nacional como lo es la ingeniería acústica y motivar e inquietar a colegas e interesados para desarrollar futuros aportes.

## 1.2 Planteamiento del problema

En el proyecto se estudia la propagación del sonido al interior de diferentes tipologías de silenciadores pasivos en un modelo bidimensional y particularmente el desempeño de los métodos matemáticos FEM y MMT para el cálculo de la atenuación sonora en estos.

*Pregunta investigativa:*

¿Cuál método es el más adecuado en términos de sencillez de implementación, eficiencia computacional y adaptabilidad para desarrollar el cálculo de la pérdida por transmisión sonora por medio de silenciadores pasivos?

Para afrontar el problema descrito se realiza una formulación matemática del fenómeno físico de interés (propagación de onda sonora) en los distintos casos escogidos (varias tipologías y condiciones de frontera) para obtener los resultados simulados (TL en los rangos de frecuencias objetivo) implementando los dos métodos matemáticos definidos MMT y FEM, para comparar los datos.

## 1.3 Objetivos

### 1.3.1 General

Realizar un estudio comparativo del desempeño de los métodos FEM y MMT en el cálculo de la atenuación sonora para diferentes configuraciones de silenciadores pasivos.

### 1.3.2 Específicos

1. Formular el problema acústico de silenciadores pasivos.
2. Resolver el modelo planteado y calcular la atenuación acústica en términos de pérdida por transmisión sonora para diferentes configuraciones de silenciadores pasivos por medio de las técnicas matemáticas definidas: FEM y MMT.
3. Realizar un análisis comparativo de eficiencia e implementación entre el desempeño de los métodos FEM y MMT para la solución de problemas acústicos de silenciadores pasivos.
4. Identificar las fortalezas, restricciones y debilidades de los métodos FEM y MMT empleados para la solución del problema acústico de silenciadores pasivos para los casos bajo estudio.
5. Simular la atenuación sonora en términos de TL por MMT para silenciadores mixtos (reactivos con absorción en paredes internas del ducto).

## 1.4 Organización del documento

La conformación general del documento consta de seis capítulos, la estructura planteada busca claridad y continuidad en las temáticas tratadas.

El proyecto se desarrolla de la siguiente manera:

- **Capítulo 1. Introducción.**

El primer capítulo presenta el proyecto y describe el interés y la motivación para desarrollarlo, objetivos propuestos y la descripción del problema.

- **Capítulo 2. Recuento Teórico y Formulación del Problema.**

En el segundo capítulo se realiza la contextualización teórica iniciando con terminología general y conceptos específicos, luego se presenta la deducción de la ecuación de onda sonora y la formulación matemática general y finalmente las condiciones de frontera y condiciones iniciales del problema.

- **Capítulo 3. Método de Matriz de Transferencia (MMT).**

Se realiza una descripción y explicación del método MMT en el capítulo tres, también se muestra la implementación para las diferentes morfologías y casos de estudio presentando los resultados obtenidos.

- **Capítulo 4. Método de Elementos Finitos (FEM).**

Se presenta la discretización del problema y formulación variacional por medio del método FEM en el capítulo cuatro, y así mismo se implementa para la simulación y cálculo del TL para los diferentes tipos de silenciadores seleccionados.

- **Capítulo 5**

**Análisis de resultados y Comparación.**

Inicialmente se presenta una validación de las simulaciones realizadas con los métodos matemáticos MMT y FEM con datos experimentales de literatura para tres tipologías. Luego con los resultados ya obtenidos en los capítulos 3 y 4 se recopilan los datos realizando un análisis y evaluación comparativa de los dos métodos para los diferentes casos de estudio, permitiendo identificar ventajas, desventajas y restricciones.

- **Capítulo 6**

**Conclusiones y trabajo futuro.**

En el capítulo número seis se exponen las conclusiones del proyecto y se plantea la discusión para posibles nuevos trabajos e investigación futura.

## 2. Recuento Teórico y Formulación del Problema.

### 2.1. Conceptos Generales.

Con el fin de entender el desarrollo del presente trabajo y su terminología a continuación se presentan una serie de definiciones generales.

Se entiende por *Sonido* al fenómeno físico que involucra la propagación de ondas en un medio elástico que al ser perturbado causa alteraciones de presión y/o desplazamiento (velocidad) en sus partículas, compresiones y rarefacciones que son percibidas o detectadas por instrumental metrológico especializado.

La ciencia que estudia la emisión, propagación, recepción y demás propiedades y características relacionadas con el sonido (incluyendo además infrasonido y ultrasonido) se llama Acústica.

La propagación de la onda sonora depende de la forma de perturbación del medio y de las características fisicoquímicas de éste, es decir, compresibilidad, densidad y cohesión molecular; el medio puede ser sólido, líquido, gaseoso o plasma. Si las partículas del medio vibran perpendicularmente a la dirección de propagación de la perturbación corresponde a ondas transversales, y si por el contrario, la oscilación de las partículas ocurre en la misma dirección de propagación se trata de ondas longitudinales (ondas de compresión).

Las ondas sonoras propagadas en fluidos y estado plasma son longitudinales, ya que los gradientes de presión que acompañan a la propagación se producen en la misma dirección en la cual éstas se propagan. En los sólidos se generan tanto ondas longitudinales como transversales, ya que las fuerzas de empuje elásticas propias del medio permiten dicha propagación (un ejemplo son las membranas). Así mismo, sucede en el caso de una cuerda, cada punto de ésta vibra verticalmente, pero la oscilación avanza según la dirección horizontal (propagación transversal).

De acuerdo a lo anterior para el caso de la propagación sonora en un ducto se considera que las ondas son longitudinales pues los cambio en la tensión transversal del fluido es lo suficientemente pequeña como para desprejarse, tal y como lo menciona Pérez (2011) en su trabajo [21].

La propagación sonora en ductos (en el aire) corresponde a un fenómeno físico adiabático, tomando como referencia a Kinsler (1964) [22], a continuación se realiza una breve explicación del proceso termodinámico del sonido.

La energía propagada es generada por la fuente sonora y se transmite a las partículas del medio provocando un movimiento en cadena, o excitación del medio; la energía cinética asociada a la propagación sonora corresponde al (movimiento de las partículas), y la energía potencial se refiere a los cambios de presión producidos en el medio.

Dada la propiedad elástica restauradora del medio, éste es el que permite la propagación por medio de su compresión y expansión (oscilaciones en torno a la posición de equilibrio), entonces, la onda avanza y se produce una transmisión de energía a pesar de que no hay transporte de materia ya que las partículas apenas se desplazan (desde su posición inicial y siempre regresan).

El proceso adiabático de propagación sonora se debe a la baja conductividad térmica del medio (gas ideal), pues no existe un intercambio de energía en forma de calor (o en caso de darse es muy mínimo), por lo tanto, el flujo de calor será cero y la transferencia de calor será nula, sin embargo, el sistema puede aumentar y/o disminuir su temperatura durante este proceso.

La ecuación que describe un proceso adiabático en un gas es

$$\mathcal{P}\mathcal{V}^\gamma = cte.$$

Donde  $\mathcal{P}$  es la presión del gas,  $\mathcal{V}$  su volumen, y  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  siendo  $C_p$  el calor específico<sup>1</sup> molar a presión constante, y  $C_v$  el calor específico molar a volumen constante, para el aire  $\gamma = 1,4$ .

Términos como impedancia acústica, velocidad del sonido, presión sonora, etc., se refieren a *Magnitudes físicas del Sonido*, estas se definen a continuación.

La variación entre la presión instantánea en un punto determinado con respecto a la presión atmosférica es *presión sonora* ( $p$ ) se da en pascales ( $Pa$ ). ( $1Pa = 1 N/m^2$ , fuerza por unidad de superficie). Dado que las variaciones de presión son pequeñas y que el oído humano tiene una respuesta logarítmica se define el *dB* como unidad adoptada para aplicaciones acústicas con respecto a rango dinámico (amplitud), el *decibel* (dB), representa la relación entre dos magnitudes (presiones, intensidades, potencias, etc.) la de interés y la de referencia. El *nivel de presión sonora* (SPL) está dado en dB y se define así:

$$SPL = 10 \log \left( \frac{p}{p_{ref}} \right).$$

, donde  $p_{ref}$  la presión de referencia es  $20\mu Pa$ .

La propagación sonora depende claramente del medio y su *velocidad* ( $c$ , *velocidad del sonido*) es proporcional a la densidad ( $\rho$ ) de este,  $c$  indica la distancia recorrida por las ondas sonoras en un segundo. Como el medio es no dispersivo, las ondas se propagan a la misma velocidad independientemente de su frecuencia o amplitud.

---

<sup>1</sup> El calor específico es una magnitud física que se define como la cantidad de calor que hay que suministrar a la unidad de masa de una sustancia o sistema termodinámico para elevar su temperatura en una unidad (kelvin o grado Celsius).

La percepción sonora por medio del oído humano parte desde el umbral de audición, es decir, 0dB ( $10^{-12}$  W/m<sup>2</sup>), hasta 120dB (1 W/m<sup>2</sup>) que corresponde al umbral de dolor. El espectro típico para la percepción sonora por medio de un oído sano está comprendido por el rango entre 20Hz y 20kHz, frecuencias inferiores se denomina infrasonido (vibraciones), y superiores a 20kHz reciben el nombre de ultrasonido. La *frecuencia* ( $f$ ) es una magnitud física que indica la cantidad de ciclos (pulsaciones de onda periódica) por unidad de tiempo, su unidad son los Hertz (Hz). El análisis del sonido en el dominio espectral (de la frecuencia) se conoce como espectro de ruido, para transformar de dominio temporal al de frecuencia se utiliza la transformada de Fourier.

La *amplitud sonora* ( $A$ ) se relaciona directamente con la *Intensidad sonora* ( $I$ ), e indica la magnitud de las variaciones de presión. A continuación se presenta la expresión típica para el desplazamiento (en una dimensión) de una onda pura.

$$x = A \text{sen}(\omega t + \theta)$$

Donde,  $A$  es la amplitud;  $\omega$  la frecuencia angular,  $t$  el tiempo y  $\phi$  la fase. La fase describe la posición relativa de una forma de onda con respecto a otra, indica la situación instantánea en el ciclo, es decir, su ángulo de desplazamiento y se expresa en grados.

Cuando se habla en términos acústicos se trata continuamente con dos términos, la longitud de onda y la impedancia. Longitud de onda  $\lambda$ , corresponde a la distancia entre dos picos (o valles) consecutivos de la onda sonora, se relaciona con la velocidad del sonido y la frecuencia así:  $c = \lambda f$ , de igual forma está el vector número de onda, que se refiere al vector que apunta en la dirección de propagación de la onda, y se define así:  $k = \frac{2\pi f}{c}$ , su magnitud es el número de onda  $1/\lambda$ . Por otra parte al referirse a impedancia acústica es preciso conocer que ésta puede ser específica o característica del medio, la primera, es la oposición que ofrece el medio elástico para la propagación de las ondas sonoras. Se define como la relación entre la presión acústica y la velocidad de partícula,  $Z = \frac{P}{v}$ . La *impedancia característica del medio* se define como el producto entre la densidad ( $\rho$ ) y la velocidad del sonido ( $c$ ) en el material (medio).  $Z_0 = \rho c$ .

Cuando las ondas sonoras se propagan existen varios fenómenos acústicos que pueden ocurrir como: difracción, refracción, reflexión, absorción, difusión (*Propiedades físicas del Sonido*). A continuación se describen los casos más relevantes para el proyecto.

El rebote de una onda sonora en una superficie dura (lisa y rígida) es la *reflexión sonora*, al incidir el sonido sobre cualquier objeto se presenta el fenómeno de reflexión produciéndose una nueva radiación a partir del choque con la superficie (ley de Snell).

Cuando la onda llega a un obstáculo rígido (ideal) se refleja totalmente ya que el obstáculo no se mueve y no absorbe energía de la onda. Los obstáculos reales no son nunca completamente rígidos, por lo que pueden absorber o refractar parte de la energía de las ondas incidentes.

Cuando existe cambio de medio de propagación la onda sonora viajera se *refracta*, al incidir sobre una superficie límite de dos medios con distintas propiedades físicas, parte de la onda se refleja, parte se disipa y parte se transmite. La velocidad y dirección de propagación de las ondas cambia al pasar de un medio a otro (cambio de impedancia).

Un tipo de *refracción sonora* ocurre cuando se hace una transición hacia un medio que ofrece una amortiguación sonora, es decir, *absorbente*. La absorción sonora, es la capacidad de convertir energía sonora en energía calorífica, cualquier superficie con la que haga contacto la onda sonora absorbe sonido, una alta absorción sonora depende del material o sistema que se utilice. La absorción sonora puede ser de dos tipos: reactiva o resistiva. La *absorción resistiva*, se da por el cambio de medio o material (impedancia producida por la variación de densidad), cada material posee características absorbentes propias que dependen de sus propiedades físicas y dimensiones (resistencia al flujo, densidad y espesor, los valores se dan en la unidad llamada coeficiente de absorción sonora  $\alpha$  normalizado para las bandas de octava de 125Hz a 4kHz. Este tipo de absorción es efectiva para materiales porosos y fibrosos, como fibra de vidrio, espumas, lana mineral, entre otros. La *absorción reactiva*, es el proceso donde se atenúa energía del campo sonoro por medio del fenómeno de resonancia (interferencias destructivas) el cual es selectivo dependiendo de la longitud de onda.

Por otra parte cuando la onda sonora encuentra un obstáculo que puede bordear se da el fenómeno de *difracción*, se da al rodear un obstáculo o propagarse a través de una pequeña abertura. Aunque este fenómeno es general, su magnitud depende de la relación que existe entre la longitud de onda y el tamaño del obstáculo o abertura. Si una abertura (obstáculo) es grande en comparación con la longitud de onda, el efecto de la difracción es pequeño, y la onda se propaga en líneas rectas o rayos, sin embargo, cuando el tamaño de la abertura (obstáculo) es comparable a la longitud de onda, los efectos de la difracción son grandes y la onda no se propaga simplemente en la dirección de los rayos rectilíneos, sino que se dispersa como si existiera una fuente puntual localizada en la abertura o borde del obstáculo.

A continuación se presenta la formulación matemática del problema de los ductos acústicos, luego las condiciones de frontera asociadas a los diferentes casos de análisis, y finalmente se hace una descripción de los diferentes tipos de silenciadores.

## 2.2. Ecuación de Onda Acústica.

La propagación sonora se describe matemáticamente por medio de la ecuación de onda acústica, su deducción se desarrolla por diferentes autores dentro de los cuales se resalta a Kinsler(1964) [22], Munjal(1987) [23] y Jacobsen (2011) [24], bibliografía de referencia para la deducción presentada en el presente trabajo.

Fenómeno acústico: La propagación de una onda sonora en el aire genera perturbaciones del medio que se traducen en variaciones de presión que son audibles, algo similar sucede para la temperatura, densidad y desplazamiento de partículas en el medio (zonas de rarefacción y zonas de compresión).

Para describir el comportamiento en el tiempo de estas variaciones de la densidad y de la presión del aire, consideremos un volumen  $\Omega$  en el espacio, denotemos por  $\mathbf{U}(x, t)$  la velocidad de partícula en el medio, y  $\rho_{tot} = \rho_0 + \rho$ , corresponde a la densidad del medio, suma de la densidad de referencia  $\rho_0$  y de una pequeña variación de densidad  $\rho$ .

Puesto que tenemos un movimiento de aire en el volumen  $\Omega$ , se observa que el cambio de la masa de aire en el tiempo en el volumen  $\Omega$  debe ser igual a la masa de aire total que sale de dicho volumen. Esta conservación de masa se describe matemáticamente por la ecuación

$$\nabla \cdot (\rho_{tot} \mathbf{U}) + \frac{\partial \rho_{tot}}{\partial t} = 0, \quad x \in \Omega \quad (2.1)$$

Conocida como ecuación de conservación de masa.

**Figura 2-1:** Desplazamiento longitudinal de onda plana unidimensional.

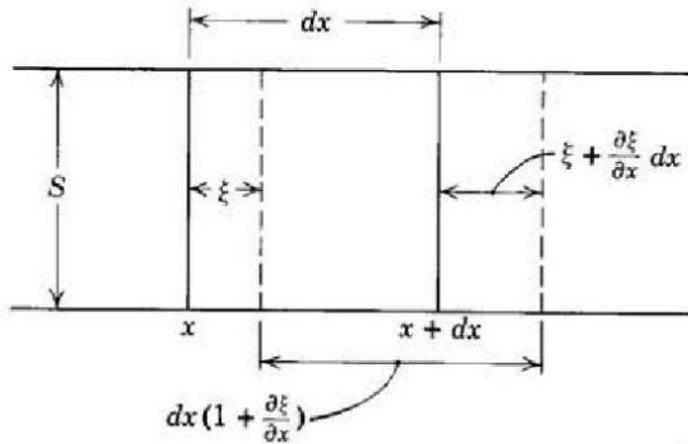


Imagen tomada de [22].

Como la densidad del aire en condiciones normales es  $1,2 \text{ kg/m}^3$ , si  $\rho \ll \rho_0$  (mínimas variaciones de densidad) la ecuación (2.1) puede escribirse como

$$\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{U} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad x \in \Omega \quad (2.2)$$

En el presente trabajo interesa estudiar el fenómeno acústico en términos de presión, entonces la ecuación (2.2) puede escribirse de la siguiente manera dado que en el aire el fenómeno acústico es de carácter adiabático (sin intercambio de calor)

$$p_{tot} = K \rho_{tot}^\gamma \quad (2.3)$$

Donde  $p_{tot} = p_0 + p$ , es la presión total, suma de la presión barométrica (estática)  $p_0$  o presión atmosférica, y  $p$  es la presión variante en el tiempo (presión sonora),  $K$  es una constante de proporcionalidad y  $\gamma$  denota la relación entre los calores específicos  $\gamma = c_p / c_v$ , para el aire  $\gamma = 1,4$ .

Como la velocidad del sonido es:

$$c^2 = \left. \frac{\partial p_{tot}}{\partial \rho_{tot}} \right|_{p_0} = \left. K \gamma \rho_{tot}^{\gamma-1} \right|_{p_0} = \left. \frac{\gamma p_{tot}}{\rho_{tot}} \right|_{p_0} = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}, \quad (2.4)$$

Entonces derivando (2.3) con respecto al tiempo y reemplazando (2.4) se tiene,

$$\left. \frac{\partial p_{tot}}{\partial t} \right|_{p_0} = \left. \frac{\partial p_{tot}}{\partial \rho_{tot}} \right|_{p_0} \left. \frac{\partial \rho_{tot}}{\partial t} \right|_{p_0} = c^2 \left. \frac{\partial \rho_{tot}}{\partial t} \right|_{p_0}, \quad (2.5)$$

Donde el módulo volumétrico adiabático es  $\gamma p_0 = \rho_0 c^2 = \rho_0 \left. \frac{\partial p_{tot}}{\partial \rho_{tot}} \right|_{p_0}$

Combinando las ecuaciones (2.2) y (2.4) se tiene la relación entre la velocidad de partícula  $\mathbf{U}$  y la presión sonora  $p$  es:

$$\nabla \cdot \mathbf{U} + \frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \quad (2.6)$$

Teniendo en cuenta la condición adiabática del fenómeno y pequeñas perturbaciones de  $p$  y  $\rho$ , la ecuación que describe el movimiento en un fluido relacionando el gradiente de presión sonora y la aceleración de las partículas en el fluido es la ecuación de Euler (deducción tomada de Kinsler, 1964 [22])

$$\nabla p + \rho_0 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = 0, \quad (2.7)$$

Tomando la divergencia de la Ecuación (2.7)

$$\nabla^2 p + \rho_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = 0,$$

Como  $\mathbf{U}$  es continua y diferencial se pueden intercambiar las derivadas respecto al tiempo y al espacio llegando a

$$\nabla^2 p + \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{U} = 0,$$

, y finalmente usando (2.6) se llega a la Ecuación de Onda.

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \quad (2.8)$$

Ya que en el presente trabajo es de interés el estudio de la propagación sonora en ductos, para el dominio se asumen perturbaciones en forma sinusoidal en función de tiempo y frecuencia, estas generan un campo sonoro con las mismas características (forma sinusoidal) para la presión sonora. Las diversas razones que motivan este supuesto son

- La onda sonora generada se puede describir como una onda armónica.
- En general las fuentes de ruido generan espectros sonoros que pueden asumirse como sumatorias de ondas sinusoidales.
- El análisis realizado para los silenciadores acústicos corresponde para un estado estacionario de propagación sonora.

De acuerdo a lo anterior consideramos la parte real del campo armónico sonoro

$$\hat{p} = |\hat{p}|e^{j(\omega t + \varphi)}$$

, es decir,

$$p = \text{Re}\{\hat{p}\} = \text{Re}\{|\hat{p}|e^{j(\omega t + \varphi)}\} = |\hat{p}|\cos(\omega t + \varphi) \quad (2.9)$$

, donde,  $\varphi$  es la fase del campo sonoro en  $t_0$ .

Con la dependencia temporal definida en términos de  $e^{\omega t}$ , el operador  $\frac{\partial}{\partial t}$  puede reemplazarse por  $j\omega$  y el operador  $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$  se cambia por  $-\omega^2$ . De esta forma la Ecuación de Onda (2.8) se convierte en la ecuación del Helmholtz.

$$\nabla^2 \hat{p} + k^2 \hat{p} = 0 \quad (2.10)$$

Con  $k = \omega/c$ , número de onda, relación entre la frecuencia angular  $\omega = 2\pi f$ , y  $c$  la velocidad del sonido en el medio.

La expresión que define la velocidad de partícula formulada en la ecuación (2.8) para la ecuación de Helmholtz es,

$$\mathbf{U} = -\frac{1}{j\omega\rho_0} \nabla \hat{p} \quad (2.11)$$

### 2.3. Condiciones de Frontera. (CF)

De la sección anterior obtuvimos que la formulación matemática para la propagación sonora concluye en una ecuación diferencial. Para solucionar el problema es preciso definir condiciones de frontera que dependen de cada caso a analizar.

Las condiciones de frontera (en  $\partial\Omega$ ) se refieren a lo que ocurre en los bordes del dominio  $\Omega$ .

A continuación se realiza una descripción y explicación de las condiciones de frontera para un tubo.

En general las condiciones de frontera asociadas a la ecuación de onda sonora son:

- Tubo abierto (Condición Ideal).Corresponde a una condición de Tipo Dirichlet.

$$p|_{\partial\Omega} = kte, \text{ ó, } p|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.12)$$

Se define un valor constante ó 0 (cero) para la presión sonora en el(los) borde(s), como se ilustra en la figura 2-2.

Como analogía con el problema de la cuerda vibrante se trata de la CF fija en sus extremos.

- Tubo Cerrado. Corresponde a una condición de Tipo Neumann.

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.13)$$

Se establece que la variación de la presión sonora en la frontera es nula. (Condición de Aislamiento). Como analogía con el problema de la cuerda se trata de la CF libre en sus extremos.

**Figura 2-2:** Condiciones de Dirichlet y Neumann en un tubo.



- Frontera de carácter mixto. Corresponde a una condición de Tipo Robin.

$$q \left. \frac{\partial p}{\partial n} + p \right|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.14)$$

Se denota una combinación lineal de la presión y su variación en la frontera. Para el problema del ducto se refiere a tipos de fronteras más elaborados como la condición de radiación y la condición de impedancia (Casos que se describen para las CF generales). Como analogía con el problema de la cuerda se trata de la CF extremo móvil (conexión elástica -resorte-) en sus extremos.

### 2.3.1. CF asociadas a la propagación sonora en silenciadores.

Complementando la anterior descripción se presentan las condiciones de frontera que aplican para el problema acústico de silenciadores.

- Pared Dura.  
Corresponde a la condición de reflexión, es decir, es una condición de frontera Tipo Neumann homogénea. (ecuación. 2.13).  
Se utiliza para los extremos del tubo donde hay bordes rígidos y duros, donde no existe transmisión sonora fuera de estos bordes (la energía sonora se refleja), se puede describir como el caso de aislamiento sonoro.
- Pared Suave.  
Es una condición de frontera Tipo Dirichlet, ver ecuación. 2.12, este tipo de frontera no corresponde a una descripción física ajustada a la realidad, pues en el problema de propagación sonora en un ducto la CF produce una reflexión (pared dura) o una disipación de energía (frontera o medio con impedancia).

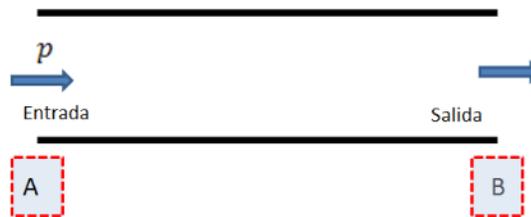
La condición pared suave no se utiliza para la formulación de los modelos de interés.

- Radiación.  
Llamada condición de Sommerfeld, descrita en detalle por Morse (1953) [26], Pierce (1989) [27] y Schot(1992) [28] entre otros .  
La condición de radiación de Sommerfeld se implementa para los extremos abiertos del tubo (sin paredes u obstáculos que generen reflexiones significativas). Reemplaza la CF abierta, pues describe mejor el problema físico, pues, así el tubo esté abierto hay una dispersión divergente de la onda sonora (radiación) hacia el exterior donde existe la presión atmosférica.

En el tubo ocurre lo siguiente, ver figura 2-3.

1. La onda sonora se propaga longitudinalmente desde el extremo de entrada donde se ubica la fuente, este borde se denomina Frontera Sommerfeld tipo fuente donde la presión sonora es dada por su amplitud. (ver parte A)
2. La propagación sonora continúa longitudinalmente hacia el otro extremo del tubo (entre A y B del dibujo)
3. En el borde de salida se define la frontera exterior se trata de CF Sommerfeld tipo radiación, donde la presión sonora corresponde a la presión atmosférica en el aire. (ver parte B)

**Figura 2-3:** Esquema propagación sonora en un ducto.



Su forma se asocia con la condición Tipo Robin (Frontera mixta) y se puede escribir así,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x \left( \frac{\partial p}{\partial x} + j k_0 p \right) \right] = 0 \tag{2.15}$$

La condición de Sommerfeld relaciona el cambio de presión sonora que ocurre en la frontera en un o instante dado y es dependiente de la presión sonora al exterior (condición en cada extremo). Permite describir una onda viajera (flujo) que entra y/o sale del dominio  $\Omega$ , en una o varias de sus fronteras.

- Impedancia.

También llamada ABC (Acoustics Boundary Condition), es un condición estudiada en diferentes trabajos de los cuales se desatacan los realizados por Madja(1977) [29], White(1998)[30] y Wright(2005)[31].

Representa un cambio de medio (cambio de impedancia), fenómeno descrito por la refracción y reflexión sonora con pérdidas de energía por las propiedad absorbentes de la frontera (o subdominio), como su nombre lo indica la condición se refiere a como el “nuevo medio” presenta oposición (atenúa) a la propagación de la onda sonora y por lo cual se traduce en una pérdida o amortiguación.

Para describir esta CF se denota por  $Z$  la impedancia acústica de la frontera y se define así,

$$Z = \frac{p}{v} \text{ , con unidades } [Pa \cdot s/m],$$

Obsérvese que: Si  $Z \rightarrow \infty$  , se da la condición de pared dura (Newmann), y si  $Z \rightarrow 0$  , se da la condición de pared suave (Dirichlet).

Esta impedancia de entrada al subdominio (nuevo medio) se asocia con un recubrimiento absorbente en la frontera, consiste en un tipo de CF diferente a los anteriores, pues existe disipación provocada por este nuevo medio.

La forma de la CF de impedancia se asocia con la condición Tipo Robin.

$$-1/\rho_0 (\nabla p \cdot n) - \frac{j\omega}{Z} p = 0. \quad (2.16)$$

La condición de impedancia indica la variación de presión sonora en el medio (aire) debido a la inclusión de una frontera que involucra disipación de energía (dada por una pérdida que es dependiente de la frecuencia).

- Aproximación Delany-Bazley

Esta ecuación auxiliar es utilizada para definir la impedancia acústica de materiales absorbentes, se escribe en términos de la resistividad de flujo  $Rf$  y es dependiente de la frecuencia  $f$ . La aproximación Delany-Bazley [32] es un modelo semi-empírico validado experimentalmente que se utiliza ampliamente como expresión auxiliar para la solución de problemas acústicos, algunas referencias acerca de esta aproximación son Voronina(1994) [33], Kidner(2008) [34], COMSOL AB (2008) [35], Alba (2008) [36].

Para un material poroso la formulación de la atenuación se describe en términos de la velocidad del sonido  $c_c$  y la densidad  $\rho_c$  en el “nuevo medio” (subdominio absorbente). Ambas variables son función del vector número de onda  $k_c$  , como se muestra en las siguientes expresiones:

$$c_c = \omega/k_c \quad (2.17), \quad \text{y,} \quad \rho_c = k_c Z_c / \omega \quad (2.17)$$

La aproximación Delany-Bazley [32], define el número de onda en el medio poroso  $k_c$  y  $Z_c$  la impedancia de éste, así:

$$k_c = k_0 \left( 1 + 0,098 \left( \frac{\rho_0 f}{R_f} \right)^{-0,7} - j \cdot 0,189 \cdot \left( \frac{\rho_0 f}{R_f} \right)^{-0,595} \right) \quad (2.18)$$

$$Z_c = z_0 \left( 1 + 0,057 \left( \frac{\rho_0 f}{R_f} \right)^{-0,734} - j \cdot 0,087 \cdot \left( \frac{\rho_0 f}{R_f} \right)^{-0,732} \right) \quad (2.19)$$

Donde  $R_f$  [37], está dada por

$$R_f = \frac{3,18 \cdot 10^{-9} \rho_f^{1,53}}{d_f^2} \quad (2.20)$$

La resistividad de flujo depende de la densidad  $\rho_f$  [Kg/m<sup>3</sup>] y el diámetro  $d_f$  de fibra del material.

## 2.4. Silenciadores Acústicos

Los silenciadores acústicos son dispositivos implementados para atenuar la generación de ruido de una fuente sonora, el silenciador se instala conectado en la salida (boca) de la fuente.

Dependiendo de las características de la fuente de ruido (maquinaria, cuarto técnico, equipo de aire acondicionado, planta eléctrica, desfogue de combustión de un vehículo, etc.) y dependiendo del valor objetivo de atenuación (cumplimiento de legislación nacional [38] y [39], o cumplimiento de un criterio de confort y tranquilidad acústica Tocci(2000) [40] y ASHRAE [41]) se define el tipo de tratamiento silenciador a diseñar e implementar. En el siguiente mapa conceptual se presenta la clasificación de silenciadores.

**Figura 2-4:** Tipos de Silenciadores.



### 2.4.1. Clasificación de Silenciadores Acústicos.

Los silenciadores se dividen en pasivos y activos, esta clasificación hace relación al tipo de control de ruido que logran. El control pasivo de ruido está asociado a un aislamiento que depende de una configuración o montaje tal que logra atenuar niveles de presión sonora debido a la composición que se implemente, por ejemplo un muro acústico es una partición de aislamiento pasivo, para el caso de silenciadores los ductos pasivos son aquellos que por medio de su forma y características internas de absorción reactivas y/o resistivas logran atenuar ruido.

Por otra parte está el control activo de ruido, temática con trabajos como los de Nelson(1992) [42], Kuo(1999) [43] y Cobo(2010) [44], éste se refiere a un sistema electroacústico que por medio de DSP (Procesamiento digital de señal) con micrófono(s) y parlante(s) genera con una segunda fuente de ruido (parlante) una señal igual a la emitida por la fuente de ruido primaria pero desfasada y por medio de interferencias superpone ambas señales buscando la cancelación de estas y de esta forma la atenuación. Así mismo existen configuraciones híbridas de silenciadores que involucran ambos tipos. Para el presente trabajo solo se estudian los silenciadores pasivos.

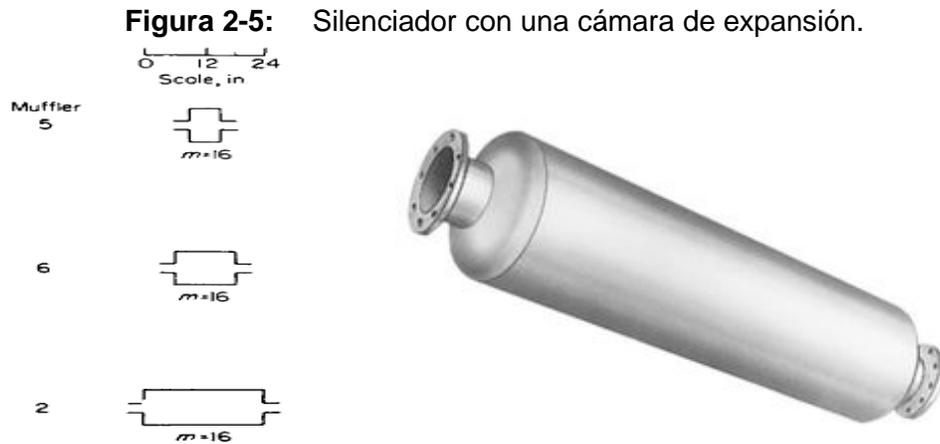
Dentro de los silenciadores pasivos existen a su vez dos grandes familias, y son los silenciadores Reactivos y por otra parte los disipativos.

Los ductos reactivos como su nombre lo indica su nombre la atenuación se debe a absorción reactiva, es decir, el control de ruido lo realizan debido a su forma (cambios de sección) y a las reflexiones sonora a su interior, las formas más comunes son el silenciador con una cámara de expansión y el resonador de Helmholtz. Los silenciadores que utilizan material absorbente poroso (absorción resistiva) a su interior son los llamados disipativos, usan principalmente el recubrimiento y la longitud del ducto para la atenuación sonora, los silenciadores disipativos que más se usan son el ducto absorbente y el silenciador de paneles paralelos (tipo splitter), los materiales absorbentes que se implementan son las fibra minerales porosas, básicamente como la lana de fibra de vidrio, la lana de roca y espumas de poliuretano expandido, para cada material dependiendo de su densidad, espesor y diámetro de fibra se tiene una impedancia  $Z_c$  y un vector número de onda  $k_c$  para el medio poroso (aproximaciones Delaney-Bazley).

Cuando se utilizan varias configuraciones (formas) reactivas acoplada entre sí se tiene un silenciador reactivo combinado y finalmente cuando se implementa un recubrimiento absorbente en las paredes internas de un ducto reactivo se tiene un silenciador mixto (absorción reactiva + resistiva), esta última configuración no ha sido analizada tanto como las demás, por esta razón se incluye en el interés del presente trabajo.

A continuación se muestran algunas imágenes que ilustran las formas y configuraciones típicas de silenciadores acústicos. Inicialmente se presentan las configuraciones básicas de silenciadores reactivos (cámara y doble cámara de expansión, resonador de Helmholtz) y luego las correspondientes para el caso de silenciadores disipativos (ducto con paredes absorbentes y de paneles paralelos).

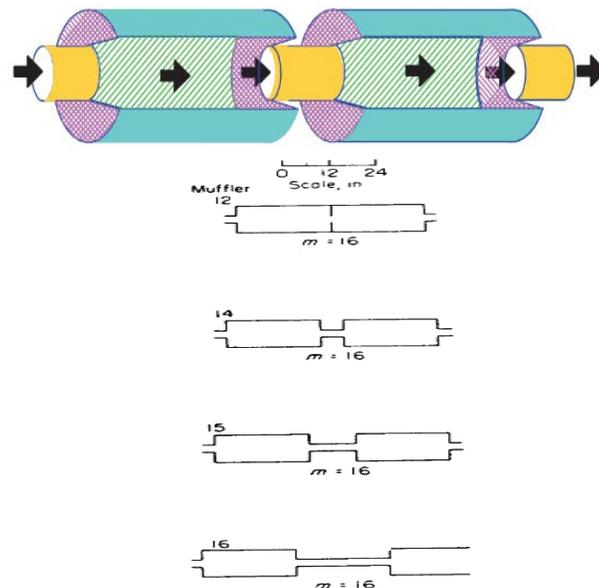
En la siguiente imagen se observa el silenciador con una cámara de expansión, su atenuación se debe a las longitudes y relación de secciones entre los ductos de entrada y salida y la cámara, control de ruido debido a la forma (silenciador reactivo).



Imágenes tomadas de, Esquema (Izquierda) [7], Imagen 3D (Derecha)[46].

Al acoplar dos silenciadores de cámara de expansión se obtiene un dispositivo de atenuación reactiva combinada, que se ve en la siguiente figura.

**Figura 2-6:** Silenciador con doble cámara de expansión.



Imágenes tomadas de, Esquema 3D (Arriba) [48], Esquemas 2D (Abajo) [7].

Otra morfología ampliamente reconocida correspondiente a los silenciadores reactivos es el resonador de Helmholtz, basado en el desarrollo que implica un filtro acústico sintonizado en cierta banda de acuerdo con el volumen de la cavidad resonante y a su cuello (longitud y diámetro).

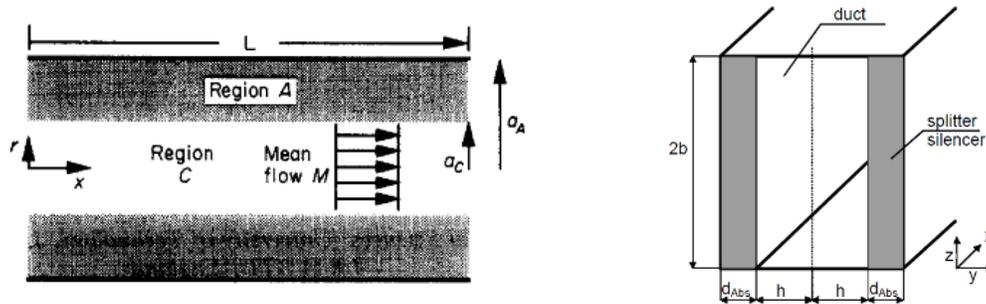
**Figura 2-7:** Silenciador Resonador de Helmholtz.



Imágenes tomadas de, Foto resonador (Izquierda) [49], Esquema 2D silenciador (derecha) [50].

Las dos imágenes siguientes pertenecen a silenciadores que usan material absorbente para obtener atenuación sonora, el caso más sencillo se observa en la figura 2-8, con un ducto cuyas paredes laterales tienen condición de frontera de impedancia asociada a las propiedades acústicas del recubrimiento.

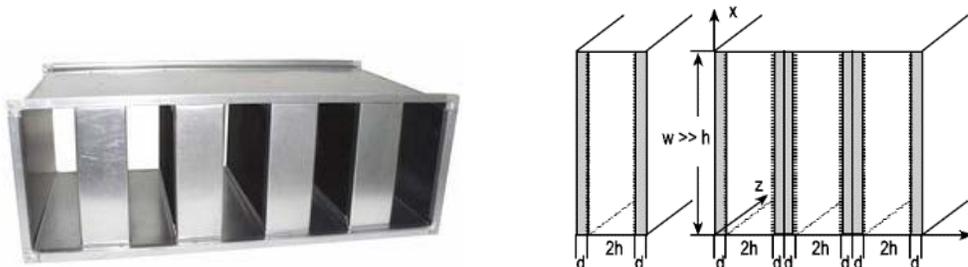
**Figura 2-8:** Ducto con paredes absorbentes.



Imágenes tomadas de, Esquema (Izquierda) [14], Esquema 3D (Derecha) [47].

Para múltiples frontera internas que se colocan de forma paralela con el fin de mejorar el desempeño del sistema atenuador la forma correspondiente es de tipo paneles paralelos absorbentes (tipo splitter). En este caso la atenuación corresponde a la altura del silenciador, la separación entre paneles, el espesor y absorción sonora de estos.

**Figura 2-9:** Silenciador disipativo de paneles paralelos.



Imágenes tomadas de, Foto (Izquierda) [50], Esquema (Derecha) [45].

- **Fenómeno físico en el problema de silenciadores acústicos.**

Usando la terminología descrita en el inicio del documento las definiciones de condiciones de frontera asociadas al problema se busca a continuación realizar una explicación del fenómeno físico al interior del silenciador.

Para describir la propagación sonora en cualquier silenciador es preciso tener en cuenta que el dispositivo atenuador es un conector entre:

- La fuente de ruido. El espectro sonoro a controlar está ubicado en extremo de entrada del ducto.
- Y el campo libre, es decir, el exterior o entorno, que está ubicado en el extremo de salida (extremo opuesto a la fuente). Allí existe influencia de la presión atmosférica y/o el ruido de fondo.

Ver figura 2-3.

Ahora bien, al interior del silenciador dependiendo su tipología (reactivo, disipativo, combinado, mixto, etc.), su morfología y por ende sus condiciones de frontera se presentan diferentes comportamientos acústicos asociados con las propiedades físicas del sonido, que en general se pueden describir así:

- Difracción sonora, básicamente se refiere al cambio de dirección (o contracción o expansión) del frente de onda generado por la forma del dispositivo o por obstáculos a su interior.  
Ocurre en silenciadores con cambios de secciones (cámaras de expansión) o silenciadores de aletas internas (reactivos y tipo splitter).
- Reflexión Sonora, ocurre cuando las ondas sonoras al interior del ducto encuentran paredes rígidas (CF Newmann), entonces se generan rebotes internos, que causan interferencias constructivas y destructivas al interior del conducto, lo cual se traduce a modos de resonancia y en términos del TL serán los picos y valles de la atenuación sonora que logrará el silenciador.  
Se presenta particularmente en silenciadores reactivos.
- Refracción Sonora, cuando la onda viajera encuentra un nuevo medio (CF de Impedancia) usualmente poroso y por lo tanto absorbente, se afecta su velocidad de propagación, entonces se presenta refracción al interior del ducto, produciéndose una atenuación que depende de las características mecánicas y el espesor del material que constituye el nuevo medio.  
Este comportamiento es propio de los silenciadores disipativos.

