

# ALGEBRA LINEAL CON DERIVE

ROSA FRANCO ARBELAEZ  
Profesora Asociada

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA  
SEDE MEDELLIN  
FACULTAD DE CIENCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS  
Medellín, junio de 1998

UNAL-Medellín



6 4000 00153377 0

T  
512.5  
F71  
1998

*A mis hijos Juan Esteban y Maria Elena*

## PROLOGO

Con el propósito de implementar el uso del Derive en los cursos de Algebra Lineal surgió la idea de escribir esta guía como una ayuda para los estudiantes en su trabajo con computador.

Este folleto contiene una guía básica, una serie de ejercicios resueltos con Derive y una colección de prácticas propuestas. En la guía básica presento, además de las principales funciones de Derive en cuanto a manejo de vectores y matrices, los procedimientos usados en los algoritmos más importantes de un curso básico de Algebra Lineal; cada procedimiento está ilustrado con ejemplos. En la sección de ejercicios resueltos he tratado de cubrir todos los temas del curso de Algebra Lineal y he incluido además un ejercicio relacionado con Geometría Analítica. Finalmente, en esta segunda edición, propongo una serie de prácticas de diferentes temas de Geometría y Algebra Lineal, las cuales pueden ser recomendadas como trabajos para los estudiantes; los ejercicios propuestos ofrecen cierto dinamismo e individualidad porque en muchos de ellos los datos dependen del número del carné del alumno y en algunos otros, se generan aleatoriamente.

Espero haber cumplido mi objetivo de facilitar a profesores y estudiantes de Algebra Lineal el trabajo con Derive.

Quiero expresar mis agradecimientos al profesor Julio César Morales C. por haberme asesorado en la capacitación para el manejo de Derive; igualmente a la profesora Luz Elena Muñoz Sierra, quién después de experimentar el uso de la guía inicial con sus grupos, me hizo importantes sugerencias. Agradezco además al Director del Departamento de Matemáticas, Arturo Jessie Manuel, por animarme a realizar este trabajo y proporcionarme el tiempo y los recursos necesarios.

Rosa Franco Arbeláez

## CONTENIDO

### Algebra Lineal con Derive. Guía Básica

- I. Entrada de vectores y matrices 1
- II. Funciones para manipular vectores y matrices 2
- III. Cómo resolver sistemas de ecuaciones lineales 8
- IV. Ajuste de datos por mínimos cuadrados 11
- V. Cómo hallar bases ortonormales (Proceso de Gram-Schmidt) 14
- VI. Cómo hallar valores y vectores propios de una matriz cuadrada 15

### EJERCICIOS RESUELTOS

- Rectas y planos 21
- Manipulación de componentes 22
- Operaciones con matrices 23
- Eliminación Gaussiana y espacios fundamentales 25
- Análisis de solubilidad de un sistema 29
- Subespacios de  $R^n$  y ortogonalidad 30
- Ajuste por mínimos cuadrados 34
- Bases ortonormales, factorización QR 36
- Determinantes 38
- Valores y vectores propios 40
- Aplicación de valores y vectores propios 41

### PRACTICAS PROPUESTAS

- 1. Rectas y planos 45
- 2. Operaciones con matrices y vectores 46
- 3. Eliminación Gaussiana y subespacios fundamentales 47
- 4. Sistemas de ecuaciones lineales y subespacios fundamentales 48
- 5. Independencia lineal, bases y dimensión 52
- 6. Ajuste por mínimos cuadrados 53
- 7. Ortogonalidad entre vectores y subespacios de  $R^n$  54
- 8. Determinantes 56
- 9. Valores y vectores propios 57

# ALGEBRA LINEAL CON DERIVE

## Guía Básica

Algunas de las funciones que aparecen en esta guía fueron programadas por el profesor Julio César Morales C. del Departamento de Matemáticas y pueden ser utilizadas en la Sala de Informática de la Facultad de Ciencias. A otras les ha cambiado los nombres originales por nombres más cómodos y al finalizar la guía aparece un paralelo entre dichos nombres, para tener en cuenta si se trabaja en otro lugar.

### I. Entrada de vectores y matrices.

#### a) En la línea de comandos :

- 1) Para entrar un vector se selecciona el comando DECLARE y en éste se elige vectorR, ésto puede hacerse tecleando primero la letra D y luego la letra R. Aparece en pantalla lo siguiente :

DECLARE VECTOR : Dimensión : \_

Se digita entonces el número de componentes del vector y se da ENTER ; luego pide los elementos del vector uno a uno y cuando ha recibido el total de componentes, carga el vector en la ventana de álgebra, asignándole un número (#n). Si se desea denotar el vector mediante una letra v, por ejemplo, se da luego la instrucción v:=#n. Si más adelante se quiere utilizar la letra v como argumento de una función, antes de hacerlo se debe inasignar mediante la instrucción v:=. Se recomienda no usar las letras i, j, k, x como nombres, porque ellas fueron usadas en los programas de algunas funciones.

- 2) Para entrar una matriz se selecciona el comando DECLARE MATRIX, digitando la letra D y luego la letra M. Aparece en pantalla lo siguiente :

DECLARE MATRIX : Rows : \_ Columns : \_

Se entra el número de filas y el número de columnas. Luego pide uno a uno los elementos de la matriz indicando cada vez su posición.

#### b) Con el comando AUTHOR

- 1) Se entra un vector digitando sus componentes entre corchetes y separados por comas, así : [ \_ , \_ , ... , \_ ].
- 2) Se entra una matriz como un vector de vectores, cuyas componentes son las filas de la matriz, así : [ [ \_ , \_ , ... , \_ ] , [ \_ , \_ , ... , \_ ] , ... , [ \_ , \_ , ... , \_ ] ].

#### c) Generando vectores y matrices

Se pueden generar vectores y matrices evaluando una expresión U(k) (U(j,k)) en una secuencia de valores de k ( de j y k) de la siguiente manera :

##### 1) Para vectores:

Con el comando AUTHOR, se entra la instrucción VECTOR (U(k),k,i,f,p), donde:

U(k) es la expresión que se quiere evaluar

k es la variable

i es el valor inicial de k

f es el valor final de k

p es el tamaño del paso