

*Modelamiento Bayesiano de caudal y precipitación
aplicando modelos dinámicos y procesos de Poisson no
homogéneos*

DAGOBERTO BERMÚDEZ R.
MAGISTER (C) EN ESTADÍSTICA
CÓDIGO: 832365



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA
BOGOTÁ, D.C.
2012

*Modelamiento Bayesiano de caudal y precipitación
aplicando modelos dinámicos y procesos de Poisson no
homogéneos*

DAGOBERTO BERMÚDEZ R.
MAGISTER (C) EN ESTADÍSTICA
CÓDIGO: 832365

TRABAJO DE TESIS PARA OPTAR AL TÍTULO DE MAGISTER EN
CIENCIAS ESTADÍSTICA
MAGISTER EN CIENCIAS ESTADÍSTICA

DIRECTOR
EDILBERTO CEPEDA CUERVO, PH.D.
DOCTOR EN MATEMÁTICAS



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA
BOGOTÁ, D.C.
2012

Título en español

Modelamiento Bayesiano de caudal y precipitación aplicando modelos dinámicos y procesos de Poisson no homogéneos

Title in English

Bayesian modeling of flow and precipitation using dynamic models and nonhomogeneous Poisson processes

Resumen: La predicción de series temporales hidrológicas con la cuantificación de la incertidumbre, es una herramienta importante para la gestión de los recursos de agua. La no estacionariedad causada por el cambio climático y otros factores, tales como el cambio en las propiedades físicas de las cuencas hidrográficas, hacen que la tarea de pronóstico sea difícil mediante los métodos tradicionales. Por lo anterior, en este trabajo se proponen métodos Bayesianos para el estudio de la precipitación y del caudal de un río. En la primera parte, se proponen modelos constantes, de regresión dinámica (MRD) y modelos lineales jerárquicos (MLJ). El modelo constante utiliza la información del pasado dada por los valores observados de la serie de tiempo, mientras que el MRD utiliza como covariables la información de la cantidad de precipitación medida en la parte alta de la cuenca del río. En la segunda parte se considerará un Proceso de Poisson no Homogéneo (PPNH) para estimar la cantidad de veces que el caudal del río está por debajo o por encima de ciertos niveles dados, asumiendo algunas funciones de intensidad. Dichas metodologías se aplican en el análisis de los datos del caudal del río Sumapaz recolectados entre enero 01 de 1989 y 31 de diciembre de 2001.

Abstract: The hydrological time series prediction with uncertainty quantification is an important tool for the resource management water. Due to climate change and other factors such as changes in the physical properties of drainage basin, then the forecasting by means of traditional methods is going to be a difficult work. By the above, this work proposes Bayesian methods for studying of precipitation and discharge. In the First time, it proposes constant models of dynamic regression and hierarchical models. The constant model uses information based on observed values of the time series, while the dynamic regression model uses the precipitation measured in upper river basin information as covariates. In the second one, we consider a nonhomogeneous Poisson process to estimate how many times the discharge is below or above certain levels given, assuming some functions of intensity. These methodologies are applied in the analysis of data of Sumapaz river discharge. These data were collected between January 1, 1989 and December 31, 2001

Palabras clave: Caudal, Inferencia Bayesiana, Modelo Lineal Dinámico, Muestreador de Gibbs, Precipitación, Proceso de Poisson no Homogéneo, Regresión dinámica.

Keywords: Flow, Bayesian Inference, Dynamic Linear Model, Gibbs sampler, precipitation, nonhomogeneous Poisson process, dynamic regression.

Nota de aceptación

Trabajo de tesis

“Mención ”

Jurado

Jurado

Jurado

Director
Edilberto Cepeda

Bogotá, D.C., Junio de 2012

Dedicado a

A la memoria de mis padres Genaro y Rosa Helena y a mi hija Nahomi Juliana.

Agradecimientos

Agradezco a Dios, a todos mis maestros de la Universidad Nacional en especial a mi director Edilberto Cepeda Cuervo por su dedicación y confianza y a Elmen D'Achiardi por su infinita colaboración.

Índice general

Índice general	I
Índice de tablas	III
Índice de figuras	IV
Introducción	VI
1. Modelos estadísticos	1
1.1. Modelos lineales dinámicos	1
1.1.1. Modelo lineal dinámico univariado	2
1.1.1.1. Modelo polinomial de primer orden	2
1.1.1.2. Modelo constante	4
1.1.1.3. Comportamiento límite y convergencia	4
1.1.1.4. Modelo con varianza constante desconocida	5
1.2. Modelo de Regresión Dinámico (MRD)	7
1.3. Modelo lineal dinámico jerárquico (MLDJ)	9
1.3.1. Ecuaciones de evolución y actualización	9
1.3.2. Criterios de comparación de modelos	10
2. Proceso de Poisson	12
2.1. Aspectos generales	12
2.2. El proceso de Poisson	16
2.3. El Proceso de Poisson Homogéneo (PPH)	17
2.4. El Proceso de Poisson no Homogéneo (PPNH)	17
2.5. Estimación Bayesiana de los parámetros del modelo	18
2.5.1. La Función de verosimilitud	20

3. Descripción de la cuenca y de datos de caudal del río Sumapaz	21
4. Análisis del caudal del río Sumapaz	24
4.1. Regresión dinámica simple con intercepto: Análisis del caudal como función de la precipitación promedio.	24
4.1.1. Regresión sin intercepto	26
4.1.2. Modelo Dinámico Constante	27
4.2. Regresión lineal dinámica múltiple: Análisis del caudal como una función de las precipitaciones medidas en las estaciones Núñez-San Juan y Cabrera-Peñas Blancas	28
4.3. Observaciones faltantes	31
4.4. Un Análisis del caudal como función de la precipitación usando Modelos Jerárquicos	32
4.5. Procesos de Poisson no Homogéneos	36
5. Conclusiones e investigaciones futuras	41
A. Abreviaturas y definiciones	43
A.1. Abreviaturas	43
A.2. Algunos términos hidrológicos	44
B. Modelo lineal dinámico generalizado	45
B.1. Introducción	45
B.2. Modelos de la familia exponencial	46
B.2.1. Distribuciones observacionales en la familia exponencial	46
B.2.2. Análisis conjugado	47
B.3. Modelos lineales dinámicos generalizados	47
B.3.1. Marco de regresión dinámica	47
C. Algoritmos	49
Bibliografía	52

Índice de tablas

3.1. Estaciones río Sumapaz	22
4.1. δ óptimo para la regresión con y sin intercepto	26
4.2. Pronósticos un paso adelante	28
4.3. δ óptimo para la regresión con datos faltantes	31
4.4. Resumen de la distribución a posteriori para los parámetros del modelo de la forma 4.9	34
4.5. Resumen de la distribución a posteriori para los parámetros del modelo de la forma 4.10	36
4.6. Media a posteriori, desviación estándar (DE) e intervalo de credibilidad del 95 % para los parámetros del modelo MOP y MOP _I para el caudal del río Sumapaz	38
4.7. Estimaciones para la función de valor medio y número de observaciones acumulados para valores inferiores a Q_1 y superiores a Q_3 para los modelos MOP y MOP _I	38
C.1. Algoritmo 1	50
C.2. Algoritmo 2	51

Índice de figuras

2.1.	Valores que superan el umbral y sus proyecciones	13
2.2.	Periodo de retorno	14
2.3.	Tendencias paramétricas y no paramétricas para un PPNH	15
2.4.	Numero acumulado de sobrepasos del umbral	15
2.5.	Número de casos reportados de tuberculosis en Nueva York entre 1970 y 2000	16
2.6.	Función de valor medio – Estimado; o Observado	16
3.1.	Cuenca del río Sumapaz <i>Fuente: INVIAS http://bit.ly/A3sibC</i>	21
3.2.	Mapa del río Sumapaz <i>Fuente: Google maps</i>	22
3.3.	Promedio mensual de precipitación y caudal	23
3.4.	Serie de tiempo y autocorrelograma de la serie caudal	23
4.1.	(a) <i>MSE</i> , <i>MAD</i> y <i>LIK</i> medidos como funciones de δ para la regresión lineal simple dinámica con intercepto. (b) Pronóstico dentro de muestra para el año 2002.	25
4.2.	Trayectoria estimada de α_t (a) y β_t (b) para $\delta = 0.95$ con sus intervalos de credibilidad del 90 % para la regresión lineal simple dinámica con intercepto para el caudal con <i>PROM</i> como covariable.	25
4.3.	(a) Promedio de precipitación y caudal. (b) <i>CME</i> , <i>DAM</i> y <i>LIK</i> medidos como funciones de δ para la regresión lineal simple dinámica sin intercepto.	26
4.4.	(a) Trayectoria estimada de β_t para $\delta = 0.7$ con sus intervalos de credibilidad del 90 % para la regresión lineal simple dinámica sin intercepto y (b) pronóstico dentro de muestra del caudal un paso adelante: $\delta = 0.7$	27
4.5.	Estimación del caudal promedio mensual para la estación El Profundo bajo el modelo constante para $r = 0.05$ (a) y $r = 0.5$ (b).	27
4.6.	(a) <i>CME</i> , <i>DAM</i> y <i>LIK</i> medidos como funciones de δ para la regresión lineal multiple dinámica. (b) Trayectoria en línea de α_t con $\delta = 0.95$ para la regresión lineal multiple dinámica	29

4.7. (a) Trayectoria en línea de β_t con $\delta = 0.95$ para la regresión lineal múltiple dinámica. (b) Trayectoria en línea de γ_t con $\delta = 0.95$ para la regresión lineal múltiple dinámica	29
4.8. (a) Comparación de Y y \hat{Y} con $\delta = 0.95$. (b) Pronóstico dentro de muestra para el año 2002	29
4.9. (a) CME , DAM y LIK medidos como funciones de δ para la regresión lineal múltiple dinámica. (b) Trayectoria en línea de α_t con $\delta = 1$ para la regresión lineal múltiple dinámica	30
4.10. (a) Trayectoria en línea de β_t con $\delta = 1$ para la regresión lineal múltiple dinámica. (b) Trayectoria en línea de γ_t con $\delta = 1$ para la regresión lineal múltiple dinámica	30
4.11. (a) Comparación de Y y \hat{Y} con $\delta = 1$. (b) Pronóstico dentro de muestra para el año 2002.	31
4.12. Caudal observado y estimado para el modelo lineal dinámico jerárquico 4.9 con sus intervalos de credibilidad al 90 %	32
4.13. β_t estimado para el modelo lineal dinámico jerárquico con sus intervalos de credibilidad al 90 %	33
4.14. Caudal observado y caudal estimado para el modelo lineal dinámico jerárquico (4.10) que incluye tres rezagos con sus intervalos de credibilidad al 90 %	35
4.15. Número de casos por debajo de Q_1 y por encima de Q_3 en la estación El Profundo del río Sumapaz, 1989 - 2001	37
4.16. Función de valor medio estimada y observada en el que el caudal es inferior al primer cuartil del caudal en la estación El Profundo del río Sumapaz, para (a) modelo MOP y (b) modelo MOP_I de 1989 a 2001	39
4.17. Función de valor medio estimada y observada en el que el caudal es superior al tercer cuartil del caudal en la estación El Profundo del río Sumapaz, para (a) modelo MOP y (b) modelo MOP_I de 1989 a 2001	39
4.18. Pronóstico para año 2002	40

Introducción

En el análisis de series temporales y en particular en el de series hidrológicas, los modelos ARIMA de (Box & Jenkins, 1976) son ampliamente utilizados. Estos son de naturaleza estática y están construidos sobre las propiedades estadísticas de series de tiempo, por lo tanto, una vez que los parámetros están determinados, se supone que son constantes en el tiempo. A menudo, este supuesto no se cumple, debido a que los factores climáticos pueden causar cambios en las propiedades estadísticas de las series temporales. Un inconveniente de estos modelos es la necesidad de una muestra lo suficientemente grande para la estimación de los parámetros y la validación del modelo antes de su implementación. Las deficiencias en los enfoques de modelamiento tradicional llevan a los investigadores a planteamientos más elaborados. Los modelos dinámicos Bayesianos (MDB) (Bernier, 1994) no requieren que las series de tiempo sean estacionarias y, por lo tanto, tienen un mayor potencial en el pronóstico de series temporales hidro-climáticas. Sus propiedades dinámicas les permite actualizar gradualmente sus parámetros a la luz de los cambios que puedan surgir por causas climáticas o de otra índole. Si el cambio es abrupto, se puede predecir, y, en general, en el caso de los cambios generados por el hombre, se puede incorporar el efecto sobre el modelo, lo que se conoce como intervención.

Los Modelos Lineales Dinámicos (MLD) bajo el contexto Bayesiano, se han convertido en una herramienta muy importante para el análisis de series temporales. Estos modelos se utilizan en diversos campos de estudio (Pole et al., 1994). Solo unas pocas aplicaciones han sido reportadas en el campo de la hidrología, (Krishnaswamy et al., 2000) utilizaron los MLD's con datos hidrológicos de la cuenca del río Yadkin en Carolina del Norte (EE.UU.), para datos entre 1951 y 1990. Berliner et al. (2000) pronostica las temperaturas máximas en la superficie del Océano Pacífico bajo modelos dinámicos jerárquicos. (Krishnaswamy et al., 2001) hicieron uso de un modelo de regresión lineal dinámica para detectar cambios en la relación del flujo de sedimentos y la hidroclimatología en una cuenca húmeda tropical en Costa Rica. Kumar & Maity (2008) utilizaron los MLD's para pronosticar los niveles del Lago del Diablo situado en Dakota del Norte (EE.UU.). Rodriguez et al. (2008) aplicaron este modelo a los datos de la cuenca del río Grande situada en el oeste de Brasil. Migon & Monteiro (1997) usaron un modelo lluvia-caudal dinámico no lineal para los datos del río Fartura con datos mensuales de los años 1964 a 1969, asumiendo una distribución Gamma para el caudal. Cepeda & Achcar (2009) compararon el desempeño de dos aproximaciones estadísticas para el análisis de datos obtenidos en el área de investigación social. En la primera realizaron una modelación conjunta de media y de heterogeneidad de varianzas asumiendo normalidad, y en el segundo un modelo jerárquico. Carioca (2011) aplica los Modelos Dinámicos

Jerárquicos con estructura espacio-temporal para datos de la familia exponencial, que a diferencia de los modelos lineales dinámicos no requieren el supuesto de normalidad y se usaron en la estimación de la cantidad de lluvia en una región al este de Australia.

Los Procesos de Poisson no Homogéneos (PPNH) han sido usado para modelar diferentes fenómenos de la naturaleza, tales como: niveles máximos de lluvias, tamaños elevados en las olas, terremotos, ciclones, temperatura, etc. Achcar et al. (2009) realizó un estudio sobre excedencias de ozono en la Ciudad de Mexico mediante PPNH, Carrillo (2010) usó el PPNH para modelar ciclones tropicales superiores a categoría tres en el Atlántico norte. En este trabajo se aplicarán los PPNH para estudiar los fenómenos de sequías y de desbordamientos del río Sumapaz, considerando el número de veces en el que el caudal se encuentra por debajo o por encima de umbrales establecidos dentro de un intervalo de tiempo fijo.

Reseña histórica

A principios de la década de los sesenta, se hizo evidente que en los modelos lineales dinámicos normales con varianzas conocidas y relaciones de recurrencia para la actualización secuencial de las distribuciones a posteriori son esencialmente equivalentes a las ecuaciones del Filtro de Kalman. Es obvio que no como muchos suelen creer, que el pronóstico Bayesiano se basa en el filtro de Kalman ver (Harrison & Stevens, 1976), y la discusión, y respuesta a la discusión por Davis et al. (1985).

Influencias importantes en la práctica y pensamiento Bayesiano actual, pueden ser encontrados en los libros de Savage (1954), Jeffreys (1961), Lindley (1965), DeGroot (1971), Box & Tiao (1977), de Finetti (1954), Berger (1985), O'Hagan (1994), Bernardo & Smith (1994).

Hacia el final de la década de 1970 Harrison & Stevens (1976) define la clase de modelos lineales dinámicos (MLD) y elaboran un método Bayesiano para modelamiento dinámico y pronóstico. Este enfoque se basa en la práctica existente en el que modelos comunes pueden ser reformulados como casos especiales estáticos y estacionarios. El poder real, sin embargo, es que la nueva formulación proporciona muchas facilidades adicionales tantas como sean necesarios para trabajar con poca o ninguna información, introduciendo información subjetiva.

A finales de los setenta y principios de los ochenta se vio un gran desarrollo y aplicación de los métodos de modelamiento y pronóstico Bayesiano. Notable entre estos, monitoreo e intervención (West, 1986); (West & Harrison, 1986); (West et al., 1987), (Harrison & Veerapen, 1994); (Pole et al., 1994), modelos de estructuras no normales y no lineales (Souza, 1981); (Smith, 1979); (Migon, 1984); (Migon & Harrison, 1985); (West et al., 1985). Desde la evolución de la estadística computacional, a partir de 1990, las nuevas direcciones en la investigación, el desarrollo de modelos y su aplicación se han abierto, involucrando análisis mediante métodos de simulación (MCMC) (Gamerman, 1997), (Smith & Roberts, 1993).

Dichos desarrollos computacionales dieron lugar a un uso más amplio de los métodos de simulación vía cadenas de Markov Monte Carlo, facilitando la comunicación con los profesionales técnicamente menos orientados. Se cree que el modelamiento es un arte y particularmente lo es el pronóstico Bayesiano.

Esta tesis se encuentra organizada de la siguiente forma: en el capítulo 1 se hace una introducción a los modelos lineales dinámicos, los modelos de regresión dinámica y los modelos jerárquicos. En el capítulo 2 se presenta la teoría de los Procesos de Poisson no Homogéneos, en el capítulo 3 se describe la cuenca y los datos de caudal del río Sumapaz, en el capítulo 4 se hace un análisis del caudal del río Sumapaz aplicando los métodos descritos en los capítulos 1 y 2, y finalmente en el capítulo 5 se presentan las conclusiones y posibles extensiones de este trabajo.

Modelos estadísticos

Los modelos de fenómenos caracterizados por estructuras temporales son ampliamente estudiados en muchas áreas de investigación, Estos son conocidos en la literatura como análisis de series temporales. Existen diversas formas de abordar el modelamiento de observaciones con estas características. Los modelos más conocidos y aplicados son los ARIMA propuestos por Box & Jenkins (1976). Harrison & Stevens (1976) proponen el uso modelos dinámicos. Estos últimos están siendo cada vez más explorados en diversas áreas. Zellner et al. (1991) muestran que al incluir una estructura jerárquica en el modelado de la serie temporal, con parámetros que varíen en el tiempo se obtienen mejores pronósticos. Gamerman & Migon (1993), en este mismo sentido, presentan una forma general combinando ambos modelos y denominándolos Modelos Lineales Dinámicos Jerárquicos (MLDJ).

1.1. Modelos lineales dinámicos

Los modelos lineales dinámicos son una amplia clase de modelos con parámetros variables en el tiempo, útiles para el modelamiento de datos de series de tiempo y regresión. Fue introducido por Harrison & Stevens (1976) y está muy bien documentado en el libro de West & Harrison (1997). Los modelos lineales dinámicos se caracterizan por un par de ecuaciones, denominadas ecuación de observación y ecuación de evolución de parámetros. El *MLD* normal multivariado puede ser visto como una generalización de los modelos de regresión que permite cambios en los valores de los parámetros a través del tiempo. La ecuación observacional y la ecuación del sistema son respectivamente

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_t &= \mathbf{F}'_t \boldsymbol{\theta}_t + \boldsymbol{\nu}_t, & \boldsymbol{\nu}_t &\sim N(0, \mathbf{V}_t) \\ \boldsymbol{\theta}_t &= \mathbf{G}_t \boldsymbol{\theta}_{t-1} + \boldsymbol{\omega}_t, & \boldsymbol{\omega}_t &\sim N(0, \mathbf{W}_t), \end{aligned} \tag{1.1}$$

Suponga para $t = 1, \dots$, que \mathbf{Y}_t es un vector columna de r observaciones.

El modelo está definido por la cuádrupla $\{\mathbf{F}_t, \mathbf{G}_t, \mathbf{V}_t, \mathbf{W}_t\}$ donde para cada t :

- (a) \mathbf{F}_t es una matriz de regresión dinámica conocida (de orden $(n \times r)$)

- (b) \mathbf{G}_t es una matriz de estado conocida (de orden $(n \times n)$)
- (c) \mathbf{V}_t es una matriz de varianza observacional conocida (de orden $(r \times r)$)
- (d) \mathbf{W}_t es una matriz de evolución conocida (de orden $(n \times n)$)
- (e) $\boldsymbol{\theta}_t$ es un vector de parámetros (de orden $(n \times 1)$)

y en las que las sucesiones de errores $\boldsymbol{\nu}_t$ y $\boldsymbol{\omega}_t$ son independientes y mutuamente independientes, respectivamente.

Esta clase incluye muchos de los modelos que se encuentran en la literatura estadística. Por ejemplo, si $\mathbf{G} = \mathbf{I}_n$ es la matriz identidad de orden n y $\boldsymbol{\omega}_t = 0$, $\forall t$, todos los modelos de regresión lineal pueden ser representados. Por otra parte, si \mathbf{F}_t , \mathbf{V}_t y \mathbf{W}_t son constantes $\forall t$, entonces el modelo cubre modelos de series temporales lineales, tales como los procesos ARMA de Box & Jenkins (1976).

1.1.1. Modelo lineal dinámico univariado

Para cada t , el modelo lineal dinámico univariado, representado por la cuádrupla (F_t, λ, V_t, W_t) , está definido por:

- i Una ecuación observacional $Y_t = F_t \mu_t + \nu_t$, con $\nu_t \sim N(0, V_t)$
- ii Una ecuación del sistema $\mu_t = \lambda \mu_{t-1} + \omega_t$, con $\omega_t \sim N(0, W_t)$
- iii Una información inicial $(\mu_0 | D_0) \sim N(m_0, C_0)$,

donde las sucesiones de errores ν_t y ω_t siguen los supuestos del modelo general. Adicionalmente ellas son independientes de $(\mu_0 | D_0)$. Los valores de las sucesiones de varianzas V_t y W_t son desconocidas, pero la constante λ y la sucesión de valores F_t son conocidas.

Suponga que el modelo es cerrado a entradas de información externa, de modo que dada una información inicial a priori D_0 en el tiempo $t = 0$, el conjunto de información disponible para cada tiempo t es simplemente $D_t = \{\mathbf{Y}_t, D_{t-1}\}$.