Entonces una vez la onda sonora generada por la fuente de ruido se propaga al interior del silenciador ocurren los fenómenos de reflexión, refracción y difracción, de cómo interactúan estos en función de las longitudes de onda del espectro de ruido dependen los niveles de presión sonora en el extremo de salida del silenciador y la atenuación de ruido en términos de pérdida por transmisión sonora. De esta forma se evidencia la fuerte influencia de las condiciones de frontera en los resultados que se obtendrán para los TL de los silenciadores evaluados en el presente trabajo.

### 2.4.2. Frecuencia de Corte

Los ductos atenuadores de ruido o silenciadores de acuerdo a su geometría y dimensiones tienen un rango de funcionamiento. La frecuencia de corte [11] y [52], define el límite hasta donde la propagación de la onda sonora se puede asumir como de onda plana en un ducto y depende de la sección del ducto. Se calcula mediante la siguiente expresión.

$$f_c = \frac{3,83c}{\pi D},$$

con  $c$  es la velocidad de sonido en el medio [53].

A partir de la frecuencia  $f_c$  de corte la propagación de la onda se ve afectada por la generación de modos resonantes, como se muestra en al siguiente figura.

**Figura 2-10:** Modo de resonancia en altas frecuencias al interior de un ducto.

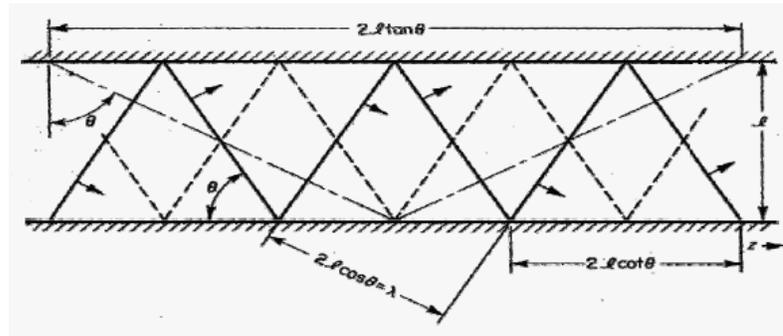


Imagen tomada de [54].

En conclusión, se entiende a la frecuencia de corte como una restricción del TL del silenciador que depende del diámetro del conducto de entrada, y en general a partir de esta la atención sonora no será uniforme.

### 2.4.3. Atenuación sonora por medio de silenciadores acústicos.

Como ya se ha explicado los silenciadores son los dispositivos utilizados para atenuar los niveles de ruido generados por las fuentes de ruido.

Los tres parámetros más usados para determinar la eficiencia de los silenciadores son: Pérdida por Transmisión TL, Perdía por Inserción IL, y Reducción del Nivel de Ruido LD, [45] y [23].

La pérdida por inserción IL, es definida como la potencia acústica radiada con y sin silenciador, contempla en el extremo de entrada una fuente de ruido y en la frontera de salida una carga de impedancia. Por su parte la reducción del nivel de ruido LD, corresponden a la diferencia en términos de niveles de presión sonora entre dos puntos arbitrariamente seleccionados en el silenciador y su extremo de salida.

El parámetro de mayor reconocimiento para evaluar la atenuación sonora en silenciadores acústicos es la pérdida por transmisión (Transmission Loss, TL), esta evalúa el control de ruido de forma independientemente de la fuente que lo genera y en el extremo de salida presume una terminación de campo libre (condición de radiación hacia presión de referencia).

De acuerdo a la revisión bibliográfica y teniendo en cuenta el análisis de los tres parámetros de evaluación de silenciadores acústicos se escoge la pérdida por transmisión sonora TL para el análisis de los desempeños de los dispositivos atenuadores en el presente trabajo.

La forma de presentar el TL de un silenciador es por medio de una gráfica, (ver gráfica, 2-11) ésta muestra en el eje Y el TL en dB, a mayor sea el valor mejor será la atenuación, y en el eje X muestra un rango de frecuencias (rango de interés en Hz), es decir, la gráfica presenta la atenuación sonora del silenciador para diferentes frecuencias en decibeles.

**Figura 2-11:** Gráfica de Pérdida por Transmisión Sonora TL.

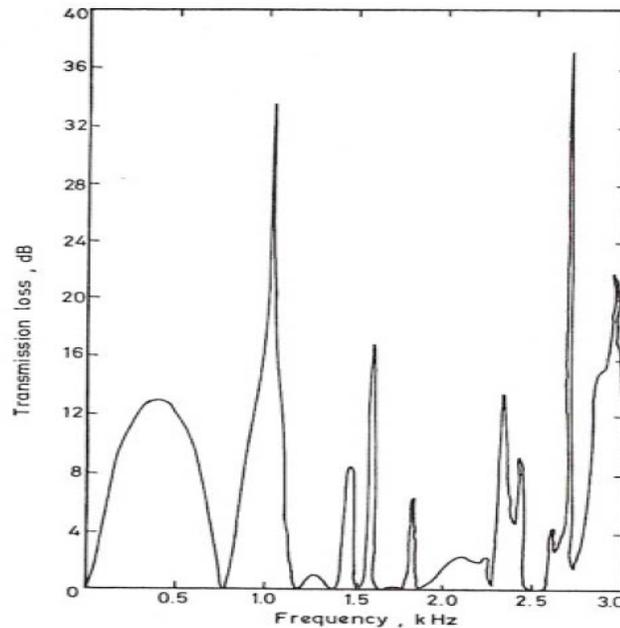


Imagen tomada de [23].

### 3. Método de Matriz de Transferencia (MMT).

El presente capítulo trata el modelado de problemas acústicos en ductos por medio del método de matriz de transferencia MMT. Uno de los objetivos es presentar el desarrollo del modelo de ducto con paredes absorbentes para este método.

#### 3.1. Generalidades.

La representación matricial para el problema de silenciadores acústicos es un modelo geométrico donde se descompone el sistema acústico en elementos buscado caracterizar su comportamiento, Munjal(1990) [55], Song(2000) [56], Singh(2008) [57],y Martínez(2010) [58].

Considerando la propagación de onda plana al interior del ducto, se emplea la representación matricial (Matriz de transferencia ó de 4 polos para relacionar las variables de estado presión  $p$  y  $U$  velocidad de partícula. El origen del método MMT (Método de Matriz de Transferencia) se remonta a las analogía electroacústicas (circuitos) como se muestra en la figura 3-1.

Figura 3-1: Analogía electrónica silenciador.

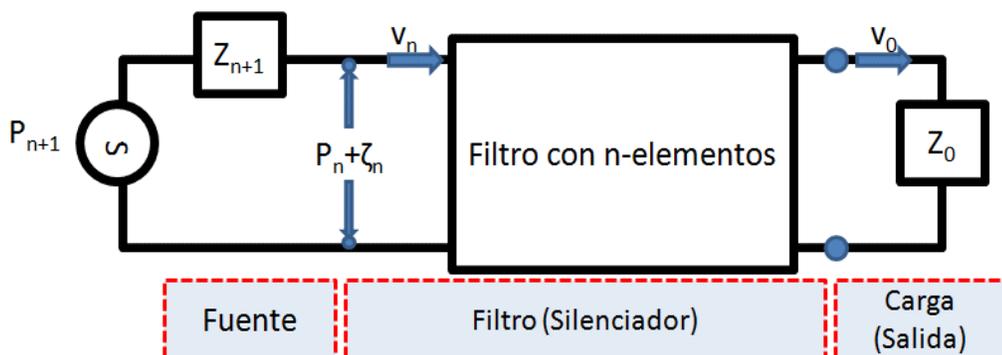
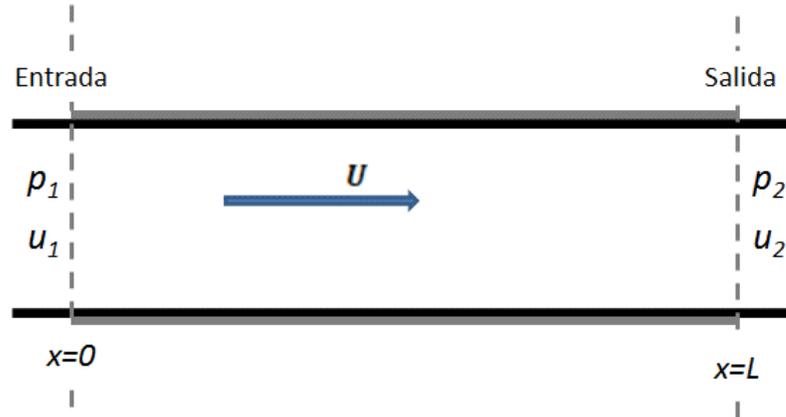


Imagen tomada de [55].

### 3.2. Ducto rectangular con paredes rígidas

Descripción del Método.

Figura 3-2: Modelo de análisis del MMT.



El esquema que se muestra en la figura anterior corresponde al modelo MMT, que se describe a continuación.

La perturbación de un punto dado del ducto se define por el vector  $\begin{bmatrix} p_1 \\ u_1 \end{bmatrix}$  y se relaciona con la perturbación en otro punto hacia el exterior (aguas abajo) del ducto especificado por  $\begin{bmatrix} p_2 \\ u_2 \end{bmatrix}$  y están relacionados por una matriz de transferencia MT que vincula los vectores de estado.

Entonces en general se tiene que,

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ u_1 \end{bmatrix} = \bar{\bar{M}} \begin{bmatrix} p_2 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Donde es  $\bar{\bar{M}}$  la matriz de transferencia de cuatro (4) variables (4 polos).

$\bar{\bar{M}}$  es:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Donde A, B, C y D son los llamados 4 polos, y reemplazando (3.2) en (3.1), se obtiene:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

El método MMT para el caso de estudio define cualquier elemento que haga parte del sistema siempre y cuando se cumpla con la propagación de onda plana.

Para obtener los cuatro polos se aplican dos condiciones de frontera, que son:

- Imposición de presión en extremo del ducto,  $p_2$ .

- Impresión de velocidad en extremo del ducto,  $u_2$ .

Entonces:

$$p_1 = Ap_2 + Bu_2. \quad (3.4)$$

$$u_1 = Cp_2 + Du_2. \quad (3.5)$$

Entonces para la primera condición se tiene lo siguiente:

Para  $p_2 = 0$  (Extremo Abierto), (3,4) queda

$$B = p_1/u_2 \quad (3.6)$$

y (3.5) queda

$$D = u_1/u_2. \quad (3.7)$$

Mientras que para la segunda condición descrita se tendrá que:

Para  $u_2 = 0$  (Extremo Cerrado), (3,4) queda

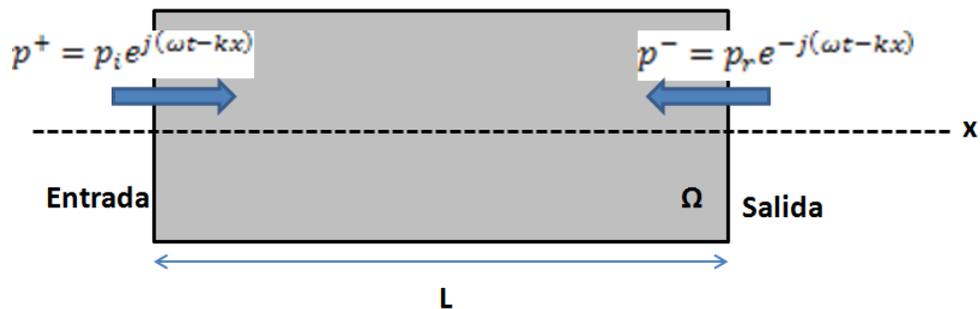
$$A = p_1/p_2 \quad (3.8)$$

y (3.5) queda

$$C = u_1/p_2 \quad (3.9)$$

En la propagación sonora en el ducto, la onda se propaga a lo largo del tubo (para el caso de estudio en el eje  $x$ ), la  $\lambda$  es mayor que las dimensiones transversales del ducto, por lo tanto, se trata de una propagación de onda plana y el desplazamiento es unidimensional, tal y como se muestra en la siguiente imagen.

**Figura 3-3:** Propagación de onda plana armónica en un ducto – Esquema 2D.



Teniendo en cuenta un sistema armónico, la propagación sonora al interior de un ducto puede describirse en términos de presión incidente y reflejada.

$$p^+ = p_i e^{j(\omega t - kx)} \quad (3.10)$$

$$p^- = p_r e^{-j(\omega t - kx)} \quad (3.11)$$

Entonces  $p(x)$  es la combinación de las componentes progresiva y regresiva así:

$$p(x) = p^+ + p^- = p_i e^{j(\omega t - kx)} + p_r e^{-j(\omega t - kx)} \quad (3.12)$$

Y la velocidad  $u$  puede expresarse de la siguiente manera

$$u(x) = p(x)/Z = 1/Z_0 (p_i e^{j(\omega t - kx)} + p_r e^{-j(\omega t - kx)}) \quad (3.13)$$

Entonces si se produce una excitación  $p_e = 1$ , en el ducto de longitud  $L$ , se tiene que

$$p(x = 0) = p_1 = p^+ + p^- = p_e = 1 \quad (3.14)$$

Para la condición de frontera  $u_2 = 0$  (Extremo Cerrado) se obtendrá

$$u(x = L) = u_2 = 1/Z_0 (p_i e^{j(\omega t - kx)} + p_r e^{-j(\omega t - kx)}) = 0 \quad (3.15)$$

Escribiendo en términos de senos y cosenos  $p(x)$  se tiene

$$p^+ = 1/2 \frac{\cos(k_0 L) + j \operatorname{sen}(k_0 L)}{\cos(k_0 L)} \quad (3.16)$$

$$p^- = 1/2 \frac{\cos(k_0 L) - j \operatorname{sen}(k_0 L)}{\cos(k_0 L)} \quad (3.17)$$

Y para encontrar los 4 polos, se reemplaza en (3.8)

$$A = p_1/p_2 \Big|_{u_2=0} = \cos(k_0 L) \quad (3.18)$$

, y (3.9) queda

$$C = u_1/p_2 \Big|_{u_2=0} = \frac{j}{Z_0} \operatorname{sen}(k_0 L) \quad (3.19)$$

Para Encontrar  $B$  y  $D$ , se utiliza la otra condición de frontera  $p_2 = 0$  (Extremo Abierto), entonces se obtiene que

$$p(x = L) = p_2 = (p_i e^{j(\omega t - kx)} + p_r e^{-j(\omega t - kx)}) = 0 \quad (3.20)$$

Y escribiendo en términos de senos y cosenos  $p(x)$  se tiene

$$p^+ = \frac{\operatorname{sen}(k_0 L) - j \cos(k_0 L)}{2 \operatorname{sen}(k_0 L)} \quad (3.21)$$

$$p^- = \frac{\text{sen}(k_0L) + j \cos(k_0L)}{2 \text{sen}(k_0L)} \quad (3.22)$$

Y para encontrar los 2 polos restantes, se reemplaza en (3.6)

$$B = p_1/u_2 \Big|_{p_2=0} = jZ_0 \text{sen}(k_0L) \quad (3.23)$$

y (3.7) queda

$$D = u_1/u_2 \Big|_{p_2=0} = \cos(k_0L) \quad (3.24)$$

Entonces reemplazando (3.20 – 3.23) en (3.3), se tiene finalmente,

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_0L) & jZ_0 \text{sen}(k_0L) \\ \frac{j}{Z_0} \text{sen}(k_0L) & \cos(k_0L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Con los términos de la matriz hallados (4 polos) se determina la pérdida por transmisión sonora acorde a la siguiente expresión,

$$TL = 20 \log \left| \frac{1}{2} \left( A + \frac{BS}{\rho c} + \frac{c \rho c}{S} + D \right) \right| \quad (3.26)$$

Entonces tal y como se menciona anteriormente el TL para el método de función de transferencia se obtiene con los términos de la matriz y es independiente de la fuente de ruido.

### 3.2.1. Casos de Estudio- Tubo Recto.

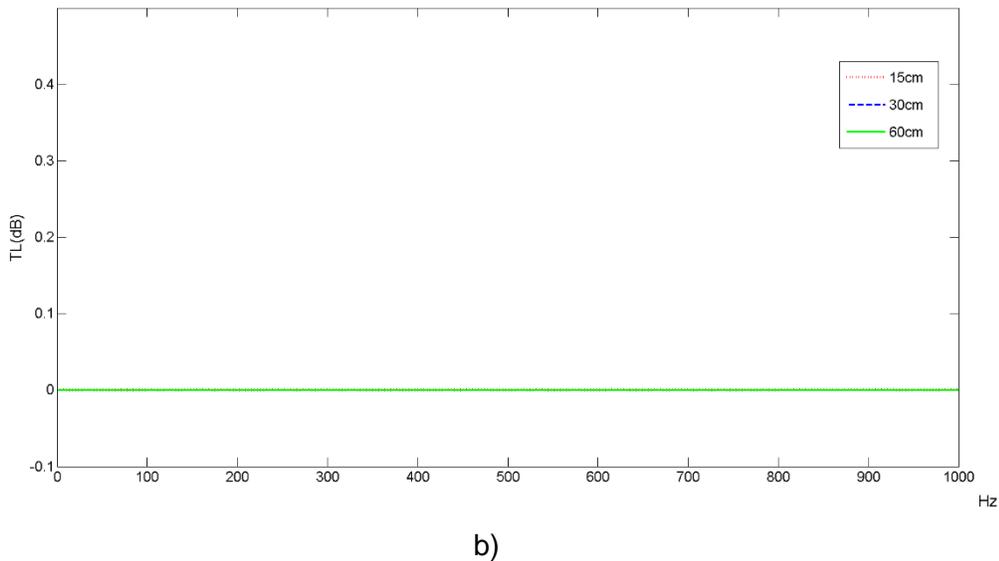
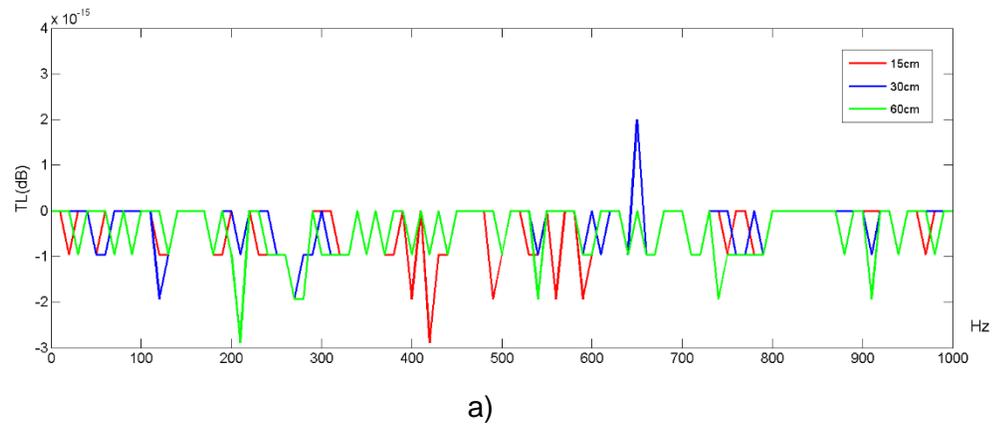
En las siguientes gráficas se muestra la pérdida por transmisión sonora (TL en dB) para un ducto recto con paredes internas lisas y rígidas. Para el caso No. 1. Se varía el radio del ducto y para el segundo caso se varía la longitud del mismo.

- **Caso 1. Tubo recto, variando diámetro.**

Longitud: 1m

Radio del ducto: variable. (Colores de Curvas) Rojo, 15cm. Azul, 30cm. Verde, 60cm.

**Figura 3-4:** TL ducto recto con paredes duras – Caso 1 varía diámetro.



La parte a) de la gráfica muestra el TL con un enfoque ampliado (Zoom), mientras en la parte b) se observa a una escala con unidades de 0,1dB.

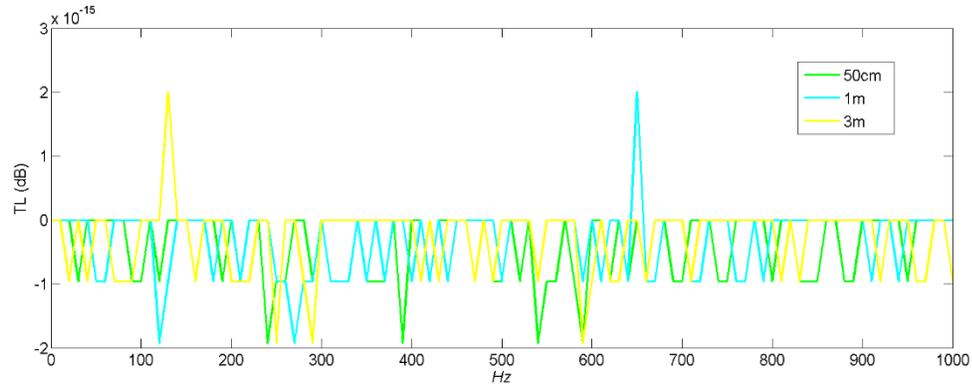
Se observa claramente que la atenuación sonora para un ducto recto con paredes duras (lisas y rígidas) es nula. Se debe a que la fuente de ruido encuentra un medio que transporta el espectro de ruido incidente desde el extremo de entrada hasta el de salida.

- **Caso 2. Tubo recto, variando longitud.**

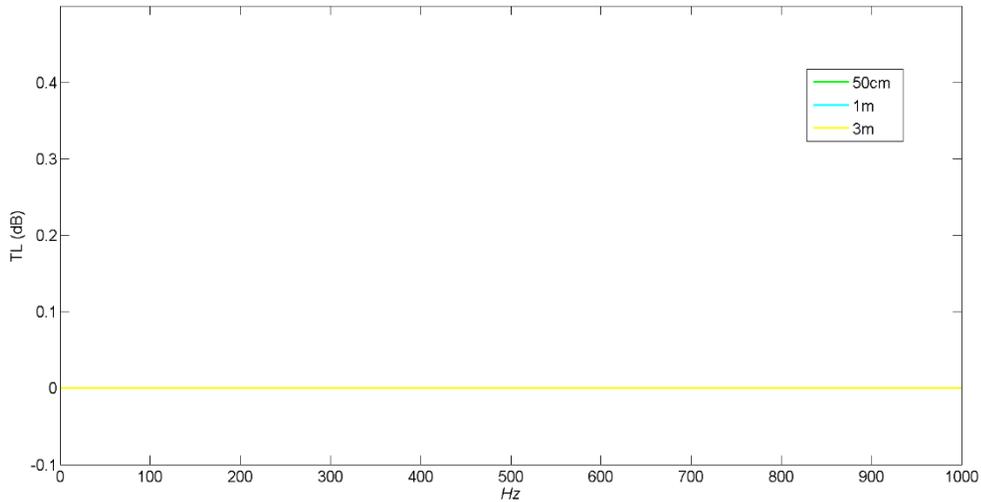
Radio del ducto: 0,3m

Longitud: variable. (Colores de Curvas) Verde, 0,5m. Cian, 1m. Amarillo, 3m.

**Figura 3-5:** TL ducto recto con paredes duras – Caso 2, varía longitud.



a)



b)

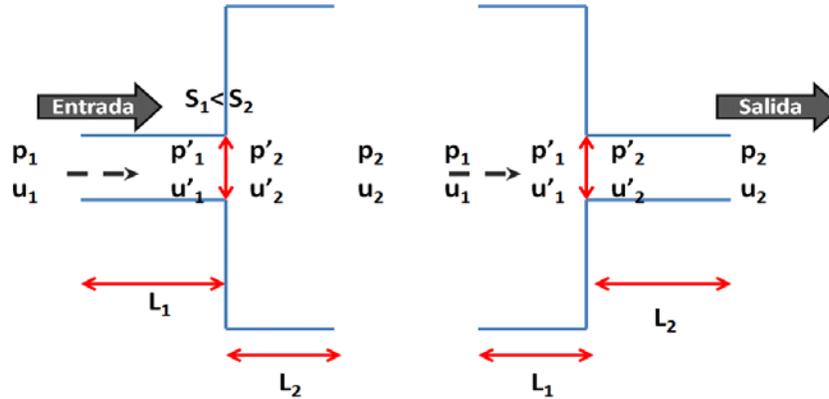
La parte a) de la gráfica muestra el TL con un enfoque ampliado (Zoom), mientras en la parte b) se observa a una escala con unidades de 0,5dB.

Se observa claramente que un ducto rígido no ofrece atenuación sonora, así se varíe su longitud o diámetro, teóricamente se tiene que la propagación de la onda al mantenerse una sección continua de un ducto cuyas paredes son lisas es de onda plana en toda su longitud (la onda viajera mantiene su sección y los niveles de presión en el extremo de salida son iguales al espectro generado por la fuente de ruido).

### 3.3. Silenciador con cambios de sección transversal.

Corresponde a un caso de análisis de silenciador tipo reactivo de una cámara de expansión. Para el caso de los cambios de sección transversal (expansión y contracción) en los ductos, se tiene lo siguiente,

Figura 3-6: Cambio de Sección en ducto – Esquema 2D.



La relación entre las variables acústicas a ambos lados de la discontinuidad geométrica se escribe:

$$p'_1 = p'_2 \quad (3.27)$$

$$\rho_0 S_1 u'_1 = \rho_0 S_2 u'_2 \quad (3.28)$$

Expresando estas relaciones matricialmente se tiene que para expansión y contracción la matriz de transferencia:

$$\begin{bmatrix} p'_1 \\ u'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_2/S_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p'_2 \\ u'_2 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Entonces para un silenciador con cámara de expansión, es decir, tubo de entrada con  $L_1$  + expansión + cámara con  $L_2$  + contracción + tubo de salida con  $L_3$ , la representación matricial del sistema es:

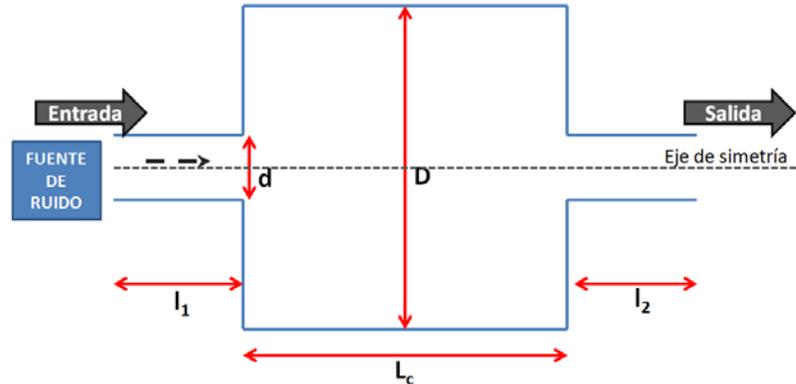
$$\begin{bmatrix} p_1 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_0 L_1) & jZ_0 \sin(k_0 L_1) \\ \frac{j}{Z_0} \sin(k_0 L_1) & \cos(k_0 L_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_2/S_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(k_0 L_2) & jZ_0 \sin(k_0 L_2) \\ \frac{j}{Z_0} \sin(k_0 L_2) & \cos(k_0 L_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_2/S_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(k_0 L_3) & jZ_0 \sin(k_0 L_3) \\ \frac{j}{Z_0} \sin(k_0 L_3) & \cos(k_0 L_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Como se observa se multiplican ordenadamente las matrices asociadas a cada elemento.

### 3.3.1. Casos de Estudio – Cámara de Expansión.

En las siguientes gráficas muestra la pérdida por transmisión sonora (TL en dB) para un silenciador con una cámara de expansión con paredes internas lisas y rígidas.

**Figura 3-7:** Silenciador de cámara de expansión – Esquema 2D Ducto Reactivo.



Se define la variable  $l_T$ , así,  $l_1 = l_2 = l_T$ .

Se analizan 2 casos:

Para el caso No. 1, se varía la longitud de la cámara.

Para el caso No. 2, se consideran variables los diámetros de la cámara (D) y de los ductos de entrada y salida (d).

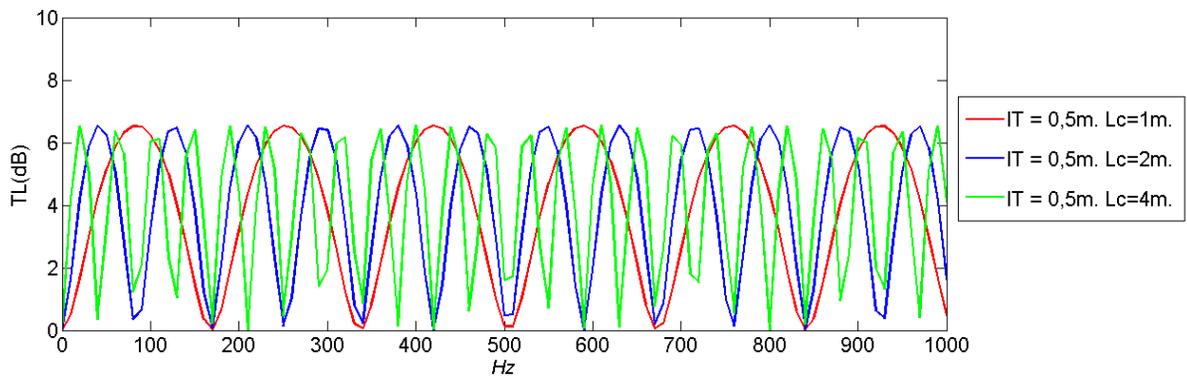
- **Caso 1. Silenciador con cámara de expansión, varía la longitud de la cámara.**

Diámetros:  $D=0,6\text{m}$ ,  $d=0,3\text{m}$ .

Longitud ductos de entrada y salida,  $l_T = 0,5\text{m}$ .

Longitudes de cámara: Variable. Rojo:  $L_c=1\text{m}$ . Azul:  $L_c=2\text{m}$ . Verde:  $L_c=4\text{m}$ .

**Figura 3-8:** TL Silenciador con cámara de Expansión – Caso 1, varía  $L_c$ .



De la anterior gráfica se observa lo siguiente:

- Se producen picos y valles en el TL, pues al interior del silenciador se dan interferencias destructivas y constructivas respectivamente, provocadas por

reflexión sonora de las ondas sonoras golpeando contra las paredes duras y por los cambios de sección (difracción).

- Los valores pico y valle de las atenuaciones se conservan para los diferentes casos, cerca de 6dB y 0dB, respectivamente.
- Al duplicar y cuadruplicar la longitud de la cámara se tienen 2 y 4 veces más picos y valles para el rango analizado.

Con esto se observa la influencia geométrica del modelo en el TL obtenido.

- Al aumentar la longitud de la cámara con respecto a la longitud de los ductos de entrada y salida se tiene un TL más fluctuante, entonces, si el ruido emitido por la fuente tiene mayor cantidad de componentes de frecuencia se obtendrá una mejor atenuación sonora para longitudes de cámara mayor.

• **Caso 2. Silenciador con cámara de expansión, varía diámetro de ductos.**

Longitud ductos de entrada y salida,  $l_T = 0,5m$ . Longitud de cámara:  $L_c=1m$ .

Diámetros: Variables.

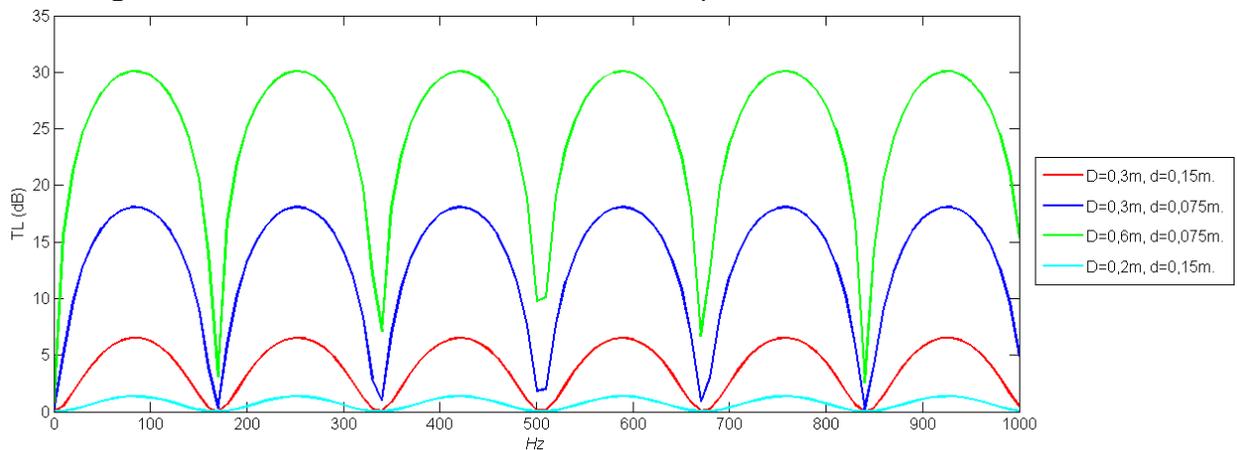
Rojo,  $D=0,3m$ ,  $d=0,15m$ .

Azul,  $D=0,3m$ ,  $d=0,075m$ .

Verde,  $D=0,6m$ ,  $d=0,075m$ .

Cian,  $D=0,2m$ ,  $d=0,15m$ .

**Figura 3-9:** TL Silenciador con cámara de Expansión – Caso 2, varía D.



De la anterior gráfica se observa:

- Siempre coinciden los valles y crestas de la atenuación, es decir, se tienen las mismas resonancias en el TL calculado, por lo tanto, al conservar las mismas longitudes de los conductos de entrada y salida y de la cámara se van a tener los mismos nodos y antinodos

Las resonancias se presentan por las características de las paredes (duras, CF Newmann).

- Al aumentar D con relación a d, se aumenta el pico de la atenuación del TL.
- Si la relación entre D y d, es entre dimensiones que sean múltiplos el TL tiende a tener un comportamiento similar (picos y valles coincidentes).

Otras pruebas realizadas en general para silenciadores de cámara de expansión mostraron lo siguiente:

- Mantener  $L_c$  y variar  $l_T$  no tiene efecto en los resultados de TL.

- Mantener la proporción entre los diámetros de cámara y ductos de entrada y salida no tiene efecto en los resultados de TL, por ejemplo se obtienen las mismas curvas de TL en los siguientes casos:

- Diámetros:  $D=0,6\text{m}$ ,  $d=0,3\text{m}$ .
- Diámetros:  $D=0,3\text{m}$ ,  $d=0,15\text{m}$ .
- Diámetros:  $D=6\text{m}$ ,  $d=3\text{m}$ .

Lo cual muestra que la atenuación en términos de pérdida por transmisión para los silenciadores de cámara de expansión se determina por medio de la relación de las secciones de sus ductos componentes.

Cabe mencionar que para análisis y evaluaciones de atenuación detallados es necesario considerar las frecuencias de corte de los silenciadores, sin embargo, para la comparación general presentada no es altamente significativo.

De acuerdo a los casos de estudio y la evaluación general de la pérdida por transmisión sonora para silenciadores de cámara de expansión se puede determinar lo siguiente:

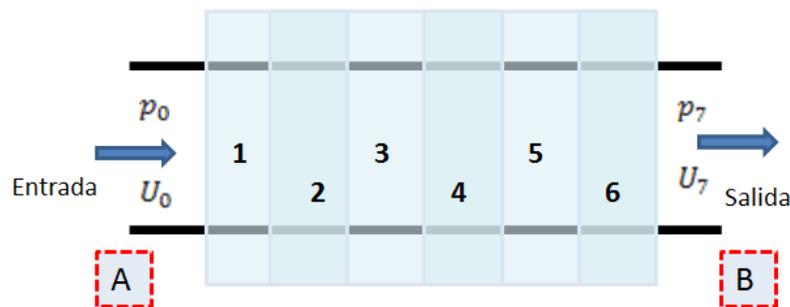
- Se evidencia la implicación geométrica del modelo de matriz de transferencia.
- El parámetro inicial de diseño consiste en verificar el tamaño de la fuente y con éste definir el diámetro del ducto de entrada.

### 3.4. Silenciadores Acoplados.

Se trata de silenciadores combinados, esto consiste en elementos compuestos por 2 ó más silenciadores reactivos entre sí unidos.

Tal y como se observó en el caso de silenciador de cámara de expansión donde, existe un acople de 3 ductos, ducto de entrada, sección de expansión, ducto de cámara, sección de contracción y ducto de salida.

**Figura 3-10:** Esquema 2D Silenciador Combinado.



Donde,

$$q_0 = \begin{bmatrix} p_0 \\ U_0 \end{bmatrix}, \dots, q_i = \begin{bmatrix} p_i \\ U_i \end{bmatrix}, \dots, q_7 = \begin{bmatrix} p_7 \\ U_7 \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

Entonces la representación matricial asociada corresponde a:

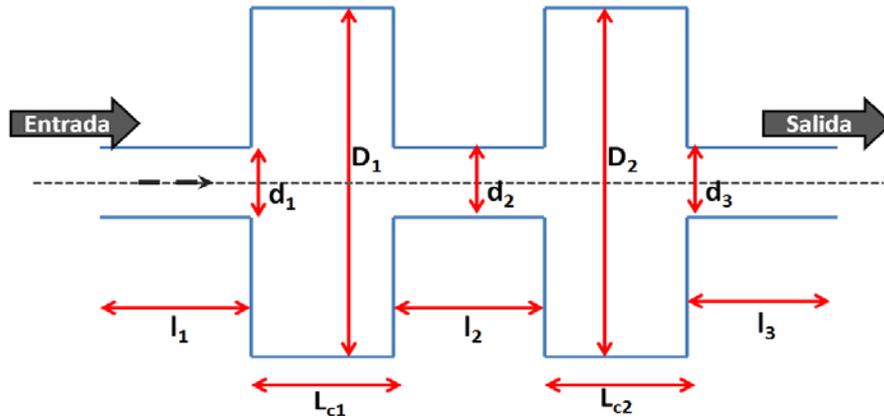
$$\bar{M}_{acoplado} = T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdot T_4 \cdot T_5 \cdot T_6 q_7, \quad (3.32)$$

Donde se relacionan las variables presión y velocidad en los puntos A y B (entrada y salida) en un silenciador y en donde  $T_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) corresponde a las matrices de transferencia de cada uno de los elementos que componen el silenciador y son de la forma descrita en la ecuación 3.30.

### 3.4.1. Casos de Estudio – Doble cámara de Expansión

Morfología correspondiente a silenciador combinado.

Figura 3-11: Esquema 2D Silenciador Doble cámara de expansión.



La siguiente representación matricial para el silenciador reactivo con doble cámara de expansión es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_0 L_1) & jZ_0 \text{sen}(k_0 L_1) \\ \frac{j}{Z_0} \text{sen}(k_0 L_1) & \cos(k_0 L_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_2/S_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(k_0 L_{c1}) & jZ_0 \text{sen}(k_0 L_{c1}) \\ \frac{j}{Z_0} \text{sen}(k_0 L_{c1}) & \cos(k_0 L_{c1}) \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_3/S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(k_0 L_2) & jZ_0 \text{sen}(k_0 L_2) \\ \frac{j}{Z_0} \text{sen}(k_0 L_2) & \cos(k_0 L_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_4/S_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(k_0 L_{c2}) & jZ_0 \text{sen}(k_0 L_{c2}) \\ \frac{j}{Z_0} \text{sen}(k_0 L_{c2}) & \cos(k_0 L_{c2}) \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_5/S_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(k_0 L_3) & jZ_0 \text{sen}(k_0 L_3) \\ \frac{j}{Z_0} \text{sen}(k_0 L_3) & \cos(k_0 L_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

- **Caso 1. Silenciador de una cámara vs doble cámara de expansión.**

Comparación silenciadores 2 silenciadores con doble cámara de expansión (curva de color azul) y con una cámara de expansión (curva de color rojo) para una misma longitud total y diámetros D y d.

Azul: Silenciador con doble cámara de expansión.

Longitud ductos de entrada y salida,  $l_1 = l_2 = l_3 = l_T = 0,2\text{m}$ .

Longitud ducto intermedio,  $l_2 = 0,2\text{m}$ .

Longitud de cámaras:  $L_{c1} = L_{c2} = L_c = 0,4\text{m}$ .

Diámetros ductos de entrada y salida:  $d_1 = d_2 = d_3 = d = 0,2\text{m}$ .

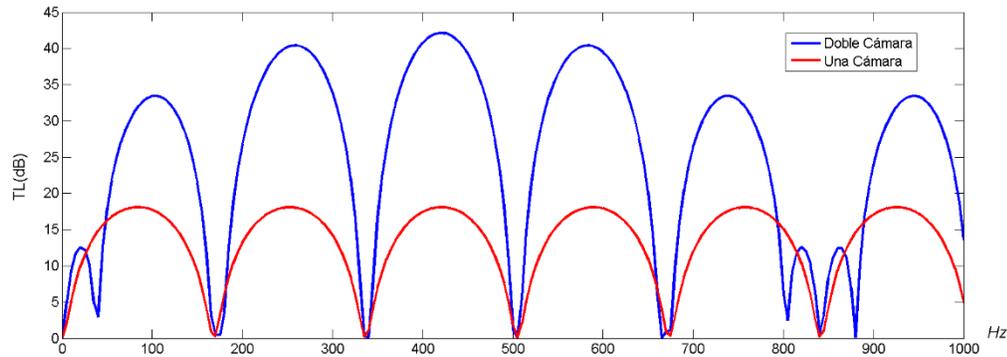
Diámetros cámara:  $D_1 = D_2 = D = 0,8\text{m}$ .

Rojo: Silenciador con una cámara de expansión.

Longitud ductos de entrada y salida,  $l_T = 0,2\text{m}$ . Longitud de cámara:  $L_c = 1\text{m}$ .

Diámetros:  $D = 0,8\text{m}$ ,  $d = 0,2\text{m}$ .

**Figura 0-12:** Comparación TL Silenciador combinado – Caso 1, vs una cámara.



De la anterior gráfica se observa que:

- Teniendo dos silenciadores de la misma longitud, el de doble cámara de expansión logra valores de atenuación mayores en sus picos (logrando casi duplicar su eficiencia en dB). Esto se debe a que existen más interferencias destructivas, ya que aumentan las discontinuidades (más reflexiones y difracción al interior del silenciador).
- En bajas frecuencia (Entre 0 y 50Hz) el TL del silenciador de doble cámara tiene una caída con respecto al silenciador de una cámara de expansión.
- En general el silenciador de doble cámara de expansión en sus resonancias y anchos de banda coinciden con el de una cámara.

