MATEMÁTICAS V

Bernardo Acevedo .

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE MANIZALES

Junio 2005

Contenido

Prólogo

El objetivo del presente libro, es el de facilitar al estudiante de las carreras de ingeniería, la asimilación clara de los conceptos matemáticos tratados, pues es el fruto de un cuidadoso análisis de los ejemplos resueltos y de los ejercicios propuestos con sus debidas respuestas, basado en mi experiencia como docente de la Universidad Nacional sede Manizales.

Desde luego que los escritos que se presentan no son originales, ni pretenden serlo, toda vez que es una recopilación organizada y analizada de difernte s textos y de mi experiencia personal.

Este texto constituye un material de consulta obligada de los estudiantes, el cual les genera un diálogo directo con el profesor.

Bernardo Acevedo Frías
profesor asociado

Capítulo 1

Series de Fourier

1.1 Funciones Pares e Impares

Definición 1 *f(x) es par sii* $f(-x) = f(x)$ *para todo* $x \epsilon D_f$ *y si* $f(-x) = -f(x)$ *para todo* $x \epsilon D_f$ *entonces f(x) es impar*

Ejemplo 1.1 $f(x) = x^2$, $f(x) = |x|$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = |x| \cos x$, $f(x) = x^2 |x| \sin^2 x$,*son funciones pares y* $f(x) = x^3$, $f(x) = x|x|$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = \sin^3 x \cos x$, *son funciones impares*

1.1.1 Propiedades de las funciones pares e impares

1. El producto de funciones pares es par.

En efecto: $(fg)(-x) = f(-x).g(-x) = f(x).g(x) = (fg)(x)$

2. El producto de funciones impares es par

3. El producto de una función par por una impar es impar

4. Si f(x) es impar e integrable en $[-a, a]$ entonces $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

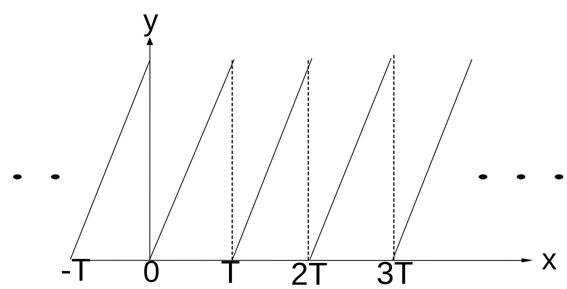
5. Si f(x) es par e integrable en $[-a, a]$ entonces $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} f(x)dx &= \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx \quad \text{ya que} \\
\int_{-a}^{0} f(x)dx &= -\int_{a}^{0} f(-u)du = \int_{0}^{a} f(u)du = \int_{0}^{a} f(x)dx \quad (x=-u,\ dx=-du)
\end{aligned}$$

1.2 Funciones períodicas

Definición 2 *f(x) es periódica de período T, si $f(x+T) = f(x)$ para todo x en el dominio de la función y al menor $T > 0$, tal que $f(x+T) = f(x)$ se llama el período de la función. figura 1.1*



1.2.1 Algunas Propiedades

1. Si $f(x)$ es periódica de período T, entonces nT es un período de f, $n \epsilon \mathbb{N}$

2. Si $f(x)$ es periódica de período T, entonces $f(Mx)$ con $M \neq 0$, es periódica de período $\dfrac{T}{M}$

En efecto: $f(M(x+\dfrac{T}{M})) = f(Mx+T) = f(Mx)$

Ejemplo 1.2 $f(x) = \sin x = \sin(x+2\pi) = \sin(x+4\pi) = \sin(x+2n\pi)$ *y* $f(x) = cos x$ $= \cos(x+2\pi) = \cos(x+4\pi) = \cos(x+2n\pi)$, *tienen período* $T = 2\pi$, *el menor* $T > 0$

Ejemplo 1.3 $f(x) = \cos 3x$ *tiene periódo* $\dfrac{2\pi}{3}$, $f(x) = \sin\dfrac{x}{2}$ *tiene periódo* $\dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

Nota: Si $f(t) = \sin(w_1 t) + sen(w_2 t)$ tiene período T, es decir,

$$f(t) = \sin(w_1 t) + sen(w_2 t) = \sin(w_1(t+T)) + sen(w_2(t+T)) =$$
$$= \sin(w_1 t + w_1 T) + sen(w_2 t + w_2 T)$$

entonces $w_1 T = 2\pi n$, $w_2 T = 2\pi m$, por tanto $\dfrac{w_1 T}{w_2 T} = \dfrac{w_1}{w_2} = \dfrac{2\pi n}{2\pi m} = \dfrac{n}{m}$, en otras palabras, si $f(t) = \sin(w_1 t) + sen(w_2 t)$ tiene período T entonces $\dfrac{w_1}{w_2}$ es un número racional, es decir,

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{2\pi n}{2\pi m} = \frac{n}{m}$$

Si $\dfrac{w_1}{w_2}$ no es un número racional, entonces $f(t) = \sin(w_1 t) + sen(w_2 t)$ no es períodica

Ejemplo 1.4 *La función*

$$f(t) = sen\left(\frac{t}{3}\right) + \cos\left(\frac{t}{4}\right)$$

tiene período $T = 24\pi$, *ya que*

$$\begin{aligned} f(t) &= sen\left(\frac{t}{3}\right) + \cos\left(\frac{t}{4}\right) = sen\left(\frac{t}{3} + \frac{T}{3}\right) + \cos\left(\frac{t}{4} + \frac{T}{4}\right) = \\ &= sen\left(\frac{t}{3} + 2n\pi\right) + \cos\left(\frac{t}{4} + 2m\pi\right) \end{aligned}$$

y así $\dfrac{T}{3} = 2n\pi$ *y* $\dfrac{T}{4} = 2m\pi$ *luego* $T = 6n\pi = 8m\pi$ *y para el menor valor que se da la igualdad es para* $n = 4$ *y* $m = 3$ *luego* $T = 24\pi$.

Ejemplo 1.5 *La función*

$$f(t) = sent + sen\frac{t}{2} + \cos\frac{t}{3}$$

tiene período 12π , *ya que*

$$f(t) = sent + sen\frac{t}{2} + \cos\frac{t}{3} = sen(t+T) + sen\left(\frac{t}{2} + \frac{T}{2}\right) + \cos\left(\frac{t}{3} + \frac{T}{3}\right)$$

por tanto

$$T = 2n\pi, \quad \frac{T}{2} = 2m\pi, \frac{T}{3} = 2l\pi, \quad luego \quad T = 2n\pi = 4m\pi = 6l\pi$$

y para el menor valor que se da la igualdad es para n=6 y m=3 y l=2 luego $T = 12\pi$

Ejemplo 1.6 *la función*

$$f(t) = sen\pi t + sen(\frac{t}{2})$$

no es periódica ya que $\frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$ *no es un número racional*

3. Si $f(x)$ es periódica de período T entonces

$$\int_{0}^{T} f(x)dx = \int_{C}^{C+T} f(x)dx \quad C \text{ cualquier número real}$$

Definición 3 *Dos funciones* $f(x)$ *y* $g(x)$ *se dicen ortogonales en un intervalo* $a \leq x \leq b$ *si*

$$\int_{a}^{b} f(x)g(x)dx = 0$$

Ejemplo 1.7 $f(x) = x$ *y* $g(x) = x^2$*, son ortogonales en* $-1 \leq x \leq 1$*, ya que*

$$\int_{-1}^{1} xx^2dx = \int_{-1}^{1} x^3dx = 0$$

Un conjunto de funciones reales $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), ...\}$ se dice ortogonal en un intervalo $a \leq x \leq b$ si

$$\int_{a}^{b} \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0 \quad \text{para} \quad m \neq n$$

Ejemplo 1.8 *El conjunto de funciones reales*

$$\left\{1, \sin\frac{n\pi x}{L}, \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, ..\right\}$$

es un sistema ortogonal en $-L \leq x \leq L$

En efecto hay que mostrar que :

1.

$$\int_{-L}^{L} \sin\frac{n\pi x}{L}dx = 0,$$

(ya que el integrando es una función impar)

2.

$$\int_{-L}^{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{L}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nu du = \frac{2L}{\pi n} \left[\sin nx \right]_0^{\pi} = 0$$

3.

$$\int_{-L}^{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx = 0$$

(ya que el integrando es una función impar)

4.

$$\int_{-L}^{L} \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx = 0 \qquad \text{para} \qquad m \neq n$$

En efecto, si $u = \dfrac{\pi x}{L}$ entonces

$$\int_{-L}^{L} \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx = \frac{L}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos n\, u \cos m\, u\, du =$$

$$= \frac{L}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m + n)u + \cos(m - n)u\, du$$

$$= \frac{L}{2\pi} \left[\frac{\sin (m+n)\, u}{m+n} + \frac{\sin (m-n)\, u}{m-n} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad m \neq n$$

5.

$$\int_{-L}^{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = 0 \;\; \text{para} \quad m \neq n$$

(Ejercicio)

Definición 4 *Una función f(x) se dice seccionalmente continua en $[a, b]$, si f está acotada en $[a, b]$ y si existe un número finito de discontinuidades, estas deben ser de salto*

Ejemplo 1.9 $f(x) = x^2$ *es seccionalmente continua en cualquier intervalo* $[a, b]$

Ejemplo 1.10 *$f(x) = [x]$ parte entera de x, es seccionalmente continua en cualquier intervalo $[a, b]$*

Ejemplo 1.11 *$f(x) = \dfrac{1}{x}$ es seccionalmente continua en $[5, 8]$, pero no en $[-5, 8]$, la discontinuidad no es de salto*

Ejemplo 1.12 *La función*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \text{ es irracional} \\ 0 & si \quad x \text{ es racional} \end{cases}$$

no es seccionalmente continua en ningún intervalo cerrado, el número de discontinuidades no es finito

1.3 Criterio de Dirichlet

f(x) seccionalmente continua en el intervalo $[-L, L]$ y periódica de período 2L, entonces la serie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} = \begin{cases} f(x) & si \quad f(x) \text{ es continua en x} \\ \frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2} & si \quad f(x) \text{ no es continua en } \mathrm{x}_0 \end{cases}$$

A la expresión

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

se llama la serie de Fourier y a

$a_0, \; a_n, \; b_n$ se llaman los coeficientes de Fourier y están dados por

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \qquad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

o en forma más general

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{C}^{C+2L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{C}^{C+2L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \ \text{ para } C \text{ un número real}$$

Ahora mostremos como se halla el valor de a_n.

Como

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}$$

entonces

$$\left\langle f(x),\ \ \cos\frac{n\pi x}{L}\right\rangle=\left\langle\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L},\ \ \cos\frac{n\pi x}{L}\right\rangle$$

por lo tanto

$$\left\langle f(x),\ \ \cos\frac{n\pi x}{L}\right\rangle=\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \qquad \text{y}$$

$$\left\langle\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L},\ \ \cos\frac{n\pi x}{L}\right\rangle=$$

$$=\int_{-L}^{L}\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\frac{n\pi x}{L}dx\ =$$

$$=\ \int_{-L}^{L}\frac{a_0}{2}\cos\frac{n\pi x}{L}dx+\int_{-L}^{L}\left(a_1\cos\frac{\pi x}{L}+b_1\sin\frac{\pi x}{L}\right)\cos\frac{n\pi x}{L}dx+.....$$

$$+\int_{-L}^{L}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\frac{n\pi x}{L}dx+..=$$

$$=\int_{-L}^{L}a_n\cos^2\frac{n\pi x}{L}dx=a_n\int_{-L}^{L}\left(\frac{1+\cos\dfrac{2n\pi x}{L}}{2}\right)dx=a_nL$$

(pues las demás integrales son cero) luego

$$\left\langle f(x),\ \ \cos\frac{n\pi x}{L}\right\rangle=\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx=\int_{-L}^{L}a_n\cos^2\frac{n\pi x}{L}dx=a_n\int_{-L}^{L}\left(\frac{1+\cos\dfrac{2n\pi x}{L}}{2}\right)dx=a_nL$$

entonces

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

Se ha utilizado el desarrollo ortogonal en $[-L, L]$ de $\{1, \sin\frac{n\pi x}{L}, \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, .., \}$ con $\cos\frac{n\pi x}{L}$, en forma análoga para calcular a_0, hacer el desarollo ortogonal de

$$\{1, \sin\frac{n\pi x}{L}, \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, .., \}$$

con 1 en $[-L, L]$, y para hallar b_n hacer el desarollo ortogonal de

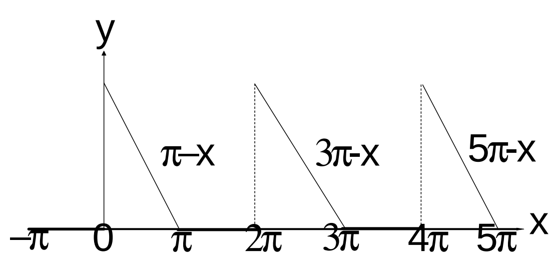
$$\{1, \sin\frac{n\pi x}{L}, \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, .., \}$$

con $\sin\frac{n\pi x}{L}$ en $[-L, L]$

Ejemplo 1.13 *Hallar la serie de Fourier de la función*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad -\pi < x < 0 \\ \pi - x & si \quad 0 \leq x < \pi \end{cases} \qquad f(x + 2\pi) = f(x) \;\; \textit{figura 1.2}$$

En efecto: El período de la función es $T = 2\pi = 2L \quad L = \pi$ *entonces*



$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)dx\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\pi x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left[\int\limits_{-\pi}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{\pi}(\pi - x)\cos nx dx\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[(\pi - x)\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n\pi}\int\limits_0^{\pi}\sin nx dx = \\ &= \left[0 - \frac{1}{n\pi}\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{1-\cos n\pi}{n^2\pi} = \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi} \end{aligned}$$

En forma análoga

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\int\limits_{-\pi}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{\pi}(\pi - x)\sin nx dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[\int\limits_{0}^{\pi}(\pi - x)\sin nx dx\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-(\pi - x)\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Por lo tanto la serie de Fourier está dada por

$$\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\right)\cos nx + \frac{1}{n}\sin nx = \begin{cases} 0 & si \quad -\pi < x < 0 \\ \pi - x & si \quad 0 < x < \pi \\ \dfrac{\pi + 0}{2} = \dfrac{\pi}{2} & si \quad x = 0 \\ \frac{0+0}{2} = 0 & si \quad x = \pm\pi \end{cases}$$

Observe que

$$\frac{\pi + 0}{2} = \frac{\pi}{2} = \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{\lim\limits_{x\to 0^+}(\pi - x) + \lim\limits_{x\to 0^-}(0)}{2}$$

$$\frac{0+0}{2} = 0 = \frac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \frac{\lim\limits_{x\to \pi^+} 0 + \lim\limits_{x\to \pi^-}(\pi - x)}{2}$$

$$\frac{0+0}{2} = 0 = \frac{f(-\pi^+) + f(-\pi^-)}{2} = \frac{\lim\limits_{x\to -\pi^+} 0 + \lim\limits_{x\to -\pi^-}(-\pi - x)}{2}$$

Ahora si en la igualdad

$$\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\right)\cos nx+\frac{1}{n}\sin nx=\begin{cases} 0 & si \quad -\pi<x<0 \\ \pi-x & si \quad 0<x<\pi \\ \dfrac{\pi+0}{2}=\dfrac{\pi}{2} & si \quad x=0 \\ \frac{0+0}{2}=0 & si \quad x=\pm\pi \end{cases}$$

remplazamos x por $x=0$ obtenemos

$$\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\right)\cos n0+\frac{1}{n}\sin n0=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\right)=\frac{\pi+0}{2}=\frac{\pi}{2}$$

luego

$$\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\right)=\frac{\pi}{2}$$

es decir

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

y así

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n^2}\right)=\frac{\pi^2}{4}$$

es decir

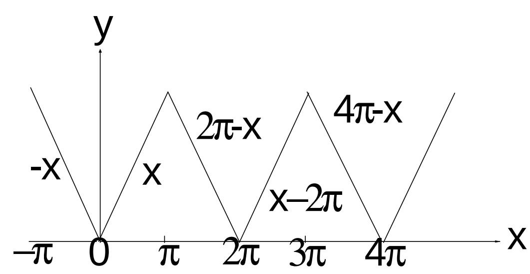
$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+......=\frac{\pi^2}{8}$$

Ejemplo 1.14 *Hallar la serie de Fourier de la función*

$$f(x)=|x| \quad -\pi\leq x\leq\pi \qquad f(x+2\pi)=f(x) \qquad figura\ \ 1.3$$

En efecto: El período de la función es $T=2\pi=2L, \quad L=\pi$ *entonces*

$$a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}|x|\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}xdx=\pi$$



$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{2(\cos n\pi - 1)}{\pi n^2} = \frac{2\left((-1)^n - 1\right)}{\pi n^2}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\sin nx dx = 0 \quad (\ |x|\sin nx \text{ es Impar}) \end{aligned}$$

por lo tanto la serie de Fourier está dada por

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\left((-1)^n - 1\right)}{\pi n^2}\right)\cos nx = \ |x| \quad si \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

Si se desea hallar la serie de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} x - 6\pi & si \quad 6\pi \leq x < 7\pi \\ 8\pi - x & si \quad 7\pi \leq x \leq 8\pi \end{cases} \qquad f(x+2\pi) = f(x) \qquad T = 2\pi$$

ésta coincide con la serie anterior, pues por ejemplo

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+7\pi}^{\pi+7\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{6\pi}^{8\pi} f(x)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{6\pi}^{7\pi}(x - 6\pi)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{7\pi}^{8\pi}(8\pi - x)dx = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{6\pi}^{8\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{6\pi}^{7\pi} (x-6\pi)\cos nxdx + \frac{1}{\pi}\int_{7\pi}^{8\pi}(8\pi - x)\cos nxdx =$$

$$= \frac{2\left((-1)^n - 1\right)}{\pi n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{6\pi}^{8\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{6\pi}^{7\pi} (x-6\pi)\sin nxdx + \frac{1}{\pi}\int_{7\pi}^{8\pi}(8\pi - x)\sin nxdx = 0$$

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\left((-1)^n - 1\right)}{\pi n^2}\right)\cos nx = \begin{cases} x - 6\pi & si \quad 6\pi \leq x < 7\pi \\ 8\pi - x & si \quad 7\pi \leq x \leq 8\pi \end{cases}$$

Ejemplo 1.15 *Hallar la serie de Fourier de la función*

$$f(x) = x \qquad -\pi < x < \pi \qquad f(x+2\pi) = f(x)$$

En efecto: El período de la función es $T = 2\pi = 2L$, $L = \pi$ entonces

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xdx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nxdx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nxdx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{-2\pi\cos n\pi}{n\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

entonces la serie de Fourier es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx = \begin{cases} x & si \quad -\pi < x < \pi \\ 0 & si \quad x = \pi \\ 0 & si \quad x = -\pi \end{cases}$$

Ejemplo 1.16 *Hallar la serie de Fourier de la función*

$$f(x) = x^2 \qquad -\pi < x < \pi \qquad f(x + 2\pi) = f(x)$$

En efecto: El período de la función es $T = 2\pi = 2L$, $L = \pi$ entonces

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2\sin nx}{n} + \frac{2x\cos nx}{n^2} - \frac{2\sin nx}{n^3}\right]_0^{\pi} = \frac{4(-1)^n}{n^2} \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = 0$$

por lo tanto, la serie de Fourier de la función está dada por

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx = \quad x^2 \quad si \quad -\pi \le x \le \pi$$

Ahora podemos afirmar que

$$x + \frac{x^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\cos nx}{n^2} - \frac{2\sin nx}{n}\right) \qquad -\pi < x < \pi$$

Ejemplo 1.17 *Hallar la serie de Fourier de la función*

$$f(x) = x \qquad 0 < x < 2\pi \qquad f(x+2\pi) = f(x)$$

En efecto: El período de la función es $T = 2\pi = 2L$, $L = \pi$ entonces

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} xdx = 2\pi$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} x\cos nxdx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

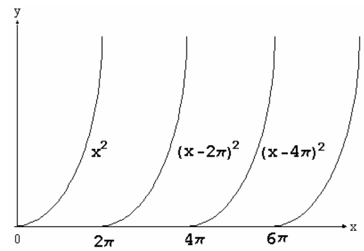
$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} x\sin nxdx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{2\pi} = \frac{-2}{n} \end{aligned}$$

por lo tanto, la serie de Fourier de la función está dada por

$$\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n}\sin nx = \begin{cases} x & si \quad 0 < x < 2\pi \\ \pi & si \quad x = 0 \\ \pi & si \quad x = 2\pi \end{cases}$$

Ejemplo 1.18 *Hallar la serie de Fourier de la función*

$$f(x) = x^2 \qquad 0 < x < 2\pi \qquad f(x+2\pi) = f(x) \quad \textit{figura 1.4}$$



En efecto: El período de la función es $T = 2\pi = 2L, \quad L = \pi$ entonces

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} x^2dx = \frac{8\pi^2}{3}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} x^2\cos nxdx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2\sin nx}{n} + \frac{2x\cos nx}{n^2} - \frac{2\sin nx}{n^3}\right]_0^{2\pi} = \frac{4}{n^2} \end{aligned}$$

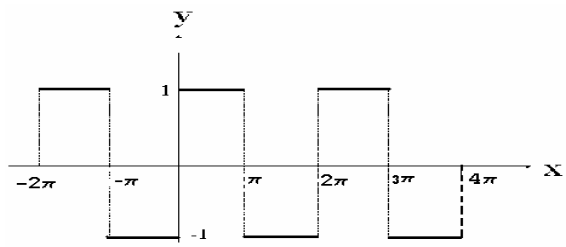
$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} x^2\sin nxdx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-x^2\cos nx}{n} + \frac{2x\sin nx}{n^2} + \frac{2\cos nx}{n^3}\right]_0^{2\pi} = \frac{-4\pi}{n} \end{aligned}$$

por lo tanto, la serie de Fourier de la función está dada por

$$\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}\cos nx - \frac{4\pi}{n}\sin nx = \begin{cases} x^2 & si \quad 0 < x < 2\pi \\ \dfrac{0+4\pi^2}{2} = 2\pi^2 & si \quad x = 0 \\ \dfrac{0+4\pi^2}{2} = 2\pi^2 & si \quad x = 2\pi \end{cases}$$

Si en la igualdad anterior se reemplaza x por cero se obtiene

$$\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}\cos n0 - \frac{4\pi}{n}\sin n0 = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2} = 2\pi^2$$



es decir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = 2\pi^2 - \frac{4\pi^2}{3} = \frac{2\pi^2}{3}$$

y así

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Si se reemplaza x por π se obtiene

$$\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cos n\pi - \frac{4\pi}{n} \sin n\pi = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cos n\pi = \pi^2$$

luego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cos n\pi = \pi^2 - \frac{4\pi^2}{3} = -\frac{\pi^2}{3}$$

por tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Ejemplo 1.19 *Hallar la serie de Fourier de la función*

$$f(x) = \begin{cases} -1 & si \quad -\pi < x < 0 \\ 1 & si \quad 0 \leq x < \pi \end{cases} \qquad f(x + 2\pi) = f(x)$$

En efecto: El período de la función es $T = 2\pi = 2L$ *entonces* $L = \pi$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} (-1)\, dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} 1\, dx \\ &= \frac{1}{\pi} (-\pi) + \frac{1}{\pi} (\pi) = 0 \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = 0 \quad \text{pues } f(x)\cos nx \text{ es impar}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\sin nx dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1.\sin nx dx = \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_{0}^{\pi} = \frac{2}{n\pi}\left(1-\cos n\pi\right) = \frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right) \end{aligned}$$

por lo tanto la serie de Fourier de la función esta dadá por

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi}\sin nx = \begin{cases} -1 & si \quad -\pi < x < 0 \\ 1 & si \quad 0 < x < \pi \\ \frac{1-1}{2} = 0 & si \quad x = 0 \\ \frac{-1+1}{2} = 0 & si \quad x = \pm\pi \end{cases}$$

Si reemplazamos en la igualdad anterior x por $x = \dfrac{\pi}{2}$, obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi}\sin nx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi}\sin n\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...\right)$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 \quad \text{ya que } \; 0 \leq \frac{\pi}{2} \leq \pi$$

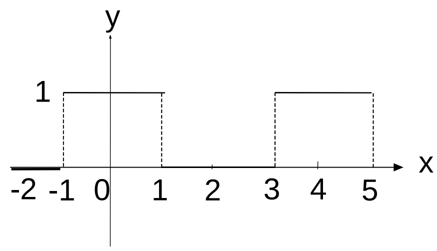
luego

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

Ejemplo 1.20 *Hallar la serie de Fourier de la función*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad -2 < x < -1 \\ 1 & si \quad -1 \leq x < 1 \\ 0 & si \quad 1 \leq x < 2 \end{cases} \qquad f(x+4) = f(x) \;\; \text{figura 1.6}$$

En efecto: El período de la función es $T = 4 = 2L$ entonces



$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{-1} 0dx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 1dx + \frac{1}{2}\int_{1}^{2} 0dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 1dx = 1$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \int_{0}^{1}\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^1 = \frac{2}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = 0$$

por lo tanto la serie de Fourier de la función está dada por

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2} = \begin{cases} 0 & si \quad -2 < x < -1 \\ 1 & si \quad -1 < x < 1 \\ 0 & si \quad 1 < x < 2 \\ \frac{1}{2} & si \quad x = \pm 1 \end{cases}$$

Ejemplo 1.21 *Hallar la serie de Fourier de la función*

$$f(x) = \sin^2 x$$

El período de la función $f(x) = \sin^2 x$ *es* $T = \pi$ *(haga el gráfico) luego*

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\ \sin 2nx dx = 0$$

y

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin^2 x \ dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) \ dx = 1$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos 2nxdx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos 2nxdx =$$

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin^2 x\cos 2nxdx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\cos 2nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\cos 2nx - \cos 2x\cos 2nx)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\cos 2nx - \frac{1}{2}\left(\cos(2+2n)x + \cos(2-2n)x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin 2nx}{2n} - \left(\frac{\sin(2+2n)x}{2+2n} + \frac{\sin(2-2n)x}{2-2n}\right)\right]_0^{\pi} = 0 \quad \text{si} \quad \text{n} \neq 0 \quad \text{y} \quad \text{n} \neq 1$$

y si $n = 0$ entonces

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) = 1$$

y si $n = 1$ entonces

$$a_1 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{\pi x}{L}dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos 2xdx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\cos 2xdx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(1-\cos 2x)\cos 2xdx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\cos 2x - \cos^2 2x)dx = 0 - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx = -\frac{1}{2}$$

por tanto la serie de Fourier de la función $f(x) = \sin^2 x$ es

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L} = \frac{a_0}{2} + a_1\cos 2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1-\cos 2x}{2} = \sin^2 x$$

Ejemplo 1.22 *Hallar la serie de Fourier de la función*

$$f(x) = \cos^2 2x \ = \frac{1 + \cos 4x}{2}$$

El período de la función $f(x) = \cos^2 2x$ *es* $T = \dfrac{\pi}{2}$ *(haga el gráfico) luego*

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{4}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\sin 4nx dx = \frac{4}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2x \ \sin 4nx dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{4}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\cos 4nx dx = \frac{8}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2x \ \cos 4nx dx =$$

$$= \frac{8}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right) \ \cos 4nx dx = \frac{4}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\cos 4nx + \cos 4x \ \cos 4nx) dx =$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin 4nx}{4n} + \frac{\sin(4+4n)x}{2(4+4n)} + \frac{\sin(4-4n)x}{2(4-4n)}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 0 \quad \textit{si } n \neq 0 \textit{ y de 1}$$

Si $n = 0$ *entonces*

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{4}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx = \frac{4}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 4x)\, dx = 1$$

y si $n = 1$ *entonces*

$$a_1 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{\pi x}{L}dx = \frac{4}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\cos 4x dx = \frac{8}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2x \ \cos 4x dx$$

$$= \frac{8}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)\cos 4x dx = \frac{4}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 4x)\cos 4x dx = \frac{1}{2}$$

por tanto la serie de Fourier es

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L} = \frac{1}{2} + a_1\cos 4x = \frac{1}{2} + \frac{\cos 4x}{2} = \frac{1+\cos 4x}{2}$$

1.3.1 Derivación e integración en series de fourier

Si f(x) es continua en todas partes y tiene una expansión en serie de fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

entonces si $f\,'(x)$ satisface las condiciones del criterio de Dirichlet se tiene que:

$$f\,'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\frac{n\pi}{L}\cos\frac{n\pi x}{L} - a_n\frac{n\pi}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}$$

es la serie de Fourier de la función derivada y si f(x) satisface las condiciones del criterio de Dirichlet en $[-L, L]$ y tiene una expansión en serie de fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \quad \text{entonces}$$

para

$$-L \le x_1 < x \le L \text{ se} \quad \text{tiene que}$$

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x} f(t)dt &= \int_{x_1}^{x}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi t}{L} + b_n\sin\frac{n\pi t}{L}\right]dt \\ &= \int_{x_1}^{x}\frac{a_0}{2}dt + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_1}^{x}\left(a_n\cos\frac{n\pi t}{L} + b_n\sin\frac{n\pi t}{L}\right)dt \end{aligned}$$

es la serie de Fourier para la integral

Ejemplo 1.23 *Sabemos que la serie de Fourier de la función $f(x) = |x|$ para $-\pi \le x \le \pi$ está dada por*

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\left((-1)^n - 1\right)}{\pi n^2}\right)\cos nx = \ |x| \quad si \quad -\pi \le x \le \pi \qquad\qquad f(x+2\pi) = f(x)$$

Observe que$f(x) = |x|$ si $-\pi \le x \le \pi$ con $f(x+2\pi) = f(x)$ es una función continua en todo R, luego derivando ambos miembros de la igualdad anterior se tiene

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 < x < \pi \\ -1 & si \quad -\pi < x < 0 \end{cases} \;=\; -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\left((-1)^n - 1\right)}{\pi n}\right)\sin nx \;=$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{\pi n} \right) \sin nx$$

así que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{\pi n} \right) \sin nx = \begin{cases} 1 & si \quad 0 < x < \pi \\ -1 & si \quad -\pi < x < 0 \end{cases}$$

es la serie de Fourier de su derivada

Ahora hallemos la serie de Fourier de la función

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 \leq x < \pi \\ -1 & si \quad -\pi < x < 0 \end{cases}$$

integrando.

Integremos entre 0 y x, la serie de fourier de $f'(x)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \left(\frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{\pi n} \right) \sin nt dt = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n} \left(\frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{\pi n} \right) \cos nt \right]_0^x =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{\pi n^2} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{\pi n^2} \right) \cos nx =$$

$$= \frac{4}{\pi} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + ... \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{\pi n^2} \right) \cos nx =$$

$$= \frac{4}{\pi} . \frac{\pi^2}{8} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{\pi n^2} \right) \cos nx =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{\pi n^2} \right) \cos nx$$

Ahora si integramos la función derivada

$$\int_0^x f'(t) dt = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x 1 dt = x & si \quad 0 \leq x \leq \pi \\ \displaystyle\int_0^x -1 dt = -x & si \quad -\pi \leq x < 0 \end{cases} = |x|$$

por lo tanto

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{\pi n^2} \right) \cos nx \quad \text{si} \quad -\pi \leq x \leq \pi \qquad f(x+2\pi) = f(x)$$

Pero podemos también integrar entre -π y x la serie y la función , $f'(x)$, así

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{x} \left(\frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{\pi n} \right) \sin ntdt = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n} \left(\frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{\pi n} \right) \cos nt \right]_{-\pi}^{x} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2\left(1-(-1)^n\right)}{\pi n^2} \right) \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\left(1-(-1)^n\right)(-1)^n}{\pi n^2} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\left((-1)^n - 1\right)}{\pi n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{\pi n^2} \right) \cos nx =$$

$$= -\frac{4}{\pi} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + ... \right) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\left(1-(-1)^n\right)}{n^2} \right) \cos nx =$$

$$= -\frac{4}{\pi} . \frac{\pi^2}{8} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\left(1-(-1)^n\right)}{n^2} \right) \cos nx = -\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\left(1-(-1)^n\right)}{n^2} \right) \cos nx$$

Ahora *si* $0 < x \leq \pi$ entonces

$$\int_{-\pi}^{x} f(t)dt = \int_{-\pi}^{0} -1dt + \int_{0}^{x} 1dt = -\pi + x$$

pero

$$-\pi + x = -\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\left(1-(-1)^n\right)}{n^2} \right) \cos nx$$

luego despejando x se obtiene

$$\begin{aligned} x &= \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\left(1-(-1)^n\right)}{n^2} \right) \cos nx = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\left(1-(-1)^n\right)}{n^2} \right) \cos nx \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\left((-1)^n - 1\right)}{n^2} \right) \cos nx \end{aligned}$$

Si $-\pi \leq x < 0$ entonces

$$\int_{-\pi}^{x} f(t)dt = \int_{-\pi}^{x} -1dt = -x - \pi$$

pero

$$-x - \pi = -\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(1-(-1)^n)}{n^2}\right)\cos nx$$

luego despejando $-x$ obtenemos

$$\begin{aligned} -x &= \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(1-(-1)^n)}{n^2}\right)\cos nx \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{((-1)^n-1)}{n^2}\right)\cos nx \end{aligned}$$

así

$$\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{((-1)^n-1)}{n^2}\right)\cos nx = \ |x| \quad si \quad -\pi \leq x \leq \pi \qquad\qquad f(x+2\pi) = f(x)$$

Ejemplo 1.24 *La serie de fourier de*

$$f(x) = x^2 \quad -\pi \leq x \leq \pi \qquad f(x+2\pi) = f(x) \quad \textit{viene dada por}$$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

Como f(x) es continua dentro y en los extremos del intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$ *entonces la serie de Fourier de su derivada viene dada por*

$$2x = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-n(-1)^n}{n^2}\sin nx = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx \quad \textit{por tanto}$$

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx \quad -\pi < x < \pi \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

Ahora integrando entre 0 y x ambos miembros de la igualdad anterior se tiene

$$\int_{0}^{x} tdt = 2\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{x}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin ntdt \quad \textit{por tanto}$$

$$\int_0^x t dt = \frac{x^2}{2} = \left[2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nt\right]_0^x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$
$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx + \frac{\pi^2}{6} \quad \textit{luego}$$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx \quad si \quad -\pi \le x \le \pi \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

Si integramos entre $-\pi$ y x cada término de la igualdad

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

obtenemos que

$$\int_{-\pi}^x t dt = 2\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^x \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nt dt \quad \textit{por tanto}$$

$$\int_{-\pi}^x t dt = \frac{x^2}{2} - \frac{\pi^2}{2} = \left[2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nt\right]_{-\pi}^x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \quad \textit{luego}$$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{\pi^2}{2} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx - \frac{\pi^2}{3} \quad \textit{entonces}$$

$$\frac{x^2}{2} = \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx \quad \textit{y así obtenemos la serie de Fourier para } x^2 \textit{ así}$$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx \quad si \quad -\pi \le x \le \pi \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

Si integramos entre $-\pi$ y x cada término de la igualdad anterior, se obtiene

$$\int_{-\pi}^x t^2 dt = \int_{-\pi}^x \frac{\pi^2}{3}dt + 4\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^x \frac{(-1)^n}{n^2}\cos nt dt \ \textit{luego}$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2 x}{3} + \frac{\pi^3}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin nx \ \textit{por tanto}$$

$$\frac{x^3}{3} - \frac{\pi^2 x}{3} = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin nx \quad y \ así \ \ obtenemos$$

$$g(x) = x^3 - \pi^2 x = 12\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin nx \quad si \ -\pi < x < \pi \quad g(x+2\pi) = g(x)$$

que la serie de Fourier de la función $g(x) = x^3 - \pi^2 x \quad si \quad -\pi \leq x \leq \pi$

Ejercicio 1

1. Hallar el período de las funciones siguientes

$$a) \ \ f(x) = \sin 3x \ \ \text{b)} \ \ f(x) = \cos 2\pi x \ \ \text{c)} \ f(x) = |\cos 3x| \ \ \text{d)} \ \ f(x) = \cosh 3x$$

2. Hacer un bosquejo del gráfico de las siguientes funciones periódicas en el intervalo $[-10, 10]$

$$\begin{array}{lll} a) \ \ f(x) & = & e^x \quad -\pi < x < \pi \ \ T = 2\pi \qquad \qquad \text{b)} \ \ f(x) = e^x \ \ 0 < x < 2\pi \ \ T = 2\pi \\ c) \ \ f(x) & = & e^x \ \ 4\pi < x < 6\pi \ \ T = 2\pi \qquad \qquad \text{d)} \ \ f(x) = x \quad 4 < x < 6 \quad T = 2 \\ e) \ \ f(x) & = & x(10-x) \ \ 0 < x < 10 \ \ T = 10 \quad \text{f)} \ f(x) = 2 - x \quad -1 < x < 4 \ \ T = 5 \\ g) \ \ f(x) & = & \left\{ \begin{array}{lll} \pi + x & si & -\pi < x < 0 \\ \pi - x & si & 0 \leq x < \pi \end{array} \right. \qquad f(x+2\pi) = f(x) \\ \text{h)} \ \ f(x) & = & \left\{ \begin{array}{lll} \cos x & si & 0 < x \leq \pi \\ 0 & si & \pi < x < 2\pi \end{array} \right. \qquad f(x+2\pi) = f(x) \end{array}$$

3. Mostrar que los resulados siguientes son válidos

a)

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi x}{2} = \left\{ \begin{array}{lll} x & si & -2 < x < 2 \\ 0 & si & x = \pm 2 \end{array} \right.$$

b)

$$\frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(1-\cos n\pi)}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{5} = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & si & -5 < x < 0 \\ 3 & si & 0 < x < 5 \\ \frac{3}{2} & si & x = \pm 5 \\ \frac{3}{2} & si & x = 0 \end{array} \right.$$

c)

$$\frac{3}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x-\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x=\begin{cases}1 & si \quad -1<x<0\\ x & si \quad 0<x<1\\ \frac{1}{2} & si \quad x=0\end{cases}$$

d)

$$\frac{1}{\pi}+\frac{\sin x}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{1-n^2}\cos nx=\begin{cases}0 & si \quad -\pi<x<0\\ \sin x & si \quad 0<x<\pi\\ 0 & si \quad x=0\end{cases}$$

y deduzca que $\quad \dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{1.3}-\dfrac{1}{3.5}+\dfrac{1}{5.7}......$

e)

$$\frac{2\sin h\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}(\cos nx-n\sin nx)\right]=\begin{cases}e^x & si \quad -\pi<x<\pi\\ \cosh\pi & si \quad x=\pi\end{cases}$$

f)

$$\frac{\pi^2}{6}+\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n^2}\cos nx+\left(\frac{(-1)^{n+1}\pi}{n}+\frac{2}{n^3\pi}\left((-1)^n-1\right)\right)\sin nx\right]$$
$$=\begin{cases}0 & si \quad -\pi<x<0\\ x^2 & si \quad 0<x<\pi\end{cases}$$

y deduzca que $\quad \dfrac{\pi^2}{6}=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+....$

h)

$$\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx=x^2 \qquad si \qquad -\pi\le x\le\pi$$

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx=x \quad \text{si} \quad -\pi<x<\pi \quad f(x+2\pi)=f(x)$$

i)

$$\frac{3\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}\right)\cos nx-\frac{1}{n}\sin nx=\begin{cases}\pi & si \quad -\pi<x<0\\ x & si \quad 0<x<\pi\end{cases}$$

y deduzca que $\quad \dfrac{\pi^2}{8}=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$

j)

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{n^3}-\frac{\pi^2}{n}\right)(-1)^n-\frac{2}{n^3}\right]\sin nx = x\,|x| \qquad -\pi \le x \le \pi$$

k) Mostrar que la serie de Fourier de $\sin^3\theta$ es $\frac{3}{4}\sin\theta-\frac{1}{4}\sin 3\theta$

Es decir, muestre que

$$\sin^3\theta=\frac{3}{4}\sin\theta-\frac{1}{4}\sin 3\theta \qquad -\pi\le x\le\pi \qquad f(x+2\pi)=f(x)$$

Indicación

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^3 x\cos nx dx=0 \ \ \text{(impar)}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^3 x\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin^3 x\sin nx dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{3}{8}\cos(x-nx)-\frac{3}{8}\cos(x+nx)+\frac{1}{8}\cos(3x+nx)-\frac{1}{8}\cos(3x-nx)\right)dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{3}{8}\left(\frac{\sin(x-nx)}{1-n}\right)-\frac{3}{8}\frac{\sin(x+nx)}{1+n}+\frac{1}{8}\frac{\sin(3x+nx)}{3+n}-\frac{1}{8}\frac{\sin(3x-nx)}{3-n}\right]_0^{\pi}=$$

$=0$ para n $\neq 1$ y n $\neq 3$

Si

$$n=1, \quad b_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^3 x\sin x dx=\frac{3}{4}$$

$$\text{y para } n=3, \quad b_3=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^3 x\sin 3x dx=-\frac{1}{4}$$

L)

$$\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nt \ =|\sin t|$$

En todos los ejemplos y exposiciones anteriores comenzamos con una función periódica y la serie de Fourier está determinada por las fórmulas de los coeficientes de Fourier. Sin embargo en algunas aplicaciones existe la necesidad de usar series de Fourier para una función definida en un intervalo de la forma $0 < x < L$ y queremos representar sus valores por una serie de Fourier en senos y cosenos o en solo cosenos o en solo senos y para ello definimos la extensión periódica

$$h(x) = f(x) \quad 0 < x < L \quad h(x+L) = h(x)$$

y suponiendo que f(x) satisface las condiciones de Dirichlet en $(0, L)$, la nueva función h(x) tendrá una expansión en serie de fourier y como h(x)=f(x) en $(0, L)$ se sigue que la expansión en serie de fourier de h(x) será representativa para f(x) en $(0, L)$. Si se quiere la serie de fourier en solo cosenos el primer paso es la extensión de f al intervalo $-L < x < 0$ y gracias a esto podemos extender f al eje real completo, mediante la condición de periodicidad $f(x + 2L) = f(x)$.
Si f(x) está definida en $0 < x < L$, podemos hacer una extensión par de periódo $2L$ que está dada por

$$f_p(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad 0 < x < L \\ f(-x) & si \quad -L < x < 0 \end{cases} \qquad f(x+2L) = f(x)$$

y una extensión impar para solo senos dada por

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad 0 < x < L \\ -f(-x) & si \quad -L < x < 0 \end{cases} \qquad f(x+2L) = f(x)$$

y las series de Fourier vienen dadas por

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} = f_p(x) = f(x) \quad 0 < x < L$$

$$\text{con} \qquad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_p(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \qquad a_0 = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)dx \quad \text{y} \quad b_n = 0$$

para la prolongación par y por

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L} = f_i(x) = f(x) \qquad 0 < x < L$$

$$\text{con} \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_i(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \quad \text{y} \quad a_n = 0$$

para la prolongación impar

Ejemplo 1.25 *Sea* $f(x) = x^2 \quad 0 < x < \pi$ *, su prolongacion par es*

$$f_p(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad 0 < x < \pi \\ x^2 & si \quad -\pi < x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos nx dx = \\
&= \frac{2}{n^3\pi}\left[n^2x^2\sin nx - 2\sin nx + 2nx\cos nx\right]_0^\pi \\
&= \frac{2}{n^3\pi}\left(2n\pi\cos n\pi\right) = (-1)^n\frac{4}{n^2} \\
b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^L f_p(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi x^2\sin nx dx = 0 \\
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}
\end{aligned}$$

luego la serie de Fourier en solo cosenos viene dada por

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n\frac{4}{n^2}\cos nx = x^2 \qquad 0 < x < \pi$$

Ejemplo 1.26 *Hallar la serie de Fourier de* $f(x) = x^2 \quad 0 < x < \pi$ *en solo senos.*

$$f_i(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad 0 < x < \pi \\ -x^2 & si \quad -\pi < x < 0 \end{cases}$$

es su prolongación impar , luego

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^L f_i(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f_i(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x^2}{n}\cos nx + \frac{2}{n^2}x\sin nx + \frac{2}{n^3}\cos nx\right]_0^\pi \\
&= -\frac{2\pi\cos n\pi}{n} + \frac{4}{n^3\pi}\left(\cos n\pi - 1\right)
\end{aligned}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_i(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = 0$$

luego la serie de Fourier en solo senos viene dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2\pi\cos n\pi}{n} + \frac{4}{n^3\pi}(\cos n\pi - 1)\right)\sin nx = \ x^2 \quad si \quad 0<x<\pi$$

Ejemplo 1.27 *Desarrollar* $f(x) = x \quad 0 < x < 2$ *en serie de Fourier en solo senos*

Hacemos la prolongación impar de periódo 4. Luego $2L = 4, L = 2$ entonces

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx = \\ &= \left[x\left(\frac{-2}{n\pi}\right)\cos\frac{n\pi x}{2} - \left(\frac{-4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^2 = -\frac{4}{n\pi}\cos n\pi \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_i(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = 0$$

luego la serie de fourier viene dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{4}{n\pi}\cos n\pi\right)\sin\frac{n\pi x}{2} = x \qquad 0<x<2$$

b) Desarrollar $f(x) = x \quad 0 < x < 2$ en serie de Fourier en solo cosenos. Hacemos la prolongación par de periódo 4, luego $2L = 4$, $L = 2$, así que $b_n = 0$ y

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx == \left[\frac{2x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2} - \left(\frac{-4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^2 =$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) \quad \text{y} \quad a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx = \int_0^2 xdx = 2$$

luego la serie de Fourier viene dada por

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1)\cos\frac{n\pi x}{2} = x \quad 0<x<2$$

Ejemplo 1.28 *Desarrollar $f(x) = \sin x \quad 0 < x < \pi$ en serie de cosenos y muestre como ejercicio que la serie de Fourier de $f(x) = \sin x \quad 0 < x < \pi$ en solo senos es senx.*

En efecto, hacemos la prolongación par de la función, por lo tanto $2\pi = 2L$, $L = \pi$ y $b_n = 0$ y

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x\cos nx dx == \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\sin(x+nx) + \sin(x-nx)]\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right]_0^\pi = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1-\cos(n+1)\pi}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\pi - 1}{n-1}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1+\cos n\pi}{n+1} - \frac{1+\cos n\pi}{n-1}\right] = \frac{-2(1+\cos n\pi)}{\pi(n^2-1)} \quad si\ n \neq 1$$

$$\text{si} \quad n = 1 \quad a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x\cos x dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin^2 x}{2}\right]_0^\pi = 0$$

$$\text{si} \quad n = 0 \quad a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x dx = \frac{2}{\pi}\left[-\cos x\right]_0^\pi = \frac{4}{\pi} \text{ luego la serie de Fourier es}$$

$$\frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(1+\cos n\pi)}{(n^2-1)}\cos nx = \sin x \quad 0 < x < \pi$$