1.1.1.1. Modelo polinomial de primer orden

El modelo más simple de series temporales es el modelo polinomial de primer orden, que corresponde a una aproximación de primer orden de una serie de Taylor de una función suavizada del tiempo, llamada la tendencia de la serie. Este modelo está completamente definido por la cuádrupla $(1, 1, V_t, W_t)$, con

$$\begin{aligned}
 \text{Ecuación observacional} \quad Y_t &= \mu_t + \nu_t, & \nu_t &\sim N(0, V_t) \\
 \text{Ecuación del sistema} \quad \mu_t &= \mu_{t-1} + \omega_t, & \omega_t &\sim N(0, W_t) \\
 \text{Información inicial} \quad (\mu_0 | D_0) &\sim N(m_0, C_0)
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

donde μ_t es unidimensional y describe la tendencia del proceso. Aunque este modelo es muy simple, se puede aplicar en muchos sistemas de pronóstico a corto plazo, incluyendo

series como en control de inventarios o de planificación de la producción. V_t y W_t evolucionan en el tiempo, ofreciendo un amplio margen para el modelamiento.

Una de las principales características de los modelos lineales dinámicos, es que en cada instante del tiempo toda la información disponible es usada para describir la distribución a posteriori del vector de estados. El siguiente teorema dado por (West & Harrison, 1997), muestra cómo evolucionar desde la distribución a posteriori en el tiempo $t - 1$ hasta la distribución a posteriori en el tiempo t .

Teorema 1. *Para el modelo (1.2) el pronóstico a un paso y las distribuciones a posteriori de nivel para cualquier tiempo $t > 0$ se pueden obtener secuencialmente como sigue:*

(a) *A posteriori para μ_{t-1} :* $(\mu_{t-1} | D_{t-1}) \sim N(m_{t-1}, C_{t-1})$

(b) *A priori para μ_t :* $(\mu_t | D_{t-1}) \sim N(m_{t-1}, R_t)$ donde $R_t = C_{t-1} + W_t$

(c) *Pronóstico a un paso:* $(Y_t | D_{t-1}) \sim N(f_t, Q_t)$ donde $f_t = m_{t-1}$ y $Q_t = R_t + V_t$

(d) *A posteriori para μ_t :* $(\mu_t | D_t) \sim N(m_t, C_t)$ con $m_t = m_{t-1} + A_t e_t$ y $C_t = A_t V_t$, donde $A_t = R_t / Q_t$, y $e_t = Y_t - f_t$

Demostración. La prueba se realiza por inducción. Se asume que la distribución en (a) se cumple. Para $t = 1$ la distribución en (a) es válida directamente de la definición del modelo (1.2). $(\mu_t | D_{t-1})$ es la suma de dos variables aleatorias normales independientes. La media y la varianza se obtienen adicionando las medias y las varianzas de sus sumandos, conduciendo a (b):

$$(\mu_t | D_{t-1}) \sim N(m_{t-1}, R_t) = C_{t-1} + W_t$$

De manera similar $(Y_t | D_{t-1}) \sim N(f_t, Q_t)$ es la suma de dos variables aleatorias normales independientes, conduciendo a (c):

$$(Y_t | D_{t-1}) \sim N(f_t, Q_t) = R_t + V_t$$

La parte (d) se deriva vía teorema de Bayes como sigue: El método Bayesiano se puede aplicar a todos los modelos sin importar los supuestos distribucionales. De la ecuación observacional se obtiene la función de densidad de las realizaciones del proceso

$$p(Y_t | \mu_t, D_{t-1}) = (2\pi V_t)^{-1/2} \exp\left(- (Y_t - \mu_t)^2 / (2V_t)\right)$$

De la parte (b) del teorema, la distribución a priori para μ_t dado D_{t-1} tiene un función de densidad de probabilidad

$$p(\mu_t | D_{t-1}) = (2\pi R_t)^{-1/2} \exp\left(- (\mu_t - m_{t-1})^2 / (2R_t)\right)$$

Por el teorema de Bayes, e ignorando los factores multiplicativos que no dependan de μ_t , la distribución a posteriori para μ_t es proporcional a la distribución a priori multiplicada por la verosimilitud, de la siguiente forma

$$\begin{aligned} p(\mu_t | D_t) &\propto p(\mu_t | D_{t-1}) p(Y_t | \mu_t, D_{t-1}) \\ &\propto \exp\left(- (\mu_t - m_{t-1})^2 / (2R_t) - (Y_t - \mu_t)^2 / (2V_t)\right) \end{aligned}$$

Tomando dos veces el logaritmo natural y usando algunas constantes se tiene

$$\begin{aligned} 2 \ln (p(\mu_t | D_t)) &= k_1 - (\mu_t - m_{t-1})^2/R_t - (Y_t - \mu_t)^2/V_t, \\ &= k_2 - (1/R_t + 1/V_t)\mu_t^2 + 2(m_{t-1}/R_t + Y_t/V_t)\mu_t \end{aligned}$$

Completando el cuadrado se tiene:

$$= k_3 - (\mu_t - m_t)^2/C_t$$

Despejando, $p(\mu_t | D_t) \propto \exp(-(\mu_t - m_t)^2/(2C_t))$ por tanto, $(\mu_t | D_t) \sim N(m_t, C_t)$ lo que prueba la parte (d) del teorema. Donde

$$\begin{aligned} C_t &= 1/(1/R_t + 1/V_t) & A_t &= R_t/Q_t & e_t &= Y_t - m_{t-1} \\ &= R_t V_t / Q_t & &= R_t / (R_t + V_t) & m_t &= C_t (m_{t-1}/R_t + Y_t/V_t) \\ &= A_t V_t & & & &= m_{t-1} + A_t e_t \end{aligned}$$

◇

1.1.1.2. Modelo constante

Un caso especial del modelo (1.2), cuando la varianza observacional y de evolución son constantes en el tiempo se denomina modelo constante. Este modelo está caracterizado por la cuádrupla $(1, 1, V, W)$ y es definido como:

$$\begin{aligned} \text{Ecuación observacional} \quad Y_t &= \mu_t + \nu_t, & \nu_t &\sim N(0, V) \\ \text{Ecuación del sistema} \quad \mu_t &= \mu_{t-1} + \omega_t, & \omega_t &\sim N(0, W) \\ \text{Información inicial} \quad (\mu_0 | D_0) &\sim N(m_0, C_0) \end{aligned} \quad (1.3)$$

El Teorema 1 sigue teniendo validez al hacer $W_t = W$ y $V_t = V$

1.1.1.3. Comportamiento límite y convergencia

En el modelo (1.3), la tasa de adaptación para los nuevos datos calculada por el coeficiente adaptativo A_t , converge rápidamente a valores constantes, como también Q_t , C_t y R_t . El teorema (2) muestra dicha convergencia.

Teorema 2. Cuando $t \rightarrow \infty$ y $r = W/V$

- i) $A_t \rightarrow A = \frac{r}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4}{r}} - 1 \right)$
- ii) $Q_t \rightarrow Q = \frac{V}{1 - A}$
- iii) $C_t \rightarrow C = AV$
- iv) $R_t \rightarrow R = AQ$
- v) $W = A^2 Q$ y $V = (1 - A)Q$

Demostración. (West & Harrison, 1997) Como $A_t = R_t/(R_t + V)$ se tiene que $0 < A_t < 1$ y $C_t = A_t V$, por tanto C_t es acotada, con

$$0 < C_t \leq V \quad \text{para todo } t$$

Entonces, usando las recursiones $C_t^{-1} = R_t^{-1} + C^{-1}$ y $R_t = C_{t-1} + W$

$$C_t^{-1} - C_{t-1}^{-1} = R_t^{-1} - R_{t-1}^{-1} = K_t(C_{t-1}^{-1} - C_{t-2}^{-1})$$

donde $K_t = C_{t-1}C_{t-2}/(R_tR_{t-1}) > 0$. Por lo tanto C_t es una sucesión monótona y acotada y por lo tanto su límite C existe. Consecuentemente, R_t converge a $R = C + W$. Usando $C_t = R_t V/(R_t + V)$, se sigue que $C = RV/(R + V)$, lo que implica

$$C^2 + CW - VW = 0.$$

La raíz positiva de esta ecuación cuadrática es

$$C = \frac{-W + \sqrt{W^2 + 4VW}}{2} = \frac{rV(\sqrt{1 + 4/r} - 1)}{2}.$$

Puesto que $C_t = A_t V$, entonces A_t converge a $A = C/V$. ◇

1.1.1.4. Modelo con varianza constante desconocida

El análisis conjugado basado en la distribución gamma para la precisión $\phi = 1/V$, y la distribución gamma inversa para W , para todo tiempo t , permite definir el siguiente modelo:

$$\begin{aligned} \text{Ecuación observacional} \quad Y_t &= \mu_t + \nu_t, & \nu_t &\sim N(0, V) \\ \text{Ecuación del sistema} \quad \mu_t &= \mu_{t-1} + \omega_t, & \omega_t &\sim N(0, VW_t^*) \\ \text{Información inicial} \quad (\mu_0 \mid D_0, V) &\sim N(m_0, VC_0^*), & (\phi \mid D_0) &\sim G(n_0/2, d_0/2), \end{aligned} \quad (1.4)$$

con m_0, C_0^*, W_0^*, n_0 y d_0 conocidos.

Teorema 3. *Con el modelo (1.4) los siguientes resultados distribucionales se obtienen para cada tiempo $t \geq 1$*

a) *Condicionadamente sobre V*

definimos $R_t^* = C_{t-1}^* + W_t^*$, $f_t = m_{t-1}$, $Q_t^* = R_t^* + 1$, $e_t = Y_t - f_t$ y $A_t = R_t^*/Q_t^*$.
Entonces

$$\begin{aligned} (\mu_{t-1} \mid D_{t-1}, V) &\sim N(m_{t-1}, VC_{t-1}^*), \\ (\mu_t \mid D_{t-1}, V) &\sim N(m_{t-1}, VR_t^*), \\ (Y_t \mid D_{t-1}, V) &\sim N(f_t, VQ_t^*), \\ (\mu_t \mid D_t, V) &\sim N(m_t, VC_t^*), \end{aligned} \quad (1.5)$$

con: $m_t = m_{t-1} + A_t e_t$ y $C_t^* = R_t^* - A_t^2 Q_t^* = A_t$

b) Para la precisión $\phi = 1/V$:

$$\begin{aligned}\phi \mid D_{t-1} &\sim G(n_{t-1}/2, d_{t-1}/2), \\ \phi \mid D_t &\sim G(n_t/2, d_t/2),\end{aligned}\tag{1.6}$$

donde $n_t = n_{t-1} + 1$ y $d_t = d_{t-1} + e_t^2/Q_t^*$

c) Incondicionalmente sobre V

definimos $S_{t-1} = d_{t-1}/n_{t-1}$, $C_{t-1} = S_{t-1}C_{t-1}^*$, $R_t = S_{t-1}R_t^*$, $Q_t = S_{t-1}Q_t^*$, $C_t = S_tC_t^*$ y $S_t = d_t/n_t$. Entonces

$$\begin{aligned}(\mu_{t-1} \mid D_{t-1}) &\sim T_{n_{t-1}}(m_{t-1}, C_{t-1}), \\ (\mu_t \mid D_{t-1}) &\sim T_{n_{t-1}}(m_{t-1}, R_t), \\ (Y_t \mid D_{t-1}) &\sim T_{n_{t-1}}(f_t, Q_t), \\ (\mu_t \mid D_t) &\sim T_{n_t}(m_t, C_t)\end{aligned}\tag{1.7}$$

d) Definición operacional de las ecuaciones de actualización

Definiendo $Q_t = R_t + S_{t-1}$ y $A_t = R_t/Q_t$,

$$\begin{aligned}m_t &= m_{t-1} + A_t e_t, \\ C_t &= (S_t/S_{t-1})(R_t - A_t^2 Q_t) = A_t S_t, \\ n_t &= n_{t-1} + 1, \\ d_t &= d_{t-1} + S_{t-1} e_t^2 / Q_t, \\ S_t &= d_t / n_t\end{aligned}\tag{1.8}$$

Demostración. (West & Harrison, 1997) La parte a) del teorema es válida por el Teorema 1, el resto de la prueba se realiza por inducción. De la parte a) se tiene que la verosimilitud para Y_t está dada por:

$$p(Y_t \mid D_{t-1}, \phi) \propto \phi^{1/2} \exp(-\phi e_t^2 / 2Q_t^*).$$

Por el teorema de Bayes, la distribución a posteriori para ϕ es proporcional al producto de la distribución a priori para ϕ y la verosimilitud, como sigue:

$$p(\phi \mid D_t) \propto p(\phi \mid D_{t-1})p(Y_t \mid D_{t-1}, \phi).$$

Usando la distribución a priori en b) y la función de verosimilitud mencionada antes, se tiene:

$$p(\phi \mid D_t) \propto \phi^{(n_{t-1}+1)/2-1} \exp(-(d_{t-1} + e_t^2/Q_t^*)\phi/2),$$

estableciendo así $(\phi \mid D_t) \sim G(n_t/2, d_t/2)$ como en b) con los parámetros actualizados $\{n_t, d_t\}$ como en d). El resultado c) se obtiene calculando la distribución marginal como el cociente de la función conjunta de la distribución Normal-Gamma sobre la distribución condicional Normal, que resulta ser proporcional a la distribución T -Student. Como el resultado es verdadero para $t = 1$, la prueba inductiva es concluida. \diamond

1.2. Modelo de Regresión Dinámico (MRD)

El principio básico de un modelo de regresión dinámico, es capturar los cambios relacionados a través del tiempo entre dos o más series temporales. Supongamos que para valores observados a lo largo del tiempo, se desea modelar una relación existente entre ellos, admitiéndose que el modelo lineal es una buena aproximación local para la relación existente entre estas variables. Teniéndose un modelo de regresión lineal, que podría ser solucionado a través de métodos clásicos o de una aplicación con argumento Bayesiano. Sin embargo, dado el carácter local de la relación lineal, es deseable adoptar un modelo con parámetros variables en el tiempo.

El modelo está completamente definido como sigue:

La ecuación observacional es

$$Y_t = \mathbf{F}_t' \boldsymbol{\theta}_t + \nu_t, \quad \nu_t \sim N(0, V), \quad (1.9)$$

y la ecuación del sistema

$$\boldsymbol{\theta}_t = \boldsymbol{\theta}_{t-1} + \boldsymbol{\omega}_t, \quad \boldsymbol{\omega}_t \sim T_{t-1}(\mathbf{0}, \mathbf{W}_t), \quad (1.10)$$

donde \mathbf{F}_t es el vector de regresores en el tiempo t y $\boldsymbol{\theta}_t$ son los parámetros de la regresión en el tiempo t , ν_t es el error asociado al proceso el cual se asume con distribución normal de media cero y varianza V , V es la varianza observacional y se considera desconocida en este caso. En la ecuación (1.10), T_{t-1} implica una distribución t -Student con $(t-1)$ grados de libertad. \mathbf{W}_t es la varianza de evolución que depende del tiempo.

Dos casos especiales de MRD son los Modelos de Regresión Lineal Simple Dinámica con y sin intercepto. En el primer caso se tiene $\mathbf{F}_t = (1, x_t)$ y $\boldsymbol{\theta}_t = (\alpha_t, \beta_t)'$, entonces

$$\begin{aligned} Y_t &= \alpha_t + \beta_t X_t + \nu_t, & \nu_t &\sim N(0, V) \\ \alpha_t &= \alpha_{t-1} + \omega_{t1} \\ \beta_t &= \beta_{t-1} + \omega_{t2}, \end{aligned}$$

donde $\boldsymbol{\omega}_t = (\omega_{t1}, \omega_{t2})' \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{W}_t)$.

Para el segundo caso, $\mathbf{F}_t = F_t = x_t$, $\alpha_t = 0$ y $\boldsymbol{\theta}_t = \theta_t = \beta_t$ para cada t .

El pronóstico un paso adelante y la distribución a posteriori se calculan de la siguiente manera: la información inicial $(\boldsymbol{\theta}_0 | D_0) \sim T_1(\mathbf{m}_0, \mathbf{C}_0)$ donde la media \mathbf{m}_0 y la varianza \mathbf{C}_0 son los valores iniciales dados por el investigador. La distribución a posteriori para $\boldsymbol{\theta}_{t-1}$ es $(\boldsymbol{\theta}_{t-1} | D_{t-1}) \sim T_{t-1}(\mathbf{m}_{t-1}, \mathbf{C}_{t-1})$, la distribución a priori para $\boldsymbol{\theta}_t$ es $(\boldsymbol{\theta}_t | \mathbf{D}_{t-1}) \sim T_{t-1}(\mathbf{m}_{t-1}, \mathbf{R}_t)$ donde

$$\mathbf{R}_t = \mathbf{C}_{t-1} + \mathbf{W}_t \quad (1.11)$$

Se usa el factor de descuento δ ($0 < \delta < 1$) de tal forma que

$$\mathbf{R}_t = \frac{1}{\delta} \mathbf{C}_{t-1} \quad (1.12)$$

Combinando las ecuaciones (1.11) y (1.12) se obtiene

$$\mathbf{W}_t = \left(\frac{1}{\delta} - 1 \right) \mathbf{C}_{t-1}. \quad (1.13)$$

Como se mencionó antes, la varianza observacional se considera desconocida, por lo que un nuevo parámetro ϕ , definido como $\phi = V^{-1}$, refleja la precisión de la predicción. La forma distribucional del parámetro de precisión ϕ para el tiempo $(t-1)$ es $(\phi | D_{t-1}) \sim G(n_{t-1}/2, d_{t-1}/2)$, donde G denota la distribución Gamma. La distribución de pronóstico un paso adelante es $(Y_t | D_{t-1}) \sim T_{t-1}(f_t, \mathbf{Q}_t)$, donde

$$f_t = \mathbf{F}'_t \mathbf{m}_{t-1} \quad (1.14)$$

$$\mathbf{Q}_t = \mathbf{F}'_t \mathbf{R}_t \mathbf{F}_t + S_{t-1} \quad (1.15)$$

$$S_t = d_{t-1}/n_{t-1}. \quad (1.16)$$

Como en el modelo constante la esperanza de la distribución de pronóstico un paso adelante puede ser usada con un punto de predicción, y la varianza como una información de incertidumbre a ella. La distribución a posteriori para $\boldsymbol{\theta}_t$ es $(\boldsymbol{\theta}_t | D_t) \sim T_t(\mathbf{m}_t, \mathbf{C}_t)$, con

$$\mathbf{m}_t = \mathbf{m}_{t-1} + \mathbf{A}_t e_t \quad (1.17)$$

$$\mathbf{C}_t = \mathbf{R}_t \mathbf{S}_t / Q_t \quad (1.18)$$

$$S_t = \frac{d_t}{n_t} \quad (1.19)$$

$$e_t = Y_t - f_t \quad (1.20)$$

$$\mathbf{A}_t = \mathbf{R}_t \mathbf{F}_t / Q_t. \quad (1.21)$$

La forma distribucional de actualización del parámetro ϕ para el tiempo t es $(\phi | D_t) \sim G\left(\frac{n_t}{2}, \frac{d_t}{2}\right)$, donde

$$n_t = n_{t-1} + 1 \quad (1.22)$$

$$d_t = d_{t-1} + S_{t-1} e_t^2 / Q_t. \quad (1.23)$$

Dos cosas han de tenerse en cuenta aquí. La primera es que el factor de descuento δ juega un papel importante con respecto a la cantidad de pérdida de información a través de observaciones sucesivas. El segundo punto consiste en seleccionar una covariable adecuada.

Para comparar los modelos y por lo tanto la idoneidad de los diferentes factores de descuento, existen tres medidas, dos de las cuales son comúnmente usadas en la medición de pronósticos, la desviación media absoluta $DAM = \sum_{t=1}^n |e_t|/n$ y el error cuadrado medio $CME = \sum_{t=1}^n e_t^2/n$ (por sus nombres en inglés). La tercera medida se conoce como función de verosimilitud $LIK = \exp(LRV)$ siendo LRV el logaritmo de la razón de verosimilitud. Se basa en la densidad predictiva observada

$$p(Y_n, Y_{n-1}, \dots, Y_1 | D_0) = \prod_{t=1}^n p(Y_t | D_{t-1})$$

el producto de la sucesión de las densidades de pronóstico un paso adelante evaluadas en la observación actual, proporciona una medida de rendimiento del modelo que es la

verosimilitud actual para δ puesto que el MLD difiere sólo con respecto a sus valores descuento conocidos.

Vale la pena señalar aquí una vez más que los modelos Bayesianos presentados en esta sección, permiten captar los cambios en las series temporales derivadas de su naturaleza dinámica. Los resultados de las subsecciones 1.1 y 1.2 se pueden encontrar en West & Harrison (1997).

1.3. Modelo lineal dinámico jerárquico (MLDJ)

Los modelos Dinámicos Jerárquicos, (Gamerman & Migon, 1993), son constituidos por tres partes: la primera describe la distribución de las observaciones, la segunda las ecuaciones de la estructura jerárquica y la tercera la forma de evolución de los parámetros a través del tiempo. Estos modelos se pueden representar por

(i) Ecuación de observación

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{F}_{1t}\boldsymbol{\theta}_{1t} + \boldsymbol{\nu}_{1t}, \quad \text{con } \boldsymbol{\nu}_{1t} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{V}_{1t}), \quad (1.24)$$

(ii) ecuaciones estructurales

$$\boldsymbol{\theta}_{it} = \mathbf{F}_{i+1,t}\boldsymbol{\theta}_{i+1,t} + \boldsymbol{\nu}_{i+1,t}, \quad \text{con } \boldsymbol{\nu}_{i+1,t} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{V}_{i+1,t}) \text{ y} \quad (1.25)$$

(iii) ecuación del sistema

$$\boldsymbol{\theta}_{kt} = \mathbf{G}_i\boldsymbol{\theta}_{k,t-1} + \boldsymbol{\omega}_t, \quad \text{con } \boldsymbol{\omega}_t \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{W}_t), \quad (1.26)$$

donde \mathbf{y}_t tiene dimensión n , $\boldsymbol{\theta}_i$ dimensiones r_1, r_2, \dots, r_k , respectivamente. El modelo definido por (1.24) a (1.26) y presenta en k niveles o estados la jerarquía de los parámetros. Sin embargo mas de tres raramente se presentan. Los modelos jerárquicos, en general, son utilizados con dos etapas y se obtienen haciendo $\mathbf{F}_{kt} = \mathbf{I}$ (matriz identidad) y $\mathbf{V}_{kt} = \mathbf{0}$ (matriz nula) para $k \geq 3$.