- **Caso 2. Silenciador de doble cámara, varía longitud de conector.**

Comparación silenciadores con doble cámara de expansión variando la longitud del conducto intermedio  $l_2$ .

Longitud ductos de entrada y salida,  $l_1 = l_3 = l_T = 0,2\text{m}$ .

Longitud de cámara:  $L_{c1} = L_{c2} = L_c = 0,4\text{m}$ .

Diámetros ductos de entrada y salida:  $d_1 = d_2 = d_3 = d = 0,2\text{m}$ .

Diámetros cámara:  $D_1 = D_2 = D = 0,8\text{m}$ .

Ducto intermedio  $l_2$ , variable.

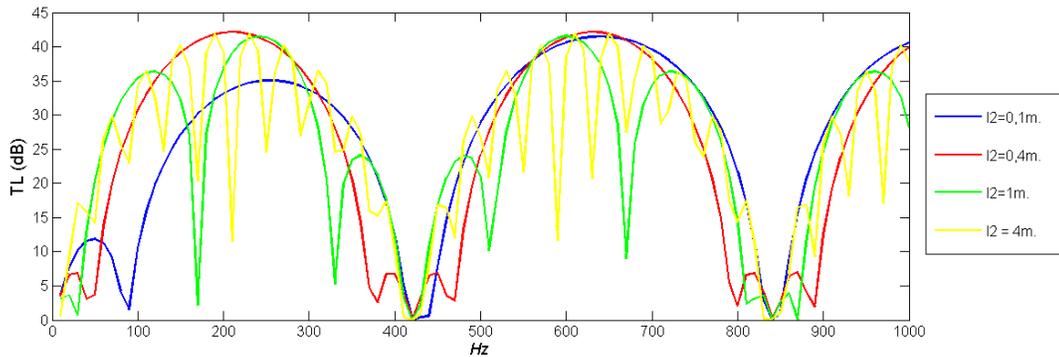
Azul,  $l_2 = 0,1\text{m}$ .

Rojo,  $l_2 = 0,4\text{m}$ .

Verde,  $l_2 = 1\text{m}$ .

Amarillo,  $l_2 = 4\text{m}$ .

**Figura 3-13:** Comparación TL Silenciador combinado – Caso 2, varía  $L_2$  de conector.



De la anterior gráfica se observa:

- Al aumentar  $L_2$  se aumentan las fluctuaciones del TL de los silenciadores (cantidades de picos y valles).
- Al aumentar  $L_2$  se mejora la eficiencia de la atenuación en bajas frecuencias.
- A partir de 400Hz los valores pico para las diferentes configuraciones son similares.

• **Caso 3. Silenciador doble cámara, varía la longitud de la segunda cámara.**

Comparación silenciadores con doble cámara de expansión variando la longitud de cámara No. 2 ( $L_{c2}$ ).

Longitud ductos de entrada y salida,  $l_1 = l_3 = l_7 = 0,2m$ .

Longitud de cámara No. 1. :  $L_{c1} = 0,4m$ . Longitud Ducto intermedio  $l_2 = 0,2m$ .

Diámetros ductos de entrada y salida:  $d_1 = d_2 = d_3 = d = 0,2m$ .

Diámetros cámara:  $D_1 = D_2 = D = 0,8m$ .

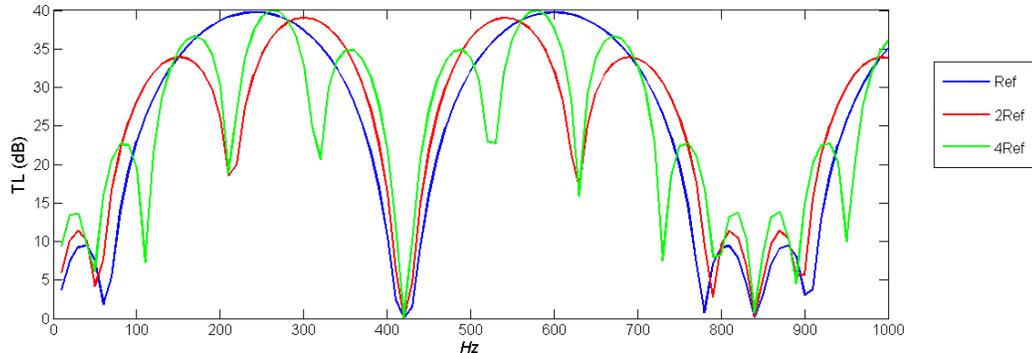
Longitud de cámara No. 2 Variable:

Azul: Longitud de cámara No. 2:  $L_{c2} = 0,4m$ . (Longitud de referencia).

Rojo: Longitud de cámara No. 2:  $L_{c2} = 0,8m$ .

Verde: Longitud de cámara No. 2:  $L_{c2} = 1,6m$ .

**Figura 3-14:** Comparación TL Silenciador combinado – Caso 3, varía  $L$  de segunda cámara.



De la gráfica anterior se observa que:

- Al reducir  $L_{c2}$  se tienen menos picos y valles. Para  $L_{c2} = 0,1m$  se tiene prácticamente una envolvente del TL de las demás opciones analizadas.

- Los valores máximos y mínimos de picos y valles del TL coinciden para todas las variaciones de  $L_{c2}$ .

#### Caso 4. Silenciador de doble cámara de expansión, varía diámetro de conector.

Comparación silenciadores con doble cámara de expansión variando el diámetro del conducto intermedio ( $d_2$ ).

Longitud ductos de entrada y salida,  $l_1 = l_2 = l_3 = l_T = 0,2\text{m}$ .

Longitud de cámara No. 1. :  $L_{c1} = L_{c2} = 0,4\text{m}$ . Diámetros cámara:  $D_1 = D_2 = D = 0,8\text{m}$ .

Diámetros ductos de entrada y salida:  $d_1 = d_3 = 0,2\text{m}$ .

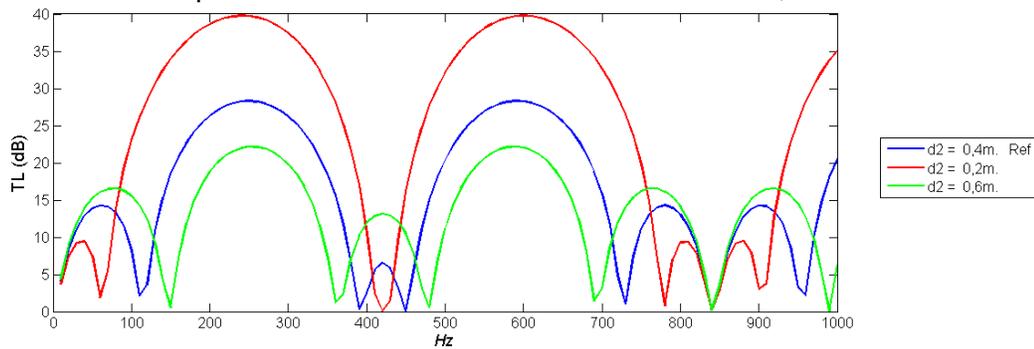
Diámetro del conducto intermedio ( $d_2$ ). Variable:

Azul:  $d_2 = 0,4\text{m}$ . (Diámetro de referencia).

Rojo:  $d_2 = 0,2\text{m}$ .

Verde:  $d_2 = 0,6\text{m}$ .

**Figura 3-15:** Comparación TL Silenciador combinado – Caso 4, varía  $d$  del conector.



De la gráfica anterior se observa que:

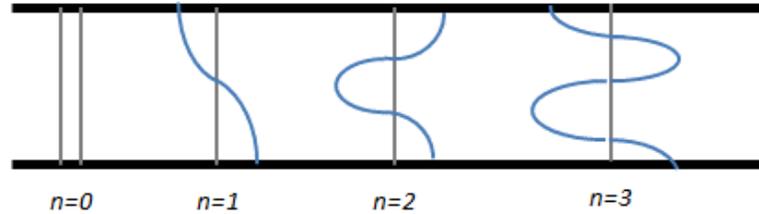
- Al reducir  $d_2$  se tienen menos picos y valles.  
La discontinuidad es menor, por lo tanto, las reflexiones sonoras y resonancias internas no son tan eficientes para generar interferencias destructivas (mayor atenuación).
- Para  $d_2 = 0,1\text{m}$  se tiene una mayor atenuación y un mejor ancho de banda.
- Entre mayor sea el diámetro del conducto intermedio para el silenciador de doble cámara de expansión los valores pico de TL decrecerán (Se presentará un comportamiento similar al de un silenciador con una sola cámara de expansión).  
La ventaja de usar un silenciador combinado es que los cambios de sección sean lo más fuerte posibles.

### 3.5. Ducto lineal con material absorbente en paredes laterales.

Este modelo ha sido de interés de autores como Munjal(1987) [23], Mena (2006) [59], Moser (2009) [60] y Araos (2010) [61], sin embargo, la bibliografía al respecto resulta escasa y no se encuentra un desarrollo claro que desarrolle metodológicamente este caso de análisis para MMT, por esto a continuación partiendo de los referentes bibliográficos se busca explicar el problema acústico para silenciadores disipativos.

En un ducto de dos dimensiones, la presión sonora se compone por modos transversales sinusoidales, cada modo posee un número de onda  $k_x$  en la dirección axial que describe su propagación (en dirección longitudinal).

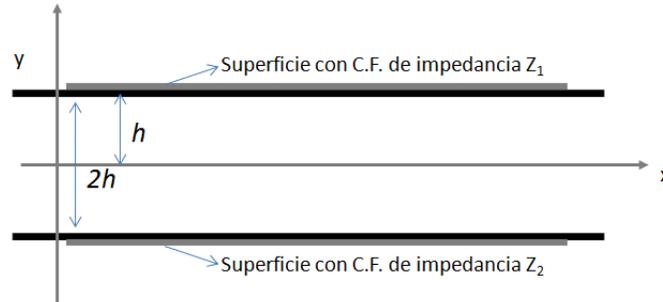
**Figura 0-16:** Propagación sonora transversal en un tubo rígido.



A diferencia del caso anterior donde las paredes son duras donde existen reflexiones múltiples, no es relevante considerar la componente de propagación transversal en el ducto, en cambio en este caso sí se requiere analizar el impacto de ésta en la propagación axial ( $k_x$ ) de la onda plana longitudinal pues existen superficies absorbentes (CF de impedancia).

Se parte del estudio de un ducto de paredes paralelas con impedancia en sus caras internas (absorción). A continuación se muestra el esquema implementado para el análisis.

**Figura 0-17:** Modelo bidimensional de ducto con paredes absorbentes.



De acuerdo a las condiciones de frontera se tiene una propagación sonora en términos de presión así:

$$p(x, y) = \left( A \cos(k_y y) + B \sin(k_y y) \right) e^{\pm j k_x x} \quad (3.34)$$

, donde,  $k_0^2 = k_x^2 + k_y^2$ .

Y  $U$  la velocidad de partícula se expresa de la siguiente manera

$$u_y(x, y) = \frac{j k_y}{\rho c k_0} \left( -A \sin(k_y y) + B \cos(k_y y) \right) e^{\pm j k_x x} \quad (3.35)$$

Y condiciones de frontera (impedancia) por lo tanto son:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{u_y}{p} \Big|_{y=+h} = \frac{\rho c k_0}{j k_y} \frac{A \cos(k_y y) + B \sin(k_y y)}{-A \sin(k_y y) + B \cos(k_y y)} \\ -Z_2 &= \frac{u_y}{p} \Big|_{y=-h} = \frac{\rho c k_0}{j k_y} \frac{A \cos(k_y y) - B \sin(k_y y)}{A \sin(k_y y) + B \cos(k_y y)} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Se puede obtener la relación entre las amplitudes  $A$  y  $B$ .

$$r = \frac{B}{A} = \frac{jk_y \tan(k_y h) - \beta_2}{jk_y - \beta_2 \tan(k_y h)}, \quad (3.37)$$

$$\text{con } \beta_2 = \frac{k_0 h}{\bar{Z}_2 / \rho c}.$$

La ecuación de valores propios del ducto puede expresarse así:

$$[\omega \cot(\omega) + j\beta_2][\omega \tan(\omega) - j\beta_1] + [\omega \cot(\omega) + j\beta_1][\omega \tan(\omega) - j\beta_2] = 0 \quad (3.38)$$

$$\text{Donde } \beta_1 = \frac{k_0 h}{\bar{Z}_1 / \rho c}, \quad \omega = k_y h.$$

Entonces la ecuación de valores propios puede reducirse a:

$$[\omega \tan(\omega) - j\beta_s][\omega \cot(\omega) + j\beta_s] = \beta_\alpha \quad (3.39)$$

$$\text{Con, } \beta_s = \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2), \quad \beta_\alpha = \frac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2).$$

La ecuación de valores propios reducida al no tener solución analítica se resuelve numéricamente por el método de Newton-Raphson para calcular los números de onda axiales,  $k_x$ .

Entonces conociendo los valores de  $k_x$  se puede resolver el modelo de un *ducto disipativo* (paredes internas absorbentes) de acuerdo a la siguiente representación matricial:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_x L) & j\hat{Z} \sin(k_x L) \\ \frac{j}{\hat{Z}} \sin(k_x L) & \cos(k_x L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

, donde,

$$\hat{Z} = \frac{\hat{Z}_0 k_0}{k_x}; \quad \hat{Z}_0 = \frac{\rho_0 k_0}{S}; \quad k_0 = \frac{\omega}{c_0}.$$

Las constantes características  $Z_w$  y  $k_w$  corresponden a la impedancia y al número de onda en el material. Al incluir recubrimiento absorbente en las paredes internas de la cámara se tienen en cuenta las propiedades del material absorbente y la pérdida que involucra la propagación de onda en la componente transversal. Los términos  $Z_w$  y  $k_w$  se hallan mediante la aproximación empírica de Delany-Bazley, como se describe anteriormente en las ecuaciones (2.18) y (2.19).

Finalmente para hallar la atenuación de ruido de un tubo recto con absorción en sus paredes laterales en términos de pérdida por transmisión sonora se puede usar la siguiente reducción [23]:

$$TL = -8,68 \text{Im}(k_x L). \quad (3.41)$$

### 3.5.1. Casos de Estudio – Tubo recto con absorción.

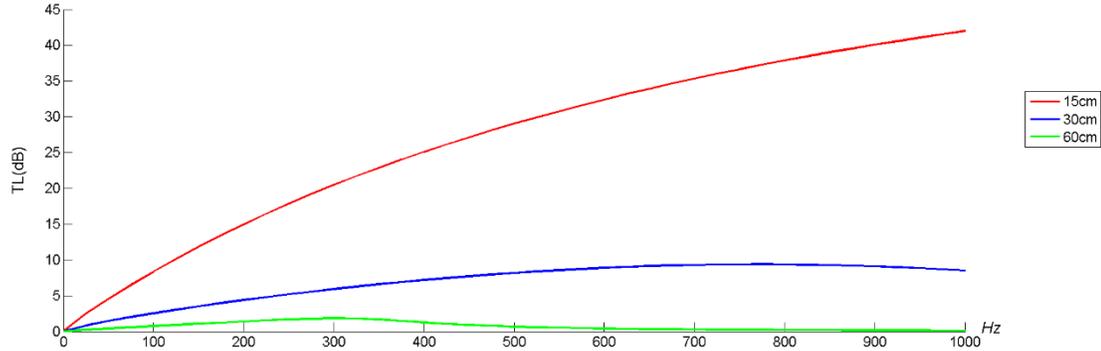
En las siguientes gráficas muestra la pérdida por transmisión sonora (TL en dB) para un ducto recto con paredes absorbentes, es decir, existen condiciones de impedancia que provocarán una refracción sonora a interior del ducto dada por la absorción del recubrimiento. Para el caso No. 1. Se varía el radio del ducto y para el segundo caso se varía la longitud del mismo, se tiene los mismos parámetros descritos para el caso del ducto rígido.

- **Caso 1. Tubo recto absorbente, variando diámetro.**

Longitud: 1m. Resistencia al flujo del material absorbente: 14000Rayls y espesor del recubrimiento=2,54cm

Radio del ducto: variable. (Colores de Curvas) Rojo, 15cm. Azul, 30cm. Verde, 60cm.

**Figura 3-18:** TL ducto recto con paredes absorbentes – Caso 1, varía diámetro.



En la gráfica anterior se observa claramente que la atenuación sonora aumenta con un relación inversamente proporcional al tamaño del diámetro del silenciador, esto es fácil de entender pues entre menor sea la sección con paredes absorbentes mayor será la oposición a la propagación sonora.

El funcionamiento de este tipo de elementos disipativos radica en atenuación debida a la absorción y resistividad al flujo del recubrimiento poroso, es decir, la frontera con impedancia es claramente influyente en el TL.

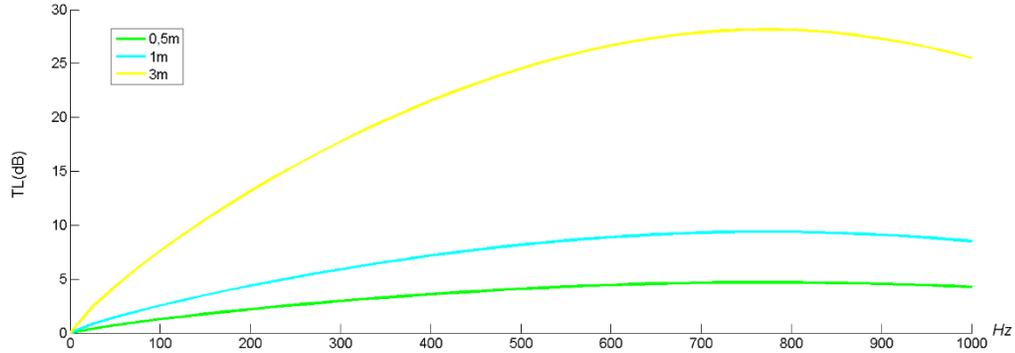
Para el caso representado por la curva de color verde la atenuación es mínima en el rango de frecuencias analizado dado que el diámetro del ducto disipativo es grande y la onda sonora generada por la fuente viaja prácticamente sin oposición hacia el extremo de salida.

- **Caso 2. Tubo recto absorbente, variando longitud.**

Radio del ducto: 0,3m

Longitud: variable. (Colores de Curvas) Verde, 0,5m. Cian, 1m. Amarillo, 3m.

Como se ve en la figura 3-19, al incrementar la longitud del ducto absorbente se tiene un camino silenciado mayor, es decir, la onda viajera debe recorrer una mayor distancia con presencia de refracción sonora, por esta razón se dan mayores atenuaciones de ruido.

**Figura 3-19:** TL ducto recto con paredes absorbentes – Caso 2, varía longitud.

### 3.5.2. Silenciador con cámara de expansión y absorción en cámara.

Para el caso de un *silenciador mixto*, es decir, *reactivo disipativo*. Se tiene un sistema compuesto idéntico al anterior (sección 3.3) solo que en la cámara las paredes internas son absorbentes, entonces la representación matricial es:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_0 L_1) & jZ_0 \sin(k_0 L_1) \\ \frac{j}{Z_0} \sin(k_0 L_1) & \cos(k_0 L_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_2/S_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(k_y L_2) & jZ_y \sin(k_y L_2) \\ \frac{j}{Z_y} \sin(k_y L_2) & \cos(k_y L_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_2/S_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(k_0 L_3) & jZ_0 \sin(k_0 L_3) \\ \frac{j}{Z_0} \sin(k_0 L_3) & \cos(k_0 L_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Usando (3.26) se puede calcular la atenuación sonora para esta tipología.

## 3.6. Silenciador Resonador de Helmholtz.

Es un tipo de silenciador usado como “elimina banda”, pues su efecto de atenuación tiene un ancho de banda muy pequeño.

Es un dispositivo de control de ruido sintonizado con una cavidad resonante tal y como se muestra en la figura 2-7 la conexión del ducto y el volumen del resonador se da por medio de un cuello, su estudio ha sido interés de algunos autores como Selamet (1997 [62], 2003 [63]), Munjal (1987) [23], Sang-Hyun (2005) [64], Mechel (2002) [45], Glav (1994) [65].

Para este tipo de ducto las variables se puede expresar:

$$p_1 = Ae^{-j(kx)} + Be^{j(kx)}. \quad (3.43)$$

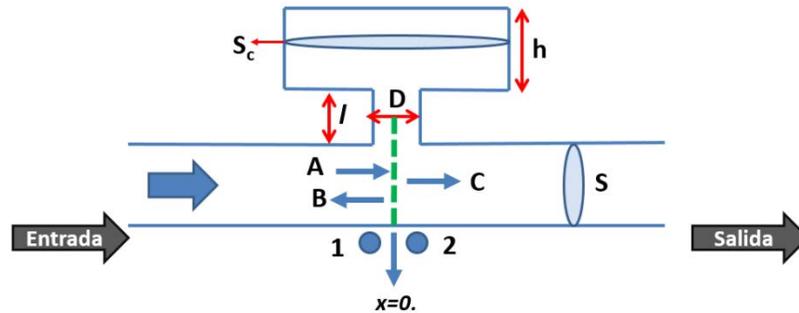
$$p_2 = Ce^{-j(kx)}. \quad (3.44)$$

$$u_1 = 1/Z (Ae^{-j(kx)} + Be^{j(kx)}). \quad (3.45)$$

$$u_2 = 1/Z (Ce^{-j(kx)}). \quad (3.46)$$

Donde  $A$ ,  $B$  y  $C$  son las magnitudes de la onda incidente, reflejada y transmitida respectivamente y la impedancia del elemento  $Z = \frac{\rho c}{S}$ . En la figura que se muestra a continuación se muestra el esquema que describe la propagación sonora en este ducto.

**Figura 3-20:** Modelo bidimensional para resonador de Helmholtz.



La matriz de transferencia entre los puntos 1 y 2 del silenciador se obtienen considerando continuidad de presión sonora y velocidad de volumen así:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{-jZ_c \cot(kh) + Z_h} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

Donde la impedancia del cuello  $Z_h$  y la del resonador  $Z_t$  son:

$$Z_h = \frac{\rho c}{S_h} (0,0072 + jk(l + 0,75)). \quad (3.48)$$

Con  $l$  como la longitud del cuello conector.

$$Z_t = \frac{\rho c}{S_c}. \quad (3.49)$$

La pérdida por trasmisión sonora TL para el resonador de Helmholtz se puede calcular usando:

$$TL = 20 \log_{10} \left| \frac{2 + Z \left( \frac{1}{-jZ_t \cot(kh) + Z_h} \right)}{2} \right| \quad (3.50)$$

### 3.6.1. Casos de Estudio – Resonador de Helmholtz

En las siguientes gráficas muestra la pérdida por transmisión sonora (TL en dB) para un silenciador tipo resonador de Helmholtz (Reactivo) descrito en la sección 2.4.1.

Para el caso No. 1, se varía la longitud del cuello y para el segundo caso se varía el diámetro de este.

- **Caso 1. Varía longitud del cuello.**

Longitud del silenciador,  $L = 0,1\text{m}$ .

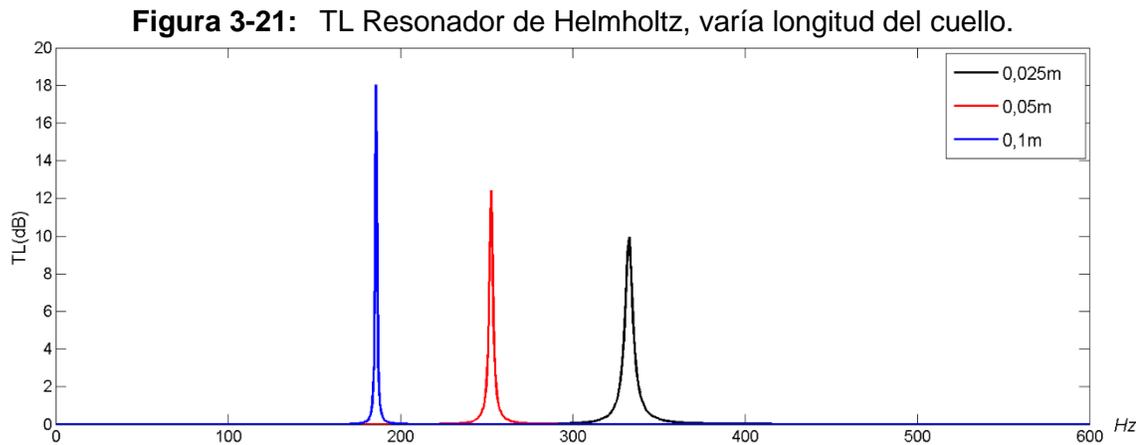
Altura del resonador:  $h = 48,5\text{mm}$ .

Diámetros del cuello:  $D = 10\text{mm}$ .

Diámetros del resonador  $20\text{mm}$ .

Diámetros del silenciador  $50\text{mm}$ .

Longitud del cuello, variable  $l = 25\text{mm}$ . **50mm**. **100mm**.



En la anterior figura se observa que al aumentar la longitud del cuello conector se baja la frecuencia de resonancia del silenciador.

El silenciador tipo resonador de Helmholtz puede entenderse como un filtro rechaza banda, pues la adecuación en términos de TL es selectiva y se sintoniza en una frecuencia en particular, dependiendo de la relación de sus variables geométricas.

Al ser un silenciador reactivo su principio de funcionamiento radica en las reflexiones sonoras internas debido a las discontinuidades geométricas de su forma, dichas reflexiones se convierten en un resonancia sintonizada (“afinada”) que se traduce en la mencionada atenuación rechaza banda.

- **Caso 2. Diámetro de cuello variable.**

Longitud del silenciador,  $L = 0,1\text{m}$ .

Altura del resonador:  $h = 48,5\text{mm}$ .

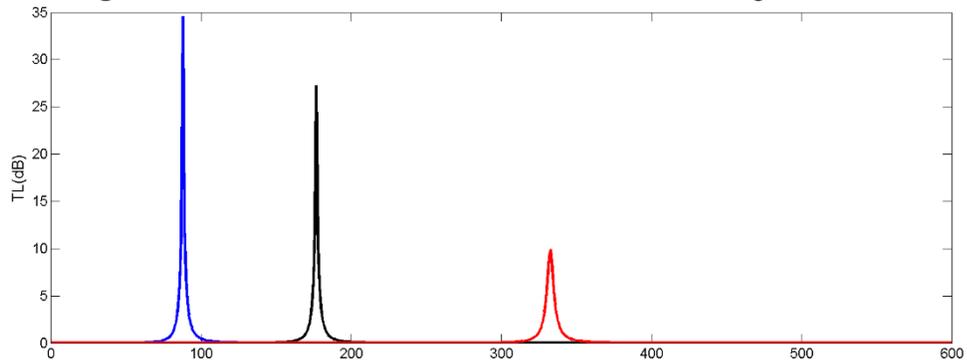
Diámetros del cuello:  $D = 10\text{mm}$ .

Diámetros del resonador  $20\text{mm}$ .

Longitud del silenciador  $25\text{mm}$ .

Diámetros del cuello, variable  $l = 12,5\text{mm}$ . **25mm**. **50mm**.

**Figura 3-22:** TL Resonador de Helmholtz, varía longitud cuello.



Se observa que al reducir el diámetro del cuello conector se baja la frecuencia de resonancia del silenciador y aumenta la amplitud de la atenuación.

Se mejora la atenuación sonora del silenciador al incrementar la diferencia en el cambio de secciones generando una mayor dificultad para la propagación sonora al interior del resonador (más reflexiones destructivas).

Este tipo de silenciadores es muy efectivo para controlar ruidos tonales generados por equipos y maquinarias que por su funcionamiento tienen elementos como motores, ventiladores, etc., que siempre trabajan con velocidades de operación constantes (rpm fijas).

## 4. Método de Elementos Finitos (FEM).

### 4.1. Generalidades.

El método de elementos finitos (FEM) es uno de los métodos numéricos más utilizados para solucionar diversos problemas matemáticos de física e ingeniería, la teoría del método numérico se explica por Zienkiewicz(1981) [66], por su parte Crocker(1975) [67], fue pionero en usar FEM para resolver problemas de silenciadores acústicos, otro trabajo que se considera relevante mencionar es el de Kristiansen y Viggen (2010) [68][68].

Descripción matemática del método: El método resuelve el problema acústico definido por la ecuación de Helmholtz para ondas sonoras planas y las condiciones de frontera definidas de acuerdo cada caso de estudio. La implementación se realiza en las siguientes etapas:

- Formulación variacional.
- Discretización. Se busca construir un espacio de dimensión finita, llamado espacio de elementos finitos  $V_h$ . Para los casos estudiados solo se usan polinomios lineales a trozos.  
Con fines comparativos para las simulaciones también se emplean polinomios cuadráticos y cúbicos.
- Sistema lineal de ecuaciones finito (Matrices de masa y de rigidez), donde el número de incógnitas será igual a la dimensión del espacio vectorial.
- Solución del sistema de ecuaciones, de acuerdo a las condiciones de frontera.

En general lo que hace FEM es discretizar el dominio en elementos donde cada esquina corresponde a un nodo (punto). Cada elemento tiene funciones de forma asociadas (bases) y así para cada punto del dominio (nodo) se busca conocer la presión sonora, es decir, se resuelve la ecuación de onda en cada uno de los nodos.

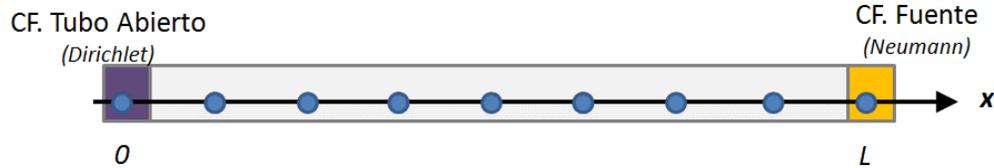
### 4.2. Problema acústico unidimensional por FEM.

A continuación se muestra a continuación la solución de la ecuación de Helmholtz unidimensional por medio del método de elementos finitos. A continuación se estudiarán 3 casos, las simulaciones correspondientes se desarrollaron con el software Matlab.

### 4.2.1. Tubo abierto en un extremo y con fuente en el otro.

El primer caso estudiado corresponde a un ducto recto, con un extremo abierto en el costado izquierdo  $x = 0$  y una fuente en el extremo derecho  $x = L$ , como el que se muestra en la siguiente figura.

**Figura 4-1:** Modelo unidimensional de un tubo de longitud  $L$ .



El problema de valor en la frontera que describe la propagación sonora para una onda plana y armónica en dicho tubo es:

$$p_{xx} + k^2 p = 0. \quad (4.1)$$

$$p(0) = 0. \quad (4.2)$$

$$p_x(L) = j\omega\rho\phi_i(L)u_M. \quad (4.3)$$

, donde (4.1) es la Ec. Helmholtz, (4.2) es CF Dirichlet., y (4.3) es CF Neumann.

Para resolver el problema mediante el método FEM primero se escribe la forma variacional de (4.1), para esto se multiplica por cualquier función  $\phi \in H^1(\Omega)$  e integrando el resultado sobre el dominio se obtiene:

$$\int_0^L p_{xx}\phi dx + k^2 \int_0^L p\phi dx = 0. \quad (4.4)$$

Luego se aplica integración por partes llegando a

$$p_x\phi \Big|_0^L - \int_0^L p_x\phi_x dx + k^2 \int_0^L p\phi dx = 0. \quad (4.5)$$

Usando las condiciones de frontera y la definición de  $\phi$  (4.5) resulta ser

$$p_x(L)\phi(L) - p_x(0)\phi(0) - \int_0^L p_x\phi_x dx + k^2 \int_0^L p\phi dx = 0.$$

$$j\omega\rho\phi_i(L)u_M - \int_0^L p_x\phi_x dx + k^2 \int_0^L p\phi dx = 0. \quad (4.6)$$

La formulación variacional del problema (4.1) es entonces, determine  $p \in H^1(\Omega)$  tal que,

$$- \int_0^L p_x\phi_x dx + k^2 \int_0^L p\phi dx = j\omega\rho\phi_i(L)u_M \quad \forall \phi \in H^1(\Omega). \quad (4.7)$$

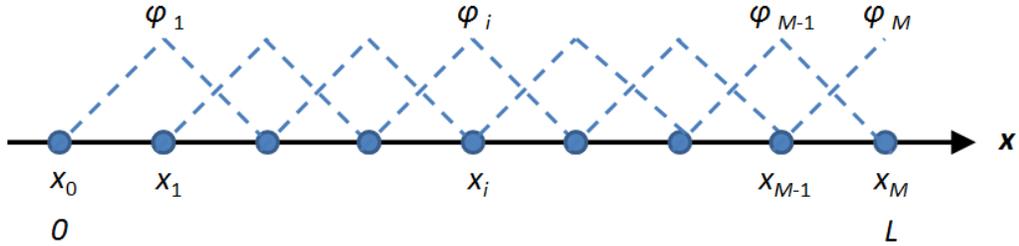
Para obtener su discretización consideramos una partición  $\{x_0 < x_1 < \dots < x_M\}$  del intervalo  $[0, L]$  sobre ésta se definen las siguientes funciones base que generan un espacio  $V_h$  de dimensión  $M$  que consta de funciones lineales a trozos en dicho intervalo.

Entonces las funciones base  $\phi_i(x)$  son:

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{\Delta x} & \text{Para } x_{i-1} \leq x < x_i \\ \frac{x_i-1-x}{\Delta x} & \text{Para } x_i \leq x < x_{i+1} \\ 0 & \text{otros y fuera de } \Omega \end{cases} \quad (4.8)$$

Las bases asociadas se muestran en la figura 4.2.

**Figura 4-2:** Funciones de forma para un sistema 1D para  $0 \leq x \leq L$ .



Ahora se aproxima  $p$  por  $p_h \in V_h$  tal que,

$$p_h(x) = \sum_{j=1}^m p_j \phi_j \quad \text{con } p_j = p(x_j). \quad (4.9)$$

$$p_{h_x} = \sum_{j=1}^m p_j \phi_{j_x}(x). \quad (4.10)$$

Reemplazando (4.9) y (4.10) en la forma variacional se obtiene el siguiente problema discreto encuentre  $p_h \in V_h$  para todo  $\phi \in V_h$  tal que

$$\sum_{j=1}^M \left[ -p_j \int_0^L \phi_{i_x} \phi_{j_x} dx + k^2 p_j \int_0^L \phi_i \phi_j dx \right] = j \omega \rho \phi_i(L) u_M. \quad (4.11)$$

con  $i = 1, \dots, M$ .

Ya que las integrales de (4.11) son válidas solo a través las funciones de forma, se reemplaza en la integral la definición dada en (4.8).

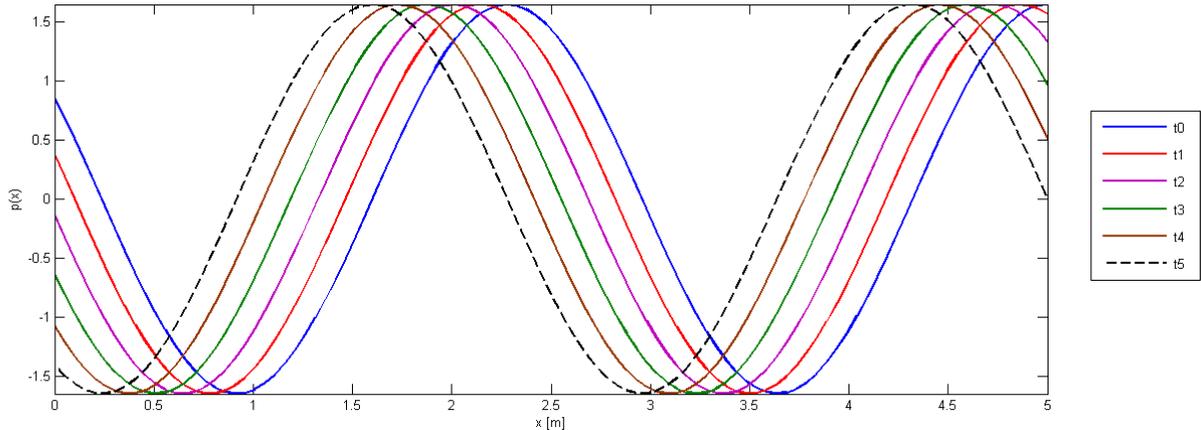
$$\int_0^L \phi_{i_x} \phi_{j_x} dx = \begin{cases} \frac{1}{\Delta x}, & \text{para } j = i - 1, \\ \frac{-2}{\Delta x}, & \text{para } j = i, \\ \frac{1}{\Delta x}, & \text{para } j = i + 1, \\ 0 & \text{si } |i - j| > 1. \end{cases} \quad (4.12)$$

$$\int_0^L \phi_i \phi_j dx = \begin{cases} \frac{\Delta x}{6}, & \text{para } j = i - 1, \\ \frac{4\Delta x}{6}, & \text{para } j = i, \\ \frac{\Delta x}{6}, & \text{para } j = i + 1, \\ 0 & \text{si } |i - j| > 1. \end{cases} \quad (4.13)$$







**Figura 4-7:** Presión Sonora en Tubo con fuente y extremo Sommerfeld.

Para este caso se observa la onda sonora viajera (de izquierda a derecha).

Este ejemplo de estudio representa un refinamiento del modelo analizado para la CF abierta (sección 4.2.1.), pues la condición fija describe un caso ideal, en cambio, incorporar la CF de Sommerfeld se atiene de forma más acertada al fenómeno acústico y lo que realmente sucede, pues en el extremo de salida (costado izquierdo) la propagación sonora continúa y tal y como se describe en la sección 2.3.1. la CF de radiación Sommerfeld permite describir matemáticamente la condición física del problema donde existe divergencia de la onda sonora hacia el exterior.

### 4.3. Silenciador con cámara de expansión, Modelo 2D – FEM.

En este aparte se presenta el caso de estudio general, corresponde a la solución mediante el método FEM del problema de acústico bidimensional para un silenciador de una cámara de expansión con paredes internas rígidas y con absorción.

La propagación sonora al interior de un ducto se describe por medio de la ecuación de onda

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0, \text{ en } \Omega. \quad (4.25)$$

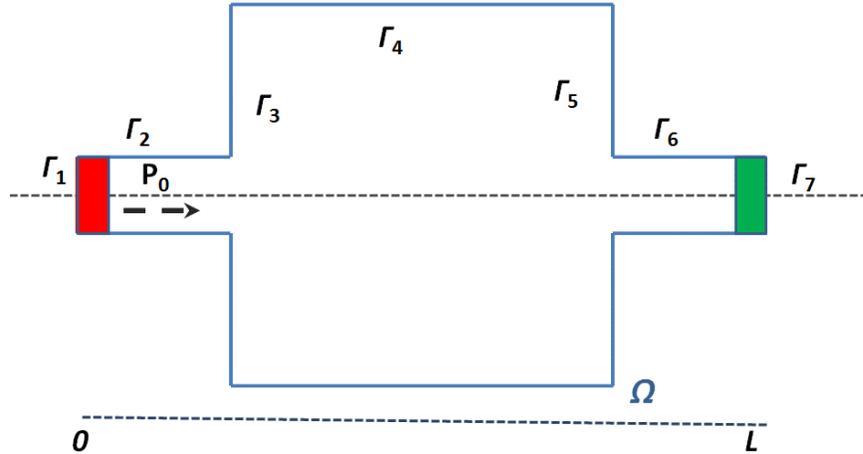
Con  $p$ , denotando la presión Sonora [Pa],  $c$  es la velocidad del sonido en el medio [m/s], y  $t$  el tiempo [s]. Considerando que la solución de (4.25) es armónica en el tiempo (Onda Plana) se tiene que la ecuación de onda acústica se reduce a la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0, \text{ en } \Omega. \quad (4.26)$$

, donde  $k$  es el número de onda [1/m] que representa la relación entre la frecuencia angular y la velocidad del sonido en el medio.

Con la formulación matemática del problema acústico definida se plantea a continuación el problema a resolver, ver Figura 4-8.

**Figura 4-8:** Esquema 2D Silenciador cámara de expansión FEM.



En la figura se denotan los bordes del modelo, se observa que el ducto es simétrico.

- **Condiciones de Frontera.**

Para el modelo analizado se tienen tres tipos de condiciones de frontera diferentes.

- I. Condición de Radiación de Sommerfeld: Dado que en los costados de entrada (marcado en color rojo) y salida del silenciador (marcado en color verde), el tubo es abierto se tienen condiciones de frontera de radiación sonora donde el frente de onda diverge al no encontrar un obstáculo.
- II. Condición de Pared Dura: Corresponde a la condición de reflexión sonora (aislamiento), pues la onda encuentra una pared contra la que choca y se refleja. Específicamente se trata de una Condición de Frontera Neumann, donde debido a la rigidez de la pared no existe cambio de presión en el borde.
- III. Condición de Impedancia: Esta aplica para el caso No. 2, se trata de un borde con recubrimiento interno absorbente, donde se tiene un cambio de medio y de densidad (cambio de material), lo cual se traduce en que el sonido al chocar contra este borde tendrá un efecto de amortiguamiento. Consiste en una Condición de Frontera Tipo Robin, donde hay pérdida de energía de acuerdo a la impedancia característica del recubrimiento.

- **Caso silenciador reactivo (paredes internas duras).**

Corresponde al primer escenario a analizar, a continuación se presenta la formulación matemática.

$$\begin{aligned} \nabla^2 p + k^2 p &= 0, \text{ en } \Omega. \\ -\vec{n} \cdot \left( \frac{-1}{\rho_0} \nabla p + \left( jk \frac{p}{\rho_0} \right) \right) &= (jk - j(\vec{k}\vec{n})) \frac{p_0}{\rho_0} e^{-j\vec{k}\vec{n}}, \text{ en } \Gamma_1 \text{ y } \Gamma_7. \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \vec{n}} = 0 \quad , \text{ en } \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5 \text{ y } \Gamma_6 . \quad (4.28)$$

La constante  $p_0$  en (4.27) es  $1Pa$  para  $\Gamma_1$ , borde de entrada donde se ubica la fuente, y en  $\Gamma_7$ , donde diverge la onda (borde de salida)  $p_0 = 20\mu Pa$  (Presión atmosférica). En las fronteras  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_7$  la condición es de Tipo Sommerfeld, y para los bordes correspondientes a las paredes duras del ducto se tiene una CF. Neumann, dada por la ecuación (4.28).