1.4 Serie de Fourier en forma Compleja

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L} = \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left[\frac{e^{\frac{n\pi xi}{L}} + e^{\frac{-n\pi xi}{L}}}{2}\right] + b_n\left[\frac{e^{\frac{n\pi xi}{L}} - e^{\frac{-n\pi xi}{L}}}{2i}\right] = \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left[\frac{e^{\frac{n\pi xi}{L}} + e^{\frac{-n\pi xi}{L}}}{2}\right] - ib_n\left[\frac{e^{\frac{n\pi xi}{L}} - e^{\frac{-n\pi xi}{L}}}{2}\right] = \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right)e^{\frac{n\pi xi}{L}} + \left(\frac{a_n + ib_n}{2}\right)e^{\frac{-n\pi xi}{L}} \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\frac{n\pi xi}{L}} + k_n e^{\frac{-n\pi xi}{L}} \qquad \text{Ahora}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{(a_n - ib_n)}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx - \frac{i}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right] \\ &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\left[\cos\frac{n\pi x}{L} - i\sin\frac{n\pi x}{L}\right]dx = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{\frac{-n\pi xi}{L}}dx \end{aligned}$$

$$K_n = \frac{(a_n + ib_n)}{2} = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{\frac{n\pi xi}{L}}dx$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{\frac{n\pi xi}{L}} + K_n e^{\frac{-n\pi xi}{L}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\frac{n\pi xi}{L}} \qquad \text{con} \\ C_n &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{\frac{-n\pi xi}{L}}dx \end{aligned}$$

así la serie de Fourier compleja viene dada por

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\frac{n\pi xi}{L}} \quad \text{con} \quad C_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{\frac{-n\pi xi}{L}}dx$$

Ejemplo 1.29 *Hallar el desarrollo de Fourier complejo de la función*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 < x < \pi \\ -1 & si \quad -\pi < x < 0 \end{cases}$$

En efecto

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{\frac{-n\pi xi}{L}}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-nxi}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)\cos nx - if(x)\sin nx)dx = \\ &= 0 - \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = -\frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx = -\frac{i}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nx dx = \frac{i}{n\pi}(\cos n\pi - 1) \end{aligned}$$

$$C_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{\frac{-0\pi xi}{L}}dx = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$$

entonces

$$\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{i}{n\pi}(\cos n\pi - 1)\, e^{nix} + 0 = \begin{cases} 1 & si \;\; 0 < x < \pi \\ -1 & si \;\; -\pi < x < 0 \\ 0 & si \;\; x = 0, \pi, -\pi \end{cases}$$

Los coeficientes de la serie real están dados por

$$C_n = \frac{(a_n - ib_n)}{2} \text{ entonces } 2C_n = a_n - ib_n \;\; y \;\; K_n = \frac{(a_n + ib_n)}{2}\text{ , luego } 2K_n = a_n + ib_n$$

y así se tiene el sistema de ecuaciones

$$2C_n = a_n - ib_n \quad y \;\; 2K_n = a_n + ib_n$$

cuya solución es

$$a_n = C_n + K_n \quad y \;\; b_n = i(C_n - K_n\ )$$

por lo tanto

$$a_n = C_n + K_n = \frac{i}{n\pi}(\cos n\pi - 1) - \frac{i}{n\pi}(\cos n\pi - 1)$$

y

$$b_n = i(C_n - K_n\ ) = i(\frac{i}{n\pi}(\cos n\pi - 1) + \frac{i}{n\pi}(\cos n\pi - 1)) =$$

$$= \frac{2i^2}{n\pi}(\cos n\pi - 1) = \frac{-2}{n\pi}(\cos n\pi - 1) = \frac{2}{n\pi}(1 - \cos n\pi)$$

luego la serie real viene dada por

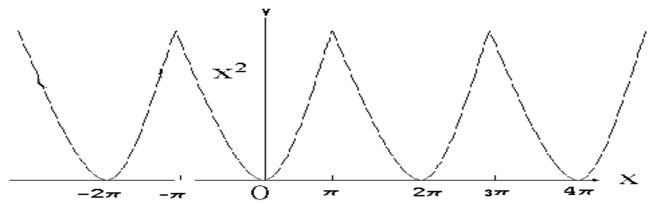
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}(1 - \cos n\pi)\sin nx \quad = \begin{cases} 1 & si \;\; 0 < x < \pi \\ -1 & si \;\; -\pi < x < 0 \\ 0 & si \;\; x = 0, \pi, -\pi \end{cases}$$

Ejemplo 1.30 *Hallar el desarrollo de Fourier complejo de la función*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \;\; 0 < x < \pi \\ 0 & si \;\; -\pi < x < 0 \end{cases}$$

En efecto

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{\frac{-n\pi xi}{L}}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-nxi}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)e^{-nxi}dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)e^{-nxi}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} 0.e^{-nxi}dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} 1.e^{-nxi}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \cos nx - i\sin nx)dx = \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin nx}{n} + i\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{i}{2n\pi}(\cos n\pi - 1) \end{aligned}$$



$$C_0 = \frac{1}{2L}\int\limits_{-L}^{L} f(x)e^{\frac{-0\pi x i}{L}}dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} 0dx + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi} dx = \frac{1}{2}$$

entonces

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{i}{2n\pi}\left(\cos n\pi - 1\right)e^{nix} + \frac{1}{2} = \begin{cases} 1 & si \ \ 0<x<\pi \\ 0 & si \ \ -\pi<x<0 \\ 1/2 & si \ \ x = 0,\pi,-\pi \end{cases}$$

$$a_n = C_n + K_n = \frac{i}{2n\pi}\left(\cos n\pi - 1\right) - \frac{i}{2n\pi}\left(\cos n\pi - 1\right) = 0$$

$$b_n = i(C_n - K_n \ ) = i(\frac{i}{2n\pi}\left(\cos n\pi - 1\right) + \frac{i}{2n\pi}\left(\cos n\pi - 1\right)) =$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left(1 - \cos n\pi\right)$$

$$a_0 = C_0 + K_0 = 1$$

por lo tanto la serie real está dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi}\left(1-\cos n\pi\right)\sin nx + \frac{1}{2} \quad = \begin{cases} 1 & si \ \ 0<x<\pi \\ -1 & si \ \ -\pi<x<0 \\ 1/2 & si \ \ x = 0,\pi,-\pi \end{cases}$$

Ejemplo 1.31 *Hallar el desarrollo de Fourier complejo de la función*

$$f(x) = x^2 \qquad -\pi \le x \le \pi$$

En efecto,

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{2L}\int\limits_{-L}^{L} f(x)e^{\frac{-n\pi x i}{L}}dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-nxi}dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(x^2\cos nx - ix^2\sin nx)dx = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2\cos nx dx + 0 = \frac{1}{n^3\pi}\left[n^2x^2\sin nx - 2\sin nx + 2nx\cos nx\right]_0^{\pi} = \frac{2\cos n\pi}{n^2} \end{aligned}$$

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}$$

luego

$$x^2 = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{2\cos n\pi}{n^2} e^{nix} + \frac{\pi^2}{3}$$

Si se quiere la serie real entonces (la parte imaginaria es cero)

$$\begin{aligned} x^2 &= \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{2\cos n\pi}{n^2} e^{nix} + \frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{2\cos n\pi}{n^2}\cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cos n\pi}{n^2}\cos nx = \\ &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\cos n\pi}{n^2}\cos nx \end{aligned}$$

Recuerde que

$$C_n = \frac{(a_n - ib_n)}{2} \text{ entonces } 2C_n = a_n - ib_n \text{ y } K_n = \frac{(a_n + ib_n)}{2} \text{ , luego } 2K_n = a_n + ib_n$$

y así se tiene el sistema de ecuaciones

$$2C_n = a_n - ib_n \quad \text{y} \quad 2K_n = a_n + ib_n$$

cuya solución es

$$a_n = C_n + K_n \quad \text{y} \quad b_n = i(C_n - K_n\ )$$

y de aquí se pueden hallar los coeficientes de fourier de la serie real. En nuestro ejemplo

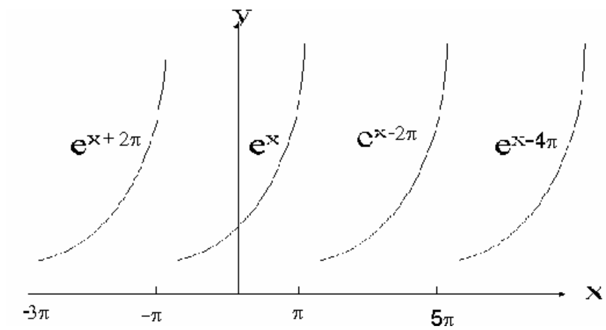
$$\begin{aligned} a_n &= C_n + K_n = \frac{2\cos n\pi}{n^2} + \frac{2\cos n\pi}{n^2} = \frac{4\cos n\pi}{n^2} \qquad \text{n} \neq 0 \\ \text{si n} &= 0 \text{ entonces, } a_0 = C_0 + K_0 = \frac{\pi^2}{3} + \frac{\pi^2}{3} = \frac{2\pi^2}{3} \end{aligned}$$

y

$$b_n = i(C_n - K_n\ ) = i(\frac{2\cos n\pi}{n^2} - \frac{2\cos n\pi}{n^2}) = 0$$

luego la serie real viene dada por

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\cos n\pi}{n^2}\cos nx \qquad -\pi \leq x \leq \pi$$



Ejemplo 1.32 *Hallar el desarrollo de Fourier complejo de la función*

$$f(x) = e^x \quad -\pi < x < \pi \quad T = 2\pi$$

En efecto

$$\begin{aligned}
C_n &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-\frac{n\pi x i}{L}}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-nxi}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-ni)x}dx == \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{(1-ni)x}}{1-ni}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{(1+ni)}{2\pi(1+n^2)}\left[\frac{(e^{(1-ni)\pi} - e^{(1-ni)(-\pi)})}{1}\right] = \frac{(1+ni)}{2\pi(1+n^2)}\left[e^{\pi}e^{-n\pi i} - e^{-\pi}e^{n\pi i}\right] \\
&= \frac{(1+ni)}{2\pi(1+n^2)}\left(e^{\pi}\cos n\pi - ie^{\pi}\sin n\pi - e^{-\pi}\cos n\pi - ie^{-\pi}\sin n\pi\right) = \\
&= \frac{(1+ni)}{2\pi(1+n^2)}\left(e^{\pi}\cos n\pi - e^{-\pi}\cos n\pi\right) = \frac{(-1)^n(1+ni)\sinh\pi}{(1+n^2)\pi} \quad \text{entonces la serie de}
\end{aligned}$$

$$\text{Fourier es} \quad \frac{\sinh\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n(1+ni)}{(1+n^2)}e^{nxi} = e^x \quad -\pi < x < \pi$$

Si se quiere la serie real entonces

$$\frac{\sinh\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n(1+ni)}{(1+n^2)}e^{nxi} =$$

$$= \frac{\sinh\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(-1)^n(1+ni)}{(1+n^2)}e^{nxi} + \frac{\sinh\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(1+ni)}{(1+n^2)}e^{nxi} + \frac{\sinh\pi}{\pi} =$$

$$= \frac{\sinh\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{-n}(1-ni)}{(1+n^2)}e^{-nxi} + \frac{\sinh\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(1+ni)}{(1+n^2)}e^{nxi} + \frac{\sinh\pi}{\pi} =$$

$$= \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n (\cos nx - n \sin nx)}{(1+n^2)} + \frac{\sinh \pi}{\pi} = e^x \quad -\pi < x < \pi$$

haciendo las operaciones algebraicas y tomando la parte imaginaria igual a cero

Una forma más practica para hallar los coeficientes de fourier de la serie real es así

$$\begin{aligned} a_n &= C_n + K_n = \frac{(-1)^n (1+ni) \sinh \pi}{\pi(1+n^2)} + \frac{(-1)^n (1-ni) \sinh \pi}{\pi(1+n^2)} \\ &= \frac{(-1)^n \sinh \pi (1+ni+1-ni)}{\pi(1+n^2)} = \frac{2(-1)^n}{1+n^2} \frac{\sinh \pi}{\pi} \qquad \text{n} \neq 0 \end{aligned}$$

$$\text{si} \quad n = 0 \text{ entonces} \quad a_0 = C_0 + K_0 = \frac{\sinh \pi}{\pi} + \frac{\sinh \pi}{\pi} = \frac{2 \sinh \pi}{\pi}$$

$$\begin{aligned} b_n &= i(C_n - K_n\ ) = i \left(\frac{(-1)^n (1+ni) \sinh \pi}{\pi(1+n^2)} - \frac{(-1)^n (1-ni) \sinh \pi}{\pi(1+n^2)} \right) \\ &= \frac{(-1)^n \sinh \pi (1+ni-1+ni)}{\pi(1+n^2)} = \frac{(-1)^n \sinh \pi (2ni^2)}{\pi(1+n^2)} = \frac{2n(-1)^{n+1}}{1+n^2} \frac{\sinh \pi}{\pi} \end{aligned}$$

luego la serie real viene dada por

$$e^x = \frac{\sinh \pi}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{1+n^2} \frac{\sinh \pi}{\pi} \cos nx + \frac{2(-1)^{n+1} n}{1+n^2} \frac{\sinh \pi}{\pi} \sin nx \quad -\pi < x < \pi$$

Ejercicio 2 *Verifique las igualdades de las series de Fourier en solo senos*

1.

$$\frac{2}{\pi} \left(\sin \pi x + \frac{\sin 2\pi x}{2} + \frac{\sin 3\pi x}{3} + ... \right) = 1 - x \qquad 0 < x < 1$$

2.

$$\frac{8}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + ... \right) = x\,(\pi - x) \qquad 0 < x < \pi$$

Verifique las igualdades de las series de Fourier en solo cosenos

3.

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \left(\cos \frac{\pi x}{2} - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5} \cos \frac{5\pi x}{2} + ... \right) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 < x < 1 \\ 1 & si \quad 1 < x < 2 \end{cases}$$

Verifique las igualdades de las series de Fourier en complejos

4.

$$-\frac{2i}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2n+1}e^{(2n+1)ix}=\begin{cases}-1 & si \quad -\pi<x<0\\ 1 & si \quad 0<x<\pi\end{cases} \qquad f(x+2\pi)=f(x)$$

5.

$$i\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{nix}=x \qquad -\pi<x<\pi \qquad f(x+2\pi)=f(x)$$

6.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)}e^{nix}=\cos\frac{x}{2} \qquad -\pi<x<\pi \qquad f(x+2\pi)=f(x)$$

Muestre que

$$a_0=\frac{4}{\pi} \quad \mathrm{a}_n=2\left(\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)}\right)=\frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)} \qquad \mathrm{b}_n=0 \ \text{ y}$$

$$\cos\frac{x}{2}=\frac{2}{\pi}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)}\cos nx \ \text{ si } \ -\pi<x<\pi$$

7.

$$2+\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{2i}{n\pi}e^{n\pi ix}=2x \qquad 0<x<2 \qquad f(x+2)=f(x)$$

Muestre que

$$a_0=4 \qquad \mathrm{a}_n=0 \qquad \mathrm{b}_n=\frac{-4}{n\pi} \qquad \text{y}$$

$$2x=2-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\pi x \quad \text{si } \ 0<x<2$$

8. Hallar la serie compleja para $f(t)=\begin{cases}t & si \quad 0<t<2\\ 0 & si \quad 2\leq t<3\end{cases} \quad f(t+3)=f(t)$

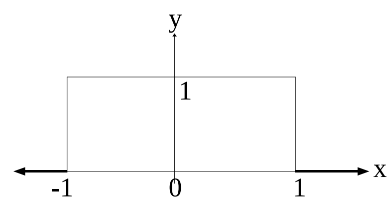
9. Hallar la serie compleja para $f(t)=\begin{cases}0 & si \quad 0<t<1\\ 1 & si \quad 1\leq t<4\end{cases} \quad f(t+4)=f(t)$

10. Hallar la serie compleja para $f(t)=\cos t \quad 0<t<2 \quad f(t+2)=f(t)$

1.5 Integral de Fourier

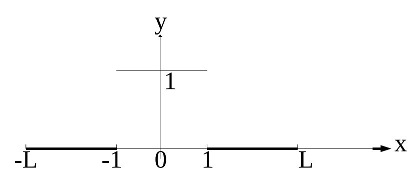
Las series de Fourier constituyen una herramienta poderosa para abordar problemas en los que intervienen funciones periódicas. Sin embargo si la función no es periódica el problema se puede generalizar con la integral de Fourier, que es nuestro objetivo a partir de este momento. Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad |x| < 1 \\ 0 & si \quad |x| > 1 \end{cases} \qquad \text{figura 1.9}$$



que no es una función periódica, entonces a partir de ésta, definimos una nueva función de periódo 2L, $f_L(x)$ así

$$f_L(x) = \begin{cases} 0 & si \quad -L < x < -1 \\ 1 & si \quad -1 < x < 1 \\ 0 & si \quad 1 < x < L \end{cases} \qquad T = 2L \quad \text{figura 1.10}$$



y observe que $\lim\limits_{L\to\infty} f_L(x) = f(x)$.

Como $f_L(x)$ es periódica, su serie de Fourier está dada por

$$f_L(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L} =$$

$$= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f_L(v)dv + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_L(v)\cos\frac{n\pi v}{L}dv\cos\frac{n\pi x}{L} + \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_L(v)\sin\frac{n\pi v}{L}dv\sin\frac{n\pi x}{L}$$

Ahora si

$$w_n = \frac{n\pi}{L} \quad \text{entonces } \triangle w_n = w_{n+1} - w_n = \frac{(n+1)\pi}{L} - \frac{n\pi}{L} = \frac{\pi}{L} \text{ luego } \frac{1}{L} = \frac{\triangle w_n}{\pi}$$

así que

$$f_L(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f_L(v)dv + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_L(v)\cos w_n v dv \cos w_n x + \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_L(v)\sin w_n v dv \sin w_n x$$

$$= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f_L(v)dv + \frac{1}{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-L}^{L} f_L(v)\cos w_n v dv \cos w_n x + \int_{-L}^{L} f_L(v)\sin w_n v dv \sin w_n x\right)\triangle w_n$$

y si $L \to \infty$ entonces $\frac{1}{L} \to 0$ y $\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f_L(v)dv \to 0$ $\quad (\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$ existe) y

$$\sum_{n=1}^{\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \qquad f_L(x) \to f(x) \quad \text{luego}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos wv dv \cos wx + \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin wv dv \sin wx\right) dw \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \left(T_c(w)\cos wx + T_s(w)\sin wx\right) dw \end{aligned}$$

con

$$T_c(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos wv dv \quad \text{y} \quad T_s(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin wv dv$$

Expresiones conocidas como transformada de seno y de coseno. En conclusión

Si f(x) seccionalmente continua en todo R y la integral $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$ es convergente entonces

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos wv dv \cos wx + \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin wv dv \sin wx\right) dw$$

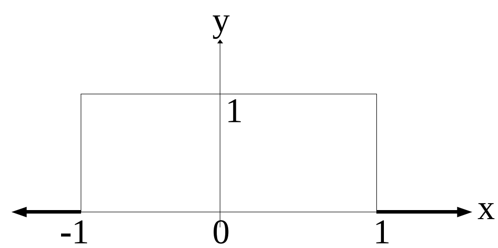
$$= \begin{cases} f(x) & si \quad f(x) \text{ es continua en x} \\ \frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2} & si \quad f(x) \text{ no es continua en } \mathrm{x}_0 \end{cases}$$

ó

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty (T_c(w)\cos wx + T_s(w)\sin wx)\,dw = \begin{cases} f(x) & si \quad f(x) \text{ es continua en x} \\ \frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2} & si \quad f(x) \text{ no es continua en } \mathrm{x}_0 \end{cases}$$

Ejemplo 1.33 *Hallar la representación en integral de Fourier de la función*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad |x| < 1 \\ 0 & si \quad |x| > 1 \end{cases} \qquad \textit{figura 1.11}$$



En efecto

$$T_c(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos wv dv = \int_{-1}^{1} f(v)\cos wv dv = \int_{-1}^{1} \cos wv dv = \frac{2\sin w}{w}$$

$$T_s(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin wv dv = \int_{-1}^{1} f(v)\sin wv dv = \int_{-1}^{1} \sin wv dv = 0$$

entonces la integral de Fourier está dada por

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty (T_c(w)\cos wx + T_s(w)\sin wx)\,dw = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin w}{w}\cos wx dw = \begin{cases} 1 & si \quad |x| < 1 \\ 0 & si \quad |x| > 1 \\ \frac{1}{2} & si \quad x = \pm 1 \end{cases}$$

De aquí se puden calcular muchas integrales, como por ejemplo si en ambos miembros de la igualdad

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin w}{w}\cos wx dw = \begin{cases} 1 & si \quad |x| < 1 \\ 0 & si \quad |x| > 1 \\ \frac{1}{2} & si \quad x = \pm 1 \end{cases}$$

reemplazamos x por cero obtenemos

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin w}{w}\cos w0dw = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin w}{w}dw = 1$$

es decir

$$\int_0^\infty \frac{\sin w}{w}dw = \frac{\pi}{2} \ = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$$

En forma análoga se tiene que

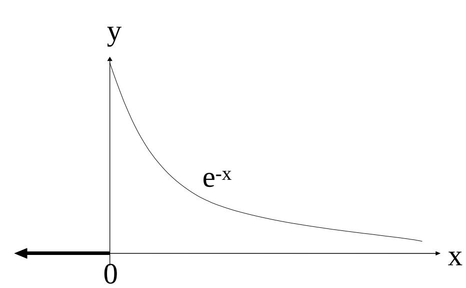
$$\int_0^\infty \frac{\sin w\cos 3w}{w}dw = \int_0^\infty \frac{\sin x\cos 3x}{x}dx = 0 \ (\ x = 3)$$

y que

$$\int_0^\infty \frac{\sin w\cos w}{w}dw = \ \int_0^\infty \frac{\sin x\cos x}{x}dx = \frac{\pi}{4} \quad (x = 1)$$

Ejemplo 1.34 *Hallar la representación en integral de Fourier de la función*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x < 0 \end{cases} \qquad \textit{figura 1.12}$$



En efecto

$$\begin{aligned}
T_c(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos wv dv = \int_0^{\infty} e^{-v}\cos wv dv = \frac{1}{1+w^2} \text{ ya que} \\
\pounds(\text{cosax}) &= \int_0^{\infty} e^{-sx}\cos ax dx = \frac{s}{s^2+a^2} \text{ luego si } s=1 \text{ y } a=w \text{ la integral} \\
\int_0^{\infty} e^{-sx}\cos ax dx &= \int_0^{\infty} e^{-x}\cos wx dx = \frac{1}{1+w^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_s(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin wv dv = \int_0^{\infty} e^{-v}\sin wv dv = \frac{w}{1+w^2} \text{ ya que} \\
\pounds(sinax) &= \int_0^{\infty} e^{-sx}\sin ax dx = \frac{a}{s^2+a^2} \text{ luego si } s=1 \text{ y a=w la integral} \\
\int_0^{\infty} e^{-sx}\sin ax dx &= \int_0^{\infty} e^{-x}\sin wx dx = \frac{w}{1+w^2}
\end{aligned}$$

entonces

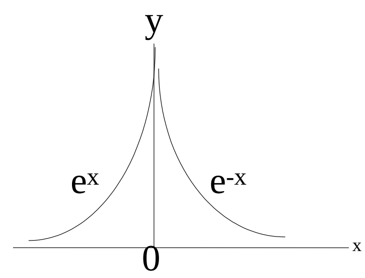
$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \left(T_c(w)\cos wx + T_s(w)\sin wx\right) dw &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1+w^2}\cos wx + \frac{w}{1+w^2}\sin wx\right) dw \\
&= \begin{cases} e^{-x} & si \quad x>0 \\ 0 & si \quad x<0 \\ \frac{1}{2} & si \quad x=0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Del anterior resultado se concluye que

$a)$ $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos 3x + x\sin 3x}{1+x^2}dx = \pi e^{-3}$ b) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos 5x - x\sin 5x}{1+x^2}dx = 0$ c) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}$

Ejemplo 1.35 *Hallar la representación en integral de Fourier de la función*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & si \quad x>0 \\ e^{x} & si \quad x<0 \end{cases} \quad \textit{figura 1.3}$$



En efecto

$$T_c(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos wv dv = 2\int_{0}^{\infty} e^{-v} \cos wv dv = \frac{2}{1+w^2} \quad \text{y}$$

$$T_s(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin wv dv = 0$$

entonces la integral de Fourier es

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \left(T_c(w)\cos wx + T_s(w)\sin wx\right) dw = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{2}{1+w^2}\cos wx dw = \begin{cases} e^{-x} & si \quad x > 0 \\ e^{x} & si \quad x < 0 \\ 1 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Del anterior resultado se concluye que

$$a) \quad \int_{0}^{\infty} \frac{\cos 5x}{1+x^2} dx = \frac{\pi e^{-5}}{2} \qquad \text{b)} \quad \int_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \frac{\pi e^{-1}}{2}$$

Análogamente a las series de Fourier, existen integrales de Fourier para funciones pares , integrales de Fourier de coseno y para funciones impares, integral de Fourier de seno

Ejemplo 1.36 *Hallar las integrales de Fourier de coseno y de seno de*

$$f(x) = e^{-x} \quad si \quad x > 0$$

a) Consideremos f(x) como función par, por lo tanto

$$T_c(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos wv dv = 2\int_{0}^{\infty} e^{-v} \cos wv dv = \frac{2}{1+w^2} \quad \text{y}$$

$$T_s(w) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin wv dv = 0 \ \ \text{ya que el integrando es una función impar}$$

luego

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} T_c(w)\cos wx dw = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{2}{1+w^2}\cos wx dw = \quad e^{-x} \quad si \quad x > 0$$

b) Consideremos f(x) como función impar, por lo tanto

$$T_s(w) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin wv dv = 2\int\limits_{0}^{\infty} f(v)\sin wv dv = 2\int\limits_{0}^{\infty} e^{-v}\sin wv dv = \frac{2w}{1+w^2} \ \ \text{y}$$

$$T_c(w) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos wv dv = 0 \ \ \text{ya que el integrando es una función impar}$$

por lo tanto

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} T_s(w)\sin wx dw = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{2w}{1+w^2}\sin wx dw = \quad e^{-x} \quad si \quad x > 0$$

1.6 Integral Compleja de Fourier

Sabemos ya que

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \left(T_c(w)\cos wx + T_s(w)\sin wx\right) dw = \begin{cases} f(x) & si \quad f(x) \text{ es continua en x} \\ \frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2} & si \quad f(x) \text{ no es continua en } \mathrm{x}_0 \end{cases}$$

Ahora

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \left(T_c(w)\cos wx + T_s(w)\sin wx\right) dw =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos wv dv \cos wx + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin wv dv \sin wx\right) dw$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(wv - wx)dvdw =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(wv - wx)dvdw - \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin(wv - wx)dvdw =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{-i(wv-wx)}dvdw = \begin{cases} f(x) & si \quad f(x) \text{ es continua en x} \\ \frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2} & si \quad f(x) \text{ no es continua en } \mathrm{x}_0 \end{cases}$$

Expresión conocida como la integral compleja de Fourier

Ejercicio 3 *En los ejercicios siguientes verificar la igualdad considerando la función par o impar si es el caso*

1.

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\frac{\sin w}{w} + \frac{2\cos w}{w^2} - \frac{2\sin w}{w^3}\right)\cos wxdw = \begin{cases} x^2 & si \quad 0 < x < 1 \\ 0 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

$$\text{Observe que } T_S\ (w) = 0 = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin wvdv \quad \text{y de aquì} \quad f(v) \text{ es par}$$

por lo tanto

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad 0 < x < 1 \\ 0 & si \quad x > 1 \\ x^2 & si \quad -1 < x < 0 \\ 0 & si \quad x < -1 \end{cases}$$

2.

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\frac{2\sin 2w}{w} + \frac{\cos 2w - 1}{w^2}\right)\cos wxdw = \begin{cases} x & si \quad 0 < x < 2 \\ 0 & si \quad x > 2 \end{cases}$$

3.

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{w^3\sin wx}{w^4+4}dw = e^{-x}\cos x \quad \text{si} \quad x > 0$$

$$\text{Observe que } T_C\ (w) = 0 = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos wvdv \text{ y de aquì } f(v) \text{ es impar, es decir}$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}\cos x & si \quad x > 0 \\ -e^{x}\cos x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

4.

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\sin \pi w \sin wx}{1-w^2}\right) dw = \begin{cases} \sin x & si \quad 0 < x < \pi \\ 0 & si \quad x > \pi \end{cases}$$

5.

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\cos \frac{\pi w}{2} \cos wx}{1-w^2}\right) dw = \begin{cases} \cos x & si \quad |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & si \quad |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

6.

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\sin w \cos wx}{w}\right) dw = \begin{cases} 1 & si \quad 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2} & si \quad x = 1 \\ 0 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

7.

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{(w^2+2)\cos wx}{w^4+4} dw = e^{-x}\cos x \quad \text{si} \quad x > 0$$

8.

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos wk}{w} \sin wx dw = \begin{cases} 1 & si \quad 0 < x < k \\ \frac{1}{2} & si \quad x = k \\ 0 & si \quad x > k \end{cases}$$

9.

$$\int_0^\infty \left[\frac{2\sin w\pi}{\pi w^2} - \frac{2\cos w\pi}{w}\right] \sin wt dw = \begin{cases} t & si \quad -\pi < t < \pi \\ \pm\frac{\pi}{2} & si \quad x = \pm\pi \\ 0 & si \quad |t| > \pi \end{cases}$$

10.

$$\int_0^\infty \frac{2}{\pi w}\left[1-\cos \pi w\right] \sin wt dw = \begin{cases} -1 & si \quad -\pi < t < 0 \\ 1 & si \quad 0 < t < \pi \\ 0 & si \quad |t| > \pi \end{cases}$$

11.

$$\int_0^\infty \frac{2}{\pi w}\left[2\sin 4w - \sin w\right] \cos wt dw = \begin{cases} 1 & si \quad 0 < t < 1 \\ 2 & si \quad 1 < t < 4 \\ 0 & si \quad t > 4 \end{cases}$$

12.

$$\int_0^{\infty} \frac{2}{\pi w}\left[1+\cos w - 2\cos 4w\right]\sin wt\,dw = \begin{cases} 1 & si \quad 0 < t < 1 \\ 2 & si \quad 1 < t < 4 \\ 0 & si \quad t > 4 \end{cases}$$

Capítulo 2

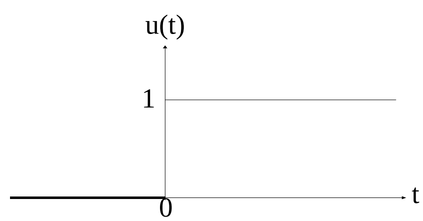
Transformada de Fourier

2.1 Función escalón

La función escalón unitaria está definida por

$$u(t) = \begin{cases} 1 & si \quad t > 0 \\ 0 & si \quad t < 0 \end{cases}$$

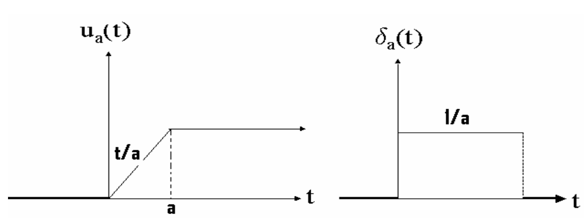
Su gráfico se puede observar en la figura 2.1



A partir de la función escalón construyamos las funciones

$$u_a(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t < 0 \\ \frac{t}{a} & si \quad 0 < t < a \\ 1 & si \quad t > a \end{cases} \qquad \delta_a(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t < 0 \\ \frac{1}{a} & si \quad 0 < t < a \\ 0 & si \quad t > a \end{cases}$$

Su gráficico se puede observar en la figura



y observemos que

$$\frac{d}{dt}\left(u_a(t)\right) = \delta_a(t)$$

$$u_a(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta_a(u)du$$

$$\lim_{a\to 0^+} u_a(t) = u(t)$$

$$\lim_{a\to 0^+} \delta_a(t) = +\infty$$

$$\begin{aligned}\lim_{a\to 0}\ \delta_a(t) &= \lim_{a\to 0}\frac{u(t)-u(t-a)}{a} = \lim_{a\to 0}\frac{u(t-a)-u(t)}{-a}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{u(t+h)-u(t)}{h} = u'(t) = \delta(t)\end{aligned}$$

$$\lim_{t\to\infty}\ u(t) = \lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^{t}\delta(u)du = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(u)du = 1$$

Ahora definimos la función impulso (abusando del lenguaje) por

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & si \quad t=0 \\ 0 & si \quad t\neq 0\end{cases}$$

y goza de las propiedades siguientes

1. *si* $f^{(n)}(t)$ es continua en t_0 entonces

$$\int_a^b \delta^{(n)}(t-t_0)f(t)dt = \begin{cases} (-1)^n f^{(n)}(t_0) & si \quad a<t_0<b \\ 0 & en \quad otro \text{ caso}\end{cases}$$

2. *si* $f^{(n)}(t)$ es continua en t_0 entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t-t_0)f(t)dt = (-1)^n f^{(n)}(t_0)$$

3.

$$\delta(at+b) = \frac{1}{|a|}\delta\left(t+\frac{b}{a}\right) \qquad\qquad \delta'(at+b) = \frac{1}{|a|}\delta'\left(t+\frac{b}{a}\right)$$

Ejemplo 2.1

1. $\int\limits_{-1}^{1} e^t\delta(t)dt = e^0 = 1$ 2. $\int\limits_{-2}^{3} \left(t^2 - 5t + 7\right)\delta(t)dt = 7$ 3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t-2)\sin t dt = \sin 2$

4. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-3t}\ \delta(t - \frac{1}{2})dt = \frac{1}{4}e^{-\frac{3}{2}}$ 5. $\int\limits_{0}^{1} t^3\delta(t + \frac{1}{3})dt = 0$ 6. $\int\limits_{1}^{\infty} e^{-x^2}\delta(x)dx = 0$

7. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} senx\delta'(x)dx = -\frac{d}{dx}\left(\sin x\right)_{x=0} = -\cos 0 = -1$ 8. $\int\limits_{-3}^{1}(t+1)\delta(t)dt = 1$

9. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta''(x-1)e^{2x}dx \ = 4e^2$

Definición 5 *Recordemos que la integral compleja de Fourier viene dada por*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{-iwv}e^{iwx}dvdw &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwx}dw \\ &= \begin{cases} f(x) & si\ \ f\ es\ continua\ en\ x \\ \frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2} & si\ \ f\ es\ discontinua\ en\ x_0 \end{cases}\end{aligned}$$

y a la integral

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{-iwv}dv = F(w) = \mathcal{F}(f(v))$$

se llama la transformada de Fourier de f, *es decir, si f es seccionalmente continua en $\mathbb{R}$ y la integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$ converge, entonces la transformada de Fourier de f, notada por $\mathcal{F}(f(t))$ se define como*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f(t)) &= F(w) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt \quad y \quad a \\ \mathcal{F}^{-1}(F(w)) &= f(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt}dw\end{aligned}$$

se llama la transformada inversa de Fourier

Ejemplo 2.2 *Hallar la transformada de Fourier de la función*

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & si \quad t > 0 \\ 0 & si \quad t < 0 \end{cases}$$

En efecto, aplicando la definición de transformada a f(t) se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt = \int_{-\infty}^{0} 0e^{-iwt}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t}e^{-iwt}dt \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-(1+iw)t}dt = -\left[\frac{1}{1+iw}e^{-(1+iw)t}\right]_0^{\infty} \\
&= \frac{1}{1+iw}\left[1 - \lim_{b\to\infty} e^{-(1+iw)b}\right] = \frac{1}{1+iw}\left[1 - \lim_{b\to\infty}(e^{-b}\cos wb - ie^{-b}\sin wb)\right] \\
&= \frac{1}{1+iw}
\end{aligned}$$

ya que como

$$-1 \leq \cos wb \leq 1 \quad entonces \quad \frac{-1}{e^b} \leq \frac{\cos wb}{e^b} \leq \frac{1}{e^b} \quad y\ como \quad \lim_{b\to\infty} \frac{1}{e^b} = 0$$

por el teorema del empareado

$$\lim_{b\to\infty} \frac{\cos wb}{e^b} = 0$$

y en forma análoga

$$\lim_{b\to\infty} \frac{\sin wb}{e^b} = 0$$

por lo tanto

$$\mathcal{F}(f(t)) = F(w) = \frac{1}{1+iw} \qquad y \quad \mathcal{F}^{-1}(\frac{1}{1+iw}) = f(t) = \begin{cases} e^{-t} & si \quad t > 0 \\ 0 & si \quad t < 0 \\ \frac{1}{2} & si \quad t = 0 \end{cases}$$

Ejemplo 2.3 *Hallar la transformada de Fourier de la función*

$$f(t) = \begin{cases} e^{-(1+i)t} & si \quad t > 0 \\ 0 & si \quad t < 0 \end{cases}$$

En efecto, aplicando la definición de transformada a f(t) se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(1+i)t}e^{-iwt}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(1+i+iw)t}dt = \\
&= -\left[\frac{1}{1+i+iw}e^{-(1+i+iw)t}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{1+i+iw}\left[1-\lim_{b\to\infty} e^{-(1+i+iw)b}\right] = \\
&= \frac{1}{1+i+iw}\left[1-\lim_{b\to\infty}(e^{-b}\cos(w+1)b - ie^{-b}\sin(w+1)b)\right] \\
&= \frac{1}{1+i+iw} = \frac{1}{1+i(w+1)}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{1+i(w+1)}\right) = \begin{cases} e^{-(1+i)t} & si \quad t>0 \\ 0 & si \quad t<0 \\ \frac{1}{2} & si \quad t=0 \end{cases}$$

Ejemplo 2.4 *Hallar la transformada de Fourier de la función*

$$f(t) = e^{-|t|}$$

En efecto, aplicando la definición de transformada a $f(t) = e^{-|t|}$ *se tiene que*

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{t}e^{-iwt}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t}e^{-iwt}dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{(1-iw)t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(1+iw)t}dt = \\
&= \frac{1}{1-iw}\left[e^{(1-iw)t}\right]_{-\infty}^{0} - \frac{1}{1+iw}\left[e^{-(1+iw)t}\right]_0^{\infty} \\
&= \frac{1}{1-iw} + \frac{1}{1+iw} = \frac{2}{1+w^2}
\end{aligned}$$

luego

$$\mathcal{F}(e^{-|t|}) = F(w) = \frac{2}{1+w^2} \quad y \quad \mathcal{F}^{-1}(\frac{2}{1+w^2}) = e^{-|t|}$$

Ejemplo 2.5 *Hallar la transformada de Fourier de la función*

$$f(t) = e^{-t^2}$$

En efecto, aplicando la definición de transformada de fourier a $f(t) = e^{-t^2}$ *se tiene*

$$\mathcal{F}(f(t)) = F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}e^{-iwt}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t^2+iwt)}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t^2+iwt+\frac{i^2w^2}{4}-\frac{i^2w^2}{4})}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-((t+\frac{iw}{2})^2+\frac{w^2}{4})}dt = e^{-\frac{w^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t+\frac{iw}{2})^2}dt$$

$$= e^{-\frac{w^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = e^{-\frac{w^2}{4}}\sqrt{\pi} \quad \text{ya que si } I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx \quad \text{entonces}$$

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx. \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-y^2}dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

$$= \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-r^2}rdrd\theta = \pi \quad \text{entonces} \quad I = \sqrt{\pi}$$

por lo tanto

$$\mathcal{F}(e^{-t^2}) = F(w) = e^{-\frac{w^2}{4}}\sqrt{\pi} \qquad y \quad \mathcal{F}^{-1}(e^{-\frac{w^2}{4}}\sqrt{\pi}) \ = e^{-t^2}$$

Ejemplo 2.6 *Hallar la transformada de Fourier de la función*

$$f(t) = \begin{cases} 1 & si \quad |t| < a \\ 0 & si \quad |t| > a \end{cases} = u(t+a) - u(t-a)$$

En efecto, aplicando la definición de transformada de fourier a $f(t)$*, se tiene*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(t)) &= F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt = \int_{-a}^{a} e^{-iwt}dt = -\left[\frac{1}{iw}e^{-iwt}\right]_{-a}^{a} \\ &= \frac{e^{iwa}-e^{-iwa}}{wi} = 2\left(\frac{e^{iwa}-e^{-iwa}}{2wi}\right) = \frac{2\sin wa}{w} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\mathcal{F}(f(t)) = F(w) = \frac{2\sin wa}{w} \qquad y \ \ \mathcal{F}^{-1}(\frac{2\sin wa}{w}) = f(t) = \begin{cases} 1 & si & |t| < a \\ 0 & si & |t| > a \\ \frac{1}{2} & si & t = \pm a \end{cases}$$

Ejemplo 2.7 *Hallar la transformada de Fourier de la función*

$$f(t) = \begin{cases} A & si & -a < t < 0 \\ -A & si & 0 < t < a \\ 0 & & fuera \end{cases}$$

En efecto, aplicando la definición de transformada de fourier a $f(t)$, se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(t)) &= F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt = \int_{-a}^{a} f(t)e^{-iwt}dt = \int_{-a}^{0} Ae^{-iwt}dt - \int_{0}^{a} Ae^{-iwt}dt \\ &= -\frac{(1-e^{iwa})A}{wi} + \frac{(e^{-iwa}-1)A}{wi} = -\frac{2A}{wi} + \frac{2A}{2iw}\left(e^{iwa}+e^{-iwa}\right) = \\ &= \frac{2A}{iw}(\cos wa - 1) = \frac{2iA}{w}(1-\cos wa) = \frac{2iA}{w}\sin^2(\frac{wa}{2}) \end{aligned}$$

Ejemplo 2.8 *Hallar la transformada de Fourier de la función*

$$f(t) = \begin{cases} 1 & si & 0 < t < 1 \\ -1 & si & -1 < t < 0 \\ 0 & si & |t| > 1 \end{cases}$$

En efecto, aplicando la definición de transformada de fourier a $f(t)$, se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(t)) &= F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt = \int_{-1}^{1} f(t)e^{-iwt}dt = -\int_{-1}^{0} e^{-iwt}dt + \int_{0}^{1} e^{-iwt}dt = \\ &= \frac{1+e^{iw}}{wi} - \frac{(e^{-iwa}-1)}{wi} = \frac{1}{wi} + \frac{e^{iw}}{iw} - \frac{e^{-iw}}{iw} + \frac{1}{iw} = \\ &= \frac{2}{iw} + \frac{2\sin w}{w} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.9 *Hallar la transformada de Fourier de la función*

$$f(t) = \delta(t-a)$$

En efecto, aplicando la definición de transformada de fourier a $f(t) = \delta(t-a)$ se tiene

$$\mathcal{F}(\delta(t-a)) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)e^{-iwt}dt = e^{-iwa} \quad luego \quad \mathcal{F}^{-1}(e^{-iwa}) = \delta(t-a)$$

y así

$$\mathcal{F}(\delta(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-iwt}dt = e^{-iw0} = 1 \quad luego \quad \mathcal{F}^{-1}(1) = \delta(t)$$

Ejemplo 2.10 *Hallar la transformada de Fourier de la función*

$$f(t) = \delta(t-1)t\sin t$$

En efecto, aplicando la definición de transformada de fourier a $f(t) = \delta(t-1)t\sin t$ *se tiene*

$$\mathcal{F}(\delta(t-1)t\sin t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-1)t\sin te^{-iwt}dt = \left(t\sin te^{-iwt}\right)_{t=1} = \sin 1e^{-iw}$$

Ejemplo 2.11 *Hallar la transformada de Fourier de la función*

$$f(t) = \delta''(t)e^{2t}$$

En efecto, aplicando la definición de transformada de fourier a $f(t) = \delta''(t)e^{2t}$ *se tiene*

$$\mathcal{F}(\delta''(t)e^{2t}) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta''(t)e^{2t}e^{-iwt}dt = (-1)^2\frac{d^2}{dt^2}\left(e^{2t}e^{-iwt}\right)_{t=0} = (iw-2)^2$$

Ejemplo 2.12 *Recordemos que*

$$\mathcal{F}^{-1}(\delta(w-a)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(w-a)e^{iwt}dw = \frac{1}{2\pi}e^{iat}$$

luego

$$\mathcal{F}(e^{iat}) = 2\pi\delta(w-a)$$

y así

$$\mathcal{F}(1) = 2\pi\delta(w)$$

Ejemplo 2.13

$$\mathcal{F}(\cos at) = \mathcal{F}\left(\frac{e^{iat}+e^{-iat}}{2}\right) = \frac{1}{2}\mathcal{F}(e^{iat}) + \frac{1}{2}\mathcal{F}(e^{-iat}) = \pi\left(\delta(w-a)+\delta(w+a)\right)$$

y en forma análoga

$$\mathcal{F}(\sin at) = -i\pi\left(\delta(w-a)-\delta(w+a)\right)$$

2.2 Algunas propiedades de las transformadas de Fourier

2.2.1 Linealidad

Si

$$\mathcal{F}(f(t)) = F(w) \ \ y \ \ \mathcal{F}(g(t)) = G(w) \ \text{ entonces}$$
$$\mathcal{F}(af(t) \pm bg(t)) = a\mathcal{F}(f(t)) \pm b\mathcal{F}(g(t)) = aF(w) \pm bG(w)$$

En efecto

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(af(t) \pm bg(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} (af(t) \pm bg(t))\, e^{-iwt} dt = a \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt \pm b \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-iwt} dt \\ &= a\mathcal{F}(f(t)) \pm b\mathcal{F}(g(t)) = aF(w) \pm bG(w)\end{aligned}$$

y de aquí

$$\mathcal{F}^{-1}\left(aF(w) \pm bG(w)\right) = af(t) \pm bg(t) = a\mathcal{F}^{-1}(F(w)) \pm b\mathcal{F}^{-1}(G(w))$$

2.2.2 Dilatación

$$\text{si } \ \mathcal{F}(f(t)) = F(w) \ \text{ entonces } \mathcal{F}(f(at)) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{w}{a}\right)$$

En efecto

$$\mathcal{F}(f(at)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-iwt} dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-\frac{iwu}{a}} du = \frac{1}{a} F\left(\frac{w}{a}\right) \quad \text{si } u = at \ \text{ para } a > 0$$

y por lo tanto

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{a} F\left(\frac{w}{a}\right)\right) = f(at)$$

La demostración si $a < 0$ es análoga

Ejemplo 2.14 *Recordemos que*

$$\mathcal{F}(e^{-|t|}) = F(w) = \frac{2}{1 + w^2} \quad \textit{entonces}$$

$$\mathcal{F}(e^{-|at|}) = \frac{1}{|a|}\left(\frac{2}{1 + \left(\frac{w}{a}\right)^2}\right) = \frac{1}{|a|}\left(\frac{2a^2}{a^2 + w^2}\right) = \frac{2\,|a|}{a^2 + w^2}$$

$$y \ \ \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{2\,|a|}{a^2 + w^2}\right) = e^{-|at|}$$