Un aspecto clave de las ecuaciones (1.25) es una reducción progresiva en la dimensión de los vectores de estado a medida que se avanzan en los niveles jerárquicos. Se satisface que $r_1 > r_2 > \dots > r_k$. Las matrices \mathbf{F}_{it} son todas de rango completo. Estas condiciones no son matemáticamente exigidas, pero constituyen la esencia del método cuando se hacen supuestos sobre las relaciones estocásticas entre los parámetros. Si una matriz, \mathbf{F}_{it} no es de rango completo el modelo es super-parametrizado en el i -ésimo estado la dimensión de $\boldsymbol{\theta}_i$ debe ser reducida por la remoción de la redundancia de los parámetros.

1.3.1. Ecuaciones de evolución y actualización

Las ecuaciones (1.24) a (1.26) no especifican completamente el modelo porque no explican las distribuciones condicionales. Suponiendo que D_t es toda la información obtenida hasta el tiempo t , incluyendo la información a priori D_0 y los valores observados, a partir

de estas ecuaciones el modelo jerárquico dinámico con k estados, puede ser definido para cada t , por

$$(\mathbf{y}_t | \boldsymbol{\theta}_{1t}) \sim N(\mathbf{F}_{i+1,t}\boldsymbol{\theta}_{1t}, \mathbf{V}_{1t}) \quad (1.27)$$

$$(\boldsymbol{\theta}_{it} | \boldsymbol{\theta}_{i+1,t}, D_{t-1}) \sim N(\mathbf{F}_{i+1,t}\boldsymbol{\theta}_{i+1,t}, \mathbf{V}_{i+1,t}) \quad i = 1, 2, \dots, k-1 \quad (1.28)$$

$$(\boldsymbol{\theta}_{kt} | \boldsymbol{\theta}_{k,t-1}, D_{t-1}) \sim N(\mathbf{G}_t\boldsymbol{\theta}_{k,t-1}, \mathbf{W}_t) \quad (1.29)$$

con distribuciones a priori iniciales $(\boldsymbol{\theta}_{k0} | D_0) \sim N(\mathbf{m}_{k,0}, \mathbf{C}_{k,0})$

Con el supuesto de que las matrices $\mathbf{F}_{1t}, \mathbf{F}_{2t}, \dots, \mathbf{F}_{kt}$ y \mathbf{G}_t son conocidas y los errores $\boldsymbol{\nu}_{1t}, \boldsymbol{\nu}_{2t}, \dots, \boldsymbol{\nu}_{kt}$ y w_t son independientes, con matrices de covarianza conocidas, además del supuesto de normalidad y linealidad, las etapas de evolución, suavización y paso de información a través de los niveles jerárquicos pueden ser calculadas analíticamente (Gamerman & Migon, 1993). Estos resultados son presentados resumidamente como sigue: suponiendo $D_t = \{y_t, D_{t-1}\}$ en el modelo descrito en las ecuaciones (1.27) a (1.3.1) con distribuciones a priori iniciales dadas por $(\boldsymbol{\theta}_{k,0} | D_0) \sim N(\mathbf{m}_{k,0}, \mathbf{C}_{k,0})$, las distribuciones a priori, predictivas y a posteriori están dadas por:

i Distribuciones a priori en el tiempo t

$$(\boldsymbol{\theta}_{it} | D_{t-1}) \sim N(\mathbf{a}_{it}, \mathbf{R}_{it}), i = 1, 2, \dots, k, \quad (1.30)$$

donde $\mathbf{a}_{it} = \mathbf{a}_{i+1,t}\mathbf{a}_{i+1,t}$, $\mathbf{R}_{it} = \mathbf{a}_{i+1,t}\mathbf{R}_{i+1,t}\mathbf{F}'_{i+1,t} + \mathbf{V}_{i+1,t}$, $i = 1, 2, \dots, k-1$
 $\mathbf{a}_{kt} = \mathbf{G}_t\mathbf{m}_{k,t-1}$ y $\mathbf{R}_{kt} = \mathbf{G}_t\mathbf{C}_{k,t-1}\mathbf{G}'_t + \mathbf{W}_t$.

ii Distribuciones predictivas (un paso adelante)

$$(\mathbf{y}_t | D_{t-1}) \sim N(f_t, \mathbf{Q}_t), \quad (1.31)$$

donde $\mathbf{f}_t = \mathbf{F}_{1t}\mathbf{a}_{1t}$ y $\mathbf{Q}_t = \mathbf{F}_{1t}\mathbf{R}_{1t}\mathbf{F}'_{1t} + \mathbf{V}_{1t}$.

iii Distribuciones a posteriori en el tiempo t

$$(\boldsymbol{\theta}_{it} | D_t) \sim N(\mathbf{m}_{it}, \mathbf{C}_{it}), \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (1.32)$$

donde $\mathbf{m}_{it} = \mathbf{a}_{it} + \mathbf{S}_{it}\mathbf{Q}_t^{-1}(y_t - f_t)$, $\mathbf{C}_{it} = \mathbf{R}_{it} - \mathbf{S}_{it}\mathbf{Q}_t^{-1}\mathbf{S}'_{it}$ y $\mathbf{S}_{it} = \mathbf{R}_t(\mathbf{F}_{1t}, \dots, \mathbf{F}_{it})'$.

El análisis con varianzas desconocidas, no tiene un desarrollo analítico y deben emplearse métodos de aproximación numérica. En aplicaciones con el supuesto de $\mathbf{V}_{1t} = \sigma^2\mathbf{I}_n$ donde \mathbf{I}_n es la matriz identidad de tamaño n , el uso de los factores de descuento (δ) siguen siendo válidos.

1.3.2. Criterios de comparación de modelos

Una de las dificultades al proponer diferentes especificaciones para analizar un determinado fenómeno es cómo elegir el modelo que mejor lo represente. En la literatura existen muchos criterios que facilitan la selección del modelo que mejor se ajusta a los datos. Sin embargo, no hay consenso en cuál de estos es el más adecuado. Por esta razón, es común usar más de un criterio para la comparación de los modelos. Bajo este escenario, es deseable la selección de un modelo basado en medidas que cuantifiquen la calidad

del ajuste y que al mismo tiempo penalicen modelos más complejos con un gran número de parámetros (Carioca, 2011). Spiegelhalter et al. (2002) propusieron un método de comparación de modelos con el objetivo de eludir las limitaciones de los criterios como el Criterio de Información de Akaike (CIA) y el Criterio de Información Bayesiano (CIB) en modelos con estructuras jerárquicas. Este criterio es conocido como DIC, el cual se basa en la distribución a posteriori de la estadística *deviance* $D(\boldsymbol{\theta})$.

$$D(\boldsymbol{\theta}) = -2\log(p(\mathbf{Y} | \boldsymbol{\theta})) + 2\log(f(\mathbf{Y})),$$

donde $f(\mathbf{Y})$ denota a distribución marginal de \mathbf{Y} .

El primer término del DIC, evalúa la bondad del ajuste, en cuanto el segundo término penaliza la complejidad modelo. El DIC puede ser calculado como:

$$DIC = E_{\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Y}}(D(\boldsymbol{\theta}) + p_D). \quad (1.33)$$

El primer término de (1.33), define la esperanza a posteriori del *deviance* y el segundo término el número efectivo de parámetros del modelo. Este criterio es particularmente útil en problemas de selección de modelos en los que las distribuciones a posteriori son obtenidas por simulaciones vía MCMC. Los mejores ajustes son obtenidos con modelos que tienen menores valores del DIC.

Proceso de Poisson

2.1. Aspectos generales

La importancia de modelar los fenómenos atmosféricos, climatológicos y en general de la naturaleza, es una tarea complicada debido a las diferentes variables que aquí se presentan. Conocer su comportamiento es de suma importancia para poder estimar eventos extremos que pueden afectar al medio ambiente y en general a la población.

Un método para investigar la tendencia del número de días con niveles muy altos (o muy bajos) de caudal en un río, es medir la frecuencia a través del tiempo con la cual se excede un umbral específico. En este estudio, se hace uso del Proceso de Poisson no Homogéneo (PPNH) para modelar la relación que existe entre la frecuencia de los sobrepasos de un umbral específico a través del tiempo.

Breiman et al. (1984) realizaron trabajos entre las distintas variables meteorológicas y la relación que estas guardan con la superficie de ozono mediante el uso de metodologías simples como los modelos de regresión lineal. Los estudios sobre contaminantes no solo se han visto motivados a realizarse con fines matemáticos, sino como aspectos relevantes sobre efectos en la salud (Shin et al., 2008).

Smith (1995) realizó un análisis sobre valores de ozono que superan el umbral de 0.10 ppm, usando la generalización de Pickands (1975) así como la distribución generalizada de Pareto (DGP), integrando al análisis del contaminante covariables meteorológicas (Cox. & Chu., 1993). Los resultados indican efectos significantes en el año en las variables temperatura, velocidad del viento y la interacción que existe entre ambas. En la Figura 2.1 se muestra el número de veces que se excede el umbral junto con su valor esperado bajo tres diferentes modelos.

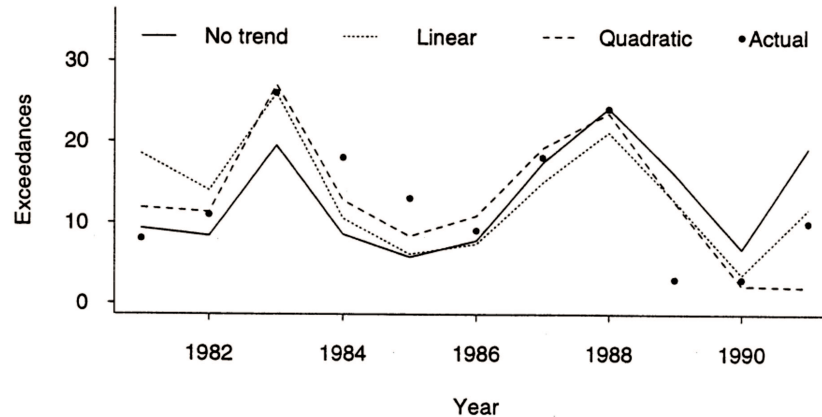


FIGURA 2.1. Valores que superan el umbral y sus proyecciones

Davis et al. (1998) realizaron estudios sobre la red de ozono para once sitios de Houston Texas, EE.UUU. distintos donde se tienen en cuenta las variables meteorológicas de cada estación durante el periodo de 1981 a 1992.

En Estados Unidos se han realizado diversos estudios sobre la calidad del aire, tomando en cuenta los valores que superan los límites permitidos y los efectos que estos provocan en sus habitantes¹, para analizar los distintos contaminantes se han propuesto diversos estándares a nivel mundial por ejemplo para el ozono, el sector Medio Ambiental ha propuesto valores que funcionan como umbral por ejemplo en Estados Unidos de $0.10ppm$ o México de $0.11ppm$, para protección de la población de los efectos de los contaminantes Guttorp (2000).

Bellanger & Tomassone (2004), hicieron estudios en la zona metropolitana de París mediante un análisis de valores extremos del periodo de 1988 a 2001 establecen las condiciones climáticas a partir de la observación de los valores que superan el umbral.

Aneiros-Perez et al. (2004) proponen dos modelos no lineales basados en estimadores de Kernel que manejan características funcionales de datos por medidas de proximidad en funciones observadas, para modelar las concentraciones de ozono en el área de Toulouse Francia.

Otro estudio sobre modelación estadística referente a ozono se muestra en Bruno et al. (2009) donde usan un modelo espacio temporal no separable y no estacionario para modelar el contaminante en una zona de Italia.

Existen diversos factores que son precursores de ozono y que favorecen al incremento del mismo, uno de estos es el uso de aerosoles en diferentes productos de uso cotidiano; Remsberg & Lingenfelter (2010) analizan ozono usando series de tiempo con un modelo de regresión lineal múltiple durante el periodo de septiembre de 2001 a agosto de 2005.

El PPNH juega un papel muy importante dentro de los procesos de conteo, ya que se usa como un modelo para el cálculo de eventos aleatorios. El PPNH es usado para modelar fallas en sistemas reparables y en pruebas para software Ariza (2005)

El PPNH ha sido usado para modelar diferentes fenómenos de la naturaleza, tales como: niveles máximos de lluvias, tamaños elevados en las olas, terremotos, ciclones, temperatura, etc. Ejemplos de PPNH aplicados a eventos extremos se muestran en Barrientos

¹<http://www.epa.gov/ttn/oarpg/naaqsfm/>

& Fernández (2003). En este trabajo se modela la tasa de ocurrencia en función de variables explicativas vinculadas con características inherentes a sismos, o bien, como se observó para los registros de toda la costa, ninguna variable puede ser significativa, en cuyo caso se confirma un proceso de Poisson homogéneo, es decir, con una intensidad constante. Cabe recordar que el objetivo de dichos modelos predictivos es la identificación de variables significativas que expliquen cambios en los periodos de retorno de los sismos descritos en la Base Mexicana de Sismos Fuertes Singh & Ordaz (1994). A partir de la fechas registradas se obtiene el periodo de retorno, el cual representa el tiempo transcurrido entre dos sismos consecutivos, en particular, de aquellos cuya magnitud registra 6.5 grados o más en la escala de Richtert.

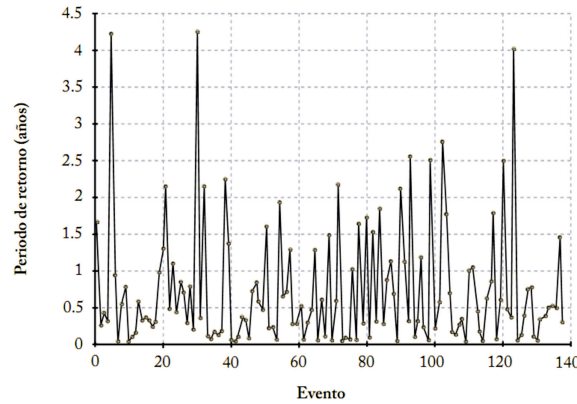


FIGURA 2.2. Periodo de retorno

La Figura 2.2 muestra los periodos de retorno para la base de datos considerada, el periodo medio de retorno resultó menor a un año (263 días, aprox.), es decir, en promedio, se presenta un sismo con magnitud superior a 6.5 grados en la costa mexicana del Pacífico cada 263 días.

Otro ejemplo de PPNH se da con Shao & Lii (2011) quienes modelan las incidencias de terremotos proponiendo un modelo para el análisis de procesos puntuales no estacionarios con una tasa de intensidad periódica para el PPNH empleado.

Carrillo (2010) usa PPNH para modelar ciclones superiores a categoría 3. En la Figura 2.3 se muestran las tendencias paramétricas y no paramétricas de λ para un PPNH implementado en el número de ciclones tropicales de categoría superior a 3 en el Atlántico norte (1945 – 2008), detectando un comportamiento relativamente cíclico con dos periodos de alta actividad comprendidos entre 1945 y 1955 el otro entre 1990 y 2005.

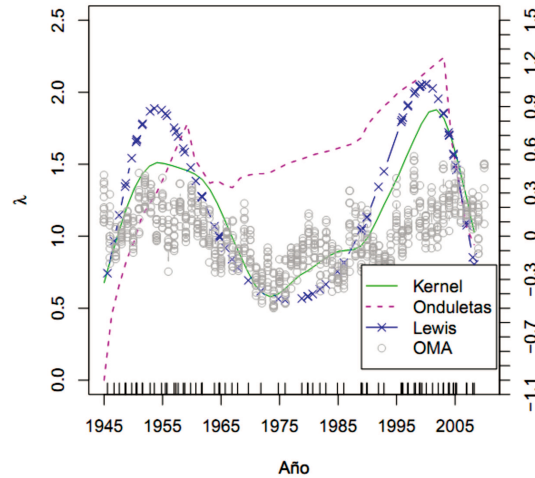


FIGURA 2.3. Tendencias paramétricas y no paramétricas para un PPNH

Achcar et al. (2009) realizan un estudio sobre excedencias de ozono con múltiples puntos de cambio, ellos estiman la probabilidad del número de veces en que se exceden los estándares en un intervalo dado, considerando dos funciones de intensidad: Weibull y Goel-Okumoto, el estudio lo aplican a datos de cinco áreas (Noreste, Noroeste, Centro, Sureste y Suroeste) de la Ciudad de México usando división espacial.

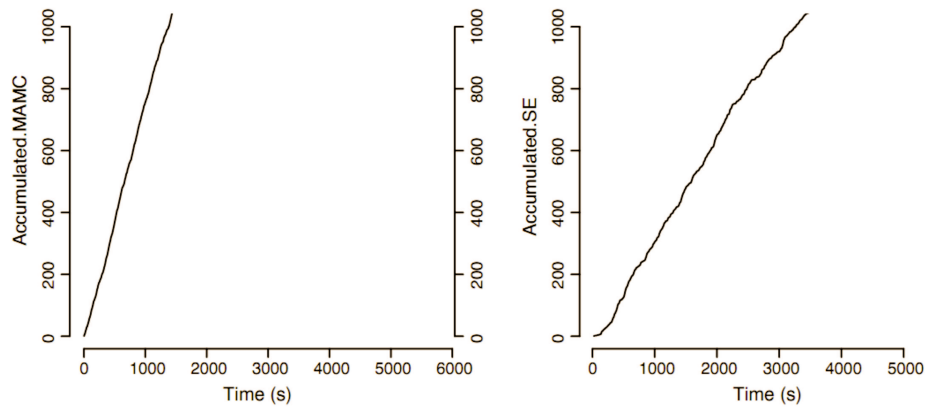


FIGURA 2.4. Numero acumulado de sobrepasos del umbral

La Figura 2.4 muestra el número acumulado de días en los que se sobrepasa un umbral de 0.17 ppm en un periodo de 5844 días comprendido entre el 01 de enero de 1990 y 31 de diciembre de 2005 para el área metropolitana de Ciudad de México (MAMC) y la región sur-este (SE)

Achcar et al. (2008) consideraron un análisis Bayesiano para la prevalencia de los casos de tuberculosis en la ciudad de Nueva York de 1970 a 2000. Este conjunto de datos de conteo presenta dos puntos de cambio en este periodo. Se puede modelar este conjunto de datos mediante un PPNH en presencia de estos dos puntos de cambio. En el análisis Bayesiano se utilizó el método MCMC, simulando mediante el Muestreador de Gibbs los parámetros de interés, utilizando el software WinBUGS (Spiegelhalter, D. and Thomas, A. and Best, N. and Lunn, D., 2001)

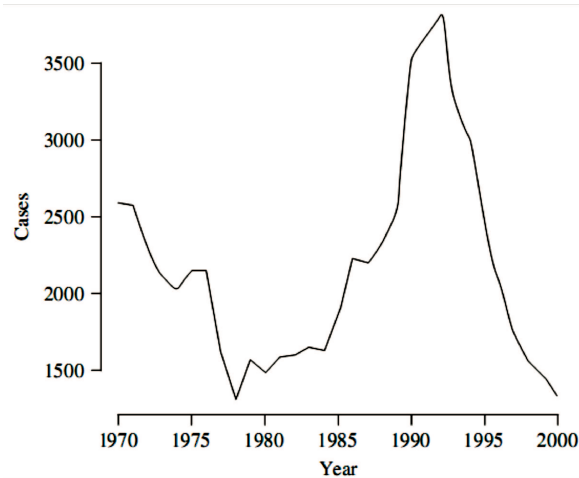


FIGURA 2.5. Número de casos reportados de tuberculosis en Nueva York entre 1970 y 2000

En la Figura 2.5 se observa que el número de casos de tuberculosis decrece de 1970 a 1978 donde alcanza su valor mínimo. De 1978 a 1992 hay un crecimiento de los casos de tuberculosis, alcanzando su número máximo en 1992. De 1992 a 2000, se observa un decaimiento del número de casos, es decir, se tienen dos puntos de cambio.

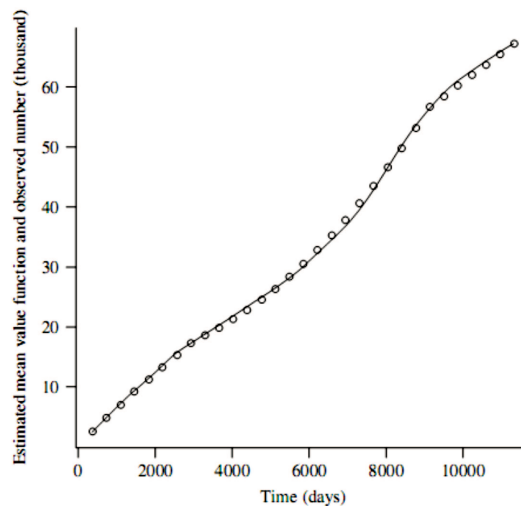


FIGURA 2.6. Función de valor medio – Estimado; \circ Observado

En la Figura 2.6 muestra el gráfico de la función de valor medio estimada y el número observado acumulado de casos de tuberculosis contra los años (en días), se observa un buen ajuste.

2.2. El proceso de Poisson

El Proceso de Poisson también llamado proceso contador es usado a menudo para modelar fallas en sistemas en los cuales los eventos se presentan de forma rara.

Definición: Se define un proceso contador $\{N(t) : t > 0\}$ con intensidad $\lambda > 0$ si cumple los siguientes requisitos, (Karlin & Taylor, 1975).

1. $N(0) = 0$
2. Para cualquier tiempo $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ los incrementos del proceso $N(t_2) - N(t_1), N(t_3) - N(t_2), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1})$ son variables aleatorias independientes.
3. Para toda $s, t > 0$ la variable aleatoria $N(t+s) - N(s)$ tiene distribución Poisson, es decir:

$$P(N(t+s) - N(s)) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad n = 0, 1, \dots$$

Definición: Un proceso o fenómeno aleatorio que se desarrolle a través del tiempo y que esté controlado por leyes probabilísticas más que las determinísticas, es a lo que llamamos un Proceso Estocástico, (Parzen, 1972).