Luego de describir el problema acústico matemáticamente con la ecuación diferencial y las condiciones de fronteras para el caso de estudio se usa la técnica numérica para la solución.

Al resolver el problema por medio del método de elementos finitos, primero se multiplica la ecuación (4.28) por cualquier función  $\phi \in H^1(\Omega)$ , luego aplicando el Teorema de Green se obtiene la formulación débil.

Encuentre  $p \in H^1(\Omega)$  tal que,

$$\int_{\Gamma_1} \frac{\partial p}{\partial n} \phi \, dx + \int_{\Gamma_7} \frac{\partial p}{\partial n} \phi \, dx + \int_{\cup_{i=2}^6 \Gamma_i} \frac{\partial p}{\partial n} \phi \, dx - \int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla \phi \, dx + \int_{\Omega} k^2 p \phi \, dx = 0.$$

$$\forall \phi \in H^1(\Omega). \quad (4.29)$$

Para discretizar el dominio se construye una malla triangular  $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \dots, T_r\}$ , formada por  $r$  triángulos cerrados contenidos en  $\Omega$  tal que

$$\bar{\Omega} = \cup_{i=1}^r T_i. \quad h_i = \text{diam}(T_i). \quad h = \max_{i=1 \dots p} h_i .$$

Se denota por  $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  los vértices de la triangulación  $\mathcal{T}$ . Con la triangulación  $\mathcal{T}$  se asocia el espacio de funciones lineales continuas a trozos

$$V_h = \{v \in C(\bar{\Omega}) : \text{es lineal en } T \text{ para todo } T \in \mathcal{T}\}.$$

Además para cada  $j \in \{1, \dots, m\}$  introducimos las funciones  $\phi_j \in V_h$  tal que  $\phi_j(x_j) = 1$  y  $\phi_j(x_i) = 0$  para todo  $i \neq j$ , las cuales forman una base para  $V_h$ , por tanto

$$P(x) = \sum_{i=1}^m P_i \phi_i(x) \quad \forall P \in V_h. \quad (4.30)$$

Donde  $P_j = P(x_j)$  son los valores de  $P$  en los nodos.

Entonces teniendo en cuenta que los puntos internos del dominio van desde  $i = 1$  hasta  $m$ , el contorno (fronteras) se enumera desde  $m + 1$  hasta  $n$ , y reemplazando (4.29) en (4.30) se tiene el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\sum_{i=m+1}^n \int_{\partial\Omega} P_i \nabla \phi_i \phi_j - \sum_{i=1}^m \int_{\Omega} P_i \nabla \phi_i \nabla \phi_j + k^2 \sum_{i=1}^m \int_{\Omega} P_i \phi_i \phi_j = 0. \quad (4.31)$$

, para  $j=1 \dots n$ .

Denotando cada elemento de la triangulación  $\mathcal{T}$  por  $T_i$ , siendo elemento de la triangulación  $\mathcal{T}$ , se tiene:

La matriz de Rigidez es:

$$\hat{K}_{ij} = k^2 \int_{T_i} \nabla \phi_i \nabla \phi_j \, dx dy. \quad (4.32)$$

Y la matriz de Masa es:

$$\hat{M}_{ij} = \int_{T_i} \phi_i \phi_j \, dx dy. \quad (4.33)$$

, para  $i, j=1 \dots m$ .

La distancia horizontal entre los vértices de  $T$  es  $h_i$  y la altura es  $\sqrt{3}/2 h_i$ , por lo cual, las matrices locales de rigidez  $\hat{K}$  y de masa  $\hat{M}$  para cada triángulo están dadas por:

$$\hat{K} = \frac{\omega^2}{k^2 2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}. \quad \hat{M} = \frac{h_i^2 \sqrt{3}}{12} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.34)$$

Y  $\hat{F}$  esta dada por las integrales de (4.31) en los bordes

$$\int_{\Gamma_1} \frac{\partial p}{\partial n} \phi \, dx + \int_{\Gamma_7} \frac{\partial p}{\partial n} \phi \, dx + \int_{\cup_{i=2}^6 \Gamma_i} \frac{\partial p}{\partial n} \phi \, dx = \hat{F}. \quad (4.35)$$

Entonces como en  $\Gamma_2$  hasta  $\Gamma_6$  se que tiene  $\frac{\partial p}{\partial \vec{n}} = 0$ , las integrales sobre  $\Gamma_{i=2 \dots 6}$  son cero, luego (4.35) queda reducida a

$$\hat{F} = \int_{\Gamma_1} \frac{\partial p}{\partial n} \phi \, dx + \int_{\Gamma_7} \frac{\partial p}{\partial n} \phi \, dx. \quad (4.36)$$

Reemplazando (4.27) en (4.36), resulta

$$\hat{F} = \int_{\Gamma_1} -\vec{n} \cdot (jk)p + (ik - j(\vec{k}\vec{n})) p_0 e^{-j\vec{k}\vec{n}} \phi \, dx + \int_{\Gamma_7} -\vec{n} \cdot (jk)p + (ik - j(\vec{k}\vec{n})) p_0 e^{-j\vec{k}\vec{n}} \phi \, dx. \quad (4.37)$$

Con  $p_0 = 1Pa$  en  $\Gamma_1$ , y,  $p_0 = 20\mu Pa$  en  $\Gamma_7$ .

Ahora bien, sin pérdida de generalidad se considera que los nodos que están en la frontera se dividen de la siguiente manera. Los nodos de las paredes internas estarán numerados desde  $m+1$  hasta  $l$  y los nodos que corresponden a los extremos del silenciador se numeran para el extremo de entrada  $\Gamma_1$  desde  $l+1$  hasta  $q$  y para el borde de salida  $\Gamma_7$  desde  $q+1$  hasta  $n$ . Por lo tanto

$$\hat{F} = \sum_{l+1}^q \int_{\Omega} -\vec{n} \cdot (jk)p_i + (ik - j(\vec{k}\vec{n})) (1) e^{-j\vec{k}\vec{n}} \phi_i \phi_j + \sum_{q+1}^n \int_{\Omega} -\vec{n} \cdot (jk)p_i + (ik - j(\vec{k}\vec{n})) (20\mu) e^{-j\vec{k}\vec{n}} \phi_i \phi_j. \quad (4.38)$$

La forma general del sistema lineal resultante al implementar el método es:

$$-\widehat{K}\phi_i + \widehat{M}\phi_i = \widehat{F}. \quad (4.39)$$

Donde  $\widehat{K}$  y  $\widehat{M}$  son las matrices de rigidez y masa, respectivamente y  $\widehat{F}$  depende de las condiciones de frontera.

Las soluciones del método FEM para los modelos 2D se realizan usando el Software Comsol, los resultados de éste capítulo corresponden a elementos triangulares de bases lagrangianas cuadráticas (parámetros que usa el programa como estándar).

- **Casos de Estudio. Silenciador Reactivo.**

Tomando los ejemplos utilizados anteriormente para el método MMT se resuelven casos típicos para ductos usando FEM. Primero se calcula la atenuación de un tubo recto y como caso 2 se muestran los TL para el silenciador con cámara de expansión.

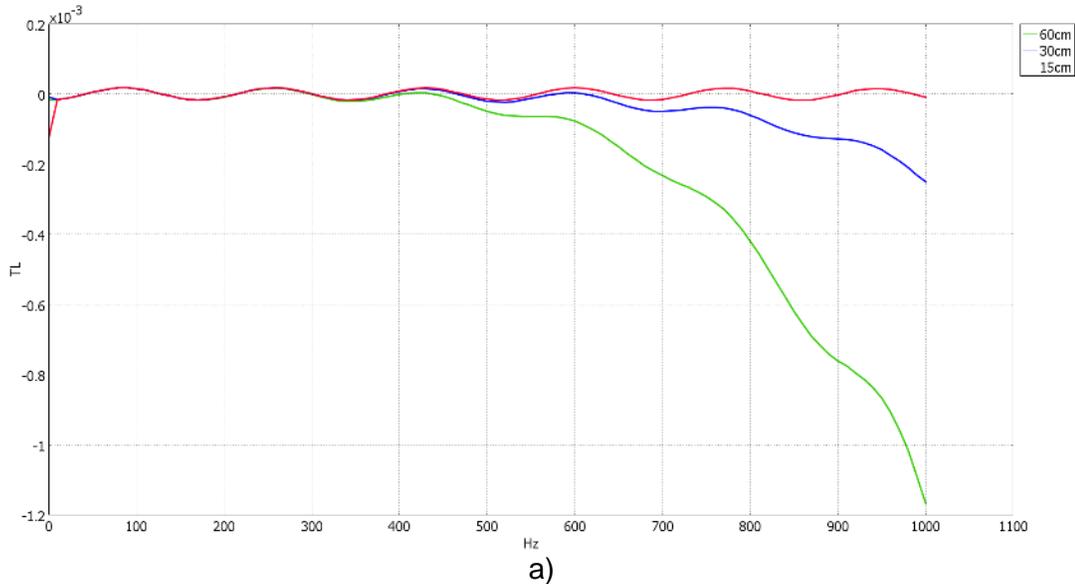
### 4.3.1. Caso 1. Tubo recto.

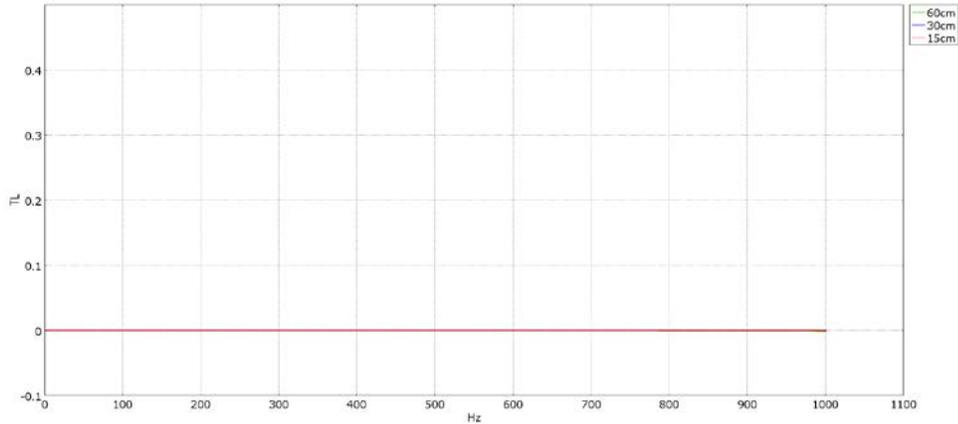
En las siguientes gráficas muestra la pérdida por transmisión sonora (TL en dB) para un ducto recto con paredes internas lisas y rígidas. Para el caso No. 1A. Se varía el radio del ducto y para el siguiente caso se varía la longitud del mismo.

- **Caso 1A. Tubo recto, variando diámetro.**

Longitud: 1m. Radio del ducto: variable. (Curvas) Rojo, 15cm. Azul, 30cm. Verde, 60cm.

**Figura 4-9:** TL ducto recto con paredes duras – Caso 1, varía diámetro.





b)

La parte a) de la gráfica muestra el TL con un enfoque ampliado (Zoom), mientras en la parte b) se observa a una escala con unidades de 0,1dB. En general los valores coinciden con la simulación para este caso mediante el método MMT que se muestra en la sección 3.2.1. (TL Tubo recto), es decir, atenuación despreciable o nula.

Para la simulación se usaron los números de elementos y grados de libertad, que se muestran a continuación.

Diámetro (cm).	Elementos.	Grados de libertad.
15	62	149
30	82	191
60	160	353

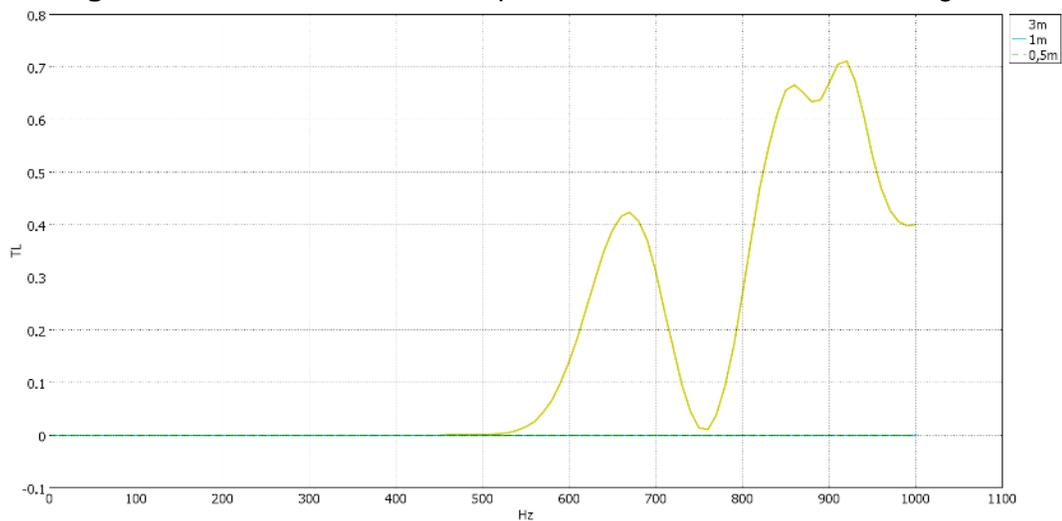
Esta información se mostrará para los demás casos donde se comparan diferentes geometrías.

**Caso 1B. Tubo recto, variando longitud.**

Radio del ducto: 0,3m

Longitud: variable. (Colores de Curvas) Verde, 0,5m. Cian, 1m. Amarillo, 3m.

**Figura 4-10:** TL ducto recto con paredes duras – Caso 2, varía longitud.



Se observa que mediante el método FEM para el caso de mayor longitud (3m) se logra una mínima atenuación (menor a 1dB) desde 500Hz. Para los otros casos la atenuación es cero.

Número de elementos y grados de libertad asociados al modelo.

Long. (m)	Elementos.	Grados de libertad.
0,5	268	557
1	128	287
3	46	117

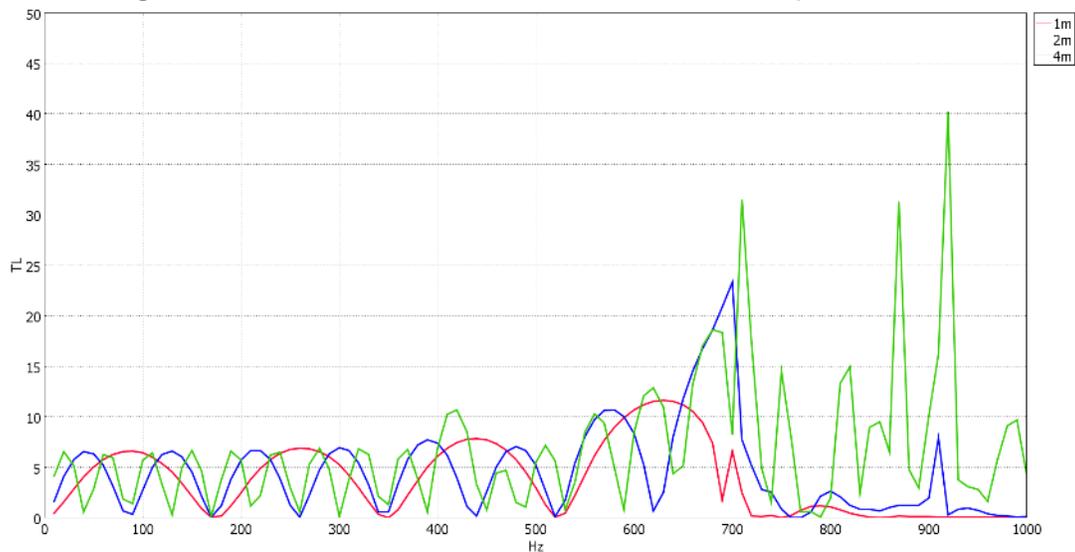
### 4.3.2. Caso 2. Silenciador de una cámara de expansión.

En las siguientes gráficas muestra la pérdida por transmisión sonora (TL en dB) para un ducto recto con paredes internas lisas y rígidas. Para el caso No. 1. Se varía el radio del ducto y para el segundo caso se varía la longitud del mismo.

#### 2A. Silenciador con una cámara de expansión, varía la longitud de la cámara.

Diámetros:  $D=0,6m$ ,  $d=0,3m$ . Longitud ductos de entrada y salida,  $l_T = 0,5m$ .  
Longitudes de cámara: Variable. Rojo:  $L_c=1m$ . Azul:  $L_c=2m$ . Verde:  $L_c=4m$ .

Figura 4-11: TL FEM Silenciador con cámara de Expansión – Caso 2A.



En la siguiente tabla se mencionan la cantidad de elementos y sus grados de libertad asociados para los cálculos de TL de la anterior gráfica.

Long. de cámara (m)	Elementos.	Grados de libertad.
1	87	214
2	107	268
4	114	307

En la figura 4-11 los TL simulados por FEM en general coinciden con los obtenidos por MMT (ver figura 3-8) en términos de magnitud en el rango de interés, sin embargo, se hace evidente la Fc (restricción que no tiene en cuenta MMT).

Físicamente los TL obtenidos mediante FEM se explican cómo se menciona previamente en el documento como interferencias debidas a reflexiones en el dominio originadas por las CF de pared dura (Ecuación 4.28).

**2B. Silenciador con una cámara de expansión, varía diámetro de ductos.**

Longitud ductos de entrada y salida,  $l_T = 0,5m$ . Longitud de cámara:  $L_c=1m$ .

Diámetros: Variables.

Rojo,  $D=0,3m$ ,  $d=0,15m$ .

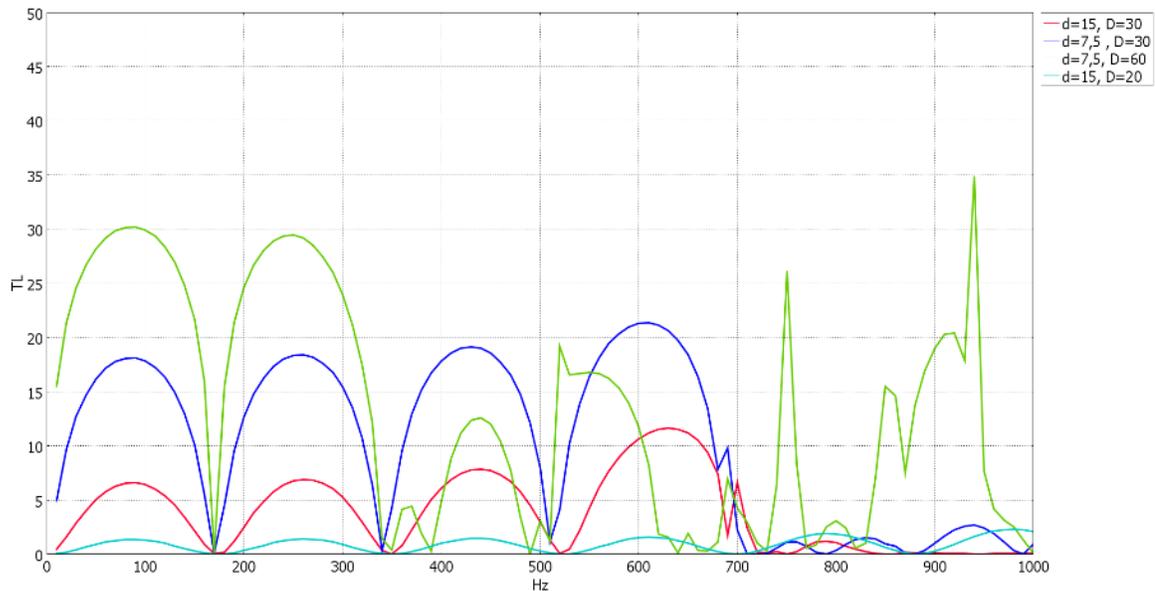
Azul,  $D=0,3m$ ,  $d=0,075m$ .

Verde,  $D=0,6m$ ,  $d=0,075m$ .

Cian,  $D=0,2m$ ,  $d=0,15m$ .

La siguiente gráfica permite comparar los TL resultantes con FEM con la figura 3-9 que muestra las curvas TL simulados con el método MMT para los mismos casos de estudio. Como se menciona en el ejemplo anterior la mayor diferencia es la clara influencia de la frecuencia de corte es en FEM.

**Figura 4-12: TL FEM Silenciador con cámara de Expansión – Caso 2B.**



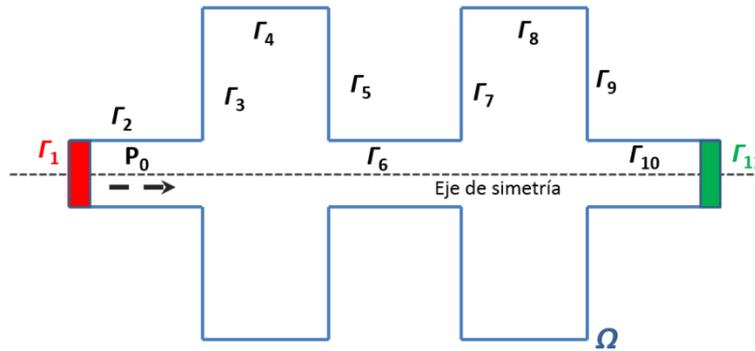
Ducto	# de Elementos.	# de grados de libertad.
<b>D=0,3m, d=0,15m.</b>	87	214
<b>D=0,3m, d=0,075m.</b>	98	243
<b>D=0,6m, d=0,075m.</b>	131	312
<b>D=0,2m, d=0,15m.</b>	113	270

### 4.3.3.Caso 3. Silenciador de una cámara vs doble cámara de expansión.

- **Caso silenciador reactivo con doble cámara de expansión.**

Este modelo tiene una formulación igual a la presentada en la sección 4.3, en las ecuaciones (4.27) y (4.28) Silenciador reactivo con una cámara de expansión, pues todas las paredes son duras lo único que varía es la forma, es decir, la cantidad de fronteras.

**Figura 4-13:** Esquema 2D silenciador con doble cámara de expansión.



Formulación matemática correspondiente

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0, \text{ en } \Omega.$$

$$-\vec{n} \cdot \left( \frac{-1}{\rho_0} \nabla p + \left( jk \frac{p}{\rho_0} \right) \right) = (jk - j(\vec{k}\vec{n})) \frac{p_0}{\rho_0} e^{-j\vec{k}\vec{n}}, \text{ en } \Gamma_1 \text{ y } \Gamma_{11}.$$

$$\frac{\partial p}{\partial \vec{n}} = 0, \text{ en } \Gamma_2 \cup \Gamma_{10}.$$

- **Comparación.**

Comparación silenciadores 2 silenciadores con doble cámara de expansión (curva de color azul) y con una cámara de expansión (curva de color rojo) para una misma longitud total y diámetros D y d.

Azul: Silenciador con doble cámara de expansión.

Longitud ductos de entrada y salida,  $l_1 = l_2 = l_3 = l_T = 0,2\text{m}$ .

Longitud ducto intermedio,  $l_2 = 0,2\text{m}$ .

Longitud de cámaras:  $L_{c1} = L_{c2} = L_c = 0,4\text{m}$ .

Diámetros ductos de entrada y salida:  $d_1 = d_2 = d_3 = d = 0,2\text{m}$ .

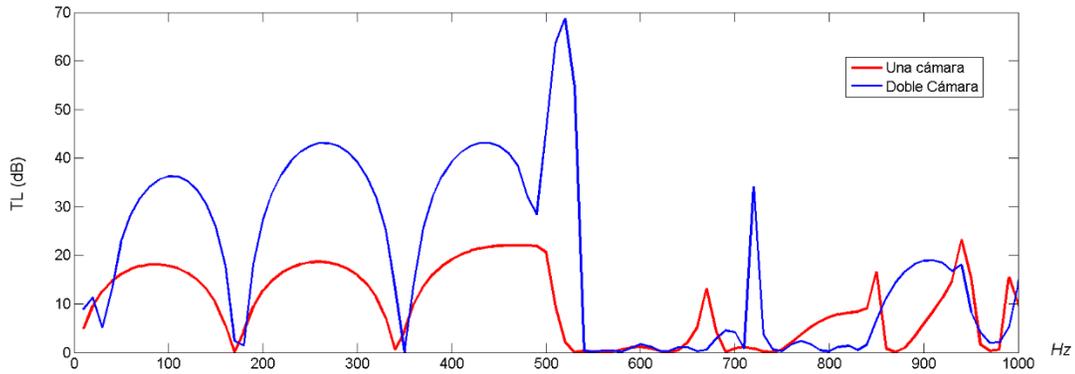
Diámetros cámara:  $D_1 = D_2 = D = 0,8\text{m}$ .

Rojo: Silenciador con una cámara de expansión.

Longitud ductos de entrada y salida,  $l_T = 0,2\text{m}$ . Longitud de cámara:  $L_c = 1\text{m}$ .

Diámetros:  $D = 0,8\text{m}$ ,  $d = 0,2\text{m}$ .

**Figura 4-14:** TL doble cámara de expansión vs una cámara.



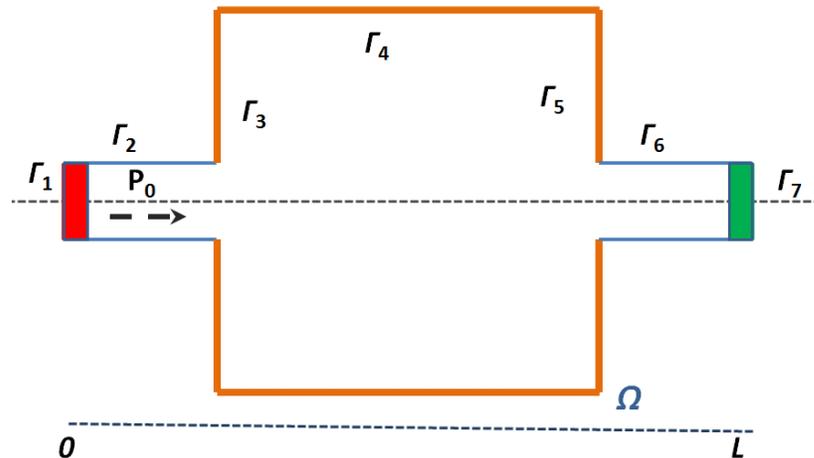
Ducto	# de Elementos.	# de grados de libertad.
Una cámara	139	332
Doble cámara	192	429

Este caso de silenciador combinado (doble reactivo) completa el análisis de TL para el método FEM con respecto a los casos presentados para silenciadores reactivos mediante MMT.

#### 4.4. Silenciador disipativo (paredes internas absorbentes).

Para modelar este escenario (refracción por absorción sonora) se recubren con material absorbente las paredes internas de la cámara de expansión (condición de frontera de impedancia), tipo de CF descrita en la sección 2.3.1.

**Figura 4-15:** Esquema 2D silenciador de cámara de expansión y CF de Impedancia.



La formulación matemática es igual que en el aparte anterior, en cuanto al dominio  $\Omega$  y las fronteras  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_6$  y  $\Gamma_7$ , mientras que para las paredes internas  $\Gamma_3, \Gamma_4$  y  $\Gamma_5$  se impone la siguiente condición de impedancia dada por (4.40), la formulación matemática para este caso es:

$$\begin{aligned} \nabla^2 p + k^2 p &= 0. , \text{ en } \Omega. \\ -\vec{n} \cdot \left( \frac{-1}{\rho_0} \nabla p + (jk) \frac{p}{\rho_0} \right) &= (ik - j(\vec{k}\vec{n})) \frac{p_0}{\rho_0} e^{-j\vec{k}\vec{n}}. , \text{ en } \Gamma_1 \text{ y } \Gamma_7. \\ \frac{\partial p}{\partial \vec{n}} &= 0. , \text{ en } \Gamma_2 \text{ y } \Gamma_6. \\ -1/\rho_0 (\nabla p \cdot n) - \frac{j\omega}{Z_c} p &= 0. , \text{ en } \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Donde  $Z_c$  denota la impedancia del material absorbente y está descrita por las ecuaciones de Delany-Bazley (2.18) y (2.19).

La forma variacional para el problema resulta ser: Determine  $p \in H^1(\Omega)$  tal que,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} \frac{\partial p}{\partial n} \phi \, dx + \int_{\Gamma_7} \frac{\partial p}{\partial n} \phi \, dx + \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma_6} \frac{\partial p}{\partial n} \phi \, dx + \int_{\cup_{i=3}^5 \Gamma_i} \frac{\partial p}{\partial n} \phi \, dx \\ - \int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla \phi + \int_{\Omega} k^2 p \phi = 0, \forall \phi \in H^1(\Omega). \end{aligned} \quad (4.41)$$

Entonces se llega a una forma débil igual a la encontrada en (4.31), solo que incluyendo en los bordes de la cámara la CF de impedancia, por lo cual el único término de la forma general mostrada en (4.35) que cambia es  $\hat{F}$ .

$$\hat{F} = \int_{\Gamma_1} \frac{\partial p}{\partial n} \phi \, dx + \int_{\Gamma_7} \frac{\partial p}{\partial n} \phi \, dx + \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma_6} \frac{\partial p}{\partial n} \phi \, dx + \int_{\cup_{i=3}^5 \Gamma_i} \frac{\partial p}{\partial n} \phi \, dx.$$

Reemplazando (4.40), se tiene

$$\hat{F} = \int_{\Gamma_1} \frac{\partial p}{\partial n} \phi \, dx + \int_{\Gamma_7} \frac{\partial p}{\partial n} \phi \, dx + \int_{\cup_{i=3}^5 \Gamma_i} \frac{j\omega\rho_0}{Z} p \phi \, dx. \quad (4.42)$$

Para discretizar la frontera se realiza una división de los nodos del contorno de acuerdo a las condiciones definidas. Entonces se numeran los nodos sobre la frontera de la siguiente manera:

Para las paredes rígidas:  $i$  va desde  $m + 1$  hasta  $l$ .

Para las paredes absorbentes:  $i$  va desde  $l + 1$  hasta  $q$ .

Para el extremo de entrada:  $i$  va desde  $q + 1$  hasta  $g$ .

Para el extremo de salida:  $i$  va desde  $g + 1$  hasta  $n$ .

Usando (4.35) y (4.39) y de acuerdo a la organización del contorno definida se halla  $\hat{F}$ .

$$\hat{F} = \sum_{l+1}^q \frac{j\omega\rho_0}{Z} \int_{\Omega} p_i \phi_i \phi_j + \sum_{q+1}^g \int_{\Omega} -\vec{n} \cdot (jk)p_i + (jk - j(\vec{k}\vec{n})) (1)e^{-j\vec{k}\vec{n}} \phi_i \phi_j + \sum_{g+1}^n \int_{\Omega} -\vec{n} \cdot (jk)p_i + (jk - j(\vec{k}\vec{n})) (20\mu)e^{-j\vec{k}\vec{n}} \phi_i \phi_j. \tag{4.43}$$

En la implementación de FEM para el presente proyecto se usa el software Comsol. Como es de interés estudiar la eficiencia de los silenciadores se debe calcular el TL mediante la siguiente relación:

$$TL = 10\log\left(\frac{W_o}{W_i}\right). \tag{4.44}$$

, donde  $W_o = \int_{\Gamma_{Salida}} \frac{|p|^2}{2\rho c_s}$ , en los casos anteriores es  $\Gamma_7$ .

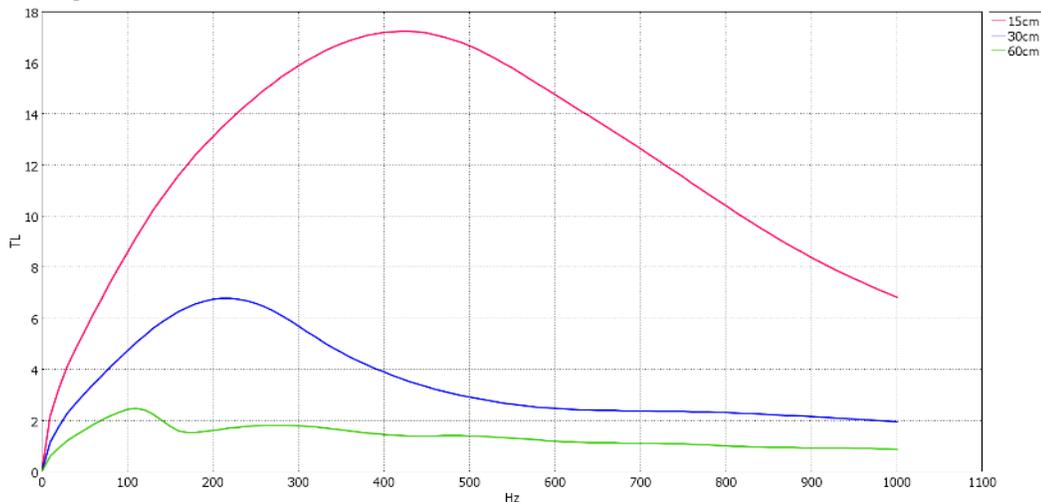
#### 4.4.1. Silenciador con CF de Impedancia.

En las siguientes gráficas muestra la pérdida por transmisión sonora (TL en dB) para un ducto recto con condición de frontera absorbente (Impedancia). Se toman los casos ya vistos en el método MMT.

- **Caso 1. Tubo recto condición de frontera absorbente, variando diámetro.**

Longitud: 1m. Resistencia al flujo del material absorbente: 14000Rayls. Radio del ducto: variable. (Colores de Curvas) Rojo, 15cm. Azul, 30cm. Verde, 60cm.

**Figura 4-16:** TL Ducto recto CF de Impedancia – Caso 1, varía diámetro.



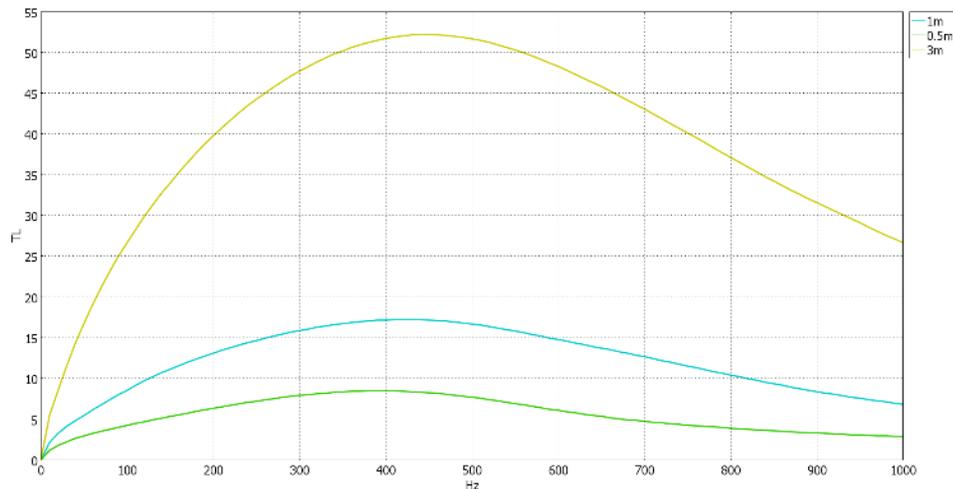
Diámetro (cm).	Elementos.	Grados de libertad.
15	62	149
30	82	191
60	160	353

De la gráfica anterior básicamente se pueden destacar dos condiciones, primero la importancia de la CF de impedancia en la atenuación sonora (dada por refracción, cambio a medio absorbente); en segundo lugar, se observa que al tenerse un conducto más estrecho la eficiencia del TL es mayor.

- **Caso 2. Tubo recto absorbente, variando longitud.**

Radio del ducto: 0,3m. Longitud: variable. (Colores) Verde, 0,5m. Cian, 1m. Amarillo, 3m.

**Figura 4-17:** TL Ducto recto CF de Impedancia – Caso 2, varía longitud.



Número de elementos y grados de libertad asociados al modelo simulado.

Long. (m)	Elementos.	Grados de libertad.
0,5	268	557
1	128	287
3	46	117

Se puede concluir que en el ejemplo de silenciador disipativo y sus resultados de pérdidas por transmisión se muestra claramente que para mejorar la atenuación se puede reducir el diámetro del ducto y aumentar su longitud.

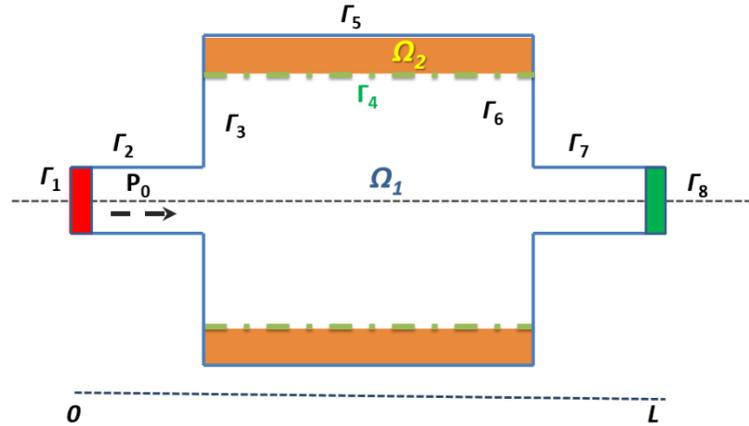
En el primer caso se mejora el TL por mayor cercanía entre bordes absorbentes y en el segundo al tener mayor longitud silenciada, es decir, más absorción.

#### 4.4.2. Silenciador con subdominio interno absorbente.

Corresponde a una condición más real del modelo respecto al caso anterior (silenciador con CF de impedancia) denotado en la sección 4.3.2. El método FEM y conocer el fenómeno estudiado permite este tipo de mejoras.

Este caso de estudio corresponde a un modelo refinado del problema pues cuando se incluye absorción en un silenciador se hace referencia más que a una pared a un material (recubrimiento) con determinado espesor y el borde (frontera del silenciador) continúa siendo duro y rígido.

**Figura 4-18:** Esquema 2D silenciador de cámara de expansión y subdominio absorbente.



La formulación matemática es la siguiente:

$$\nabla^2 p + k_1^2 p = 0. \quad , \text{ en } \Omega_1. \quad (4.45)$$

$$\nabla^2 p + k_2^2 p = 0. \quad , \text{ en } \Omega_2. \quad (4.46)$$

$$-\vec{n} \cdot \left( \frac{-1}{\rho_0} \nabla p + (jk_1) \frac{p}{\rho_0} \right) = (ik_1 - j(\vec{k}_1 \vec{n})) \frac{p_0}{\rho_0} e^{-j\vec{k}_1 \vec{n}}. \quad , \text{ en } \Gamma_1 \text{ y } \Gamma_8.$$

$$\frac{\partial p}{\partial \vec{n}} = 0 \quad , \text{ en } \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_5, \Gamma_6 \text{ y } \Gamma_7 .$$

$$\frac{\partial p}{\partial \vec{n}}_{\Omega_1} = \frac{\partial p}{\partial \vec{n}}_{\Omega_2} \quad , \text{ en } \Gamma_4. \quad (4.47)$$

Donde,

$\Omega_1$  es el aire,  $k_1$  corresponde al número de onda en el aire.

$\Omega_2$ , es el material absorbente,  $k_2$  ( $k_c$ ) corresponde al número de onda en el medio,  $k_c$  se relaciona con la velocidad de sonido en el recubrimiento, la densidad y la impedancia de éste así:  $k_c = \frac{\rho_c \omega}{Z_c}$ , y,  $k_c = \frac{\omega}{c_c}$ .  $k_c$  y  $Z_c$  se calculan usando la aproximación Delany-Bazley ya descrita y mencionada.

$\Gamma_4$ , corresponde a una frontera interior, y se da una condición llamada de continuidad o de interface, la cual acopla las ecuaciones de onda en el aire y en el material absorbente.

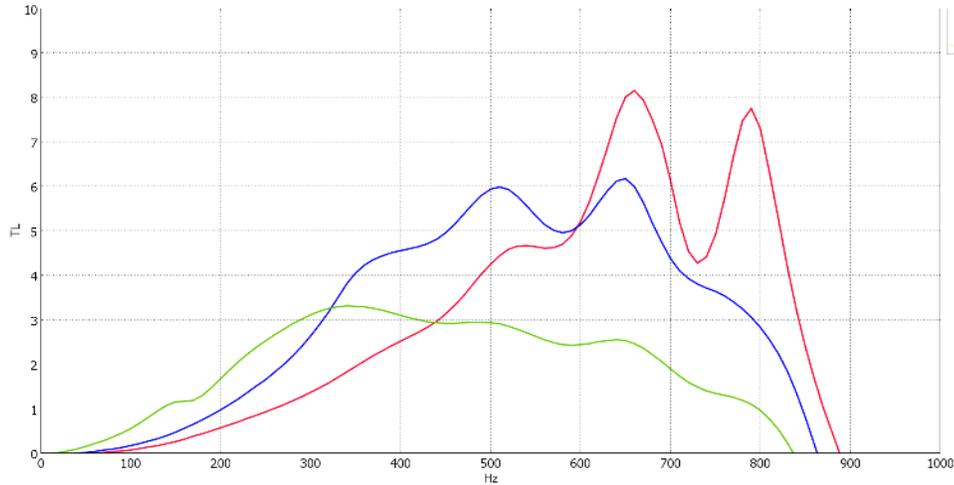
- **Tubo recto absorbente, variando diámetro.**

Longitud: 1m. Resistencia al flujo del material absorbente: 14000Rayls y espesor del recubrimiento=2,54cm

Radio del ducto: variable. (Colores de Curvas) Rojo, 15cm. Azul, 30cm. Verde, 60cm.

Los TL obtenidos en la gráfica que se muestra a continuación para este modelo refinado son menores con respecto a la figura 4-16, pueden considerarse resultados más conservadores que no sobreestiman la eficiencia del silenciador.