Ejemplo 2.15 *Recordemos que*

$$\mathcal{F}(e^{-|t|}) = F(w) = \frac{2}{1+w^2} \quad \textit{entonces}$$

$$\mathcal{F}(e^{-|3t|}) = \frac{1}{|3|}\left(\frac{2}{1+\left(\frac{w}{3}\right)^2}\right) = \frac{1}{|3|}\left(\frac{2\,(3)^2}{3^2+w^2}\right) = \frac{6}{9+w^2}$$

$$y \;\; \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{6}{9+w^2}\right) = e^{-|3t|}$$

Ejemplo 2.16 *Como*

$$\mathcal{F}(e^{-t^2}) = e^{-\frac{w^2}{4}}\sqrt{\pi} \qquad \textit{entonces}$$

$$\mathcal{F}(e^{-(at)^2}) = \frac{1}{|a|}e^{-\frac{w^2}{4a^2}}\sqrt{\pi}$$

$$y \quad \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{|a|}e^{-\frac{w^2}{4a^2}}\sqrt{\pi}\right) = e^{-(at)^2}$$

Ejemplo 2.17 *Como*

$$\mathcal{F}(e^{-t}u(t)) = \frac{1}{1+iw} \quad \textit{entonces}$$

$$\mathcal{F}(e^{-at}u(at)) = \frac{1}{|a|}\frac{1}{1+\frac{wi}{a}} = \frac{a}{|a|\,(a+wi)}$$

$$y \quad \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{a}{|a|\,(a+wi)}\right) = e^{-at}u(at)$$

Ejemplo 2.18 *Como*

$$\mathcal{F}(e^{-t}u(t)) = \frac{1}{1+iw} \quad \textit{entonces}$$

$$\mathcal{F}(e^{2t}u(-2t)) = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{wi}{-2}} = \frac{-1}{(-2+wi)} = \frac{1}{(2-wi)}$$

$$y \quad \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{(2-wi)}\right) = e^{2t}u(-2t)$$

Ejemplo 2.19 *Hallar la inversa de*

$$F(w) = \frac{1+iw}{6-w^2+5iw}$$

En efecto

$$\begin{aligned} F(w) &= \frac{1+iw}{6-w^2+5iw} = \frac{1+iw}{(iw)^2+5iw+6} = \frac{1+iw}{(2+iw)(3+iw)} \\ &= \frac{A}{2+iw} + \frac{B}{3+iw} = \frac{-1}{2+iw} + \frac{2}{3+iw} \ \ \textit{entonces} \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1+iw}{6-w^2+5iw}\right) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{2}{3+iw}\right) - \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{2+iw}\right) = 2e^{-3t}u(3t) - e^{-2t}u(3t)$$

2.2.3 Corrimiento con respecto a la frecuencia

$$\text{Si } \ \mathcal{F}(f(t)) = F(w) \quad \text{entonces} \quad \mathcal{F}(f(t)e^{iat}) = F(w-a) \quad \text{y}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left(F(w-a)\right) = f(t)e^{iat}$$

En efecto:

$$\mathcal{F}(f(t)e^{iat}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{iat}e^{-iwt}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-it(w-a)}dt = F(w-a)$$

Ejemplo 2.20 *Como*

$$\mathcal{F}(e^{-t^2}) = e^{-\frac{w^2}{4}}\sqrt{\pi} \quad \textit{entonces}$$

$$\mathcal{F}(e^{-t^2}e^{it}) = e^{-\frac{(w-1)^2}{4}}\sqrt{\pi}$$

$$y \quad \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-\frac{(w-1)^2}{4}}\sqrt{\pi}\right) = e^{-t^2}e^{it}$$

Ejemplo 2.21 *Como*

$$\mathcal{F}(e^{-|t|}) = \frac{2}{1+w^2} \qquad \textit{entonces}$$

$$\mathcal{F}\left(e^{-|t|}e^{3it}\right) = \frac{2}{1+(w-3)^2}$$

$$\textit{por lo tanto} \ \ \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{2}{1+(w-3)^2}\right) = e^{-|t|}e^{3it}$$

Ejemplo 2.22 *Hallar la transformada de fourier de*

$$g(t) = f(t)\sin at$$

En efecto :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(f(t)\sin at\right) &= \mathcal{F}\left(f(t)\left(\frac{e^{ait}-e^{-ait}}{2i}\right)\right) = \frac{1}{2i}\left[\mathcal{F}\left(f(t)e^{ait}\right) - \mathcal{F}\left(f(t)e^{-ait}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2i}\left[F(w-a) - F(w+a)\right] \quad \textit{Si } \mathcal{F}\left(f(t)\right) = F(w)
\end{aligned}$$

$$\textit{Análogamente} \quad \mathcal{F}\left(f(t)\cos at\right) = \frac{1}{2}\left[F(w-a) + F(w+a)\right]$$

Ejemplo 2.23 *Hallar la transformada de fourier de*

$$f(t) = \begin{cases} \cos 2t & si \quad -a < t < a \\ 0 & si \quad |t| > a \end{cases}$$

En efecto : Como

$$f(t) = (\cos 2t)\left(u(t+a) - u(t-a)\right) \ \ \textit{entonces}$$

$$\mathcal{F}\left((\cos 2t)\left(u(t+a) - u(t-a)\right)\right) = \frac{\sin(w-2)a}{w-2} + \frac{\sin(w+2)a}{w+2}$$

Ejemplo 2.24 *Hallar la transformada de fourier de*

$$f(t) = e^{-t}u(t)\cos 3t$$

En efecto :

$$\textit{Como} \ \ \mathcal{F}\left(e^{-t}u(t)\right) = \frac{1}{1+iw} \quad \textit{entonces}$$

$$\mathcal{F}\left(e^{-t}u(t)\cos 3t\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+i(w-3)} + \frac{1}{1+i(w+3)}\right]$$

Ejemplo 2.25 *Hallar la transformada de fourier de*

$$f(t) = e^{-|t|}\sin 4t$$

En efecto :

$$\textit{Como} \ \ \mathcal{F}\left(e^{-|t|}\right) = \frac{2}{1+w^2} \quad \textit{entonces}$$

$$\mathcal{F}\left(e^{-|t|}\sin 4t\right) = \frac{1}{2i}\left[\frac{2}{1+(w-4)^2} - \frac{2}{1+(w+4)^2}\right]$$

Ejemplo 2.26 *Hallar la inversa de*

$$F(w) = \frac{2\sin(w-3)a}{w-3}$$

En efecto :

$$Si \;\; f(t) = \begin{cases} 1 & si \quad |t| \leq a \\ 0 & si \quad |t| > a \end{cases} \qquad entonces \;\; \mathcal{F}\left(f(t)\right) = \frac{2\sin wa}{w} \;\; por\ lo\ tanto$$

$$\mathcal{F}\left(f(t)e^{3it}\right) = \frac{2\sin(w-3)a}{w-3} \quad luego \;\; \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{2\sin(w-3)a}{w-3}\right) = f(t)e^{3it}$$

2.2.4 Corrimiento con respecto al tiempo

$$\text{Si} \;\; \mathcal{F}\left(f(t)\right) = F(w) \text{ entonces } \mathcal{F}\left(f(t-a)\right) = F(w)e^{-aiw} \;\; \text{y}$$
$$\mathcal{F}^{-1}\left(F(w)e^{-aiw}\right) = f(t-a)$$

En efecto

$$\mathcal{F}\left(f(t-a)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-a)e^{-iwt}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iw(t+a)}dt = e^{-iwa}F(w)$$

Ejemplo 2.27

$$\mathcal{F}\left(u(t-2)e^{-3(t-2)}\right) = \mathcal{F}\left(u(t)e^{-3t}\right)e^{-2iw} = \frac{e^{-2iw}}{(3+iw)}$$

Ejemplo 2.28 *Hallar la transformada de Fourier de*

$$f(t) = 3u(t-2)e^{-3t}$$

En efecto :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(3u(t-2)e^{-3t}\right) &= \mathcal{F}\left(3u(t-2)e^{-3(t-2+2)}\right) = 3e^{-6}\mathcal{F}\left(u(t-2)e^{-3(t-2)}\right) \\
&= 3e^{-6}\mathcal{F}\left(u(t)e^{-3t}\right)e^{-2iw} = \frac{3e^{-2(iw+3)}}{(3+iw)}
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.29

$$\mathcal{F}(e^{-|t-5|}) = \left(\frac{2}{1+w^2}\right)e^{-5iw}$$

Ejemplo 2.30

$$\mathcal{F}(e^{-(t-1)^2}) = e^{-\frac{w^2}{4}}\sqrt{\pi}e^{-iw}$$

Ejemplo 2.31 *Hallar la inversa de*

$$F(w) = \left(\frac{2}{1+w^2}\right)e^{-3iw}$$

En efecto :

$$\textit{como} \quad \mathcal{F}(e^{-|t|}) = \frac{2}{1+w^2} \quad \textit{entonces}\ \mathcal{F}(e^{-|t-3|}) = \left(\frac{2}{1+w^2}\right)e^{-3iw}$$

$$y \quad \mathcal{F}^{-1}\left(\left(\frac{2}{1+w^2}\right)e^{-3iw}\right) = e^{-|t-3|}$$

Ejemplo 2.32 *Hallar la inversa de*

$$F(w) = e^{-\frac{w^2}{4}}\sqrt{\pi}e^{-iw}$$

En efecto :

$$\textit{Como} \quad \mathcal{F}(e^{-t^2}) = e^{-\frac{w^2}{4}}\sqrt{\pi} \quad \textit{entonces} \quad \mathcal{F}(e^{-(t-1)^2}) = e^{-\frac{w^2}{4}}\sqrt{\pi}e^{-iw}$$

$$y \quad \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-\frac{w^2}{4}}\sqrt{\pi}e^{-iw}\right) = e^{-(t-1)^2}$$

Ejemplo 2.33 *Hallar la inversa de*

$$F(w) = \left(\frac{2\sin wa}{w}\right)e^{-3iw}$$

En efecto :

$$\textit{Si} \quad f(t) = \begin{cases} 1 & si \quad |t| \leq a \\ 0 & si \quad |t| > a \end{cases} \quad \textit{sabemos que}\ \mathcal{F}(f(t)) = \frac{2\sin wa}{w} \quad \textit{por lo tanto}$$

$$\mathcal{F}(f(t-3)) = \left(\frac{2\sin wa}{w}\right)e^{-3iw} \quad \textit{luego} \quad \mathcal{F}^{-1}\left(\left(\frac{2\sin wa}{w}\right)e^{-3iw}\right) = f(t-3)$$

$$\textit{con} \quad f(t-3) = \begin{cases} 1 & si \quad |t-3| \leq a \\ 0 & si \quad |t-3| > a \end{cases}$$

Ejemplo 2.34 *Hallar la transformada inversa de*

$$F(w)=\frac{e^{-2(w-3)i}}{5+(w-3)i}$$

En efecto :

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{e^{-(2w-6)i}}{5+(w-3)i}\right)=\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{e^{-2(w-3)i}}{5+(w-3)i}\right)$$

$$\textit{Como}\ \ \mathcal{F}\left(e^{-5t}u(t)\right)=\frac{1}{5+iw}\quad \textit{entonces}\ \mathcal{F}\left(e^{-5(t-2)}u(t-2)\right)=\frac{e^{-2wi}}{5+wi}\ \textit{por lo tanto}$$

$$\mathcal{F}\left(e^{3it}e^{-5(t-2)}u(t-2)\right)=\frac{e^{-2(w-3)i}}{5+(w-3)i}\quad \textit{luego}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{e^{-2(w-3)i}}{5+(w-3)i}\right)=e^{3it}e^{-5(t-2)}u(t-2)$$

Ejemplo 2.35 *Hallar la transformada inversa de*

$$F(w)=\frac{2e^{4wi}\sin 2w}{9+w^2}$$

En efecto :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{2e^{4wi}\sin 2w}{9+w^2}\right) &= \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{2e^{4wi}\left(e^{2wi}-e^{-2wi}\right)/2i}{9+w^2}\right)=-i\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{e^{4wi}\left(e^{2wi}-e^{-2wi}\right)}{9+w^2}\right)\\
&= -i\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{e^{6wi}-e^{2wi}}{9+w^2}\right)=-i\left[\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{e^{6wi}}{9+w^2}\right)-\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{e^{2wi}}{9+w^2}\right)\right]\\
&= \frac{-i}{6}\left[\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{6e^{6wi}}{9+w^2}\right)-\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{6e^{2wi}}{9+w^2}\right)\right]=-\frac{i}{6}\left[e^{-3|t+6|}-e^{-3|t+2|}\right]
\end{aligned}$$

ya que

$$\mathcal{F}\left(e^{-|3t|}\right)=\frac{2}{3\left(1+\left(\frac{w^2}{9}\right)\right)}=\frac{6}{9+w^2}\quad y\ \ \mathcal{F}\left(e^{-|3(t+6)|}\right)=\frac{6e^{6wi}}{9+w^2}$$

2.2.5 Propiedad de la derivada

Sea n un entero positivo y $f^{(n)}(t)$ continua con $\int_{-\infty}^{\infty}\left|f^{(n)}(t)\right|dt$ convergente y $\lim\limits_{t\to\infty} f^{(k)}(t) = \lim\limits_{t\to-\infty} f^{(k)}(t) = 0 \quad k = 0, 1, 2, ...n-1$, si $\mathcal{F}(f(t)) = F(w)$ entonces

$$\mathcal{F}\left(f^{(n)}(t)\right) = (iw)^n F(w) \qquad \text{y} \qquad \mathcal{F}^{-1}\left((iw)^n F(w)\right) = f^{(n)}(t)$$

La demostración se hará para n =1. En efecto sabemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f'(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-iwt}dt \quad \left[dv = f'(t)dt, \quad u = e^{-iwt}\right] \\
&= f(t)e^{-iwt} + iw\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt = iwF(w) \ \text{ pues}
\end{aligned}$$

$$\lim_{t\to\infty} f^{(0)}(t) = \lim_{t\to-\infty} f^{(0)}(t) = 0 \ y \ \left|e^{-iwt}\right| = 1\text{,y por lo tanto}$$

$$\lim_{t\to\infty} \left|f^{(0)}(t)e^{-iwt}\right| = \lim_{t\to-\infty} \left|f(t)e^{-iwt}\right| = 0$$

$$\text{entonces } \mathcal{F}(f'(t)) = iw\mathcal{F}(f(t)) = iwF(w)$$

Si la función es continua a trozos y las discontinuidades son de salto y finitas con $a_k = f(t_k^+) - f(t_k^-)$ el tamaño del salto entonces

$$\mathcal{F}(f'(t)) = iwF(w) - \sum_{k=1}^{n} a_k e^{-iwt_k}$$

Supongamos que f tiene solamente una discontinuidad de salto en t_0 con $a = f(t_0^+) - f(t_0^-)$ entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f'(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-iwt}dt = \int_{-\infty}^{t_0} f'(t)e^{-iwt}dt + \int_{t_0}^{\infty} f'(t)e^{-iwt}dt \\
&= f(t)e^{-iwt}\Big]_{-\infty}^{t_0} + iw\int_{-\infty}^{t_0} f(t)e^{-iwt}dt + f(t)e^{-iwt}\Big]_{t_0}^{\infty} + iw\int_{t_0}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt \\
&= \lim_{t\to t_0^-} f(t)e^{-iwt} + iw\int_{-\infty}^{t_0} f(t)e^{-iwt}dt - \lim_{t\to t_0^+} f(t)e^{-iwt} + iw\int_{t_0}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt \\
&= f(t_0^-)e^{-iwt_0} - f(t_0^+)e^{-iwt_0} + iw\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt \\
&= \left[f(t_0^-) - f(t_0^+)\right]e^{-iwt_0} + iw\mathcal{F}(f(t)) = iwF(w) - ae^{-iwt_0}
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.36 *Hallar la transformada inversa de*

$$F(w) = (iw)e^{-\frac{w^2}{4}}\sqrt{\pi}$$

En efecto :

$$\mathcal{F}(e^{-t^2}) = e^{-\frac{w^2}{4}}\sqrt{\pi} \quad entonces\ \mathcal{F}(-2te^{-t^2}) = (iw)e^{-\frac{w^2}{4}}\sqrt{\pi}$$

$$y\ así\ \mathcal{F}^{-1}\left((iw)e^{-\frac{w^2}{4}}\sqrt{\pi}\right) = -2te^{-t^2}$$

Ejemplo 2.37

La función signo de t se define por $sig(t) = -1 + 2u(t)$ *y su derivada por*

$$\frac{d}{dt}(sig(t)) = 2u'(t) = 2\delta(t) \quad entonces\ \mathcal{F}\left(\frac{d}{dt}(sig(t))\right) = 2\mathcal{F}(\delta(t)) = 2 = iw\ \mathcal{F}(sig(t))$$

$$luego\ \ \mathcal{F}(sig(t)) = \frac{2}{iw}$$

Ejemplo 2.38 *Transformada de fourier de la función escalòn*

$$\mathcal{F}(u(t)) = \mathcal{F}\left(\frac{sig(t)}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{iw} + \pi\delta(w)$$

$$y \quad \mathcal{F}(u(t-a)) = \left(\frac{1}{iw} + \pi\delta(w)\right)e^{-iwa}$$

Ejemplo 2.39 *Hallar*

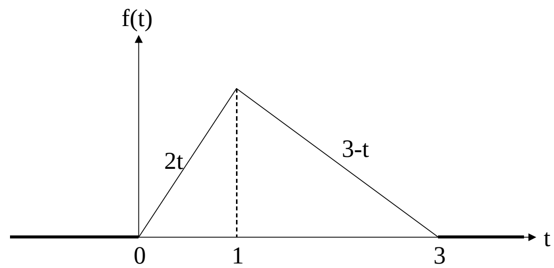
$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{e^{-iw}}{i(w+10)}\right)$$

En efecto : Como

$$\mathcal{F}(sigt) = \frac{2}{iw} \ \ entonces\ \mathcal{F}\left(e^{-10it}sigt\right) = \frac{2}{i(w+10)} \ \ por\ tanto$$

$$\mathcal{F}\left(e^{-10i(t-1)}sig(t-1)\right) = \frac{2e^{-iw}}{i(w+10)} \ \ así\ que$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{e^{-iw}}{i(w+10)}\right) = \frac{e^{-10i(t-1)}sig(t-1}{2}$$



Ejemplo 2.40 *Hallar la transformada de Fourier del pulso triangular*

$$f(t)=\begin{cases} 2t & si \quad 0\le t\le 1 \\ 3-t & si \quad 1\le t\le 3 \\ 0 & en \quad otro\ caso \end{cases}$$

Su gráfico se pude observar en la figura 2.2

Se mostrarán varias soluciones posibles

1 Se hará por la definición de transformada,es decir

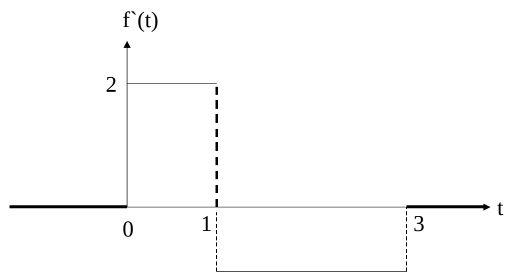
$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(f(t)\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt = \\
&= \int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-iwt}dt + \int_{0}^{1} f(t)e^{-iwt}dt + \int_{1}^{3} f(t)e^{-iwt}dt + \int_{3}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0.e^{-iwt}dt + \int_{0}^{1} 2te^{-iwt}dt + \int_{1}^{3} \left(3-t\right)e^{-iwt}dt + \int_{3}^{\infty} 0.e^{-iwt}dt \\
&= \frac{2-3e^{-iw}+e^{-3iw}}{\left(iw\right)^2}
\end{aligned}$$

2 Se deriva la función

$$f(t)=\begin{cases} 2t & si \quad 0\le t\le 1 \\ 3-t & si \quad 1\le t\le 3 \\ 0 & en \quad \text{otro caso} \end{cases} \qquad \text{para obtener}$$

$$f'(t) = \begin{cases} 2 & si \quad 0 < t < 1 \\ -1 & si \quad 1 < t < 3 \\ 0 & en \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

Su gráfico se pude observar en la figura 2.3



y escribimos a $f'(t)$ como combinaciòn lineal de la función escalon, es decir,

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2\left[u(t) - u(t-1)\right] + \left[u(t-1) - u(t-3)\right](-1) \\ &= 2u(t) - 3u(t-1) + u(t-3) \end{aligned}$$

y derivando cada tèrmino de la igualdad anterior se tiene

$$f''(t) = 2\delta(t) - 3\delta(t-1) + \delta(t-3)$$

y aplicando transformada a cada término de esta igualdad se tiene

$$\mathcal{F}\left(f''(t)\right) = (iw)^2 F(w) = \mathcal{F}\left(2\delta(t) - 3\delta(t-1) + \delta(t-3)\right) = 2 - 3e^{-iw} + e^{-3iw}$$

y así

$$(iw)^2 F(w) = 2 - 3e^{-iw} + e^{-3iw}$$

luego

$$F(w) = \frac{2 - 3e^{-iw} + e^{-3iw}}{(iw)^2} \quad \text{(cuidado! cuando la función sea discontinua)}$$

3 Escribimos la función f(t) como combinación lineal de función escalon, es decir,

$$f(t) = 2t\left[u(t) - u(t-1)\right] + \left[u(t-1) - u(t-3)\right](3-t)$$

y derivando cada término de la igualdad se obtiene

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2\left[u(t)-u(t-1)\right]+2t\left[\delta(t)-\delta(t-1)\right]-\left[u(t-1)-u(t-3)\right] \\ &\quad +(3-t)\left[\delta(t-1)-\delta(t-3)\right] \\ &= 2u(t)-2u(t-1)+2t\delta(t)-2t\delta(t-1)-u(t-1)+u(t-3) \\ &\quad +(3-t)\delta(t-1)-(3-t)\delta(t-3) \end{aligned}$$

y así

$$\begin{aligned} f''(t) &= 4\delta(t)-6\delta(t-1)+2t\delta'(t)-3t\delta'(t-1) \\ &\quad +3\delta'(t-1)+2\delta(t-3)-3\delta'(t-3)+t\delta'(t-3) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\mathcal{F}\left(f''(t)\right)=(iw)^2F(w)=2-3e^{-iw}+e^{-3iw} \quad \text{ya que}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(4\delta(t)\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} 4\delta(t)e^{-iwt}dt=4 \qquad \mathcal{F}\left(6\delta(t-1)\right)=\int_{-\infty}^{\infty} 6\delta(t-1)e^{-iwt}dt=6e^{-iw} \\ \mathcal{F}\left(2t\delta'(t)\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} 2t\delta'(t)e^{-iwt}dt=-2\frac{d}{dt}\left(te^{-iwt}\right)_{t=0}=-2 \\ \mathcal{F}\left(3t\delta'(t-1)\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} 3t\delta'(t-1)e^{-iwt}dt=-3\frac{d}{dt}\left(te^{-iwt}\right)_{t=1}=-3\left(e^{-iw}-iwe^{-iw}\right) \end{aligned}$$

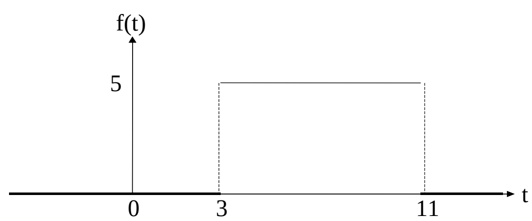
$$\begin{aligned} \mathcal{F}(3\delta'(t-1)) &= \int_{-\infty}^{\infty} 3\delta'(t-1)e^{-iwt}dt=-3\left(-iwe^{-iw}\right) \\ \mathcal{F}(2\delta(t-3)) &= \int_{-\infty}^{\infty} 2\delta(t-3)e^{-iwt}dt=2e^{-3iw} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(3\delta'(t-3)) &= \int_{-\infty}^{\infty} 3\delta'(t-3)e^{-iwt}dt=3(iwe^{-3iw}) \\ \mathcal{F}(t\delta'(t-3)) &= \int_{-\infty}^{\infty} t\delta'(t-3)e^{-iwt}dt=-\left(e^{-3iw}-3iwe^{-3iw}\right) \end{aligned}$$

Ejemplo 2.41 *Hallar la transformada de fourier de*

$$f(t) = \begin{cases} 5 & si \quad 3 \leq t \leq 11 \\ 0 & en \quad otro\ caso \end{cases}$$

Su gráfico se pude observar en la figura 2.4



En efecto como

$$f(t) = 5\left(u(t-3) - u(t-11)\right) \qquad f'(t) = 5\left(\delta(t-3) - \delta(t-11)\right) \text{ entonces}$$

$$\mathcal{F}\left(f'(t)\right) = iwF(w) = \mathcal{F}\left(5\left(\delta(t-3) - \delta(t-11)\right)\right) = 5\left(e^{-3wi} - e^{-11iw}\right) \text{ por lo tanto}$$

$$\begin{aligned} F(w) &= \frac{5\left(e^{-3wi} - e^{-11iw}\right)}{iw} = \frac{10}{w}\left(\frac{e^{4wi} - e^{-4iw}}{2i}\right)e^{-7iw} = \frac{10e^{-7iw}}{w}\sin 4w \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-wit}dt = 5\int_{3}^{11} e^{-wit}dt \end{aligned}$$

2.2.6 Potencial por f(t)

Si $\mathcal{F}\left(f(t)\right) = F(w)$ entonces $\mathcal{F}\left(t^n f(t)\right) = i^n F^{(n)}(w)$ y $\mathcal{F}^{-1}\left(i^n F^{(n)}(w)\right) = t^n f(t)$

Se hará la demostración para n=1. En efecto

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt \quad \text{entonces} \quad F'(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(-it)e^{-iwt}dt = -i\mathcal{F}\left(t\, f(t)\right)$$

$$\text{por lo tanto } \mathcal{F}\left(t\, f(t)\right) = i\ F'(w)$$

Ejemplo 2.42 *Hallar la transformada de fourier de*

$$f(t) = t\,e^{-t^2}$$

En efecto:

$$\mathcal{F}\left(t\,e^{-t^2}\right) = i\frac{d}{dw}\left(e^{-\frac{w^2}{4}}\sqrt{\pi}\right) = -\sqrt{\pi}i\frac{2w}{4}e^{-\frac{w^2}{4}}$$

Ejemplo 2.43

$$\mathcal{F}\left(t\,\delta'(t)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)te^{-iwt}dt = (-1)\left(e^{-iwt} - iwte^{-iwt}\right)_{t=0} = -1$$

Ejemplo 2.44

$$\mathcal{F}(t(u(t+a) - u(t-a))) = i\frac{d}{dw}\left(\frac{2\sin wa}{w}\right) = 2i\left(\frac{aw\cos(wa) - \sin(wa)}{w^2}\right)$$

Ejemplo 2.45

$$\mathcal{F}(t(u(t)e^{-at})) = i\frac{d}{dw}\mathcal{F}\left(u(t)e^{-at}\right) = i\frac{d}{dw}\left(\frac{1}{a+iw}\right) = \frac{-i^2}{(a+iw)^2} = \frac{1}{(a+iw)^2}$$

2.2.7 Simetría

$$\text{Si} \quad \mathcal{F}\left(f(t)\right) = F(w) \quad \text{entonces} \quad \mathcal{F}\left(F(t)\right) = 2\pi f(-w)$$

$$\text{En efecto,} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt}dw \quad \text{entonces } 2\pi f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt}dw$$

$$\text{Ahora } 2\pi f(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{-iwt}dw \quad \text{y reemplazando t por w se tiene que}$$

$$2\pi f(-w) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-iwt}dt = \mathcal{F}\left(F(t)\right)$$

Ejemplo 2.46 *Como*

$$\mathcal{F}(e^{-|t|}) = \frac{2}{1+w^2} = F(w) \quad \textit{entonces}$$

$$\text{a) } \mathcal{F}\left(\frac{2}{1+t^2}\right) = 2\pi f(-w) = 2\pi e^{-|w|}$$

$$\text{b) } \mathcal{F}\left(\frac{2}{1+(t-3)^2}\right) = 2\pi e^{-|w|}\ e^{-3wi}$$

$$\text{c) } \mathcal{F}\left(\frac{\sin 3t}{1+t^2}\right) = \frac{\pi}{2i}\left[e^{-|w-3|} - e^{-|w+3|}\right] \quad \text{ya que } \mathcal{F}\left(\frac{1}{1+t^2}\right) = \pi e^{-|w|}$$

Ejemplo 2.47 *Como*

$$\mathcal{F}(e^{-t}u(t)) = \frac{1}{1+iw} = F(w) \quad \textit{entonces}$$

$$a)\ \mathcal{F}\left(\frac{1}{1+it}\right) = 2\pi e^{w}u(-w)$$

$$b)\ \mathcal{F}\left(\frac{\cos 4t}{1+it}\right) = \frac{2\pi}{2}\left[e^{w-4}u(-(w-4)) + e^{w+4}u(-(w+4))\right]$$

$$c)\mathcal{F}\left(\frac{t}{1+it}\right) = i\frac{d}{dw}\left(2\pi e^{w}u(-w)\right)$$

Ejemplo 2.48 *Como* $\mathcal{F}((u(t+a)-u(t-a))) = \dfrac{2\sin wa}{w}$ *entonces*

$$f(t) = \mathcal{F}(2(u(t+2)-u(t-2))) = \frac{4\sin 2w}{w} \quad \textit{por tanto}$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{4\sin 2t}{t}\right) = 2\pi.2\left(u(2-w) - u(-w-2)\right)$$

Ejemplo 2.49 *Como*

$$\mathcal{F}\left(\cos 3t\right) = \mathcal{F}\left(1.\cos 3t\right) = \pi\left(\delta(w+3) + \delta(w-3)\right) \quad \textit{entonces}$$

$$\mathcal{F}(\pi\left(\delta(t+3) + \delta(t-3)\right)) = 2\pi\cos 3w \quad \textit{por lo tanto}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\cos 3w\right) = \frac{\delta(t+3) + \delta(t-3)}{2}$$

Análogamente

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\sin 3w\right) = \frac{i(\delta(t+3) - \delta(t-3))}{2}$$

Ejemplo 2.50 *Hallar la transformada inversa de fourier de*

$$F(w) = e^{-|w-3|}\cos(2w-6)$$

En efecto :

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-|w-3|}\cos(2w-6)\right) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-|w-3|}\cos 2(w-3)\right) \ \ \textit{pero}$$

$$\mathcal{F}\left(e^{-|t|}\cos 2t\right) = \frac{1}{1+(w-2)^2} + \frac{1}{1+(w+2)^2} \ \ \text{entonces}$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+(t-2)^2} + \frac{1}{1+(t+2)^2}\right) = 2\pi e^{-|w|}\cos 2w \text{ por lo tanto}$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{e^{3it}}{1+(t-2)^2} + \frac{e^{3it}}{1+(t+2)^2}\right) = 2\pi e^{-|w-3|}\cos 2(w-3) \ \ \text{y así}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-|w-3|}\cos(2w-6)\right) = \frac{e^{3it}}{2\pi}\left(\frac{1}{1+(t-2)^2} + \frac{1}{1+(t+2)^2}\right)$$

Ejemplo 2.51 *Hallar la*

$$\mathcal{F}\left(\frac{\sin t}{16+t^2}\right)$$

En efecto : Como

$$\mathcal{F}\left(e^{-4|t|}\right) = \frac{8}{16+w^2} \ \ \textit{entonces}\ \mathcal{F}\left(\frac{1}{16+t^2}\right) = \frac{2\pi}{8}e^{-4|w|} \ \ \textit{entonces}$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{\sin t}{16+t^2}\right) = \frac{\pi i}{8}\left(e^{-4|w+1|} - e^{-4|w-1|}\right)$$

2.2.8 Integración en el tiempo

Si

$$\mathcal{F}\ (f(t)) = F(w) \ \ \text{entonces}$$

$$\mathcal{F}\ \left(\int_{-\infty}^{t} f(u)du\right) = \frac{F(u)}{iw} + \pi F(0)\delta(w)$$

Ejemplo 2.52

$$\mathcal{F}\left(\int_{-\infty}^{t} ue^{-a|u|}du\right) = \frac{\mathcal{F}\left(te^{-a|t|}\right)}{iw} = \frac{i}{iw}\left(\frac{d}{dw}\left(\frac{2a}{a^2+w^2}\right)\right) = \frac{-4a}{\left(a^2+w^2\right)^2}$$

Ejemplo 2.53

$$\mathcal{F}\left(\int_{-\infty}^{t} \frac{du}{1+u^2}\right) = \frac{\pi e^{-|w|}}{iw} + \pi F(0)\delta(w) = \frac{\pi e^{-|w|}}{iw} + \pi^2\delta(w)$$

2.2.9 Transformada de una función periódica

Si f(t) es periódica de período 2L, su serie de Fourier compleja viene dada

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\frac{n\pi ti}{L}} \text{ entonces}$$

$$\mathcal{F}\ (f(t)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \mathcal{F}\left(e^{\frac{n\pi ti}{L}}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n 2\pi\delta\left(w - \frac{n\pi}{L}\right)$$

Algunos ejemplos aplicando las propiedades anteriores.

Ejemplo 2.54 *Hallar*

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-iw}\left(\pi\delta(w+2) + \frac{1}{i(w+2)}\right)\right)$$

En efecto : Como

$$\mathcal{F}((u(t)) = \pi\delta(w) + \frac{1}{iw} \textit{ entonces } \mathcal{F}\left(e^{-2it}u(t)\right) = \pi\delta(w+2) + \frac{1}{i(w+2)} \textit{ así que}$$

$$\mathcal{F}\left(e^{-2i(t-1)}u(t-1)\right) = e^{-iw}(\pi\delta(w+2) + \frac{1}{i(w+2)}) \textit{ por lo tanto}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-iw}\left(\pi\delta(w+2) + \frac{1}{i(w+2)}\right)\right) = e^{-2i(t-1)}u(t-1)$$

Ejemplo 2.55 *Como*

$$\mathcal{F}(1+\cos(4\pi t)) = \mathcal{F}(1) + \mathcal{F}(\cos(4\pi t)) = 2\pi\delta(w) + \pi\left(\delta(w-4\pi) + \delta(w+4\pi)\right)$$

entonces

$$\mathcal{F}^{-1}\left(2\pi\delta(w) + \pi\left(\delta(w-4\pi) + \delta(w+4\pi)\right)\right) = 1 + \cos(4\pi t)$$

Ejemplo 2.56 *Como*

$$\mathcal{F}(sign(t)) = \frac{1}{iw} \text{ entonces } \mathcal{F}(e^{3it}sign(t)) = \frac{1}{i(w-3)} \text{ por tanto}$$

$$\mathcal{F}\left(e^{3i(t+5)}sign(t+5)\right) = \frac{e^{5iw}}{i(w-3)}$$

Ejemplo 2.57 *Como*

$$\mathcal{F}\left(e^{-3|t|}\right) = \frac{6}{9+w^2} \text{ entonces } \mathcal{F}\left(e^{-3|t+6|}\right) = \frac{6e^{6iw}}{9+w^2}$$

y como

$$\mathcal{F}\left(e^{-3|t+6|} - e^{-3|t+2|}\right) = \frac{2i6(e^{6iw} - e^{2iw})}{2i(9+w^2)} = 2i\frac{6e^{4iw}\sin 2w}{9+w^2} \text{ por lo tanto}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{6e^{4iw}\sin 2w}{9+w^2}\right) = \frac{e^{-3|t+6|} - e^{-3|t+2|}}{2i}$$

Ejemplo 2.58 *Hallar*

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-3|w+4|}\cos(2w+8)\right)$$

Como

$$\mathcal{F}\left(e^{-3|t|}\cos(2t)\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{6}{9+(w+2)^2} + \frac{6}{9+(w-2)^2}\right] = \left[\frac{3}{9+(w+2)^2} + \frac{3}{9+(w-2)^2}\right]$$

entonces

$$\mathcal{F}\left(\frac{3}{9+(t+2)^2} + \frac{3}{9+(t-2)^2}\right) = 2\pi e^{-3|w|}\cos 2w \text{ así que}$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{3e^{-4it}}{9+(t+2)^2} + \frac{3e^{-4it}}{9+(t-2)^2}\right) = 2\pi e^{-3|w+4|}\cos 2(w+4)$$

de donde

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-3|w+4|}\cos(2w+8)\right) = \left(\frac{3e^{-4it}}{9+(t+2)^2} + \frac{3e^{-4it}}{9+(t-2)^2}\right)\frac{1}{2\pi}$$

2.2.10 Convolución

La convolución de $f(t)$ y $g(t)$ notada por $f(t)*g(t)$ se define por

$$f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)du=\int_{-\infty}^{\infty} g(u)f(t-u)du$$

$$\begin{aligned}\text{y}\ \ \mathcal{F}\left(f(t)*g(t)\right) &= F(w)G(w)\\ \text{además}\quad \mathcal{F}^{-1}\left(F(w)G(w)\right) &= f(t)*g(t)\end{aligned}$$

$$\text{y}\quad \mathcal{F}\left(f(t)g(t)\right)=\frac{1}{2\pi}\left(F(w)*G(w)\right)$$

Demostración
Sabemos que

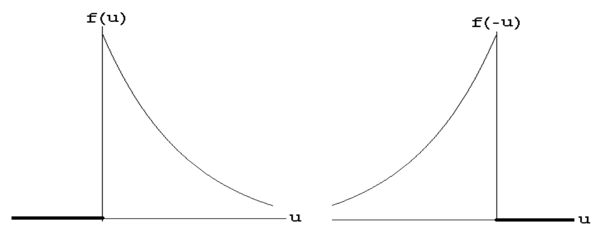
$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t-u)e^{-iwt}dt=\mathcal{F}(g(t-u))=e^{-iwu}G(w)\ \text{por lo tanto}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f(t)*g(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)*g(t)e^{-iwt}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)due^{-iwt}dt\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)e^{-iwt}dudt=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)e^{-iwt}dtdu\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-iwu}G(w)du=G(w)\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-iwu}du=F(w)G(w)\end{aligned}$$

Ejemplo 2.59 *Hallar* $f(t)*f(t)$ *si*

$$f(t)=\begin{cases} e^{-t} & si \quad t\geq 0\\ 0 & si \quad t<0\end{cases}$$

En la figura 2.5 se observan los gráficos de f(u) y de f(-u) y en la figura 2.6 se observan los gráficos de $f(t-u)$ y f(u)

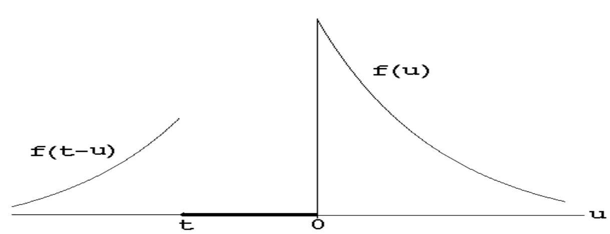


En efecto:

$$f(t)*f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)f(t-u)du=\begin{cases} te^{-t} & si \quad t\geq 0\\ 0 & si \quad t<0\end{cases} \quad \text{pues}$$

si $t \ < \ 0,$ en la figura 2.6 se observa que el producto $f(u)f(t-u)=0,$ es decir

$$f(t)*f(t) \ = \ \int_{-\infty}^{\infty} f(u)f(t-u)du=\int_{-\infty}^{t} 0.e^{-(t-u)}du+\int_{t}^{0} 0.0du+\int_{0}^{\infty} e^{-u}.0du=0$$

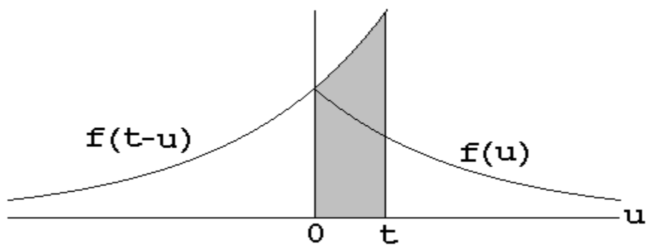


Si $t \ \geq \ 0$ de la figura 2.7 se puede observar que el producto $f(u)f(t-u) \ \neq 0$ solamente en

$$f(t)*f(t) \ = \ \int_{-\infty}^{\infty} f(u)f(t-u)du=\int_{-\infty}^{0} 0.e^{-(t-u)}du+\int_{0}^{t} e^{-u}.e^{-(t-u)}du+\int_{t}^{\infty} e^{-u}.0du=te^{-t}$$

Asi que $\mathcal{F}\left(f(t)*f(t)\right)=F(w).F(w)=\dfrac{1}{1+iw}.\dfrac{1}{1+iw}=\dfrac{1}{(1+iw)^2}$ y

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{(1+iw)^2}\right)=f(t)*f(t)=\begin{cases} te^{-t} & si \quad t\geq 0\\ 0 & si \quad t<0\end{cases}$$

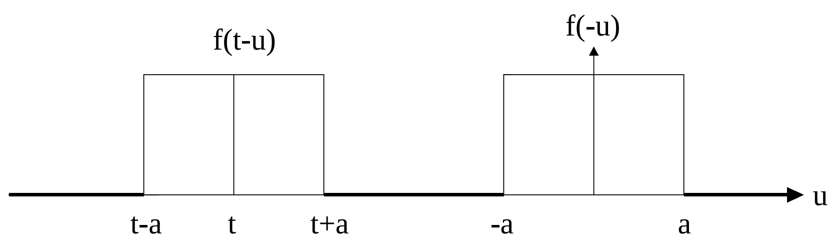


Ejemplo 2.60 *Mostrar que si*

$$f(t) = \begin{cases} 1 & si \quad |t| \leq a \\ 0 & si \quad |t| > a \end{cases} \qquad entonces$$

$$f(t) * f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)f(t-u)du = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & si & t < -2a \\ t+2a & si & -2a \leq t \leq 0 \\ 2a-t & si & 0 < t \leq 2a \\ 0 & si & t > 2a \end{array} \right\}$$

Su gráfico de f(u) y de f(t-u), se pude observar en la figura 2.8



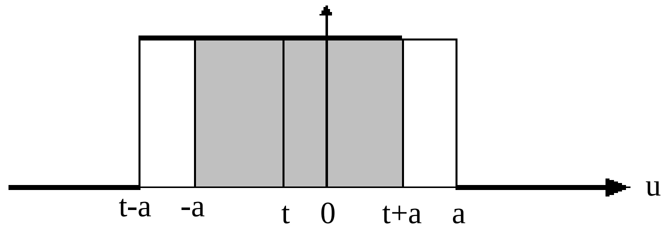
En fecto :

Si $t < -2a$ de la figura 2.8 se observa que el producto de $f(u)f(t-u)$ =0

$$f(t) * f(t) = \int_{-\infty}^{t-a} 0.0du + \int_{t-a}^{t+a} 0.1du + \int_{t+a}^{-a} 0.0du + \int_{-a}^{a} 1.0du + \int_{a}^{\infty} 0.0du = 0$$

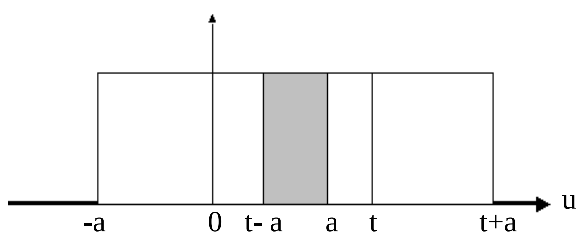
$$\text{Si} - 2a \leq t \leq 0 \quad f(t) * f(t) = \int_{-\infty}^{t-a} 0.0du + \int_{t-a}^{-a} 0.1du + \int_{-a}^{t+a} 1.1du + \int_{t+a}^{a} 1.0du + \int_{a}^{\infty} 0.0du =$$

$$= t + 2a, \quad \text{ya que } f(u)f(t-u) = 1.1 \text{ si } -a < t < t+a \text{ y cero fuera figura 2.9}$$



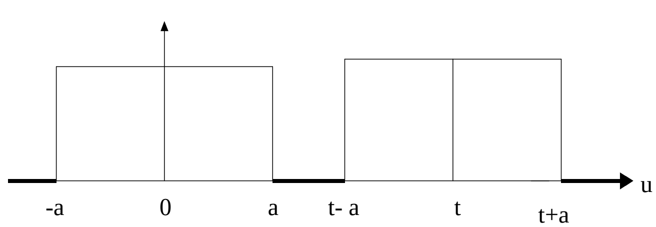
$$0 < t \leq 2a \quad f(t)*f(t) = \int_{-\infty}^{-a} 0.0du + \int_{-a}^{t-a} 1.0du + \int_{t-a}^{a} 1.1du + \int_{a}^{t+a} 0.1du + \int_{t+a}^{\infty} 0.1du$$

$$= \quad 2a - t \quad \text{ya que } \; f(u)f(t-u) = 1.1 \text{ si } \; \mathrm{t} - a < t < a \text{ y cero fuera, figura 2.10}$$



$$\text{Si } t > 2a \quad f(t)*f(t) = \int_{-\infty}^{-a} 0.0du + \int_{-a}^{a} 1.0du + \int_{a}^{t-a} 0.0du + \int_{t-a}^{t+a} 0.1du + \int_{t+a}^{\infty} 0.0du = 0$$

ya que $f(u)f(t-u) = 0$, para $t > 2a$ figura 2.11



$$\text{Asi que } \ \mathcal{F}\left(f(t) * f(t)\right) = F(w).F(w) = \frac{2\sin wa}{w}.\frac{2\sin wa}{w} = \left(\frac{2\sin wa}{w}\right)^2$$

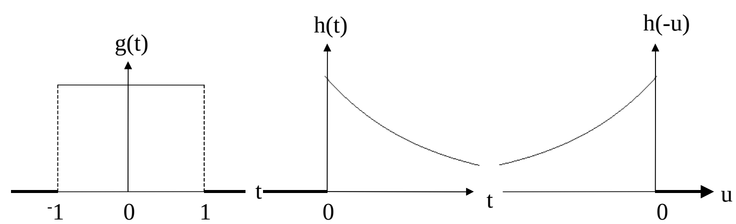
por lo tanto

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\left(\frac{2\sin wa}{w}\right)^2\right) = f(t) * f(t) = \begin{cases} 0 & si & t < -2a \\ t + 2a & si & -2a \leq t \leq 0 \\ 2a - t & si & 0 < t \leq 2a \\ 0 & si & t > 2a \end{cases}$$