2.3. El Proceso de Poisson Homogéneo (PPH)

Sea un proceso de Poisson $\{N(t) : t > 0\}$, con intensidad $\lambda > 0$, se define la función de ocurrencia de eventos como (Ariza, 2005)

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \frac{d}{dt} E(N(t)) \\ &= \frac{d}{dt} m(t), \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde $E(N(t))$ es el valor esperado del número de ocurrencias y $m(t)$ la función media del proceso que se define mediante la ecuación:

$$m(t) = \int_0^t \lambda(s) ds \tag{2.2}$$

si $m(t) = \lambda(t)$ entonces $\lambda(t) = \frac{d}{dt}(\lambda t) = \lambda$, por lo tanto se dice que se trata de un Proceso de Poisson Homogéneo.

2.4. El Proceso de Poisson no Homogéneo (PPNH)

Por otro lado en el no Homogéneo la función de intensidad es una función de t dada por $\lambda(t), t \in T$ donde T generalmente es el tiempo.

Un PPNH con función de intensidad $\lambda(t), t > 0$ debe cumplir (Basawa & Prakasa Rao, 1980)

1. $N(t), t > 0$, tiene incrementos independientes
2. $P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h)$
3. $P(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$

donde $o(h)$ es cualquier cantidad que después de dividirla por h tiende a cero, como $h \rightarrow 0$. Se dice entonces que el proceso $\{N(t) : t > 0\}$, es un Proceso Poisson no Homogéneo.

Cuando el comportamiento de la función $\lambda(t)$ es conocido tenemos que el comportamiento de $N = \{N_t : t \geq 0\}$ se puede predecir y explicar. Por lo tanto, el problema del estudio de N se reduce al estudio de $\lambda(t), t > 0$.

Las ecuaciones (2.7), (2.8), (2.9) y (2.10) están dadas por

$$\lambda(t | \boldsymbol{\theta})^{PLP} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha-1} \quad \alpha, \beta > 0 \quad (2.3)$$

$$\lambda(t | \boldsymbol{\theta})^{GOP} = \alpha\beta \exp(-\beta t) \quad \alpha, \beta > 0 \quad (2.4)$$

$$\lambda(t | \boldsymbol{\theta})^{MOP} = \frac{\beta}{t + \alpha} \quad \alpha, \beta > 0 \quad (2.5)$$

$$\lambda_I(t | \boldsymbol{\theta})^{MOP_I} = \frac{\beta}{t + \alpha} - \delta \sin(\theta t) \quad \alpha, \beta > 0 \quad (2.6)$$

Se puede observar que la función (2.3) tiene un comportamiento diferente, dependiendo del valor de α . Puede ser constante ($\alpha = 1$), decreciente ($\alpha < 1$) o creciente ($\alpha > 1$). La intensidad (2.4) presenta un comportamiento decreciente en función de t al igual que la función de intensidad (2.5), se considera que $\boldsymbol{\theta}$ es un vector desconocido de parámetros que serán estimados. Para describir nuestra incertidumbre acerca de α y β , en el marco Bayesiano, se les asigna una distribución a priori. En esta vía, se convierten en cantidades aleatorias. Por lo tanto, el problema se reduce a la estimación de $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, que produce el comportamiento de $\lambda(t), t > 0$, que sea el más adecuado para representar los valores extremos en el caudal de un río.

Hay varias formas en que se puede asumir $\lambda(t), t \geq 0$. Por ejemplo la ley de potencia (PLP) (2.7), también conocida como Weibull, la Goel-Okumoto (GOP) (2.8) y la Musa-Okumoto (MOP) (2.9), Musa & Okumoto (1984), y el proceso Musa-Okumoto con componente cíclico (MOP_I) propuesto por Achcar et al. (2012) (2.10) respectivamente:

$$m(t | \boldsymbol{\theta})^{PLP} = \left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha} \quad \alpha, \beta > 0 \quad (2.7)$$

$$m(t | \boldsymbol{\theta})^{GOP} = \alpha[1 - \exp(-\beta t)] \quad \alpha, \beta > 0 \quad (2.8)$$

$$m(t | \boldsymbol{\theta})^{MOP} = \beta \left[\log \left(\frac{t}{\alpha} + 1 \right) \right] \quad \alpha, \beta > 0 \quad (2.9)$$

$$m_I(t | \boldsymbol{\theta})^{MOP_I} = \beta \left[\log \left(\frac{t}{\alpha} + 1 \right) \right] + \delta \cos(\theta t) \quad \alpha, \beta > 0, \quad (2.10)$$

donde $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta)$ es el vector de los parámetros que rigen el comportamiento de la función media. Las funciones de intensidad asociadas con

2.5. Estimación Bayesiana de los parámetros del modelo

Se presenta una formulación Bayesiana en que la función de verosimilitud sigue un modelo de Poisson no Homogéneo con una tasa dada por $\lambda(t | \boldsymbol{\theta})$. El objetivo es estimar los parámetros de esta función de la tasa.

La inferencia Bayesiana para los PPNH ha sido discutida por muchos autores (véase, por ejemplo Achcar et al. (1998), Achcar et al. (2009), Kuo & Yang (1996), Ramirez-Cid & Achcar (1999), Pievatolo & Ruggeri (2004)). Estos procesos también han sido utilizados por diferentes autores para obtener la inferencia de los modelos de punto de cambio (véase, por ejemplo Matthews & Farewell (1982) Achcar & Bolfarine (1989) Carlin et al. (1992) Achcar & Loibel (1998)). Raftery & Akman (1986) considera un análisis Bayesiano de los procesos de Poisson Homogéneos en presencia de un cambio de punto. Ruggeri & Sivaganesan (2005) introducen un análisis Bayesiano para el cambio de puntos en PPNH teniendo en cuenta los procesos de PLP y el tratamiento de un número aleatorio de cambio de puntos. En este trabajo, veremos las cadenas de Markov Monte Carlo (MCMC) (véase, por ejemplo, Gelfan & Schmith (1990) Smith & Roberts (1993) Chib & Greenberg (1995)) que utilizan un análisis Bayesiano para desarrollar el cambio de puntos en PPNH.

Sea $N > 0$ un número natural fijo. Supóngase que se observa que hay días en los que el umbral del caudal ha sido superado. Sea d_1, d_2, \dots, d_N indican los días en que estos umbrales se superaron. Sea $\mathbf{D} = \{d_1, d_2, \dots, d_K\}$ el conjunto de datos observados. Sea $J \geq 0$ un número entero que indica el número de puntos de cambio en el modelo. En este caso J puede asumir cualquier valor cero, uno, dos o tres. Cuando $J = 0$ las funciones de la media y la velocidad del proceso de Poisson son dadas por las ecuaciones (2.7) (2.8) y (2.9), y (2.3) (2.4) y (2.5), respectivamente. Cuando $J = 1, 2, 3$, los $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_J$ indican los puntos de cambio en el modelo y $\boldsymbol{\tau} = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_J\}$ indican el conjunto de estos puntos de cambio. En este caso, tenemos que la función de tasa del proceso de Poisson son de la forma

$$\lambda(t | \boldsymbol{\theta}) = \begin{cases} \lambda(t | \boldsymbol{\theta}_1) & 0 \leq t < \tau_1 \\ \lambda(t | \boldsymbol{\theta}_j) & \tau_{j-1} \leq t < \tau_j \quad j = 2, 3, \dots, J \\ \lambda(t | \boldsymbol{\theta}_{J+1}) & \tau_J \leq t < T, \end{cases} \quad (2.11)$$

donde $\lambda(t | \boldsymbol{\theta}_j)$, $j = 1, 2, \dots, J+1$ son funciones de intensidad en relación con los definidos en las ecuaciones (2.7) (2.8) y (2.9) y $\boldsymbol{\theta}_j$, $j = 1, 2, \dots, J+1$ son los parámetros asociados al PPNH entre los puntos de cambio. De manera equivalente, denotamos por $m(t | \boldsymbol{\theta}_j)$, $j = 1, 2, \dots, J+1$, las funciones correspondientes de valor medio, dadas por,

$$m(t | \boldsymbol{\theta}) = \begin{cases} m(t | \boldsymbol{\theta}_1) & 0 \leq t < \tau_1 \\ m(\tau_1 | \boldsymbol{\theta}_1) + m(t | \boldsymbol{\theta}_2) - m(\tau_1 | \boldsymbol{\theta}_2) & \tau_1 \leq t < \tau_2 \\ m(t | \boldsymbol{\theta}_{j+1}) - m(\tau_j | \boldsymbol{\theta}_{j+1}) \\ \quad + \sum_{i=2}^j [m(\tau_i | \boldsymbol{\theta}_i) - m(\tau_{i-1} | \boldsymbol{\theta}_i)] + m(\tau_1 | \boldsymbol{\theta}_1) & \tau_j \leq t < \tau_{j+1}, \end{cases} \quad (2.12)$$

donde se toma $\tau_{j+1} = T$.

La inferencia se realiza utilizando la información proporcionada por la distribución posterior de los parámetros. Por lo tanto, debemos asumir independencia a priori entre los parámetros, tenemos que en presencia de puntos de cambio, las distribuciones a priori y a posteriori y la función de verosimilitud se presentan como sigue

$$P(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau} | \mathbf{D}) = P(\alpha, \beta, \boldsymbol{\tau} | \mathbf{D}) \propto L(\mathbf{D} | \alpha, \beta, \boldsymbol{\tau})P(\alpha)P(\beta)P(\boldsymbol{\tau}), \quad (2.13)$$

donde $P(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau} | \mathbf{D})$ es la distribución conjunta posterior de $\boldsymbol{\theta}$ y $\boldsymbol{\tau}$, dados los datos \mathbf{D} ; $P(\alpha)$, $P(\beta)$, $P(\boldsymbol{\tau})$ son las distribuciones a priori de α , β , $\boldsymbol{\tau}$ respectivamente y $L(\mathbf{D} | \alpha, \beta, \boldsymbol{\tau})$ es la función de verosimilitud. Cuando no hay puntos de cambio presentes, se tiene entonces

que

$$P(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{D}) = P(\alpha, \beta \mid \mathbf{D}) \propto L(\mathbf{D} \mid \alpha, \beta)P(\alpha)P(\beta), \quad (2.14)$$

donde $P(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{D})$ es la distribución posterior de $\boldsymbol{\theta}$ dado los datos \mathbf{D} y $L(\mathbf{D} \mid \alpha, \beta)$ es la función de verosimilitud. Los componentes de las ecuaciones (2.13) y (2.14) se muestran en la subsección 2.5.1.

2.5.1. La Función de verosimilitud

Sea $\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})$, donde se denota $\boldsymbol{\omega}$ por $\boldsymbol{\omega}_i$ si $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_i$, $i = 1, 2, \dots, J + 1$. Suponiendo un modelo de Poisson no Homogéneo, tenemos que la función de verosimilitud en la ecuación (2.13) tiene la forma

$$L(\mathbf{D} \mid \boldsymbol{\omega}) \propto \prod_{i=1}^{N_{\tau_1}} \lambda(d_i \mid \boldsymbol{\omega}_i) e^{-m(\tau_1 \mid \boldsymbol{\omega}_1)} \left[\prod_{j=2}^J \left(\prod_{i=N_{\tau_{j-1}}+1}^{N_{\tau_j}} \lambda(d_i \mid \boldsymbol{\omega}_j) e^{-[m(\tau_j \mid \boldsymbol{\omega}_j) - m(\tau_{j-1} \mid \boldsymbol{\omega}_j)]} \right) \right] \prod_{i=N_{\tau_J}}^{N_T} \lambda(d_i \mid \boldsymbol{\omega}_{J+1}) e^{-[m(T \mid \boldsymbol{\omega}_{J+1}) - m(\tau_J \mid \boldsymbol{\omega}_{J+1})]} \quad (2.15)$$

(véase, por ejemplo Yang & Kuo (2001) y Achcar et al. (2008)). Cuando no hay puntos de cambio, la ecuación (2.15) se simplifica a (ver Cox & Lewis (1966))

$$L(\mathbf{D} \mid \boldsymbol{\theta}) \propto \left(\prod_{i=1}^K \lambda(d_i) \right) e^{-m(d_K)} \quad (2.16)$$

CAPÍTULO 3

Descripción de la cuenca y de datos de caudal del río Sumapaz

La cuenca del río Sumapaz (Figura 3.1) se localiza en la parte central de Colombia, en el departamento de Cundinamarca y cuenta con una extensión de $17.470,75 \text{ km}^2$. Dentro de la cuenca se localiza el páramo del mismo nombre que, con 250.000 hectáreas, es una de las principales fuentes de agua del país. El río nace en el alto de Cazuelas a 3800 msnm, en el páramo de Sumapaz, y sus aguas, fluyen hacia el oeste hasta desembocar en el río Magdalena en Girardot a 280 msnm (Figura 3.2). Es uno de los principales afluentes del río Magdalena en la parte alta de su cuenca, y abastece de agua potable a diez municipios de los departamentos de Cundinamarca y Tolima, entre ellos: Pandi, Nilo, Ricaurte, Icononzo, Carmen de Apicalá y Melgar. En su recorrido de 57 km sirve de límite entre Tolima y Cundinamarca.



FIGURA 3.1. Cuenca del río Sumapaz Fuente: INVIAS <http://bit.ly/A3sibC>

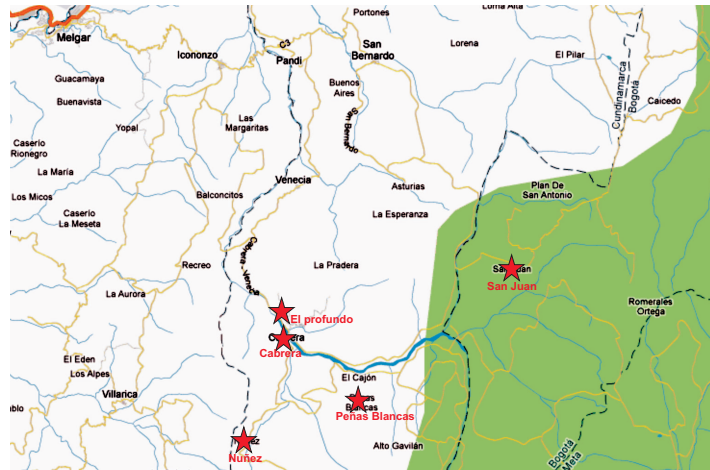


FIGURA 3.2. Mapa del río Sumapaz Fuente: Google maps

Los datos analizados corresponden a series mensuales desde enero de 1989 hasta diciembre de 2001, obtenidos en cuatro estaciones de precipitación (San Juan, Núñez, Peñas Blancas y Cabrera) y una estación de caudal del río Sumapaz (El Profundo), por el Instituto de Hidrología, Meteorología y Estudios Ambientales de Colombia (Ideam). Las mediciones de precipitación son los totales mensuales (suma de las precipitaciones diarias en cada mes) para cada estación de precipitación y se expresan en milímetros (decir que llovió un milímetro significa que cayó un litro de agua en cada metro cuadrado de terreno). Las mediciones de caudal corresponden al promedio diario mensual y está expresado en m^3/s . En la Tabla 3.1 se presentan una descripción del tipo de estación, la cuenca, altitud y las coordenadas geográficas de cada una de las cinco estaciones. Se puede ver que la altitud de cada una de las estaciones de precipitación es mayor que la altitud de la estación El Profundo.

TABLA 3.1. Estaciones río Sumapaz

Nombre de la estación	Tipo	Cuenca	Elev. (msnm)	Coordenadas geográficas	
				Latitud	Longitud
San Juan	Pluviométrica	San Juan	2900	4°01n	74°14w
Peñas blancas	Pluviométrica	Sumapaz	1950	3°59n	74°24w
Núñez	Pluviométrica	Q. negra	1950	3°54n	74°30w
Cabrera	Pluviométrica	Sumapaz	1900	3°59n	74°29w
El profundo	Limnigráfica	Sumapaz	1860	4°00n	74°30w

En la Figura 3.3 se presentan los promedios mensuales de precipitación en mm (líneas continuas, eje principal) al igual que el promedio mensual del caudal en m^3/s para la estación El Profundo (línea punteada, eje secundario), se evidencia un régimen de precipitación bimodal en esta zona de estudio con dos periodos de alta precipitación en los meses de marzo-mayo y octubre-noviembre y dos periodos de baja precipitación en los meses de diciembre-enero y julio-agosto.

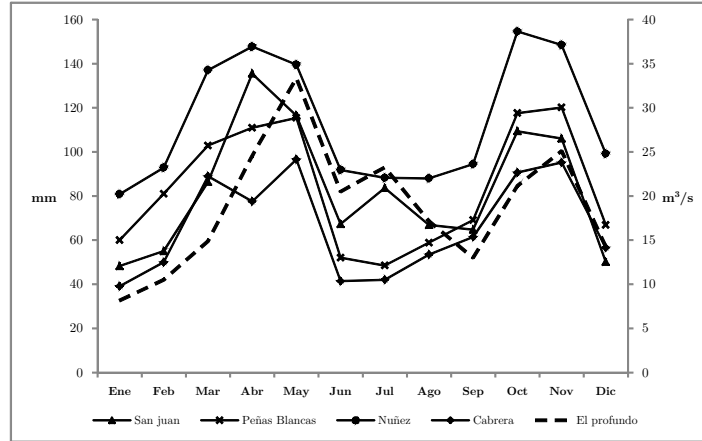


FIGURA 3.3. Promedio mensual de precipitación y caudal

El diagrama de la serie de tiempo se utiliza a menudo para hacer una primera evaluación en cuanto a la estacionariedad de la serie, así como el gráfico de la función de autocorrelación analizando si su decaimiento es relativamente rápido, se puede asumir la estacionariedad; cuando el decaimiento es lento, es decir, si las autocorrelaciones significativas se mantienen en rezagos lejanos, la serie es considerada no estacionaria (Makridakis et al., 1998). Es este caso, la serie de caudal y su autocorrelograma (Figuras 3.4(a) y 3.4(b) respectivamente), indican que esta serie no es estacionaria.

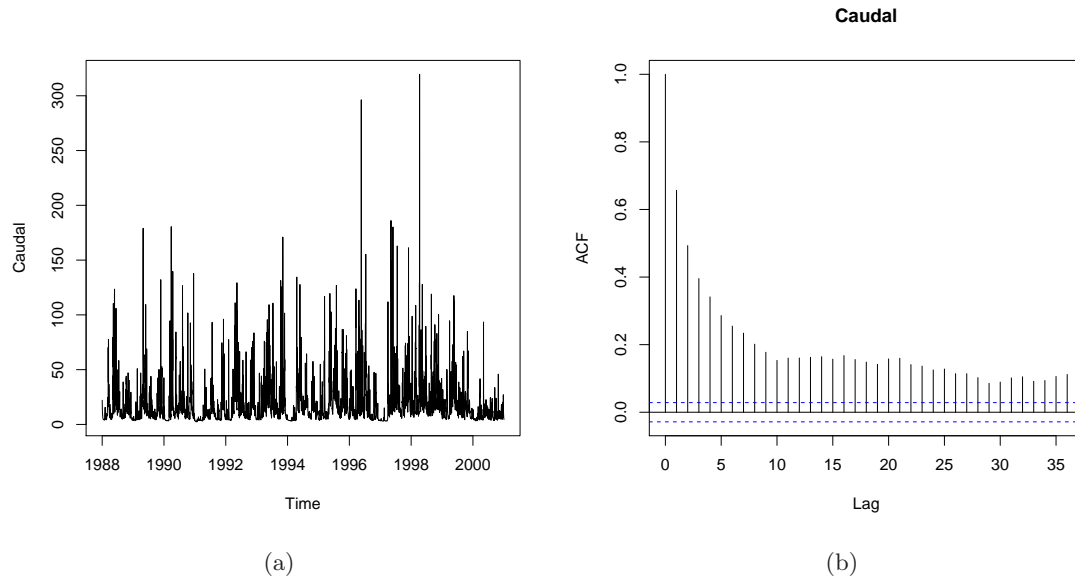


FIGURA 3.4. Serie de tiempo y autocorrelograma de la serie caudal

Análisis del caudal del río Sumapaz

Los métodos descritos en los capítulos 1 y 2 se aplican a la series mensuales del caudal del río Sumapaz medido en la estación El Profundo, y de precipitación medida en las estaciones San Juan, Peñas Blancas, Núñez y Cabrera de la cuenca hidrográfica del río Sumapaz entre los años 1989 y 2001, descritos en la Tabla 3.1 y localizada geográficamente en la Figura 3.2.

4.1. Regresión dinámica simple con intercepto: Análisis del caudal como función de la precipitación promedio.

En este caso la ecuación observacional del modelo de regresión dinámica simple con intercepto es

$$Y_t = \alpha_t + \beta_t PROM_t + \nu_t, \quad \nu_t \sim N(0, V) \quad (4.1)$$

y las ecuaciones del sistema están dadas por

$$\begin{aligned} \alpha_t &= \alpha_{t-1} + \omega_{t1} \\ \beta_t &= \beta_{t-1} + \omega_{t2} \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde $\boldsymbol{\omega}_t = (\omega_{t1}, \omega_{t2})' \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{W}_t)$.

En los resultados mostrados posteriormente se utilizó como variable dependiente el caudal medido en la estación El Profundo, y como variable independiente *PROM* el promedio de precipitación medida en las cuatro estaciones de estudio. El factor de descuento óptimo δ para este caso, es de 0.95 indicando una tasa alta de adaptación lo que implica una buen estimación como se observa en la Figura 4.1(a).

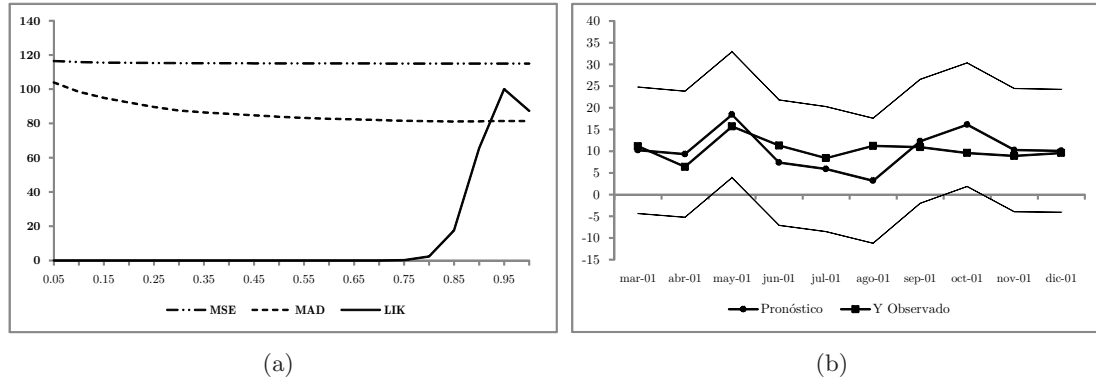


FIGURA 4.1. (a) MSE , MAD y LIK medidos como funciones de δ para la regresión lineal simple dinámica con intercepto. (b) Pronóstico dentro de muestra para el año 2002.