**Figura 4-19:** TL ducto recto con paredes absorbentes – caso1, varía diámetro.



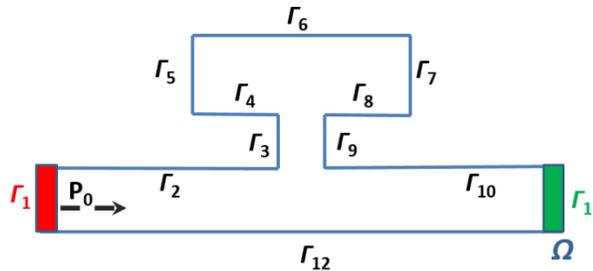
Número de elementos y grados de libertad asociados al modelo simulado.

Díámetro. (cm)	Elementos.	Grados de libertad.
15	814	1757
30	657	1408
60	735	1568

### 4.5. Silenciador Resonador de Helmholtz.

Su formulación resulta similar que para los casos de silenciadores reactivos, pues las CF son extremos abiertos y cerrados (Sommerfeld), y el resto de paredes rígidas (Newmann).

**Figura 4-20:** Esquema 2D Resonador de Helmholtz.



La formulación matemática es:

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0, \text{ en } \Omega.$$

$$-\vec{n} \cdot \left( \frac{-1}{\rho_0} \nabla p + \left( jk \frac{p}{\rho_0} \right) \right) = (jk - j(\vec{k}\vec{n})) \frac{p_0}{\rho_0} e^{-j\vec{k}\vec{n}}, \text{ en } \Gamma_1 \text{ y } \Gamma_{11}.$$

$$\frac{\partial p}{\partial \vec{n}} = 0, \text{ en } \Gamma_2 \cup \Gamma_{10}, \text{ y } \Gamma_{12}.$$

En las siguientes gráficas muestra la pérdida por transmisión sonora (TL en dB) para un silenciador tipo Resonador de Helmholtz. Para el caso No. 1. se varía la longitud del cuello y para el segundo caso se varía el radio del cuello.

• **Caso 1.**

Longitud del silenciador,  $L = 0,1\text{m}$ .

Altura del resonador:  $h = 48,5\text{mm}$ .

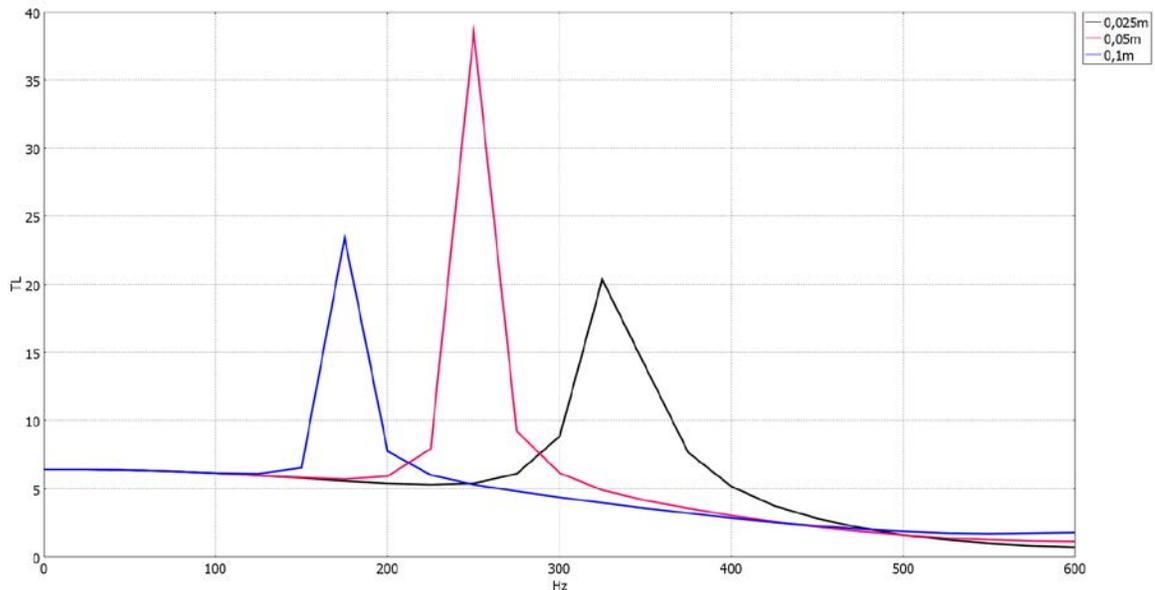
Diámetros del cuello:  $D = 10\text{mm}$ .

Diámetros del resonador  $20\text{mm}$ .

Diámetros del silenciador  $50\text{mm}$ .

Longitud del cuello, variable  $l = 25\text{mm}$ . **50mm**. **100mm**.

**Figura 4-21:** TL Resonador de Helmholtz, varía longitud del cuello - FEM.



Número de elementos y grados de libertad asociados al modelo simulado.

Longitud del cuello	Elementos.	Grados de libertad.
<b>25mm</b>	132	309
<b>50mm</b>	134	317
<b>100mm</b>	116	598

Para ese tipo de silenciador reactivo los resultados de TL calculados con FEM para el TL muestran el funcionamiento rechaza banda, sin embargo, en bajas frecuencias se observa una pequeña sobre estimación (a razón de 5 ó 6dB) de la atenuación sonora con respecto a lo visto en la sección 3.6 simulación por medio del método MMT. Por otra parte se tiene coincidencia en las frecuencias de resonancia, y en FEM el ancho de banda de la atenuación es mayor.

- **Caso 2.**

Longitud del silenciador,  $L = 0,1\text{m}$ .

Altura del resonador:  $h = 48,5\text{mm}$ .

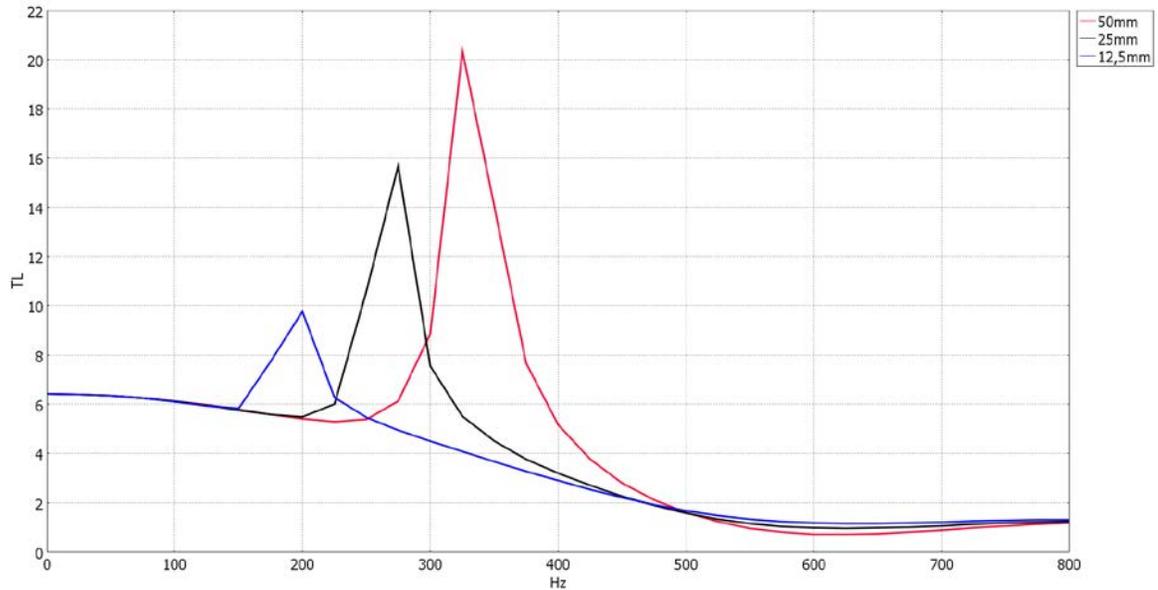
Diámetros del cuello:  $D = 10\text{mm}$ .

Diámetros del resonador  $20\text{mm}$ .

Longitud del silenciador  $25\text{mm}$ .

Diámetros del cuello, variable  $l = 12,5\text{mm}$ .  $25\text{mm}$ .  $50\text{mm}$ .

**Figura 4-22:** TL Resonador de Helmholtz, varía longitud cuello - FEM.



Diámetros del cuello	Elementos.	Grados de libertad.
<b>50mm</b>	121	1081
<b>25mm</b>	134	1224
<b>12,5mm</b>	297	1450

Para el caso de estudio del silenciador tipo resonador de Helmholtz los resultados en términos de TL calculados por FEM permiten concluir que las frecuencias de resonancia del resonador de Helmholtz calculadas mediante el método FEM, coinciden al variar la longitud en el caso No. 1 y el diámetro del cuello en el segundo caso con los cálculos mediante MMT.

Al aumentar el diámetro se obtiene una frecuencia de resonancia mayor, y ocurre de forma similar al disminuir la longitud del cuello conector del ducto y el resonador.

## 5. Análisis de resultados y comparación.

Los métodos FEM y MMT se resuelven para un rango de frecuencias con un intervalo definido, esto quiere decir que para el caso MMT se calcula para cada frecuencia de interés la matriz de transferencia y en el método FEM se resuelve la ecuación de onda por cada una de las frecuencias.

### 5.1. Validación de los modelos.

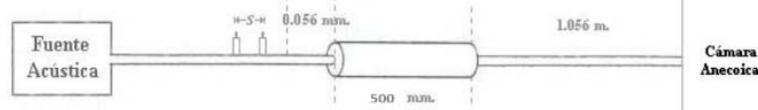
Para la validación se consideran diferentes tipos de silenciadores y se usan referencias bibliográficas con datos experimentales con el fin de verificar los valores calculados con los métodos FEM y MMT. A continuación se presentan 4 validaciones que corresponden a las 4 tipologías de silenciadores que se analizan en el presente trabajo.

Los montajes son medidos acorde a la norma ISO 11820 [69], los datos experimentales obedecen a test descritos por Tao (2003) [70].

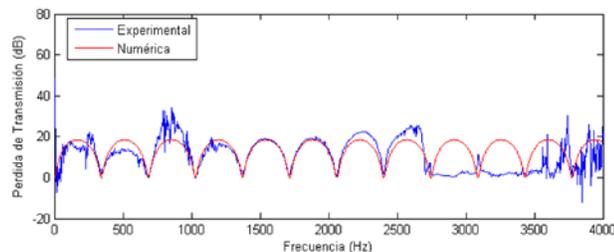
#### 5.1.1. Validación No. 1. Cámara Expansión.

Tipo de Silenciador: Reactivo con una cámara de expansión. En las siguientes imágenes se observa el caso tomado de literatura Aguayo(2005) [71] y sus resultados.

**Figura 5-1:** Esquema de montaje validación No. 1.



**Figura 5-2:** TL experimental del ensayo, validación No. 1.

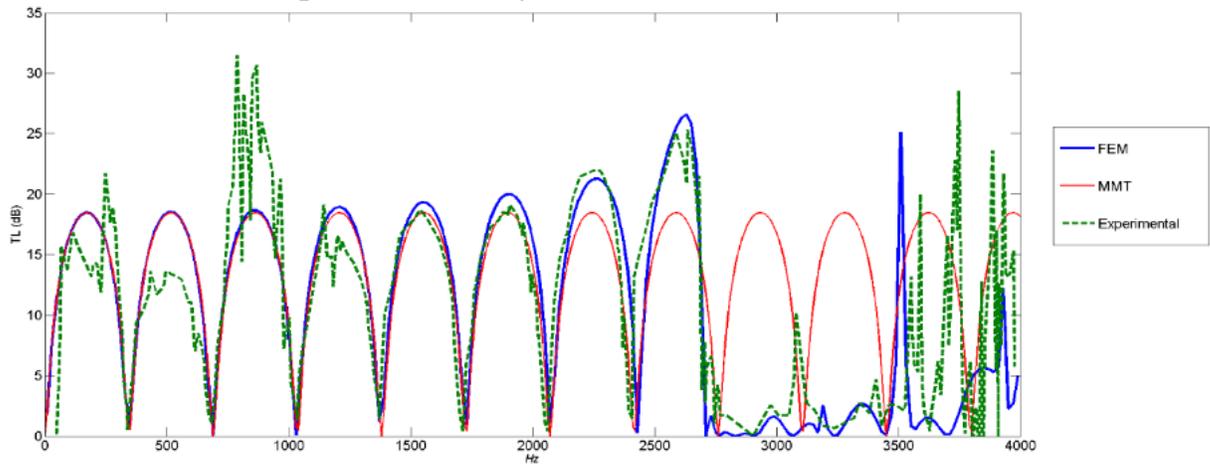


En color azul se muestran los datos experimentales y en color rojo los datos simulados por el método MMT por Aguayo (2005).

La geometría del silenciador medido corresponden a la figura 3-7 y sus parámetros son:  
 $D=0,1557\text{m}$ ,  $L_c=0,5\text{m}$ .  $d=0,0381\text{m}$ ,  $l_1 = l_2 = 0,06\text{m}$ .  
Rango de frecuencias de interés: 0 a 4kHz.

Para las simulaciones se emplean las formulaciones correspondientes a la tipología reactiva para silenciador de una cámara de expansión dadas por (3.30) para el método MMT y (4.26), (4.27) y (4.18) para FEM, como se explica en los anteriores capítulos las atenuaciones dependerán de las discontinuidades geométricas del modelo para MMT y de las interferencias por reflexiones internas dadas por las paredes duras del silenciador (CF Newmann) para FEM. Para el caso de estudio se obtienen los siguientes resultados.

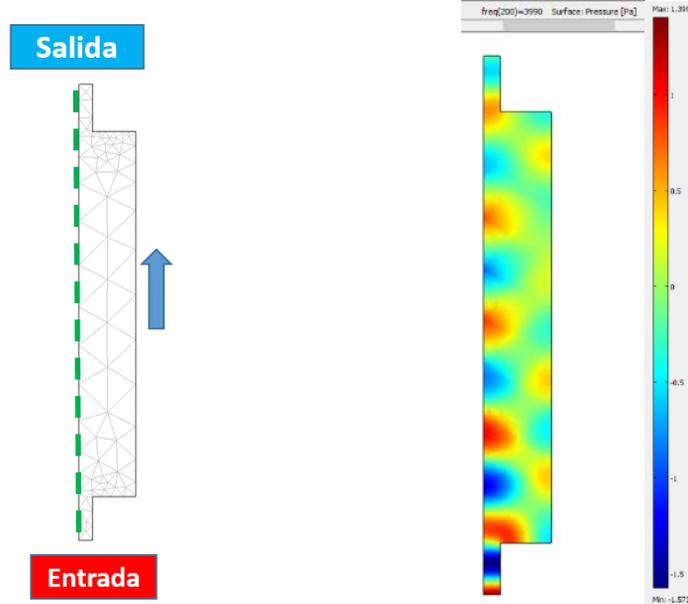
**Figura 5-3:** Comparación TL Validación No. 1.



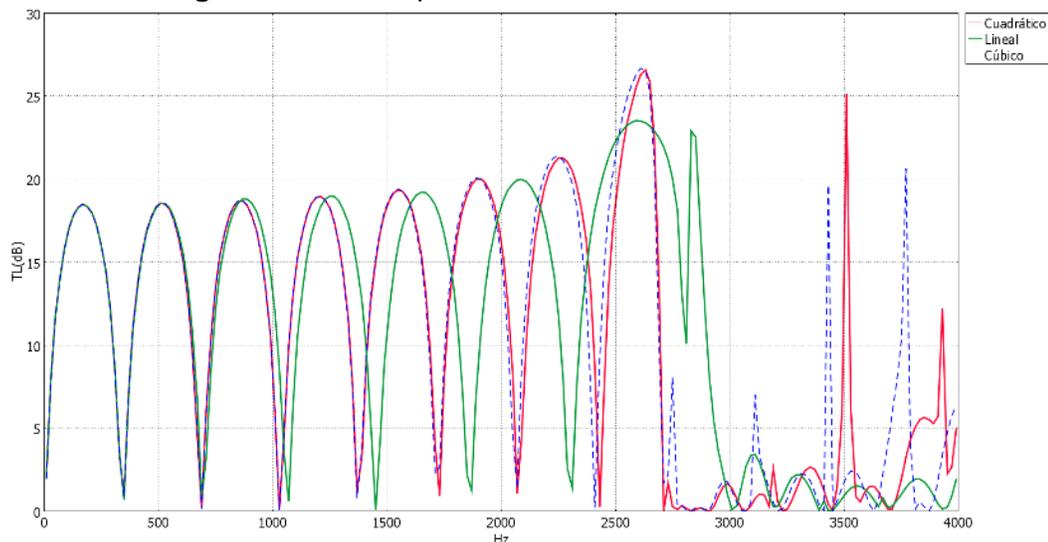
La gráfica anterior muestra los resultados de las simulaciones realizadas mediante los dos métodos comparando vs los datos medidos, se observa buena correspondencia de los métodos con los resultados experimentales. Los valores graficados de TL por FEM corresponden a bases cúbicas (la mejor correspondencia vs resultados experimentales de bibliografía), el modelo considerado para la simulación por el método de elementos finitos considera media geometría y condición de simetría en el software.

Dada la posibilidad de refinamiento que ofrece el método FEM y la facilidad de implementación y versatilidad del software empleado para la simulación numérica se realiza adicionalmente un análisis para diferentes grados de libertad de las bases del, entonces, se tienen en cuenta polinomios lagrangianos lineales, cuadráticos y cúbicos en la simulación de Comsol.

En la figura 5-4 se muestra la discretización del dominio mediante el método FEM (malla) y en el costado derecho se observa la solución del problema acústico para 3kHz, la gráfica muestra presión sonora en Pascales en el silenciador, según se observa en el extremo de entrada se tiene 1Pa y en el de salida 0,5Pa.

**Figura 5-4:** Enmallado y solución gráfica Validación No. 1.

Se calcularon los valores de TL por el método FEM en Comsol para los 3 diferentes órdenes de polinomios lagrangianos definidos y sus resultados se observan en la gráfica que sigue.

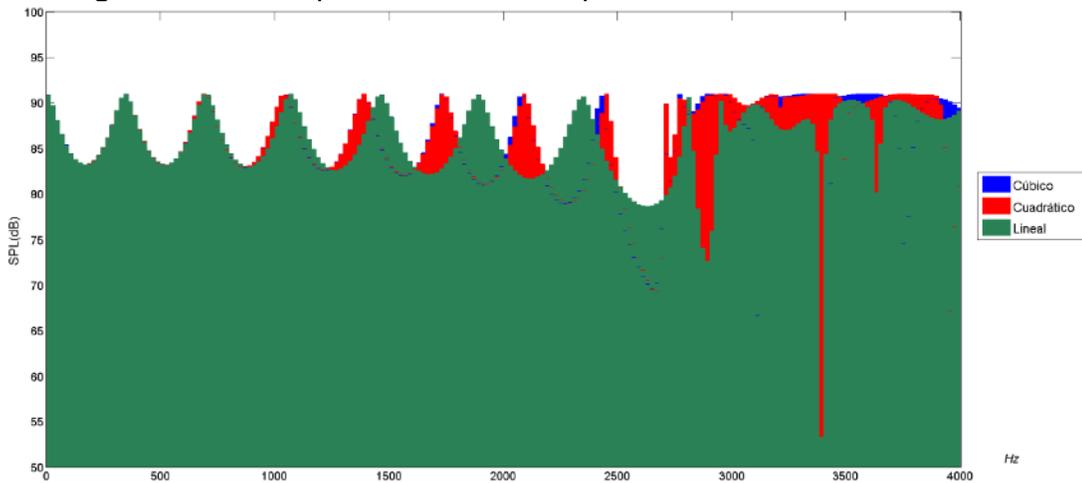
**Figura 5-5:** Comparación TL FEM - Validación No. 1.

El TL calculado mediante el método FEM en sus diferentes órdenes de base coincide para la frecuencia de corte del silenciador. La Fc para la validación No. 1 es= 2685Hz. Se observa que los valores de TL simulados con MMT no tienen en cuenta esta restricción física del modelo, por lo cual sobreestima la atenuación a partir de esta frecuencia.

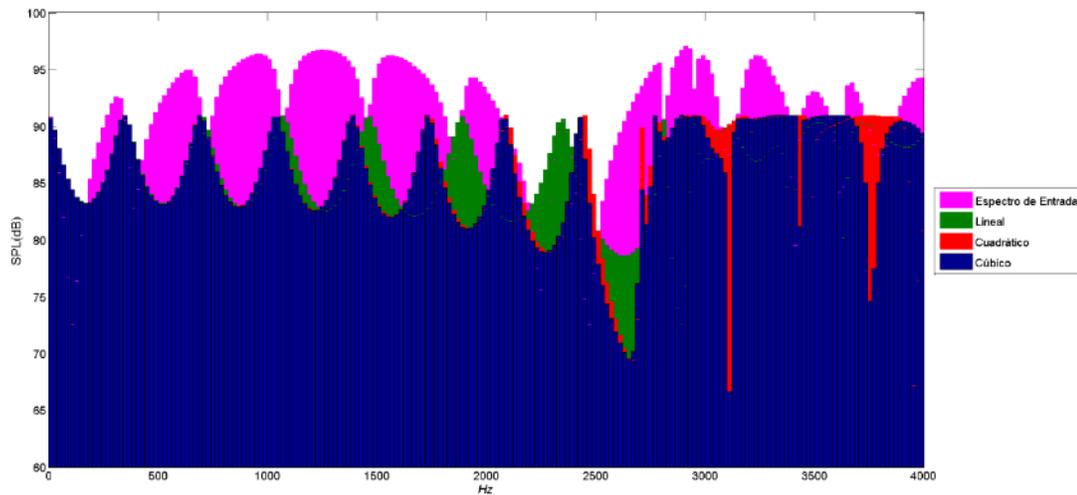
Otra forma de analizar la comparación de la atenuación obtenida por el silenciador para las 3 bases polinomiales de elementos finitos es graficando los espectros de ruido en el extremo de salida del dispositivo como se muestra a continuación. (El ancho de banda tomado es de 10Hz para el rango de interés).

En la parte b) de la gráfica se incluye el espectro de ruido en extremo de entrada (fuente de ruido a controlar).

**Figura 5-6:** Comparación TL FEM Espectros en extremos– Valid. No. 1.



a)



b)

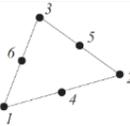
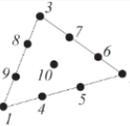
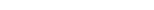
Las gráficas espectrales muestran los niveles de ruido en el eje X (niveles de presión sonora en dB) para las diferentes frecuencias (eje Y), y se observa muy claramente la correspondencia con las curvas de TL, siendo entre sí inversas, pues los picos de pérdidas por transmisión se traducen en puntos valle de ruido en dB en las gráficas de espectros, es decir, a mayores atenuaciones se logran menores niveles de ruido en el extremo de salida del silenciador.

El TL resultante para la comparación de los diferentes órdenes de las bases polinomiales muestra cierto desfase, que se debe a la presencia de los modos de resonancia

generados por el silenciador, estos corresponden a los valores propios del modelo discreto y los valores calculados dependen del refinamiento (picos y valles). Entonces, en teoría el resultado será mejor entre más se refine el modelo (solución más aproximada a fenómeno físico real), otra forma de entender los desfases es que en cuanto más refinado esté el modelo se tendrán más valores propios, por ende un mayor tamaño de matriz y más información.

La tabla 5-1 presenta un resumen de los grados de libertad asociados a los cálculos y resultados anteriores. Se observa que el tamaño del sistema lineal a resolver crece al aumentar el orden de las bases, esto también se traduce a mayor costo computacional para resolver el problema.

**Tabla 5-1:** Comparación Bases FEM - Validación No. 1.

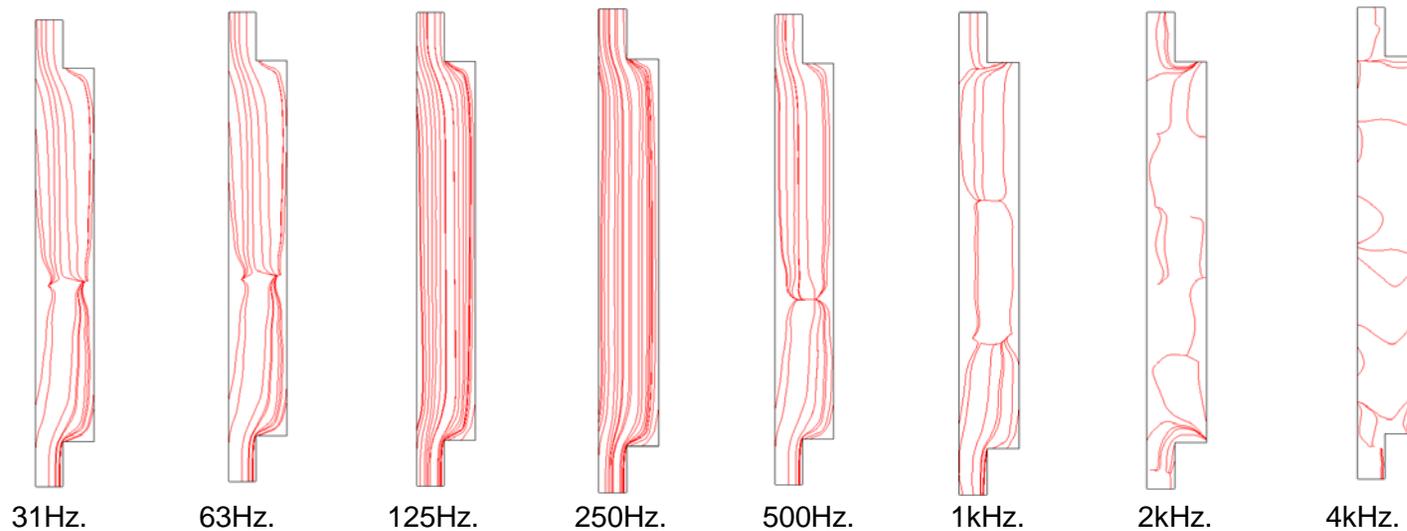
<b>Orden</b>	<b>No. de elementos</b>	<b>Grados de Libertad</b>	
 Lineal	121	85	
 Cuadrático		290	
 Cúbico		616	

Usando la solución simulada por el método FEM en el software Comsol se permite acceder a resultados complementarios que permiten analizar mejor el comportamiento sonoro en el caso de estudio, parte de estos datos se presenta en las dos graficas siguientes.

Vale la pena recordar que el modelo usado en Comsol es un modelo 2D con eje de simetría (media geometría), ver figura 5-4, donde la fuente de ruido está ubicada en el costado inferior (extremo de entrada) y el extremo de salida del silenciador se ubica en el costado superior, por lo tanto la propagación sonora se hace verticalmente desde abajo hacia arriba del modelo.

Se presentan dos tipos de gráficas, en la figura 5-7, se muestra el gradiente de presión sonora (gráfica tipo *streamline*); y en la figura 5-8, se observa la propagación en dB (niveles de presión sonora) en la superficie interna del dominio y también por medio de curvas de contorno al interior del silenciador.

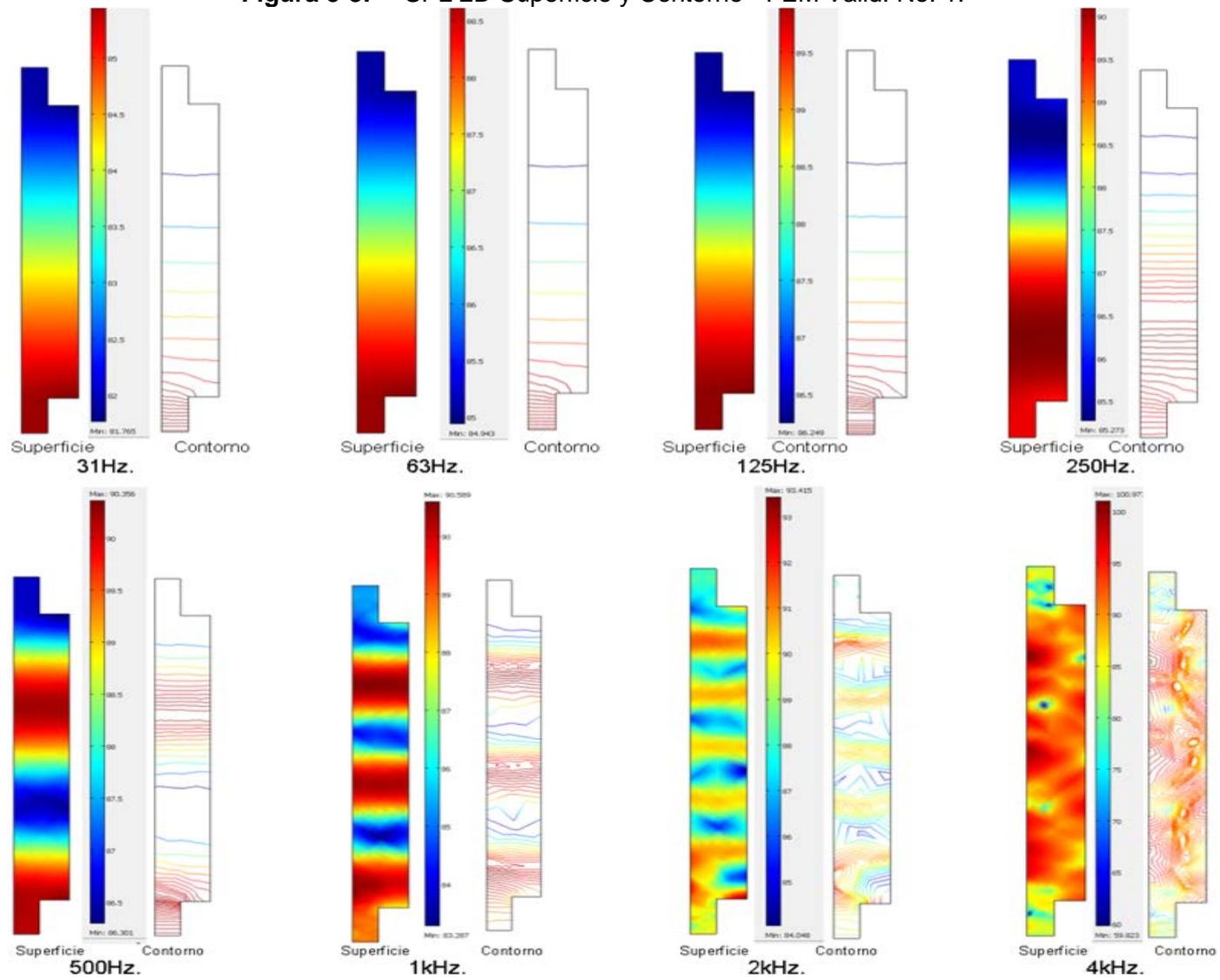
Para ambos tipos de gráficas se presentan los resultados para las bandas de octava en el rango de 31Hz a 4KHz.

**Figura 5-7:** Gradientes de presión - FEM Valid. No. 1.

En las gráficas 5-7 y 5-8 se observa la influencia de la longitud de onda en la propagación al interior del silenciador, así mismo se observan las resonancias provocadas por las reflexiones sonoras, de esta forma cabe destacar la importancia de las condiciones de frontera (Newmann: Pared dura) en el comportamiento sonoro al interior del silenciador.

En la figura 5-8 los modos de resonancia se observan con mayor claridad en las gráficas de contorno donde el color rojo representa interferencias constructivas (mayores niveles de presión sonora) y los espacios en blanco corresponden a antinodos (anulaciones). En frecuencias altas (entre 1kHz y 4kHz) debido a la longitud de onda viajera al interior del conducto (más corta) se observan con mayor claridad las resonancias.

**Figura 5-8:** SPL 2D Superficie y Contorno - FEM Valid. No. 1.



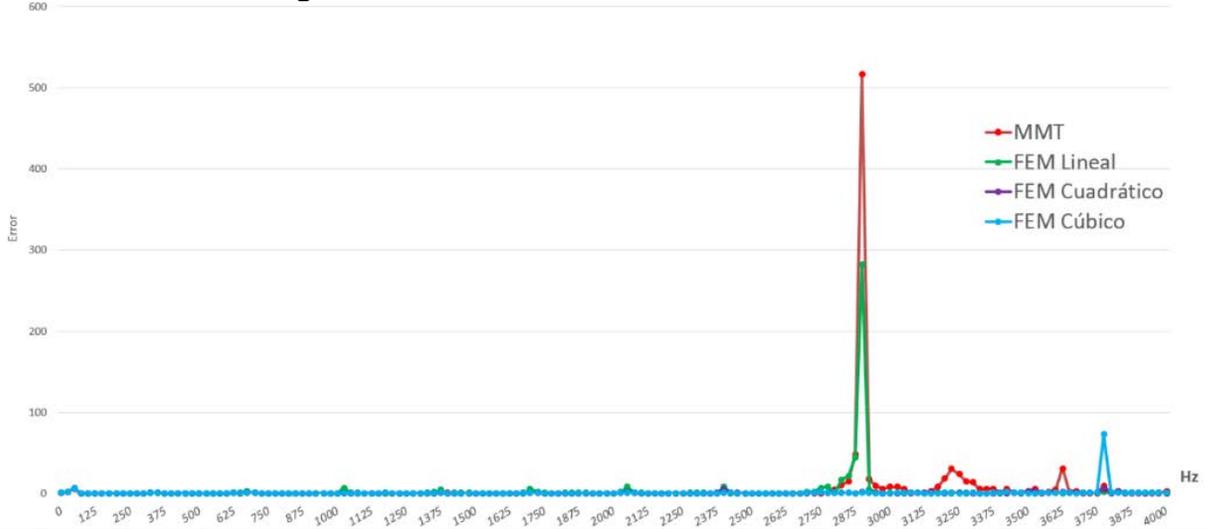
- **Error.**

Con el fin de observar de manera cuantitativa las comparaciones de los TL obtenidos por los dos métodos se calcula el error relativo de los resultados con respecto a los valores experimentales tomados de la bibliografía.

— **Error Relativo.**

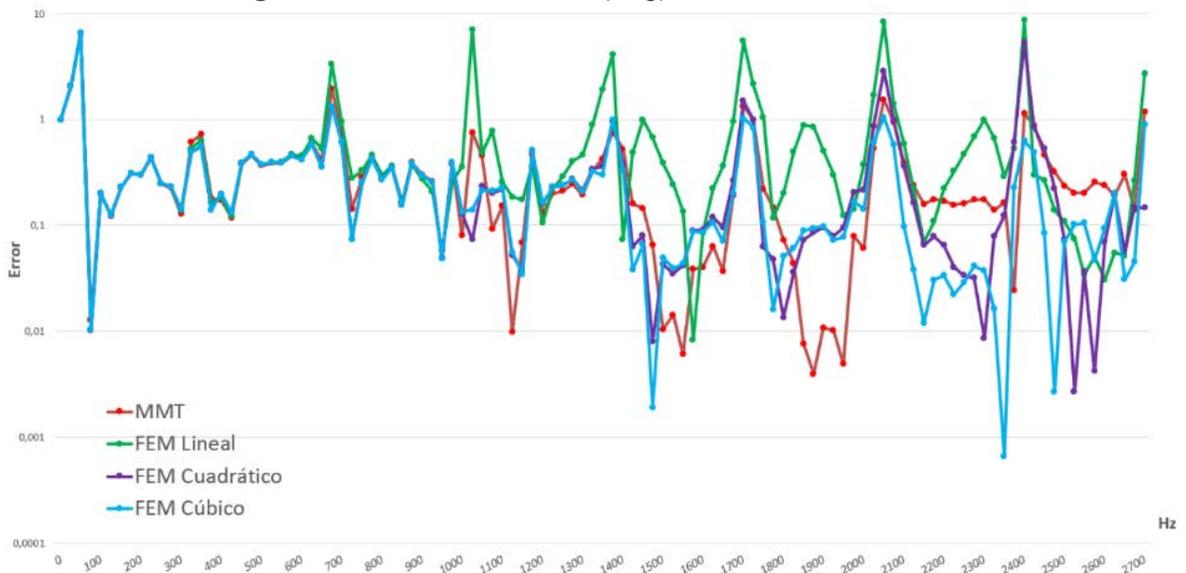
El error relativo busca apreciar de mejor manera la diferencia entre los resultados obtenidos por las simulaciones y los valores medidos, se toman valores cada 25Hz en el rango entre 0 y 4kHz. Se presentan 3 gráficas de error, la primera corresponde a error relativo, la segunda muestra este error en escala logarítmica y por último se grafica el error absoluto. , todas las figuras se presentan para el rango de frecuencias de interés.

**Figura 5-9:** Error Relativo - Validación. No. 1.



En la figura 5-8 se hace una acercamiento (zoom de 0Hz a 2700Hz) así mismo se fija el eje y con escala logarítmica buscando apreciar mejor el error.

**Figura 5-10:** Error Relativo (Log) - Validación. No. 1.



En general se logra una correspondencia entre el 0% y el 10% para los métodos. En los puntos críticos no existe coincidencia con los resultados experimentales (cabe mencionar que estos valores medidos también cuentan con incertidumbre correspondiente a los ensayos realizados por sus autores).

Se observa claramente que el mejor método es FEM cúbico. En resumen los resultados de error relativo promedio son:

**Tabla 5-2:** Errores promedio - Validación No. 1.

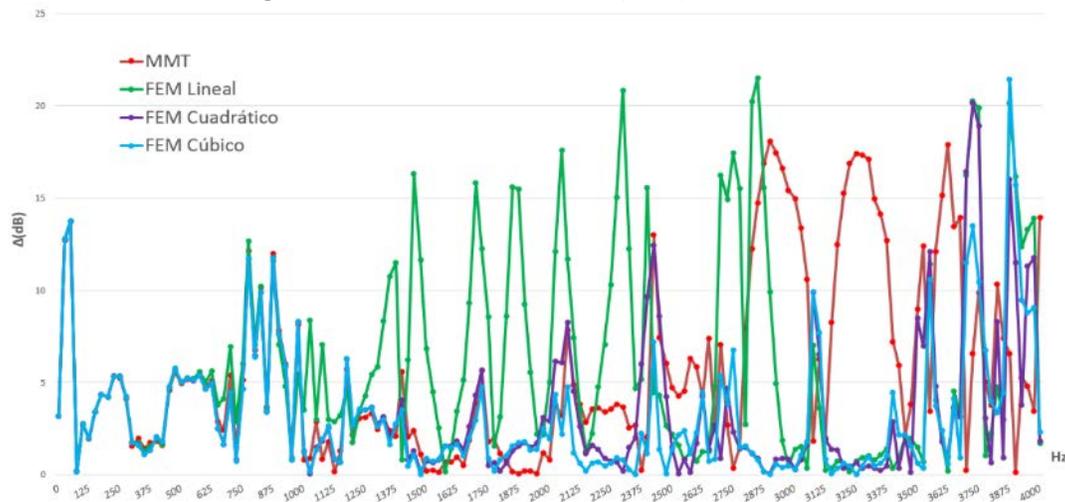
	<i>MMT</i>	<i>FEM Lineal</i>	<i>FEM Cuadrático</i>	<i>FEM Cúbico</i>
<b>Error relativo promedio</b>	5,69%	3,17%	0,58%	0,53%
<b>Error relativo promedio a partir de Fc</b>	15,89%	7,71%	0,89%	0,92%

El promedio se toma para el rango de interés.

#### — **Error Absoluto**

En términos de atenuación sonora definir márgenes de error porcentuales es difícil pues la interpretación atiende a niveles de presión sonora (dB), por esto se cuantifican a continuación las diferencias entre los resultados obtenidos de los TL simulados vs los datos medidos, es decir, se calcula el error absoluto.

**Figura 5-11:** Error Absoluto ( $\Delta$  dB) - Validación. No. 1.



**Tabla 5-3:** Error absoluto promedio ( $\Delta$  dB) - Validación No. 1.

	<i>MMT</i>	<i>FEM Lineal</i>	<i>FEM Cuadrático</i>	<i>FEM Cúbico</i>
Error Absoluto promedio ( $\Delta$ dB)	5,6	6,1	3,6	3,2
Error Absoluto promedio ( $\Delta$ dB) a partir de la Fc (dB)	9,6	6,3	4,0	3,7

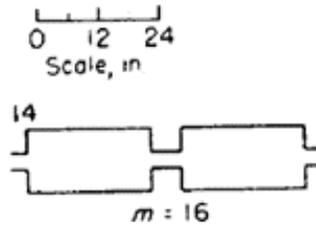
\* $\Delta$  promedio respecto a datos experimentales.

Los valores calculados de error absoluto muestra los márgenes de error en dB y porcentuales de los métodos simulados respecto a los valores experimentales para la validación No. 1. De acuerdo al análisis del error el TL simulado mediante el método FEM cúbico logra la mejor descripción del modelo físico para este caso comparativo. Se observa la eficiencia de los métodos en bajas frecuencias, las cuales son las más difíciles con controlar y las predominantes en los espectros de ruido de maquinaria.

### 5.1.2. Validación No. 2. Doble cámara de expansión.

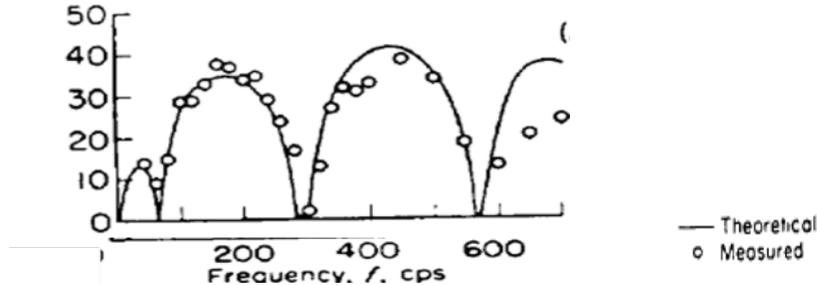
Tipo de Silenciador: Combinado. Silenciador reactivo con doble cámara de expansión. El montaje de referencia usado para esta validación corresponde al Montaje No.14 del reporte técnico Davis-Stokes (1954) [7].

Figura 5-12: Esquema de montaje - Validación. No. 2.



EL TL medido del montaje tomado como referencia experimental comparativa se muestra a continuación.

Figura 5-13: TL experimental del ensayo - Validación. No. 2.