Ejemplo 2.61

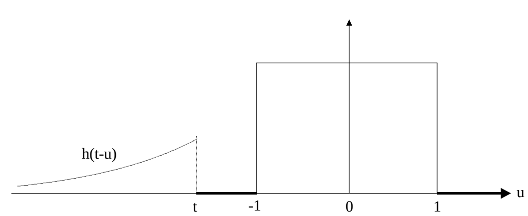
$$\textit{Sean} \ \ g(t) = \begin{cases} 1 & si & |t| \leq 1 \\ 0 & si & |t| > 1 \end{cases} \quad y \ \ h(t) = \begin{cases} e^{-t} & si & t \geq 0 \\ 0 & si & t < 0 \end{cases} \quad \textit{entonces}$$

Su gráfico se pude observar en la figura 2.12



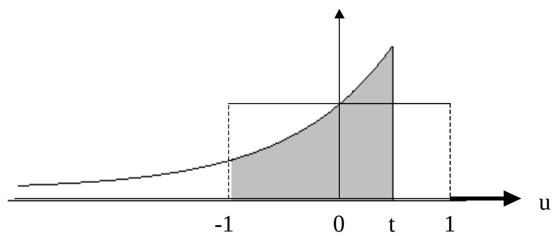
Mostrar que

$$g(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)h(t-u)du = \begin{cases} 0 & si & t < -1 \\ 1 - e^{-(t+1)} & si & -1 \leq t \leq 1 \\ e^{-(t-1)} - e^{-(t+1)} & si & t > 1 \end{cases} \quad \text{pues}$$



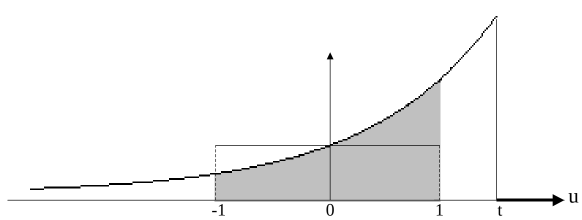
$$\text{si} \quad t < -1, \quad f(u)f(t-u) = 0 \quad \text{figura} \quad 2.13$$

$$g(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{t} 0.e^{-(t-u)}du + \int_{t}^{-1} 0.0du + \int_{-1}^{1} 1.0du + \int_{1}^{\infty} 0.0du = 0$$



$$-1 \leq t \leq 1 \quad f(u)f(t-u) \neq 0 \quad \text{solamente en el intervalo} \quad [-1,t] \quad \text{figura } 2.14$$

$$g(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{-1} 0.e^{-(t-u)}du + \int_{-1}^{t} 1.e^{-(t-u)}du + \int_{t}^{1} 1.0du + \int_{1}^{\infty} 0.0du = 1 - e^{-(t+1)}$$



$$\text{si } t > 1 \quad f(u)h(t-u) \neq 0 \quad \text{solamente en el intervalo} \quad [-1,1] \quad \text{figura } 2.15$$

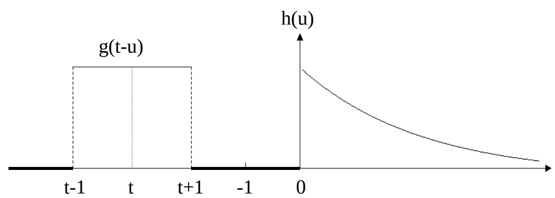
$$\begin{aligned} g(t) * h(t) &= \int_{-\infty}^{-1} 0.e^{-(t-u)}du + \int_{-1}^{1} 1.e^{-(t-u)}du + \int_{1}^{t} 0.e^{-(t-u)}du + \int_{t}^{\infty} 0.0du \\ &= e^{-(t-1)} - e^{-(t+1)} \end{aligned}$$

Asi que $\mathcal{F}\left(g(t) * h(t)\right) = G(w).H(w) = \dfrac{2\sin w}{w}.\dfrac{1}{1+iw}$ por lo tanto

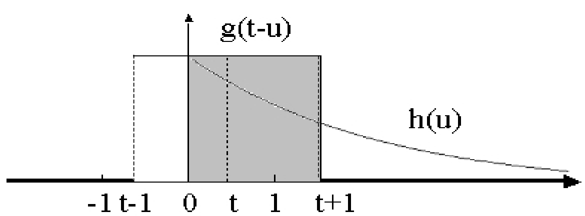
$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{2\sin w}{w}.\frac{1}{1+iw}\right) = g(t) * h(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t < -1 \\ 1 - e^{-(t+1)} & si \quad -1 \leq t \leq 1 \\ e^{-(t-1)} - e^{-(t+1)} & si \quad t > 1 \end{cases}$$

$$h(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)g(t-u)du = \begin{cases} 0 & si \quad t < -1 \\ 1 - e^{-(t+1)} & si \quad -1 \leq t \leq 1 \\ e^{-(t-1)} - e^{-(t+1)} & si \quad t > 1 \end{cases} \quad \text{ya que}$$

Si $t < -1$ $h(t) * g(t) = 0$ todas las integrales son cero figura 2.16



Si $-1 \leq t \leq 1$ $h(t)*g(t) = \int_{0}^{t+1} e^{-u}du = 1-e^{-(t+1)}$ lasotras integrales son cero figura 2.17

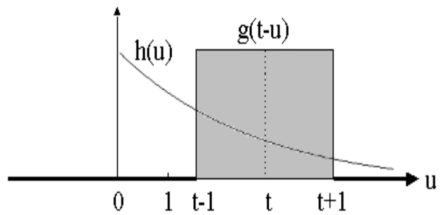


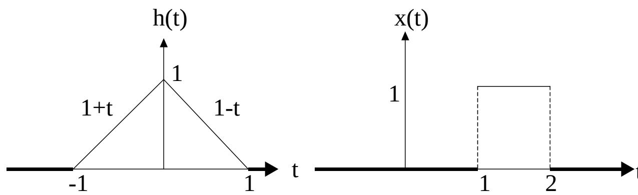
Si $t > 1$ figura 2.18 $h(t)*g(t) = \int_{t-1}^{t+1} e^{-u}du = e^{-(t-1)}-e^{-(t+1)}$ las otras integrales son cero

Ejemplo 2.62

Sean $h(t) = \begin{cases} 1+t & si \quad -1 < t < 0 \\ 1-t & si \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & en \quad otro\ caso \end{cases}$ y $x(t) = \begin{cases} 1 & si \quad 1 < t < 2 \\ 0 & en \quad otro\ caso \end{cases}$ *entonces*

Su gráfico se pude observar en la figura 2.19

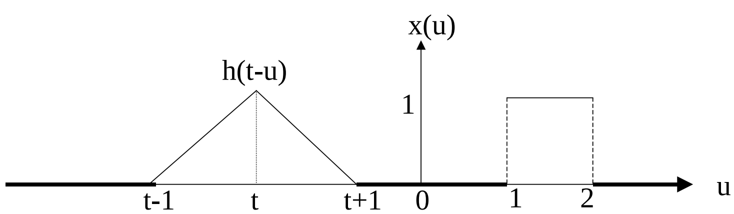




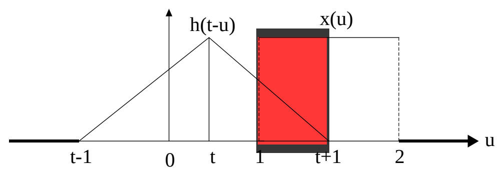
$$x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(u)h(t-u)du=\begin{cases}0 & si \quad t\leq 0\\ \frac{t^2}{2} & si \quad 0\leq t\leq 1\\ 3t-t^2-\frac{3}{2} & si \quad 1\leq t\leq 2\\ \frac{(3-t)^2}{2} & si \quad 2\leq t\leq 3\\ 0 & si \quad t>3\end{cases} \quad \text{pues}$$

En efecto

Si $t\leq 0$ $x(t)*h(t)=0$ ya que todas las integrales son cero. figura 2.20

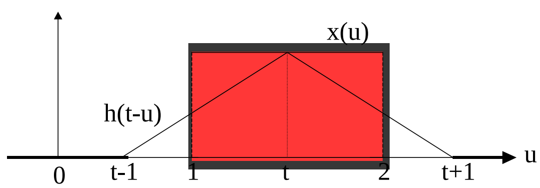


Si $0\leq t\leq 1$ figura 2.21 $x(t)*h(t)=\int_{1}^{t+1}(1+(t-u))du=\dfrac{t^2}{2}$

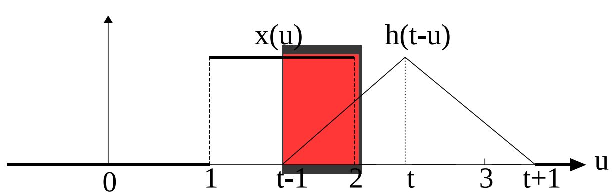


$$\text{Si} \quad 1 \leq t \leq 2 \quad \text{figura 2.22} \quad x(t) * h(t) = \int_1^t (1 - (t-u))du + \int_t^2 (1 + (t-u))du$$

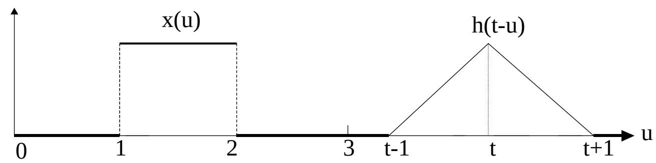
$$= 3t - t^2 - \frac{3}{2}$$



$$\text{Si} \quad 2 \leq t \leq 3 \quad \text{figura 2.23} \quad x(t) * h(t) = \int_{t-1}^{2} (1 - (t-u))du = \frac{(3-t)^2}{2}$$

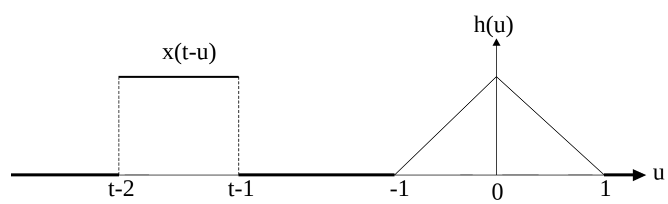


Si $t > 3$ figura 2.24 $x(t) * h(t) = 0$ todas las integrales son cero

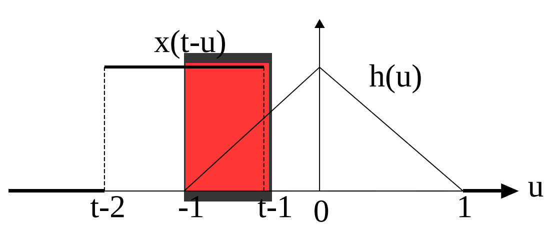


Ahora mostrar que $h(t) * x(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t \leq 0 \\ \frac{t^2}{2} & si \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 3t - t^2 - \frac{3}{2} & si \quad 1 \leq t \leq 2 \\ \frac{(3-t)^2}{2} & si \quad 2 \leq t \leq 3 \\ 0 & si \quad t > 3 \end{cases}$ pues

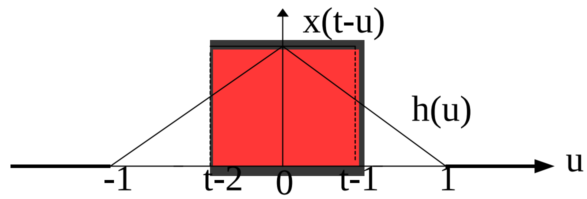
Si $t - 1 < -1,$ figura 2.25 $h(t) * x(t) = 0$ todas las integrales son cero



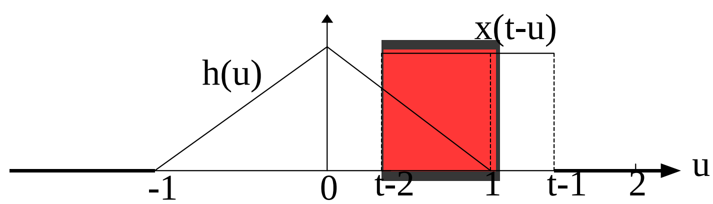
Si $-1 < t - 1 < 0$ figura 2.26 $h(t) * x(t) = \int\limits_{-1}^{t-1} (1+u)du = \dfrac{t^2}{2}$



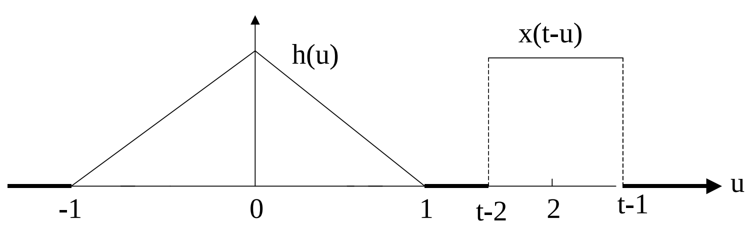
Si $0 < t - 1 < 1$ figura 2.27 $h(t) * x(t) = \int\limits_{t-2}^{0} (1+u)du + \int\limits_{0}^{t-1} (1-u)du = 3t - t^2 - \dfrac{3}{2}$



Si $1 < t-1 < 2$ figura 2.28 $h(t) * x(t) = \int_{t-2}^{1} (1-u)du = \dfrac{(3-t)^2}{2}$



Si $t-1 > 2$ figura 2.29 $h(t) * x(t) = 0$ todas las integrales son cero

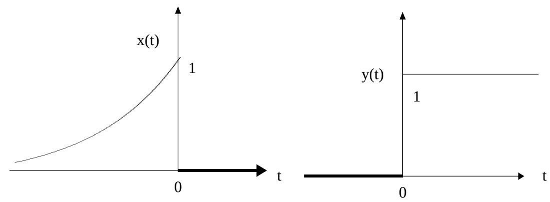


Ejemplo 2.63

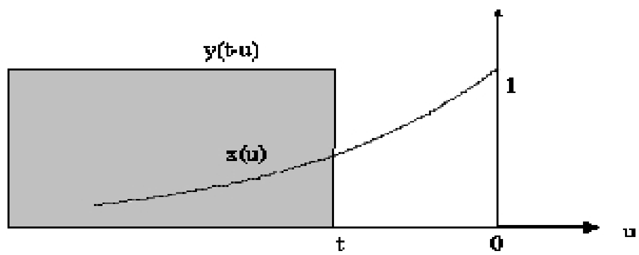
Sean $x(t) = e^t u(-t)$ *y* $y(t) = u(t)$ *entonces*

Su gráfico se pude observar en la figura 2.30

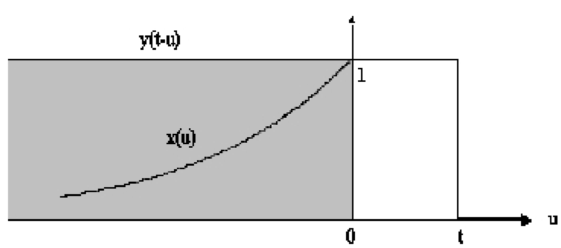
verificar que $x(t) * y(t) = \begin{cases} e^t & t \leq 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$



$$\text{Si } t \leq 0 \quad \text{figura 2.31} \quad x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^u du = e^t$$

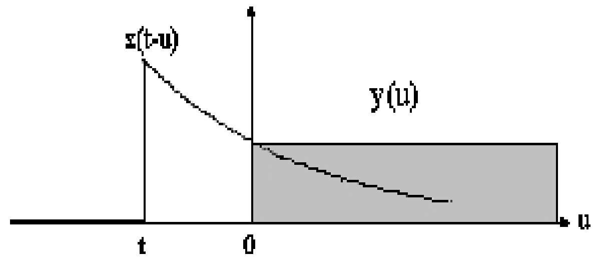


$$\text{Si } t > 0 \quad x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{0} e^u du = 1 \quad \text{figura 2.32}$$



$$\text{Si} \quad t \leq 0 \quad y(t) * x(t) = \int_{0}^{\infty} e^{t-u} du = e^t \quad \text{figura 2.33}$$

$$\text{Si} \quad t > 0 \qquad y(t) * x(t) = \int_{t}^{\infty} e^{t-u} du = 1 \text{ figura 2.34}$$



Ejemplo 2.64 *Hallar la transformada inversa de*

$$F(w) = \frac{1}{2 - w^2 + 3iw}$$

En efecto :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{2 - w^2 + 3iw}\right) &= \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{2+iw}.\frac{1}{1+iw}\right) = \mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}\left(e^{-2t}u(t)\right)\mathcal{F}\left(e^{-t}u(t)\right)\right) \\
&= \mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}(e^{-2t}u(t) * e^{-t}u(t))\right) = e^{-2t}u(t) * e^{-t}u(t) = \left(e^{-t} - e^{-2t}\right)u(t)
\end{aligned}$$

Ejercicio 4

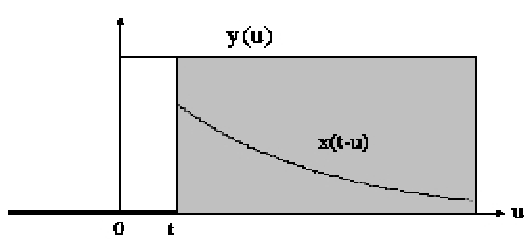
I. Hallar la transformada de Fourier de las funciones siguientes

1)

a) $f(t) = 2 - 3\delta(t-5) + 3\cos 2t\delta'(t-2) + \delta''(t)e^{3t} + \frac{d}{dt}\left(u(t)e^{-3t}\right)$

b) $g(t) = e^{-t}\left(u(t) - u(t-6)\right) + \frac{1}{4+it} - \frac{\sin t}{1+t^2} + \frac{1}{9+(t-2)^2} - \frac{\sin 3(t-1)}{t-1} + t^2$

c) $h(t) = te^{-t}u(t)\cos 4t + t^2\sin 5t + e^{-t}u(t) * e^{-3|t|} + t\left(u(t+1) - u(t-1)\right)$



2)

$$h(t) = f(a(t-b)) + tf(3+t) + (1-t)\, f(1-t) + (t-2)\, f(2t) - t\frac{df}{dt}$$

3) Sea $f(t) = \begin{cases} 0 & si & t < -2 \\ 2t+4 & si & -2 \leq t < -1 \\ 2 & si & -1 \leq t < 1 \\ 4-2t & si & 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & si & t > 2 \end{cases}$

a) Mostrar que

$$\begin{aligned} f(t) &= [u(t+2) - u(t+1)]\,(2t+4) + [u(t+1) - u(t-1)]\,2 + \\ & \quad [u(t-1) - u(t-2)]\,(4-2t) \end{aligned}$$

b) Mostrar que

$$\begin{aligned} f''(t) &= (2t+4)\,\delta'(t+2) - (2t+4)\,\delta'(t+1) + 4\delta(t+2) - 4\delta(t+1) + 2\delta'(t+1) \\ & \quad -2\delta'(t-1) + (4-2t)\,\delta'(t-1) - (4-2t)\,\delta'(t-2) + 4\delta(t-2) - 4\delta(t-1) \end{aligned}$$

c)

$$(iw)^2\, F(w) = 2e^{2iw} + 2e^{-2iw} - 2e^{iw} - 2e^{-iw} \quad \text{por lo tanto}$$

$$F(w) = \frac{2e^{2iw} + 2e^{-2iw} - 2e^{iw} - 2e^{-iw}}{(iw)^2}$$

d)

$$f'(t) = [u(t+2) - u(t+1)]\,2 + [u(t-1) - u(t-2)]\,(-2)$$

$$f''(t) = 2\delta(t+2) - 2\delta(t+1) + 2\delta(t-2) - 2\delta(t-1) \text{ por lo tanto}$$

$$F(w) = \frac{2e^{2iw} + 2e^{-2iw} - 2e^{iw} - 2e^{-iw}}{(iw)^2}$$

Las mismas preguntas para los numerales 4,5,6 y 7

4) $f(t) = \begin{cases} 0 & si & t < -2 \\ -t-2 & si & -2 \leq t < -1 \\ t & si & -1 \leq t < 1 \\ 2-t & si & 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & si & t > 2 \end{cases}$

5) $g(t)=\begin{cases} 0 & si & t<-2 \\ -2 & si & -2\le t<-1 \\ 1 & si & -1\le t<1 \\ -1 & si & 1\le t\le 2 \\ 0 & si & t>2 \end{cases}$

6) $f(t)=\begin{cases} 0 & si & t<0 \\ t & si & 0\le t<2 \\ 0 & si & t>2 \end{cases}$

7) $g(t)=\begin{cases} 0 & si & t<-2 \\ 2+t & si & -2\le t<-1 \\ 1 & si & -1\le t<1 \\ 2-t & si & 1\le t\le 2 \\ 0 & si & t>2 \end{cases}$

II. Hallar la transformada inversa de Fourier

1)

i) $F(w)=\dfrac{\sin 3w}{w(2+iw)}$ ii) $F(w)=\dfrac{3}{w+1+i}$ iii) $F(w)=\dfrac{1}{w^2-2iw-1}$

iv) $F(w)=\dfrac{e^{(3w-6)i}}{5-(2-w)\,i}$ v) $F(w)=\dfrac{12}{16+(w-2)^2}+\dfrac{12}{16+(w+2)^2}$

vi) $F(w)=\cos w$ vii) $F(w)=\dfrac{e^{(20-4w)i}}{3-(5-w)\,i}$ viii) $F(w)=\dfrac{wi}{(4+iw)\,(2+iw)}$

ix) $F(w)=\dfrac{2\sin 5\,(w-3)}{w-3}$ X) $F(w)=\dfrac{2\sin 5w}{w}$

xi)$F(w)=\dfrac{2\sin 5w}{w\,(3+iw)}$ xii) $F(w)=\dfrac{1}{(3+iw)^2}$

III. Mostrar la veracidad de los siguientes resultados

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} t^2e^{-\sin t}\cos 2t\delta(2t-2\pi)dt=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} t^2e^{-\sin t}\cos 2t\delta(t-\pi)dt=\dfrac{\pi^2}{2}$

2. $\int\limits_{0}^{\infty}\cos(t+1)\delta'(t-2)dt=-\frac{d}{dt}\left(\cos(t+1)\right)_{t=2}=\sin 3$

3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(t+3)e^{-t}dt=e^3$

4. $\int\limits_{1}^{100} \delta(t-10)\ln t dt = \ln 10$

5. $\int\limits_{-3}^{5} \delta(t-10)t^2 dt = 0$

6. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t-1)\left(t^3+4\right) dt = 5$

7. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)\sin t dt = -\left(\cos t\right)_{t=0} = -1$

8. $\int\limits_{-3}^{20} \delta(t)\left(3t^2+2t+5\right) dt = 5$

9. $\int\limits_{3}^{20} \delta(t)\left(3t^2+2t+5\right) dt = 0$

10. $x(n) = 2^n u(-n) \qquad h(n) = u(n)$ entonces

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) * h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{0} 2^k = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = 2 \text{ si } n \geq 0 \text{ y}$$

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) * h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{n} 2^k = \sum_{k=\infty}^{-n} 2^{-k} = \sum_{k=\infty}^{0} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-n} \\ &= 2^n \sum_{k=\infty}^{0} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2^n \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2^{n+1} \text{ si } n < 0 \end{aligned}$$

11.

$$x(t) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 < t < T \\ 0 & en \quad otro \text{ caso} \end{cases} \qquad h(t) = \begin{cases} t & si \quad 0 < t < 2T \\ 0 & en \quad otro \text{ caso} \end{cases} \quad \text{entonces}$$

$$x(t)*h(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(u)h(t-u)du = \begin{cases} 0 & si \quad t < 0 \\ \int\limits_{0}^{t} (t-u)\, du = \frac{t^2}{2} & si \quad 0 \leq t < T \\ \int\limits_{0}^{T} (t-u)\, du = tT - \frac{T^2}{2} & si \quad T \leq t < 2T \\ \int\limits_{t-2T}^{T} (t-u)\, du = tT + \frac{3T^2}{2} - \frac{t^2}{2} & si \quad 2T \leq t < 3T \\ 0 & si \quad t > 3T \end{cases}$$

$$h(t)*x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(u)x(t-u)du=\begin{cases}0 & si \quad t<0\\ \int_{0}^{t}udu=\frac{t^2}{2} & si \quad 0\le t<T\\ \int_{t-T}^{t}udu=tT-\frac{T^2}{2} & si \quad T\le t<2T\\ \int_{t-T}^{2T}udu=tT+\frac{3T^2}{2}-\frac{t^2}{2} & si \quad 2T\le t<3T\\ 0 & si \quad t>3T\end{cases}$$

12

$$x(t)=\begin{cases}1 & si \quad |t|\le 1\\ 0 & en \quad otro\text{ caso}\end{cases} \qquad h(t)=\begin{cases}t & si \quad 0\le t\le 3\\ 0 & en \quad otro\text{ caso}\end{cases} \quad \text{entonces}$$

$$x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(u)h(t-u)du=\begin{cases}0 & si \quad t<-1\\ \int_{-1}^{t}(t-u)du=\frac{t^2}{2}+t+\frac{1}{2} & si \quad -1\le t<1\\ \int_{-1}^{1}(t-u)du=2t & si \quad 1\le t<2\\ \int_{t-3}^{1}(t-u)du=4+t-\frac{t^2}{2} & si \quad 2\le t\le 4\\ 0 & si \quad t>4\end{cases}$$

$$h(t)*x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(u)x(t-u)du=\begin{cases}0 & si \quad t<-1\\ \int_{0}^{t+1}udu=\frac{t^2}{2}+t+\frac{1}{2} & si \quad -1\le t<1\\ \int_{t-1}^{t+1}udu=2t & si \quad 1\le t<2\\ \int_{t-1}^{3}udu=4+t-\frac{t^2}{2} & si \quad 2\le t\le 4\\ 0 & si \quad t>4\end{cases}$$

13.

$$x(t)=\begin{cases}1 & si \quad -1\le t\le 0\\ 0 & en \quad otro\text{ caso}\end{cases} \qquad h(t)=\begin{cases}1+t & si \quad -1\le t\le 0\\ 1 & si \quad 0<t\le 1\\ 0 & en \quad otro\text{ caso}\end{cases} \quad \text{entonces}$$

$$x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(u)h(t-u)du=\begin{cases}0 & si \quad t<-2\\ \int_{-1}^{t+1}(1+t-u)du=\frac{(t+2^2}{2} & si \quad -2\leq t<-1\\ \int_{-1}^{t}du+\int_{t}^{0}(1+t-u)\,du=1-\frac{t^2}{2} & si \quad -1\leq t<0\\ \int_{t-1}^{0}du=1-t & si \quad 0\leq t\leq 1\\ 0 & si \quad t>1\end{cases}$$

$$h(t)*x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(u)x(t-u)du=\begin{cases}0 & si \quad t<-2\\ \int_{-1}^{t+1}(1+u)du=\frac{(t+2^2}{2} & si \quad -2\leq t<-1\\ \int_{t}^{0}(1+t-u)\,du+\int_{0}^{t+1}du=1-\frac{t^2}{2} & si \quad -1\leq t<0\\ \int_{t}^{1}du=1-t & si \quad 0\leq t\leq 1\\ 0 & si \quad t>1\end{cases}$$

14.

$$x(t)=\begin{cases}2^{-t} & si \quad t\geq 0\\ 0 & en \quad t<0\end{cases}\qquad h(t)=\begin{cases}0 & si \quad t\geq 0\\ 3^{t} & en \quad t<0\end{cases}\quad \text{entonces}$$

$$x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(u)h(t-u)du=\begin{cases}\int_{0}^{\infty}2^{-u}3^{t-u}du=\frac{3^t}{\ln 6} & si \quad t<0\\ \int_{t}^{\infty}2^{-u}3^{t-u}du=\frac{2^{-t}}{\ln 6} & si \quad t\geq 0\end{cases}$$

$$h(t)*x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(u)x(t-u)du=\begin{cases}\int_{-\infty}^{t}2^{-(t-u)}3^{u}du=\frac{3^t}{\ln 6} & si \quad t<0\\ \int_{-\infty}^{0}2^{-(t-u)}3^{u}du=\frac{2^{-t}}{\ln 6} & si \quad t\geq 0\end{cases}$$

15.

$$x(t)=e^{2t}u(-t)\qquad h(t)=u(t-3)\quad \text{entonces}$$

$$x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(u)h(t-u)du=\begin{cases}\int_{-\infty}^{t-3}e^{2u}du=\frac{1}{2}e^{2(t-3)} & si \quad t<3\\ \int_{-\infty}^{0}e^{2u}du=\frac{1}{2} & si \quad t\geq 3\end{cases}$$

$$h(t)*x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(u)x(t-u)du=\begin{cases}\int_{3}^{\infty}e^{2(t-u)}du=\frac{1}{2}e^{2(t-3)} & si \quad t<3\\ \int_{t}^{\infty}e^{2(t-u)}du=\frac{1}{2} & si \quad t\geq 3\end{cases}$$

16.

$$x(t)=e^{-t}u(t) \qquad h(t)=u(t) \text{ entonces}$$

$$x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(u)h(t-u)du=\begin{cases}0 & si \quad t<0\\ \int_{0}^{t}e^{-u}du=1-e^{-t} & si \quad t\geq 0\end{cases}$$

$$h(t)*x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(u)x(t-u)du=\begin{cases}0 & si \quad t<0\\ \int_{0}^{t}e^{-(t-u)}du=1-e^{-t} & si \quad t\geq 0\end{cases}$$

17.

$$h(t)=\delta(t+2)+2\delta(t+1) \qquad x(t)=\begin{cases}1+t & si & 0\leq t\leq 1\\ 2-t & si & 1<t\leq 2\\ 0 & en & otro \text{ caso}\end{cases} \quad \text{entonces}$$

$$\begin{aligned}x(t)*h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty}x(u)h(t-u)du=\int_{-\infty}^{\infty}h(u)x(t-u)du\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}(\delta(u+2)+2\delta(u+1))x(t-u)du\\ &= x(t+2)+2x(t+1)=\begin{cases}t+3 & si & -2<t\leq -1\\ t+4 & si & -1\leq t\leq 0\\ 2-2t & si & 0\leq t\leq 1\\ 0 & en & \text{otro caso}\end{cases}\end{aligned}$$

18.

$$h(t)=e^{-3t}u(t) \qquad x(t)=u(t-3)-u(t-5) \text{ entonces}$$

$$x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(u)h(t-u)du=\begin{cases}\frac{1-e^{-3(t-3)}}{3} & si & 3<t\leq 5\\ \frac{(1-e^{-6})e^{-3(t-5)}}{3} & si & t>5\\ 0 & si & t\leq 3\end{cases}$$

19.

$$h(t) = e^{-3t}u(t) \qquad x(t) = u(t-3) - u(t-5) \ \text{ entonces}$$

$$\begin{aligned} x'(t) * h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x'(u)h(t-u)du = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\delta(u-3) - \delta(u-5)\right) e^{-3(t-u)}u(t-u)du \\ &= e^{-3(t-3)}u(t-3) - e^{-3(t-5)}u(t-5) \end{aligned}$$

20.

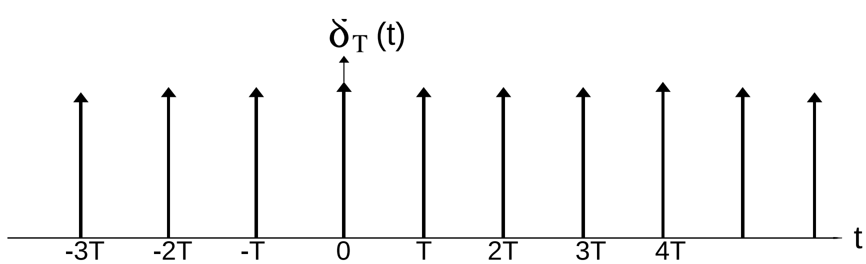
$$x(t) = \begin{cases} 1 & si \quad |t| \leq 3 \\ 0 & en \quad |t| > 3 \end{cases} \qquad h(t) = \begin{cases} e^{-2t} & si \quad t \geq 0 \\ 0 & si \quad t < 0 \end{cases} \ \text{ entonces}$$

$$x(t)*h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)h(t-u)du = \begin{cases} 0 & si \quad t < -3 \\ \int_{-3}^{t} e^{-2(t-u)}du = \frac{(1-e^{-2(t+3)}}{2} & si \quad -3 < t < 3 \\ \int_{-3}^{3} e^{-2(t-u)}du = \frac{e^{-2(t-3)}-e^{-2(t+3)}}{2} & si \quad t \geq 3 \end{cases}$$

$$h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)x(t-u)du = \begin{cases} 0 & si \quad t < -3 \\ \int_{0}^{t+3} e^{-2u}du = \frac{(1-e^{-2(t+3)}}{2} & si \quad -3 < t < 3 \\ \int_{t-3}^{t+3} e^{-2u}du = \frac{e^{-2(t-3)}-e^{-2(t+3)}}{2} & si \quad t \geq 3 \end{cases}$$

2.2.11 Transformada de fourier del tren infinito de impulso

Consideremos el tren infinito de impulsos figura 7.36



$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$$ El periódo es T=2L, entonces la serie de Fourier es

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{T} \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) \quad \text{ya que}$$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \delta_T(t)dt = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t)dt = \frac{2}{T} \\
a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \delta_T(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t)\cos\frac{2n\pi t}{T}dt = \frac{2}{T} \\
b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \delta_T(t)\sin\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t)\sin\frac{2n\pi t}{T}dt = 0
\end{aligned}$$

La serie de Fourier compleja viene dada por

$$\begin{aligned}
\delta_T(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\frac{n\pi i t}{L}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{\frac{n\pi i t}{L}} \\
\text{pues } \; C_n &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} \delta_T(t) e^{-\frac{n\pi i t}{L}} dt = \\
&= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-\frac{2n\pi i t}{T}} dt = \frac{1}{T} \\
&\quad \text{y la transformada de Fourier viene dada por} \\
\mathcal{F}\left(\delta_T(t)\right) &= \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(w - \frac{2n\pi}{T}\right) \\
\text{ya que } \mathcal{F}\left(1\right) &= 2\pi\delta(w) \;\; \text{y } \mathcal{F}\left(f(t)e^{ait}\right) = F(w-a)
\end{aligned}$$

Capítulo 3

Transformada Zeta

3.1 Generalidades.

Recordemos que si f(t) es una función continua, la transformada de Fourier esta dada por

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt$$

y si f es una función discreta

$$F(w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)e^{-iwk}$$

corresponde a la transformada de Fourier en el tiempo discreto para $|z| = 1$ si $z = e^{-iw}$ con w real y de manera general, cuando $|z|$ no está restringida a la unidad, la sumatoria se conoce como la transformada Zeta de f(k).
La transformada Zeta es un procedimiento matemático que consiste en crear una función analítica a partir de una sucesión de números .El vehículo que permite crear la función es una serie de Laurent cuyos coeficientes son los elementos de la sucesión y se aplica a una variedad de fenómenos modelables mediante ecuaciones en diferencia , en el procesamiento de señales y sistemas.

Definición 6 *La transformda Zeta de una función discreta $x(k)$ se nota por $Z(x(k)) = X(z)$ y se define por*

$$Z\left(x(k)\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k} = X(z)$$

$$y \qquad Z^{-1}\left(X(z)\right) = x(k)$$

donde z es una variable compleja

Al igual que en la transformada de Laplace, existe la transformada unilateral y la transformada bilateral. En este escrito trabajaremos con la tranfomada unilateral, es decir, vamos a considerar que

$$x(k) = 0 \qquad si \qquad k < 0$$

Ejemplo 3.1 *Hallar la transformada Zeta de*

$$x(k) = 1^k$$

En efeto :

$$Z\left(1^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} 1^k.z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(z^{-1}\right)^k = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \qquad \left|z^{-1}\right| < 1, \text{ es decir, } |z| > 1$$

y

$$Z^{-1}\left(\frac{z}{z-1}\right) = 1$$

Ejemplo 3.2 *Hallar la transformada Zeta de $x(k)$ si*

$$si\ x(k) = \begin{cases} \{1,2,3,4\} & 0 \leq k \leq 3 \\ 0 & k \geq 4 \end{cases}$$

En efecto :

$$Z(x(k)) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3}$$

y

$$Z^{-1}\left(1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3}\right) = \begin{cases} \{1,2,3,4\} & 0 \leq k \leq 3 \\ 0 & k \geq 4 \end{cases}$$

Ejemplo 3.3 *Hallar la transformada Zeta de*

$$x(k) = e^{ak}$$

En efecto :

$$Z\left(e^{ak}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{ak}.z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^a z^{-1}\right)^k = \frac{1}{1-e^a z^{-1}} = \frac{z}{z-e^a} \quad si \ \left|e^a z^{-1}\right| < 1, \ \text{es decir,} \ |z| > |e^a|$$

y

$$Z^{-1}\left(\frac{z}{z-e^a}\right) = e^{ak}$$

Ejemplo 3.4 *Hallar la transformada Zeta de*

$$x(k) = e^{-ak}$$

En efecto :

$$Z\left(e^{-ak}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ak}.z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-a}z^{-1}\right)^k = \frac{1}{1-e^{-a}z^{-1}} = \frac{z}{z-e^{-a}} \quad si \ |z| > \left|e^{-a}\right|$$

y

$$Z^{-1}\left(\frac{z}{z-e^{-a}}\right) = e^{-ak}$$

Ejemplo 3.5 *Hallar la transformada Zeta de*

$$x(k) = a^k$$

En efecto:

$$Z\left(a^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(az^{-1}\right)^k = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a} \quad si \quad |z| > |a|$$

y

$$Z^{-1}\left(\frac{z}{z-a}\right) = a^k$$

$$En\ particular, \quad Z\left(1^k\right) = \frac{z}{z-1}, \quad Z\left((-1)^k\right) = \frac{z}{z+1}, \quad Z\left((-2)^k\right) = \frac{z}{z+2}$$

Ejemplo 3.6 *Hallar la transformada inversa de*

$$X(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}$$

En efecto : Como

$$X(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} \quad entonces \quad Z^{-1}(X(z)) = x(k) = \begin{cases} 1^k & si \quad 0 \le k \le 3 \\ 0 & si \quad k \ge 4 \end{cases}$$

Ejemplo 3.7 *Hallar la transformada Zeta de*

$$x(k) = \delta(k-a)$$

En efecto :

$$Z(\delta(k-a)) = \sum_{k=0}^{\infty}\delta(k-a)z^{-k} = z^{-a} \qquad y \qquad Z(\delta(k)) = \sum_{k=0}^{\infty}\delta(k)z^{-k} = z^0 = 1$$

Ejemplo 3.8 *Hallar la transformada inversa de*

$$X(z) = \sqrt{z}\sin\frac{1}{\sqrt{z}}$$

En efecto :

$$\sqrt{z}\sin\frac{1}{\sqrt{z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{z}}{(2n+1)!}\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{\frac{1}{2}}\left(z^{-\frac{1}{2}}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{-n}}{(2n+1)!}$$

$$\textit{por lo tanto}\quad Z\left(\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right) = \sqrt{z}\sin\frac{1}{\sqrt{z}}$$

y

$$Z^{-1}\left(\sqrt{z}\sin\frac{1}{\sqrt{z}}\right) = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$$

Ejemplo 3.9

$$\cos\frac{1}{\sqrt{z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{-n}$$

por lo tanto

$$Z\left(\frac{(-1)^n}{(2n)!}\right) = \cos\frac{1}{\sqrt{z}} \quad y \quad \textit{así}\ Z^{-1}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{z}}\right) = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$$

Ejemplo 3.10

$$e^{az^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(az^{-1})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n z^{-n}}{n!}\ \ \textit{entonces}\ Z\left(\frac{a^n}{n!}\right) = e^{az^{-1}}$$

$$\textit{por lo tanto}\quad Z^{-1}\left(e^{az^{-1}}\right) = \frac{a^n}{n!}$$

3.2 Algunas propiedades

1. Sea $Z(x(k)) = X(z)$ y $Z(y(k)) = Y(z)$ entonces

$$Z\left(ax(k) \pm by(k)\right) = aZ(x(k)) \pm bZ(y(k)) = aX(z)) \pm bY(z) \ \text{ y}$$

$$Z^{-1}\left(aX(z)) \pm bY(z)\right) = ax(k) \pm by(k) = aZ^{-1}(X(z)) \pm bZ^{-1}(Y(z))$$

En efecto :

$$\begin{aligned} Z\left(ax(k) \pm by(k)\right) &= \sum_{k=0}^{\infty}(ax(k) \pm by(k))z^{-k} = \\ &= a\sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} \pm b\sum_{k=0}^{\infty} y(k)z^{-k} = aX(z) \pm bY(z) \end{aligned}$$

Ejemplo 3.11 *Hallar la transformada Zeta de*

$$x(k) = \sin ak$$

En efecto :

$$\begin{aligned} Z\left(\sin ak\right) &= Z\left(\frac{e^{aki} - e^{-aki}}{2i}\right) = \frac{1}{2i}\left[Z\left(e^{aki}\right) - Z\left(e^{-aki}\right)\right] = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{1 - e^{ai}z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-ai}z^{-1}}\right] \\ &= \frac{1}{2i}\left[\frac{z}{z - e^{ai}} - \frac{z}{z - e^{-ai}}\right] = \frac{1}{2i}\left(\frac{z(z - e^{-ai}) - z(z - e^{ai})}{(z - e^{ai})(z - e^{-ai})}\right) = \\ &= \frac{1}{2i}\left(\frac{z\left(e^{ai} - e^{-ai}\right)}{z^2 - z\left(e^{ai} + e^{-ai}\right) + 1}\right) = \left(\frac{z\frac{\left(e^{ai} - e^{-ai}\right)}{2i}}{z^2 - 2z\frac{\left(e^{ai} + e^{-ai}\right)}{2} + 1}\right) \\ &= \frac{z\sin a}{z^2 - 2z\cos a + 1} \qquad |z| > 1 \quad \left(\left|e^{ai}z^{-1}\right| < 1 \quad y \quad \left|e^{-ai}z^{-1}\right| < 1\right) \end{aligned}$$

y

$$Z^{-1}\left(\frac{z\sin a}{z^2 - 2z\cos a + 1}\right) = \sin ak$$

En forma análoga mostrar que

$$Z\left(\cos ak\right) = \frac{z^2 - z\cos a}{z^2 - 2z\cos a + 1} \quad |z| > 1$$

En efecto :

$$\begin{aligned} Z\left(\cos ak\right) &= Z\left(\frac{e^{aki} + e^{-aki}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{z}{z - e^{ai}} + \frac{z}{z - e^{-ai}}\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{z(z - e^{-ai}) + z(z - e^{ai})}{(z - e^{ai})(z - e^{-ai})}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{z^2 - z\left(e^{ai} + e^{-ai}\right)}{z^2 - z\left(e^{ai} + e^{-ai}\right) + 1}\right) = \\ &= \frac{z^2 - z\cos a}{z^2 - 2z\cos a + 1} \quad |z| > 1 \end{aligned}$$

y

$$Z^{-1}\left(\frac{z^2 - z\cos a}{z^2 - 2z\cos a + 1}\right) = \cos ak$$

Ejemplo 3.12 *Mostrar que*

$$Z\left(\sinh ak\right) = \frac{z \sinh a}{z^2 - 2z\cosh a + 1}$$

En efecto :

$$\begin{aligned} Z\left(\sinh ak\right) &= Z\left(\frac{e^{ak}-e^{-ak}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-e^{a}z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-a}z^{-1}}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{z}{z-e^{a}} - \frac{z}{z-e^{-a}}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{z\left(z-e^{-a}\right) - z(z-e^{a})}{\left(z-e^{a}\right)\left(z-e^{-a}\right)}\right] = \frac{z\left(\frac{e^{a}-e^{-a}}{2}\right)}{z^2 - 2z\left(\frac{e^{a}+e^{-a}}{2}\right)+1} = \frac{z\sinh a}{z^2-2z\cosh a+1} \end{aligned}$$

y

$$Z^{-1}\left(\frac{z\sinh a}{z^2-2z\cosh a+1}\right) = \sinh ak$$

En forma análoga mostrar que

$$Z\left(\cosh ak\right) = \frac{z(z-\cosh a)}{z^2-2z\cosh a+1}$$

$$y \quad que \quad Z^{-1}\left(\frac{z(z-\cosh a)}{z^2-2z\cosh a+1}\right) = \cosh ak$$

2. Si $Z(x(k)) = X(z)$ entonces

$$Z(x(k+m)) = z^m X(z) - z^m x(0) - z^{m-1}x(1) - z^{m-2}x(2) - ... - zx(m-1) \quad \text{si } m > 0$$

En efecto :como

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}$$

entonces multiplicando por z^m ambos miembros de la igualdad anterior, se obtiene que

$$\begin{aligned} X(z)z^m &= \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k+m} = \\ &= \sum_{k=-m}^{\infty} x(k+m)z^{-k} = z^m x(0) + z^{m-1}x(1) + ... + zx(m-1) + \sum_{k=0}^{\infty} x(k+m)z^{-k} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$z^m X(z) - z^m x(0) - z^{m-1}x(1) - ... - zx(m-1) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k+m)z^{-k} = Z(x(k+m))$$

Ejemplo 3.13 *Mostrar que*

$$Z\left(a^{k+1}\right)=\frac{az}{z-a},\quad x(k)=a^k$$

En efecto :

$$Z\left(a^{k+1}\right)=zX(z)-zx(0)=z\left(\frac{1}{1-az^{-1}}\right)-z=\frac{z^2}{z-a}-z=\frac{az}{z-a}$$

Ya que

$$X(z)=Z\left(x(k)\right)=Z\left(a^k\right)=\frac{1}{1-az^{-1}}\qquad y\quad x(0)=a^0=1$$

Ejemplo 3.14 *Mostrar que*

$$Z\left(e^{-2(k+2)}\right)=z^2\left(\frac{1}{1-e^{-2}z^{-1}}\right)-z^2.1-z.e^{-2}$$

En efecto : Como $x(k)=e^{-2k}$ *y*

$$Z\left(e^{-2k}\right)=\frac{1}{1-e^{-2}z^{-1}}$$

entonces

$$\begin{aligned}Z\left(e^{-2(k+2)}\right) &= z^2\left(\frac{1}{1-e^{-2}z^{-1}}\right)-z^2x(0)-zx(1)=\\ &= z^2\left(\frac{1}{1-e^{-2}z^{-1}}\right)-z^2.1-z.e^{-2}\end{aligned}$$