La Figura 4.2(a) muestra la trayectoria del intercepto (línea continua) con sus intervalos de probabilidad a posteriori al 90%, (línea punteada) con un factor de descuento óptimo de $\delta = 0.95$, puesto que el límite inferior del intervalo de probabilidad en algunas partes es inferior a cero, indica que el parámetro no es significativo la mayor parte del tiempo.

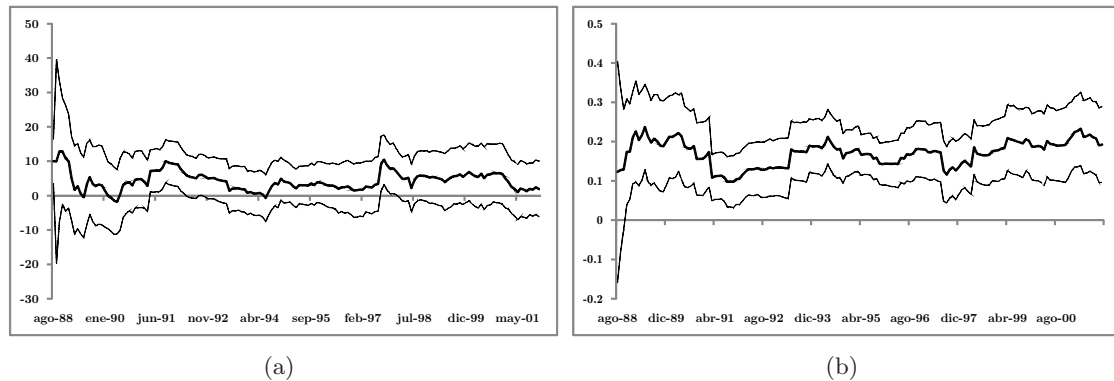


FIGURA 4.2. Trayectoria estimada de α_t (a) y β_t (b) para $\delta = 0.95$ con sus intervalos de credibilidad del 90% para la regresión lineal simple dinámica con intercepto para el caudal con $PROM$ como covariable.

La Figura 4.2(b) muestra la trayectoria de la pendiente estimada (línea continua) con sus respectivos intervalos de probabilidad a posteriori al 90%, (línea punteada) con un factor de descuento óptimo de $\delta = 0.95$ se puede ver que el parámetro es significativo todo el tiempo.

También se modeló el caudal mediante una regresión lineal dinámica simple con y sin intercepto usando como covariable la precipitación de cada una de las estaciones. La Tabla 4.1 muestra el factor de descuento óptimo para cada uno de los modelos con la respectiva altitud de la estación. Se puede ver que en general, el δ es mayor en los modelos con intercepto, además los modelos con los datos de precipitación de las estaciones (Cabrera y Peñas Blancas) que están a menor distancia de la estación de caudal El Profundo (Figura 3.2) proporcionan los mayores valores de δ .

TABLA 4.1. δ óptimo para la regresión con y sin intercepto

Estación	Sin intercepto	Con intercepto	Altitud
El profundo ¹			1860
Cabrera	1.00	1.00	1900
Peñas blancas	0.95	1.00	1950
Núñez	0.60	0.90	1950
San Juan	0.60	0.90	2900
Promedio	0.70	0.95	2175

4.1.1. Regresión sin intercepto

La regresión dinámica simple sin intercepto se puede ver como un caso particular del modelo descrito en la sección 4.1, cuando $\alpha_t = 0$ para todo t . Para este caso la ecuación observacional es

$$Y_t = \beta_t PROM_t + \nu_t \quad \nu_t \sim N(0, V), \quad (4.3)$$

y la ecuación del sistema dada por

$$\beta_t = \beta_{t-1} + \omega_t \quad \omega_t \sim N(0, W). \quad (4.4)$$

En los resultados mostrados en las Figuras 4.3(a) 4.3(b), 4.4(a), 4.4(b), se utilizó como variable dependiente el caudal de la estación El Profundo, y como variable independiente $PROM$ el promedio de los datos de las cuatro estaciones de precipitación. Se busca el factor de descuento δ (ecuación (1.13)) tal que el MSE y el MAD sean mínimos y la función de verosimilitud LIK sea máxima, en este caso de regresión lineal simple dinámica sin intercepto, se observa en la Figura 4.3(b) que el δ óptimo es 0.70.

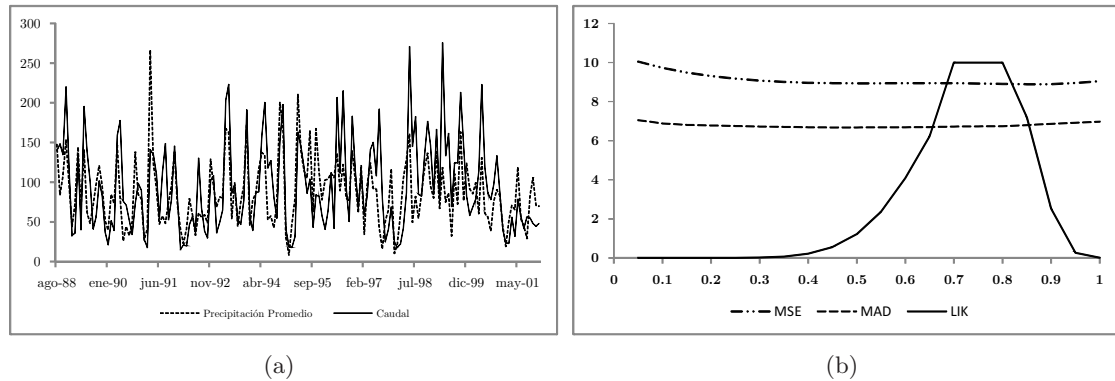


FIGURA 4.3. (a) Promedio de precipitación y caudal. (b) CME , DAM y LIK medidos como funciones de δ para la regresión lineal simple dinámica sin intercepto.

En la Figura 4.3(a) se muestra el comportamiento del caudal (línea continua) y el comportamiento del promedio de la precipitación de las cuatro estaciones consideradas en este estudio (línea discontinua). La Figura 4.4(a) muestra la trayectoria estimada de la pendiente β_t (línea continua) y los intervalos de probabilidad a posteriori al 90 % (líneas

¹Estación limnigráfica

punteadas) calculado a partir de la distribución a posteriori t -Student, indicando que el parámetro es significativo todo el tiempo, usando el δ óptimo de 0.7

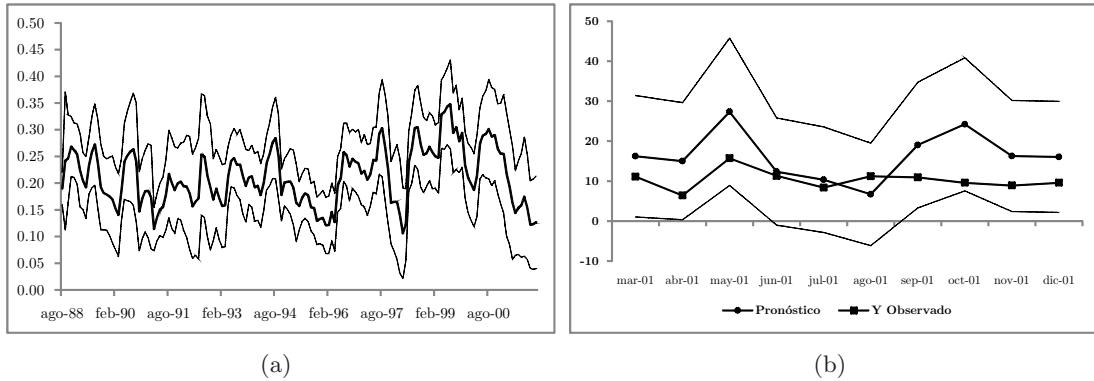


FIGURA 4.4. (a) Trayectoria estimada de β_t para $\delta = 0.7$ con sus intervalos de credibilidad del 90 % para la regresión lineal simple dinámica sin intercepto y (b) pronóstico dentro de muestra del caudal un paso adelante: $\delta = 0.7$

Para efectos de bondad de pronóstico, se eliminaron las observaciones de los últimos diez meses y se realizó el pronóstico dentro de muestra, con sus intervalos de pronóstico al 90 %, en la Figura 4.4(b), se observa que los valores pronosticados se encuentran dentro del intervalo, aunque se presenta sobreestimación en las dos temporadas lluviasas.

4.1.2. Modelo Dinámico Constante

Este modelo es una caso particular del modelo de regresión dinámica simple con intercepto en el que $\alpha_t = 0$ y la covariable constante igual a uno. En la Figura 4.5 se muestra la estimación del caudal promedio mensual (línea punteada) y el caudal observado (línea continua) aplicando el modelo constante. En la Figura 4.5(a) se tomó $r = 0.05$ y en la Figura 4.5(b) se tomó $r = 0.5$, se observa que cuando el r aumenta el modelo estimado se ajusta mejor a los datos. El modelo reconoce los tramos con mayores y menores caudales.

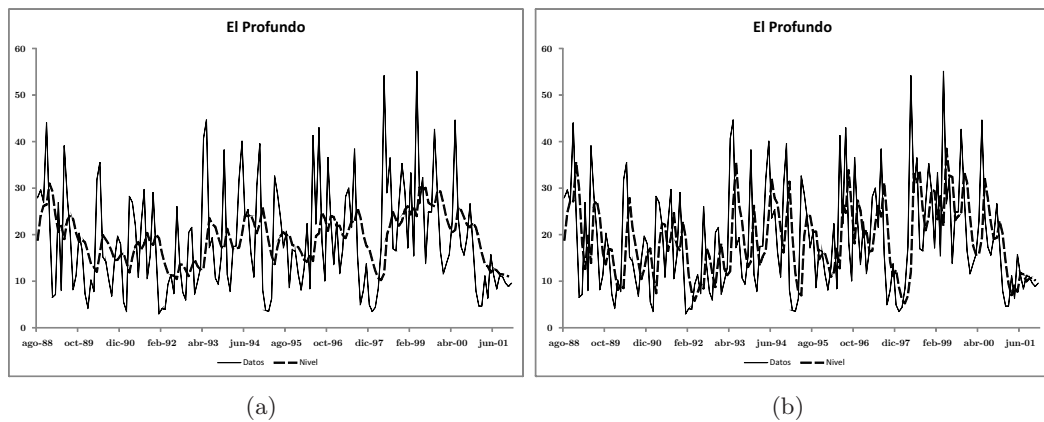


FIGURA 4.5. Estimación del caudal promedio mensual para la estación El Profundo bajo el modelo constante para $r = 0.05$ (a) y $r = 0.5$ (b).

En la Tabla 4.2 se muestra un esquema de las observaciones y varios componentes del pronóstico a un paso. Así mismo, las relaciones de actualización, el comportamiento límite con la convergencia para algunos meses, del caudal de la estación El Profundo con $r = 0.5$. Se puede observar que en dicha tabla A_t , C_t y R_t convergen rápidamente a sus valores teóricos (Teorema 2)

TABLA 4.2. Pronósticos un paso adelante

t	Q_t	Nivel	A_t	Datos	e_t	m_t	C_t	R_t
1	279.13	18.8	0.64	27.96	9.16	24.68	64.17	179.13
2	214.17	24.68	0.53	29.58	4.91	27.29	53.31	114.17
3	203.31	27.29	0.51	26.97	-0.32	27.13	50.81	103.31
4	200.81	27.13	0.5	43.98	16.85	35.59	50.2	100.81
5	200.2	35.59	0.5	24.05	-11.55	29.81	50.05	100.2
6	200.05	29.81	0.5	6.55	-23.26	18.18	50.01	100.05
7	200.01	18.18	0.5	7.14	-11.04	12.66	50	100.01
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
154	200	7.73	0.5	15.69	7.97	11.71	50	100
155	200	11.71	0.5	11.29	-0.43	11.5	50	100
156	200	11.5	0.5	8.38	-3.12	9.94	50	100
157	200	9.94	0.5	11.2	1.27	10.57	50	100
158	200	10.57	0.5	10.92	0.35	10.75	50	100
159	200	10.75	0.5	9.58	-1.16	10.16	50	100
160	200	10.16	0.5	8.9	-1.26	9.53	50	100

4.2. Regresión lineal dinámica múltiple: Análisis del caudal como una función de las precipitaciones medidas en las estaciones Núñez-San Juan y Cabrera-Peñas Blancas

La ecuación observacional del modelo de regresión dinámica múltiple es

$$Y_t = \alpha_t + \beta_t NUNEZ_t + \gamma_t SJUAN_t + \nu_t, \quad \nu_t \sim N(0, V) \quad (4.5)$$

y las ecuaciones del sistema están dadas por

$$\begin{aligned} \alpha_t &= \alpha_{t-1} + \omega_{t1} \\ \beta_t &= \beta_{t-1} + \omega_{t2} \\ \gamma_t &= \gamma_{t-1} + \omega_{t3} \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde $\boldsymbol{\omega}_t = (\omega_{t1}, \omega_{t2}, \omega_{t3})' \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{W}_t)$.

Se realizaron dos regresiones múltiples con el caudal medido en la estación El Profundo como variable dependiente. En la primera los regresores fueron las precipitaciones medidas en las estaciones Núñez y San Juan, donde resultó un δ óptimo de 0.95 (Figura 4.6(a)). También se puede ver en la Figura 4.6(b) que el intercepto no es significativo al 90% la mayor parte del tiempo, el parámetro β_t es significativo la mayor parte del tiempo excepto entre agosto de 1997 y mayo de 1998. γ_t sólo es significativo entre junio de 1993 y octubre de 1996, en la última parte de la serie no es significativo como lo muestra la Figura 4.6(b).

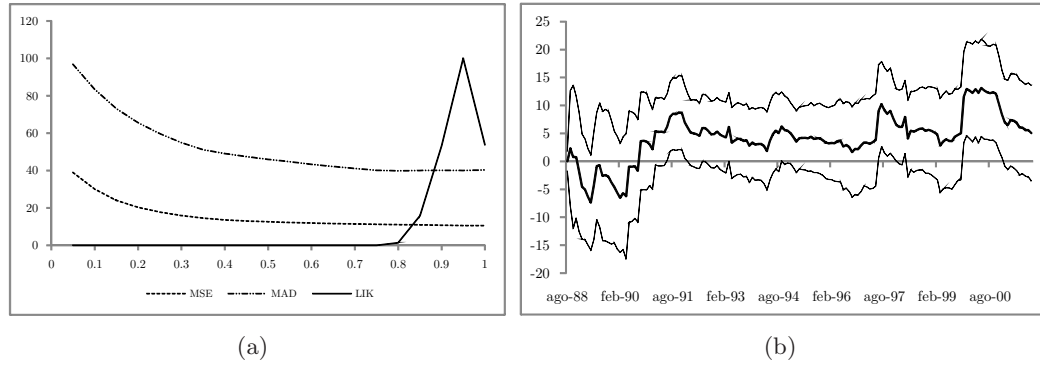


FIGURA 4.6. (a) *CME*, *DAM* y *LIK* medidos como funciones de δ para la regresión lineal múltiple dinámica. (b) Trayectoria en línea de α_t con $\delta = 0.95$ para la regresión lineal múltiple dinámica

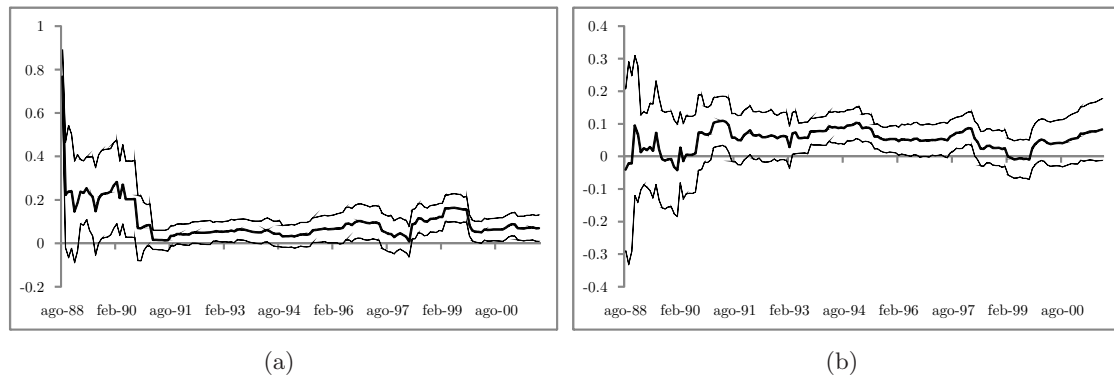


FIGURA 4.7. (a) Trayectoria en línea de β_t con $\delta = 0.95$ para la regresión lineal múltiple dinámica. (b) Trayectoria en línea de γ_t con $\delta = 0.95$ para la regresión lineal múltiple dinámica

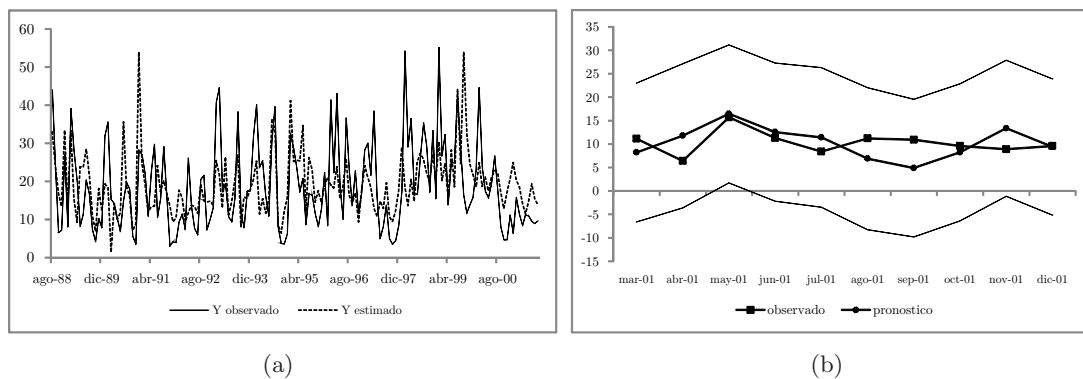


FIGURA 4.8. (a) Comparación de Y y \hat{Y} con $\delta = 0.95$. (b) Pronóstico dentro de muestra para el año 2002

En la segunda regresión se emplearon como regresores las precipitaciones medidas en las estaciones Cabrera y Peñas Blancas (las de mejor desempeño individual). El mejor modelo fue el estático ($\delta = 1$) (Figura 4.9(a)). Aquí los tres parámetros son significativos la mayor parte del tiempo (ver figuras 4.9(b), 4.10(a) y 4.10(b)). También se muestran los

gráficos de comparación entre Y y \hat{Y} para las dos regresiones (Figuras 4.11(a) y 4.8(a)) indicando un buen ajuste.

La ecuación observacional para este modelo está dada por

$$Y_t = \alpha_t + \beta_t CABRERA_t + \gamma_t PBLANCAS_t + \nu_t, \quad \nu_t \sim N(0, V) \quad (4.7)$$

y las ecuaciones del sistema están dadas por

$$\begin{aligned} \alpha_t &= \alpha_{t-1} + \omega_{t1} \\ \beta_t &= \beta_{t-1} + \omega_{t2} \\ \gamma_t &= \gamma_{t-1} + \omega_{t3}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde $\omega_t = (\omega_{t1}, \omega_{t2}, \omega_{t3})' \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{W}_t)$.

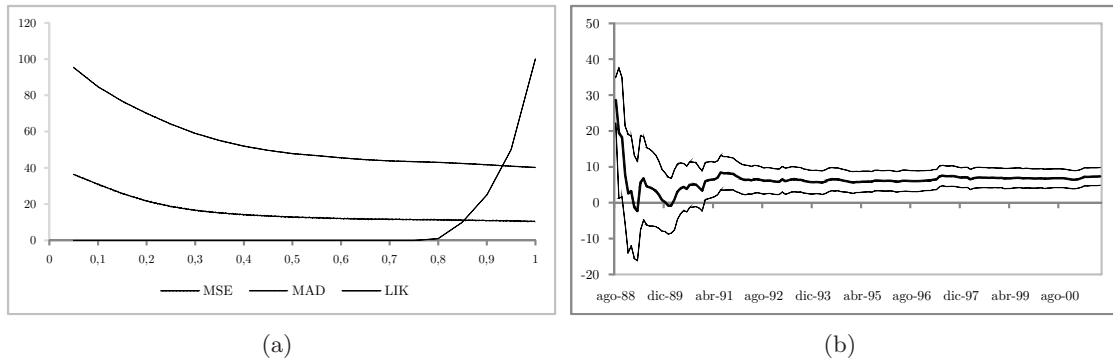


FIGURA 4.9. (a) CME , DAM y LIK medidos como funciones de δ para la regresión lineal múltiple dinámica. (b) Trayectoria en línea de α_t con $\delta = 1$ para la regresión lineal múltiple dinámica

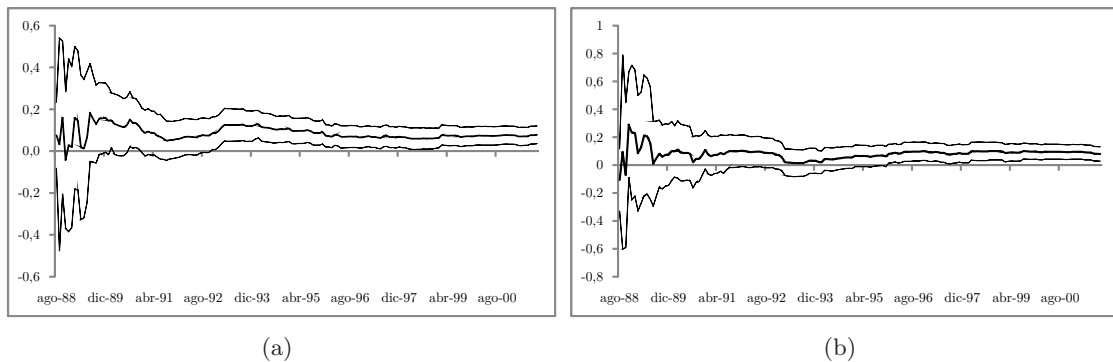


FIGURA 4.10. (a) Trayectoria en línea de β_t con $\delta = 1$ para la regresión lineal múltiple dinámica. (b) Trayectoria en línea de γ_t con $\delta = 1$ para la regresión lineal múltiple dinámica

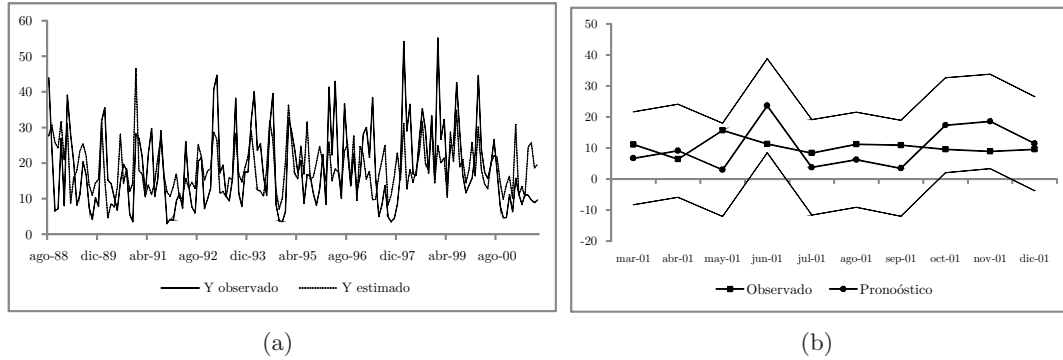


FIGURA 4.11. (a) Comparación de Y y \hat{Y} con $\delta = 1$. (b) Pronóstico dentro de muestra para el año 2002.