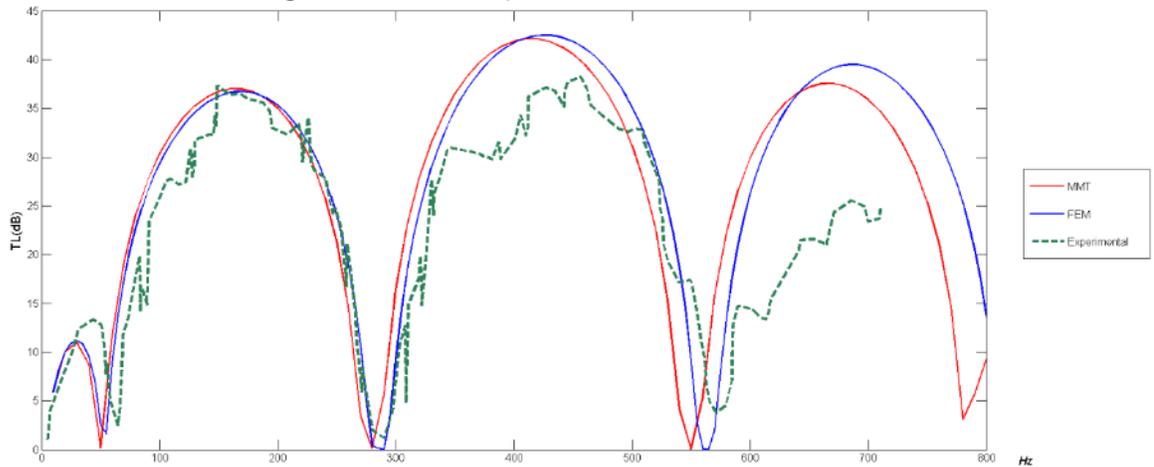


La geometría del silenciador medido corresponden a la figura 3-11 y sus parámetros son:  
 Longitud ductos de entrada y salida,  $l_1 = l_3 = 0,0762\text{m}$ .  
 Longitud ducto intermedio,  $l_2 = 2 l_1$ . Longitud de cámaras:  $L_{c1} = L_{c2} = L_c = 0,6096\text{m}$ .  
 Diámetros ductos de entrada y salida:  $d_1 = d_2 = d_3 = d = 0,0762\text{m}$ .  
 Diámetros cámara:  $D_1 = D_2 = D = 0,348\text{m}$ .

Para las simulaciones de este caso de estudio se emplean las formulaciones dadas por la ecuación (3.33) para el método de matriz de transferencia, y las ecuaciones (4.27) y (4.28) ecuación de Helmholtz y CF Newmann (Silenciador Reactivo) respectivamente para el método de elementos finitos. Los resultados obtenidos se muestran a continuación.

Los cálculos de TL obtenido con las simulaciones realizadas mediante MMT y FEM se comparan con los valores experimentales en la gráfica que se presenta a continuación.

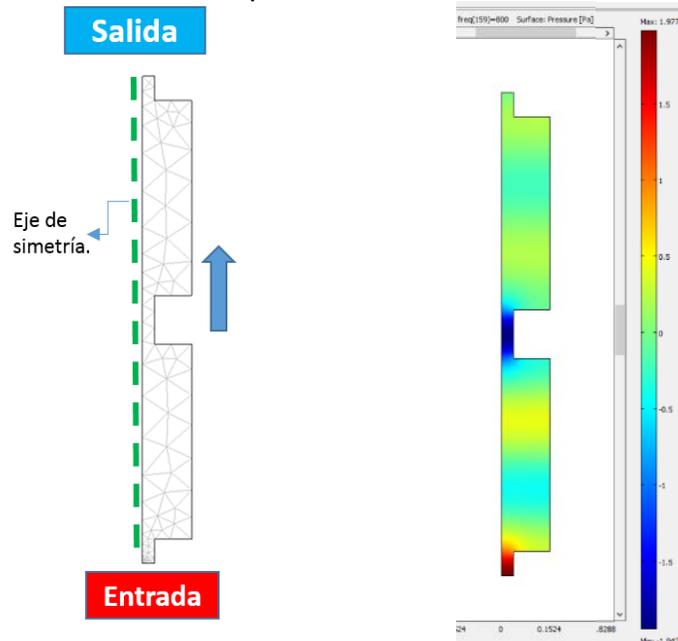
**Figura 5-14:** Comparación TL - Validación. No. 2.



Los valores experimentales y los resultados calculados por ambos métodos muestran buena correspondencia, lo que verifica validez con respecto a la bibliografía.

Usando la simulación con el método FEM se muestran los siguientes resultados.

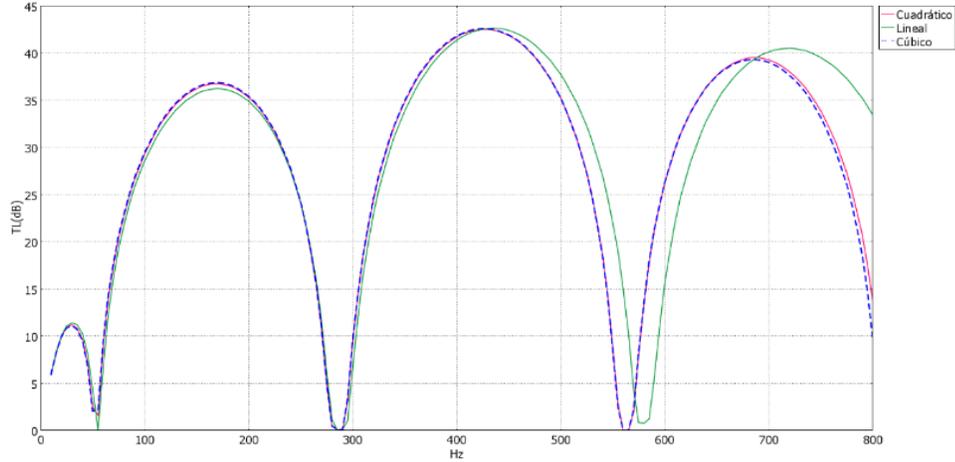
**Figura 5-15:** Simulación por FEM en Comsol - Validación. No. 2.



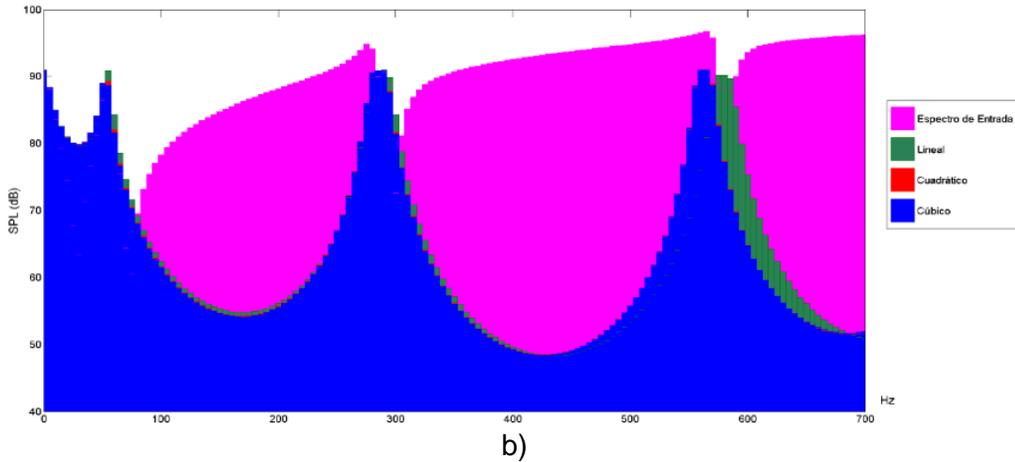
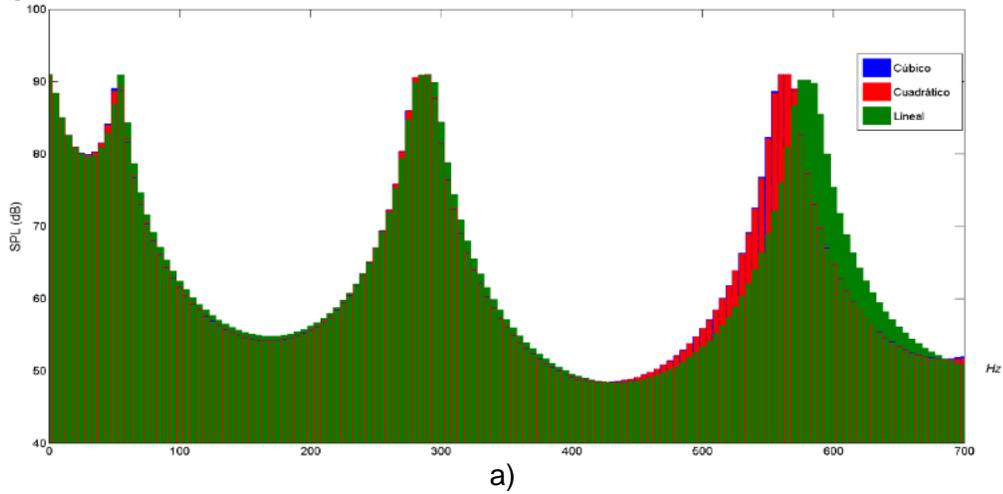
Se observa en el costado izquierdo de la imagen el enmallado para la simulación y en el costado la solución graficada en Comsol en 800Hz, muestra presión sonora en Pascales en el silenciador, según se observa en el extremo de entrada se tiene 1Pa y en el de salida 0,1Pa. Los resultados de la simulación de TL y los espectros en el extremo de salida para las bases lineal, cuadrática, cúbica se muestran en las figuras 5-14 y 5-15 respectivamente.

Como se realizó en el caso de la validación No. 1., se desarrolla de forma complementaria una comparación de resultados de los TL simulados mediante el método FEM para los 3 órdenes de las bases polinomiales.

**Figura 5-16:** Comparación TL FEM - Validación. No. 2.



**Figura 5-17:** Comparación TL FEM, espectros en extremos - Validación. No. 2.



Tal y como se vio en el caso de validación No. 1 existe una evidente coherencia en las gráficas de los espectros vs los TL simulados.

El número de elementos y los grados de libertad correspondientes a las bases simuladas se muestran en la Tabla 5-4.

**Tabla 5-4:** Comparación Bases FEM - Validación No. 2.

<b>Orden</b>	<b>No. de elementos</b>	<b>Grados de Libertad</b>	
<i>Lineal</i>	127	94	
<i>Cuadrático</i>		314	
<i>Cúbico</i>		661	

Se observa que el tamaño del sistema lineal a resolver aumenta al aumentar el orden de las bases.

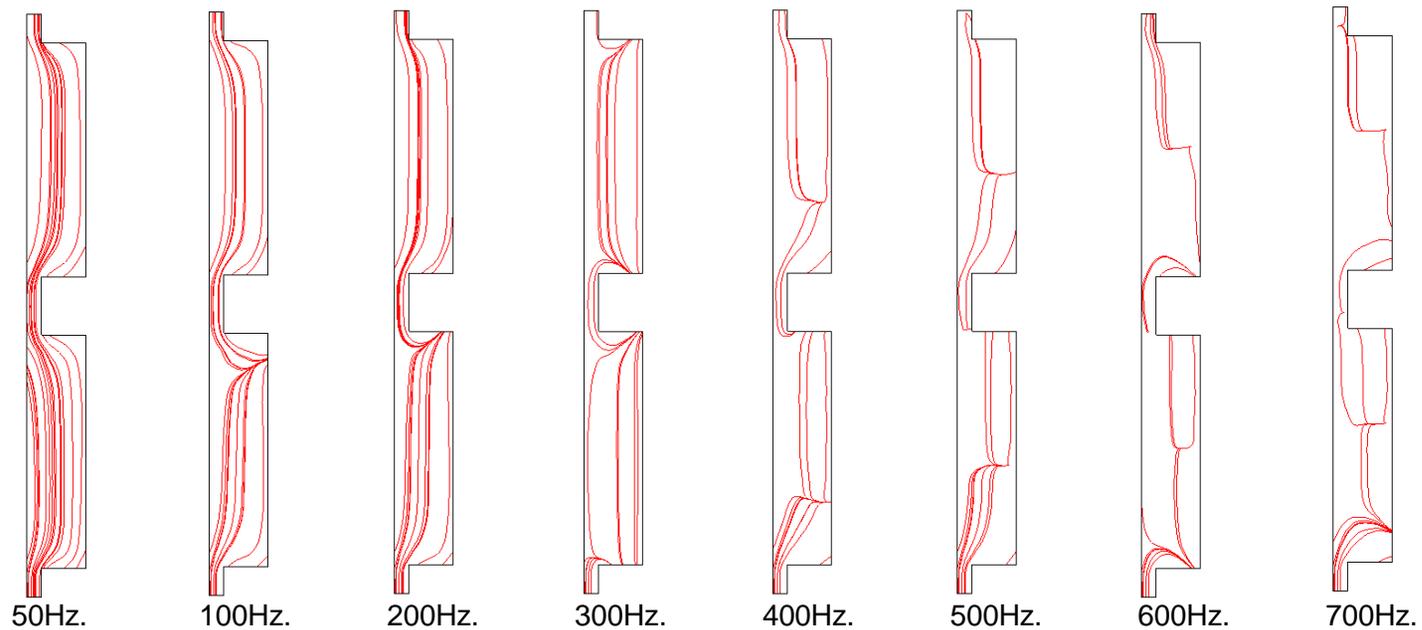
A continuación se presentan las gráficas de información complementaria ofrecida por la simulación usando FEM, se conserva la característica de un modelo 2D con eje de simetría (media geometría, ver figura 5-15), y de igual forma ubicaciones de fuente y extremo de salida.

Las gráficas presentadas muestran los resultados de las mismas variables, por tanto, el gradiente de presión sonora (gráfica tipo *streamline*) se observa en la en la figura 5-18, mientras que en la figura 5-19, se grafican en líneas contorno y textura de superficie los niveles de presión (dB) de la propagación sonora al interior del dominio.

Para ambos tipos de gráficas se presentan los resultados para las bandas de octava en el rango de 50Hz a 700Hz.

Este rango de acuerdo al rango de interés presentado en las gráficas de TL y a los datos experimentales disponibles de literatura.

La tipología del caso de validación No. 2 corresponde a una combinación de dos cámaras de expansión con paredes duras (CF), las atenuaciones de ruido se deben como para todo silenciador reactivo por las interferencias de las reflexiones sonoras internas.

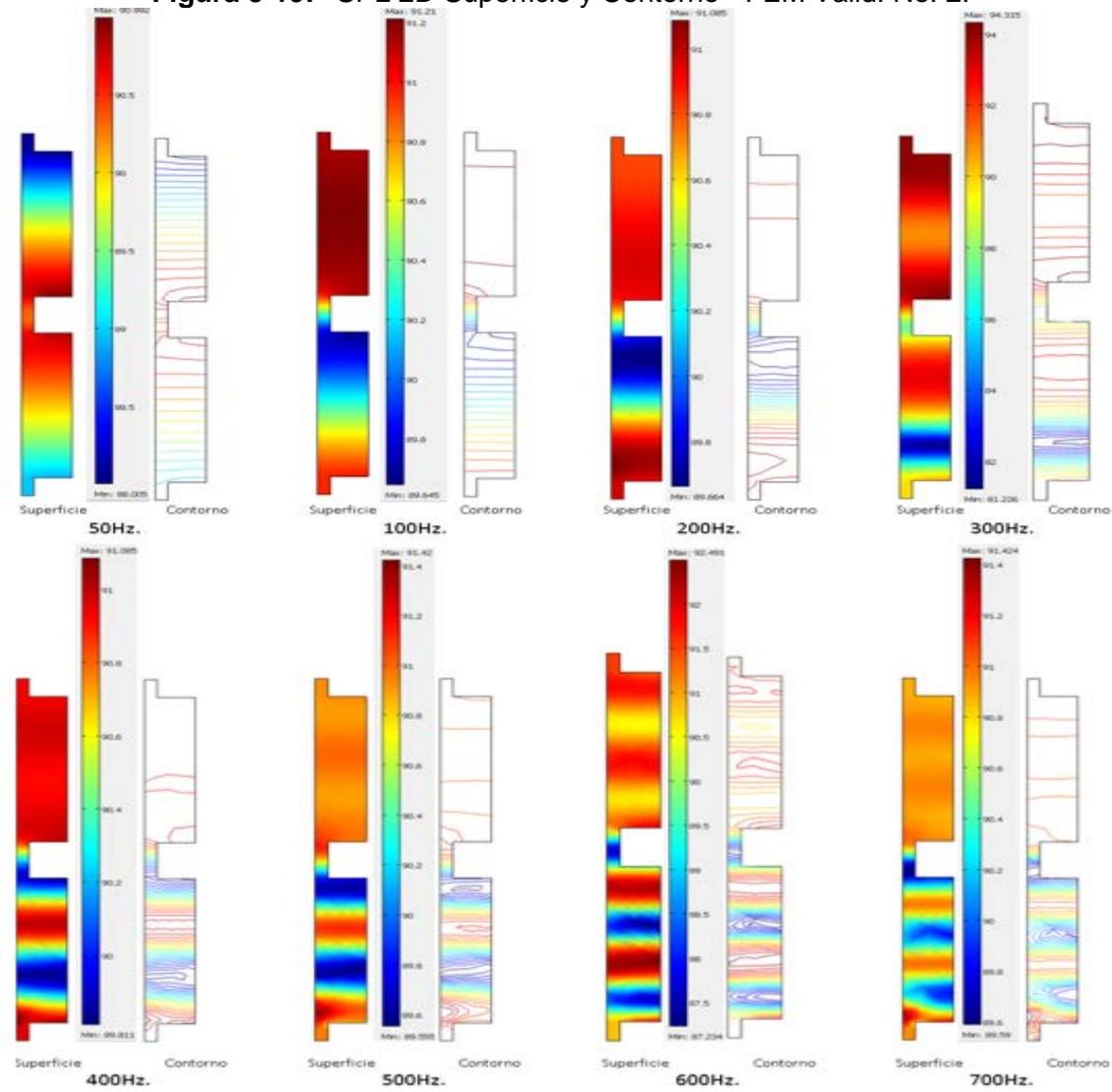
**Figura 5-18:** Gradientes de presión - FEM Valid. No. 2.

Como se menciona en el análisis del caso estudiado para la validación No. 1., las gráficas (5-18 y 5-19) muestran la propagación sonora al interior del silenciador, se observan las resonancias generadas por interferencias y de igual forma se ve la importancia de la longitud de onda en la propagación.

En la figura 5-19 se ven claramente los modos de resonancia en el silenciador y su directa relación con la frecuencia, se observan que las interferencias constructivas se generan sobre todo en la primera cámara (cámara de abajo), y luego del cambio de sección se obtienen más interferencias destructivas.

En la gráfica 5-19 se observa que para las frecuencias de 50Hz y 600Hz se tienen atenuaciones pobres, resultados coincidentes con los vistos en la gráfica de TL en la figura 5-14.

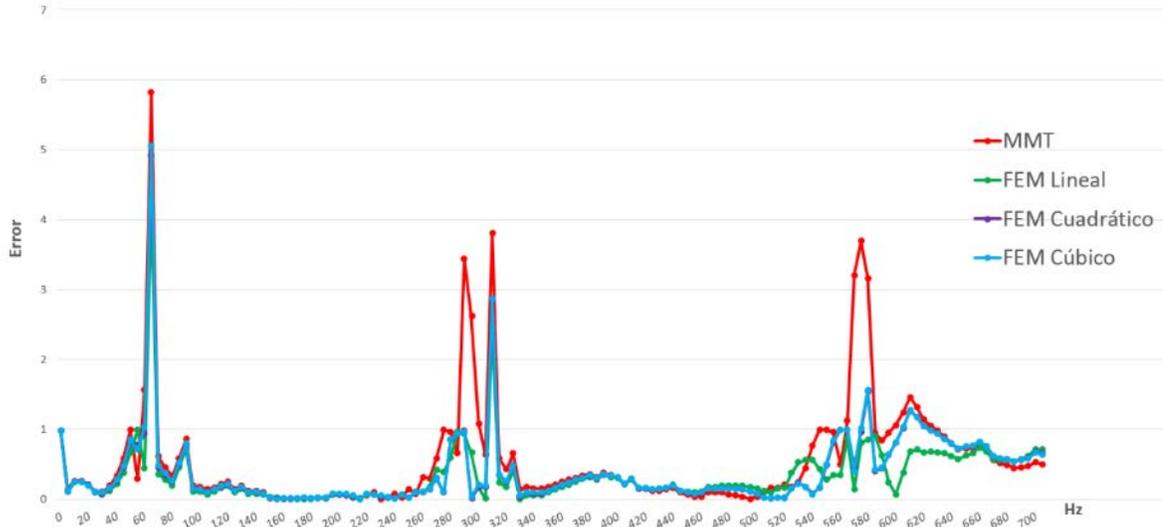
Figura 5-19: SPL 2D Superficie y Contorno - FEM Valid. No. 2.



- **Error.**

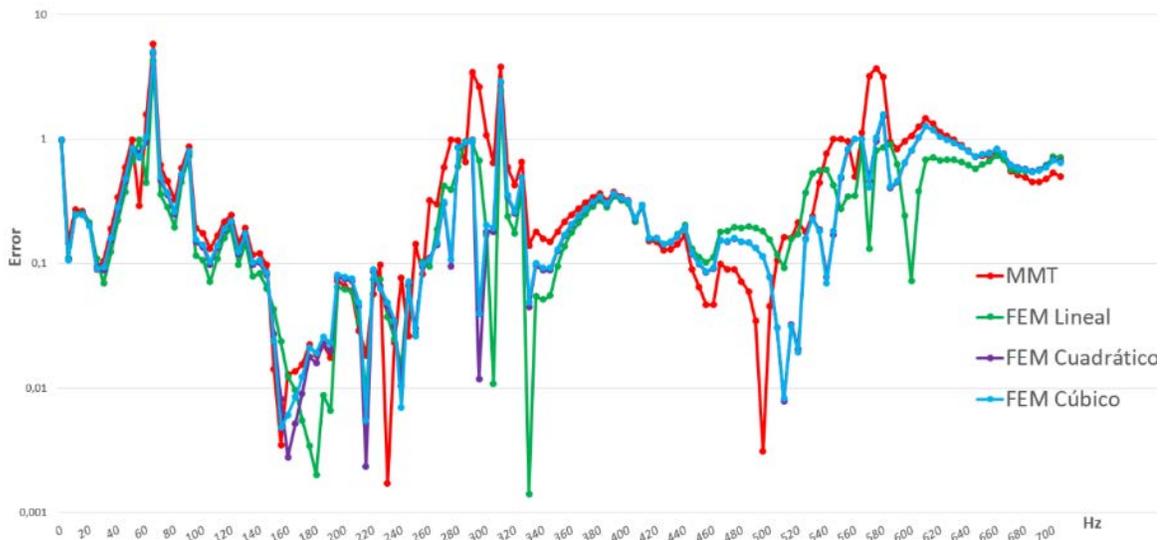
Se calcula el error tal y como se busca cuantificar y se describe para la validación No. 1. Se presentan gráficas de error relativo, figuras 5.16 y 5.17. Y Error absoluto, 5.18.

**Figura 5-20:** Error Relativo - Validación. No. 2.



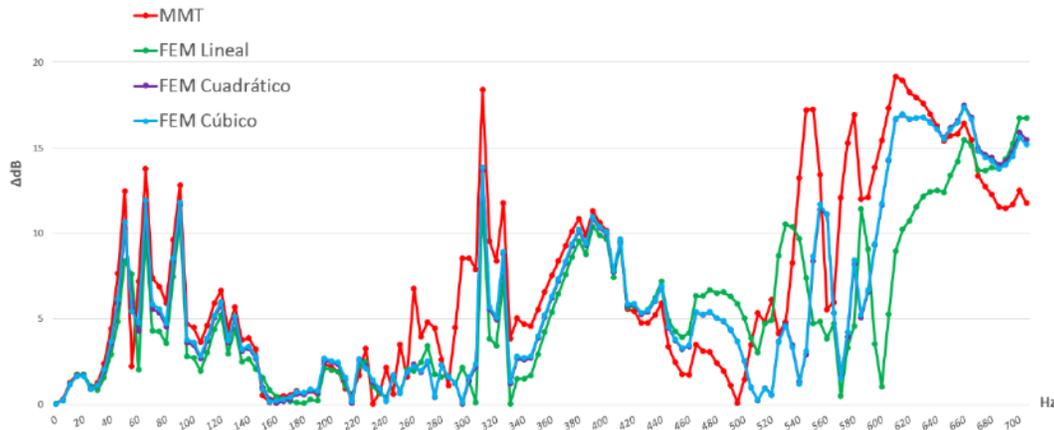
Valores tomados cada 5Hz en el rango entre 0 y 700Hz.

**Figura 5-21:** Error Relativo (Escala logarítmica) - Validación. No. 2.



De manera complementaria se analizan las diferencias del TL en dB para las simulaciones FEM.

**Figura 5-22:** Error Absoluto ( $\Delta$  dB)- Validación. No. 2.



Y la tabla 5-5 resume los márgenes de error en dB y porcentuales de los métodos simulados respecto a las mediciones tomada de bibliografía para la validación No. 2.

**Tabla 5-5:** Error promedio - Validación No. 2.

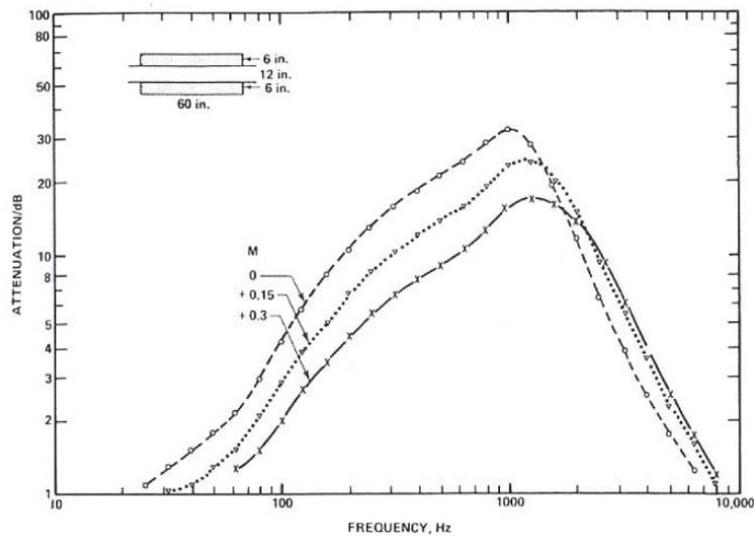
	<i>MMT</i>	<i>FEM Lineal</i>	<i>FEM Cuadrático</i>	<i>FEM Cúbico</i>
<b>Error relativo promedio</b>	0,55%	0,34%	0,39%	0,39%
Error Absoluto promedio ( $\Delta$ dB)	7,0	5,4	5,9	6,0

De acuerdo al análisis de errores se concluye que en el caso de validación No. 2. La mejor correspondencia con los datos experimentales la tiene la simulación por medio del método FEM con bases lineales.

### 5.1.3. Validación No. 3. Silenciador Disipativo.

Montaje y valores experimentales tomados como referencia son tomados del trabajo de Rivas (2010) [72].

**Figura 5-23:** TL y Esquema de montaje - Validación. No 3.



Tipo de silenciador: Mixto. Reactivo (cámara de expansión) + Disipativo (Absorción en paredes de cámara).

Es una clase de silenciador más elaborado pues involucra un medio con impedancia en las paredes de la cámara de expansión, estas condiciones hacen que este caso de estudio tenga varias consideraciones en su implementación sobre todo para el método FEM.

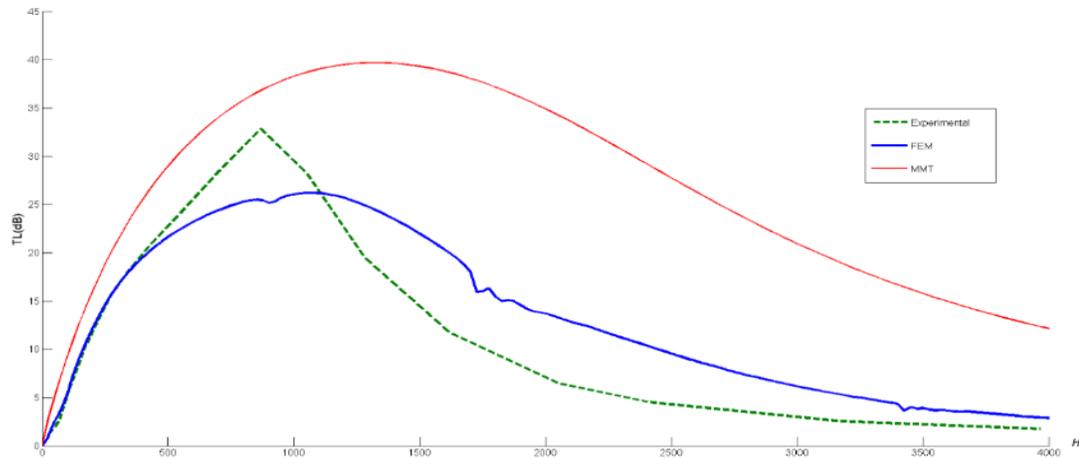
Parámetros y geometría del silenciador:

Resistencia al flujo del material absorbente 14000Rayls.

Espesor del recubrimiento: 0,15m (6"). Longitud total del ducto: 1,828m (72").

Para las simulaciones desarrolladas se emplean las formulaciones presentadas en las ecuaciones (3.40) y (3.41) para el método MMT y para el método de elementos finitos las ecuaciones (4.40), (4.45), (4.46) y (4.47). Se obtienen los resultados que se presentan a continuación.

**Figura 5-24:** Comparación TL - Validación. No 3.



Para la validación se comparan los resultados obtenidos de TL por los métodos MMT y FEM con respecto a las mediciones tomadas de Rivas (2010) para el rango de frecuencias hasta 4kHz.

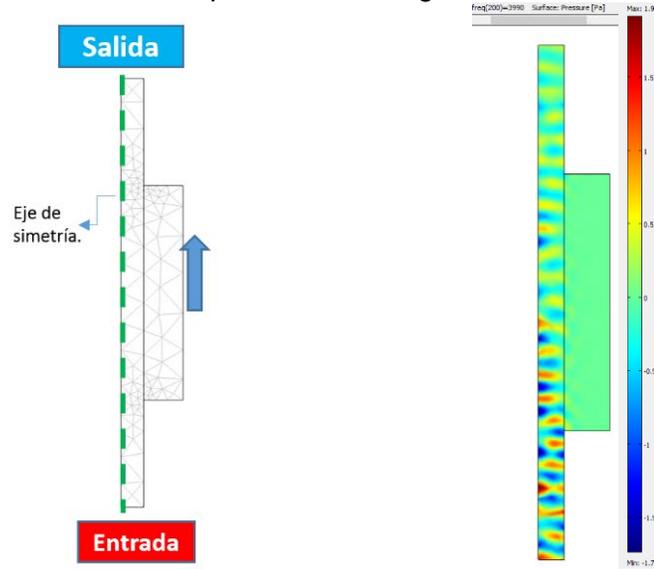
En color verde se observa la curva tomada como referencia (mediciones), en color rojo está la simulación con MMT y en color azul los valores de TL obtenidos mediante el método FEM de un modelo de geometría completa y refinada para polinomios lagrangianos cúbicos.

Vale la pena destacar que para este caso de estudio validado se realizaron varias simulaciones en FEM con el fin de lograr resultados más precisos con respecto a los valores experimentales, en el documento se muestran dos escenarios, uno para el modelo general usado en Comsol, es decir, geometría simétrica; y el segundo para un modelo (modelo con refinación geométrica) que considera la forma total del silenciador en 2D.

- Escenario de media geometría.

Como se menciona para un primer análisis se implementó un modelo similar al usado para las validaciones anteriores donde se usa media geometría del silenciador (ver Figura 5-21) y se supone un eje de simetría (para que se asuma un espejo para el modelo) como se observa en Figura 5-21, de acuerdo a esto se lograron los resultados para las 3 bases que se observan en Figura 5-22.

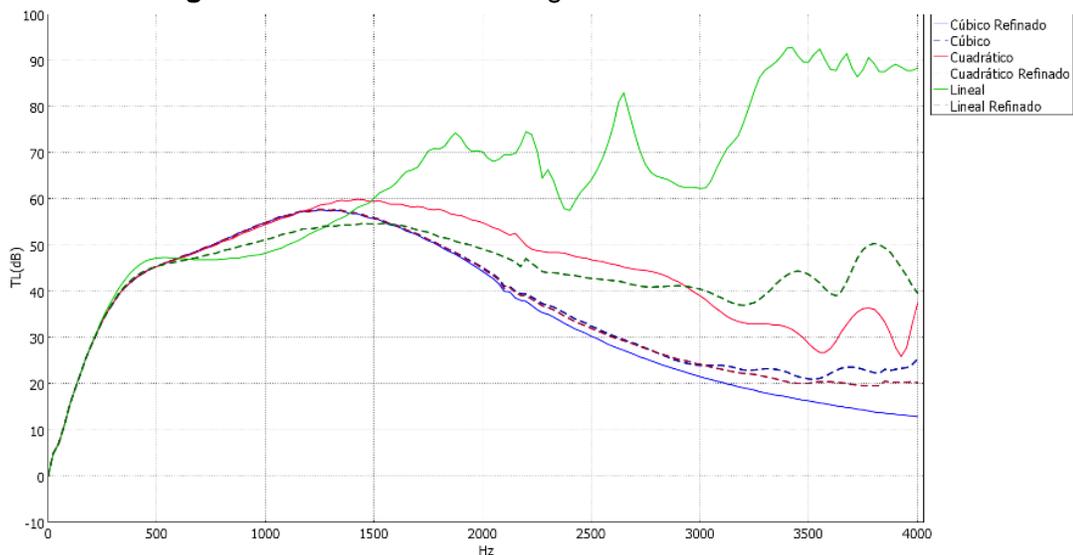
**Figura 5-25:** Simulación por FEM media geometría - Validación. No 3.



Se tiene que en el extremo de entrada hay 1Pa y en el de salida 0,2Pa.

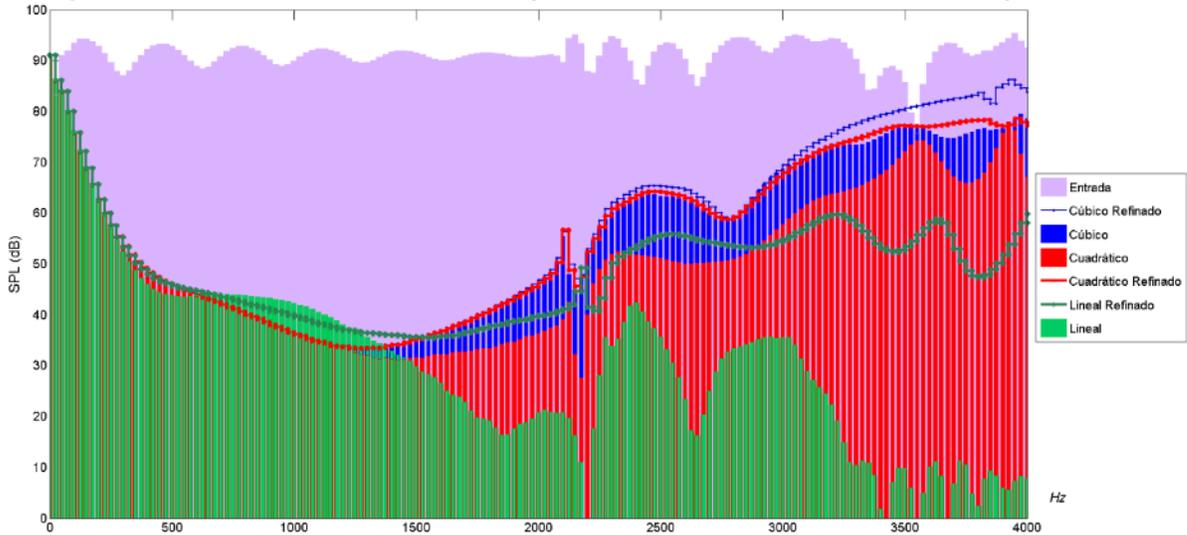
El cálculo de TL por FEM se hizo para diferentes órdenes de polinomio lineal, cuadrático y cúbico, la CF asociada a la característica disipativa de este silenciador mixto corresponde al material absorbente, considerado como un segundo medio (subdominio) cuya impedancia está determinada por la resistividad al flujo del recubrimiento. Los TL resultantes se observan en la siguiente figura.

**Figura 5-26:** TL FEM media geometría - Validación. No 3.



Como información adicional para las comparaciones de atenuación sonora se presentan los espectros de ruido en el extremo de salida vs el espectro sonoro de la fuente para la simulación mediante FEM para el escenario de media geometría del silenciador mixto estudiado.

**Figura 5-27:** FEM espectros, media geometría - Validación. No 3. Media geometría.



Las bases y números de elementos asociados a la simulación FEM se pueden observar en las siguientes tablas. Como se menciona se realiza un refinamiento de la malla de discretización buscando resultado en términos de TL más acertados con respecto de los valores experimentales.

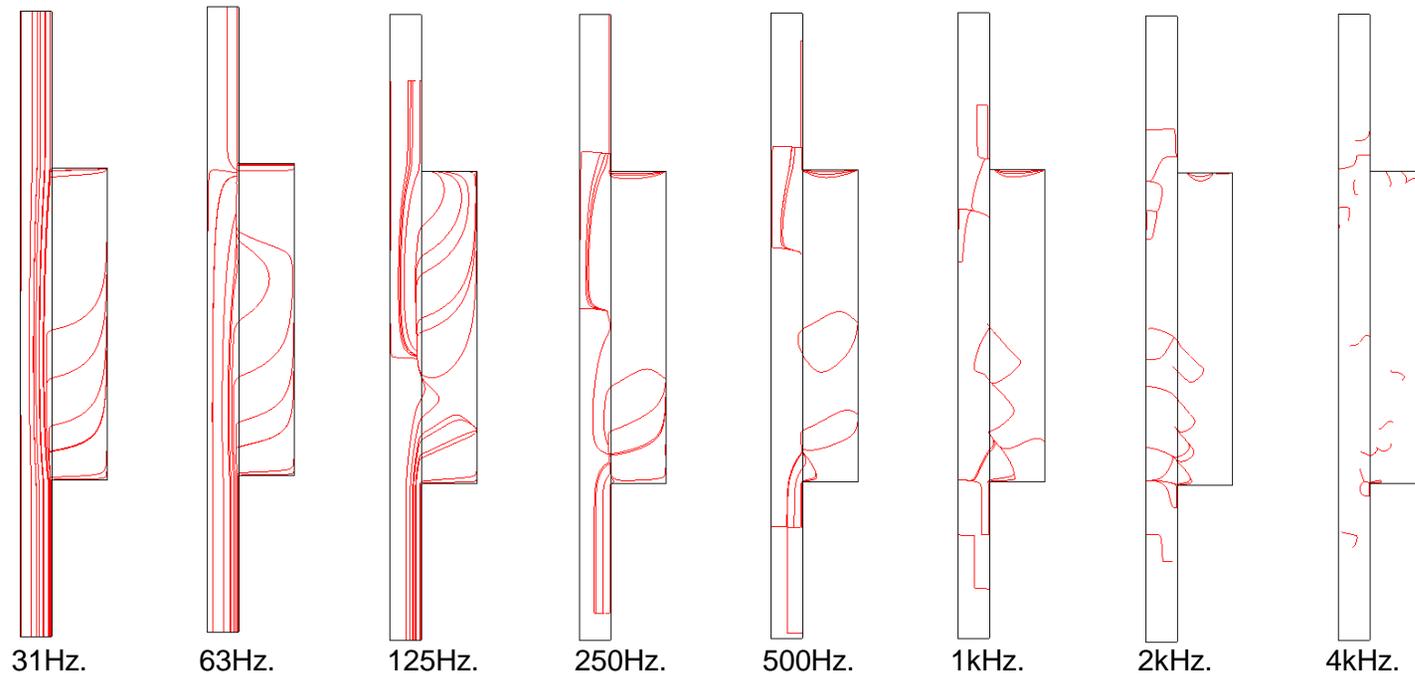
**Tabla 5-6:** Bases media geometría - Validación No. 3.

<b>Orden</b>	<b>No. de elementos</b>	<b>Grados de Libertad</b>	
<i>Lineal</i>	170	111	
<i>Cuadrático</i>		391	
<i>Cúbico</i>		841	

Modelo refinado.

<b>Orden</b>	<b>No. de elementos</b>	<b>Grados de Libertad</b>	
<i>Lineal</i>	680	391	
<i>Cuadrático</i>		1461	
<i>Cúbico</i>		3211	

Las gráficas de gradiente de presión y de niveles de presión sonora en dB para el presente ejemplo se presentan en las figuras 5-28 y 5-29 respectivamente.