Ejemplo 3.15 *Mostrar que*

$$Z\left(\frac{a^{k+1}-b^{k+1}}{a-b}\right)=\frac{z^2}{(z-a)(z-b)}$$

En efecto :

$$Z\left(\frac{a^{k+1}-b^{k+1}}{a-b}\right)=\frac{1}{a-b}\left[Z\left(a^{k+1}\right)-Z\left(b^{k+1}\right)\right]=\frac{1}{a-b}\left[\frac{az}{z-a}-\frac{bz}{z-b}\right]$$

$$=\frac{1}{a-b}\left[\frac{az(z-b)-bz(z-a)}{(z-a)(z-b)}\right]=\frac{z^2\left(a-b\right)}{(a-b)\left(z-a\right)(z-b)}=\frac{z^2}{(z-a)(z-b)}$$

por lo tanto

$$Z^{-1}\left(\frac{z^2}{(z-a)(z-b)}\right)=\frac{a^{k+1}-b^{k+1}}{a-b}$$

Ejemplo 3.16 *Solucionar la ecuación*

$$x(k+2)+3x(k+1)+2x(k)=0 \quad x(0)=0,\ x(1)=1$$

En efecto : Como

$$\begin{aligned} Z(x(k+2)) &= z^2X(z)-z^2x(0)-zx(1)=z^2X(z)-z \\ Z(x(k+1)) &= zX(z)-zx(0)=zX(z) \\ Z(x(k)) &= X(z) \qquad \textit{entonces} \end{aligned}$$

$$Z(x(k+2)+3x(k+1)+2x(k))=Z(0)=0 \quad \textit{y como}$$

$$Z(x(k+2))+Z(3x(k+1))+Z(2x(k))=z^2X(z)-z+3zX(z)+2X(z)=0$$

por lo tanto factorizando X(z) se tiene

$$X(z)\left(z^2+3z+2\right)=z$$

así

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{1}{z^2+3z+2}=\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z+2}$$

entonces

$$X(z)=\frac{z}{z+1}-\frac{z}{z+2}$$

luego

$$Z^{-1}\left(\frac{z}{z+1}-\frac{z}{z+2}\right)=(-1)^k-(-2)^k \quad \textit{es la solución}$$

3. Si $Z(x(k))=X(z)$ entonces

$$Z(x(k-m))=z^{-m}X(z) \quad \text{si} \quad m>0$$

Demostración (Ejercicio)

Ejemplo 3.17 *Como*

$$Z(e^{-k})=\frac{z}{z-e^{-1}}$$

entonces

$$a)\quad Z(e^{-(k-1)})=z^{-1}\left(\frac{z}{z-e^{-1}}\right)=\frac{1}{z-e^{-1}}$$

$$b)\ Z(e^{-(k-2)})=z^{-2}\left(\frac{z}{z-e^{-1}}\right)=\frac{1}{z(z-e^{-1})}$$

$$c)\quad Z(a^{k-1})=z^{-1}\left(\frac{z}{z-a}\right)=\frac{1}{z-a}$$

$$d)\quad Z(a^{k-3})\ =z^{-3}\left(\frac{z}{z-a}\right)=\frac{1}{z^2(z-a)}$$

Ejemplo 3.18 *Sea*

$$x(k)=\begin{cases} 1 & si \quad 0\leq k\leq 10 \\ 0 & \quad fuera \end{cases} \qquad y \quad y(k)=x(k)-x(k-1)$$

entonces mostrar que

$$Z(y(k))=\left(1-z^{-1}\right)\left(1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+...+z^{-10}\right)$$

En efecto :

$$\begin{aligned} Z(y(k)) &= Z\left(x(k)-x(k-1)\right)=Z\left(x(k)\right)-Z\left(x(k-1)\right)=X(z)-z^{-1}X(z) \\ &= \left(1-z^{-1}\right)X(z)=\left(1-z^{-1}\right)\left(1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+...+z^{-10}\right) \end{aligned}$$

4. Si $Z(x(k))=X(z)$ entonces

$$Z(e^{-ak}x(k))=X(ze^{a})$$

En efecto

$$Z(e^{-ak}x(k))=\sum_{k=0}^{\infty}x(k)e^{-ak}z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}x(k)\left(e^{a}z\right)^{-k}=X\left(e^{a}z\right)$$

Ejemplo 3.19 *Como*

$$Z(\sin ak)=\frac{z\sin a}{z^2-2z\cos a+1}$$

entonces

$$Z(e^{-k}\sin ak)=\frac{ez\sin a}{(ez)^2-2(ez)\cos a+1}$$

Como

$$Z(\cos ak)=\frac{z^2-z\cos a}{z^2-2z\cos a+1}$$

entonces

$$Z(e^{4k}\cos ak)=\frac{(e^{-4}z)^2-(e^{-4}z)\cos a}{(e^{-4}z)^2-2(e^{-4}z)\cos a+1}$$

Ejemplo 3.20 *Hallar la transformada Zeta de*

$$Z(\cos\pi k)$$

En efecto :

$$Z(\cos\pi k)=\frac{z^2-z\cos\pi}{z^2-2z\cos\pi+1}=\frac{z^2+z}{z^2+2z+1}=\frac{z(z+1)}{(z+1)^2}=\frac{z}{z+1} \quad \textit{entonces}$$

$$Z(e^{k}\cos\pi k)=\frac{e^{-1}z}{(e^{-1}z+1)}$$

5. Si $Z(x(k)) = X(z)$ entonces

$$Z(a^k x(k)) = X(\frac{z}{a})$$

En efecto :

$$Z(a^k x(k)) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)(a^{-1}z)^{-k} = X(a^{-1}z) = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

Ejemplo 3.21 *Verificar que*

$$a)\quad Z(2^k \cos \pi k) = \frac{z}{z+2}$$

En efecto :

$$\textit{Como}\quad Z(\cos \pi k) = \frac{z}{(z+1)}\quad \textit{entonces}\quad Z(2^k \cos \pi k) = \frac{\frac{z}{2}}{\left(\frac{z}{2}+1\right)} = \frac{z}{z+2}$$

luego

$$Z^{-1}\left(\frac{z}{z+2}\right) = 2^k \cos \pi k$$

$$b)\qquad Z(3^k.1) = \frac{z}{z-3}$$

$$\text{Como}\quad Z(1) = \frac{z}{z-1}\quad \text{entonces}\quad Z(3^k.1) = \frac{\frac{z}{3}}{\frac{z}{3}-1} = \frac{z}{z-3}\quad \text{por lo tanto}$$

$$Z^{-1}\left(\frac{z}{z-3}\right) = 3^k.1$$

$$c)\qquad Z(b^k \cos ak) = \frac{z^2 - zb\cos a}{z^2 - 2bz\cos a + b^2}$$

$$\text{Como } Z(\cos ak) = \frac{z^2 - z\cos a}{z^2 - 2z\cos a + 1}\quad \text{entonces}$$

$$Z(b^k \cos ak) = \frac{\left(\frac{z}{b}\right)^2 - \frac{z}{b}\cos a}{\left(\frac{z}{b}\right)^2 - 2\frac{z}{b}\cos a + 1} = \frac{z^2 - zb\cos a}{z^2 - 2bz\cos a + b^2}\quad \text{por lo tanto}$$

$$Z^{-1}\left(\frac{z^2 - zb\cos a}{z^2 - 2bz\cos a + b^2}\right) = b^k \cos ak$$

6. Si $Z(x(k)) = X(z)$ entonces

$$Z(k.x(k)) = -z\frac{d}{dz}\left(X(z)\right)$$

En efecto : Como

$$Z(x(k)) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} \quad \text{entonces} \quad \frac{d}{dz}\left(X(z)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)(-k)z^{-k-1} = \frac{1}{-z}\sum_{k=0}^{\infty} x(k)(k)z^{-k}$$

$$\text{luego } -z\frac{d}{dz}\left(X(z)\right) \ = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)(k)z^{-k} = Z(k.x(k))$$

Ejemplo 3.22

$$a) \quad Como \quad Z(1^k) = \frac{z}{z-1}$$

entonces

$$Z(k.1^k) = -z\frac{d}{dz}\left(X(z)\right) = -z\left(\frac{-1}{(z-1)^2}\right) = \frac{z}{(z-1)^2}$$

por lo tanto

$$Z^{-1}\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right) = x(k) = k$$

$$b) \ Como \ \ Z(k) = \frac{z}{(z-1)^2}$$

entonces

$$Z(k^2) = -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

por lo tanto

$$Z^{-1}\left(\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}\right) = k^2$$

En forma análoga

$$c) \ \ Z(k^3) = \frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$$

$$d) \ \ \textit{Aplicando la propiedad } Z(k.x(k)) = -z\frac{d}{dz}\left(X(z)\right) \quad \textit{se tiene que}$$

$$Z\left(\frac{k}{k!}\right) = Z\left(k.\frac{1}{k!}\right) = -z\frac{d}{dz}\left(e^{z^{-1}}\right) = -z\left(-z^{-2}e^{z^{-1}}\right) = z^{-1}e^{z^{-1}}$$

Ejemplo 3.23 *Hallar x(k) si*

$$X(z) = \ln\left(1 + z^{-1}\right)$$

En efecto :

$$\begin{aligned} Z(kx(k)) &= -z\frac{d}{dz}\left(X(z)\right) = -z\frac{d}{dz}\left(\ln\left(1+z^{-1}\right)\right) = -z\left(\frac{-z^{-2}}{1+z^{-1}}\right) = \frac{z^{-1}}{1+z^{-1}} = \\ &= 0 + z^{-1} - z^{-2} + z^{-3} - z^{-4} + ... = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}z^{-k} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$kx(k) = (-1)^{k+1} \quad y \quad x(k) = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

entonces

$$x(k) = \begin{cases} \frac{(-1)^{k+1}}{k} & si \quad k \geq 1 \\ 0 & si \quad k = 0 \end{cases}$$

7. La convolución

Sea $Z(x(k)) = X(z)$ y $Z(y(k)) = Y(z)$ entonces

$$Z(x(k) * y(k)) = X(z)Y(z)$$

$$Z^{-1}(X(z)Y(z)) = x(k) * y(k)$$

Ejemplo 3.24 *Verificar que*

$$Z\left(1^k * 1^k\right) = \frac{z^2}{(z-1)^2}$$

En efecto:

$$Z\left(1^k * 1^k\right) = Z\left(1^k\right)Z\left(1^k\right) = \frac{z}{(z-1)}.\frac{z}{(z-1)} = \frac{z^2}{(z-1)^2}$$

Además

$$Z^{-1}\left(\frac{z^2}{(z-1)^2}\right) = 1^k * 1^k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(yk-n) = \sum_{n=0}^{k} 1^n.1^{k-n} = \sum_{n=0}^{k} 1 = (k+1)1^k$$

por lo tanto

$$Z^{-1}\left(\frac{z^2}{(z-1)^2}\right) = (k+1)1^k$$

Ejemplo 3.25 *Verificar que*

$$Z\left(k * 2^k\right) = \frac{z^2}{(z-1)^2(z-2)}$$

En efecto :

$$Z(x(k) * y(k)) = Z\left(k * 2^k\right) = Z\left(k\right) Z\left(2^k\right) = \frac{z}{(z-1)^2} . \frac{z}{z-2} = \frac{z^2}{(z-1)^2(z-2)} \text{ entonces}$$

$$Z^{-1}\left(\frac{z^2}{(z-1)^2(z-2)}\right) = k * 2^k = \sum_{n=0}^{k} n.2^{k-n} = 2^{k+1} - k - 2$$

$$\text{pues como } \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad \text{entonces}$$

$$\sum_{k=0}^{n} kx^{k-1} = \frac{(1-x)\left(1-x^{n+1}\right)' - \left(1-x^{n+1}\right)(1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{(1-x)(-n-1)x^n + \left(1-x^{n+1}\right)}{(1-x)^2}$$

así

$$\sum_{k=0}^{n} kx^k = \left[\frac{(1-x)(-n-1)x^n + \left(1-x^{n+1}\right)}{(1-x)^2}\right] x$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^k &= \left[\frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)(-n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}{(1-\frac{1}{2})^2}\right]\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= 2\left(1-\frac{1}{2}\right)(-n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \\
&= -n2^{-n} - 2^{-n+1} + 2
\end{aligned}$$

así

$$x(k)*y(k) = k*2^k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(k-n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n.2^{k-n} \quad =$$

$$= \begin{cases} 0 & k < 0 \\ \sum\limits_{n=0}^{k} n.2^{k-n} = 2^k \sum\limits_{n=0}^{k} n.2^{-n} = \quad 2^k\left(-k2^{-k} - 2^{-k+1} + 2\right) = 2^{k+1} - k - 2 & k \geq 0 \end{cases}$$

Ejemplo 3.26

$$\textit{Sean}\ \ x(k)=\{1,2\}=\{x(0),x(1)\}\qquad y(k)=\{3,4\}=\{y(0),y(1)\}\ \ \textit{entonces}$$
$$X(z)=1+2z^{-1}\ \ \textit{y}\ \ Y(z)=3+4z^{-1}\ \textit{y así}$$
$$X(z)Y(z)=\left(1+2z^{-1}\right)\left(3+4z^{-1}\right)=3+10z^{-1}+8z^{-2}\ \ \textit{entonces}$$
$$Z^{-1}\left(X(z)Y(z)\right)=x(k)*y(k)=\{3,10,8\}=3\delta(k)+10\delta(k-1)+8\delta(k-2)$$

Ahora lo haremos por medio de la convolución

$$x(k)*y(k)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y(k-n)=x(0)y(k)+x(1)y(k-1)$$

los demás términos de la suma son cero, entonces
si $k=0$

$$x(0)*y(0)=x(0)y(0)+x(1)y(-1)=1.3+2.0=3$$

si $k=1$

$$x(1)*y(1)=x(0)y(1)+x(1)y(0)=1.4+2.3=10$$

si $k=2$

$$x(2)*y(2)=x(0)y(2)+x(1)y(1)+x(2)y(0)=1.0+2.4+0.3=8$$

por lo tanto

$$Z^{-1}\left(X(z)Y(z)\right)=x(k)*y(k)=\{3,10,8\}=3\delta(k)+10\delta(k-1)+8\delta(k-2)$$

Ejemplo 3.27

$$\textit{Sean}\ \ x(k)=\{1,2,0,-1,1\}\qquad y(k)=\{1,3,-1,-2\}\ \ \textit{entonces}$$
$$X(z)=1+2z^{-1}+0z^{-2}-z^{-3}+z^{-4}\ \ \textit{y}\ \ Y(z)=1+3z^{-1}-z^{-2}-2z^{-3}\ \textit{y así}$$
$$\begin{aligned}X(z)Y(z)\ &=\ \left(1+2z^{-1}+0z^{-2}-z^{-3}+z^{-4}\right)\left(1+3z^{-1}-z^{-2}-2z^{-3}\right)=\\ &=\ 1+5z^{-1}+5z^{-2}-5z^{-3}-6z^{-4}+4z^{-5}+z^{-6}-2z^{-7}\ \textit{entonces}\end{aligned}$$
$$Z^{-1}\left(X(z)Y(z)\right)=x(k)*y(k)=\{1,5,5,-5,-6,4,1,-2\}=$$
$$=\delta(k)+5\delta(k-1)+5\delta(k-2)-5\delta(k-3)-6\delta(k-4)+4\delta(k-5)+\delta(k-6)-2\delta(k-7)$$

Ahora lo haremos por medio de la convolución verificar que

$$x(k)*y(k)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y(k-n)=$$
$$=x(0)y(k)+x(1)y(k-1)+x(2)y(k-2)+x(3)y(k-3)+x(4)y(k-4)=$$
$$=\{1,5,5,-5,-6,4,1,-2\}$$

8. Teorema del valor Inicial. Sea $Z(x(k)) = X(z)$ entonces

$$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z)$$

En efecto :

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + ... \text{ entonces}$$

$$\lim_{z\to\infty} X(z) = \lim_{z\to\infty}\{x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + ...\} = x(0)$$

Ejemplo 3.28

$$Z(x(k)) = Z(2^k) = \frac{z}{z-2} \quad \textit{entonces } x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{z}{z-2} = 1$$

9. Teorema del valor Final. Sea $Z(x(k)) = X(z)$ entonces

$$\lim_{k\to\infty} x(k) = \lim_{z\to 1} \left(1 - z^{-1}\right) X(z)$$

En efecto : Sea

$$Z(x(k)) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = X(z) \quad \text{y} \quad Z(x(k-1)) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k-1)z^{-k} = z^{-1}X(z)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} Z(x(k)) - Z(x(k-1)) &= X(z) - z^{-1}X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} x(k-1)z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(x(k) - x(k-1))z^{-k} \text{ así que} \end{aligned}$$

$$X(z) - z^{-1}X(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(x(k) - x(k-1))z^{-k}$$

y tomando límite cuando z tiende a 1 en ambos lados de la igualdad se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{z\to 1} \left(1 - z^{-1}\right) X(z) &= \lim_{z\to 1} \sum_{k=0}^{\infty}(x(k) - x(k-1))z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}(x(k) - x(k-1)) \\ &= \lim_{k\to\infty} x(k) - x(-1) = \lim_{k\to\infty} x(k) \end{aligned}$$

Esta propiedad permite conocer el comportamiento de la función x(k) en el infinito a partir de su transformada sin necesidad de conocer la función

3.3 Algunos Métodos para hallar la inversa

3.3.1 Método de los residuos

Si

$$Z(x(k)) = X(z) \quad \text{entonces } x(k) = \sum_{\text{polos de } z^{k-1}X(z)} Re(z^{k-1}X(z)) \qquad \text{C}: \ |z| = R > 1$$

En efecto

$$Z(x(k)) = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(x(k)z^{-k} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + ... + x(k)z^{-k} + ...\text{entonces}$$

$$X(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + ... + x(k)z^{-k} + ...$$

y multiplicando ambos lados de la igualdad por z^{k-1} se obtiene

$$z^{k-1}X(z) = x(0)z^{k-1} + x(1)z^{k-2} + x(2)z^{k-3} + ... + x(k)z^{-1} + x(k+1)z^{-2} + ...$$

que es el desarrollo en serie de Laurent de la función $z^{k-1}X(z)$ en el polo $z = 0$. Sea C una circunferencia con centro en el origen tal que contenga todos los polos de $z^{k-1}X(z)$ entonces

$$\oint_C \left(z^{k-1}X(z)\right) dz \qquad .$$

$$= x(0)\oint_C z^{k-1}dz + x(1)\oint_C z^{k-2}dz + +x(2)\oint_C z^{k-3}dz + ... + x(k-1)\oint_C dz + x(k)\oint_C z^{-1}dz + ..$$

$$= x(k)\oint_C z^{-1}dz = 2\pi i x(k) \text{ (las demás integrales son cero)}$$

entonces

$$\begin{aligned} x(k) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \left(z^{k-1}X(z)\right) dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i}.2\pi i \sum_{\text{polos de } z^{k-1}X(z)} Re(z^{k-1}X(z)) = \sum_{\text{polos de } z^{k-1}X(z)} Re(z^{k-1}X(z)) \end{aligned}$$

Ejemplo 3.29

$$Hallar\ \ x(k)\ \ si\ \ X(z) = \frac{z^2 - z}{(z-2)(z+3)}$$

En efecto :

$$X(z)z^{k-1} = \frac{(z^2-z)z^{k-1}}{(z-2)(z+3)} = \frac{(z-1)z^k}{(z-2)(z+3)}$$

tiene dos polos de orden 1 en $z = 2$ y en $z = -3$ luego

$$\begin{aligned} x(k) &= \lim_{z\to 2}(z-2)\frac{(z^2-z)z^{k-1}}{(z-2)(z+3)} + \lim_{z\to -3}(z+3)\frac{(z^2-z)z^{k-1}}{(z-2)(z+3)} = \\ &= \lim_{z\to 2}\frac{(z-1)z^k}{(z+3)} + \lim_{z\to -3}\frac{(z-1)z^k}{(z-2)} = \frac{2^k}{5} + \frac{4}{5}(-3)^k \end{aligned}$$

por lo tanto

$$x(k) = \frac{2^k}{5} + \frac{4}{5}(-3)^k$$

Ejemplo 3.30

$$Hallar\ \ x(k)\ \ si\ \ X(z) = \frac{z-2}{(z-4)(z+3)}$$

Observe

$$X(z)z^{k-1} = \frac{(z-2)z^{k-1}}{(z-4)(z+3)}$$

y que cuando $k = 0$, en $z = 0$, en $z = 4$ y en $z = -3$ hay polos de orden 1, luego para $k = 0$ se tiene

$$\begin{aligned} x(0) &= \lim_{z\to 0} z\frac{(z-2)z^{-1}}{(z-4)(z+3)} + \lim_{z\to -3}(z+3)\frac{z-2}{z(z-4)(z+3)} + \lim_{z\to 4}(z-4)\frac{z-2}{z(z-4)(z+3)} \\ &= \frac{1}{6} - \frac{5}{21} + \frac{2}{28} = 0 \end{aligned}$$

y para $k \neq 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} x(k) &= \lim_{z\to -3}(z+3)\frac{(z-2)z^{k-1}}{(z-4)(z+3)} + \lim_{z\to 4}(z-4)\frac{(z-2)z^{k-1}}{(z-4)(z+3)} = \\ &= \lim_{z\to -3}\frac{(z-2)z^{k-1}}{(z-4)} + \lim_{z\to 4}\frac{(z-2)z^{k-1}}{(z+3)} = \frac{5}{7}(-3)^{k-1} + \frac{2}{7}(4)^{k-1} \end{aligned}$$

entonces

$$x(k) = \begin{cases} 0 & si\ \ k = 0 \\ \frac{5}{7}(-3)^{k-1} + \frac{2}{7}(4)^{k-1} & si\ \ k \geq 1 \end{cases}$$

3.3.2 Método de Fracciones Parciales

Si se desea calcular

$Z^{-1}\left(\dfrac{p(z)}{q(z)}\right)$ se expresa (algunas veces) en fracciones parciales no la expresión $\dfrac{p(z)}{q(z)}$ sino

la expresión $\dfrac{p(z)}{zq(z)}$ ya que la mayoria de la transformadas tienen z en el numerador

Ejemplo 3.31 *Hallar x(k) si*

$$X(z)=\frac{z^2-2z}{(z+3)\,(z-4)}$$

En efecto :

$$\textit{sea}\ \ X(z)=\frac{z^2-2z}{(z+3)\,(z-4)}=\frac{z(z-2)}{(z+3)\,(z-4)}\quad \textit{entonces}$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{z-2}{(z+3)\,(z-4)}=\frac{A}{z+3}+\frac{B}{z-4}=\frac{\frac{5}{7}}{z+3}+\frac{\frac{2}{7}}{z-4}=\frac{5}{7}\left[\frac{1}{z+3}\right]+\frac{2}{7}\left[\frac{1}{z-4}\right]$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{5}{7}\left[\frac{1}{z+3}\right]+\frac{2}{7}\left[\frac{1}{z-4}\right]\quad \textit{y así}\ \ X(z)=\frac{5}{7}\left[\frac{z}{z+3}\right]+\frac{2}{7}\left[\frac{z}{z-4}\right]\ \ \textit{por lo tanto}$$

$$x(k)=Z^{-1}\left(\frac{z^2-2z}{(z+3)\,(z-4)}\right)=\frac{5}{7}\,(-3)^k+\frac{2}{7}\,(4)^k$$

Ejemplo 3.32 *Hallar x(k) si*

$$X(z)=\frac{(z-2)}{(z+3)\,(z-4)}$$

En efecto :

$$\begin{aligned}
\textit{sea}\ \ X(z) &= \frac{(z-2)}{(z+3)\,(z-4)}=\frac{5}{7}\left[\frac{1}{z+3}\right]+\frac{2}{7}\left[\frac{1}{z-4}\right]= \\
&= \frac{5}{7}.\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1+3z^{-1}}\right)+\frac{2}{7}.\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-4z^{-1}}\right)\ \ = \\
&= \frac{5}{7}.\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}(-3z^{-1})^k+\frac{2}{7}.\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}(4z^{-1})^k=\frac{5}{7}\sum_{k=0}^{\infty}(-3)^k z^{-k-1}+\frac{2}{7}\sum_{k=0}^{\infty}(4)^k z^{-k-1} \\
&= \frac{5}{7}\left((-3)^0 z^{-1}+(-3)z^{-2}+(-3)^2 z^{-3}+...\right)+\frac{2}{7}\left(z^{-1}+4z^{-2}+(4)^2 z^{-3}+..\right) \\
&= \frac{5}{7}(-3)^0 z^{-1}+\frac{2}{7}(4)^0 z^{-1}+\frac{5}{7}(-3)^1 z^{-2}+\frac{2}{7}(4)^1 z^{-2}+\frac{5}{7}(-3)^2 z^{-3}+\frac{2}{7}(4)^2 z^{-3}+..
\end{aligned}$$

entonces

$$x(k) = \frac{5}{7}(-3)^{k-1} + \frac{2}{7}(4)^{k-1} \quad si \quad k \geq 1 \quad y \quad x(k) = 0 \quad si \quad k = 0$$

3.3.3 Método de la división

Para hallar $Z^{-1}\left(\dfrac{p(z)}{q(z)}\right)$ se transforma la expresión racional en z, en una expresión racional de z^{-1} y se efectua la división como si dividiera dos polinomios

Ejemplo 3.33 *Hallar x(k) si*

$$X(z) = \frac{z}{z-4}$$

En efecto :

$$X(z) = \frac{z}{z-4} = \frac{1}{1-4z^{-1}} = 1 + 4z^{-1} + (4)^2 z^{-2} + (4)^3 z^{-3} + (4)^4 z^{-4} + \ldots.$$

entonces

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (4)^k z^{-k} \quad por\ lo\ tanto\ x(k) = 4^k$$

Ejemplo 3.34 *Hallar x(k) si*

$$X(z) = \frac{z^2 - 2z}{z^2 - z - 12}$$

En efecto :

$$Sea \quad X(z) = \frac{z^2 - 2z}{z^2 - z - 12} = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - z^{-1} - 12z^{-2}} = 1 - z^{-1} + 11z^{-2} + \ldots.$$

entonces

$$x(0) = 1 \quad x(1) = -1 \quad x(2) = 11 \quad etc$$

3.3.4 Método de la convolución

Sea $Z(x(k)) = X(z)$ y $Z(y(k)) = Y(z)$ entonces

$$Z(x(k) * y(k)) = X(z)Y(z) \ \text{ y así } \ Z^{-1}(X(z)Y(z)) = x(k) * y(k)$$

Ejemplo 3.35 *Sean*

$$x(k) = \begin{cases} 1^k & si \quad k \geq 0 \\ 0 & si \quad k < 0 \end{cases} \qquad y \qquad y(k) = \begin{cases} k & si \quad k \geq 0 \\ 0 & si \quad k < 0 \end{cases}$$

entonces

$$Z\left(x(k) * y(k)\right) = X(z)Y(z) = \left(\frac{z}{z-1}\right)\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right) = \frac{z^2}{(z-1)^3}$$

y

$$Z^{-1}\left(\frac{z^2}{(z-1)^3}\right) = x(k) * y(k)$$

Ahora

$$x(k) * y(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n)y(k-n) = \sum_{n=0}^{k} x(n)y(k-n) = \sum_{n=0}^{k} 1^n(k-n) = \sum_{n=0}^{k} k - \sum_{n=0}^{k} n =$$

$$k\sum_{n=0}^{k} 1 - \sum_{n=0}^{k} n = k(k+1) - \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k^2}{2} + \frac{k}{2}$$

La solución por el teorema de los residuos es

$$x(k) = \lim_{z\to 1} \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{(z-1)^3 z^2 z^{k-1}}{(z-1)^3}\right) = \lim_{z\to 1} \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{(z-1)^3 z z^k}{(z-1)^3}\right)$$

$$= \lim_{z\to 1} \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left(z^{k+1}\right) = \frac{k(k+1)}{2}$$

por lo tanto

$$x(k) = \frac{k(k+1)}{2}$$

Ejemplo 3.36 *Si*

$$x(k) = \{1, 1\} \quad y \quad y(k) = \{1, -1\} \ \ entonces$$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = 1 + z^{-1} \quad y \quad Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(k)z^{-k} = 1 - z^{-1} \quad entonces$$

$$Z(x(k) * y(k)) = X(z)Y(z) = \left(1 + z^{-1}\right)\left(1 - z^{-1}\right) = 1 - z^{-2}$$

luego

$$Z^{-1}\left(1-z^{-2}\right)=x(k)*y(k)=\begin{cases} 1 & si \quad k=0 \\ 0 & si \quad k=1 \\ -1 & si \quad k=2 \\ 0 & en \quad otro\ caso \end{cases}$$

y por el teorema de los residuos

$$1-z^{-2}=\frac{z^2-1}{z^2}=Z(x(k)*y(k))\ entonces$$

$\dfrac{(z^2-1)z^{k-1}}{z^2}$ *tiene si* $k=0$, *un polo de orden 3, si* $k=1$, *un polo de orden 2 y si* $k=2$ *un polo de orden1, luego*

$$x(0)=\lim_{z\to 0}\frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{z^3(z^2-1)}{z^3}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left(z^2-1\right)=\lim_{z\to 0}\frac{1}{2}(2)=1$$

$$x(1)=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^2(z^2-1)}{z^2}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{1}{2}\frac{d}{dz}\left(z^2-1\right)=\lim_{z\to 0}\frac{1}{2}(2z)=0$$

$$x(2)=\lim_{z\to 0}\left(\frac{z(z^2-1)}{z}\right)=\lim_{z\to 0}\left(z^2-1\right)=-1$$

y así

$$Z^{-1}\left(1-z^{-2}\right)=\begin{cases} 1 & si \quad k=0 \\ 0 & si \quad k=1 \\ -1 & si \quad k=2 \\ 0 & en \quad otro\ caso \end{cases}$$

Ejemplo 3.37 *Ahora veamos ejemplos como hallar la inversa por varios métodos si*

$$1.\ X(z)=\frac{z^2}{(z-1)^2}=\frac{z}{(z-1)}.\frac{z}{(z-1)}\quad entonces$$

a) Por Convolución

$$x(k)=1^k*1^k=\sum_{n=0}^{k}1^n1^{k-n}=\sum_{n=0}^{k}1^n1^{k-n}=\sum_{n=0}^{k}1=k+1$$

b) Por teorema de los residuos

$$x(k)=\lim_{z\to 1}\ \frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{dz}\left((z-1)^2.\frac{z^{k-1}z^2}{(z-1)^2}\right)=\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left(z^{k+1}\right)=k+1$$

c)Por fracciones parciales

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)} + \frac{z}{(z-1)^2} \text{ entonces } x(k) = 1 + k$$

d) Por división

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2} = \frac{z^2}{z^2-2z+1} = \frac{1}{1-2z^{-1}+z^{-2}} = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} \; + ... + (k+1)z^k + ..$$

por tanto

$$x(k) = k + 1$$

Ejemplo 3.38

$$2. \;\; X(z) = \frac{z^2}{(z-2)(z-4)}$$

a) Por Convolución

$$x(k) = 2^k * 4^k = \sum_{n=0}^{k} 2^n 4^{k-n} = 4^k \sum_{n=0}^{k} 2^n 4^{-n} = 4^k \sum_{n=0}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 4^k \left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\frac{4^{k+1}}{2} - \frac{2^{k+1}}{2}$$

b) Por teorema de los residuos

$$x(k) = + \lim_{z\to 4} \left((z-4) \, . \frac{z^{k-1}z^2}{(z-2)(z-4)}\right) + \lim_{z\to 2} \left((z-2) \, . \frac{z^{k-1}z^2}{(z-2)(z-4)}\right) =$$

$$\frac{4^{k+1}}{2} - \frac{2^{k+1}}{2}$$

c)Por fracciones parciales

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{(z-2)(z-4)} = \frac{-1}{(z-2)} + \frac{2}{(z-4)} \text{ entonces}$$

$$X(z) = \frac{2z}{(z-4)} - \frac{z}{(z-2)}$$

por tanto

$$x(k) = \frac{4^{k+1}}{2} - \frac{2^{k+1}}{2}$$

Ejercicio 5 *Verificar la igualdad en los siguientes ejercicios*

1.

$$Z(1-a^k) = \frac{z\,(1-a)}{(z-1)\,(z-a)}$$

2.

$$Z(k^2a^k) = \frac{az\,(a+z)}{(z-a)^3}$$

3.

$$Z(\sinh\alpha k) = \frac{z\sinh\alpha}{z^2-2z\cosh\alpha+1} \qquad \text{y} \qquad Z(\cosh\alpha k) = \frac{z(z-\cosh\alpha)}{z^2-2z\cosh\alpha+1}$$

4.

$$Z(a^k\sinh\alpha k) = \frac{za\sinh\alpha}{z^2-2za\cosh\alpha+a^2} \quad \text{y} \quad Z(a^k\cosh\alpha k) = \frac{z(z-a\cosh\alpha)}{z^2-2za\cosh\alpha+a^2}$$

5.

$$Z(\sin\alpha k) = \frac{z\sin\alpha}{z^2-2z\cos\alpha+1} \qquad \text{y} \qquad Z(\cos\alpha k) = \frac{z(z-\cos\alpha)}{z^2-2z\cos\alpha+1}$$

6.

$$Z(a^k\sin\alpha k) = \frac{za\sin\alpha}{z^2-2za\cos\alpha+a^2} \quad \text{y} \quad Z(a^k\cos\alpha k) = \frac{z(z-a\cos\alpha)}{z^2-2za\cos\alpha+a^2}$$

7.

$$Z(k\sin\alpha k) = \frac{z\,(z^2-1)\sin\alpha}{(z^2-2z\cos\alpha+1)^2} \qquad \text{y} \qquad Z(k\cos\alpha k) = \frac{z(z^2+1)\cos\alpha-2z)}{(z^2-2z\cos\alpha+1)^2}$$

8.

$$Z(ka^k\sin\alpha k) = \frac{az\,(z^2-a^2)\sin\alpha}{(z^2-2za\cos\alpha+a^2)^2} \quad \text{y} \quad Z(ka^k\cos\alpha k) = \frac{az(z^2+a^2)\cos\alpha-2za)}{(z^2-2za\cos\alpha+a^2)^2}$$

9.

$$Z(a^k\sin(\alpha k+\varphi)) = \frac{z(z\sin\varphi+a\sin(\alpha-\varphi))}{z^2-2za\cos\alpha+a^2}$$

10.

$$Z(a^k \cos(\alpha k + \varphi)) = \frac{z(z\cos\varphi - a\cos(\alpha - \varphi))}{z^2 - 2za\cos\alpha + a^2}$$

11. Hallar la convolución de

$$x(k) = \{1, 0, 3\} \ \text{ y } \ y(k) = \{2, 5\}$$

12. a)

$$\text{la solución de la ecuación } x(k) - \frac{x(k-1)}{2} = \delta(k) \ \text{ es } \ x(k) = (\frac{1}{2})^k$$

b)

$$\text{la solución de la ecuación } \ x(k+1) - 2x(k) = 0 \quad \text{con } x(0) = 1 \ \text{ es } x(k) = 2^k$$

c)

$$\text{la solución de la ecuación } x(k+2) - x(k+1) + \frac{2x(k)}{9} = 1 \ \text{ con } \ x(1) = 1 \quad x(0) = 1$$

es

$$x(k) = \frac{9}{2} + \frac{7}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n - 7\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

d)

$$\text{la solución de la ecuación } \ kx(k) - x(k-1) = 0 \ \text{ con } x(0) = 1 \text{ es } x(k) = \frac{1}{k!}$$

13. Verificar que

$$Z\left(\frac{1}{(2k+1)!}\right) = \sqrt{z}\sinh\sqrt{\frac{1}{z}}$$

14. Verificar que

$$Z\left(\frac{a^k}{(2k)!}\right) = \cosh\sqrt{\frac{a}{z}}$$

Capítulo 4

Ecuaciones derivadas parciales

4.1 Algunas ecuaciones de la física matemática

Recordemos algunas definiciones importantes :

4.1.1 Punto Ordinario

Se dice que $x = a$ es un punto ordinario de la ecuación

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

si P(x) y Q(x) son funciones analíticas en $x = a$, es decir, si P(x) y Q(x) admiten una serie de potencias alrededor de a, y en caso contrario $x = a$ se llama singular
Si $x = a$ es un punto ordinario, entonces la ecuación

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

tiene dos soluciones linealmente independientes de la forma

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \left(x - a\right)^m$$

cuyo radio de convergencia es por lo menos igual a la distancia de a, al punto singular (real o compejo) más cercano de la ecuación

4.1.2 Punto singular

Se dice que $x = a$ es un punto singular regular de la ecuación

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

si

$$(x-a)P(x) \ \text{ y } \ (x-a)^2Q(x)$$

son analíticas en $x = a$ y en caso contrario es singular irregular
Si $x = a$ es un punto singular regular de la ecuación

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

entonces existe por lo menos una solución de la forma

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \, (x-a)^{m+r}$$

Y si se tiene que f(x) es una solución de

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

entonces otra solución linealmente independiente está dada por

$$y(x) = f(x) \int \left(\frac{e^{-\int P(x)dx}}{f^2(x)} \right) dx$$

4.2 Ecuación de Legendre

La ecuación

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \quad n \in R$$

se llama ecuación diferencial de Legendre y se hallará la solución alrededor del punto ordinario $x = 0$, que es de la forma

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + C_5x^5 + C_6x^6 + ...$$

y calculemos los coeficientes.

En efecto :

$$y'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} mC_m x^{m-1} = \sum_{m=1}^{\infty} mC_m x^{m-1}$$

$$y''(x) = \sum_{m=0}^{\infty} m(m-1)C_m x^{m-2} = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)C_m x^{m-2}$$

luego reemplazando en la ecuación

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

se tiene que :

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y =$$

$$= (1-x^2)\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)C_m x^{m-2} - 2x\sum_{m=1}^{\infty} mC_m x^{m-1} + n(n+1)\sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m =$$

$$= \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)C_m x^{m-2} - \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)C_m x^m - 2\sum_{m=1}^{\infty} mC_m x^m + n(n+1)\sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)C_{m+2}x^m - \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)C_m x^m - 2\sum_{m=1}^{\infty} mC_m x^m + n(n+1)\sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m =$$

$$= \sum_{m=2}^{\infty}\left[(m+2)(m+1)C_{m+2} - \left(m(m-1)+2m-n(n+1)\right)C_m\right]x^m + 2C_2 + 3.2C_3x - 2C_1x +$$

$$+ n(n+1)C_0 + n(n+1)C_1x = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 + 0x^5 + \ldots$$

e igualando los coeficientes respectivos en la ecuación anterior se tiene que :

1) $\quad 2C_2 + n(n+1)C_0 = 0 \quad$ entonces $\quad C_2 = -\dfrac{n(n+1)C_0}{2}$

2) $\quad 3.2C_3 - 2C_1 + n(n+1)C_1 = 0$ entonces $C_3 = \dfrac{(2-n(n+1))C_1}{3!} = \dfrac{(1-n)(n+2)}{3!}C_1$

3) $\quad (m+2)(m+1)C_{m+2} - \left(m(m-1)+2m-n(n+1)\right)C_m = 0$ entonces

$$\begin{aligned} C_{m+2} &= \frac{\left(m(m-1)+2m-n(n+1)\right)C_m}{(m+2)(m+1)} = \frac{(m^2-m+2m-n^2-n)C_m}{(m+2)(m+1)} = \\ &= \frac{(m^2+m-n^2-n)C_m}{(m+2)(m+1)} = \frac{(m^2-n^2+m-n)C_m}{(m+2)(m+1)} = \frac{(m-n)(m+n+1)C_m}{(m+2)(m+1)} \end{aligned}$$

luego

$$C_{m+2} = \frac{(m-n)(m+n+1)C_m}{(m+2)(m+1)}$$

por tanto, de la igualdad anterior se tiene que

$$\text{si } m=0 \ , \ C_{0+2} = C_2 = \frac{(0-n)(0+n+1)C_0}{(0+2)(0+1)} = \frac{-n(n+1)C_0}{2.1}$$

$$\text{si } m=1 \ , \ C_3 = \frac{(1-n)(1+n+1)C_1}{(1+2)(1+1)} = \frac{(1-n)(n+2)C_1}{3!}$$

$$\text{si } m=2 \ , \ C_4 = \frac{(2-n)(n+3)C_2}{4.3} = \frac{-n(n+1)(2-n)(n+3)C_0}{4!}$$

$$\text{si } m=3 \ , \ C_5 = \frac{(3-n)(n+4)C_3}{5.4} = \frac{(1-n)(n+2)(3-n)(n+4)C_1}{5!}$$

$$\text{si } m=4 \ , \ C_6 = \frac{(4-n)(n+5)C_4}{6.5} = \frac{-n(n+1)(2-n)(n+3)(4-n)(n+5)C_0}{6!}$$

y así

$$\begin{aligned}
y(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + C_5x^5 + C_6x^6 + ... \\
&= C_0 + C_1x + \frac{-n(n+1)C_0}{2.1}x^2 + \frac{(1-n)(n+2)C_1}{3!}x^3 + \frac{-n(n+1)(2-n)(n+3)C_0}{4!}x^4 + ... \\
&= C_0\left(1 - \frac{n(n+1)x^2}{2.1} + \frac{n(n+1)(n-2)(n+3)x^4}{4!} - \frac{n(n+1)(n-2)(n+3)(n-4)(n+5)x^6}{6!} + \right. \\
&\quad \left. +C_1\left(x - \frac{(n-1)(n+2)x^3}{3!} + \frac{(n-1)(n+2)(n-3)(n+4)x^5}{5!} - .....\right)\right. \\
&= C_0y_1(x) + C_1y_2(x).
\end{aligned}$$

Como $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son linealmente independientes, pués $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}$ no es una constante y cada una converge en el intervalo $(-1,1)$ entonces

$$y(x) = C_0y_1(x) + C_1y_2(x)$$

es la solución general.

4.2.1 Polinomios de Legendre.

En muchas aplicaciones, el parámetro en la ecuación de Legendre es un entero positivo, entonces de

$$C_{m+2} = \frac{(m-n)(m+n+1)C_m}{(m+2)(m+1)} \quad \text{si se toma } s = m \text{ se tiene que}$$

$$C_{s+2} = \frac{(s-n)(s+n+1)C_s}{(s+2)(s+1)} \text{ y de aquí si } s = n \text{ se tiene que } C_{n+2} = 0 = C_{n+4} = C_{n+6} \ldots.$$

de donde si n es par, $y_1(x)$ se reduce a un polinomio de grado n y si n es impar $y_2(x)$ se reduce a un polinomio de grado n, estos polinomios multiplicados por una constante, son llamados los polinomios de Legendre y para hallarlos se procede así : Se toma

$$C_n = \frac{(2n)!}{2^n n! n!}$$

un valor fijo y de la ecuación

$$C_{s+2} = \frac{(s-n)(s+n+1)C_s}{(s+2)(s+1)}$$

despejando C_s se tiene que :

$$C_s = \frac{(s+2)(s+1)C_{s+2}}{(s-n)(s+n+1)} = -\frac{(s+2)(s+1)C_{s+2}}{(n-s)(s+n+1)}$$

y si $s = n-2$, entonces

$$\begin{aligned} C_s &= C_{n-2} = -\frac{(n-2+2)(n-2+1)C_{n-2+2}}{(n-(n-2))(n-2+n+1)} = -\frac{n(n-1)C_n}{2(2n-1)} = -\frac{n(n-1)(2n)!}{2(2n-1)2^n n! n!} \\ &= -\frac{n(n-1)(2n)(2n-1)(2n-2)!}{2(2n-1)2^n n(n-1)! n(n-1)(n-2)!} = -\frac{(2n-2)!}{2^n(n-1)!(n-2)!} \end{aligned}$$

Si $s = n-4$, entonces

$$\begin{aligned} C_s &= C_{n-4} = -\frac{(n-4+2)(n-4+1)C_{n-2}}{(n-(n-4))(n+n-4+1)} = \frac{(n-2)(n-3)}{4(2n-3)}\frac{(2n-2)!}{2^n(n-1)!(n-2)!} \\ &= \frac{(n-2)(n-3)}{4(2n-3)}\frac{(2n-2)(2n-3)(2n-4)!}{2^n(n-1)(n-2)!(n-2)(n-3)(n-4)!} = \frac{(2n-4)!}{2.2^n(n-2)!(n-4)!} \end{aligned}$$

Si $s = n - 6$, entonces

$$\begin{aligned}
C_s &= C_{n-6} = -\frac{(n-6+2)(n-6+1)C_{n-4}}{(n-(n-6))(n+n-6+1)} = -\frac{(n-4)(n-5)_{Cn-4}}{2.3(2n-5)} \\
&= -\frac{(n-4)(n-5)}{2.3(2n-5)}\frac{(2n-4)!}{2.2^n(n-2)!(n-4)!} \\
&= -\frac{(n-4)(n-5)}{2.3(2n-5)}\frac{(2n-4)(2n-5)(2n-6)!}{2.2^n(n-2)(n-3)!(n-4)(n-5)(n-6)!} = -\frac{(2n-6)!}{3!.2^n(n-3)!(n-6)!}
\end{aligned}$$

Si $s = n - 8$, entonces en forma análoga se obtiene que

$$C_s = C_{n-8} = \frac{(2n-8)!}{4!.2^n(n-4)!(n-8)!}$$

y en forma más general si $s = n - 2m$ ($n \geq 2m$), entonces

$$C_s = C_{n-2m} = (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{m!.2^n(n-m)!(n-2m)!}$$

y así los polinomios de Legendre se dan por

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^m \frac{(2n-2m)!\ x^{n-2m}}{m!.2^n(n-m)!(n-2m)!}$$

así que

$$P_0(x) = \sum_{m=0}^{\left[\frac{0}{2}\right]} (-1)^m \frac{(2.0-2m)!\ x^{0-2m}}{m!.2^0(0-m)!(0-2m)!} = \sum_{m=0}^{0} (-1)^m \frac{(-2m)!\ x^{-2m}}{m!.2^0(-m)!(-2m)!} = 1$$

es una solución de la ecuación $(1-x^2)y'' - 2xy' = 0$

$$P_1(x) = \sum_{m=0}^{\left[\frac{1}{2}\right]} (-1)^m \frac{(2.1-2m)!\ x^{1-2m}}{m!.2^1(1-m)!(1-2m)!} = \sum_{m=0}^{0} (-1)^m \frac{(2-2m)!\ x^{1-2m}}{m!.2^1(1-m)!(1-2m)!} = x$$

es una solución de la ecuación $(1-x^2)y''-2xy'+2y = 0$

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= \sum_{m=0}^{\left[\frac{2}{2}\right]} (-1)^m \frac{(2.2-2m)!\ x^{2-2m}}{m!.2^2(2-m)!(2-2m)!} = \sum_{m=0}^{1} (-1)^m \frac{(4-2m)!\ x^{2-2m}}{m!.2^2(2-m)!(2-2m)!} \\
&= \frac{4!\ x^2}{2^2 2!2!} - \frac{2!}{4} = \frac{3\ x^2}{2} - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

es una solución de la ecuación $(1-x^2)y''-2xy'+6y=0$

$P_3(x)=\dfrac{5x^3}{2}-\dfrac{3\ x}{2}$ es una es solución de la ecuación $(1-x^2)y''-2xy'+12y=0$

$P_4(x)=\dfrac{35x^4}{8}-\dfrac{15\ x^2}{4}+\dfrac{3}{8}$ es solución de la ecuación $(1-x^2)y''-2xy'+20y=0$

4.2.2 La fórmula de Rodrigues

Para deducir la fórmula de Rodrigues tengamos en cuenta que :

1)

$$\frac{d^3}{dx^3}\left(x^{6-2m}\right)=(6-2m)\,(5-2m)\,(4-2m)\,x^{3-2m}=$$
$$=\frac{(6-2m)\,(5-2m)\,(4-2m)\,(3-2m)!x^{3-2m}}{(3-2m)!}=\frac{(6-2m)!x^{3-2m}}{(3-2m)!}$$

así que

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{2n-2m}\right)=\frac{(2n-2m)!x^{n-2m}}{(n-2m)!}$$

2)

$$\frac{d^4}{dx^4}\left(\sum_{m=0}^{2}\ (x^2)^{4-m}\right)=\frac{d^4}{dx^4}\left(\sum_{m=0}^{4}(x^2)^{4-m}\right)\quad \text{ya que}$$

$$\frac{d^4}{dx^4}\left(\sum_{m=0}^{2}\ (x^2)^{4-m}\right)=\frac{d^4}{dx^4}\left(x^8+x^6+x^4\right)$$

$$\frac{d^4}{dx^4}\left(\sum_{m=0}^{4}\ (x^2)^{4-m}\right)=\frac{d^4}{dx^4}\left(x^8+x^6+x^4+x^2+1\right)=\frac{d^4}{dx^4}\left(x^8+x^6+x^4\right)$$

así que

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^m\frac{(2n-2m)!\ x^{n-2m}}{m!.2^n(n-m)!(n-2m)!}=\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^m\frac{n!(2n-2m)!\ x^{n-2m}}{n!m!.2^n(n-m)!(n-2m)!}\\
&= \frac{1}{2^n n!}\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^m\frac{n!\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{2n-2m}\right)}{m!.(n-m)!}=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^m\binom{n}{m}(x^2)^{n-m}\right)\\
&= \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{n}{m}(x^2)^{n-m}\right)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]
\end{aligned}$$

luego

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[\left(x^2 - 1\right)^n \right]$$

expresión conocida como. La fórmula de Rodrigues y a $P_n(x)$ se llama también función de Legendre de primera clase.