4.3. Observaciones faltantes

Un aspecto importante en los modelos dinámicos es la posibilidad de tratar las observaciones faltantes y de realizar intervenciones subjetiva automáticamente. En el primer caso, basta con utilizar las ecuaciones de actualización cuando la observación correspondiente está ausente, de esta forma. Las incertidumbres se incrementarán por el cálculo de una nueva a priori y las ecuaciones de recurrencia continuarán siendo validas sin mayores problemas. Desde el punto de vista de las intervenciones, es razonable proponer el uso de factores de descuento muy pequeños, cercanos a cero, en momentos de cambios estructurales en el proceso de generación de datos.

TABLA 4.3. δ óptimo para la regresión con datos faltantes

Estación	Datos faltantes				
	Ninguno	May89 - Mar90	May89 - Ene91	Mar95 - Ene96	May94 - Ene96
Promedio 1	1.00	1.00	0.65	1.00	0.70
Promedio 2	0.95	0.85	0.60	1.00	0.95
Cabrera	1.00	0.75	0.60	1.00	0.85
Peñas blancas	1.00	0.85	0.65	1.00	0.70
Núñez	0.90	0.90	0.85	1.00	0.90
San Juan	0.90	0.75	0.65	0.95	0.90

Se realizaron las regresiones lineales dinámicas simples con intercepto, con las cuatro estaciones pluviométricas Cabrera, Peñas Blancas, Núñez y San Juan, además con los promedios de las cuatro estaciones mencionadas anteriormente (Promedio 1) y con el promedio de las estaciones Cabrera y Peñas Blancas (Promedio 2). La tabla nos indica los valores del δ con los diferentes modelos, en la primera columna se corrieron los modelos con los datos completos, en la segunda columna se suprimieron las observaciones del caudal Y de la diez a la veinte, en la tercera columna se suprimieron de la diez a la treinta, en la cuarta columna se suprimieron de la ochenta a la noventa y en la última columna se suprimieron de la setenta a la noventa. En todos los casos se utilizaron las ecuaciones de actualización en las observaciones faltantes. (ver Teorema (3))

Se observa en general que el valor de δ disminuye conforme hay más observaciones faltantes, tomando menores valores cuando los datos faltantes están ubicados en las valores iniciales de la serie (tercera columna) que cuando se ubican en la parte central de la serie.

4.4. Un Análisis del caudal como función de la precipitación usando Modelos Jerárquicos

Para estimar el caudal del río Sumapaz se proponen modelos lineales dinámicos jerárquicos en los que se incluyen como covariables también la precipitación medida en las estaciones Núñez, San Juan, Peñas Blancas y Cabrera.

El modelo que incluye la precipitación medida en las cuatro estaciones está determinado por

$$\begin{aligned} Y_t &= \beta_t Y_{t-1} + \nu_t & \nu_t &\sim N(0, V) \\ \beta_t &= \alpha_0 + \alpha_1 NUÑEZ_t + \alpha_2 PBLANCAS_t & & \\ &+ \alpha_3 SJUAN_t + \alpha_4 CABRERA_t + \omega_t & \omega_t &\sim N(0, W) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Las distribuciones a priori para $\beta_1, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ se asumieron normales con media cero y varianza 10^6 .

La Figura 4.12 muestra el caudal observado y estimado con sus intervalos de credibilidad al 90% para los últimos dos años. Se observa que el modelo presenta un buen ajuste y que los intervalos de credibilidad son significativos la mayor parte del tiempo.

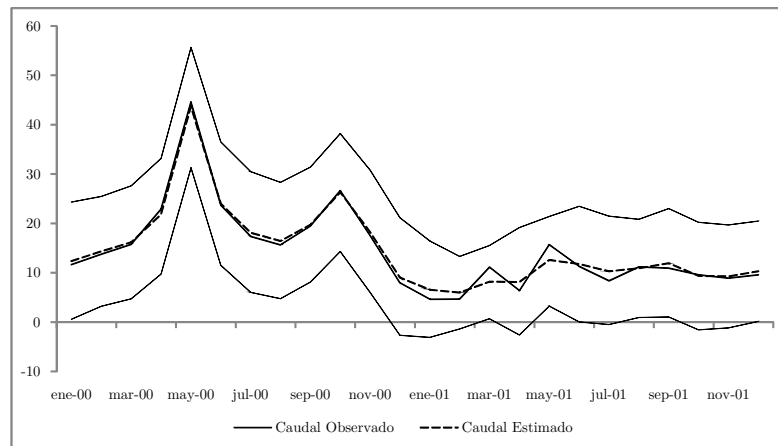


FIGURA 4.12. Caudal observado y estimado para el modelo lineal dinámico jerárquico 4.9 con sus intervalos de credibilidad al 90%

La Figura 4.13 muestra la evolución temporal del parámetro β_t para los últimos cuatro años, mostrando que la serie temporal es significativa en la mayoría de los instantes de tiempo.

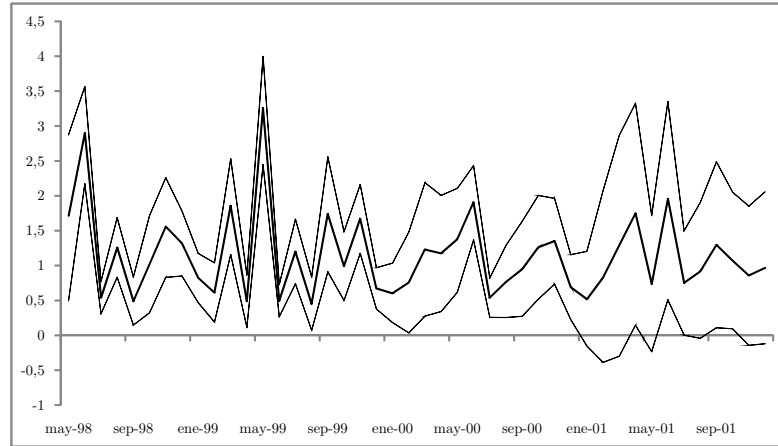


FIGURA 4.13. β_t estimado para el modelo lineal dinámico jerárquico con sus intervalos de credibilidad al 90%

La simulación se llevó a cabo usando el software WinBUGS (Spiegelhalter, D. and Thomas, A. and Best, N. and Lunn, D., 2001). Para cada uno de los seis modelos se simularon 100.000 muestras de las cuales se eliminaron las primeras 20.000 para obtener un resumen la distribución a posteriori de los parámetros fijos del modelo. La Tabla 4.4 muestra las estimaciones Bayesianas vía MCMC para parámetros de las distribuciones a posteriori. En el primer modelo se incluyeron cuatro covariables que corresponden a la precipitación medida en las cuatro estaciones, en el segundo modelo se eliminó el parámetro de la estación Cabrera, y se estimó un tercer modelo eliminando los parámetros de las estaciones Cabrera y San Juan. Otros cuatro modelos sólo incluyen los datos de precipitación de una estación y un último modelo con el promedio de la precipitación de las cuatro estaciones. En la Tabla 4.4 se reportan las estimaciones de la media, la desviación estándar y el correspondiente intervalo de credibilidad al 90% para cada parámetro que no depende del tiempo, además del criterio de información CID para cada modelo monitoreando la convergencia del algoritmo Muestreador de Gibbs chequeando los gráficos de las distribuciones de las muestras simuladas para cada parámetro, verificando si se obtienen distribuciones estacionarias.

En la Tabla 4.4 también se observa que los modelos con menos covariables presentan menores valores del CID, según este criterio, el mejor modelo es el que tiene como covariable el promedio de la precipitación de las cuatro estaciones incluidas en el estudio.

TABLA 4.4. Resumen de la distribución a posteriori para los parámetros del modelo de la forma 4.9

		Media	SD	Intervalo de credibilidad 90 %		DIC
	α_0^*	1.494	0.220	1.130	1.851	
Cabrera	α_1	0.009	0.062	-0.092	0.111	1175.25
Sjuan	α_2	0.047	0.099	-0.117	0.209	
Pblancas	α_3	-0.011	0.044	-0.084	0.060	
Nuñez	α_4^*	-0.206	0.124	-0.041	-0.001	
	τ^*	0.028	0.013	0.015	0.049	
	α_0^*	1.509	0.207	1.179	1.835	
Sjuan	α_1	0.051	0.097	-0.107	0.209	1173.69
Pblancas	α_2	-0.012	0.044	-0.084	0.059	
Nuñez	α_3^*	-0.200	0.117	-0.391	-0.008	
	τ^*	0.028	0.013	0.015	0.050	
	α_0^*	1.532	0.195	1.209	1.851	
Pblancas	α_1	-0.007	0.042	-0.077	0.063	1173.64
Nuñez	α_2^*	-0.153	0.075	-0.277	-0.029	
	τ^*	0.028	0.011	0.015	0.048	
	α_0^*	1.524	0.186	1.216	1.828	
Cabrera	α_1^*	-0.159	0.069	-0.272	-0.043	1171.79
	τ^*	0.028	0.013	0.015	0.049	
	α_0^*	1.271	0.149	1.024	1.515	
Sjuan	α_1	-0.04	0.039	-0.105	0.024	1170.11
	τ^*	0.025	0.009	0.014	0.042	
	α_0^*	1.410	0.190	1.095	1.721	
Pblancas	α_1	-0.088	0.056	-0.181	0.005	1168.64
	τ^*	0.025	0.009	0.014	0.043	
	α_0^*	1.383	0.204	1.044	1.715	
Nuñez	α_1	-0.058	0.045	-0.133	0.016	1166.25
	τ^*	0.026	0.010	0.014	0.044	
	α_0^*	1.515	0.217	1.155	1.868	
Promedio	α_1^*	-0.119	0.064	-0.224	-0.013	1163.69
	τ^*	0.027	0.010	0.014	0.045	

Los parámetros con * son significativos al 10 %

Otro modelo jerárquico considerado para estimar el caudal del río Sumapaz en el que se incluyen las estaciones Cabrera y Peñas Blancas se presenta en las ecuaciones (4.10), donde las distribuciones a priori de los parámetros α_i , γ_i y δ_i con $i = 0, 1, 2, 3, 4$ se asumieron normales con media cero y varianza 10^3 . La primera ecuación del modelo 4.10 coincide con la ecuación observacional del modelo de regresión dinámico presentado en 4.5.

$$\begin{aligned}
Y_t &= \beta_{0t} + \beta_{1t}CABRERA_t + \beta_{2t}PBLANCAS_t + \nu_t & \nu_t &\sim N(0, V) \\
\beta_{0t} &= \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \alpha_3 Y_{t-3} + \alpha_4 Y_{t-4} + \omega_{1t} & \omega_{1t} &\sim N(0, W_1) \\
\beta_{1t} &= \gamma_0 + \gamma_1 Y_{t-1} + \gamma_2 Y_{t-2} + \gamma_3 Y_{t-3} + \gamma_4 Y_{t-4} + \omega_{2t} & \omega_{2t} &\sim N(0, W_2) \\
\beta_{2t} &= \delta_0 + \delta_1 Y_{t-1} + \delta_2 Y_{t-2} + \delta_3 Y_{t-3} + \delta_4 Y_{t-4} + \omega_{3t} & \omega_{3t} &\sim N(0, W_3)
\end{aligned} \tag{4.10}$$

El modelo propuesto en (4.10) también se implementó con rezagos de orden tres, dos y uno. Los resultados de las estimaciones se muestran en la Tabla 4.5

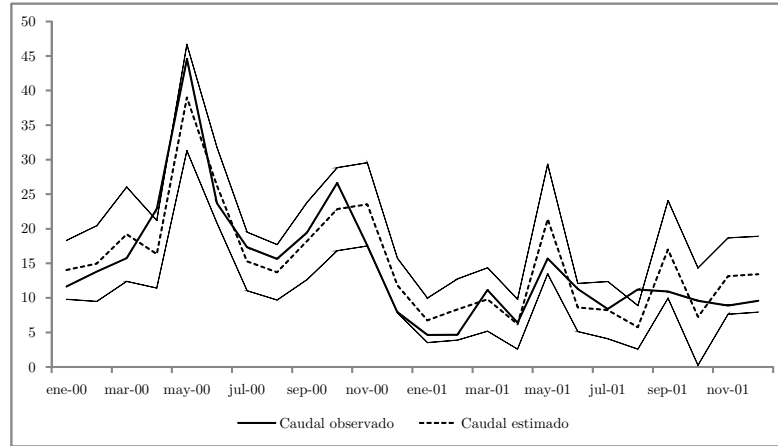


FIGURA 4.14. Caudal observado y caudal estimado para el modelo lineal dinámico jerárquico (4.10) que incluye tres rezagos con sus intervalos de credibilidad al 90 %

La Figura 4.14 muestra el caudal observado y estimado con sus intervalos de credibilidad al 90 % para los últimos dos años. Se observa que el modelo presenta un buen ajuste y que los intervalos de credibilidad son significativos la mayor parte del tiempo.

La simulación también se llevó a cabo usando el software WinBUGS (Spiegelhalter, D. and Thomas, A. and Best, N. and Lunn, D., 2001), para cada uno de los cuatro modelos se simularon 200.000 muestras de las cuales se eliminaron las primeras 50.000 para obtener un resumen la distribución a posteriori de los parámetros fijos del modelo, la Tabla 4.5 muestra las estimaciones Bayesianas vía MCMC para los parámetros de las distribuciones a posteriori y reporta las estimaciones de la media, la desviación estándar, y su correspondiente intervalo de credibilidad al 90 % para cada parámetro que no depende del tiempo, además del criterio de información CID para cada modelo.

Usando también el criterio del CID para comparar los modelos, el mejor modelo es el que incluye tres rezagos en el que dos de los tres coeficientes del tercer rezago son significativos.

TABLA 4.5. Resumen de la distribución a posteriori para los parámetros del modelo de la forma 4.10

		Media	SD	Intervalo de credibilidad 90 %		DIC
1 Rezago	α_0	-0.595	2.330	-4.357	3.308	1100.68
	α_1^*	0.327	0.114	0.135	0.511	
	γ_0	0.800	1.761	-2.143	3.748	
	γ_1	0.122	0.088	-0.022	0.266	
	δ_0^*	3.532	1.356	1.292	5.741	
	δ_1	-0.063	0.074	-0.183	0.060	
	τ^*	0.024	0.003	0.018	0.030	
2 Rezagos	α_0	0.130	2.738	-4.415	4.556	1100.31
	α_1^*	0.318	0.122	0.117	0.522	
	α_2	-0.038	0.113	-0.225	0.148	
	γ_0	1.927	2.033	-1.473	5.237	
	γ_1^*	0.158	0.090	0.003	0.300	
	γ_2^*	-0.094	0.094	0.245	0.062	
	δ_0	1.858	1.627	-0.819	4.547	
	δ_1	-0.103	0.076	-0.224	0.027	
	δ_2^*	0.133	0.073	0.014	0.253	
	τ^*	0.024	0.004	0.019	0.031	
3 Rezagos	α_0	-0.184	3.074	-6.986	3.168	1019.89
	α_1^*	0.332	0.124	0.132	0.539	
	α_2	-0.182	0.124	-0.392	0.018	
	α_3^*	0.242	0.108	0.059	0.419	
	γ_0	2.852	2.292	-0.845	6.622	
	γ_1^*	0.165	0.095	0.008	0.319	
	γ_2	-0.050	0.099	-0.216	0.109	
	γ_3	-0.120	0.101	-0.279	0.055	
	δ_0	2.263	1.865	-0.803	5.328	
	δ_1	-0.114	0.079	-0.246	0.012	
	δ_2^*	0.164	0.083	0.027	0.302	
	δ_3^*	0.030	0.017	0.002	0.057	
	τ^*	0.025	0.004	0.019	0.032	
4 Rezagos	α_0	-0.951	3.342	-6.507	4.613	1070.85
	α_1^*	0.323	0.125	0.122	0.531	
	α_2	-0.174	0.129	-0.387	0.041	
	α_3^*	0.271	0.123	0.074	0.478	
	α_4	-0.085	0.126	-0.296	0.118	
	γ_0	3.357	2.505	-0.549	7.660	
	γ_1^*	0.160	0.091	0.009	0.307	
	γ_2	-0.035	0.099	-0.198	0.127	
	γ_3	-0.079	0.114	-0.267	0.105	
	γ_4	-0.065	0.087	-0.205	0.079	
	δ_0	1.833	2.145	-1.674	5.345	
	δ_1	-0.112	0.075	-0.234	0.013	
	δ_2^*	0.152	0.082	0.016	0.286	
	δ_3	-0.062	0.089	-0.209	0.085	
δ_4	0.057	0.078	-0.072	0.184		
τ^*	0.025	0.003	0.019	0.031		

Los parámetros con * son significativos al 10 %

4.5. Procesos de Poisson no Homogéneos

Los datos usados en el análisis corresponden a trece años (01 de enero de 1989 a 31 de diciembre de 2001, para un total de $T = 4748$ días) del número de días donde el valor del

caudal es inferior al primer cuartil ($6.3m^3/s$) y el número de días donde se sobrepasa al tercer cuartil ($21.6m^3/s$) de las mediciones del caudal en la estación El Profundo del río Sumapaz; en 1170 días el caudal fue inferior al primer cuartil y en 1181 días fue superior al tercer cuartil.

En la Figura 4.15 se muestra el número observado de días del año en el que el caudal del río estuvo por debajo del primer cuartil (línea continua) y la cantidad de veces que el caudal superó el tercer cuartil (línea punteada) durante el año. Se puede observar que en los años en los que hubo mayor número de sequías (1992 y 2001) también se presentó el menor número de inundaciones.

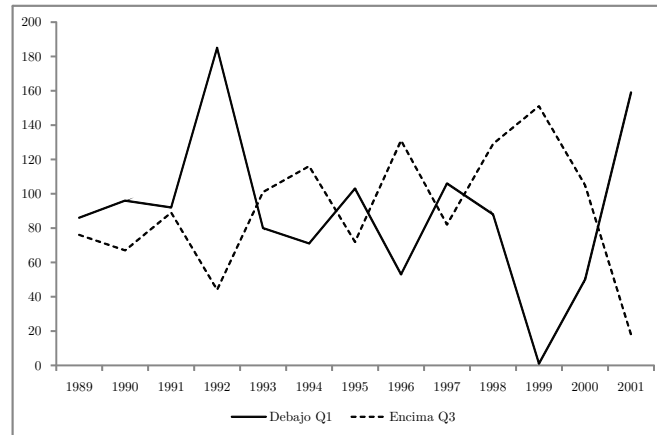


FIGURA 4.15. Número de casos por debajo de Q_1 y por encima de Q_3 en la estación El Profundo del río Sumapaz, 1989 - 2001

Para el análisis Bayesiano de los datos correspondientes a los días en que se detectó bajo caudal, se asumió una distribución a priori uniforme en el intervalo $(0, 20000)$ para ambos parámetros α y β . Usando el software WinBUGS se simularon 30000 muestras de las cuales se eliminaron las primeras 5000 escogiendo posteriormente cada décima muestra para obtener un resumen a posteriori de cada parámetro. Un procedimiento similar se empleó para el análisis de los datos que exceden el tercer cuartil, con una distribución a priori uniforme en el intervalo $(30000, 50000)$ para el parámetro α y una distribución a priori uniforme $(0, 20000)$ para β . Se generaron 30000 muestras de las cuales se eliminaron las primeras 5000.

En el caso del modelo MOP_I , se asumen distribuciones a priori uniformes en el intervalo $(0, 18000)$ para los parámetros α y β en el análisis de los datos menores a Q_1 ; para el parámetro δ se asumió una distribución a priori uniforme en el intervalo $(0, 15)$ y para θ una distribución uniforme en el intervalo $(0, 0.5)$. Se generaron 40000 muestras en las que se eliminaron las primeras 4000 para cada uno de los parámetros. En el análisis de los datos mayores a Q_3 las distribuciones a priori usadas son uniformes en los intervalos $(0, 1000000)$ para los parámetros α y β , una distribución uniforme en el intervalo $(0, 5)$ para δ y una distribución uniforme en el intervalo $(0, 0.05)$ para θ .

La Tabla 4.6 muestra un resumen de las estimaciones a posteriori de los parámetros, incluyendo sus desviaciones estándar e intervalos de credibilidad del 95 %. La convergencia bajo el algoritmo del muestreador de Gibbs fue monitoreada chequeando los gráficos de las

distribuciones de las muestras simuladas para cada parámetro, verificando si se obtienen distribuciones estacionarias.