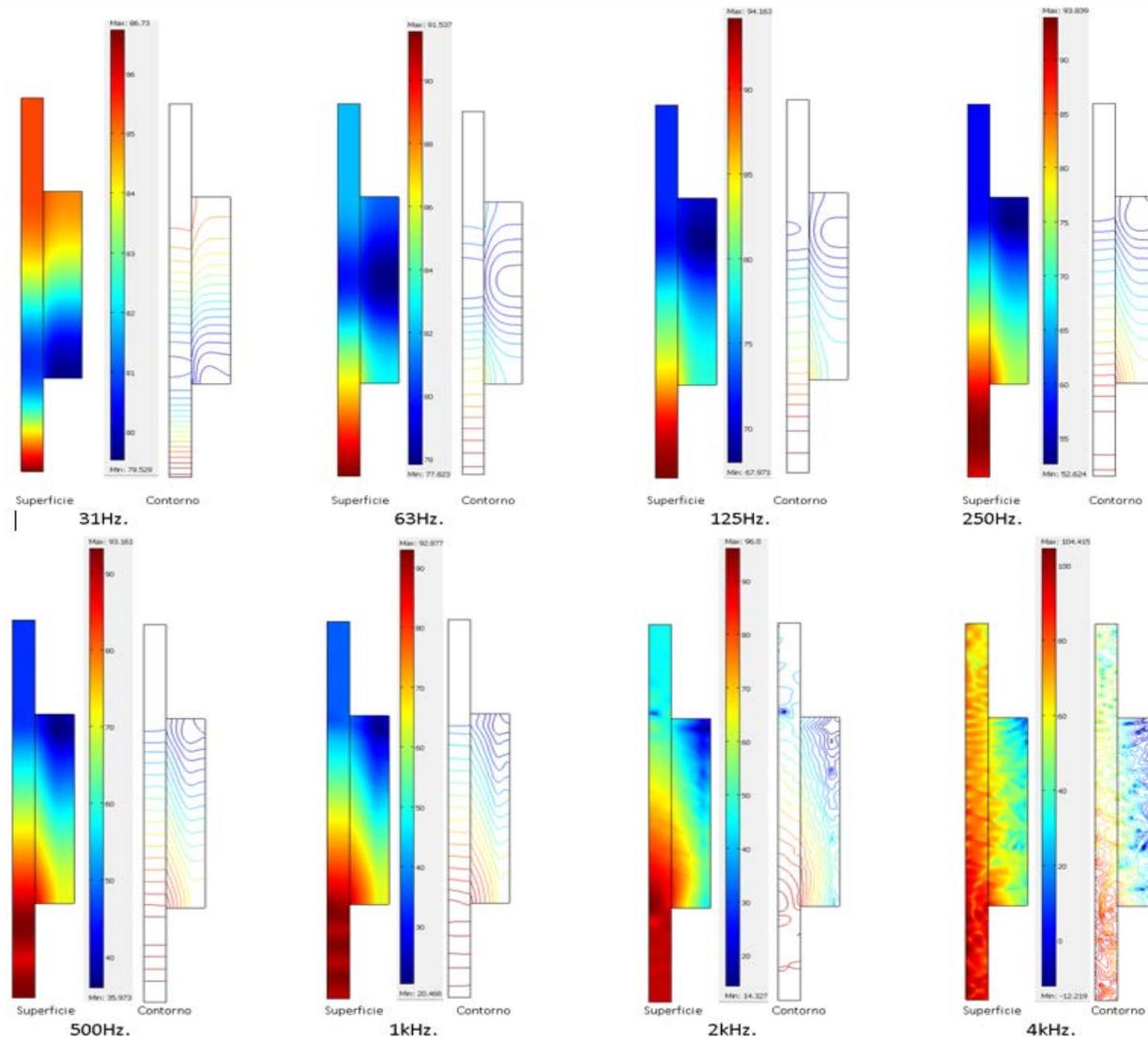
**Figura 5-28:** Gradientes de presión - FEM Valid. No. 3. (Media geometría).

Para el silenciador mixto analizado usando la simulación mediante FEM para media geometría, se obtienen resultados que muestran que la propagación tiene niveles de presión sonora menores hacia el recubrimiento (subdominio con impedancia, CF tipo Robin), lo cual es coherente con el concepto acústico del problema, pues, en la cámara de expansión con material absorbente se presenta refracción y por ende amortiguación de la propagación sonora.

Así mismo las paredes duras (CF Newmann) y la morfología reactiva del dispositivo mixto hacen que existan difracción y reflexiones internas que como se menciona en los casos anteriores provoca las interferencias al interior del dominio.

De forma similar a los casos anteriores en estas gráficas (ver figuras 5-28 y 5-29) presentan el comportamiento acústico en el modelo bidimensional y muestran curvas de propagación sonora y mapeo en dB al interior del silenciador, donde es claramente influyente la longitud de onda y las CF, particularmente para este ejemplo el subdominio absorbente.

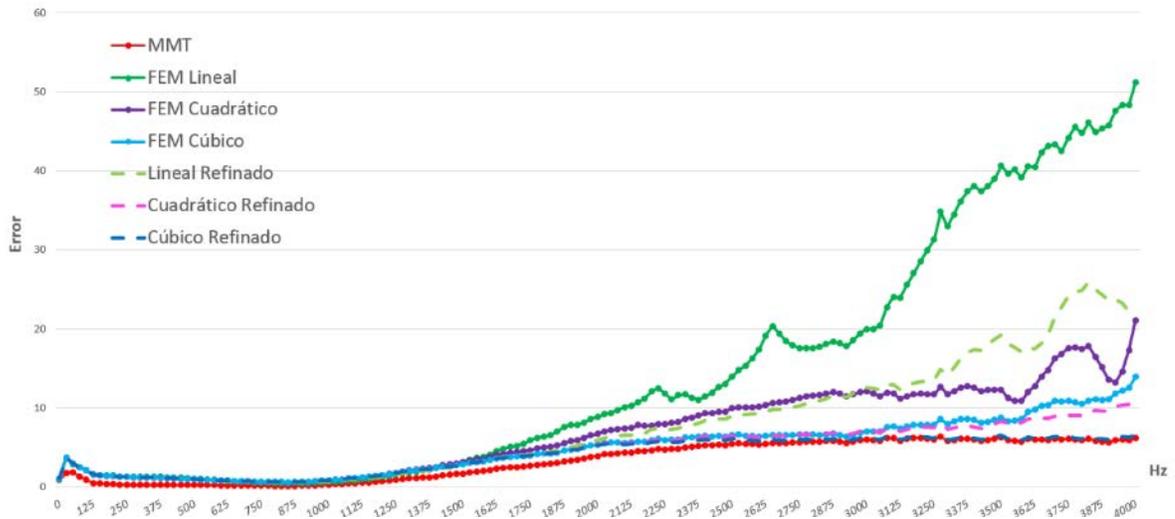
**Figura 5-29:** SPL 2D Superficie y Contorno - FEM Valid. No. 3. (Media geometría).



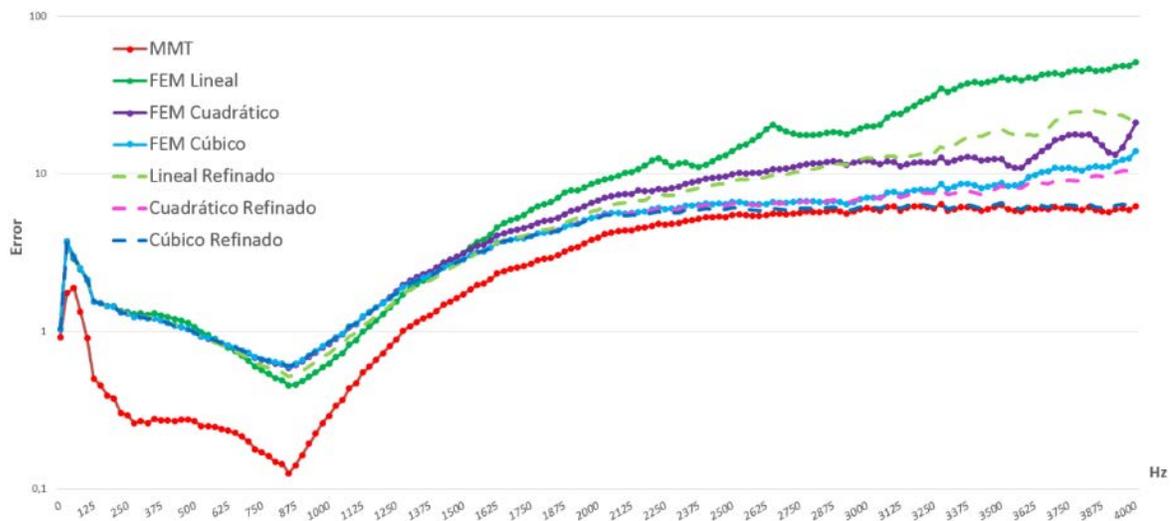
- **Error.**

Como se ha presentado en los anteriores casos de validación a continuación se muestran los resultados obtenidos de los errores absoluto y relativo cuantificando las diferencias en cuanto a TL de los métodos de simulación respecto a los datos experimentales de bibliografía.

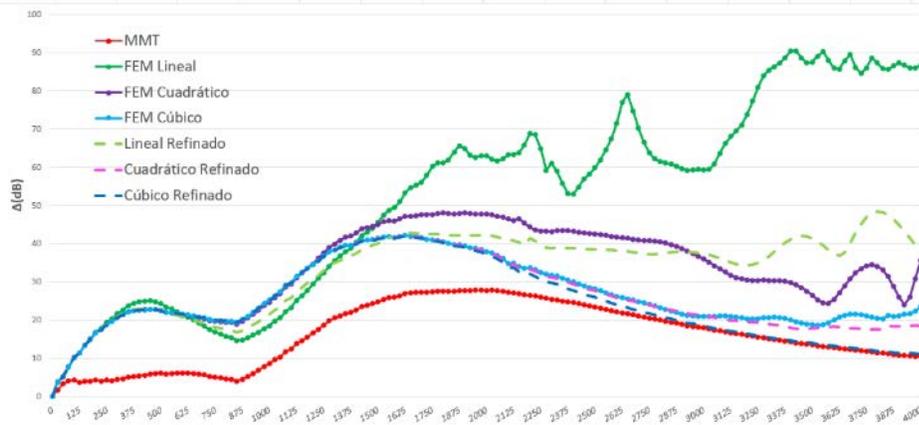
**Figura 5-30:** FEM Error relativo, media geometría - Validación. No 3.



**Figura 5-31:** FEM Error relativo (Logarítmico), media geometría - Validación. No 3.



**Figura 5-32:** FEM Error absoluto ( $\Delta$  dB), media geometría - Validación. No 3.



La siguiente tabla resume los errores encontrados para la validación No. 3.

**Tabla 5-7:** Error absoluto promedio ( $\Delta$  dB) - Validación No. 3, Media geometría.

	MMT	FEM Lineal	Lineal Refinado	FEM Cuadrático	Cuadrático Refinado	FEM Cúbico	Cúbico Refinado
<b>Error relativo promedio</b>	3,36%	14,25%	7,81%	6,92%	4,67%	4,93%	4,03%
<b>Error Absoluto promedio (<math>\Delta</math> dB)</b>	16,1	51,9	33,4	33,2	25,8	26,4	24,2

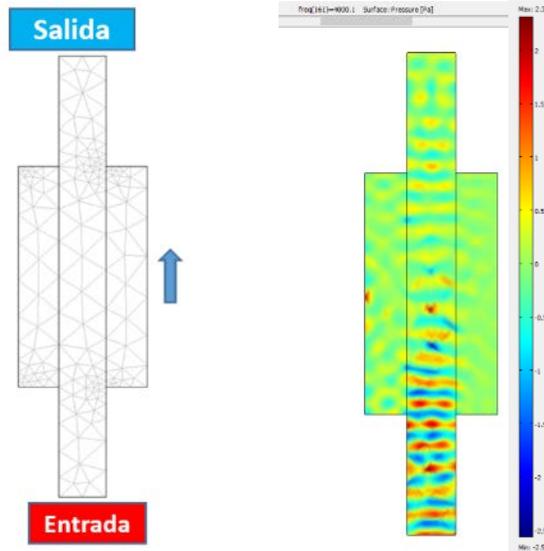
De acuerdo a los resultados de atenuación en términos de pérdida por transmisión sonora (TL) y la evaluación realizada de errores relativos y absolutos, se puede observar que con respecto a los datos experimentales los resultados con mejor correspondencia son los simulados usando el método MMT.

EL refinamiento de la malla que discretiza el dominio en FEM para el escenario de media geometría del modelo no arroja los resultados esperados acorde con los valores de las mediciones, entonces, por esta razón, se decide realizar una simulación mediante FEM para una geometría completa del silenciador mixto, teniendo en cuenta que se tiene una tipología de silenciador más elaborada con condiciones de frontera que vale la pena detallar mejor en el modelo.

- Escenario de geometría completa.

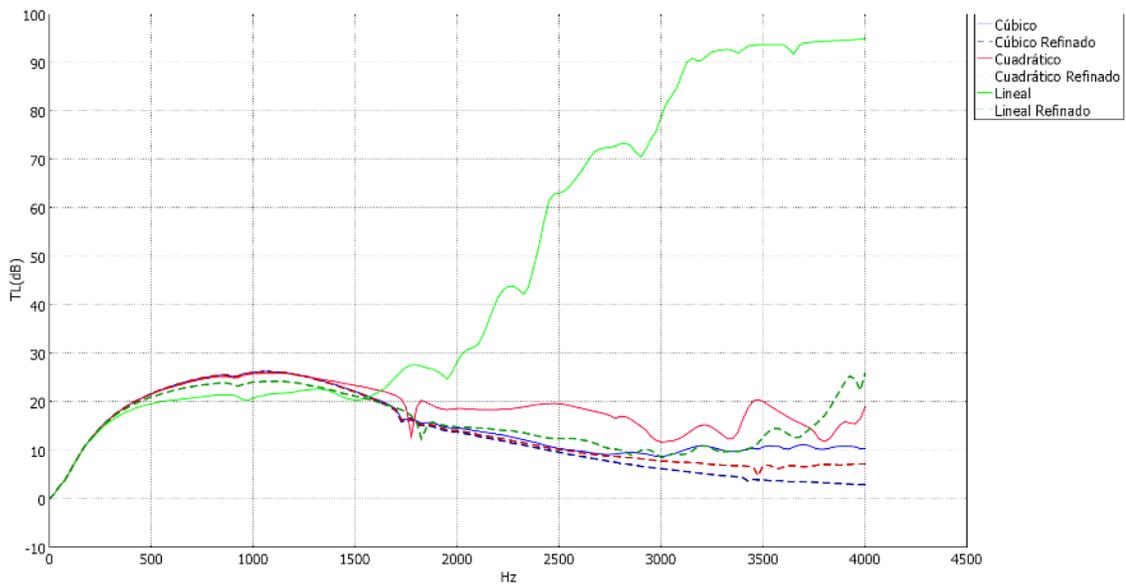
Para los casos de estudio de silenciadores reactivos en general se observa que la mejor correspondencia vs datos experimentales se tiene el método FEM, entonces, buscando una mejor aproximación a los valores de las mediciones que se tienen como referencia se decide emplear un modelo refinado geoméricamente con la forma completa del silenciador.

**Figura 5-33:** Simulación FEM, geometría completa - Validación. No 3.

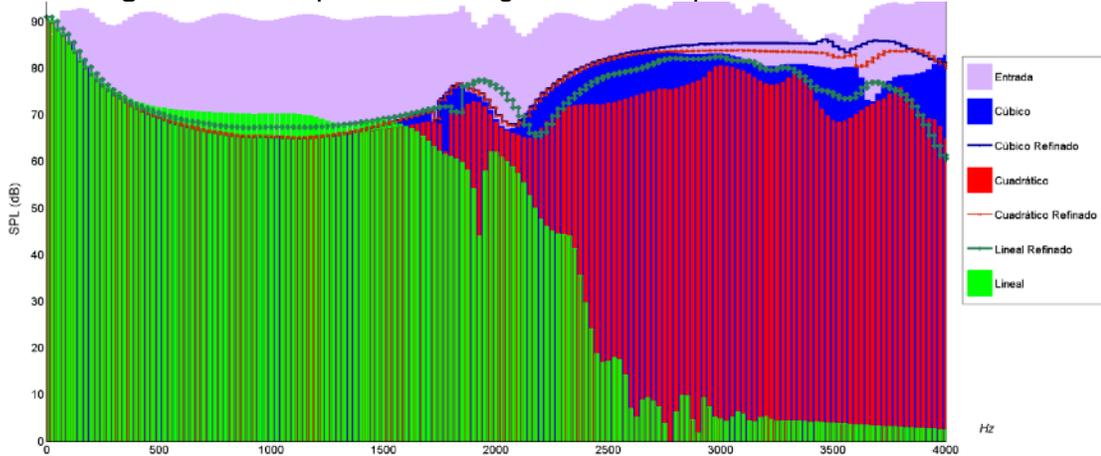


Los resultados por el método FEM para la atenuación, TL simulado (ver figura 5-34) y las gráficas comparativas de espectros de ruido en extremo de salida vs fuente de ruido (ver figura 5-35) se presentan a continuación.

**Figura 5-34:** TL FEM, geometría completa - Validación. No 3.



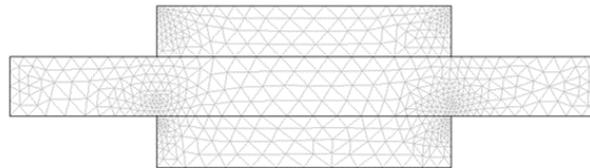
**Figura 5-35:** Espectros FEM, geometría completa - Validación. No 3.



Según los resultados simulados por FEM para el escenario de geometría completa del silenciador se observan mejores resultados respecto a los datos experimentales, exceptuando el modelo lineal sin refinar.

El enmallado para el para este escenario se observa en la siguiente figura.

**Figura 5-36:** Dibujo del software Comsol geometría completa - Validación. No 3.



Las tablas que describen la discretización son las siguientes.

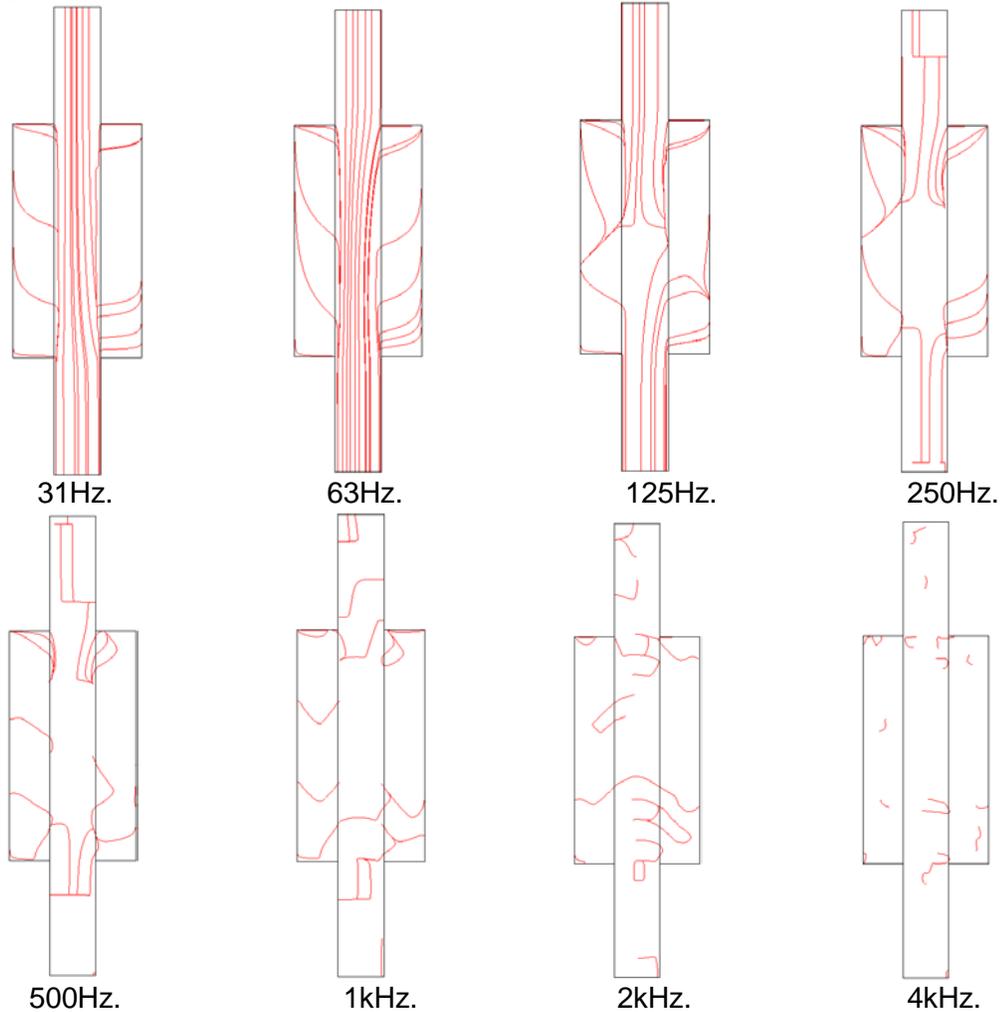
**Tabla 5-8:** Bases FEM, geometría completa - Validación No. 3.

<b>Orden</b>	<b>No. de elementos</b>	<b>Grados de Libertad</b>	
<i>Lineal</i>	228	176	
<i>Cuadrático</i>		639	
<i>Cúbico</i>		1390	

Modelo refinado.

<b>Orden</b>	<b>No. de elementos</b>	<b>Grados de Libertad</b>	
<i>Lineal</i>	1152	639	
<i>Cuadrático</i>		2429	
<i>Cúbico</i>		5371	

A continuación se pueden observar las gráficas de gradientes de presión sonora para el caso de validación No. 3.

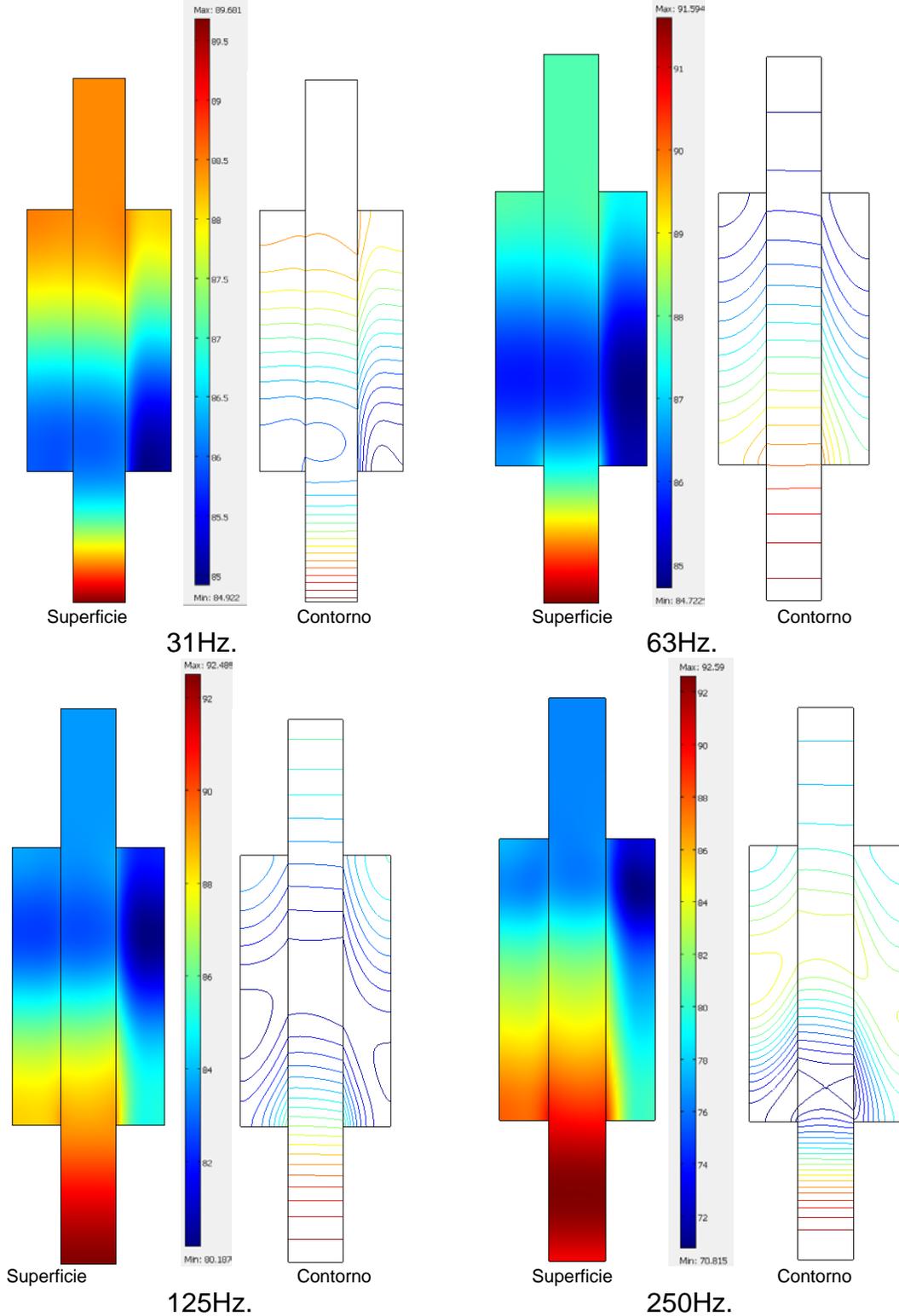
**Figura 5-37:** Gradientes de presión - FEM Valid. No. 3. (Geometría completa).

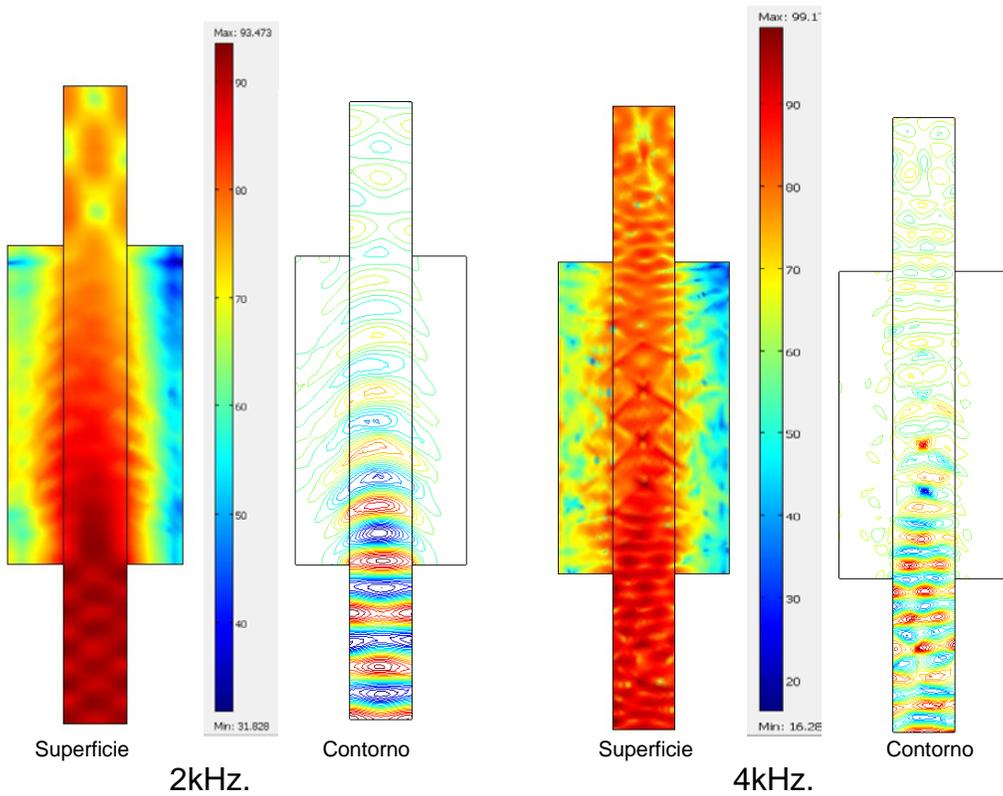
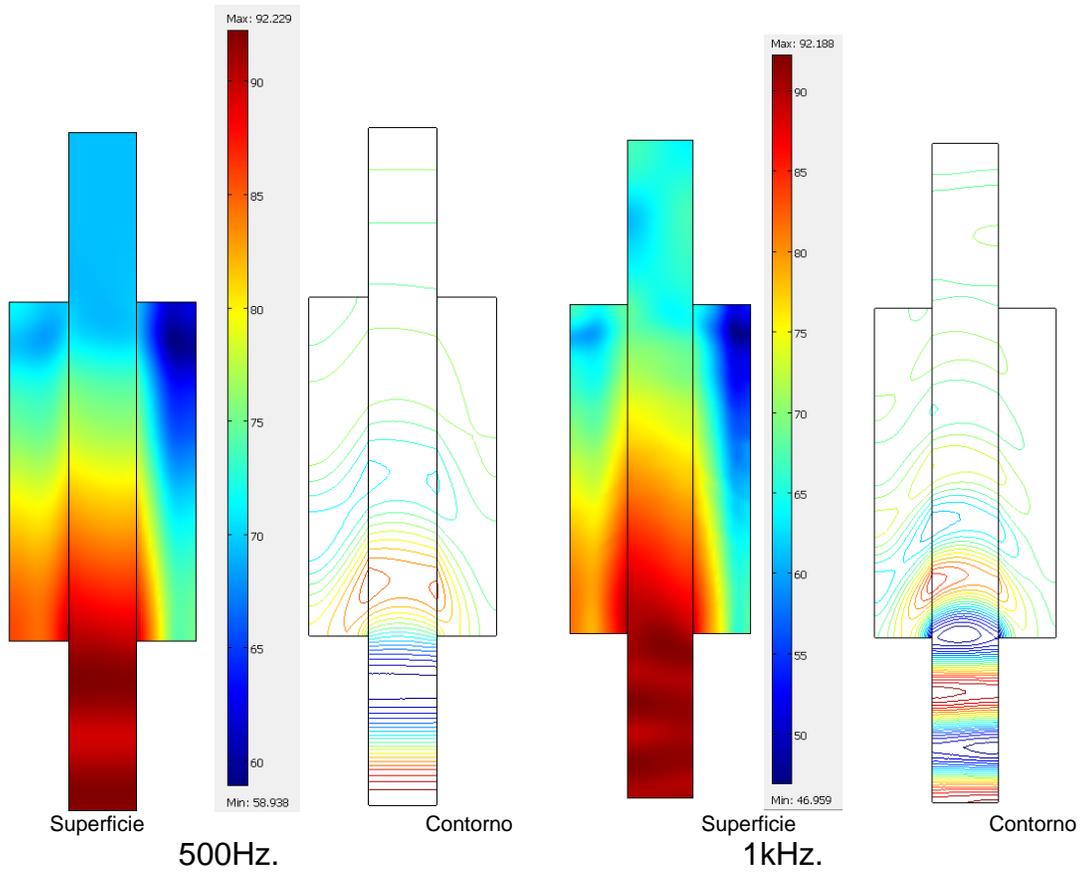
Se considera importante mencionar que aunque el modelo es simétrico (geometría vertical con idénticas condiciones de frontera y tamaños), las gráficas 2D de las figuras 5-37 y 5-38 no muestran una simetría total en el comportamiento sonoro tanto para los gradientes de presión como para los niveles de presión sonora al interior del silenciador para las distintas frecuencias. Existen varias consideraciones que explican esto:

- La propagación sonora al interior del silenciador hace que existan difracciones y reflexiones que producen resonancias en ciertos lugares (nodos) internos del dominio y en otros no, estas interferencia también de penden de la longitud de onda, como se ha mencionado varias veces.
- Al incluirse absorción en el silenciador, se tiene un medio poroso cuyo tejido es esencialmente aleatorio y puede describirse como un material anisotrópico.
- La descripción matemática de la condición de impedancia (característica absorbente), involucra la aproximación heurística Delaney-Bazley, la cual determina la impedancia y vector número de onda en el medio poroso. Entonces tratándose de una expresión heurística el modelo tiene una importante consideración a refinar que está vinculada con la CF y/o subdominio con pérdidas.

La siguiente figura las gráficas muestran los niveles de presión sonora en dB en el silenciador por frecuencia para el caso de estudio con escenario de geometría completa.

**Figura 5-38:** SPL 2D Superficie y Contorno - FEM Valid. No. 3. (Geometría completa).

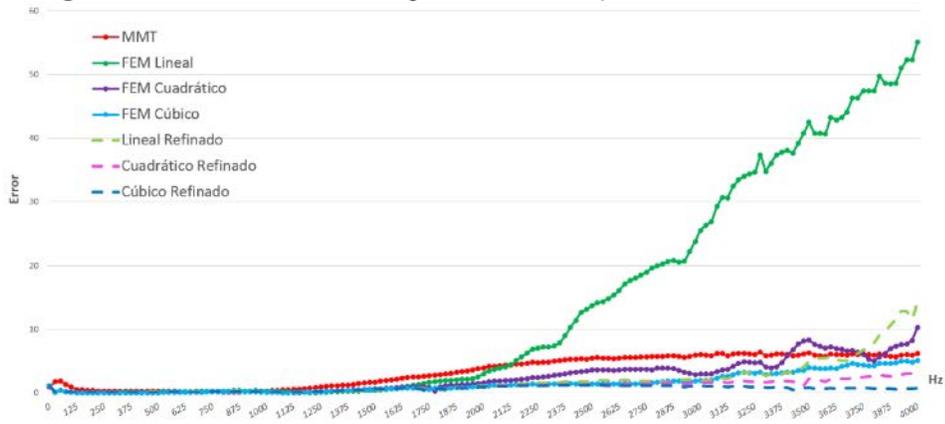




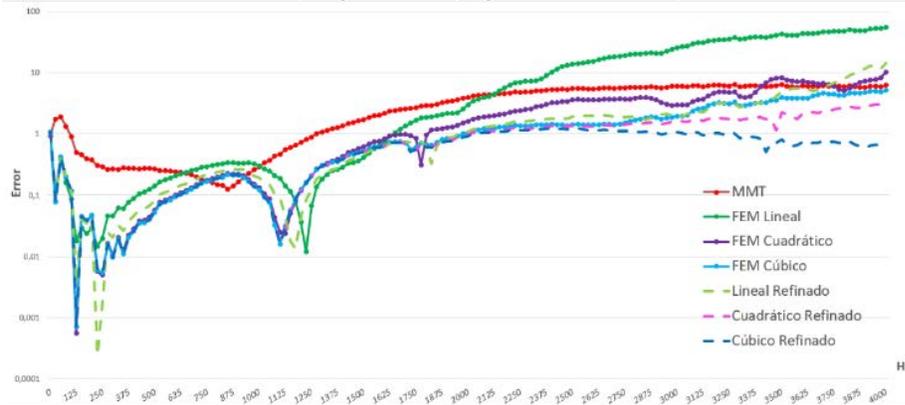
• **Error.**

Al detallar el modelo analizando la forma completa del silenciador los resultados de la simulación FEM logran mejorar su correspondencia con valores medidos y como se esperaba superar en términos de exactitud la aproximación obtenida usando el método MMT. Esta comparación se puede comprobar con las gráficas de errores relativos y absoluto que se muestran a continuación.

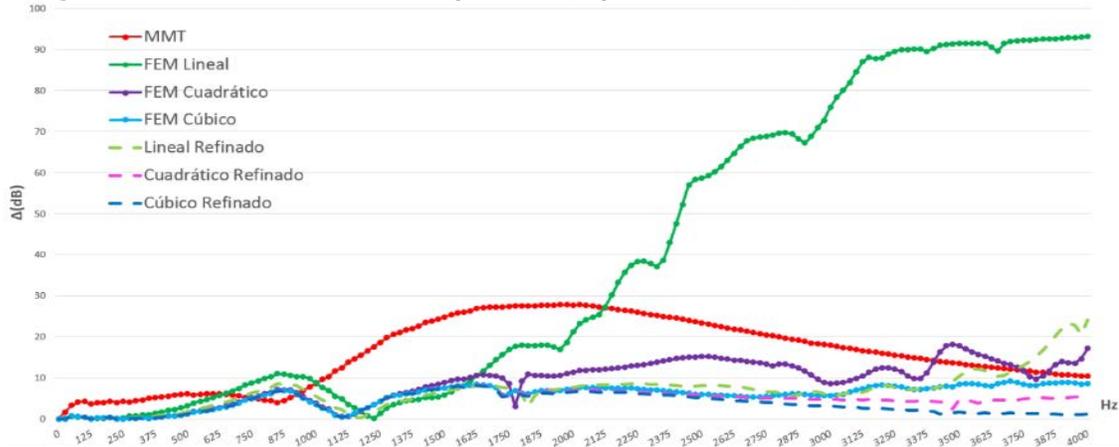
**Figura 5-39:** Error relativo, geometría completa - Validación. No 3.



**Figura 5-40:** Error relativo (Logarítmico), geometría completa - Validación. No 3.



**Figura 5-41:** Error absoluto (Logarítmico), geometría completa - Validación. No 3.



A modo de resumen la tabla 5-9 presenta los errores promedio para la validación No. 3, caso de silenciador considerando geometría completa donde es claro que para un ducto con absorción al mejorar el orden y refinamiento del modelo se tienen mejores resultados (resultados más acordes con datos experimentales).

**Tabla 5-9:** Error absoluto promedio ( $\Delta$  dB) - Validación No. 3 - geometría completa.

	<i>MMT</i>	<i>FEM Lineal</i>	Lineal Refinado	<i>FEM Cuadrático</i>	Cuadrático Refinado	<i>FEM Cúbico</i>	Cúbico Refinado
<b>Error relativo promedio</b>	3,36%	13,69%	1,98%	2,42%	1,01%	1,44%	0,62%
Error Absoluto promedio ( $\Delta$ dB)	16,1	39,0	6,9	8,9	4,6	5,7	3,7

El análisis de error para el escenario de geometría completa muestra que a mayor refinamiento del modelo discreto se tiene mayor correspondencia con las mediciones.

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos se entiende que es más eficiente para la simulación por FEM considerar la forma completa del dominio y refinar la discretización. El modelo más detallado y completo para la solución numérica permite una aproximación más acertada del fenómeno acústico dada la tipología del silenciador y sus característica reactivo-disipativa. Con lo anterior se entiende que para simular la confluencia de la difracción, refracción y reflexión sonora que ocurre en un caso de estudio más elaborado (tipología mixta) se necesita un refinamiento del problema acústicamente, es decir, describir lo mejor posible las condiciones de frontera sobre todo la de impedancia (medio absorbente) y numéricamente más cantidad de elementos, grados de libertad, o sea, más puntos de cálculo de presión sonora.

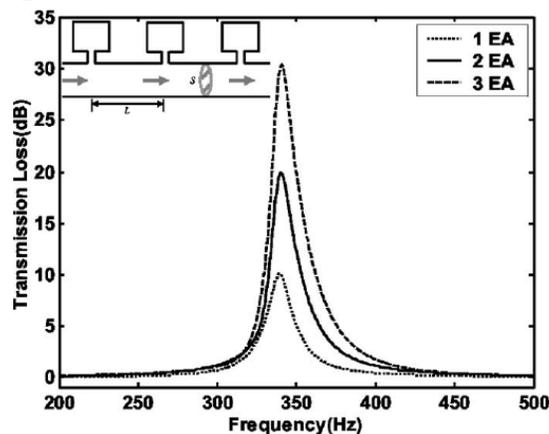
#### 5.1.4. Validación No. 4. Resonador de Helmholtz.

Tipo de Silenciador: Silenciador Resonador de Helmholtz.

La referencia bibliográfica tomada como para esta validación es Sang-Hyun/Yang-Hann (2003) [64], (figura 2 a) del artículo).

EL TL experimental tomado como referencia comparativa se muestra a continuación.

**Figura 5-42:** TL medido - Validación. No 4.



Tipo de Silenciador: Resonador de Helmholtz.

Geometría del silenciador de acuerdo a la figura 3.20, los parámetros son:

Longitud del silenciador,  $L = 0,1\text{m}$ .

Longitud del cuello,  $l = 25\text{mm}$ .

Altura del resonador:  $h = 48,5\text{mm}$ .

Diámetros del cuello:  $D = 10\text{mm}$ .

Diámetros del resonador  $20\text{mm}$ .

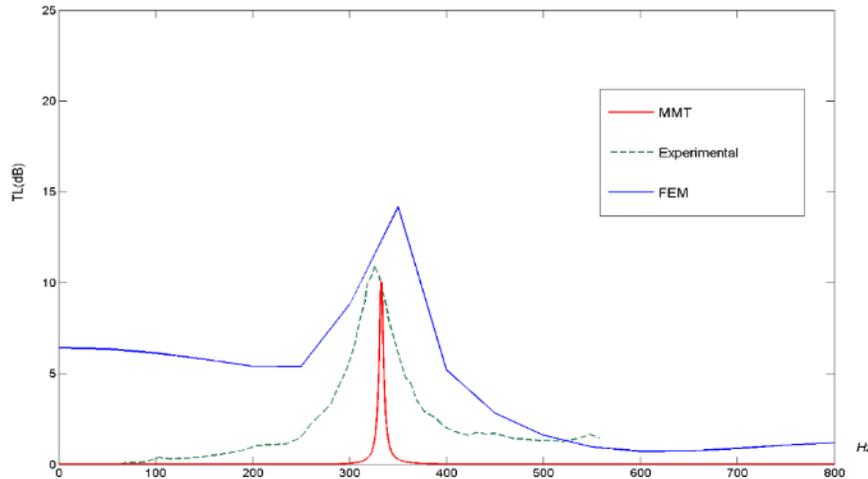
Diámetros del silenciador  $50\text{mm}$ .

Para las simulaciones se emplean las formulaciones dadas por (3.46) a (3.49) para MMT y (4.27) y (4.28) para FEM y se obtienen los siguientes resultados.

La gráfica a continuación muestra los resultados de las simulaciones realizadas mediante los dos métodos contra los datos experimentales, se observa buena correspondencia entre mediciones y simulaciones.

Los valores graficados de TL por FEM corresponden a bases cuadráticas. Y la curva correspondiente a MMT toma el paso de a 1Hz.

**Figura 5-43:** Comparación TL - Validación. No 4.

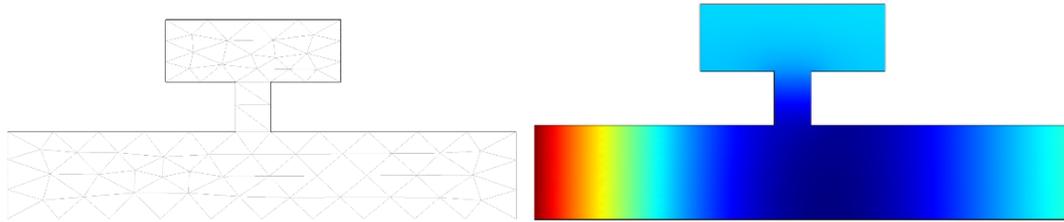


Con respecto a la curva de resultados experimentales se observa que el pico de la frecuencia de resonancia obtenido por los métodos de simulación (más acertados) está ligeramente desfasada hacia la derecha (frecuencia de resonancia más alta) así:  $F_{res}$  Experimental=325Hz,  $F_{res}$  simulada por MMT=332Hz, y  $F_{res}$  calculada por FEM=350Hz. Entonces para este caso de validación se observa mejor correspondencia del método MMT.