4.2.3 Algunas propiedades

1.Verificar que

$$P'_{n+1}(x) = (1 + 2n)\, P_n(x) + P'_{n-1}(x)$$

En efecto :

$$\text{Si} \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[\left(x^2 - 1\right)^n \right] \quad \text{entonces}$$

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left[\left(x^2 - 1\right)^{n+1} \right] \quad \text{y}$$

$$\begin{aligned}
P'_{n+1}(x) &= \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left[(n+1)2x \left(x^2 - 1\right)^n \right] \\
&= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left(x \left(x^2 - 1\right)^n \right) \\
&= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(\left(x^2 - 1\right)^n + n \left(x^2 - 1\right)^{n-1} 2x^2 \right) \\
&= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(\left(x^2 - 1\right)^n + n \left(x^2 - 1\right)^{n-1} 2(x^2 - 1 + 1) \right) \\
&= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(\left(x^2 - 1\right)^n + 2n \left(x^2 - 1\right)^n + 2n \left(x^2 - 1\right)^{n-1} \right) \\
&= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left((1 + 2n) \left(x^2 - 1\right)^n + 2n \left(x^2 - 1\right)^{n-1} \right) \\
&= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left((1 + 2n) \left(x^2 - 1\right)^n \right) + \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^2 - 1\right)^{n-1} \\
&= (1 + 2n)\, P_n(x) + P'_{n-1}(x)
\end{aligned}$$

luego

$$P'_{n+1}(x) = (1 + 2n)\, P_n(x) + P'_{n-1}(x) \quad \text{y asi}$$

$$P_n(x) = \frac{P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)}{(1 + 2n)}$$

2. De

$$P_n(x) = \frac{P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)}{(1+2n)}$$

se tiene que

$$\int P_n(x)dx = \frac{P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)}{(1+2n)}$$

Recordemos que

$$\frac{d}{dx}\left(xf(x)\right) = xf'(x) + f(x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(xf(x)\right) = xf''(x) + 2f'(x)$$

$$\frac{d^3}{dx^3}\left(xf(x)\right) = xf'''(x) + 3f''(x)$$

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(xf(x)\right) = xf^{(n+1)}(x) + (n+1)f^{(n)}(x)$$

3. Aplicando la propiedad Demuestre que

$$P'_{n+1}(x) = xP'_n(x) + (n+1)P_n(x)$$

De la propiedad anterior se tiene que :

$$\begin{aligned} P'_{n+1}(x) &= \frac{1}{2^n n!}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x\left(x^2-1\right)^n) = \frac{1}{2^n n!}\left[x\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(x^2-1\right)^n + (n+1)\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n\right] \\ &= xP'_n(x) + (n+1)P_n(x) \end{aligned}$$

y así

$$P'_{n+1}(x) = xP'_n(x) + (n+1)P_n(x)$$

4. Verificar que

$$nP_n(x) = xP'_n(x) - P'_{n-1}(x)$$

En efecto, igualando 1 y 3, se tiene

$$P'_{n+1}(x) = (1+2n)\,P_n(x) + P'_{n-1}(x) = xP'_n(x) + (n+1)P_n(x)$$

es decir,

$$nP_n(x) = xP'_n(x) - P'_{n-1}(x)$$

4.2.4 Ortogonalidad de los polinomios de Legendre

La ecuación de Legendre

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

se puede escribir como

$$\frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}\right) + n(n+1)y = 0$$

y como $P_n(x)$ es una solución, satisface la ecuación, es decir,

$$\frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)P_n'(x)\right) + n(n+1)P_n(x) = 0 \qquad (5)$$

de la misma forma

$$\frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)P_m'(x)\right) + m(m+1)P_m(x) = 0 \qquad (6)$$

y multiplicando ambos miembros de la ecuación (5) por P_m y la ecuación (6) por P_n y restando se obtiene

$$P_m\frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)P_n'(x)\right) - P_n\frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)P_m'(x)\right) + \left[n(n+1) - m(m+1)\right]P_mP_n = 0$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\left(P_mP_n' - P_nP_m'\right)\right] + \left[n(n+1) - m(m+1)\right]P_mP_n = 0$$

e integrando miembro a miembro entre -1 y 1 la ecuación anterior se tiene

$$\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\left(P_mP_n' - P_nP_m'\right)\right]dx + \left[n(n+1) - m(m+1)\right]\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx = 0$$

y como la integral

$$\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\left(P_mP_n' - P_nP_m'\right)\right]dx = \left(\left(1-x^2\right)\left(P_mP_n' - P_nP_m'\right)\right)_{-1}^{1} = 0$$

entonces

$$\left[n(n+1) - m(m+1)\right]\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx = 0$$

y así

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0 \quad \text{si} \quad m \neq n$$

propiedad que se conoce como la ortogonalidad de los polinomios de Legendre.

Si se desea conocer el valor de la integral

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx$$

ésta se puede deducir de la relación

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^n$$

Para demostrar esta propiedad desarrolle

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(2xz-z^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1-a}}$$

y agrupe todos los terminos que contienen a z^n y verifique que la suma de estos términos es $P_n(x)z^n$.

Ahora elevando al cuadrado la expresión

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^n$$

se tiene que

$$\frac{1}{1-2xz+z^2} = \left[P_0(x) + P_1(x)z + P_2(x)z^2 + P_3(x)z^3 + P_4(x)z^4 + ...\right]^2$$

e integrando la igualdad entre -1 y 1 se tiene

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{dx}{1-2xz+z^2}\right) = \int_{-1}^{1}\left[P_0^2(x) + P_1^2(x)z^2 + P_2^2(x)z^4 + ... + P_n^2(x)z^{2n} + ...\right]dx$$

Ahora la integral

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\left(\frac{dx}{1-2xz+z^2}\right) &= -\frac{1}{2z}\int\frac{du}{u} = -\frac{1}{2z}\left(\ln u\right) = -\frac{1}{2z}\left(\ln\left(1-2xz+z^2\right)\right)_{-1}^{1} \\
&= -\frac{1}{2z}\left(\ln\left(1-z\right)^2-\ln\left(1+z\right)^2\right) = -\frac{1}{z}\left(\ln\left(1-z\right)-\ln\left(1+z\right)\right) \\
&= \frac{1}{z}\left(\ln\left(1+z\right)-\ln\left(1-z\right)\right) = \frac{1}{z}\left(\left(z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-...\right)+\left(z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+....\right)\right) \\
&= \frac{1}{z}\left(2z+\frac{2z^3}{3}+\frac{2z^5}{5}+\frac{2z^7}{7}+....+\frac{2z^{2n+1}}{2n+1}+...\right) = \\
&= 2+\frac{2z^2}{3}+\frac{2z^4}{5}+\frac{2z^6}{7}+....+\frac{2z^{2n}}{2n+1}+..
\end{aligned}$$

luego

$$\int_{-1}^{1}\left[P_0^2(x)+P_1^2(x)z^2+P_2^2(x)z^4+...+P_n^2(x)z^{2n}+...\right]dx = 2+\frac{2z^2}{3}+\frac{2z^4}{5}+\frac{2z^6}{7}+....+\frac{2z^{2n}}{2n+1}+..$$

y así igualando los coeficientes de sus respectivas potencias, se tiene que

$$\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}$$

por lo tanto

$$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx = \begin{cases} 0 & si \quad m\neq n \\ \frac{2}{2n+1} & si \quad m=n \end{cases}$$

Si en

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)z^n$$

se hace $x=1$, se tiene

$$\frac{1}{\sqrt{1-2z+z^2}} = \frac{1}{1-z} = 1+z+z^2+z^3+z^4+.. = P_0(1)+P_1(1)z+P_2(1)z^2+P_3(1)z^3+P_4(1)z^4+....$$

luego se concluye que igualando coeficientes

$$P_n(1) = 1$$

En forma análoga

$$P_n(-1) = (-1)^n$$

4.2.5 Serie de Legendre

Si f(x) está definida en el intervalo $(-1, 1)$ entonces

$$f(x) = C_o P_o(x) + C_1 P_1(x) + C_2 P_2(x) + C_3 P_3(x) + C_4 P_4(x) + ...$$

luego haciendo el desarrollo ortogonal se tiene que

$$\langle f(x), P_n(x)\rangle = \langle C_o P_o(x) + C_1 P_1(x) + C_2 P_2(x) + C_3 P_3(x) + C_4 P_4(x) + ..., \quad P_n(x)\rangle$$

por lo tanto

$$\int_{-1}^{1} f(x).P_n(x)dx = \int_{-1}^{1} C_n.P_n^2(x)dx \ \text{ los demás términos son cero}$$

entonces

$$C_n = \frac{\int_{-1}^{1} f(x).P_n(x)dx}{\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx}$$

Ejemplo 4.1 *Si*

$$f(x) = \begin{cases} -1 & si \quad -1 < x < 0 \\ 1 & si \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

entonces

$$C_o = \frac{\int_{-1}^{1} f(x).P_0(x)dx}{\int_{-1}^{1} P_0^2(x)dx} = \frac{\int_{-1}^{1} f(x)dx}{\int_{-1}^{1} dx} = 0$$

$$C_1 = \frac{\int_{-1}^{1} f(x).P_1(x)dx}{\int_{-1}^{1} P_1^2(x)dx} = \frac{\int_{-1}^{1} f(x)xdx}{\int_{-1}^{1} x^2dx} = \frac{\int_{0}^{1} xdx}{\int_{0}^{1} x^2dx} = \frac{3}{2}$$

$$C_2 = \frac{\int_{-1}^{1} f(x).P_2(x)dx}{\int_{-1}^{1} P_2^2(x)dx} = \frac{\int_{-1}^{1} f(x)\left(\frac{3\,x^2}{2} - \frac{1}{2}\right)dx}{\int_{-1}^{1} \left(\frac{3\,x^2}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 dx} = \frac{0}{\int_{-1}^{1} \left(\frac{3\,x^2}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 dx} = 0$$

$$C_3 = \frac{\int\limits_{-1}^{1} f(x).P_3(x)dx}{\int\limits_{-1}^{1} P_3^2(x)dx} = \frac{\int\limits_{-1}^{1} f(x)\left(\frac{5x^3}{2} - \frac{3\ x}{2}\right)dx}{\int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{5x^3}{2} - \frac{3\ x}{2}\right)^2 dx} = \frac{2\int\limits_{0}^{1} \left(\frac{5x^3}{2} - \frac{3\ x}{2}\right)dx}{\int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{5x^3}{2} - \frac{3\ x}{2}\ \right)^2 dx} = -\frac{7}{8}$$

así que

$$f(x) = 0.P_o(x) + \frac{3}{2}P_1(x) + 0.P_2(x) - \frac{7}{8}P_3(x) + 0.P_4(x) + \frac{11}{16}P_5(x) + ...$$

llamada serie de Legendre de

$$f(x) = \begin{cases} -1 & si \quad -1 < x < 0 \\ 1 & si \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

Si en la ecuación de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

se le hace el cambio de variable $x = \dfrac{1}{t}$ entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = -t^2\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(-t^2\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(-t^2\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx} = \left(-2t\frac{dy}{dt} - t^2\frac{d^2y}{dt^2}\right)\left(-t^2\right) = t^4\frac{d^2y}{dt^2} + 2t^3\frac{dy}{dt}$$

y con este cambio de variable, la ecuación se transforma en

$$\left(1 - \frac{1}{t^2}\right)\left(t^4\frac{d^2y}{dt^2} + 2t^3\frac{dy}{dt}\right) - \frac{2}{t}\left(-t^2\frac{dy}{dt}\right) + n(n+1)y = 0$$

que simplificada se tiene que

$$\left(t^2 - 1\right)\frac{d^2y}{dt^2} + 2t\frac{dy}{dt} + \frac{n(n+1)}{t^2}y = 0$$

y una solución en serie de potencias de t es

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} C_m t^{m+r} \quad \text{con} \quad C_0 \neq 0$$

Haciendo el desarrollo se encuentra que

$$r = n + 1 \quad \text{y} \quad r = -n$$

En primer caso se considera que $r = n + 1$ y se obtiene que $C_1 = C_3 = C_5 = C_7 = 0$ y que

$$C_{2m} = \frac{(n+1)(n+2)....(n+2m)C_0}{2.4...2m.(2n+3)(2n+5)...(2n+2m+1)}$$

y si C_0 es

$$C_0 = \frac{n!}{1.3.5...(2n+1)}$$

entonces la expresión C_{2m}, toma la forma de

$$\begin{aligned} C_{2m} &= \frac{(n+1)(n+2)....(n+2m)}{2.4...2m.(2n+3)(2n+5)...(2n+2m+1)} \frac{n!}{1.3.5...(2n+1)} \\ &= \frac{2^n(n+2m)!(n+m)!}{m!(2n+2m+1)!} \end{aligned}$$

y así

$$\begin{aligned} y &= \sum_{m=0}^{\infty} C_m t^{m+r} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^n(n+2m)!(n+m)!}{m!(2n+2m+1)!} t^{2m+n+1} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^n(n+2m)!(n+m)!}{m!(2n+2m+1)!} \left(\frac{1}{x}\right)^{2m+n+1} = Q_n(x) \end{aligned}$$

llamada función de Legendre de segunda clase .
Con $r = -n$ se obtiene otra solución que coincide con $P_n(x)$, luego se puede concluir que una solución general de la ecuación de legendre es

$$y(x) = AP_n(x) + BQ_n(x) \quad \text{con A y B constantes}$$

Si en la ecuación de Legendre

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

derivamos m veces cada término, se tiene

$$\frac{d^m}{dx^m}\left[(1-x^2)y''\right] - 2\frac{d^m}{dx^m}(xy') + n(n+1)y^{(m)} = 0$$

pero por la fórmula de Leibniz se tiene que

$$\frac{d^m}{dx^m}\left[(1-x^2)y''\right] = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (y'')^{(m-k)} (1-x^2)^{(k)} =$$

$$= \binom{m}{0}(y'')^{(m)}(1-x^2) + \binom{m}{1}(y'')^{(m-1)}(1-x^2)^{(1)} + \binom{m}{2}(y'')^{(m-2)}(1-x^2)^{(2)} =$$

$$= y^{(m+2)}(1-x^2) - 2mxy^{(m+1)} - m(m-1)y^{(m)}$$

$$\frac{d^m}{dx^m}(xy') = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(y')^{(m-k)}(x)^{(k)} = \binom{m}{0}y^{(m+1)}x + \binom{m}{1}y^{(m)} = xy^{(m+1)} + my^{(m)}$$

y reempazando se tiene

$$\begin{aligned}
&\frac{d^m}{dx^m}\left[(1-x^2)y''\right] - 2\frac{d^m}{dx^m}(xy') + n(n+1)y^{(m)} \\
=\;& y^{(m+2)}(1-x^2) - 2mxy^{(m+1)} - m(m-1)y^{(m)} - 2\left(xy^{(m+1)} + my^{(m)}\right) + n(n+1)y^{(m)} \\
=\;& (1-x^2)y^{(m+2)} - 2(m+1)xy^{(m+1)} + \left[n(n+1) - m(m+1)\right]y^{(m)} = 0
\end{aligned}$$

es decir, la ecuación queda

$$(1-x^2)y^{(m+2)} - 2(m+1)xy^{(m+1)} + \left[n(n+1) - m(m+1)\right]y^{(m)} = 0 \qquad (7)$$

y ésta tiene por soluciones

$$y^{(m)} = \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} \qquad \text{y} \qquad \text{a} \quad \frac{d^m Q_n(x)}{dx^m}$$

y si en la ecuación 7, se hace

$$v = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}y^{(m)}$$

entonces se puede tranformar en

$$(1-x^2)\frac{d^2v}{dx^2} - 2x\frac{dv}{dx} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]v = 0$$

llamada ecuación asociada de Legendre y tiene por soluciones a

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m P_n(x)}{dx^m} \qquad Q_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m Q_n(x)}{dx^m}$$

llamadas funciones asociadas de Legendre.

Se puede demostrar que

$$\int_{-1}^{1} P_n^m(x)P_k^m(x)dx = \begin{cases} 0 & si \quad n \neq k \\ \frac{2}{2k+1} - \frac{(k+m)!}{(k-m)!} & si \quad n = k \end{cases}$$

4.3 Ecuación diferencial de Bessel

A la ecuación

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \lambda^2\right) y = 0$$

se llama ecuación diferencial de Bessel, y una solución en serie de potencias de x viene dada por

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{m+r} \quad \text{con} \quad C_0 \neq 0$$

y se hallarán C_m y r.
En efecto :

$$y'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)\, C_m x^{m+r-1} \qquad y''(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)\,(m+r-1)\, C_m x^{m+r-2}$$

y así

$$\begin{aligned}
&x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \lambda^2\right) y = \\
=\ &\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)\,(m+r-1)\, C_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)\, C_m x^{m+r} + \left(x^2 - \lambda^2\right) \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{m+r} = \\
=\ &\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)\,(m+r-1)\, C_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)\, C_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{m+r+2} - \lambda^2 \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{m+r} =
\end{aligned}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)\,(m+r-1)\, C_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)\, C_m x^{m+r} + \sum_{m=2}^{\infty} C_{m-2} x^{m+r} - \lambda^2 \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{m+r} =$$

$$= \sum_{m=2}^{\infty} \left[((m+r)\,(m+r-1) + (m+r) - \lambda^2) C_m + C_{m-2}\right] x^{m+r} + \left(r(r-1) + r - \lambda^2\right) C_0 x^r +$$

$$+ \left((1+r)r + 1 + r - \lambda^2\right) C_1 x^{1+r} = 0 + 0x^r + 0x^{1+r} + \ldots + 0x^{m+r}$$

por lo tanto igualando coeficientes se tiene :

1.

$$\left(r(r-1) + r - \lambda^2\right) C_0 = 0$$

2.

$$\left((1+r)r + 1 + r - \lambda^2\right) C_1 = 0$$

3.

$$((m+r)\,(m+r-1) + (m+r) - \lambda^2) C_m + C_{m-2} = 0$$

Ahora como

$$\left(r(r-1)+r-\lambda^2\right)C_0=0 \text{ entonces } \left(r(r-1)+r-\lambda^2\right)=0$$

y así

$$r^2-\lambda^2=0 \text{ entonces } r=\pm\lambda$$

Luego si

$$r=\lambda\geq 0$$

entonces reemplazando $r=\lambda$, en 2 se tiene

$$\left((1+r)r+1+r-\lambda^2\right)C_1=(r+r^2+1+r-\lambda^2)C_1=(2\lambda+1)\,C_1=0 \text{ entonces } C_1=0$$

y como

$$\left[((m+r)\,(m+r-1)+(m+r)-\lambda^2)C_m+C_{m-2}\right]=\left[(m+r)^2-\lambda^2\right]C_m+C_{m-2}=$$

$$=(m^2+2m\lambda)C_m+C_{m-2}=0$$

se tiene que

$$C_m=-\frac{C_{m-2}}{m^2+2m\lambda}=-\frac{C_{m-2}}{m(m+2\lambda)} \text{ para } m\geq 2, \text{ luego si } m=3 \text{ se tiene que}$$

$$C_3=-\frac{C_1}{3(3+2\lambda)}=0,\quad C_5=0...C_7...$$

Si se toma

$$C_0=\frac{1}{2^\lambda\Gamma(\lambda+1)}$$

entonces

$$C_2=-\frac{C_0}{4+4\lambda}=-\frac{1}{2^2(1+\lambda)}\frac{1}{2^\lambda\Gamma(\lambda+1)}=-\frac{1}{2^{\lambda+2}\Gamma(\lambda+2)}$$

$$C_4=-\frac{C_2}{4(4+2\lambda)}=-\frac{C_2}{2^3(2+\lambda)}=\frac{1}{2^3(2+\lambda)}\frac{1}{2^{\lambda+2}\Gamma(\lambda+2)}=\frac{1}{2^{\lambda+4}2\Gamma(\lambda+3)}$$

$$C_6=-\frac{C_4}{6(6+2\lambda)}=-\frac{1}{6.2(3+\lambda)}\frac{1}{2^{\lambda+4}2\Gamma(\lambda+3)}=-\frac{1}{2^{\lambda+6}3!\Gamma(\lambda+4)}$$

$$C_{2m}=\frac{(-1)^m}{2^{\lambda+2m}m!\Gamma(\lambda+m+1)}$$

y así una solución es

$$f(x) = J_\lambda(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+\lambda}}{2^{2m+\lambda} m! \Gamma(\lambda + m + 1)}$$

En forma análoga para $r = -\lambda$ se tiene otra solución

$$g(x) = J_{-\lambda}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-\lambda}}{2^{2m-\lambda} m! \Gamma(-\lambda + m + 1)}$$

por lo tanto una solución general de la ecuación de Bessel es

$$y(x) = A\ J_\lambda(x) + B\ J_{-\lambda}(x) \quad \text{si} \quad \lambda \neq Z$$

Ejemplo 4.2 *La solución general de la ecuación*

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - 3\right) y = 0$$

es

$$y(x) = A\ J_{\sqrt{3}}(x) + B\ J_{-\sqrt{3}}(x)$$

Ejemplo 4.3 *La solución general de la ecuación*

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{9}\right) y = 0$$

es

$$y(x) = A\ J_{\frac{1}{3}}(x) + B\ J_{-\frac{1}{3}}(x)$$

Ejemplo 4.4 *La solución general de la ecuación*

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0$$

es

$$y(x) = A\ J_{\frac{1}{2}}(x) + B\ J_{-\frac{1}{2}}(x) = A\ \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x + B\ \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

ya que

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}+2m} m! \Gamma(\frac{1}{2} + m + 1)} = \sqrt{\frac{x}{2}} \left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} - \frac{x^2}{1! 2^2 \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} + \frac{x^4}{2! 2^4 \Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} - .... \right)$$

$$= \sqrt{\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} - \frac{x^2}{1!2^2\frac{1}{2}\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} + \frac{x^4}{2!2^4\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} - ....\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{x}{2}}\frac{x}{x}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} - \frac{x^2}{1!2^2\frac{1}{2}\frac{3}{2}\sqrt{\pi}} + \frac{x^4}{2!2^4\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}\sqrt{\pi}} - ....\right)\\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1!2^2\frac{3}{2}} + \frac{x^5}{2!2^4\frac{3}{2}\frac{5}{2}} - ....\right)
\end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1!2^2\frac{3}{2}} + \frac{x^5}{2!2^4\frac{3}{2}\frac{5}{2}} - ....\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}.\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}....\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$$

En forma análoga

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

Hay algunas ecuaciones que mediante un cambio de variable se pueden transformar en una ecuación de Bessel, como por ejemplo

Ejemplo 4.5 *Solucionar la ecuación*

$$y'' + \left(e^{2x} - \frac{1}{9}\right)y = 0 \quad \text{haciendo } e^x = z$$

En efecto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz}e^x \quad = z\frac{dy}{dz}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}e^x\right) = e^x\frac{dy}{dz} + e^x\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right) = e^x\frac{dy}{dz} + e^x\frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\right)\frac{dz}{dx}\\
&= e^x\frac{dy}{dz} + e^x\frac{d^2y}{dz^2}e^x = z\frac{dy}{dz} + z^2\frac{d^2y}{dz^2}
\end{aligned}$$

entonces reemplazando se tiene

$$y'' + \left(e^{2x} - \frac{1}{9}\right)y = z\frac{dy}{dz} + z^2\frac{d^2y}{dz^2} + \left(z^2 - \frac{1}{9}\right)y = z^2\frac{d^2y}{dz^2} + z\frac{dy}{dz} + \left(z^2 - \frac{1}{9}\right)y = 0$$

que tiene por solución general a

$$Y(z) = A\ J_{\frac{1}{3}}(z) + B\ J_{-\frac{1}{3}}(z) = A\ J_{\frac{1}{3}}(e^x) + B\ J_{-\frac{1}{3}}(e^x) = g(x)$$

Ejemplo 4.6 *Solucionar la ecuación*

$$x^2y'' + xy' + 4\left(x^4 - \frac{1}{4}\right)y = 0 \quad si \;\; x^2 = z$$

En efecto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz}2x$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}2x\right) = 2\frac{dy}{dz} + 2x\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right) = 2\frac{dy}{dz} + 2x\frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\right)\frac{dz}{dx} \\ &= 2\frac{dy}{dz} + 2x\frac{d^2y}{dz^2}2x = 2\frac{dy}{dz} + 4x^2\frac{d^2y}{dz^2}\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}x^2y'' + xy' + 4\left(x^4 - \frac{1}{4}\right)y &= x^2\left(2\frac{dy}{dz} + 4x^2\frac{d^2y}{dz^2}\right) + x\left(\frac{dy}{dz}2x\right) + 4\left(x^4 - \frac{1}{4}\right)y \\ &= 4z^2\frac{d^2y}{dz^2} + 4z\frac{dy}{dz} + 4\left(z^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0\end{aligned}$$

que equivale a

$$z^2\frac{d^2y}{dz^2} + z\frac{dy}{dz} + \left(z^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$$

y tiene por solución

$$y(z) = A\ J_{\frac{1}{2}}(z) + B\ J_{-\frac{1}{2}}(z) = A\ J_{\frac{1}{2}}(x^2) + B\ J_{-\frac{1}{2}}(x^2) = g(x)$$

Ejemplo 4.7 *Solucionar la ecuación*

$$y'' + k^2xy = 0 \qquad si \quad u = \frac{y}{\sqrt{x}} \quad z = \frac{2k}{3}x^{\frac{3}{2}}$$

Como

$$y = u\sqrt{x} \quad entonces \quad y' = \frac{1}{2}ux^{-\frac{1}{2}} + u'\sqrt{x}$$

$$y'' = -\frac{1}{4}ux^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}u'x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}u'x^{-\frac{1}{2}} + u''\sqrt{x} = u''\sqrt{x} + u'x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}ux^{-\frac{3}{2}}$$

reemplazando en la ecuación se tiene que

$$y'' + k^2xy = u''\sqrt{x} + u'x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}ux^{-\frac{3}{2}} + k^2xu\sqrt{x} = 0$$

y si multiplicamos por $\sqrt{x}$ *se tiene que*

$$xu'' + u' - \frac{1}{4}ux^{-1} + k^2x^2u = 0$$

Ahora

$$u' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dz}\frac{dz}{dx} = kx^{\frac{1}{2}}\frac{du}{dz}$$

$$\begin{aligned}
u'' &= \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(kx^{\frac{1}{2}}\frac{du}{dz}\right) = k\left(x^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dz}\right) + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\frac{du}{dz}\right) \\
&= k\left(x^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dz}\left(\frac{du}{dz}\right)\frac{dz}{dx} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\frac{du}{dz}\right) = k\left(x^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dz}\left(\frac{du}{dz}\right)kx^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\frac{du}{dz}\right) \\
&= k^2x\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{k}{2}x^{-\frac{1}{2}}\frac{du}{dz} \quad \textit{luego}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
xu'' + u' - \frac{1}{4}ux^{-1} + k^2x^2u &= x\left(k^2x\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{k}{2}x^{-\frac{1}{2}}\frac{du}{dz}\right) + kx^{\frac{1}{2}}\frac{du}{dz} - \frac{1}{4}ux^{-1} + k^2x^2u = 0 \\
&= k^2x^2\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{3k}{2}x^{\frac{1}{2}}\frac{du}{dz} - \frac{1}{4}ux^{-1} + k^2x^2u
\end{aligned}$$

si multiplicamos la última ecuación por $\frac{4}{9}x$ *se tiene*

$$\frac{4}{9}k^2x^3\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{4}{9}\frac{3k}{2}x^{\frac{3}{2}}\frac{du}{dz} - \frac{4}{9}\frac{1}{4}u + \frac{4}{9}k^2x^3u = z^2\frac{d^2u}{dz^2} + z\frac{du}{dz} + \left(z^2 - \frac{1}{9}\right)u = 0$$

luego

$$u(z) = A\ J_{\frac{1}{3}}(z) + B\ J_{-\frac{1}{3}}(z)$$

y así

$$u = \frac{y}{\sqrt{x}} = A\ J_{\frac{1}{3}}(\frac{2k}{3}x^{\frac{3}{2}}) + B\ J_{-\frac{1}{3}}(\frac{2k}{3}x^{\frac{3}{2}})$$

y por lo tanto la solución de la ecuación es

$$y = \sqrt{x}\left(A\ J_{\frac{1}{3}}(\frac{2k}{3}x^{\frac{3}{2}}) + B\ J_{-\frac{1}{3}}(\frac{2k}{3}x^{\frac{3}{2}})\right)$$

4.3.1 Algunas propiedades

1)

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
J_{-n}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-n}}{2^{-n+2m} m!\Gamma(-n+m+1)} = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-n}}{2^{-n+2m} m!\Gamma(-n+m+1)} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} x^{2(m+n)-n}}{2^{-n+2(m+n)} (m+n)!\Gamma(-n+m+n+1)} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} x^{2m+n}}{2^{2m+n} (m+n)!\Gamma(m+1)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} x^{2m+n}}{2^{2m+n} m!\Gamma(m+n+1)} \\
&= (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+n}}{2^{2m+n} m!\Gamma(m+n+1)} = (-1)^n J_n(x)
\end{aligned}$$

2)

$$\frac{d}{dx}\left(x^\lambda J_\lambda(x)\right) = x^\lambda J_{\lambda-1}(x)$$

En efecto

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(x^\lambda J_\lambda(x)\right) &= \frac{d}{dx}\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+2\lambda}}{2^{2m+\lambda} m!\Gamma(m+\lambda+1)}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m+2\lambda) x^{2m+2\lambda-1}}{2^{2m+\lambda} m!\Gamma(m+\lambda+1)} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (m+\lambda) x^{2m+2\lambda-1}}{2^{2m+\lambda-1} m!\Gamma(m+\lambda+1)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+2\lambda-1}}{2^{2m+\lambda-1} m!\Gamma(m+\lambda)} \\
&= x^\lambda \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+\lambda-1}}{2^{2m+\lambda-1} m!\Gamma(m+\lambda)} = x^\lambda J_{\lambda-1}
\end{aligned}$$

y por tanto

$$\int x^\lambda J_{\lambda-1}(x)dx = x^\lambda J_\lambda(x) + c$$

3)

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-\lambda} J_\lambda(x)\right) = -x^{-\lambda} J_{\lambda+1}(x)$$

En efecto

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(x^{-\lambda}J_\lambda(x)\right) &= \frac{d}{dx}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+\lambda-\lambda}}{2^{2m+\lambda}m!\Gamma(m+\lambda+1)}\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\lambda}m!\Gamma(m+\lambda+1)}\right) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{2m(-1)^m x^{2m-1}}{2^{2m+\lambda}m!\Gamma(m+\lambda+1)} = x^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2m(-1)^m x^{2m-1}x^{\lambda}}{2^{2m+\lambda}m!\Gamma(m+\lambda+1)} \\
&= x^{-\lambda}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+\lambda-1}}{2^{2m+\lambda-1}(m-1)!\Gamma(m+\lambda+1)} \\
&= x^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1} x^{2(m+1)+\lambda-1}}{2^{2(m+1)+\lambda-1}(m+1-1)!\Gamma(m+1+\lambda+1)} \\
&= x^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1} x^{2m+1+\lambda}}{2^{2m+1+\lambda}(m)!\Gamma(m+2+\lambda)} = -x^{-\lambda}J_{\lambda+1}(x)
\end{aligned}
$$

Luego

$$\int x^{-\lambda}J_{\lambda+1}(x)dx = -x^{-\lambda}J_\lambda(x) + c$$

Ahora como

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\lambda}J_\lambda(x)\right) = x^{\lambda}J_{\lambda-1}(x) = \lambda x^{\lambda-1}J_\lambda(x) + x^{\lambda}J'_\lambda(x)$$

se tiene

$$J_{\lambda-1}(x) = J'_\lambda(x) + \frac{\lambda J_\lambda(x)}{x}$$

y como

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-\lambda}J_\lambda(x)\right) = -x^{-\lambda}J_{\lambda+1}(x) = -\lambda x^{-\lambda-1}J_\lambda(x) + x^{-\lambda}J'_\lambda(x)$$

se tiene

$$-J_{\lambda+1}(x) = J'_\lambda(x) - \frac{\lambda J_\lambda(x)}{x}$$

despejando $J'_\lambda(x)$ de 4 y 5 e igualando se tiene

$$
\begin{aligned}
J_{\lambda-1} - \frac{\lambda J_\lambda(x)}{x} &= \frac{\lambda J_\lambda(x)}{x} - J_{\lambda+1}(x) \text{ , es decir} \\
J_{\lambda-1}(x) &= \frac{2\lambda J_\lambda(x)}{x} - J_{\lambda+1}(x)
\end{aligned}
$$

si sumamos 4 y 5 se obtiene

$$J_{\lambda-1}(x) - J_{\lambda+1}(x) = 2J'_\lambda(x)$$

y de aquí

$$\frac{1}{2}\int (J_{\lambda-1}(x) - J_{\lambda+1}(x))\, dx = J_\lambda(x)$$

Como ya sabemos que

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

es decir $J_{-n}(x)$, $J_n(x)$ son linealmente dependientes.
Si λ no es un número entero $J_{-\lambda}(x)$, $J_\lambda(x)$ son linealmente independientes y de acuerdo con la teoria de las ecuaciones diferenciales lineales

$$Y_\lambda(x) = \frac{J_\lambda(x)\cos\pi\lambda - J_{-\lambda}(x)}{\sin\pi\lambda}$$

es tambien una solución de la ecuación diferencial de Bessel y si en ésta solución se hace $\lambda = n$ se llega a una indeterminación y esta se evita derivando numerador y denominador con respecto a λ así:

$$Y_n(x) = \lim_{\lambda\to n} Y_\lambda(x) = \lim_{\lambda\to n}\frac{J_\lambda(x)\cos\pi\lambda - J_{-\lambda}(x)}{\sin\pi\lambda} = \lim_{\lambda\to n}\frac{\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(J_\lambda(x)\cos\pi\lambda - J_{-\lambda}(x)\right)}{\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\sin\pi\lambda\right)}$$

pero

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\lambda}(J_\lambda(x)) &= \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+\lambda}}{2^{\lambda+2m}m!\Gamma(\lambda+m+1)}\right) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}m!\Gamma(\lambda+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\lambda\right)\\
&= \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda \ln\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}m!\Gamma(\lambda+m+1)} + \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+\lambda}}{2^{\lambda+2m}m!}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{1}{\Gamma(\lambda+m+1)}\right)\\
&= \ln\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+\lambda}}{2^{\lambda+2m}m!\Gamma(\lambda+m+1)} + \text{ una serie de potencias}\\
&= \ln\left(\frac{x}{2}\right) J_\lambda(x) + \text{una serie de potencias}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(J_{-\lambda}(x)\right) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m-\lambda}}{2^{-\lambda+2m}m!\Gamma(-\lambda+m+1)}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}m!\Gamma(-\lambda+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\lambda}\right) =$$

$$= -\left(\frac{x}{2}\right)^{-\lambda} \ln\left(\frac{x}{2}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m} m! \Gamma(-\lambda+m+1)} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-\lambda}}{2^{-\lambda+2m} m!} \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{1}{\Gamma(-\lambda+m+1)}\right)$$

$$= -\ln\left(\frac{x}{2}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-\lambda}}{2^{-\lambda+2m} m! \Gamma(-\lambda+m+1)} + \text{una serie de poencias}$$

$$= -\ln\left(\frac{x}{2}\right) J_{-\lambda}(x) + \text{una serie de potencias}$$

así que

$$\begin{aligned}
Y_n(x) &= \lim_{\lambda\to n} Y_\lambda(x) = \lim_{\lambda\to n} \frac{J_\lambda(x)\cos\pi\lambda - J_{-\lambda}(x)}{\sin\pi\lambda} = \lim_{\lambda\to n} \frac{\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(J_\lambda(x)\cos\pi\lambda - J_{-\lambda}(x)\right)}{\frac{\partial}{\partial\lambda}(\sin\pi\lambda)} \\
&= \lim_{\lambda\to n} \frac{\frac{\partial}{\partial\lambda}(J_\lambda(x))\cos\pi\lambda - J_\lambda(x)\sin\pi\lambda - \frac{\partial}{\partial\lambda}(J_{-\lambda}(x))}{(\cos\pi\lambda)\,\pi} \\
&= \frac{1}{\pi} \lim_{\lambda\to n} \frac{\frac{\partial}{\partial\lambda}(J_\lambda(x))\cos\pi\lambda - J_\lambda(x)\sin\pi\lambda - \frac{\partial}{\partial\lambda}(J_{-\lambda}(x))}{(\cos\pi\lambda)} \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\ln\left(\frac{x}{2}\right) J_n(x) + \ln\left(\frac{x}{2}\right) J_n(x)\right] + \text{una serie de poencias} \\
&= \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{x}{2}\right) J_n(x) + \text{una serie de poencias}
\end{aligned}$$

luego como $Y_\lambda(x)$ y $J_\lambda(x)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuacion de Bessel entonces

$$y(x) = A\ J_\lambda(x) + B\ Y_\lambda(x)$$

es la solución general

Más aún

$$Y_n(x) = \begin{cases} \frac{J_n(x)\cos\pi n - J_{-n}(x)}{\sin n\pi} & si \quad \text{n} \neq 0,1,2,3,4, \\ \lim\limits_{\lambda\to n} \frac{J_\lambda(x)\cos\pi\lambda - J_{-\lambda}(x)}{\sin\pi\lambda} & si \quad \text{n} = 0,1,2,3,4 \end{cases}$$

4.3.2 Ecuación modificada de Bessel.

La ecuación

$$x^2 y'' + xy' - \left(x^2 + \lambda^2\right) y = 0$$

se llama ecuación de Bessel modificada y mediante un cambio de variable apropiado se transforma en la ecuación de Bessel.

En efecto :

$$x^2 y'' + xy' - \left(x^2+\lambda^2\right) y = x^2 y'' + xy' + \left((ix)^2 - \lambda^2\right) y = 0 \quad \text{y con} \quad z = ix \quad \text{se tiene que}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}=\frac{dy}{dz}i$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}i\right)=i\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right)=i\frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\right)\frac{dz}{dx}=i^2\frac{d^2y}{dz^2}$$

luego

$$\begin{aligned} x^2y''+xy'+\left((ix)^2-\lambda^2\right)y &= \left(\frac{z}{i}\right)^2 i^2\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{z}{i}\frac{dy}{dz}i+\left(z^2-\lambda^2\right)y \\ &= z^2\frac{d^2y}{dz^2}+z\frac{dy}{dz}+\left(z^2-\lambda^2\right)y=0 \end{aligned}$$

y así una solución es

$$\begin{aligned} y(z) &= J_\lambda(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m z^{2m+\lambda}}{2^{\lambda+2m}m!\Gamma(\lambda+m+1)}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m (ix)^{2m+\lambda}}{2^{\lambda+2m}m!\Gamma(\lambda+m+1)} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m i^{2m+\lambda}x^{2m+\lambda}}{2^{\lambda+2m}m!\Gamma(\lambda+m+1)}=i^\lambda\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m i^{2m}x^{2m+\lambda}}{2^{\lambda+2m}m!\Gamma(\lambda+m+1)} \\ &= i^\lambda\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{2m+\lambda}}{2^{\lambda+2m}m!\Gamma(\lambda+m+1)}=i^\lambda I_\lambda(x) \end{aligned}$$

por lo tanto una solución general de la ecuación modificada de Bessel es

$$y(x)=A\ I_\lambda(x)+B\ I_{-\lambda}(x) \qquad \text{si} \quad \lambda\neq Z$$

Ejemplo 4.8 *Una solución general de la ecuación*

$$x^2y''+xy'-\left(x^2+\frac{3}{5}\right)y=0 \quad es$$

$$y(x)=A\ I_{\sqrt{\frac{3}{5}}}(x)+B\ I_{-\sqrt{\frac{3}{5}}}(x)$$

Algunas propiedades

1)

$$I_{-n}(x)=I_n(x)$$

2)

$$\frac{d}{dx}\left(x^\lambda I_\lambda(x)\right)=x^\lambda I_{\lambda-1}(x)$$

3)

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-\lambda} I_\lambda(x)\right) = x^{-\lambda} I_{\lambda+1}(x)$$

Otra solución de la ecuación modificada de Bessel es

$$K_\lambda = \frac{\pi}{2\sin\lambda\pi}\left[I_{-\lambda}(x) - I_\lambda(x)\right] \quad \text{si } \lambda \neq Z$$

$$K_n = \lim_{\lambda\to n} K_\lambda = \lim_{\lambda\to n} \frac{\pi}{2\sin\lambda\pi}\left[I_{-\lambda}(x) - I_\lambda(x)\right]$$

y así

$$y(x) = A\ I_\lambda(x) + B\ K_\lambda(x)$$

es la solución general de la ecuación de Bessel modificada

4.4 Problema de Sturm Liouville

Una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{d}{dx}\left(r(x)\frac{dy}{dx}\right) + \left[q(x) + \lambda p(x)\right] y = 0 \text{ que satisface las condiciones}$$

$$\begin{array}{llll} Ay(a) & + & By'(a) & = 0 \qquad \text{donde A y B no son ambas cero} \\ Cy(b) & + & Dy'(b) = 0 & \qquad \text{donde C y D no son ambas cero} \end{array}$$

con $p(x)$, $r'(x)$, $q(x), r(x)$ funciones reales y continuas para todo x en un intervalo $a \leq x \leq b$ y λ un parametro independiente de x, y. A, B, C, D constantes reales, se llama ecuación diferencial de Sturm-Liouville.

Ejemplo 4.9

$y'' + \lambda y = 0 \quad y(0) = 0 \quad y(L) = 0$ *es una ecuación diferencial de Sturm-Liouville*

pues es de la forma

$$y'' + \lambda y = \frac{d}{dx}\left(1.\frac{dy}{dx}\right) + \left[0 + \lambda.1\right] y = 0$$

Ejemplo 4.10

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + \left[4x^3 + \lambda x^2\right] y = 0 \quad \textit{con}$$

$$\begin{array}{llll} 3y(1) & + & 4y'(1) & = 0 \\ 4y(3) & - & 3y'(3) & = 0 \end{array}$$

es una ecuación diferencial de Sturm-Liouville

Un problema de Sturm-Liouville consiste en solucionar su ecuación, es decir, en hallar una función que satisfaga la ecuación con sus dos condiciones. Una soluciòn de cualquier problema de Sturm-Liouville es la solución nula, que no es muy útil, por tanto centraremos nuestra atención en la busqueda de soluciones no nulas f(x), llamadas funciones propias y los valores de λ para los que esas soluciones existen se llaman valores propios.