TABLA 4.6. Media a posteriori, desviación estándar (DE) e intervalo de credibilidad del 95 % para los parámetros del modelo MOP y MOP_I para el caudal del río Sumapaz

		Parámetro	Media	DE	Intervalo de credibilidad del 95 %
MOP	Menor a Q_1	α	11200	3488	(5940, 18660)
		β	3308	876	(2010, 5206)
	Mayor a Q_3	α	43030	5031	(32220, 49790)
		β	11260	1304	(8559, 13260)
MOP _I	Menor a Q_1	α	8138	1956	(5441, 12559)
		β	2560	497.5	(1796, 3604)
		δ	7.989	0.5923	(6.9339, 9.0661)
		θ	0.0166	2.655×10^{-5}	(0.016952, 0.017048)
	Mayor a Q_3	α	866300	235900	(477660, 1256340)
		β	216300	58510	(114682, 325318)
		δ	3.368	0.5778	(2.3599, 4.4400)
		θ	0.01773	5.455×10^{-5}	(0.017902, 0.018098)

La Tabla 4.7 muestra las estimaciones Bayesianas vía MCMC para las funciones de valor medio simuladas por el muestreador de Gibbs y el número de observaciones acumuladas por año, para las observaciones inferiores a Q_1 y superiores a Q_3 tanto para el modelo MOP como para el modelo MOP_I. Se muestra la estimación únicamente para algunos días, específicamente los días en que termina cada año, por ejemplo, hasta el día 2922 (Diciembre 31 de 1996) se observaron 766 días con sequía, el modelo MOP estimó hasta esa fecha 767 días de sequía mientras que el modelo MOP_I estimó 784 días de sequía. Hasta esa misma fecha, se observaron 696 días con niveles altos de caudal y los modelos MOP y MOP_I estimaron 740 y 728 respectivamente.

TABLA 4.7. Estimaciones para la función de valor medio y número de observaciones acumulados para valores inferiores a Q_1 y superiores a Q_3 para los modelos MOP y MOP_I

Año	Días	Menor a Q_1			Mayor a Q_3		
		Observado	Estimado		Observado	Estimado	
			MOP	MOP _I		MOP	MOP _I
1989	365	86	106	120	76	95	94
1990	730	182	209	227	143	189	185
1991	1095	274	309	329	232	283	276
1992	1461	459	406	428	276	376	367
1993	1826	539	500	522	377	468	457
1994	2191	610	591	612	493	559	548
1995	2556	713	680	699	565	650	638
1996	2922	766	767	784	696	740	728
1997	3287	872	851	865	778	829	819
1998	3652	960	934	944	907	917	909
1999	4017	961	1014	1021	1058	1005	999
2000	4383	1011	1093	1096	1163	1092	1089
2001	4748	1170	1169	1169	1181	1179	1180

La Figura 4.16 muestra el gráfico de la función media estimada y el número de observaciones acumuladas para los valores inferiores a Q_1 tanto para el modelo MOP (a) como para el modelo MOP_I . El modelo MOP_I que incluye un componente cíclico presenta un mejor ajuste.

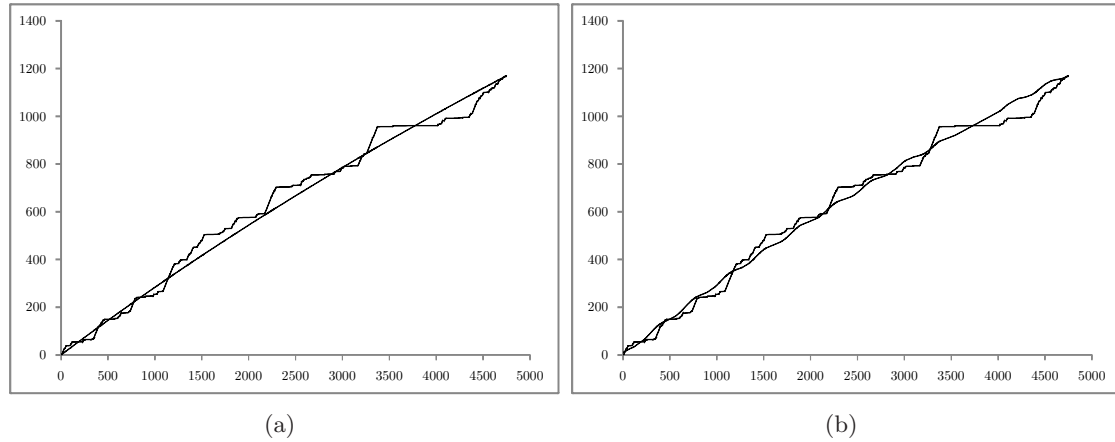


FIGURA 4.16. Función de valor medio estimada y observada en el que el caudal es inferior al primer cuartil del caudal en la estación El Profundo del río Sumapaz, para (a) modelo MOP y (b) modelo MOP_I de 1989 a 2001

En la Figura 4.17 se muestra el gráfico de la función media estimada y el número de observaciones acumuladas para los valores superiores a Q_3 tanto para el modelo MOP (a) como para el modelo MOP_I . El ajuste para ambos modelos es muy similar, se puede observar que hasta la observación 3752 (abril de 1999) los modelos sobreestiman el número de crecidas del río, y a partir de esta fecha los modelos subestiman el número de crecidas.

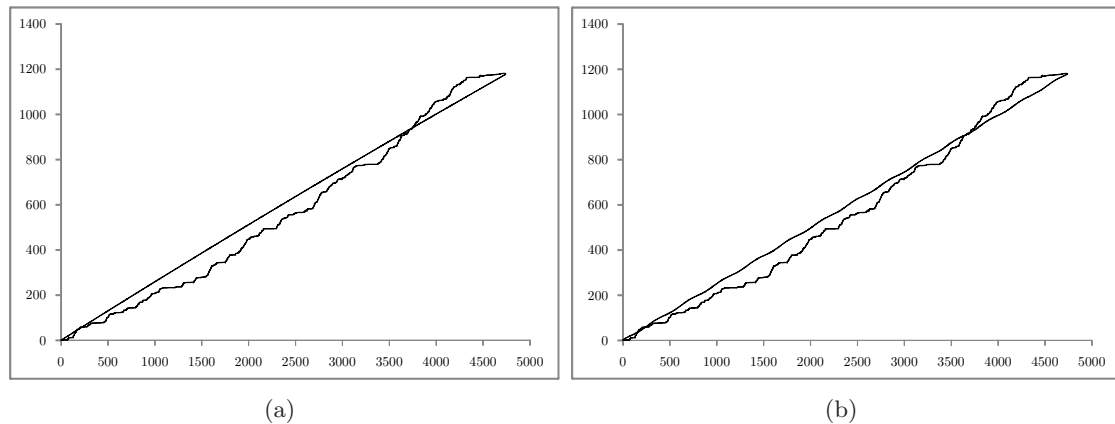


FIGURA 4.17. Función de valor medio estimada y observada en el que el caudal es superior al tercer cuartil del caudal en la estación El Profundo del río Sumapaz, para (a) modelo MOP y (b) modelo MOP_I de 1989 a 2001

La Figura 4.18 se muestra el pronóstico para el siguiente año a los datos que corresponde al año 2002 para el modelo MOP_I dado que este modelo tiene un mejor ajuste que el MOP, la línea punteada muestra hace referencia a los pronósticos para los niveles de caudal inferiores a Q_1 y la línea continua los superiores a Q_1 mostrando que durante la

primera mitad del año, el número de días con bajo caudal es levemente mayor al número de días con alto caudal. Para el segundo semestre el número de días de alto caudal supera el número de días de bajo caudal. Además el modelo pronostica para el año 2002 setenta días con niveles bajos de caudal y noventa días con niveles altos.

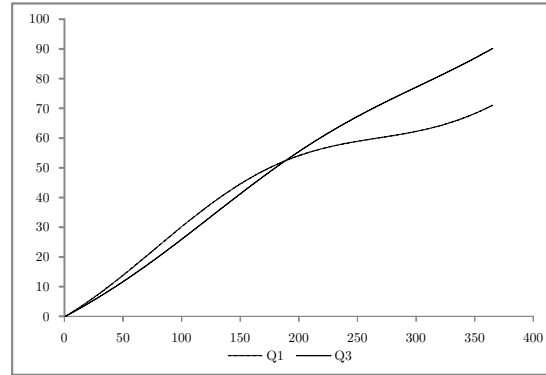


FIGURA 4.18. Pronóstico para año 2002

Conclusiones e investigaciones futuras

En esta tesis se estimó analíticamente el caudal del río Sumapaz mediante el modelo constante y bajo la regresión lineal dinámica simple y múltiple. Se estimaron diez modelos de regresión lineal dinámica simple para el caudal usando como covariables la precipitación. Los modelos que mostraron un mejor ajuste son aquellos que tienen intercepto y cuya covariable es la precipitación de la estación Cabrera que se encuentra a menor distancia de la estación de caudal El Profundo. En el caso de la regresión dinámica múltiple el modelo en que se utilizaron los datos de precipitación medidos en las estaciones Cabrera y Peñas Blancas, mostraron un mejor ajuste. También se hizo un análisis de observaciones faltantes para varios modelos variando la cantidad y posición de los datos faltantes, al calcular el factor de descuento δ y al compararlo con el modelo sin datos faltantes se observa que en general no disminuye significativamente, indicando un buen ajuste aun cuando se presentan datos faltantes.

Se estimaron dos tipos de modelos lineales jerárquicos, en el primer tipo que incluye desde una hasta cuatro covariables de precipitación, el que tuvo mejor ajuste (menor valor del DIC) fue el que incluyó como única covariable el promedio de la precipitación medida en las cuatro estaciones incluidas en el estudio. En el segundo tipo se incluyen como covariables la precipitación medida en las estaciones Cabrera y Peñas Blancas y sus coeficientes están en términos del caudal con uno, dos, tres o cuatro rezagos; bajo este escenario el modelo con mejor ajuste (menor valor del CID) fue el que incluyó tres rezagos.

Por lo tanto estos modelos contribuyen al entendimiento de la dinámica hidrológica y ayudan a trazar políticas en el manejo de los recursos hidrográficos. Para un trabajo posterior se podría considerar una regresión dinámica múltiple generalizada, además, incluir como covariables otras variables del ciclo hidrológico tales como evaporación, condensación, infiltración, cantidad de biomasa, etc. También se pueden considerar modelos lineales dinámicos generalizados y modelos lineales dinámicos jerárquicos generalizados.

El Proceso de Poisson no Homogéneo muestra un buen ajuste tanto para el modelo MOP como para el modelo que incluye el término cíclico (MOP_I) mostrando este último modelo un mejor ajuste, sin embargo, se puede pensar en nuevos Procesos de Poisson no Homogéneos con otras funciones de intensidad que tengan en cuenta la estacionalidad. Por ejemplo Achcar et al. (2009) aplica las funciones de intensidad Ley de Potencia (PLP)

también conocida como Weibull, la Goel-Okumoto (GOP) Goel & Okumoto (1978) y la Goel-Okumoto Generalizada (GGOP) Achcar et al. (2012)

Abreviaturas y definiciones

A.1. Abreviaturas

CIA	Akaike's Information Criterion
ARMA	Modelo autorregresivo de media móvil
CIB	Bayesian Information Criterion
DIC	Deviance Information Criterion
MLD	Modelo lineal dinámico
MLDJ	Modelo lineal dinámico jerárquico
GOP	Proceso Goel-Okumoto
HPD	Intervalo de probabilidad a posteriori
IDEAM	Instituto de Hidrología, Meteorología y Estudios Ambientales
LIK	Función de verosimilitud
LRV	Logaritmo de razón de verosimilitud
DAM	Desviación media absoluta
MCMC	Markov Chain Monte Carlo
MLG	Modelo lineal generalizado
MOP	Proceso Musa-Okumoto
ECM	Error cuadrado medio
MRD	Modelo de Regresión Dinámica
OMM	Organización Meteorológica Mundial
PLP	Proceso Ley de Potencia

PPNH Proceso de Poisson no Homogéneo

WinBUGS Bayesian inference Using Gibbs Sampling. Software estadístico para análisis bayesiano usando métodos MCMC.

A.2. Algunos términos hidrológicos

- **Hidrología.** Ciencia que estudia la presencia y la distribución de las aguas en la tierra, sus propiedades químicas, biológicas y físicas, y su interacción con el medio ambiente físico.
- **Caudal.** Volumen de agua que pasa en una unidad de tiempo a través de una sección predeterminada, se puede expresar en m/seg
- **Lluvia.** Precipitación de agua líquida en forma de gotas de diámetro superior a 0.5 mm o de gotas menores pero muy dispersas, se mide en milímetros. Decir que llovió un milímetro, significa que cayó un litro de agua en un metro cuadrado de terreno.
- **Estación limnigráfica.** Estación para la determinación de caudales por medio de registro gráfico continuo de los niveles de agua.
- **Estación pluviométrica.** Es una estación meteorológica dotada de un pluviómetro o recipiente que permite medir la cantidad de lluvia caída entre dos observaciones consecutivas.

Modelo lineal dinámico generalizado

B.1. Introducción

Pasamos ahora a una clase específica de los modelos dinámicos con las distribuciones de muestreo no normales y otros componentes no lineales. Los DLMS se han extendido y generalizado a diversos problemas no normales, es una clase más grande ya que está basada en el uso de los modelos de familia exponencial para distribuciones observacionales. Este capítulo está dedicado a estos modelos, las referencias principales son (Migon, 1984), (Migon & Harrison, 1985), y (West et al., 1985). En los DLM normales vistos en los capítulos anteriores se realizó un análisis analítico directo, lo que no es posible cuando el supuesto de normalidad no está presente. Investigaciones recientes han desarrollado métodos numéricos más refinados y enfoques basados en simulación para el análisis de modelos no normales y no lineales, este tipo de desarrollos están empezando a tener efectos prácticos en el tipo de modelos discutidos aquí, y en sus generalizaciones.

Una necesidad primordial para la extensión de esta clase de DLM's normales es la de permitir que la distribución de los datos probablemente nos sea adecuado modelarlos asumiendo normalidad, incluso después de alguna transformación, es común el caso en que una transformación a los datos pueda lograr una simetría y los modelos normales se puedan aplicar. Sin embargo, el significado y la interpretación de los parámetros del modelo está usualmente “enmascarado” a través de la transformación, la escala de los datos originales es natural e interpretable y a menudo puede ser visto como deseable para desarrollar un directamente modelo con los datos en la escala original. Con datos discretos en forma de recuento, las transformaciones a menudo no son sensibles, y la aproximación continua a la distribución normal puede ser radicalmente inadecuado. Las encuestas por muestreo, por ejemplo, suelen dar a lugar datos que son esencialmente de tipo binomial. Los datos con distribución de Poisson y Poisson compuesto surgen en los procesos de demanda y de inventario a través de llegadas “aleatorias” de pedidos y suministros. Series binario surgen como indicadores de ocurrencia o no ocurrencia, de secuencias de eventos, como por ejemplo, subida/bajada en un índice de financiero, de precipitación diaria, y así sucesivamente. Así es necesario considerar distribuciones observacionales no normales.

Importantes avances en el modelado no normal, y por lo tanto en la metodología estadística, han surgido desde el desarrollo del marco teórico de los modelos lineales ge-

neralizados (MLG), a partir de (Nelder & Wedderburn, 1972). El desarrollo posterior del paquete interactivo de computadoras GLIM ((Baker, R. J. and Nelder, J. A., 1985)) presagió una explosión en la aplicación y el desarrollo de modelos estadísticos paramétricos. El entorno MLG proporciona técnicas de regresión en el contexto de modelos no normales con efectos de regresión con escala no lineal, una de las herramientas más importantes de modelamiento para la estadística aplicada y la investigación. Ver (McCullagh & Nelder, 1989) para la cobertura de los aspectos teóricos y aplicados de estos modelos, y (West, 1985) para modelamiento Bayesiano dentro de esta clase de modelos. El marco teórico de MLG ofrece un punto de partida para los modelos dinámicos no-normales. A continuación se describen estos modelos, comenzando con una exposición de la estructura básica del análisis de la familia exponencial.

B.2. Modelos de la familia exponencial

B.2.1. Distribuciones observacionales en la familia exponencial

Considere una serie de tiempo de observaciones Y_t , ($t = 1, 2, \dots$) de cantidades aleatorias discretas o continuas que toman valores en el espacio muestral Ω . Si se asume que Y_t tiene una distribución dentro de la *familia exponencial*, entonces la función de densidad (o función de masa de probabilidad si la variable es discreta) de Y_t puede describirse como sigue. Para algunas cantidades definidas η_t y V_t y tres funciones conocidas $y_t(Y_t)$, $a(\eta_t)$ y $b(Y_t, V_t)$, la densidad es

$$p(Y_t | \eta_t, V_t) = \exp \{V_t^{-1}(y_t(Y_t)\eta_t - a(\eta_t))\}b(Y_t, V_t) \quad (Y_t \in \Omega) \quad (\text{B.1})$$

Esta distribución cumple las siguientes propiedades

1. η_t es el *parámetro natural* de la distribución, es una cantidad continua.
2. $V_t > 0$ es el *parámetro de escala*; el *parámetro de precisión* de la distribución es definido como $\phi_t = V_t^{-1}$
3. Como una función del parámetro natural para Y_t fijo, la ecuación (B.1) puede ser vista como una verosimilitud para η_t , que depende de Y_t a través de la transformación $y_t(Y_t)$.
4. La función $a(\eta_t)$ es doblemente diferenciable en η_t . Se sigue que

$$E(y_t(Y_t) | \eta_t, V_t) = \frac{d}{d\eta_t}a(\eta_t) = \dot{a}(\eta_t) = \mu_t \quad (\text{B.2})$$

$$V(y_t(Y_t) | \eta_t, V_t) = V_t\ddot{a}(\eta_t) \quad (\text{B.3})$$

5. A menudo $y_t(\cdot)$ es la función identidad, en cuyo caso

$$p(Y_t | \eta_t, V_t) = \exp \{V_t^{-1}(Y_t\eta_t - a(\eta_t))\}b(Y_t, V_t) \quad (Y_t \in \Omega) \quad (\text{B.4})$$

para $Y_t \in \Omega$. Además

$$E(Y_t | \eta_t, V_t) = \dot{a}(\eta_t) = \mu_t \quad (\text{B.5})$$

$$V(Y_t | \eta_t, V_t) = V_t\ddot{a}(\eta_t) \quad (\text{B.6})$$

B.2.2. Análisis conjugado

El desarrollo será, sin pérdida de generalidad, en términos de la función (B.4). Además, el parámetro de escala V_t se supone conocido para todo t . Por lo tanto, la única incógnita en la distribución muestral (B.4) es el parámetro natural η_t o equivalentemente, la media condicional μ_t de Y_t . En el tiempo $t - 1$, la información histórica relevante para el pronóstico de Y_t es denotada, por D_{t-1} . La densidad muestral (B.1) (B.4) se denotan simplemente por $p(Y_t | \eta_t)$, $Y_t \in \omega$ ya que V_t se asume conocida y la dependencia sobre D_{t-1} se sobre-entiende.

Ahora, la única incertidumbre sobre la distribución de Y_t dado el pasado histórico de D_{t-1} se debe a la incertidumbre sobre η_t . Esto se resumirá en términos de la distribución a priori para η_t , la densidad es denotada por $p(\eta_t | D_{t-1})$. La distribución de pronóstico un paso adelante está definida por

$$p(Y_t | D_{t-1}) = \int p(Y_t | \eta_t)p(\eta_t | D_{t-1})d\eta_t \quad (\text{B.7})$$

Una vez es observada Y_t , la distribución a priori se actualiza a la posteriori vía teorema de Bayes

$$p(\eta_t | D_t) \propto p(\eta_t | D_{t-1})p(Y_t | \eta_t) \quad (\text{B.8})$$

Los cálculos de (B.7) y (B.8) son fáciles de realizar en el caso de modelos normales, en el entorno de la familia exponencial son analíticamente tratables cuando la distribución a priori pertenece a la *familia conjugada*. EL uso de modelos exponenciales con a priori conjugadas son bien conocidos en la estadística Bayesiana.

Con referencia a (B.1), la densidad a priori de la familia conjugada tiene la forma

$$p(\eta_t | D_{t-1}) = c(r_t, s_t) \exp \{r_t \eta_t - s_t a(\eta_t)\}, \quad (\text{B.9})$$

para algunas cantidades definidas r_t , s_t (funciones conocidas de D_{t-1}), y una función conocida $c(\cdot, \cdot)$.

Asumiendo que los valores r_t y s_t son conocidos, se sigue fácilmente que la densidad predictiva (B.7) y la posteriori (B.8) están determinadas por

$$p(Y_t | D_{t-1}) = \frac{c(r_t, s_t)b(Y_t, V_t)}{c(r_t + \phi_t Y_t, s_t + \phi_t)} \quad (\text{B.10})$$

y

$$p(\eta_t | D_t) = c(r_t + \phi_t Y_t, s_t + \phi_t) \exp \{(r_t + \phi_t Y_t)\eta_t - (s_t + \phi_t)a(\eta_t)\} \quad (\text{B.11})$$

B.3. Modelos lineales dinámicos generalizados

B.3.1. Marco de regresión dinámica

La clase de modelos lineales generalizados Nelder & Wedderburn (1972) asumen que los datos son extraídos independientemente de distribuciones pertenecientes a la

familia exponencial, pero con parámetros η_t y V_t posiblemente diferentes. Los efectos de la regresión entre variables independientes son modeladas por la regresión de los parámetros naturales de cada observación para una función lineal de las variables de regresión. En el contexto de las series temporales, el uso de los modelos **time-varying regression** es apropiado, aplicándolos para definir el *modelo lineal dinámico generalizado*.

El modelo lineal dinámico generalizado (DGLM) para la serie Y_t ($t = 1, 2, \dots$) está definido por

Modelo observacional

$$p(Y_t | \eta_t) \text{ y } g(\eta_t) = \lambda_t = \mathbf{F}'_t \boldsymbol{\theta}_t, \quad (\text{B.12})$$

Ecuación de evolución

$$\boldsymbol{\theta}_t = \mathbf{G}_t \boldsymbol{\theta}_{t-1} + \boldsymbol{\omega}_t \text{ con } \boldsymbol{\omega}_t \sim (\mathbf{0}, \mathbf{W}_t) \quad (\text{B.13})$$

Siendo

- $\boldsymbol{\theta}_t$, es un vector de estados n -dimensional en el tiempo t ;
- \mathbf{F}_t , es un vector conocido de regresión n -dimensional;
- \mathbf{G}_t , es una matriz conocida de evolución $n \times n$
- $\boldsymbol{\omega}_t$, es un vector n -dimensional de evolución de los errores con media cero y matriz de varianzas conocida \mathbf{W}_t $n \times n$;
- $\lambda_t = \mathbf{F}'_t \boldsymbol{\theta}_t$, una función lineal del vector de parámetros de estado;
- $g(\eta_t)$ es una función monótona continua y conocida de η_t en los reales.