Cabe resaltar que el desfase de frecuencia de resonancia y sobreestimar el pico de la misma también se presenta en simulaciones mediante métodos numéricos de otros autores, por ejemplo Selamet (2003) [63] usando BEM para la solución del problema acústico coincide con un frecuencia de resonancia en una frecuencia mayor con respecto a valores experimentales, otra referencia que muestra resultados similares es de Bedout(1996\*\*) [73] donde en sus cálculos teóricos obtiene picos con mayores atenuaciones vs los valores medidos.

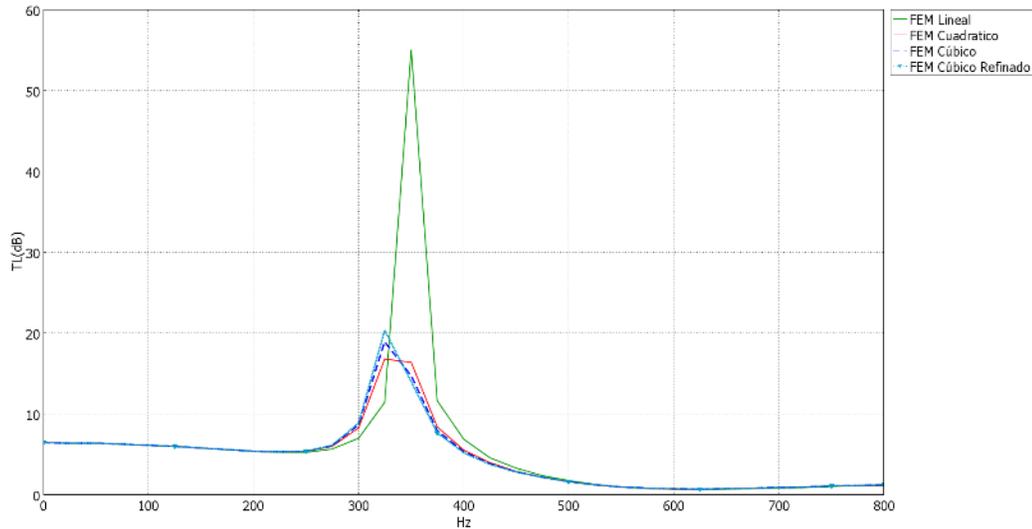
En la Figura 5-36 se muestra el enmallado para el silenciador resonador de Helmholtz y en el costado derecho se observa la solución del problema acústico para 800Hz, la gráfica muestra presión sonora en Pascales en el silenciador, según se observa en el extremo de entrada se tiene 1Pa y en el de salida 20μPa.

**Figura 5-44:** Simulación por FEM en Comsol - Validación. No 4.



Adicionalmente se realiza un análisis para diferentes grados de libertad (órdenes de las bases de polinomios lagrangianos) por el método FEM con la simulación mediante el software Comsol y se tienen los siguientes resultados.

**Figura 5-45:** Comparación TL FEM en Comsol - Validación. No 4.



Se observa como los elementos con polinomios lineales sobreestiman más la frecuencia de resonancia, con las bases cuadráticas y cúbicas se tienen resultados similares.

El número de elementos y los grados de libertad correspondientes a las bases simuladas se muestran en la tabla 5-10.

**Tabla 5-10:** Comparación Bases FEM - Validación No. 4.

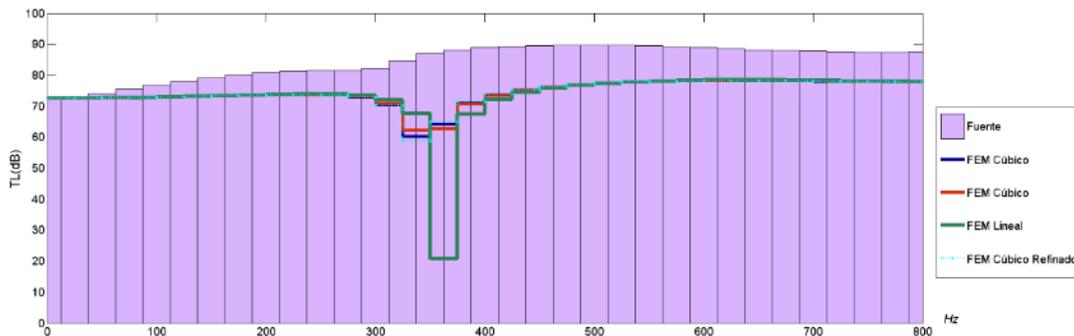
<b>Orden</b>	<b>No. de elementos</b>	<b>Grados de Libertad</b>	
<i>Lineal</i>	132	89	
<i>Cuadrático</i>		309	
<i>Cúbico</i>		661	

Modelo refinado.

<b>Orden</b>	<b>No. de elementos</b>	<b>Grados de Libertad</b>	
Cúbico	2112	9769	.....

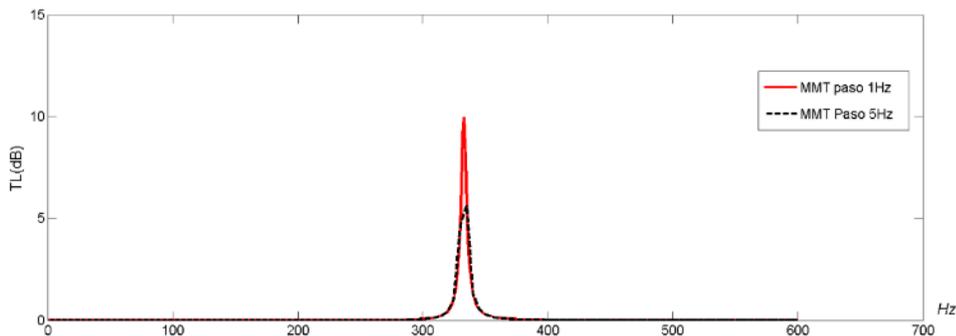
Los resultados simulados también se muestran en términos de presión sonora comparando espectros en dB en extremo de entrada contra las salidas para las diferentes simulaciones por el método FEM.

**Figura 5-46:** Espectros FEM en Comsol - Validación. No 4.



De igual forma se muestran resultados obtenidos por el método MMT para 2 pasos de intervalo diferentes. Evaluando la atenuación sonora de este tipo de silenciador: Resonador de Helmholtz, se da la particularidad que el pico de la frecuencia de resonancia en el cálculo del TL por MMT es muy sensible al paso como se observa en la gráfica.

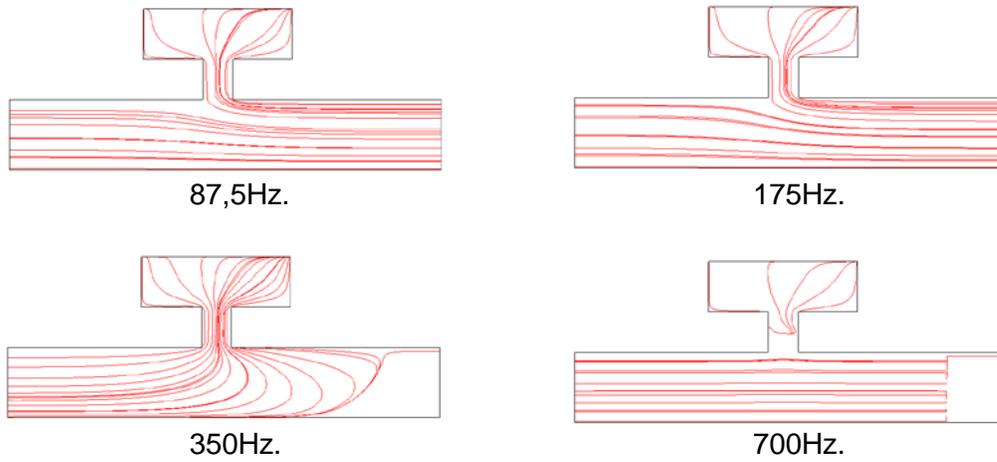
**Figura 5-47:** Comparación TL MMT - Validación. No 4.



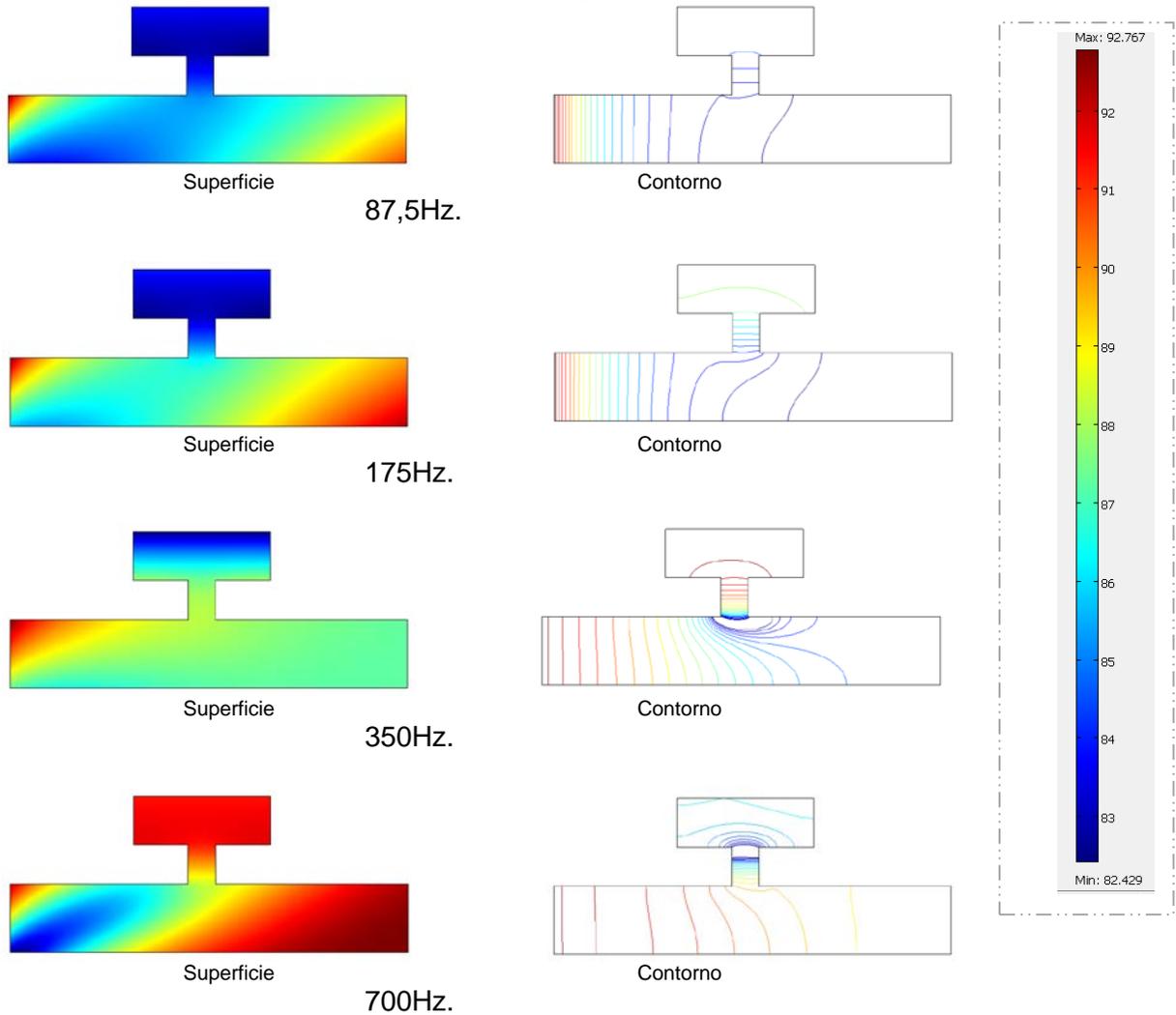
Si el paso es mayor se va a obtener un pico más bajo cuya amplitud no coincidirá con los valores experimentales.

Complementando la presentación de resultados para el caso de validación del resonador de Helmholtz se muestra en la figura 5-48 la gráfica de gradientes de presión sonora al interior del silenciador para las frecuencias 87,5Hz, 175Hz, 350Hz y 700Hz. Así mismo se presentan para las mismas frecuencias los niveles de presión sonora en la figura 5-49. En las gráficas se ve con claridad la frecuencia de resonancia (350Hz) del silenciador resonador de Helmholtz reactivo (CF pared dura: Newmann, en este caso las interferencias destructivas son directamente dependientes del diámetro del cuello del tubo conector y su relación con la longitud de onda.

**Figura 5-48:** Gradientes de presión - FEM - Validación. No 4.



**Figura 5-49:** SPL 2D Superficie y Contorno - FEM Valid. No. 4.

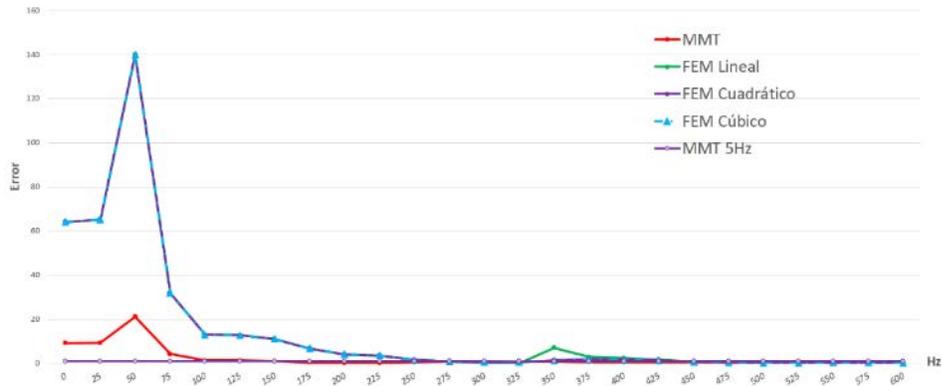


• **Error**

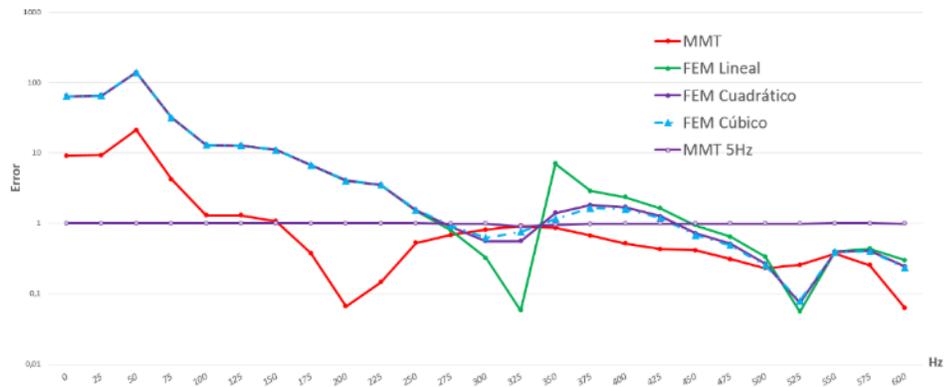
Para cuantificar las diferencias entre los resultados obtenidos mediante la simulación con respecto a los valores medidos se calculan los errores relativo y absoluto para la validación No. 4.

Las gráficas resultantes se presentan en las figuras 5-40, 5-41 y 5-42. Y como resumen se presenta la Tabla 5-11 donde se tienen los promedios para cada método.

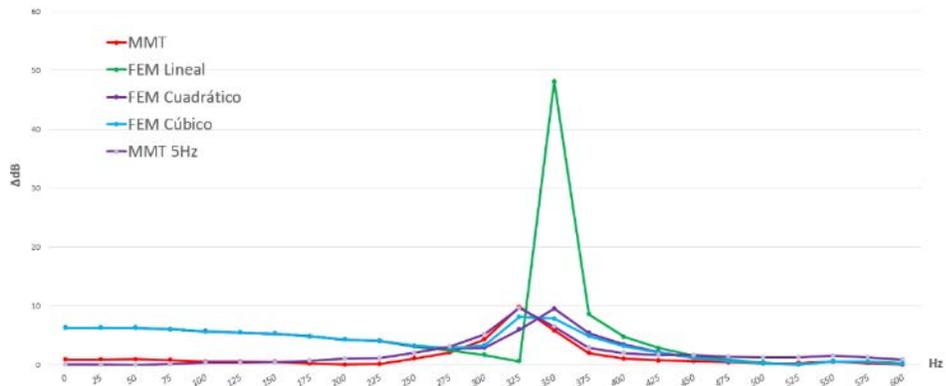
**Figura 5-50:** Error Relativo - Validación. No 4.



**Figura 5-51:** Error Relativo (Escala logarítmica) - Validación. No 4.



**Figura 5-52:** Error Relativo ( $\Delta$ dB) - Validación. No 4.



La siguiente tabla muestra el resumen del análisis de errores para el caso de validación No. 4, se puede concluir que para el silenciador resonador de Helmholtz los mejores resultados vs datos experimentales se logran con la simulación por medio del método MMT, pues se tienen lo menores porcentajes de error. Así mismo usando este método se evitan las sobre estimaciones en bajas frecuencias para la atenuación sonora en términos de TL con respecto al método FEM.

**Tabla 5-11:** Error promedio - Validación No. 4.

	<i>MMT</i>	<i>MMT</i> 5Hz	<i>FEM</i> <i>Lineal</i>	<i>FEM</i> <i>Cuadrático</i>	<i>FEM</i> <i>Cúbico</i>	Cúbico Refinado
<b>Error relativo promedio</b>	2,2%	1,0%	14,88%	14,58%	14,57%	14,56%
Error relativo promedio cerca de Frecuencia de Resonancia	0,86%	0,95%	2,48%	0,84%	0,85%	0,87%
Error Absoluto promedio ( $\Delta$ dB)	1%	2%	5%	4%	4%	4%
Error absoluto promedio ( $\Delta$ dB) cerca de Frecuencia de Resonancia	7%	7%	17%	6%	6%	7%

## 6. Conclusiones y Trabajo Futuro.

### 6.1. Conclusiones.

Los diferentes tipos de silenciadores pasivos estudiados en el presente trabajo corresponden a configuraciones particulares que fueron analizadas para formular y resolver los problemas acústicos correspondientes a cada uno de ellos mediante las dos técnicas matemáticas empleadas. Por esta razón el estudio comparativo presentado abarca la metodología usada para los métodos y no se reduce solo la comparación de resultados. Por tanto la comparación general permite decir lo siguiente:

El método de matriz de transferencia puede entenderse como una linealización del problema físico del silenciador donde para hallar la atenuación sonora lo importante es conocer la matriz de transferencia del sistema, y no las presiones y velocidades de partícula a través del conducto ni en los extremos de este. Es el término mayormente usado de acuerdo a la revisión bibliográfica sobre todo por su sencillez.

El método FEM requiere un proceso más extenso que MMT para el cálculo de la pérdida por transmisión sonora, pues al ser un método numérico este resuelve la ecuación parcial pertinente (Ecuación de Helmholtz) acorde a las condiciones de frontera definidas, además permite conocer la propagación sonora al interior del silenciador logrado un panorama más completo de los casos estudiados. El software Comsol en su solución por medio de FEM ofrece información y resultados adicionales para analizar como gradientes de presión, niveles de presión sonora al interior del ducto, curvas de contorno que permiten ubicar resonancias (modos) al interior del dominio. FEM también permite refinar el modelo geoméricamente (morfología), en lo concerniente a la definición de condiciones de frontera (CF más reales y ajustadas al modelo físico, definición de nuevos subdominios), y en cuanto a la discretización (mallas más finas, mayores órdenes de bases polinomiales).

Teniendo en cuenta lo anterior y de acuerdo a la implementación de los métodos, tanto MMT como FEM, resuelven el problema acústico basados en la propagación de una onda sonora plana, reduciendo a una solución de sistemas lineales. Para el método de elemento finitos se tendrán tantas ecuaciones e incógnitas como nodos debiendo solucionar completamente el sistema matricial encontrando los valores de  $p$  para todo el dominio y finalmente transformando las presiones sonoras a potencia acústica en los extremos de entrada y salida para conocer la atenuación sonora del silenciador, mientras que MMT tendrá un sistema lineal de menor tamaño requiriendo únicamente hallar los valores  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  (polos) de la matriz para obtener el TL.

En general el método MMT brinda fortalezas en términos de practicidad respecto a al método FEM en cuanto a formulación, cálculo y costo computacional, sin embargo, MMT no tiene en cuenta la frecuencia de corte ( $F_c$ ) del silenciador y para algunos tipos de configuraciones de conductos tiende a sobre estimar la pérdida por transmisión sonora, por lo cual se considera que MMT es una buena aproximación para simular la atenuación sonora de silenciadores pasivos pero tiene restricciones importantes y al implementarse es imperativo considerar la  $F_c$ .

Para la evaluación de los casos particulares estudiados y los resultados obtenidos en las simulaciones mediante ambos métodos se concluye que:

En el caso del ducto recto con paredes duras, ambos métodos arrojaron resultados de atenuaciones sonoras similares entre sí y coherentes.

Los valores de pérdida por transmisión sonora para la morfología del silenciador de una cámara de expansión resulta más acertado usar el método FEM, primero porque claramente muestra la frecuencia de corte y adicionalmente porque en la validación muestra la mejor correspondencia en términos de errores relativos y absolutos para el rango de interés. Al refinarse más FEM se obtiene menores porcentajes de error.

Estudiando un silenciador combinado como el de doble cámara de expansión, MMT y FEM coinciden, respecto a los valores experimentales favoreciendo FEM vs MMT a razón de 1dB y 0,2%, sin embargo, para análisis de rangos amplios se presenta lo mismo que en caso de una cámara, pues MMT simula una TL continua y no marca la frecuencia de corte.

Para la tipología de silenciador Resonador de Helmholtz se hace muy evidente la conveniencia de usar el método MMT, por su sencillez y asertividad en la forma de la curva de atenuación sonora, sin embargo, el ancho de banda es mínimo y el método es claramente sensible al paso tomado en el rango en interés. Para FEM la atenuación simulada para polinomios cuadráticos logra buena correspondencia, sin embargo, en bajas frecuencias se muestran atenuaciones sobreestimadas.

Al incluir material absorbente en un ducto se tiene un caso más elaborado que los anteriores (Validación No. 3) desde la formulación hasta la solución del problema. Para MMT se requiere analizar cómo afectan las condiciones de impedancia a la propagación sonora en el ducto, más precisamente el vector número de onda axial. En FEM primero se fija el borde como condición de frontera absorbente y luego para refinar el modelo se incorpora un subdominio absorbente. Los mejores resultados se obtienen por MMT usando la reducción de Munjal y FEM con el subdominio absorbente, para FEM con CF de impedancia se obtiene sobre estimación del TL. En todos los casos se usa la aproximación de Delany-Bazley que describe la propiedad de atenuación para el recubrimiento. Los mejores resultados se logran para dominios completos del silenciador, es decir, considerar la forma completa del modelo y no ejes de simetría, se considera que adicional a la morfología la inserción de un nuevo medio (subdominio) hace que la presión sonora en cada punto sea más sensible en este tipo de ductos.

En el caso de un silenciador mixto, es decir, con una cámara de expansión y recubrimiento absorbente en sus paredes internas los resultados de las simulaciones

MMT logra una buena aproximación mostrando un mayor ancho de banda en los picos de las atenuaciones con respecto al modelo FEM con subdominio absorbente el cual también muestra buena correspondencia. Por su parte como en el caso anterior el modelo FEM con CF de impedancia sobreestima el TL.

En términos de versatilidad y adaptabilidad se considera que los dos métodos tienen fortalezas, pues luego de entender su formulación e implementación usar los Software Matlab en MMT y Comsol para FEM son flexibles y versátiles para las simulaciones de las diferentes configuraciones y casos estudiados.

La principal ventaja de los métodos matemáticos para el cálculo de pérdida por absorción sonora es: para FEM considerar el fenómeno de propagación sonora en el ducto y considerar la frecuencia de corte del silenciador, y para MMT la facilidad y rapidez del cálculo.

Las condiciones de frontera además de complementar a la ecuación de Helmholtz en la formulación del problema a resolver en cada uno de los ejemplos resueltos, son determinantes en los resultados de las simulaciones realizadas por el método FEM. Las condiciones de frontera pueden refinar el modelo logrando describir de forma más precisa el problema de interés. Para el caso de silenciadores acústicos no bastó solo con usar las condiciones típicas (Dirichlet, Neumann y Robin) sino que debido a las características del problema (conocimiento del fenómeno físico) y con el apoyo en referencia bibliográfica fue necesario utilizar condiciones ajustadas y más elaboradas como las de impedancia, continuidad y Sommerfeld.

En MMT las condiciones de frontera se usan solo para deducir y definir el sistema matricial del ejemplo de interés y se consideran los casos cerrado y abierto para los dos extremos.

En términos de diseño para escoger el tipo de silenciador a utilizar y el método de simulación para simularlo se considera que:

Primero es necesario realizar un diagnóstico del tipo de fuente de ruido y identificar su espectro, así mismo determinar las consideraciones y posibles restricciones funcionales sean mecánicas, constructivas, de montaje de la fuente (siendo esta un equipo técnico o maquinaria).

El método MMT es una buena herramienta para tener una primera aproximación al diseño y tipo de silenciador, siempre teniendo en cuenta la  $F_c$ .

Se debe tener claridad del tipo de problemática de ruido, diferenciando emisión, inmisión y etc., y así mismo la legislación aplicable.

Como complemento a la primera aproximación con MMT se considera que desarrollar la simulación mediante FEM ofrece mayor certidumbre en el diseño, pues este método ofrece información adicional y corrobora valores esperados a partir de la  $F_c$ .

También es importante contar con que la tratarse de simulaciones se tendrá márgenes de error similares a los calculados para la validación presentada en el trabajo. Resaltando que el TL se da en dB unidad logarítmica por lo cual los errores absolutos

relativos orientan las posibles diferencias entre simulaciones y mediciones experimentales.

Teniendo en cuenta la responsabilidad de un desarrollo ingenieril no se considera que solo se deba tener en cuenta el método más práctico sino tener en cuenta un proceso como el descrito.

## 6.2. Aportes del proyecto.

El principal aporte es desarrollar un proyecto con un enfoque diferente con respecto a la literatura especializada, debido al análisis realizado y la presentación y solución de los problemas acústicos estudiados para los dos métodos, también por incorporar el análisis de error vs datos experimentales de bibliografía para distintas configuraciones de silenciadores.

Implementar el método de matriz de transferencia para calcular la atenuación sonora en términos de TL para silenciadores mixtos, es decir, incorporar la condición de absorción en paredes a ductos reactivos, pues es un caso poco desarrollado y en las referencias bibliográficas no se profundiza y apenas se comienza a trabajar.

Mostrar la influencia e importancia de las condiciones de frontera en la formulación, implementación, solución y análisis de resultados para el problema acústico de silenciadores en los diferentes casos de estudio.

Afrontar y atender una problemática como el ruido por medio de técnicas matemáticas, métodos numéricos y un análisis ingenieril del fenómeno acústico en ductos y silenciadores.

Usar datos experimentales de literatura como método de validación y de los métodos definidos para resolver el problema acústico planteado en los diferentes casos de estudio.

## 6.3. Productos y Publicaciones.

Como producto de este proyecto se han trabajado cuatro artículos concursando para a congresos de ingeniería y matemáticas nacionales e internacionales, dos de los cuales ya han sido presentados y los dos adicionales acaban de ser evaluados y aceptados.

Los artículos presentados son:

- Análisis de la propagación sonora en Silenciadores usando el Método de Elementos Finitos - Enid 2012 Universidad Nacional de Colombia. ISBN 978-958-761-308-7.  
<http://www.enid.unal.edu.co/2012/memorias/fscommand/investigacion/28.pdf>

- Estudio de la atenuación sonora en silenciadores de cámara de expansión con y sin paredes absorbentes usando los métodos FEM y TMM. IX CONGRESO COLOMBIANO DE METODOS NUMERICOS: Simulación en Ciencias y Aplicaciones Industriales. IX CCMN 2013, agosto. 21-23, 2013, UAO Cali, Colombia. ISBN 978-958-8713-50-2.

Los artículos aceptados para poster y ponencia corresponden respectivamente a:

- Analysis of boundary conditions in acoustic ducts.
- Sound attenuation comparison and noise control for 2D acoustics silencers using FEM and TMM methods for inner duct walls with and without absorber material.

Ambos presentados para el congreso: International Conference on Applied Mathematics and Informatics -ICAMI 2013. San Andrés, Colombia.

## **6.4. Trabajo Futuro y perspectiva.**

El proyecto desarrollado para silenciadores acústicos pasivos y la comparación correspondiente de los métodos FEM y MMT para calcular la atenuación sonora de distintas topologías permite sugerir diferentes enfoques de profundización como:

Estudio del fenómeno usando para la formulación la ecuación de onda sonora en silenciadores (consideración del fenómeno acústico dinámico), no reducir el problema a ondas planas.

Uso de otros métodos matemáticos como WBM (Wave Based Method) y BEM (Elementos de contorno) para resolver para el problema acústico de silenciadores.

Profundización en el estudio del recubrimiento absorbente mediante medios porosos.

Desarrollo experimental de mediciones acústicas de atenuación sonora acorde a la normativa existente.

Evaluación de control de ruido de ductos para parámetros distintos al TL como los son el IL (pérdida por inserción sonora) y el NR (índice de reducción de ruido).

# Bibliografía

[1] Elespectador.com. Bogotá, <http://www.elespectador.com/articulo-220579-mas-de-13-mil-quejas-exceso-de-ruido-se-han-registrado-2006>, Lun, 08/23/2010 - 15:19.

[2] Convenio de asociación n° 038/04 (numeración MAVDT) - 112/04. Documento soporte norma de ruido ambiental Subdirección de estudios ambientales IDEAM, [http://www.minambiente.gov.co/documentos/3126\\_1727\\_Documento\\_soporte\\_ruido\\_mayo\\_25.pdf](http://www.minambiente.gov.co/documentos/3126_1727_Documento_soporte_ruido_mayo_25.pdf), Bogotá, febrero de 2006

[3] SIVIAN L. J., Sound Propagation in Ducts Lined with Absorbing Materials. J. Acous. Soc. Am. 9, 135 (1937).

[4] MORSE Philip M. The Transmission of Sound Inside Pipes. J. Acoust. Soc. Am. Volume 11, Issue 2, pp. 205-210 (1939).

[5] ROCHESTER Nathaniel, The Propagation of Sound in Cylindrical Tubes , APRIL, 1941 J. A. S. A. VOLUME 12

[6] INGARD Uno. On the Theory and Design of Acoustic Resonators. Journal of the Society of America, Volume 25 Number 6, 1953.

[7] DAVIS Dan D., STOKES George M., Theoretical and Experimental Investigation of Mufflers with Comments on Engine-exhaust Muffler Design. NACA Report 1192. U.S. Government Printing Office, 1954.

[8] MUNJAL M. L. & SREENATH A. V. Evaluation of noise attenuation due to exhaust mufflers. *J. Sound Vib.* (1970) 12 (1), 1-19

[9] MOHANTY A. R. and PATTNAIK S. P. SAE Paper No. 2005-26-053. An Optimal Design Methodology for a Family of Perforated Mufflers Indian Institute of Technology, Kharagpur, India

[10] GALDÁMEZ F. 2005. Tesis: Modelación Numérica en conductos y Silenciadores Acústicos. Universidad Austral de Chile, Escuela de Ingeniería Acústica

[11] GERGES S., Muffler Modeling by Transfer Matrix Method and Experimental Verification. J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. & Eng., 2005, Vol. XXVII, No. 2 Disponible en: <http://www.scielo.br/pdf/jbsmse/v27n2/25381.pdf> ).

- [12] MOLLOY Charles. Propagation of Sound in Lined Ducts, Journal of the Acoustical Society of America. Volume 16, Number 1 July 1944.
- [13] FROMMHOLD W. and MECHEL F. P. Simplified methods to calculate the attenuation of silencers. Journal of sound and vibration (1990) 141(l), 103-125
- [14] PEAT K. S.. A transfer matrix for an absorption silencer element *journal of sound and vibration* (1991) 146(2), 353-360
- [15] KIRBY R., Simplified techniques for predicting the transmission loss of a circular dissipative silencer. *Journal of sound and vibration* (2001) 243(3), 403- 426.
- [16] DE VICENTE Santiago y IZAGUIRRE Elena, Análisis numérico de las propiedades de propagación de algunos métodos de elementos finitos para ecuaciones de onda 2D Revista Internacional de Métodos Numérico para Cálculo y Diseño en Ingeniería. Vol. 7, 1, 163-191(1991)
- [17] BILAWCHUK Steven, Finite Element Modeling of Acoustical Silencers, University of Alberta. Dept. of Mechanical Engineering. (2002)
- [18] THOMPSON Lonny, A review of finite-element methods for time-harmonic acoustics J. Acoust. Soc. Am. 119 \_3\_, March (2006).
- [19] STREK Tomas. Finite Element Modelling of Sound Transmission Loss in Reflective Pipe. (2010). Chapter 27. Finite Element Analysis.
- [20] VASILE Ovidiu. Finite Element Analysis for Reactive and Dissipative Rectangular Muffler. Recent Advances in Signal Processing, Computational Geometry and Systems Theory. (2011).
- [21] PÉREZ M<sup>a</sup> del Carmen. Atenuación del sonido en conductos. Proyecto fin de carrera. Escuela técnica superior de ingeniería, Universidad de Sevilla. (2011).Cap. 2.
- [22] KINSLER Lawrence. Fundamentals of Acoustics 2ND Edition, John Wiley & Sons (1964). Cap 5.
- [23] MUNJAL, M.L.: Acoustics of Ducts and Mufflers. Wiley-Interscience, New York (1987)
- [24] JACOBSEN Finn. Propagation of sound waves in ducts. 2011. Note no 31260 Technical September (2011).

- [25] GONZÁLEZ Manuel, Problemas con valores en la frontera con aplicaciones a la ingeniería. - 2. ed. (1999). Universidad Nacional de Colombia, Medellín.
- [26] MORSE Philip M., Herman Feshbach. Methods of Theoretical Physics. Mc Graw-Hill book, (1953). Cap. 11.
- [27] PIERCE Allan, Acoustics: An Introduction to Its Physical Principles and Applications. Acoustical Society of America, (1989) - 678 pages.
- [28] SCHOT Steven. Eighty Years of Sommerfeld's Radiation Condition. *History mathematica* 19 (1992) 385-401.
- [29] MAJDA Andrew, Absorbing Boundary Conditions for the Numerical Simulation of Waves. *Mathematics of Computation*, Vol. 31, No. 139 (Jul. 1977), pp. 629-651. American Mathematical Society.
- [30] WHITE C. On the parallelization of the acoustic wave equation with absorbing boundary conditions. ORNL/TM- 13373. 1998.
- [31] WRIGHT Matthew, Lecture Notes on the Mathematics of Acoustics. Imperial College Press, 2005. .
- [32] DELANY M., y BAZLEY E., "Acoustic properties of fibrous absorbent materials". *Applied Acoustics* Vol. 3, 1970, pp.105-116.
- [33] VORONINA N., Acoustic Properties of Fibrous Materials. *Applied Acoustics* 42 (1994) 165-174.
- [34] KIDNER Mike, Colin H. Hansen A comparison and review of theories of the acoustics of porous materials *International Journal of Acoustics and Vibration*, 13 (3), p112-119. (2008).
- [35] COMSOL Multiphysics Modeling Guide, Absorptive Muffler solved with comsol multiphysics 3.5a®, (2008), COMSOL AB.
- [36] ALBA Jesus, RAMIS Jaime, Propuesta de modelo empírico para materiales absorbentes acústicos. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*. Vol. 24, 2, 147-162 (2008)
- [37] BIES D. A. and HANSEN C. H., Acoustical properties of fibrous absorbent materials, *Appl. Acoust.*, vol. 14, 1980, pp. 357–391.
- [38] Resolución 0627(06) del Ministerio del Ministerio de Ambiente, Vivienda y Desarrollo Territorial, por la cual se establece la norma nacional de emisión de ruido y ruido ambiental (Colombia), (2006).

- [39] Resolución 6918 DE 2010, Secretaría Distrital de Ambiente (Bogotá), Por la cual se establece la metodología de medición y se fijan los niveles de ruido al interior de las edificaciones (inmisión) generados por la incidencia de fuentes fijas de ruido". (2010).
- [40] TOCCI Gregory, Room Noise Criteria—The State of the Art in the Year 2000.
- [41] ASHRAE HANDBOOK Sound and Vibration Control. Cap 48.
- [42] NELSON P. A. and ELLIOTT S. J., *Active Control of Sound*. SanDiego, CA: Academic, (1992).
- [43] KUO Sen and MORGAN Dennis, Active Noise Control: A Tutorial Review. Proceedings of the IEEE, VOL. 87, NO. 6, JUNE (1999), 943.
- [44] COBO Pedro., BRAVO T., Control activo del ruido. Instituto de Acústica. Revista de Acústica. Vol. XXXI. No. 3 y 4. (2000).
- [45] MECHEL F., Formulas of Acoustics, 2ª Edición, Spinger, 2008, pp. 595-841.
- [46] Silenciador con una cámara de expansión - Reactivo – Imagen tomada de <http://www.directindustry.com/industrial-manufacturer/silencer-61472.html>
- [47] KRÜGER Jan J., The calculation of actively absorbing silencers in rectangular ducts, Journal of Sound and Vibration (2002) 257(5), 887–902.
- [48] YEH Long-Jyi, CHANG Ying-Chun, CHIU Min-Chie. Shape Optimal Design on Double-Chamber Mufflers Using Simulated Annealing and a Genetic Algorithm. Turkish J. Eng. Env. Sci. 29 (2005), 207 - 224. TUBITAK
- [49] Resonador de Helmholtz – Reactivo – Imagen tomada de [http://people.seas.harvard.edu/~jones/cscie129/nu\\_lectures/lecture3%20ho\\_helmholtz/ho\\_helmholtz.html](http://people.seas.harvard.edu/~jones/cscie129/nu_lectures/lecture3%20ho_helmholtz/ho_helmholtz.html)
- [50] SEO Sang-Hyun, KIM Yang-Hann, Silencer design by using array resonators for low-frequency band noise reduction. (2005) Acoustical Society of America.
- [51] Splitter - Disipativo – Imagen tomada [http://www.troxtechnik.com/en/products/silencer/splitter\\_attenuators/mas/index.html](http://www.troxtechnik.com/en/products/silencer/splitter_attenuators/mas/index.html)
- [52] NTC 5040. Acústica. Directrices para el control de ruido por medio de silenciadores. Norma Técnica Colombiana –Icontec., (2002).
- [53] KUMAR Sathish, Linear Acoustic Modelling and Testing of Exhaust mufflers, Master of Science Thesis, Stockholm, Sweden 2007.

[54] Modos en frecuencias altas en un ducto – Imagen tomada de [http://www.nd.edu/~atassi/Lectures/Boeing/Boeing0413\\_f.pdf](http://www.nd.edu/~atassi/Lectures/Boeing/Boeing0413_f.pdf)

[55] MUNJAL M L. Advances in the acoustics of flow ducts and mufflers. September 1990, pp. 57-72

[56] SONG Bryan H. and BOLTON J. Stuart, A transfer-matrix approach for estimating the characteristic impedance and wave numbers of limp and rigid porous materials, J. Acoust. Soc. Am. Volume 107, Issue 3, pp. 1131-1152 (2000); (22 pages)

[57] SINGH Sarabjeet, Colin H. Hansen and Carl Q. Howard, A detailed tutorial for evaluating in-duct net acoustic power transmission in a circular duct with an attached cylindrical Helmholtz resonator using transfer matrix method, Proceedings of ACOUSTICS 2008 24-26 November 2008, Geelong, Australia Acoustics 2008.

[58] MARTÍNEZ Manuel. Tesis doctoral. Modelado analítico-numérico y caracterización experimental de silenciadores de escape híbridos. Universidad Politécnica de Valencia. Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales. (2010).

[59] MENA Daniel. Estudio Teórico De Barreras acústicas basado en un modelo modal. Universidad Austral de Chile, (2006).

[60] MÖSER Michael, Engineering Acoustics: An Introduction to Noise Control (2009).

[61] ARAOS Marco, Diseño e implementación de una aplicación computacional para el modelado de soluciones acústicas. Universidad Austral de Chile. (2010).

[62] SELAMET A. and RADAVIDICH P. M., Circular concentric Helmholtz resonators. (1997) Acoustical Society of America.

[63] SELAMET Ahmet, Iljae LEE, Helmholtz resonator with extended neck. (2003) Acoustical Society of America.

[64] SEO Sang-Hyun, KIM Yang-Hann Silencer design by using array resonators for low-frequency band noise reduction. (2005). Acoustical Society of America.

[65] GLAV Ragnar, On Acoustic Modelling of Silencers, (1994), Doctoral thesis, KTH, Sweden.

[66] ZIENKIEWICZ O. C., El método de los elementos finitos, (1981).

[67] CROCKER M., YOUNG C., Prediction of transmission loss in mufflers by the finite element method. Journal of the Acoustical Society of America, 57: 144–148, (1975).

[68] KRISTIANSEN Ulf, VIGGEN Erlend, Computational methods in acoustics. Department of electronics and telecommunications — NTNU (2010).

[69] ISO 11820:1996 Acoustics — Measurements on silencers in situ

[70] TAO Z. and SEYBERT A. F., A Review of Current Techniques for Measuring Muffler Transmission Loss. University of Kentucky. (2003).

[71] AGUAYO, J., “Aplicación de técnicas digitales de medición del aislamiento suministrado por silenciadores en presencia de flujo”, Tesis Universidad Austral de Chile, (2005).

[72] RIVAS Cristian., Pérdida de Carga en Silenciadores Pasivos Disipativos tipo Splitter. Universidad Austral de Chile. Tesis (2010).

[73] DE BEDOUT Juan Manuel, Adaptive-passive noise control with self-tuning helmholtz resonators, Master Thesis Purdue University.