Ejemplo 4.11

$$y'' + \lambda y = 0 \quad y(0) = 0 \quad y(L) = 0 \quad \textit{es una ecuación diferencial de Sturm-Liouville}$$

pues es de la forma

$$y'' + \lambda y = \frac{d}{dx}\left(1.\frac{dy}{dx}\right) + [0 + \lambda.1]\, y = 0$$

Para hallar la solución procederemos así :

a) Si $\lambda = 0$ entonces

$$y'' = 0 \quad \text{luego} \quad y(x) = Ax + B \;\text{ y como }\; y(0) = A.0 + B = 0 \;\text{ entonces } B = 0$$

por tanto

$$y(x) = Ax \;\text{ y como }\; y(L) = AL = 0 \;\text{ entonces }\; A = 0$$

y así la solución de la ecuación es

$$y(x) = 0$$

b) Si $\lambda < 0$ entonces $y'' + \lambda y = 0$ tiene por solución

$$y(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x} \;\text{ y como } y(0) = A + B = 0 \text{ entonces } A = -B$$

por tanto

$$y(x) = A(e^{\sqrt{-\lambda}x} - e^{-\sqrt{-\lambda}x}) \quad \text{ y como }\; y(L) = A(e^{\sqrt{-\lambda}L} - e^{-\sqrt{-\lambda}L}) \;= 0 \text{ entonces } A = 0$$

y así la solución de la ecuación es

$$y(x) = 0$$

c) Si $\lambda > 0$ entonces la solución de la ecuación $y'' + \lambda y = 0$ es

$$y(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x \;\text{ y como } y(0) = A\cos\sqrt{\lambda}0 + B\sin\sqrt{\lambda}0 = A = 0 \text{ entonces}$$

$$y(x) = B\sin\sqrt{\lambda}x \;\text{ y como } y(L) = B\sin\sqrt{\lambda}L = 0 \text{ entonces } \sin\sqrt{\lambda}L = 0 \text{ y de aquí}$$

$$\sqrt{\lambda}L = n\pi \;\text{ entonces } \lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \;\text{ que se llamará valor propio}$$

por lo tanto la solución es

$$y(x) = B \sin \frac{n\pi x}{L} \quad \text{que se llamará función propia}$$

En forma análoga considere la ecuación

$$y'' + \lambda y = 0 \quad y'(0) = 0 \quad y'(L) = 0$$

y mustre que la solución es

$$y(x) = A \cos \frac{n\pi x}{L} \quad \text{que se llamara función propia}$$

correspondiente al valor propio

$$\lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

4.4.1 Ortogonalidad de las funciones propias.

Supongamos que las funciones $p(x)$, $r'(x)$, $q(x), r(x)$ de la ecuación diferencial de Sturm-Liouville $\frac{d}{dx}\left(r(x)\frac{dy}{dx}\right) + [q(x) + \lambda p(x)]\, y = 0$ son reales y continuas en el intervalo $a \leq x \leq b$. Y sean $Y_m(x)$ y $Y_n(x)$ funciones propias del problema de Sturm-Liouville las cuales corresponden a los valores propios diferentes λ_m y λ_n entonces las funciones $Y_m(x)$ y $Y_n(x)$ son ortogonales en el intervalo $a \leq x \leq b$ con respecto a la función p(x).
En efecto:
Como las funciones $Y_m(x)$ y $Y_n(x)$ son soluciones de la ecuación diferencial de Sturm-Liouville entonces

$$(r(x)Y_m'(x))' + [q(x) + \lambda_m p(x)]\, Y_m(x) = 0 \quad (1)$$

$$(r(x)Y_n'(x))' + [q(x) + \lambda_n p(x)]\, Y_n(x) = 0 \qquad (2)$$

Multiplicando (1) por $Y_n(x)$ y (2) por $-Y_m(x)$ y simplificando se obtiene que

$$(\lambda_m - \lambda_n)\,[p(x)Y_m(x)Y_n(x)] = (r(x)Y_n'(x))'\, Y_m(x) - (r(x)Y_m'(x))'\, Y_n(x)$$

si integramos entre a y b se obtiene

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b p(x)Y_m(x)Y_n(x)dx = \int_a^b (r(x)Y_n'(x))'\, Y_m(x)dx - \int_a^b (r(x)Y_m'(x))'\, Y_n(x)dx =$$

$$\begin{aligned}
&= r(x)Y_n'(x)Y_m(x)_a^b - \int_a^b r(x)Y_n'(x)Y_m'(x)dx - r(x)Y_m'(x)Y_n(x)_a^b + \int_a^b r(x)Y_n'(x)Y_m'(x)dx \\
&= r(b)\left[Y_n'(b)Y_m(b) - Y_m'(b)Y_n(b)\right] - r(a)\left[Y_n'(a)Y_m(a) - Y_m'(a)Y_n(a)\right]
\end{aligned}$$

luego

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b p(x)Y_m(x)Y_n(x)dx = r(b)\left[Y_n'(b)Y_m(b) - Y_m'(b)Y_n(b)\right] - r(a)\left[Y_n'(a)Y_m(a) - Y_m'(a)Y_n(a)\right]$$

Así que:
1) Si

$$r(a) = 0 \quad \text{y} \qquad r(b) = 0$$

entonces

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b p(x)Y_m(x)Y_n(x)dx = 0 \ \text{ por lo tanto}$$

$$\int_a^b p(x)Y_m(x)Y_n(x)dx = 0 \qquad \text{si } \ m \neq n$$

2) Si

$$r(a) \neq 0 \quad \text{y} \qquad r(b) = 0$$

entonces

$$AY_n(a) + BY_n'(a) = 0$$
$$AY_m(a) + BY_m'(a) = 0$$

si multiplicamos la primera ecuación por $Y_m(a)$ y la segunda por $-Y_n(a)$ y sumando se obtiene que

$$B(Y_n'(a)Y_m(a) - Y_m'(a)Y_n(a)) = 0 \ \text{ y como } B \neq 0 \text{ entonces}$$

$$Y_n'(a)Y_m(a) - Y_m'(a)Y_n(a) = 0 \ \text{ y así}$$

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b p(x)Y_m(x)Y_n(x)dx = 0 \ \text{ por lo tanto}$$

$$\int_a^b p(x)Y_m(x)Y_n(x)dx = 0 \qquad \text{si } \ m \neq n$$

en forma análoga si multiplicamos la primera ecuación por $Y_m'(a)$ y la segunda por $-Y_n'(a)$ y sumando se obtiene que

$$A(Y_m'(a)Y_n(a) - Y_m(a)Y_n'(a)) = 0 \text{ y como } A \neq 0 \text{ entonces}$$

$$Y_m'(a)Y_n(a) - Y_m(a)Y_n'(a) = 0$$

y así

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b p(x)Y_m(x)Y_n(x)dx = 0 \text{ por lo tanto}$$

$$\int_a^b p(x)Y_m(x)Y_n(x)dx = 0 \qquad \text{si } m \neq n$$

3) Si

$$r(a) = 0 \quad \text{y} \qquad r(b) \neq 0$$

entonces

$$AY_n(b) + BY_n'(b) = 0$$
$$AY_m(b) + BY_m'(b) = 0$$

si multiplicamos la primera ecuación por $Y_m(b)$ y la segunda por $-Y_n(b)$ y sumando se obtiene que

$$B(Y_n'(b)Y_m(b) - Y_m'(b)Y_n(b)) = 0 \text{ y como } B \neq 0 \text{ entonces}$$

$$Y_n'(a)Y_m(a) - Y_m'(a)Y_n(a) = 0 \text{ y así}$$

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b p(x)Y_m(x)Y_n(x)dx = 0 \text{ por lo tanto}$$

$$\int_a^b p(x)Y_m(x)Y_n(x)dx = 0 \qquad \text{si } m \neq n$$

Análogamente si $A \neq 0$
4) Si

$$r(a) \neq 0 \quad \text{y} \qquad r(b) \neq 0$$

considere las condiciones

$$AY_m(a) + BY_m'(a) = 0 \qquad\qquad AY_m(b) + BY_m'(b) = 0$$

$$AY_n(a) + BY_n'(a) = 0 \qquad\qquad AY_n(b) + BY_n'(b) = 0$$

y análogo a los casos anteriores
5) Si

$$r(a) = r(b) \;\; \text{entonces}$$

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b p(x)Y_m(x)Y_n(x)dx = r(b)\left[Y_n'(b)Y_m(b) - Y_m'(b)Y_n(b) - Y_n'(a)Y_m(a) - Y_m'(a)Y_n(a)\right] = 0$$

y así

$$\int_a^b p(x)Y_m(x)Y_n(x)dx = 0 \qquad \text{si} \;\; m \neq n$$

Ejercicio. Esto completa la demostración

Ejemplo 4.12 *La ecuación de Legendre se puede escribir como*

$$\left[(1-x^2)y'\right]' + \lambda y = 0 \qquad \lambda = n(n+1)$$

por tanto es una ecuación de Sturm Liouville con $r(x) = 1 - x^2 \quad q(x) = 0 \;\; y \quad p(x) = 1$. $r(x) = 0$ *sii* $x = \pm 1$ *entonces* $a = -1, b = 1$ *y* $P_n(x)$ *son las funciones propias, entonces*

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x) = 0 \quad si \quad m \neq n$$

4.5 La ecuación de Hermite

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0 \;\; n = 0, 1, 2, ..$$

se puede escribir como

$$y'' - 2xy' + 2ny = e^{-x^2}y'' - 2xe^{-x^2}y' + 2ne^{-x^2}y = \left(e^{-x^2}y'\right)' + 2ne^{-x^2}y = 0$$

es una ecuación de Sturm Liouville y los polinomios de Hermite están dados por

$$H_n(x) = \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^m n!\,(2x)^{n-2m}}{m!\,(n-2m)!} = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$$

y además los polinomios de Hermite son ortogonales en $(-\infty, +\infty)$, $\left(\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-x^2} = 0\right)$ es decir,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = \begin{cases} 0 & si \quad m \neq n \\ 2^n n! \sqrt{\pi} & si \quad m = n \end{cases}$$

Calculemos los polinomios de Hermite.

$$\begin{aligned} t = e^{-x^2} \quad &\text{entonces } \frac{d^n t}{dx^n} = \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right) = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(-2xe^{-x^2}\right) \\ &= \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left(\left(4x^2-2\right)e^{-x^2}\right) = \frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}}\left(-\left(8x^3-12x\right)e^{-x^2}\right) = ... \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right) &= \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left((-1)H_1(x)e^{-x^2}\right) = \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left((-1)^2 H_2(x)\right)e^{-x^2} \\ &= \frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}}\left((-1)^3 H_3(x)\right)e^{-x^2} = ... = \frac{d^{n-n}}{dx^{n-n}}\left((-1)^n H_n(x)\right)e^{-x^2} \end{aligned}$$

luego

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right) = (-1)^n H_n(x) e^{-x^2} \quad \text{así que}$$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$$

4.6 La ecuación de Laguerre

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0$$

se puede escribir como

$$xe^{-x}y'' + (1-x)e^{-x}y' + ne^{-x}y = \left(xe^{-x}y'\right)' + ne^{-x}y = 0$$

es una ecuación de Sturm Liouville y los polinomios de Laguerre están dados por

$$L_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m n! x^m}{(m!)^2 (n-m)!} = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right)$$

y además los polinomios de Laguerre son ortogonales en

$$[0, +\infty), \left(r(0) = 0 \quad y \lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0\right)$$

es decir,

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = \begin{cases} 0 & si \quad m \neq n \\ [(n)!]^2 & si \quad m = n \end{cases}$$

4.7 Ecuación de Chebyshe

$$\left(1-x^2\right)y''-xy'+n^2y=0$$

Se puede escribir como

$$\left(\sqrt{1-x^2}y'\right)'+\frac{n^2y}{\sqrt{1-x^2}}=0$$

Los polinomios están dados por

$$T_n(x)=\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{n!x^{n-2m}\left(x^2-1\right)^n}{(2m)!\,(n-2m)!}$$

y

$$T_o(x)=1 \quad T_1(x)=x \qquad T_2(x)=2x^2-1 \quad T_3(x)=4x^3-3x$$

y si

$$\cos\theta=x \quad 0\le\theta\le\pi,\ \text{observemos que } T_n(x)=\cos n\theta=\cos(n\arccos x)\ \ \text{-1}\le x\le 1$$

ya que

$$T_o(x)=\cos(0\arccos x)=\cos(0)=1$$

$$T_1(x)=\cos(1.\arccos x)=\cos(\arccos x)=x$$

$$T_2(x)=\cos(2\theta)=2\cos^2\theta-1=2x^2-1$$

$$T_3(x)=\cos(3\theta)=4\cos^3\theta-3\cos\theta=4x^3-3x$$

$$r(x)=0 \text{ sisi } x=\pm1 \ \text{ luego mostraremos que}$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}T_n(x)T_m(x)dx=\begin{cases}0 & si \quad \text{n}\neq m\neq 0\\ \pi & si \quad n=m=0\\ \frac{\pi}{2} & si \quad n=m\end{cases}$$

En efecto :

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}T_n(x)T_m(x)dx=\int_{-1}^{1}\frac{\cos(n\arccos x)\cos(m\arccos x)dx}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\int_{0}^{\pi}\cos n\theta\cos m\theta d\theta=\frac{\sin\left(n+m\right)\theta}{2\left(n+m\right)}+\frac{\sin\left(n-m\right)\theta}{2\left(n-m\right)}\Big]_0^{\pi}=0 \ \text{ si n}\neq m\neq 0$$

Si

$$n = m = 0 \text{ entonces } \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x) T_m(x) dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \pi$$

Si

$$n = m \text{ entonces } \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x) T_m(x) dx = \int_{0}^{\pi} \cos n\theta \cos n\theta d\theta = \int_{0}^{\pi} \cos^2 n\theta d\theta = \frac{\pi}{2}$$

Ejemplo 4.13 *Ecuación paramétrica de Bessel*

Sabemos que $\mathrm{J}_n(\lambda x)$ satisface la ecuación diferencial

$$x^2 y'' + x y' + \left(\lambda^2 x^2 - n^2\right) y = 0$$

y que esta ecuación la podemos escribir como

$$[x y'(x)]' + \left(-\frac{n^2}{x} + \lambda^2 x\right) y(x) = 0$$

o

$$[x J_n'(\lambda x)]' + \left(-\frac{n^2}{x} + \lambda^2 x\right) J_n(\lambda x) = 0$$

luego nuestro propósito es buscar aquellas soluciones en $[0, R]$ que satisfacen la condición de frontera $\mathrm{J}_n(\lambda R) = 0$, que forman un conjunto ortogonal en $[0, R]$.Denotemos por $\lambda R = \alpha_{mn}$ los ceros de $J_n(\lambda R)$, o por $\lambda = \lambda_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{R}$ y así obtenemos para n =1,2,3,.. fijo que las funciones $J_n(\lambda_{mn} x)$, forman un conjunto ortogonal en $[0, R]$ con respecto a la función p(x)=x, es decir, que

$$\int_{0}^{R} x J_n(\lambda_{mn} x) J_n(\lambda_{kn} x) dx = 0 \quad \text{si } m \neq k$$

Ahora mostraremos que

$$\int_{0}^{R} x J_n^2(\lambda x) dx = \frac{R^2 J_{n+1}^2(\lambda R)}{2} = \frac{R^2 J_{n+1}^2(\alpha_{mn})}{2}$$

En efecto

$$[x J_n'(\lambda x)]' + \left(-\frac{n^2}{x} + \lambda^2 x\right) J_n(\lambda x) = 0$$

y multipliquemos ambos miembros de la ecuación por $2xJ_n'(\lambda x)$ para obtener

$$[xJ_n'(\lambda x)]' \, 2xJ_n'(\lambda x) + \left(-\frac{n^2}{x} + \lambda^2 x\right) J_n(\lambda x) 2xJ_n'(\lambda x) = 0$$

que se puede escribir como

$$\{[xJ_n'(\lambda x)]^2\}' + \left(\lambda^2 x^2 - n^2\right) \{[J_n(\lambda x)]^2\}' = 0$$

si integramos entre 0 y R se tiene

$$\left[[xJ_n'(\lambda x)]^2\right]_0^R = -\int_0^R \left(\lambda^2 x^2 - n^2\right) \left[\{[J_n(\lambda x)]^2\}'\right] dx$$

A) hagamos $dv = \left[\{[J_n(\lambda x)]^2\}'\right] dx$, entonces

$$v = [J_n(\lambda x)]^2, \quad u = \left(\lambda^2 x^2 - n^2\right), \quad du = 2\lambda^2 x dx$$

luego

$$\begin{aligned} \left[[xJ_n'(\lambda x)]^2\right]_0^R &= -\int_0^R \left(\lambda^2 x^2 - n^2\right) \left[\{[J_n(\lambda x)]^2\}'\right] dx = \\ &= -\left[\left(\lambda^2 x^2 - n^2\right) [J_n(\lambda x)]^2\right]_0^R + 2\lambda^2 \int_0^R xJ_n^2(\lambda x) dx = 2\lambda^2 \int_0^R xJ_n^2(\lambda x) dx \end{aligned}$$

B) Recordemos que

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-\lambda} J_\lambda(x)\right) = -x^{-\lambda} J_{\lambda+1}(x) \ \text{ y de aquí se tiene}$$

$$x^{-\lambda} J_\lambda'(x) = \lambda x^{-\lambda-1} J_\lambda(x) - x^{-\lambda} J_{\lambda+1}(x)$$

y si reemplazamos x por s y $\lambda = n$ se tiene

$$s^{-n} J_n'(s) = n s^{-n-1} J_n(s) - s^{-n} J_{n+1}(s)$$

y multiplicando por s^{n+1} se tiene

$$sJ_n'(s) = nJ_n(s) - sJ_{n+1}(s)$$

si $s = \lambda x$ entonces

$$J_n'(s) = \frac{dJ_n(s)}{ds} = \frac{dJ_n(\lambda x)}{dx}\frac{dx}{ds} = \frac{dJ_n(\lambda x)}{dx}\frac{1}{\frac{ds}{dx}} = \frac{J_n'(\lambda x)}{\lambda} \text{ luego}$$

$$sJ_n'(s) = (\lambda x)\frac{J_n'(\lambda x)}{\lambda} = xJ_n'(\lambda x) = nJ_n(\lambda x) - \lambda x J_{n+1}(\lambda x)$$

y así

$$\Big[[xJ_n'(\lambda x)]^2\Big]_0^R = \Big[[nJ_n(\lambda x) - \lambda x J_{n+1}(\lambda x)]^2\Big]_0^R = \lambda^2 R^2 J_{n+1}^2(\lambda R)$$

así que

$$2\lambda^2 \int_0^R xJ_n^2(\lambda x)dx = \lambda^2 R^2 J_{n+1}^2(\lambda R)$$

luego

$$\int_0^R xJ_n^2(\lambda x)dx = \frac{R^2 J_{n+1}^2(\lambda R)}{2} = \frac{R^2 J_{n+1}^2(\alpha_{mn})}{2}$$

Si f(x) admite un desarrollo en serie de Bessel entonces

$$f(x) = C_1 J_n(\lambda_{1n}x) + C_2 J_n(\lambda_{2n}x) + C_3 J_n(\lambda_{3n}x) + C_4 J_n(\lambda_{4n}x) + ...$$

donde

$$C_m = \frac{2}{R^2 J_{n+1}^2(\alpha_{mn})} \int_0^R xf(x)J_n(\lambda_{mn}x)dx$$

Los modelos matemáticos de muchos fenómenos conducen a ecuaciones en derivadas parciales ya que en ellos intervienen dos o más variables independientes

1. Mostrar que

$$x^2 = \frac{1}{3}P_o(x) + 0.P_1(x) + \frac{2}{3}.P_2(x) + 0.P_3(x) + ...$$

2. Mostrar que la serie de Hermite de $f(x) = x^3$ viene dada por

$$x^3 \ = 0.H_0(x) + \frac{3}{4}H_1(x) + 0.H_2(x) + \frac{1}{8}H_3(x) + 0.H_4(x) + ...$$

3. Solucionar la ecuación

$$y'' + e^{2x}y = 0 \ \text{ madiante el cambio de variable } e^x = z$$

4. Mostrar que

$$x^2 = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{J_1(\lambda_k)} \left(\frac{1}{\lambda_k} - \frac{4}{\lambda_k^3} \right) J_0(\lambda_k x) \quad 0 < x < 1$$

5. Mostrar que

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x - x\cos x}{x} \right) \qquad J_{-\frac{3}{2}}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{x\sin x + \cos x}{x} \right)$$

indicación $J_{\frac{3}{2}}(x) = -J_{-\frac{1}{2}}(x) + \frac{1}{x}J_{\frac{1}{2}}(x)$. Análoga para la segunda

6. Mostrar que

$y = x^n J_n(x)$ es solución de la ecuación $xy'' + (1-2n)\,y' + xy = 0$ x>0

Indicación, hacer el cambio de variable $u = \dfrac{y}{x^n}$ y tranformarla en la ecuacion de Bessel

7. Mostrar que

$$\int x^3 J_o(x)dx = x^3 J_1(x) + 2x^2 J_o(x) - 4x^3 J_1(x)$$

4.8 Definición de Ecuación diferencial Parcial

Una ecuación diferencial en derivadas parciales, es una ecuación que contiene una o más derivadas parciales de una función desconocida de más de una variable, por ejemplo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

es una ecuación en derivadas parciales con u(x,y,z) función desconocida de tres variables x,y,z

En este capítulo, se hará un estudio de las ecuaciones diferenciales parciales lineales de orden 2

En general una ecuación diferencial parcial lineal de orden 2, de dos variables independientes x y y es de la forma

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + E(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + F(x,y)u = H(x,y)$$

Si $H(x,y) = 0$ la ecuación

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + E(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + F(x,y)u = 0$$

se dice homogénea y en caso contrario no homogénea.

La solución general de una ecuación diferencial parcial lineal no homogenea, es la solución general de la ecuación diferencial parcial lineal homogénea, más una solución particular de la no homogénea.

Si u_1, u_2, u_3, u_4,.... son soluciones de una ecuación diferencial parcial homogénea y si a,b,c,d ...son constantes reales entonces

$$u = a\ u_1 + b\ u_2 + c\ u_3 + d\ u_4 + ...$$

es también una solución de la ecuación diferencial parcial homogénea.

4.9 Métodos para solucionar algunas ecuaciones en derivadas parciales

Ejemplo 4.14 *Solucionar la ecuación*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

En efecto :

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$ *entonces integrando con respecto a x la igualdad, se tiene que*

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = f(y)$ *e integrando con respecto a y la igualdad, se concluye que*

$$u(x, y) = F(y) + G(x)$$

con F y G funciones diferenciables

Ejemplo 4.15 *Solucionar la ecuación*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = xy \quad si \quad u(x, 0) = x \quad y \quad u(1, y) = \cos y$$

En efecto

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = xy$$

entonces integrando con respecto a x, ambos lados de la igualdad se tiene que

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^2 y}{2} + f(y)$$

e integrando con respecto a y se tiene que

$$u(x,y) = \frac{x^2y^2}{4} + \int f(y)dy + g(x) = \frac{x^2y^2}{4} + h(y) + g(x)$$

así

$$u(x,y) = \frac{x^2y^2}{4} + h(y) + g(x)$$

es la solución general .
Ahora como

$$u(x,0) = x = h(0) + g(x)$$

entonces

$$g(x) = x - h(0)$$

y así

$$u(x,y) = \frac{x^2y^2}{4} + h(y) + x - h(0)$$

y como

$$u(1,y) = \cos y = \frac{y^2}{4} + h(y) + 1 - h(0)$$

entonces

$$h(y) = \cos y - \frac{y^2}{4} - 1 + h(0)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{x^2y^2}{4} + h(y) + x - h(0) = \frac{x^2y^2}{4} + \cos y - \frac{y^2}{4} - 1 + h(0) + x - h(0) \\ &= \frac{x^2y^2}{4} + \cos y - \frac{y^2}{4} - 1 + x \quad \text{es la solución pedida} \end{aligned}$$

Ejemplo 4.16 *Solucionar la ecuación*

$$t\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = xt$$

La ecuación se puede escribir así

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(t\frac{\partial u}{\partial t} + u\right) = xt$$

y así integrando con respecto a x ambos lados de esta igualdad, se tiene

$$t\frac{\partial u}{\partial t} + u = \frac{x^2 t}{2} + f(t)$$

y como

$$t\frac{\partial u}{\partial t}+u=\frac{\partial}{\partial t}(tu)=\frac{x^2t}{2}+f(t)$$

entonces

$$ut=\frac{x^2t^2}{4}+\left(\int f(t)dt\right)+h(x) \text{ por lo tanto}$$

$$u(x,t)=\frac{x^2t}{4}+\frac{F(t)}{t}+\frac{h(x)}{t}$$

es la solución general, si $\int f(t)dt=F(t)$

Ejemplo 4.17 *Solucionar la ecuación*

$$a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

En efecto: Supongamos que la solución esta dada por

$$u=e^{mx+ny}$$

y hallemos m y n.

Como $u=e^{mx+ny}$ entonces

$$\frac{\partial u}{\partial x}=me^{mx+ny} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y}=ne^{mx+ny} \quad \text{por tanto}$$

$$a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}=ame^{mx+ny}+bne^{mx+ny}=(am+bn)e^{mx+ny}=0$$

por lo tanto

$$am+bn=0 \text{ y de aquí } m=-\frac{bn}{a}$$

y así

$$u=e^{-\frac{bn}{a}x+ny}=e^{\frac{n}{a}(ay-bx)}=f(ay-bx) \text{ con f diferenciable}$$

entonces la solución de la ecuación

$$a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

es

$$u(x,y)=f(ay-bx)$$

Ejemplo 4.18 *Si una función F(x,y) se puede escribir como $x^n G(\frac{y}{x})$ se llama función homogenea de grado n y cualquier función homogenea diferenciable de orden n satisface la ecuación*

$$x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} = nF(x,y) \quad \textit{(Ejercicio)}$$

Aplicar este resultado para hallar la solución de la ecuación

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2u(x,y) \quad \textit{con } u(1,y) = 20\cos y$$

En efecto : Como la solución es de la forma

$$u(x,y) = Ax^2G(\frac{y}{x}), \ \textit{pués } n = 2 \quad y \quad u(x,y) = F(x,y)$$

entonces

$$u(1,y) = AG(y) = 20\cos y$$

por lo tanto

$$A = 20 \qquad y \qquad G(y) = cosy \quad \textit{luego} \quad G(\frac{y}{x}) = \ \cos\frac{y}{x}$$

y así

$$u(x,y) = 20x^2G(\frac{y}{x}) = 20x^2\cos\frac{y}{x}$$

es la solución

Ejemplo 4.19 *Solucionar la ecuación*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 9\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 18\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

En efecto : Supongamos que la solución es de la forma

$$u = e^{mx+ny}$$

entonces

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = m^2e^{mx+ny} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n^2e^{mx+ny} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = mne^{mx+ny}$$

entoces

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 9\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 18\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= m^2e^{mx+ny} - 9mne^{mx+ny} + 18n^2e^{mx+ny} \\ &= (m^2 - 9mn + 18n^2)e^{mx+ny} = 0\end{aligned}$$

por lo tanto

$$m^2 - 9mn \quad + 18n^2 = (m - 3n)\,(m - 6n) = 0$$

luego

$$m = 3n \quad y\ m = 6n$$

por tanto

$$u_1 = e^{3nx+ny} \quad = e^{n(3x+y)} \quad = f(y + 3x), \qquad u_2 = e^{n(6x+y)} \quad = g(y + 6x)$$

luego la solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 9\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 18\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

es

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y) = f(y + 3x) + g(y + 6x)$$

con f y g funciones diferenciables y en forma más general

Solucionemos la ecuación diferencial parcial lineal homogenea con coeficientes constantes

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Se supone que la solución es de la forma $f(y + mx)$ (método de los coeficientes indeterminados) entonces

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = m^2 f''(y + mx) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = mf''(y + mx) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(y + mx)$$

entonces reemplazando en la ecuación se tiene que

$$\begin{aligned} a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= am^2 f''(y + mx) + bmf''(y + mx) + cf''(y + mx) \\ &= (am^2 + bm + c)f''(y + mx) = 0 \end{aligned}$$

y como $f(y + mx)$ es solución entonces

$$am^2 + bm + c = 0 = (m - m_1)(m - m_2)$$

y analizando el tipo de raíces se tiene que :
1) $a \neq 0$ las raíces pueden ser diferentes y en tal caso la solución general es

$$u(x, y) = f(y + m_1 x) + g(y + m_2 x)$$

con f y g funciones diferenciables

2) Las raíces pueden ser iguales y en tal caso la solución general es

$$u(x,y) = f(y + m_1 x) + xg(y + m_1 x) \quad \text{ó} \quad u(x,y) = f(y + m_1 x) + yg(y + m_1 x)$$

3) Si $a = 0$ y $b \neq 0$, entonces la solución general es

$$u(x,y) = f(y + m_1 x) + g(x)$$

4) si $a = 0$, $b = 0$ *y* $c \neq 0$ entonces la solución general es

$$u(x,y) = f(x) + yg(x)$$

Ejemplo 4.20 *Solucionar la ecuación*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Aquí se tiene que $m^2 - 5m + 6 = 0 = (m-3)(m-2)$ *y asi* $m = 2$ *y* $m = 3$ *luego la solución general de la ecuación*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

es

$$u(x,y) = f(y + 2x) + g(y + 3x)$$

Ejemplo 4.21 *Solucionar la ecuación*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

En efecto :

Aquí se tiene que $m^2 - 4m + 4 = 0 = (m-2)(m-2)$ y asi $m = 2$ *y* $m = 2$ luego la solución general de la ecuación es

$$u(x,y) = f(y + 2x) + xf(y + 2x)$$

Ejemplo 4.22 *Solucionar la ecuación no homogenea*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{2x+3y}$$

La solución de la ecuación homogenea es

$$u_h(x,y) = f(y+x) + g(y-x) \quad \textit{pues} \quad m^2 - 1 = 0 \quad y \quad m = \pm 1$$

Para hallar la solución particular se supone que la solución es de la forma

$$u_p(x,y) = Ae^{2x+3y}$$

y para hallar la constante A se deriva, se reemplaza en la ecuación y se igualan coeficientes , es decir,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4Ae^{2x+3y} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 9Ae^{2x+3y} \quad \textit{y así}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4Ae^{2x+3y} - 9Ae^{2x+3y} = -5Ae^{2x+3y} = e^{2x+3y} \quad \textit{entonces}$$

$$-5A = 1 \quad \textit{y asì} \quad A = -\frac{1}{5}$$

y la solución particular es

$$u_p(x,y) = Ae^{2x+3y} = -\frac{1}{5}e^{2x+3y}$$

por lo tanto la solución general es

$$u(x,y) = u_h(x,y) + u_p(x,y) = f(y+x) + g(y-x) - \frac{1}{5}e^{2x+3y}$$

Ejemplo 4.23 *Solucionar la ecuación*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin(x+y)$$

La solución de la ecuación homogenea es

$$u_h(x,y) = f(y-2x) + g(x+y) \quad \textit{pues} \quad m + m^2 - 2 = 0 \quad y \quad m = -2 \;\; y \;\; m = 1$$

Para hallar la solución particular, se supone que la solución es de la forma

$$u_p \;= Ax\sin(x+y) + Bx\cos(x+y)$$

entonces

$$\frac{\partial^2 u_p}{\partial x^2} = 2A\cos(x+y) - 2B\sin(x+y) - Ax\sin(x+y) - Bx\cos(x+y)$$

$$\frac{\partial^2 u_p}{\partial y^2} = -Ax\sin(x+y) - Bx\cos(x+y)$$

$$\frac{\partial^2 u_p}{\partial x \partial y} = A\cos(x+y) - Ax\sin(x+y) - Bx\cos(x+y) - B\sin(x+y)$$

entonces reemplazando y haciendo las operaciones algebraicas se tiene que

$$\frac{\partial^2 u_p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_p}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial^2 u_p}{\partial y^2} = 3A\cos(x+y) - 3B\sin(x+y) = \sin(x+y)$$

luego

$$3A = 0 \ \ y \quad -3B = 1 \ \ y\ así\ \ B = -\frac{1}{3} \ y \ \ A = 0$$

entonces

$$u_p \ \ = -\frac{1}{3}x\cos(x+y)$$

y la solución general es

$$u = f(y-2x) + g(x+y) - \frac{1}{3}x\cos(x+y)$$

Ejemplo 4.24 *Solucionar la ecuación*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{2x+y}$$

La solución de la ecuación homogenea es

$$u_h(x,y) = f(y+2x) + g(y-2x) \ \ pues \ \ m^2 - 4 = 0 \ y \ \ m = \pm 2$$

Para hallar la solución particular se supone que la solución es de la forma

$$u_p(x,y) = Axe^{2x+y} \ pues\ en\ la\ homogenea\ se\ repite \ \ e^{2x+y}$$

y para hallar la constante A se deriva, se reemplaza en la ecuación y se igualan coeficientes , es decir,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4Ae^{2x+y} + 4Axe^{2x+y} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = Axe^{2x+y} \ \ y\ así$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4Ae^{2x+y} + 4Axe^{2x+y} - 4Axe^{2x+y} = 4Ae^{2x+y} = e^{2x+y} \quad \textit{entonces}$$

$$4A = 1 \quad \textit{y asì} \quad A = \frac{1}{4}$$

y la solución particular es

$$u_p(x,y) = \frac{1}{4}xe^{2x+y}$$

por lo tanto la solución general es

$$u(x,y) = u_h(x,y) + u_p(x,y) = f(y+2x) + g(y-2x) + \frac{1}{4}xe^{2x+y}$$

Ejemplo 4.25 *Solucionar la ecuación*

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \textit{si} \quad u(0,y) = 4e^{-y} + 2e^{-4y}$$

Ahora en este ejemplo se aplicará el método de separación de variables, que consiste en suponer que la solución es de la forma

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

entonces

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X'(x)Y(y) \qquad y \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = X(x)Y'(y)$$

luego

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = X'(x)Y(y) + 2X(x)Y'(y) = 0$$

y así

$$\frac{X'(x)}{2X(x)} + \frac{Y'(y)}{Y(y)} = 0$$

por lo tanto

$$\frac{X'(x)}{2X(x)} = -\frac{Y'(y)}{Y(y)}$$

y de aquí se obtienen las ecuaciones

$$\frac{X'(x)}{2X(x)} = -\frac{Y'(y)}{Y(y)} = \lambda \quad \textit{una constante}$$

y de aquí

$$X'(x) - 2\lambda X(x) = 0 \quad y \quad Y'(y) + \lambda Y(y) = 0$$

y solucionando estas ecuaciones se tiene que

$$X(x) = ke^{2\lambda x} \quad y \quad Y(y) = pe^{-\lambda y}$$

y la solución general es

$$u(x,y) = X(x)Y(y) = be^{2\lambda x}e^{-\lambda y} = be^{\lambda(2x-y)}$$

Ahora buscaremos la solución que satisfaga la condición inicial

$$u(0,y) = 4e^{-y} + 2e^{-4y} = be^{\lambda(-y)}$$

que no es cierta para ninguna elección de las constantes b y λ.

Para solucionar este inconveniente se utiliza el hecho de que si

$$u_1(x,y) = b_1e^{\lambda_1(2x-y)} \quad y \quad u_2(x,y) = b_2e^{\lambda_2(2x-y)}$$

son soluciones de

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

entonces

$$u(x,y) = b_1e^{\lambda_1(2x-y)} + b_2e^{\lambda_2(2x-y)} \quad \text{es una solución}$$

y así

$$u(0,y) = 4e^{-y} + 2e^{-4y} = b_1e^{-\lambda_1 y} + b_2e^{-\lambda_2 y}$$

por lo tanto

$$b_1 = 4, \quad -\lambda_1 = -1, \quad b_2 = 2, \qquad -\lambda_2 = -4$$

y así la solución de la ecuación es

$$u(x,y) = 4e^{(2x-y)} + 2e^{4(2x-y)}$$

Ejemplo 4.26 *Solucionar la ecuación*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad con \quad |u(x,t)| < M \quad si \quad u(0,t) = 0, \quad u(4,t) = 0$$

$$y \quad u(x,0) = \sin 4\pi x - 3\sin 2\pi x + 5\sin \pi x \qquad \textit{figura 9.1}$$

u(0,t)=0 u(4,t)=0

u(x,0)=sen4 x-3sen2 x+5sen x

En efecto, se supone que la solución es de la forma

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

y así

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = X(x)T'(t)$$

luego reemplazando en la ecuación

$$X''(x)T(t) = X(x)T'(t) \quad \text{ y de aquí } \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \alpha$$

y así hay que solucionar las ecuaciones

$$X''(x) - \alpha X(x) = 0 \ \text{ con } \ X(0) = 0,\ X(4) = 0 \quad \text{y} \quad T'(t) - \alpha T(t) = 0$$

pués como

$$u(x,t) = X(x)T(t), \quad u(0,t) = X(0)T(t) = 0$$

por tanto se concluye que $X(0) = 0$, de lo contrario T(t) seria nula y así u(x,t) sería nula. Como $u(4,t) = X(4)T(t) = 0$ se concluye que $X(4) = 0$, de lo contrario T(t) seria nula y así u(x,t) seria nula. Ahora nuestro objetivo es hallar las soluciones no nulas así :
a) Si $\alpha = 0$ entonces $X''(x) = 0$ y así $X(x) = ax + b$, como $X(0) = a0 + b = 0$ entonces $b = 0$ y por tanto $X(x) = ax$ y como $X(4) = a4 = 0$ entonces $a = 0$ y así $X(x) = 0$ luego

$$u(x,t) = 0 \quad \text{si} \quad \alpha = 0$$

b) Si $\alpha = \lambda^2 > 0$ entonces

$$X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0$$

cuya solución es

$$X(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}$$

Como $X(0) = (A + B) = 0$ entonces $A = -B$ luego $X(x) = A(e^{\lambda x} - e^{-\lambda x})$ y como $X(4) = A(e^{4\lambda} - e^{-4\lambda}) = 0$ entonces $A = 0$ y así u(x,t) sería nula

c) $\alpha = -\lambda^2 < 0$ entonces

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \;\text{ y }\; T'(t) + \lambda^2 T(t) = 0$$

y así

$$X(x) = a\cos\lambda x + b\sin\lambda x$$

por lo tanto, como

$$X(0) = 0 = A\cos\lambda 0 + B\sin\lambda 0 = A \text{ entonces } \; A = 0 \text{ y así}$$

$$X(x) = B\sin\lambda x$$

y como

$$\begin{aligned} X(4) &= B\sin 4\lambda = 0 \text{ entonces } B\sin 4\lambda = 0 \text{ por lo tanto } 4\lambda = n\pi \text{ o sea } \lambda = \frac{n\pi}{4} \\ \text{pues si } B &= 0 \text{ la solución sería la nula, luego} \end{aligned}$$

$$X(x) = B\sin\frac{n\pi x}{4}$$

Ahora para este valor de λ la solución de

$$T'(t) + \lambda^2 T(t) = 0 \qquad \text{es} \qquad T(t) = ce^{-\lambda^2 t} = ce^{-\left(\frac{n\pi}{4}\right)^2 t}$$

por lo tanto

$$u_n(x,t) = X(x)T(t) = B\sin\frac{n\pi x}{4}e^{-\left(\frac{n\pi}{4}\right)^2 t} = B_n\sin\frac{n\pi x}{4}e^{-\left(\frac{n\pi}{4}\right)^2 t} \text{ es una solución,}$$

además

$$u(x,t) = B_1\sin\frac{n_1\pi x}{4}e^{-\left(\frac{n_1\pi}{4}\right)^2 t} + B_2\sin\frac{n_2\pi x}{4}e^{-\left(\frac{n_2\pi}{4}\right)^2 t} + B_3\sin\frac{n_3\pi x}{4}e^{-\left(\frac{n_3\pi}{4}\right)^2 t}$$

es también solución y como

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \sin 4\pi x - 3\sin 2\pi x + 5\sin\pi x \\ &= B_1\sin\frac{n_1\pi x}{4} + B_2\sin\frac{n_2\pi x}{4} + B_3\sin\frac{n_3\pi x}{4} \end{aligned}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} B_1 &= 1, \quad B_2 = -3, \quad B_3 = 5, \qquad \frac{n_1\pi}{4} = 4\pi, \quad \text{luego} \quad n_1 = 16, \\ \frac{n_2\pi}{4} &= 2\pi, \quad \text{por tanto} \quad n_2 = 8, \qquad \frac{n_3\pi}{4} = \pi \quad y \quad \text{así} \quad n_3 = 4 \end{aligned}$$

luego la solución buscada es

$$u(x,t) = (\sin 4\pi x)e^{-(4\pi)^2 t} - (3\sin 2\pi x)e^{-(2\pi)^2 t} + 5(\sin\pi x)e^{-(\pi)^2 t}$$

Ejemplo 4.27 *Queremos determinar la distribución de temperatura de una barra delgada homogenea de longitud L, conociendo la distribución de temperatura inicial a lo largo de la barra en el tiempo cero, si los extremos se mantienen a temperatura cero durante todo el tiempo. El problema consiste en solucionar la ecuación*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \textit{con} \quad |u(x,t)| < M \quad \textit{y} \quad \textit{si}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0 \quad \textit{y} \quad u(x,0) = f(x) \qquad \textit{figura 9.2}$$

En efecto

$$u(x,t) = X(x)T(t) \quad u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \text{ entonces } X(0) = 0$$

$$u(L,t) = X(L)T(t) = 0 \text{ entonces } \; X(L) = 0$$

Ahora

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t) \;\text{ y }\; \frac{\partial u}{\partial t} = X(x)T'(t)$$

luego

$X''(x)T(t) = X(x)T'(t)$ y de aquí $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{T'(t)}{T(t)} = \alpha$ y así solucionaremos las ecuaciones

$$X''(x) - \alpha X(x) = 0 \text{ con } X(0) = 0 \quad X(L) = 0 \qquad \text{y} \qquad T'(t) - \alpha T(t) = 0$$

a) Si $\alpha = 0$ entonces $X''(x) = 0$ y asì $X(x) = ax + b$,y como $X(0) = b = 0$ entonces $X(x) = ax$ y como $X(L) = aL = 0$ entonces $a = 0$ y así $X(x) = 0$ luego

$$u(x,t) = X(x)T(t) = 0 \quad \text{ si } \quad \alpha = 0$$

b) Si $\alpha = \lambda^2 > 0$ entonces

$$X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0 \;\text{ cuya solución es}$$

$$X(x) = ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x} \;\text{ y como } X(0) = a + b = 0 \;\text{ entonces } b = -a$$

y así

$$X(x) = a\left(e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}\right)$$

y como

$$X(L) = a\left(e^{L\lambda} - e^{-L\lambda}\right) = 0$$

se concluye que $a = 0$ entonces $X(x) = 0$ luego

$$u(x,t) = X(x)T(t) = 0 \quad \text{si} \quad \alpha = \lambda^2 > 0$$

c) Si $\alpha = -\lambda^2 < 0$ entonces

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \;\text{ y }\; T'(t) + \lambda^2 T(t) = 0$$

cuyas soluciones son

$$X(x) = a\cos\lambda x + b\sin\lambda x \qquad T(t) = ce^{-\lambda^2 t}$$

y como

$$X(0) = 0 = a\cos\lambda 0 + b\sin\lambda 0 = a \text{ entonces } a = 0 \text{ y así } X(x) = b\sin\lambda x$$

y como

$$X(L) = b\sin\lambda L = 0 \text{ entonces } \sin\lambda L = 0 \text{ por tanto } \lambda L = n\pi \text{ o sea } \lambda = \frac{n\pi}{L}$$

luego

$$X(x) = b\sin\frac{n\pi x}{L} \;\text{ y }\; T(t) = ce^{-\lambda^2 t} = ce^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \text{ entonces}$$

$$u_n(x,t) = X(x)T(t) = b_n\sin\frac{n\pi x}{L}e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \text{ es una solución}$$

y para que se pueda satisfacer la condición inicial es necesario superponer un número infinito de soluciones, es decir, la solución debe ser de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{L}e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

que para $t = 0$ nos da

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{L}$$

que equivale a desarrollar f(x) en una serie de fourier en solo senos para hallar b_n, es decir,

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

y así la solución buscada es

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right)\sin\frac{n\pi x}{L} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

Ejemplo 4.28 *Queremos determinar la distribución de temperatura de una barra delgada homogenea de longitud L, conociendo la distribución de temperatura inicial a lo largo de la barra en el tiempo cero, si los extremos se mantienen aislados, es decir no hay pérdida de energia durante todo el tiempo. El problema consiste en solucionar la ecuación*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \textit{con} \quad |u(x,t)| < M \quad \textit{y} \quad \textit{si}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \quad \textit{y} \quad u(x,0) = f(x) \qquad \textit{figura 9.3}$$

En efecto

$$u(x,t) = X(x)T(t) \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = X'(x)T(t) \text{ entonces } \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = X'(0)T(t) = 0$$

$$\text{por tanto } X'(0) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = X'(L)T(t) = 0 \text{ entonces } X'(L) = 0$$

Ahora

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t) \quad \text{ y } \quad \frac{\partial u}{\partial t} = X(x)T'(t)$$

luego

$$X''(x)T(t) = X(x)T'(t) \quad \text{ y de aquí } \qquad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \alpha \quad \text{y así}$$

hallaremos las soluciones no nulas de las ecuaciones

$$X''(x) - \alpha X(x) = 0 \;\text{ con }\; X'(0) = 0 \quad X'(L) = 0 \qquad \text{y} \;\; T'(t) - \alpha T(t) = 0$$

En efecto¨:
a) Si $\alpha = 0$ entonces $X''(x) = 0$ y asì $X(x) = ax + b$, $X'(x) = a$ entonces $X'(0) = a = 0$ y entonces $X(x) = b$ y así $X'(x) = 0$ luego $X'(L) = 0$ por tanto $X(x) = b$ $\;T(t) = c$

$$u(x,t) = X(x)T(t) = bc = A \quad \text{ si } \quad \alpha = 0$$

b) Si $\alpha = \lambda^2 > 0$ entonces

$$X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0$$

$$\begin{aligned}
\text{entonces }\; X(x) &= ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x} \qquad X'(x) = a\lambda e^{\lambda x} - \lambda b e^{-\lambda x} \quad X'(0) = a - b = 0 \text{ luego } b = a \\
\text{y así } X(x) &= a\left(e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}\right) \qquad X'(x) = a(\lambda e^{\lambda x} - \lambda e^{-\lambda x}) \\
X'(L) &= a(\lambda e^{\lambda L} - \lambda e^{-\lambda L}) = 0 \;\text{ se concluye que } a = 0 \text{ entonces } X(x) = 0
\end{aligned}$$

luego

$$u(x,t) = X(x)T(t) = 0 \quad \text{ si } \quad \alpha > 0$$

c) Si $\alpha = -\lambda^2 < 0$ entonces

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \;\text{ y }\; T'(t) + \lambda^2 T(t) = 0$$

y así

$$X(x) = a\cos\lambda x + b\sin\lambda x \qquad T(t) = ce^{-\lambda^2 t} \qquad X'(x) = -a\lambda\sin\lambda x + b\lambda\cos\lambda x$$

como

$$X'(0) = b\lambda = 0 \text{ por tanto } b = 0 \;\text{ entonces } X(x) = a\cos\lambda x$$

y como

$$X'(x) = -a\lambda\sin\lambda x \text{ entonces }\; X'(L) = -a\lambda\sin\lambda L = 0 \text{ por tanto } \lambda L = n\pi \text{ o sea } \lambda = \frac{n\pi}{L}$$

luego

$$X(x) = a\cos\frac{n\pi x}{L} \;\text{ y }\; \text{como } T(t) = ce^{-\lambda^2 t} = ce^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \text{ entonces}$$

$$u_n(x,t) = X(x)T(t) = a_n\cos\frac{n\pi x}{L}e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

y para que se pueda satisfacer la condición inicial es necesario superponer un número infinito de soluciones, es decir la solución debe ser de la forma

$$u(x,t) = A + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = A + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

que para $t = 0$ nos da

$$u(x,0) = f(x) = A + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}$$

que equivale a desarrollar f(x) en una serie de fourier en cosenos, es decir,

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$A = \frac{a_0}{2} \text{ entonces } 2A = a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)dx \text{ luego}$$

$$A = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)dx$$

y así la solución buscada es

$$u(x,t) = A+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx\right)\cos\frac{n\pi x}{L} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

Ejemplo 4.29 *Solucionar la ecuación*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \textit{con} \quad |u(x,t)| < M \quad \textit{y} \quad \textit{si}$$
$$u(0,t) = 0 \qquad u(x,0) = f(x)$$