Esta definición es una extensión del DLM estándar en el modelo observacional, la distribución muestral es ahora, posiblemente, no normal y la regresión lineal λ_t afecta la distribución observacional a través de una función posiblemente no lineal con función de respuesta media $\mu_t = E(Y_t | \eta_t) \dot{a}(\eta_t)$.

La ecuación de evolución para el vector de estados es exactamente como en el DLM normal, aunque la normalidad no se supone, sólo los momentos de primer y segundo orden de los errores de evolución se asumen como hasta ahora. Como en el DLM, el supuesto de la media cero para ω_t se puede relajar para incluir una media conocida diferente de cero sin ningún cambio esencial en el modelo. Estos errores se asumen no correlacionados a través del tiempo, como es usual, y condicionales sobre η_t , T_t es independiente de ω_t . El GLM estático estándar, es un caso especial en el que $\theta_t = \theta$ para todo tiempo t , mediante la adopción de \mathbf{G}_t como la identidad y \mathbf{W}_t como la matriz cero. Esta clase de modelos proporciona una generalización de los modelos DLM a los modelos de series de tiempo con errores no normales, y del GLM para los parámetros no constantes en el tiempo.

APÉNDICE C

Algoritmos

El proceso de la estimación mostrado en las Tablas C.1 y C.2 se inicializa con los valores m_0 , C_0 , V y W . La distribución para $(\mu_1 | D_0)$ tiene distribución normal con media m_0 y varianza $R_1 = C_0 + W$ que son valores ya conocidos. Dado que disponemos de los valores observados Y_t podemos calcular $e_1 = Y_1 - m_0 y A_1 = R_1 / (R_1 + V) = R_1 / Q_1$.

La distribución a posteriori para $(\mu_1 | D_1)M$ tiene distribución normal con parámetros que ya podemos calcular ya que la media es $m_1 = m_0 + A_1 e_1$ y la varianza es $C_1 = A_1 V$. Para el pronóstico un paso al frente $(Y_1 | D_0)$ tiene distribución normal con media m_0 y varianza Q_1 (valores ya calculados).

El proceso continúa calculando la distribución a priori para $(\mu_2 | D_1)$ ya que tiene distribución normal con parámetros determinados por m_1 y $R_2 = C_1 + W$ y la distribución a posteriori para $(\mu_2 | D_2)$ también con distribución normal con parámetros $m_2 = m_1 + A_2 e_2$ y $C_2 = A_2 V$ (parámetros que ya podemos calcular).

Para el pronóstico un paso al frente $(Y_2 | D_1)$ que también pueden usarse en caso de tener observaciones faltantes, su media es m_1 y su varianza $Q_2 = R_2 + V$. Un caso más general se presenta cuando no conocemos V y W sino su cociente $r = W/V$. Como $A_t = R_t / Q_t = R_t / (R_t + V) = (C_t - 1 + W) / (C_t - 1 + W + V) = (A_t - 1V + rV) / (A_t - 1V + rV + V) = (A_t - 1 + r) / (A_t - 1 + r + 1)$, con lo cual A_t solo depende de A_{t-1} y r y por lo tanto se pueden realizar los cálculos como se mencionó anteriormente. El proceso se realiza de manera similar para la regresión dinámica.

TABLA C.1. Algoritmo 1

DLM constante	
Observación:	$Y_t = \mu_t + \nu_t, \quad \nu_t \sim N(0, V)$
Sistema:	$\mu_t = \mu_{t-1} + \omega_t \quad \omega_t \sim N(0, W)$
Información:	$(\mu_0 D_0) \sim N(m_0, C_0)$ $(\mu_{t-1} D_{t-1}) \sim N(m_{t-1}, C_{t-1})$ V y W conocidas.
Pronóstico:	$(\mu_t D_{t-1}) \sim N(m_{t-1}, R_t)$ $(Y_t D_{t-1}) \sim N(m_{t-1}, Q_t)$ $R_t = C_{t-1} + W, \quad Q_t = R_t + V$
Relaciones de actualización y recurrencia	
	Escribiendo $e_t = Y_t - m_{t-1}$ y $A_t = \frac{R_t}{Q_t}$
	$(\mu_t D_t) \sim N(m_t, C_t)$ $m_t = m_{t-1} + A_t e_t$ $C_t = A_t V$
Proceso inductivo	
Para $t = 1$	$(\mu_1 D_0) \sim N(m_0, R_1)$ $R_1 = C_0 + W, \quad Q_1 = R_1 + V$ $e_1 = Y_1 - m_0$ $A_1 = \frac{R_1}{Q_1}$ $(\mu_1 D_1) \sim N(m_1, C_1)$ $m_1 = m_0 + A_1 e_1$ $C_1 = A_1 V$
Suponiendo que se cumple para $t = n$, probamos para $t = n + 1$	
	$(\mu_n D_n) \sim N(m_n, C_n)$ $R_{n+1} = R_n + W, \quad Q_{n+1} = R_{n+1} + V$ $e_{n+1} = Y_{n+1} - m_n, \quad A_{n+1} = \frac{R_{n+1}}{Q_{n+1}}$ $(\mu_{n+1} D_{n+1}) \sim N(m_{n+1}, C_{n+1})$ $m_{n+1} = m_n + A_{n+1} e_{n+1} \quad C_{n+1} = A_{n+1} V$
Para el pronóstico un paso adelante o para una observación faltante	
	$(Y_{n+1} D_n) \sim N(m_n, Q_{n+1})$

TABLA C.2. Algoritmo 2

Regresión dinámica simple	
Observación:	$Y_t = \beta_t x_t + \nu_t, \quad \nu_t \sim N(0, V)$
Sistema:	$\beta_t = \beta_{t-1} + \omega_t \quad \omega_t \sim T_{n_{t-1}}(0, W_t)$
Información:	$(\beta_0 D_0) \sim T_{n_0}(m_0, C_0)$ $(\beta_{t-1} D_{t-1}) \sim T_{n_{t-1}}(m_{t-1}, C_{t-1})$ $(\phi D_{t-1}) \sim G\left(\frac{n_{t-1}}{2}, \frac{n_{t-1}S_{t-1}}{2}\right)$
Pronóstico:	$(\beta_t D_{t-1}) \sim T_{n_{t-1}}(m_{t-1}, R_t)$ $(Y_t D_{t-1}) \sim T_{n_{t-1}}(f_t, Q_t)$ $R_t = C_{t-1} + W_t, \quad Q_t = x_t^2 R_t + S_{t-1}, \quad f_t = x_t m_{t-1}, \quad W_t = \left(\frac{1}{\delta} - 1\right) C_{t-1}$
Relaciones de actualización y recurrencia	
Escribiendo $e_t = Y_t - f_t$ y $A_t = \frac{R_t X_t}{Q_t}$	
(i)	$(\phi D_t) \sim G\left(\frac{n_t}{2}, \frac{n_t S_t}{2}\right)$ $n_t = n_{t-1} + 1, \quad S_t = S_{t-1} + (e_t^2 / Q_t - 1) S_{t-1} / n_t$
(ii)	$(\beta_t D_t) \sim T_{n_t}(m_t, C_t)$
$m_t = m_{t-1} + A_t e_t, \quad C_t = \frac{R_t S_t}{Q_t}$	
Proceso inductivo	
Para $t = 1$	$(\beta_1 D_0) \sim T(m_0, R_1)$ $R_1 = C_0 + W_1, \quad f_{Q_1} = x_1 m_0, \quad Q_1 = x_1^2 R_1 + S_0, \quad W_1 = \left(\frac{1}{\delta} - 1\right) C_0$ $e_1 = Y_1 - f_1$ $A_1 = \frac{x_1 R_1}{Q_1}$ $(\beta_1 D_1) \sim T_{n_1}(m_1, C_1)$ $m_1 = m_0 + A_1 e_1$ $C_1 = \frac{R_1 S_1}{Q_1}$
Suponiendo que se cumple para el tiempo t , probamos para el tiempo $t + 1$	
$(\beta_t D_t) \sim T_{n_t}(m_t, C_t)$ $R_{t+1} = C_t + W_{t+1}, \quad W_{t+1} = \left(\frac{1}{\delta} + 1\right) C_t, \quad f_{t+1} = x_{t+1} m_t, \quad Q_{t+1} = x_{t+1}^2 R_{t+1} + S_t$ $e_{t+1} = Y_{t+1} - f_{t+1}, \quad A_{t+1} = \frac{x_{t+1} R_{t+1}}{Q_{t+1}}$ $(\beta_{t+1} D_{t+1}) \sim T_{n_{t+1}}(m_{t+1}, C_{t+1})$ $m_{t+1} = m_t + A_{t+1} e_{t+1}, \quad C_{t+1} = \frac{R_{t+1} S_{t+1}}{Q_{t+1}}$ $n_{t+1} = n_t + 1 \quad S_{t+1} = S_t + \left(\frac{e_{t+1}^2}{Q_{t+1}} - 1\right) \frac{S_t}{n_{t+1}}$	
Para el pronóstico un paso adelante o para una observación faltante	
$(Y_{t+1} D_t) \sim T_{n_{t+1}}(f_{t+1}, Q_{t+1})$	

Bibliografía

- Achcar, J. A., Cepeda, E. & Zangiacomì, E. (2012). Use of Non-Homogeneous Poisson Processes in the Modeling of Hospital over Admissions in Ribeirao Preto and Region, Brazil: An Application to Respiratory Diseases.
- Achcar, J. & Bolfarine, H. (1989). Constant hazard against a change-point alternative: a Bayesian approach with censored data., *Communication in Statistics-Theory and Methods* **18**: 3801–3819.
- Achcar, J., Dey, D. & Niverthi, M. (1998). A Bayesian approach using nonhomogeneous Poisson process for software reliability models. In *Frontiers in Reliability., Series on Quality, Reliability and Engineering Statistics* **4**: 1–18.
- Achcar, J. & Loibel, S. (1998). Constant hazard models with a change-point: a Bayesian analysis using Markov Chain Monte Carlo methods., *Biometrical Journal* **40**: 543–555.
- Achcar, J., Martínez, E., Rufino-Neto, A., Paulino, C. & Soares, P. (2008). A statistical model investigating the prevalence of tuberculosis in New York using counting processes with two change-points., *Epidemiology and Infection* **136**: 1599–1605.
- Achcar, J., Tzintzun, G. & Rodrigues, E. (2009). Using non-homogeneous Poisson models with multiple change-points to estimate the number of ozone exceedances in Mexico City, *Environmetrics* **22**: 1–12.
- Aneiros-Perez, G., Cardot, H., Estevez-Perez, G. & Vieu, P. (2004). Maximum Ozone concentration forecasting by functional non parametrics approaches., *Technical report*.
- Ariza, F. (2005). *Pruebas de bondad de ajuste y de razón de verosimilitudes generalizada para procesos poisson no homogéneo.*, Tesis de Maestría, Institución de enseñanza e investigación en ciencias agrícolas.
- Baker, R. J. and Nelder, J. A. (1985). *GLIM: Generalized Linear Interactive Modelling*, Oxford University, Numerical Algorithms Group, Oxford, England.
- Barrientos, L. & Fernández, J. (2003). Análisis geográfico y estadístico de la sismicidad en la costa mexicana del Pacífico., *Technical report*.
- Basawa, I. V. & Prakasa Rao, B. L. S. (1980). *Statistical Inference for Stochastic Processes.*, Academic Press, Londres.

- Bellanger, L. & Tomassone, R. (2004). Trend in high tropospheric ozone levels. application to paris monitoring sites, *Statistics* **38**(3): 217–241.
URL: <http://www.informaworld.com/10.1080/02331880410001696116>
- Berger, J. O. (1985). *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*, Springer-Verlag, New York.
- Berliner, L., Wikle, C. & Cressie, N. (2000). Long-lead prediction of Pacific SSTs via Bayesian dynamic modeling., *Journal of Climate* **13**: 3953–3968.
- Bernardo, J. M. & Smith, A. (1994). *Bayesian Theory*, Wiley, Chichester.
- Bernier, J. (1994). Statistical detection of changes in geophysical series., *Engineering Risk in Natural Resources Management with Special References to Hydrosystems Under Changes of Physical or Climatic Environment*. **275**: 343–357.
- Box, G. & Jenkins, G. (1976). *Time Series Analysis: Forecasting & Control.*, Prentice Hall, London.
- Box, G. & Tiao, G. (1977). *Bayesian Inference in Statistical Analysis*, Adisson-Wesley, Massachusetts.
- Breiman, L., Friedman, J. H., Olshen, R. A. & Stone, C. J. (1984). *Modelos hierárquicos e aplicações.*, Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Monterrey.
- Bruno, F., Guttorp, P., Sampson, P. D. & Cocchi, D. (2009). A simple nonseparable, nonstationary spatiotemporal model for ozone., *Environ Ecol Stat* **16**: 515–529.
- Carioca, A. C. (2011). *Modelos dinâmicos hierárquicos espaço-temporais para dados na família exponencial*, Tesis de Maestría, Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- Carlin, B., Gelfand, A. & Smith, A. (1992). Hierarchical Bayesian analysis of change-point problems., *Applied Statistics* **41**: 389–405.
- Carrillo, O. (2010). *Modelación de la frecuencia e intensidad de ciclones tropicales usando el proceso de poisson no-homogéneo.*, Tesis de Maestría, Institución de enseñanza e investigación en ciencias agrícolas.
- Cepeda, E. & Achcar, J. (2009). Regression Models with Heteroscedasticity using Bayesian Approach., *Revista Colombiana de Estadística* **32**(2): 267–287.
- Chib, S. & Greenberg, E. (1995). Understanding the Metropolis-Hastings algorithm., *The American Statistician* **49**: 327–335.
- Cox. & Chu. (1993). Meteorologically adjusted ozone trends in urban strategies., *Technical report*.
- Cox, D. & Lewis, P. (1966). *Statistical Analysis of Series Events*, John Wiley & Sons, Methuen: UK.
- Davis, J., Eder, B., Nychka, D. & Yang, Q. (1998). Modeling the effects of meteorology on ozone in Houston using cluster analysis and generalized additive models, *Atmospheric Environment* **32**(14): 2505–2520.

- Davis, J. L., Herring, T. A., Shapiro, I. I., Rogers, A. E. E. & Elgered, G. (1985). Geodesy by radio interferometry: Effects of atmospheric modeling errors on estimates of baseline length, *Radio Science* **20**: 1593–1607.
- de Finetti, B. (1954). *Theory of Probability*, Wiley, Chichester.
- DeGroot, M. H. (1971). *Optimal Statistical Decisions*, McGraw-Hill, New York.
- Gamerman, D. (1997). *Markov Chain Monte Carlo: Stochastic simulation for Bayesian inference.*, Chapman & Hall, London.
- Gamerman, D. & Migon, H. (1993). Dynamic Hierarchical Models., *Journal of the Royal Statistical Society* (85): 629–642.
- Gelfan, A. E. & Schmith, A. (1990). Sampling-based approach to calculating marginal densities., *Journal of the American Statistical Association* (85): 398–409.
- Goel, A. & Okumoto, K. (1978). An analysis of recurrent software failures on a real-time control system., *In Proceedings of ACM Conference* .
- Guttorp, P. (2000). Setting environmental standards: A statistician's perspective., *Technical Report 48*.
- Harrison, P. J. & Stevens, C. V. (1976). Bayesian Forecasting., *Journal of the Royal Statistical Society* (38): 205–247.
- Harrison, P. & Veerapen, P. P. (1994). A Bayesian Decision Approach to Model Monitoring and Cusums, *Journal of Forecasting*. **13**: 29–36.
- Jeffreys, H. (1961). *Theory of probability*, Oxford University Press, London.
- Karlin, S. & Taylor, H. (1975). *A First Course in Stochastic Processes.*, Academic Press, Londres.
- Krishnaswamy, J., Halpin, P., Richter, D. & Korfmacher, K. (2001). Dynamics of sediment discharge in relation to land-use and hydro-climatology in a humid tropical watershed in Costa Rica., *Journal of Hydrology* **253**: 91–109.
- Krishnaswamy, J., Lavine, M., Richter, D. & Korfmacher, K. (2000). Dynamic modeling of long-term sedimentation in the Yadkin River basin., *Advances in Water Resources* **23**: 881–892.
- Kumar, N. & Maity, R. (2008). Bayesian dynamic modeling for nonstationary hydrologic time series forecasting along with uncertainty quantification., *Hydrological Processes* **22**: 3488–3499.
- Kuo, L. & Yang, T. Y. (1996). Bayesian computation for nonhomogeneous poisson processes in software reliability, *Journal of the American Statistical Association* **91**(434): 763–773.
URL: <http://www.jstor.org/stable/2291671>
- Lindley, D. V. (1965). *Introduction to Probability and Statistics from a Bayesian Viewpoint*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Makridakis, S., Wheelwright, S. & Hyndman, R. (1998). *Forecasting Methods and Applications.*, John Wiley & Sons, New York.

- Matthews, D. & Farewell, V. (1982). On testing for a constant hazard against a change-point alternative., *Biometrics* **71**: 299–304.
- McCullagh, P. & Nelder, J. A. (1989). *Generalized Linear Models.*, Chapman & Hall/CRC Monographs on Statistics & Applied Probability, London and New York.
- Migon, H. (1984). *An Approach to Non-linear Bayesian Forecasting Problems with Applications*, PhD thesis, University of Warwick.
- Migon, H. & Monteiro, A. B. (1997). Rain-fall modelling: An application of Bayesian Forecasting., *Stochastic and Hydrology Hydraulics* **11**: 115–127.
- Migon, H. S. & Harrison, P. J. (1985). An Application of Nonlinear Bayesian Forecasting to Television Advertising., *Bayesian Statistics* .
- Musa, J. D. & Okumoto, K. (1984). A logarithmic poisson execution time model for software reliability measurement., *ICSE'84*, pp. 230–238.
- Nelder, J. A. & Wedderburn, R. W. (1972). Generalized Linear Models., *Journal of the Royal Statistical Society* (135): 370–384.
- O'Hagan, A. (1994). *Kendall's Advanced Theory of Statistics*, Edward Arnold, London.
- Parzen, E. (1972). Procesos Estocásticos. Paraninfo.
- Pickands, J. (1975). Statistical inference using extreme order statistics, *The Annals of Statistics* **3**(1): 119–131.
- Pievatolo, A. & Ruggeri, F. (2004). Bayesian reliability analysis of complex repairable systems., *Applied Stochastic Models in Business and Industry* **20**: 253–264.
- Pole, A., West, M. & Harrison, P. (1994). *Applied Bayesian Forecasting and Time Series Analysis*, Chapman & Hall, New York.
- Raftery, A. & Akman, V. (1986). Bayesian analysis of a Poisson process with a change-point, *Biometrika* **73**: 85–89.
- Ramirez-Cid, J. & Achcar, J. (1999). Bayesian inference for nonhomogeneous Poisson processes in software reliability models assuming nonmonotonic intensity functions., *Computational Statistics and Data Analysis* **32**: 147–159.
- Remsberg, E. & Lingenfelter, G. (2010). Analysis of SAGE II ozone of the middle and upper stratosphere for its response to a decadal-scale forcing, *Atmospheric Chemistry and Physics* **10**: 11779–11790.
- Rodriguez, R. E., Schmidt, A. & Migon, H. (2008). A joint model for rainfall-runoff: The case of Rio Grande Basin., *Journal of Hydrology*. **353**: 189–200.
- Ruggeri, F. & Sivaganesan, S. (2005). On modelling change-points in nonhomogeneous Poisson processes, *Statistical Inference in Stochastic Models* **8**: 311–329.
- Savage, L. (1954). *The foundation of inference*, Wiley, New York.
- Shao, N. & Lii, K.-S. (2011). Modelling non-homogeneous Poisson processes with almost periodic intensity functions, *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)* **1**: 99–122.

- Shin, H. H., Stieb, D. M., Jessiman, B., Goldberg, M. S., Brion, O., Brook, J., Ramsay, T. & Burnett, R. T. (2008). A temporal, multicity model to estimate the effects of short-term exposure to ambient air pollution on health, *Environmental Health Perspectives* **116**(9): 1147–1153.
- Singh, S. & Ordaz, M. (1994). Sismicidad y movimientos fuertes en México: Una visión actual. CENAPRED.
- Smith, A. & Roberts, G. (1993). Bayesian computation via the Gibbs Sampler and related Markov Chain Monte Carlo methods., *Journal of the Royal Statistical Society Series B* **55**: 3–23.
- Smith, J. Q. (1979). A Generalization of the Bayesian Steady Forecasting Model., *Journal of the Royal Statistical Society* (41): 378–387.
- Smith, R. (1995). Model Selection in Environmental Statistics., *Technical Report 48*.
- Souza, R. C. (1981). A Bayesian Entropy Approach to Forecasting; The multistate Model., *Time Series Analysis* pp. 535–542.
- Spiegelhalter, D. and Thomas, A. and Best, N. and and Lunn, D. (2001). *WinBUGS User Manual (version 1.4)*, UK: MRC Biostatistics Unit., Cambridge.
URL: <http://www.mrc-bsu.cam.ac.uk/bugs>
- Spiegelhalter, S. D., Best, N. G., Carling, B. P. & Linde, A. V. D. (2002). Bayesian measures of model complexity and fit., *Journal of the Royal Statistical Society* **64**: 583–639.
- West, M. (1985). Generalized linear models: outlier accommodation, scale parameters and prior distributions. *Bayesian Statistics 2*.
- West, M. (1986). Bayesian Model Monitoring, *Journal Royal of Statistical Society Series B*. **48**: 70–78.
- West, M. & Harrison, J. (1997). *Bayesian Forecastin and Dinamic Models*, Springer-Verlag, New York.
- West, M. & Harrison, P. (1986). Monitoring and Adaptation in Bayesian Forecasting Models, *Journal of the American Statistical Association*. **81**: 741–750.
- West, M., Harrison, P. & Pole, A. (1987). BATS: Bayesian Analysis of Time Series, *The Professional Statistician*. **6**: 43–46.
- West, P., Migon, H. & Harrison, J. (1985). Dynamic Generalized Linear Models and Bayesian Forecasting, *Journal of the American Statistical Association* **80**(389): 73–83.
- Yang, T. & Kuo, L. (2001). Bayesian binary segmentation procedure for a Poisson process with multiple change-points., *Journal of Computational and Graphical Statistics* **10**: 772–785.
- Zellner, A., Hong, C. & Min, C. (1991). Forecasting turning points in international output growth rates using bayesian exponentially weighted autoregression, time-varying parameter, and pooling techniques., *Journal of Econometrics* **49**: 275–304.