En efecto:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t) \quad \textit{y} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = X(x)T'(t)$$

luego

$$X''(x)T(t) = X(x)T'(t) \quad \textit{y de aquí} \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \alpha \quad \textit{y así}$$
$$X''(x) - \alpha X(x) = 0 \qquad X(0) = 0 \qquad T'(t) - \alpha T(t) = 0$$

a) Si $\alpha = 0$ entonces $X''(x) = 0$ y así $X(x) = ax + b$, y como $X(0) = a0 + b = 0$, entonces $b = 0$ y así $X(x) = ax$ y de aquí $a = 0$ $(|u(x,t)| < M)$, luego $X(x) = 0$, por lo tanto

$$u(x,t) = 0$$

b) Si $\alpha = \lambda^2 > 0$ entonces

$$X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0 \text{ entonces } X(x) = ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x}$$

y como $X(0) = a+b = 0$,entonces $b = -a$ y así $X(x) = a(e^{\lambda x} - e^{-\lambda x})$ y como $|u(x,t)| < M$ entonces $a = 0$, por tanto $X(x) = 0$, luego $u(x,t) = 0$

c) Si $\alpha = -\lambda^2 < 0$ entonces

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \text{ y } T'(t) + \lambda^2 T(t) = 0$$

y así

$$X(x) = a\cos\lambda x + b\sin\lambda x$$

y como $X(0) = a\cos\lambda 0 + b\sin\lambda 0 = a = 0$ entonces $X(x) = b\sin\lambda x$ luego

$$u_\lambda(x,t) = (b\sin\lambda x)e^{-\lambda^2 t}$$

Ahora debemos sumar sobre λ para todo $\lambda > 0$, y esto se hace reemplazando $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ con $\int\limits_0^\infty ..dx$ y haciendo

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty u_\lambda(x,t)d\lambda = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \left(B(\lambda)\sin\lambda x\right)e^{-\lambda^2 t}d\lambda \text{ con}$$

$$B(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin(\lambda v)dv$$

por lo tanto

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin(\lambda v)\sin\lambda x\right)e^{-\lambda^2 t}dvd\lambda$$

En forma análoga la solución de la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ con } |u(x,t)| < M \text{ y si}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0 \qquad u(x,0)=f(x)$$

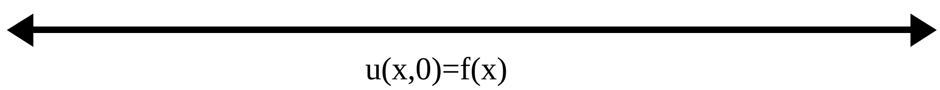
está dada por

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\cos(\lambda v)\cos\lambda x\right)e^{-\lambda^{2}t}dvd\lambda$$

Ejemplo 4.30 *Solucionar la ecuación*

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}} \quad \text{con} \quad |u(x,t)|<M \quad y \quad si$$

$$u(x,0)=f(x) \qquad \textit{figura 9.4}$$



En efecto

$$\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}=X''(x)T(t) \ \text{ y } \ \frac{\partial u}{\partial t}=X(x)T'(t)$$

luego

$$X''(x)T(t)=X(x)T'(t) \ \text{ y de aquí } \ \frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T'(t)}{T(t)}=\alpha \ \text{ y así}$$

$$X''(x)-\alpha X(x)=0 \ \ T'(t)-\alpha T(t)=0$$

a) Si $\alpha=0$ entonces $X''(x)=0$ y así $X(x)=ax+b$, y $T'(t)=0$ entonces $T(t)=c$ por lo tanto

$$u(x,t)=c\,(ax+b)=Ax+B \ \text{ luego } A=0 \ (\ |u(x,t)|<M \ ) \ \text{ y así}$$

$$u(x,t)=Bc=D$$

b) Si $\alpha=\lambda^{2}>0$ entonces

$$X''(x)-\lambda^{2}X(x)=0 \ \text{ entonces } \ X(x)=ae^{\lambda x}+be^{-\lambda x} \ \text{ y } \ T(t)=ce^{\lambda^{2}t}$$

por lo tanto $u(x,t)=\left(ae^{\lambda x}+be^{-\lambda x}\right)ce^{\lambda^{2}t}=\left(Ae^{\lambda x}+Be^{-\lambda x}\right)e^{\lambda^{2}t}=0$ pues $A=0$ *y* $B=0$ ya que $|u(x,t)|<M$

c) Si $\alpha = -\lambda^2 < 0$ entonces

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \ \text{ y } \ T'(t) + \lambda^2 T(t) = 0$$

y así

$$X(x) = a\cos\lambda x + b\sin\lambda x \qquad T(t) = ce^{-\lambda^2 t} \ \text{ y así}$$

$$u_\lambda(x,t) = (a\cos\lambda x + b\sin\lambda x)\, e^{-\lambda^2 t}$$

Ahora debemos sumar sobre λ para todo $\lambda > 0$, y esto se hace reemplazando $\sum$ con $\int\limits_0^\infty ..dx$ y haciendo

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty u_\lambda(x,t)d\lambda = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty (A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x)\, e^{-\lambda^2 t}d\lambda \ \text{ con}$$

$$A(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(\lambda v)dv \ \text{ y } B(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin(\lambda v)dv$$

por lo tanto

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(\lambda v)\cos\lambda x + f(v)\sin(\lambda v)\sin\lambda x\right) e^{-\lambda^2 t}dvd\lambda$$

Ejemplo 4.31 *Solucionar la ecuación*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \quad si \quad u(0,t) = 0 \qquad u(L,t) = 0 \qquad u(x,0) = g(x) = 1$$

Solucionemos la ecuación para un caso particular, si $f(x,t) = 3$ *y escojamos una solución de la forma*

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(t)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

asegurando que satisface las dos condiciones de frontera y en forma análoga escribimos

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

con C_n calculado por

$$\begin{aligned} C_n(t) &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x,t)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{2}{L}\int_0^L 3\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \\ &= \frac{6}{n\pi}(1-\cos n\pi) \end{aligned}$$

Ahora

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} k_n'(t)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} k_n(t)\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

y reemplazando en la ecuación y agrupando se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(k_n'(t)+k_n(t)\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - C_n(t)\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 0$$

entonces

$$k_n'(t)+\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 k_n(t) - C_n(t) = 0$$

por lo tanto

$$k_n'(t)+\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 k_n(t) = \frac{6}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

que es una ecuación de la forma

$$\frac{dy}{dt}+p(t)y = Q(t) \quad \textit{cuyo factor integrante es } e^{\int p(t)dt}$$

luego

$$e^{\int p(t)dt}\frac{dy}{dt}+e^{\int p(t)dt}P(t)y = Q(t)e^{\int p(t)dt}$$

que se puede escribir como

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\int p(t)dt}y\right) = Q(t)e^{\int p(t)dt}$$

y de aquí integrando con respecto a t se tiene

$$e^{\int p(t)dt}y = \int Q(t)e^{\int p(t)dt}dt + C$$

y así

$$y(t) = e^{-\int p(t)dt}\left(\int Q(t)e^{\int p(t)dt}dt + C\right)$$

luego

$$\begin{aligned}
k_n(t) &= e^{-\int p(t)dt}\left(\int Q(t)e^{\int p(t)dt}dt + C\right) = \\
&= e^{-\int\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 dt}\left(\int e^{\int\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 dt}\frac{6}{n\pi}\left(1-\cos n\pi\right)dt + C\right) \\
&= e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\left(\int e^{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\frac{6}{n\pi}\left(1-\cos n\pi\right)dt + C\right) = \\
&= e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\left(\frac{L^2}{(n\pi)^2}e^{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\frac{6}{n\pi}\left(1-\cos n\pi\right) + C\right) = \\
&= \frac{6L^2}{(n\pi)^3}\left(1-\cos n\pi\right) + Ce^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}
\end{aligned}$$

como

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(0)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = g(x)$$

entonces

$$\begin{aligned}
k_n(0) &= \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{2}{L}\int_0^L 1.\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \\
&= \frac{2}{n\pi}\left[-\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]_0^L = \frac{2}{n\pi}\left(1-\cos n\pi\right)
\end{aligned}$$

y como

$$k_n(0) = \frac{6L^2}{(n\pi)^3}\left(1-\cos n\pi\right) + C = \frac{2}{n\pi}\left(1-\cos n\pi\right)$$

entonces

$$C = \left(\frac{2}{n\pi} - \frac{6L^2}{(n\pi)^3}\right)\left(1-\cos n\pi\right)$$

y así

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} k_n(t)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6L^2}{(n\pi)^3}\left(1-\cos n\pi\right) + Ce^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6L^2}{(n\pi)^3}\left(1-\cos n\pi\right) + \left(\frac{2}{n\pi} - \frac{6L^2}{(n\pi)^3}\right)\left(1-\cos n\pi\right)e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)
\end{aligned}$$

En forma análoga se soluciona la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \quad si \quad u(0,t) = 0 \qquad u(L,t) = 0 \qquad u(x,0) = g(x)$$

Ejemplo 4.32 *Solucionar la ecuación*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad si \quad u(0,t) = A \qquad u(L,t) = B \qquad u(x,0) = f(x)$$

Se hace

$$u(x,t) = v(x,t) + \varphi(x)$$

donde $\varphi(x)$ *representa la solución en estado estacionario y* $v(x,t)$ *en estado transitorio*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} \quad y \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varphi''(x)$$

luego

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varphi''(x) \quad con \quad v(0,t) + \varphi(0) = A \quad v(L,t) + \varphi(L) = B \quad v(x,0) + \varphi(x) = f(x)$$

y para simplificar estas ecuaciones tomamos

$$\varphi''(x) = 0 \qquad \varphi(0) = A \qquad \varphi(L) = B$$

y así

$$\varphi(x) = cx + d = A + \frac{x}{L}(B - A)$$

ya que

$$\varphi(0) = d = A \quad \varphi(L) = cL + d = cL + A = B \ \ entonces \ c = \frac{B - A}{L}$$

y

$$v(x,0) = u(x,0) - \varphi(x) = f(x) - \Big(A + \frac{x}{L}(B - A)\Big)$$

por lo tanto la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad si \quad u(0,t) = A \qquad u(L,t) = B \qquad u(x,0) = f(x)$$

se transforma en

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad con \quad v(0,t) = 0 \quad v(L,t) = 0 \quad v(x,0) = f(x) - \Big(A + \frac{x}{L}(B - A)\Big)$$

cuya solución es

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{L}\int_0^L \left(f(x) - \left(A + \frac{x}{L}(B-A)\right)\right)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right)\sin\frac{n\pi x}{L} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \end{aligned}$$

luego

$$u(x,t) = A + \frac{x}{L}(B-A) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{L}\int_0^L \left(f(x) - \left(A + \frac{x}{L}(B-A)\right)\right)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right)\sin\frac{n\pi x}{L} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

Ejemplo 4.33 *Solucionar la ecuación*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad si \quad u(0,t) = A(t) \qquad u(L,t) = B(t) \qquad u(x,0) = f(x)$$

Se hace

$$u(x,t) = v(x,t) + \varphi(x,t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad y \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

luego

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

y así

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

ahora

$$v(0,t) = u(0,t) - \varphi(0,t) = A(t) - \varphi(0,t) = 0 \quad \textit{entonces } A(t) = \varphi(0,t)$$

$$v(L,t) = u(L,t) - \varphi(L,t) = B(t) - \varphi(L,t) = 0 \quad \textit{entonces } B(t) = \varphi(L,t)$$

y así

$$\varphi(x,t) = A(t) + \frac{x}{L}\left(B(t) - A(t)\right)$$

como

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \quad y \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = A'(t) + \frac{x}{L}\left(B'(t) - A'(t)\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\Big(A'(t) + \frac{x}{L}\left(B'(t) - A'(t)\right)\Big) = f(x,t)$$

luego

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x,t) \qquad con$$

$$v(0,t) = 0 \quad v(L,t) = 0 \quad v(x,0) = u(x,0) - \varphi(x,0) \; = f(x) - A(0) + \frac{x}{L}\left(B(0) - A(0)\right) = g(x)$$

que ya fue resuelta

Ejemplo 4.34 *Solucionar la ecuación*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad si \quad u(0,t) = A \qquad u(L,t) = B \qquad u(x,0) = f(x)$$

Se hace

$$u(x,t) = v(x,t) + \varphi(x)$$

donde $\varphi(x)$ representa la solución en estado estacionario y $v(x,t)$ en estado transitorio

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} \quad y \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \; = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varphi''(x)$$

luego

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varphi''(x) \quad con \quad v(0,t) + \varphi(0) = A \quad v(L,t) + \varphi(L) = B \quad v(x,0) + \varphi(x) \; = f(x)$$

y para simplificar estas ecuaciones tomamos

$$\varphi''(x) = 0 \qquad \varphi(0) = A \qquad \varphi(L) = B$$

y así

$$\varphi(x) = cx + d = A + \frac{x}{L}(B - A)$$

ya que

$$\varphi(0) = d \quad = A \quad \varphi(L) = cL + d \; = cL + A = B \; entonces \; c = \frac{B - A}{L}$$

y

$$v(x,0) = u(x,0) - \varphi(x) = f(x) - \Big(A + \frac{x}{L}(B - A)\Big)$$

por lo tanto la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad si \quad u(0,t) = A \qquad u(L,t) = B \qquad u(x,0) = f(x)$$

se transforma en

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad con \quad v(0,t) = 0 \quad v(L,t) = 0 \quad v(x,0) = f(x) - \left(A + \frac{x}{L}(B-A)\right)$$

cuya solución es

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{L} \int_0^L \left(f(x) - \left(A + \frac{x}{L}(B-A)\right)\right) \sin\frac{n\pi x}{L} dx \right) \sin\frac{n\pi x}{L} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \end{aligned}$$

luego

$$u(x,t) = A + \frac{x}{L}(B-A) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{L} \int_0^L \left(f(x) - \left(A + \frac{x}{L}(B-A)\right)\right) \sin\frac{n\pi x}{L} dx \right) \sin\frac{n\pi x}{L} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

Ejemplo 4.35 *Solucionar la ecuación*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{9\partial^2 u}{\partial x^2} \quad si \quad u(0,t) = 0 \quad u(5,t) = 3 \quad u(x,0) = 0$$

Se hace

$$u(x,t) = v(x,t) + \varphi(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} \quad y \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

luego y así $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$, *por tanto* $\varphi(x) = \frac{3x}{5}$*pues* $u(0,t) = v(0,t) + \varphi(0) = 0$ *entonces* $\varphi(0) = 0$ *y* $u(5,t) = v(5,t) + \varphi(5) = 3$ *entonces* $\varphi(5) = 3$ *y así como luego*

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad con$$

$$v(0,t) = 0 \quad v(5,t) = 0 \quad v(x,0) = u(x,0) - \varphi(x) = -\frac{3x}{5} = f(x)$$

que ya fue resuelta

Ejemplo 4.36 *Solucionar la ecuación*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 \quad si \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \qquad u(x,0) = 0$$

En efecto : La solución se puede escribir como

$$u(x,t) = \frac{A_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t)\cos\frac{n\pi x}{L}$$

$$u(x,0) = \frac{A_0(0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(0)\cos\frac{n\pi x}{L} = 0 \quad por\ tanto\ A_n(0) = 0$$

y

$$x^2 = \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{L}$$

luego

$$\frac{A_0'(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n'(t)\cos\frac{n\pi x}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 A_n(t)\cos\frac{n\pi x}{L} + \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{L}$$

luego

$$\frac{A_0'(t)}{2} - \frac{L^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n'(t) + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 A_n(t) - \frac{4L^2}{\pi^2}\frac{(-1)^n}{n^2}\right)\cos\frac{n\pi x}{L} = 0$$

lo que implica que

$$\frac{A_0'(t)}{2} - \frac{L^2}{3} = 0 \ asì\ A_0'(t) = \frac{2L^2}{3} \ por\ tanto\ A_0(t) = \frac{2L^2 t}{3}$$

y

$$A_n'(t) + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 A_n(t) - \frac{4L^2}{\pi^2}\frac{(-1)^n}{n^2} = 0$$

$$= A_n'(t)e^{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 e^{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}A_n(t) - \frac{4L^2}{\pi^2}\frac{(-1)^n}{n^2}e^{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} = 0$$

entonces

$$\frac{d}{dt}\left(A_n(t)e^{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\right) = \frac{4L^2}{\pi^2}\frac{(-1)^n}{n^2}e^{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

y así

$$A_n(t)e^{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} - A_n(0) = \frac{4L^2}{\pi^2}\frac{(-1)^n L^2}{n^2(n\pi)^2}e^{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} - \frac{4L^2}{\pi^2}\frac{(-1)^n L^2}{n^2(n\pi)^2}$$

y así

$$A_n(t)e^{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} = \frac{4L^2}{\pi^2}\frac{(-1)^n L^2}{n^2(n\pi)^2}e^{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} - \frac{4L^2}{\pi^2}\frac{(-1)^n L^2}{n^2(n\pi)^2}$$

por lo tanto

$$A_n(t) = \frac{4L^2}{\pi^2}\frac{(-1)^n L^2}{n^2(n\pi)^2} - \frac{4L^2}{\pi^2}\frac{(-1)^n L^2 e^{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}}{n^2(n\pi)^2}$$

entonces

$$\frac{A_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t)\cos\frac{n\pi x}{L} =$$

$$= \frac{L^2 t}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4L^2}{\pi^2}\frac{(-1)^n L^2}{n^2(n\pi)^2} - \frac{4L^2}{\pi^2}\frac{(-1)^n L^2 e^{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}}{n^2(n\pi)^2}\right)\cos\frac{n\pi x}{L}$$

luego la solución es

$$u(x,t) = \frac{L^2 t}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4L^2}{\pi^2}\frac{(-1)^n L^2}{n^2(n\pi)^2} - \frac{4L^2}{\pi^2}\frac{(-1)^n L^2 e^{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}}{n^2(n\pi)^2}\right)\cos\frac{n\pi x}{L}$$

Ejemplo 4.37 *Solucionar la ecuación*

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \ \ si \ \ y(0,t) = 0 \quad y(L,t) = 0 \ \ y(x,0) = f(x) \ \ , \ \ \frac{\partial y(x,0)}{\partial t} = 0$$

En efecto :

La solución es de la forma

$$y(x,t) = X(x)T(t) \ \text{ y así } \ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = X''(x)T(t) \ \text{ y } \ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = X(x)T''(t)$$

luego reemplazando en la ecuación se tiene que

$$X''(x)T(t) = X(x)T''(t), \text{ luego } \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = \alpha$$

así solucionaremos las ecuaciones

$$X''(x) - \alpha X(x) = 0 \text{ con } X(0) = 0, \quad X(L) = 0$$

$$T''(t) - \alpha T(t) = 0, \ T'(0) = 0$$

para ello solucionemos la

$$X''(x) - \alpha X(x) = 0 \text{ con } X(0) = 0, \quad X(L) = 0$$

así:

a) Si $\alpha = 0$ entonces

$$X''(x) = 0, \; X(x) = ax + b, \text{ y como } X(0) = a0 + b = 0$$

entonces

$$b = 0, \text{ por tanto } X(x) = ax \text{ y como } X(L) = aL = 0$$

entonces $a = 0$ y la solución sería

$$y(x,t) = X(x)T(t) = 0$$

b) Si $\alpha = \lambda^2 > 0$ entonces

$$X''(x) - \alpha X(x) = X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0 \text{ entonces } X(x) = ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x}$$

y como

$$X(0) = ae^{\lambda 0} + be^{-\lambda 0} = a + b = 0 \text{ entonces } a = -b \text{ y así}$$

$$X(x) = a(e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}) \text{ y como } X(L) = a(e^{\lambda L} - e^{-\lambda L}) = 0, \text{se tiene que } a = 0$$

así $X(x) = 0$, por tanto la solución sería

$$y(x,t) = X(x)T(t) = 0$$

c) Si $\alpha = -\lambda^2 < 0$ entonces

$$X''(x) - \alpha X(x) = X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \text{ cuya solución es}$$

$$X(x) = a\cos\lambda x + b\sin\lambda x \quad X(0) = a\cos\lambda 0 + b\sin\lambda 0 = a = 0$$

luego $a = 0$, entonces $X(x) = b\sin\lambda x$ y como $X(L) = b\sin\lambda L = 0$, se tiene que $\sin\lambda L = 0$, por tanto $\lambda L = n\pi$ y así $\lambda = \dfrac{n\pi}{L}$ por tanto la solución es

$$X(x) = b\sin\frac{n\pi x}{L}$$

y para este λ la solución de la ecuación

$$T''(t) + \lambda^2 T(t) = 0, T(0) = 0 \text{ es } T(t) = A\cos\frac{n\pi t}{L}$$

por tanto la solución es

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi t}{L}$$

luego

$$y(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}=f(x)$$

por tanto

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

y así

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right)\sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi t}{L}$$

es la solución buscada

Ejemplo 4.38 *Solucionar la ecuación*

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\ +2x\ \ si\ \ y(0,t)=0 \quad y(2,t)=0\ \ y(x,0)=f(x)\ \ ,\ \ \frac{\partial y(x,0)}{\partial t}=0$$

En efecto :

Para hallar la solucións de esta ecuación se hará la sustitución

$$y(x,t)=v(x,t)+A(x)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\ \text{y}\ \ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+A''(x)$$

luego reemplazando en la ecuación se tiene que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+A''(x)+2x$$

por lo tanto $A''(x)+2x=0$ así $A(x)=\dfrac{-x^3}{3}+kx+d=\dfrac{-x^3}{3}+\dfrac{4x}{3}$ pues

$$v(x,t)=y(x,t)-A(x),\ v(0,t)=y(0,t)-A(0)=0 \text{ si } A(0)=0 \text{ y}$$

$$v(2,t)=y(2,t)-A(2)=0 \text{ si } A(2)=0$$

Por tanto

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad v(0,t)=0,\ v(2,t)=0 \ v(x,0)=y(x,0)-A(x)=f(x)+\frac{x^3}{3}-\frac{4x}{3}, \frac{\partial v(x,0)}{\partial t}=0$$

y

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^2\left(f(x)+\frac{x^3}{9}-\frac{4x}{9}\right)\sin\frac{n\pi x}{2}dx\right)\sin\frac{n\pi x}{2}\cos\frac{n\pi t}{2}=y(x,t)-A(x)$$

entonces

$$y(x,t)=\frac{-x^3}{3}+\frac{4x}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^2\left(f(x)+\frac{x^3}{9}-\frac{4x}{9}\right)\sin\frac{n\pi x}{2}dx\right)\sin\frac{n\pi x}{2}\cos\frac{n\pi t}{2}$$

es la solución buscada

Ejemplo 4.39 *Solucionar la ecuación*

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \ \ si \ \ y(0,t)=0 \quad u(L,t)=0 \ \ y(x,0)=0 \ \ , \ \ \frac{\partial y(x,0)}{\partial t}=f(x)$$

En efecto :

La solución es de la forma

$$y(x,t)=X(x)T(t) \ \text{ y así } \ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=X''(x)T(t) \ \text{ y } \ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=X(x)T''(t)$$

luego reemplazando en la ecuación se tiene que

$$X''(x)T(t)=X(x)T''(t), \text{ luego } \frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T''(t)}{T(t)}=\alpha$$

así solucionaremos las ecuaciones

$$X''(x)-\alpha X(x)=0 \text{ con } X(0)=0, \quad X(L)=0$$

$$T''(t)-\alpha T(t)=0,\ T(0)=0$$

para ello solucionemos la

$$X''(x)-\alpha X(x)=0 \text{ con } X(0)=0, \quad X(L)=0$$

así:

a) Si $\alpha = 0$ entonces $X(x) = 0$ y

$$y(x,t) = X(x)T(t) = 0$$

b) Si $\alpha = \lambda^2 > 0$ entonces

$$X''(x) - \alpha X(x) = X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0 \text{ entonces } X(x) = ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x}$$

así $X(x) = 0$, por tanto la solución sería

$$y(x,t) = X(x)T(t) = 0$$

c) Si $\alpha = -\lambda^2 < 0$ entonces

$$X''(x) - \alpha X(x) = X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \text{ cuya solución es}$$

$$X(x) = a\cos\lambda x + b\sin\lambda x$$

y la solución es

$$X(x) = b\sin\frac{n\pi x}{L}$$

y para este λ la solución de la ecuación

$$T''(t) + \lambda^2 T(t) = 0, T(0) = 0 \text{ es } T(t) = B\sin\frac{n\pi t}{L}$$

por tanto la solución es

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{n\pi t}{L}$$

luego

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi t}{L}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi}{L}\sin\frac{n\pi x}{L} = f(x)$$

por tanto

$$b_n\frac{n\pi}{L} = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

y así

$$b_n = \frac{2}{n\pi}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

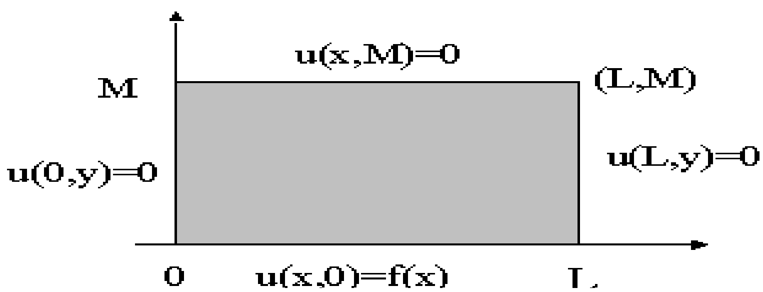
por tanto

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n\pi}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right)\sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi t}{L}$$

es la solución buscada

Ejemplo 4.40 *Solucionar la ecuación*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad si \quad u(0,y) = 0 \quad u(L,y) = 0 \quad u(x,M) = 0 \quad u(x,0) = f(x) \quad \textit{figura 9.5}$$



La solución es de la forma

$$u(x,y) = X(x)Y(y) \text{ y así } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)Y(y) \text{ y } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = X(x)Y''(y)$$

luego reemplazando en la ecuación se tiene que

$$X''(x)Y(y) = -X(x)Y''(y) \text{ y de aquí } \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \alpha \text{ y así}$$

$$X''(x) - \alpha X(x) = 0 \text{ y } Y''(y) + \alpha Y(y) = 0$$

Como $u(x,y) = X(x)Y(y)$ entonces

$$u(0,y) = X(0)Y(y) = 0 \quad \text{entonces} \quad X(0) = 0$$

$$u(L,y) = X(L)Y(y) = 0 \quad \text{entonces} \quad X(L) = 0$$

$$u(x, M) = X(x)Y(M) = 0 \qquad \text{entonces} \quad Y(M) = 0$$

entonces hay que solucionar la ecuación

$$X''(x) - \alpha X(x) = 0 \;\; X(0) = 0 \quad X(L) = 0 \quad \text{y} \quad Y''(y) + \alpha Y(y) = 0 \quad Y(M) = 0$$

luego buscaremos la solución no nula

a) Si $\alpha = 0$ entonces $X''(x) = 0$ y asì $X(x) = ax + b$, como $X(0) = b = 0$ entonces $X(x) = ax$ y como $X(L) = aL = 0$ entonces $a = 0$ y así $X(x) = 0$ luego

$$u(x, y) = X(x)Y(y) = 0 \quad \text{si} \quad \alpha = 0$$

b) Si $\alpha = \lambda^2 > 0$ entonces

$$X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0 \text{ y tiene por soluciòn}$$

$$\begin{aligned} X(x) &= ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x} \;\; \text{como } X(0) = a + b = 0 \text{ entonces } b = -a \\ \text{y así } X(x) &= a\left(e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}\right) \text{ y como } X(L) = a\left(e^{L\lambda} - e^{-L\lambda}\right) = 0 \\ \text{se concluye que } a &= 0 \text{ entonces } X(x) = 0 \text{ por tanto} \end{aligned}$$

$$u(x, t) = X(x)Y(y) = 0 \quad \text{si} \quad \alpha > 0$$

c) Si $\alpha = -\lambda^2 < 0$ entonces

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \;\; \text{que tiene por solución}$$

$$X(x) = a \cos \lambda x + b \sin \lambda x$$

y como

$$X(0) = a = 0 \;\; \text{entonces } X(x) = b \sin \lambda x$$

y como

$$X(L) = b \sin \lambda L = 0 \text{ entonces } \sin \lambda L = 0 \text{ y así } \lambda L = n\pi \text{ o sea } \lambda = \frac{n\pi}{L} \text{ entonces}$$

$$X(x) = b \sin \frac{n\pi x}{L}$$

Ahora con este valor de λ se soluciona la ecuación

$$Y''(y) + \alpha Y(y) = 0 \;\; \text{con } Y(M) = 0 \text{ para este } \alpha = -\lambda^2 < 0 \;\; \text{pues en los demás } X(x) = 0$$

es decir, se soluciona

$$Y''(y) - \lambda^2 Y(y) = 0 \;\; \text{con } Y(M) = 0$$

En efecto: La solución viene dada por

$$Y(y) = Ae^{\lambda y} + Be^{-\lambda y} \quad \text{o} \quad Y(y) = A\cosh \lambda y + B\sinh \lambda y \quad \text{y como}$$

$$Y(M) = A\cosh(\lambda M) + B\sinh(\lambda M) = 0 \;\; \text{entonces } B = -\frac{A\cosh(\lambda M)}{\sinh(\lambda M)} \;\; \text{por lo tanto}$$

$$\begin{aligned} Y(y) &= A\cosh\lambda y - \frac{A\cosh(\lambda M)}{\sinh(\lambda M)}\sinh\lambda y = \frac{A}{\sinh(\lambda M)}\left(\sinh(\lambda M)\cosh\lambda y - \cosh(\lambda M)\sinh\lambda y\right) \\ &= K\sinh\left(\lambda M - \lambda y\right) \;\; \text{luego} \end{aligned}$$

$$u_n(x,y) = B_n \sin\frac{n\pi x}{L}\sinh\left(\lambda M - \lambda y\right) \;\; \text{es una solución}$$

por lo tanto

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L}\sinh\left(\frac{n\pi}{L}\left(M-y\right)\right) \;\; \text{es también una solución y así como}$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L}\sinh\left(\frac{n\pi}{L}\left(M\right)\right) \;\; \text{entonces}$$

$$B_n \sinh\left(\frac{n\pi M}{L}\right) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \;\text{ y así}$$

$$B_n = \frac{2}{L\sinh\left(\frac{n\pi}{L}M\right)}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \;\; \text{luego}$$

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{L\sinh\left(\frac{n\pi M}{L}\right)}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right)\sin\frac{n\pi x}{L}\sinh\left(\frac{n\pi}{L}\left(M-y\right)\right)$$

es la solución buscada

En forma análoga se solucionan las ecuaciones

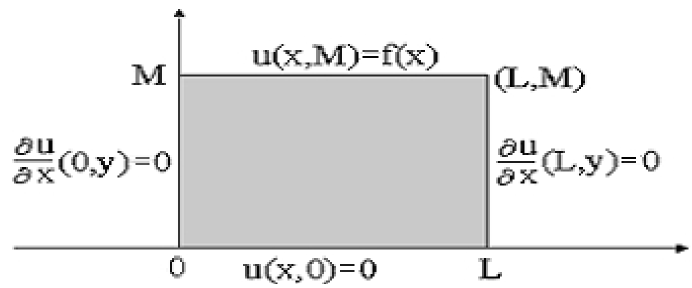
1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ si $u(0,y) = 0 \quad u(L,y) = 0 \quad u(x,M) = f(x) \quad u(x,0) = 0$

2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ si $u(0,y) = 0 \quad u(L,y) = f(y) \quad u(x,M) = 0 \quad u(x,0) = 0$

3) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ si $u(0,y) = f(y) \quad u(L,y) = 0 \quad u(x,M) = 0 \quad u(x,0) = 0$

Ejemplo 4.41 *Solucionar la ecuación*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad si \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,y)=0 \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L,y)=0 \quad u(x,0)=0 \quad u(x,M)=f(x) \quad \textit{figura 9.6}$$



La solución es de la forma

$$u(x,y)=X(x)Y(y) \;\text{ y así }\; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=X''(x)Y(y) \;\text{ y }\; \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=X(x)Y''(y)$$

luego reemplazando en la ecuación, se tiene que

$$X''(x)Y(y)=-X(x)Y''(y) \;\text{ y de aquí }\; \frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(y)}{Y(y)}=\alpha \;\text{ y así}$$

$$X''(x)-\alpha X(x)=0 \;\text{ y }\; Y''(y)+\alpha Y(y)=0$$

Como $u(x,y)=X(x)Y(y)$ entonces

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,y)=X'(0)Y(y)=0 \qquad \text{entonces} \quad X'(0)=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L,y)=X'(L)Y(y)=0 \qquad \text{entonces} \quad X'(L)=0$$

$$u(x,0)=X(x)Y(0)=0 \qquad \text{entonces} \quad Y(0)=0$$

entonces hay que solucionar las ecuaciones

$$X''(x)-\alpha X(x)=0 \;\; X'(0)=0 \quad X'(L)=0 \quad \text{y} \quad Y''(y)+\alpha Y(y)=0 \quad Y(0)=0$$

entonces

a) Si $\alpha = 0$ entonces $X''(x) = 0$ y asì $X(x) = ax + b$, como $X'(x) = a$, $X'(0) = a = 0$ entonces $X(x) = b$ y como $X'(x) = 0$ entonces $X'(L) = 0$ y así $X(x) = b$. Ahora $Y''(y) + \alpha Y(y) = Y''(y) = 0$ entonces $Y(y) = cy + d$ y como $Y(0) = d = 0$ se tiene que $Y(y) = cy$ luego

$$u(x,y) = X(x)Y(y) = bcy = Ay \quad \text{si} \quad \alpha = 0$$

b) Si $\alpha = \lambda^2 > 0$ entonces

$$X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0 \quad \text{y} \quad \text{así } X(x) = ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x} \text{ y } X'(x) = a\lambda e^{\lambda x} - b\lambda e^{-\lambda x} \text{ luego}$$

$$X'(0) = a\lambda - b\lambda = 0 \text{ entonces } a = b \text{ y así } X(x) = a\left(e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}\right)$$

$$X'(x) = a\lambda\left(e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}\right) \quad X'(L) = a\lambda\left(e^{\lambda L} - e^{-\lambda L}\right) = 0 \text{ por tanto } a = 0 \text{ entonces } X(x) = 0$$

$$\text{y así} \quad u(x,y) = X(x)Y(y) = 0 \ \text{ si } \alpha = \lambda^2 > 0$$

c) Si $\alpha = -\lambda^2 < 0$ entonces

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \ \text{ que tiene como solución a } \ X(x) = a\cos\lambda x + b\sin\lambda x$$

y así

$$X'(x) = -a\lambda\sin\lambda x + b\lambda\cos\lambda x, \quad X'(0) = b\lambda = 0, \text{ luego } b = 0$$

$$\text{entonces } X(x) = a\cos\lambda x \quad X'(x) = -a\lambda\sin\lambda x \quad X'(L) = -a\lambda\sin\lambda L = 0$$

$$\text{entonces } \sin\lambda L = 0, \text{ luego } \lambda L = n\pi, \quad \text{y así } \lambda = \frac{n\pi}{L} \text{ entonces } X(x) = a\cos\frac{n\pi x}{L}$$

Ahora se soluciona la ecuación

$$Y''(y) + \alpha Y(y) = 0 \ \text{ con } Y(0) = 0 \text{ para este } \alpha = -\lambda^2 < 0$$

$$\begin{aligned} \text{como } Y(y) &= Ae^{\lambda y} + Be^{-\lambda y} \text{ es una solución y como } Y(0) = A + B = 0 \\ \text{entonces } A &= -B \ \text{ y así } Y(y) = A(e^{\lambda y} - e^{-\lambda y}) = C\sinh\lambda y \ \text{ luego} \end{aligned}$$

$$u(x,y) = Ay + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}\sinh\frac{n\pi y}{L} \ \text{ es solución y como}$$

$$u(x,M) = f(x) = AM + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}\sinh\frac{n\pi M}{L} \quad \text{entonces}$$

$$AM = \frac{a_0}{2} \text{ entonces } 2AM = a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx \text{ y así } A = \frac{2}{2ML}\int_0^L f(x)dx \quad \text{y}$$

$$a_n \sinh \frac{n\pi M}{L} = \frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\int\limits_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \quad \text{entonces}$$

$$a_n = \frac{2}{L\sinh\frac{n\pi M}{L}}\int\limits_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \text{ por lo tanto}$$

$$u(x,y) = \left(\frac{1}{ML}\int\limits_{0}^{L} f(x)dx\right)y + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sinh\frac{n\pi M}{L}}\frac{2}{L}\int\limits_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx\right)\cos\frac{n\pi x}{L}\sinh\frac{n\pi y}{L}$$

es la solución deseada

En forma análoga se solucionan las ecuaciones

1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ si $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0$ $\dfrac{\partial u}{\partial x}(L,y) = 0$ $u(x,0) = f(x)$ $u(x,M) = 0$

2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ si $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0$ $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,M) = 0$ $u(0,y) = f(y)$ $u(L,y) = 0$

3) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ si $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0$ $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,M) = 0$ $u(0,y) = 0$ $u(L,y) = f(y)$

4) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ si $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0$ $u(L,y) = 0$ $u(x,0) = f(x)$ $u(x,M) = 0$

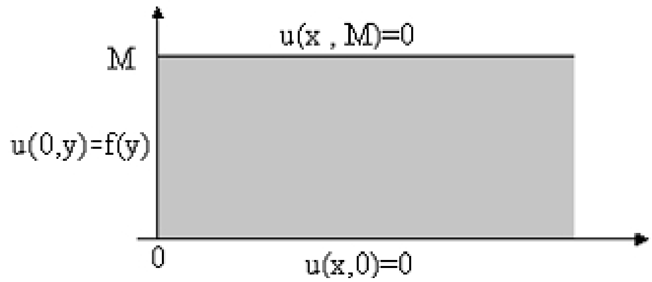
5) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ si $u(0,y) = 0$ $\dfrac{\partial u}{\partial x}(L,y) = 0$ $u(x,0) = f(x)$ $u(x,M) = 0$

6) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ si $u(x,0) = 0$ $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,M) = 0$ $u(0,y) = f(y)$ $u(L,y) = 0$

7) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ si $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0$ $u(x,M) = 0$ $u(0,y) = f(y)$ $u(L,y) = 0$

8) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ si $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0$ $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,M) = 0$ $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0$ $u(L,y) = f(y)$

9) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ si $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0$ $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,M) = 0$ $u(0,y) = f(y)$ $\dfrac{\partial u}{\partial x}(L,y) = 0$



Ejemplo 4.42 *Solucionar la ecuación*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad si \quad u(0,y)=f(y) \qquad u(x,M)=0 \quad u(x,0)=0 \qquad \textit{figura} \;\; 9.7$$

La solución es de la forma

$$u(x,y)=X(x)Y(y) \;\text{ y así }\; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=X''(x)Y(y) \;\text{ y }\; \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=X(x)Y''(y)$$

luego reemplazando en la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

se tiene que

$X''(x)Y(y)+X(x)Y''(y)=0$ y de aquí dividiendo la igualdad por $X(x)Y(y)$ se tiene

$$\frac{X''(x)}{X(x)}+\frac{Y''(y)}{Y(y)}=0 \;\text{ y así }\; \frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(y)}{Y(y)}=\alpha \text{ por tanto}$$

$$X''(x)-\alpha X(x)=0 \;\text{ y }\; Y''(y)+\alpha Y(y)=0$$

Como $u(x,y)=X(x)Y(y)$ entonces

$$u(x,0)=X(x)Y(0)=0 \qquad \text{entonces} \quad Y(0)=0$$

$$u(x,M)=X(x)Y(M)=0 \qquad \text{entonces} \quad Y(M)=0$$

entonces hay que solucionar las ecuaciones

$$Y''(y)+\alpha Y(y)=0 \quad Y(0)=0 \quad Y(M)=0 \quad y \quad X''(x)-\alpha X(x)=0$$

luego

a) Si $\alpha = 0$ entonces $Y''(y) = 0$ y así $Y(y) = ay + b$,como $Y(0) = b = 0$ entonces $Y(y) = ay$ y como $Y(M) = aM = 0$ entonces $a = 0$ y así $Y(y) = 0$ luego

$$u(x,y) = X(x)Y(y) = 0 \quad \text{si} \quad \alpha = 0$$

b) Si $\alpha = -\lambda^2 < 0$

$$Y(y) = ae^{\lambda y} + be^{-\lambda y}, \text{ como } Y(0) = a + b = 0 \text{ entonces } a = -b \text{ luego}$$

$$Y(y) = a(e^{\lambda y} - e^{-\lambda y}) \text{ y como } Y(M) = a(e^{\lambda M} - e^{-\lambda M}) = 0 \text{ entonces } a = 0 \text{ y así}$$

$$Y(y) = 0 \text{ y por tanto } u(x,y) = X(x)Y(y) = 0$$

c) Si $\alpha = \lambda^2 > 0$ entonces la solución de $Y''(y) + \alpha Y(y) = Y''(y) + \lambda^2 Y(y) = 0$ es

$Y(y) = A\cos\lambda y + B\sin\lambda y$ como $Y(0) = A = 0$ entonces

$$\begin{aligned} Y(y) &= B\sin\lambda y \text{ y como } Y(M) = B\sin\lambda M = 0 \text{ entonces } \sin\lambda M = 0 \text{ y así } \lambda M = n\pi \\ \text{luego } \lambda &= \frac{n\pi}{M} \text{ por tanto } Y(y) = B\sin\frac{n\pi y}{M} \end{aligned}$$

Ahora para este valor de α solucionamos la ecuación

$$\begin{aligned} X''(x) - \alpha X(x) &= X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0 \text{ y así } X(x) = Ce^{\lambda x} + De^{-\lambda x} \text{ entonces} \\ X(x) &= Ce^{\lambda x} + De^{-\lambda x} = De^{-\lambda x} \ (C = 0) \text{ por tanto} \end{aligned}$$

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi y}{M} e^{-\frac{n\pi x}{M}} \text{ es solución y como}$$

$$u(0,y) = f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi y}{M} \text{ entonces}$$

$$b_n = \frac{2}{M}\int_0^M f(y)\sin\frac{n\pi y}{M}dy \text{ luego}$$

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{M}\int_0^M f(y)\sin\frac{n\pi y}{M}dy\right)\sin\frac{n\pi y}{M}e^{-\frac{n\pi x}{M}}$$

es la solución

En forma análoga se solucionan las ecuaciones

1). $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ si $u(0,y)=0 \quad u(x,M)=0 \quad u(x,0)=f(x)$

2). $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ si $u(0,y)=0 \quad u(x,M)=f(x) \quad u(x,0)=0$

3). $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ si $u(x,0)=0 \quad u(0,y)=f(y) \quad u(L,y)=0$

4). $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ si $u(x,0)=f(x) \quad u(0,y)=0 \quad u(L,y)=0$

5). $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ si $u(x,0)=0 \quad u(0,y)=0 \quad u(L,y)=f(y)$

6). $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ si $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y)=0 \quad u(x,0)=f(x) \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,y)=0$

7). $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ si $u(0,y)=f(y) \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0)=0 \quad u(L,y)=0$

8). $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ si $u(0,y)=0 \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0)=0 \quad u(L,y)=f(y)$

9). $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ si $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y)=0 \quad u(x,0)=f(x) \quad u(L,y)=0$

10). $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ si $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,M)=0 \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0)=0 \quad u(0,y)=f(y)$

Ejemplo 4.43 *Solucionar la ecuación*

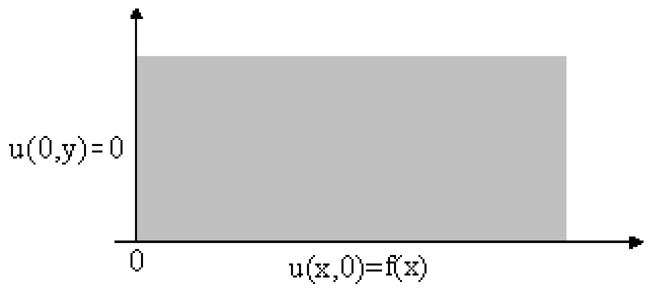
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad si \quad u(0,y)=0 \quad u(x,0)=f(x)$$

La solución es de la forma

$$u(x,y)=X(x)Y(y) \quad \text{y así} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=X''(x)Y(y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=X(x)Y''(y)$$

luego reemplazando en la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$



se tiene que

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \quad \text{y de aquí} \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \alpha \quad \text{y así}$$

$$X''(x) - \alpha X(x) = 0 \text{ con } X(0) = 0 \text{ y } Y''(y) + \alpha Y(y) = 0$$

a) Si $\alpha = 0$ entonces $X''(x) = 0$ y así $X(x) = ax + b$, y como $X(0) = b = 0$ entonces $X(x) = ax$ por tanto $a = 0$ y así $X(x) = 0$ entonces

$$u(x,y) = 0$$

b) Si $\alpha = \lambda^2 > 0$ entonces

$X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0$ tiene como solución $X(x) = ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x}$ como $X(0) = a + b = 0$ $a = -b$

$$\text{por lo tanto } X(x) = a(e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}) \text{ entonces } a = 0 \text{ ya que } |u(x,y)| < M$$

$$y \text{ así } u(x,y) = X(x)Y(y) = 0$$

c) Si $\alpha = -\lambda^2 < 0$ entonces

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \text{ tiene como solución}$$

$$X(x) = a\cos\lambda x + b\sin\lambda x \text{ y como } X(0) = a = 0 \text{ entonces}$$

$$X(x) = b\sin\lambda x$$

Ahora para este valor de α solucionamos la ecuación

$$\begin{aligned} Y''(y) - \lambda^2 Y(y) &= 0 \text{ que tiene por solución } Y(y) = Ae^{\lambda y} + Be^{-\lambda y} \\ \text{entonces } Y(y) &= Be^{-\lambda y} \;\; \textit{pués } A = 0 \text{ y así} \end{aligned}$$

$$u_\lambda(x,y) = B\sin\lambda x \; e^{-\lambda y} \text{ es solución, por tanto}$$

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}B(\lambda)\sin\lambda x\ e^{-\lambda y}d\lambda$$

entonces como

$$u(x,0)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}B(\lambda)\sin\lambda x\ d\lambda=f(x)\ \text{ entonces}$$

$$B(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\sin\lambda v dv\ \text{y así}$$

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}B(\lambda)\sin\lambda x\ e^{-\lambda y}d\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\sin\lambda v\sin\lambda x e^{-\lambda y}dvd\lambda$$

es la solución

Ejemplo 4.44 *Solucionar la ecuación*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\qquad si\qquad u(x,0)=f(x)$$

La solución es de la forma

$$u(x,y)=X(x)Y(y)\quad \text{ y así }\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=X''(x)Y(y)\quad y\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=X(x)Y''(y)$$

luego reemplazando en la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

se tiene que

$$X''(x)Y(y)+X(x)Y''(y)=0\quad y\ \ de\ \ aquí\ \ \frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(y)}{Y(y)}=-\lambda^2\ \ y\ así$$

$$X''(x)+\lambda^2X(x)=0\quad y\ \ Y''(y)-\lambda^2Y(y)=0\ \textit{cuyas soluciones son}$$
$$X(x)=a\cos\lambda x+b\sin\lambda x\ \ y\ \ Y(y)=ce^{\lambda y}+de^{-\lambda y}=de^{-\lambda y}\ \textit{pués } c=0$$

luego

$$u(x,y)=X(x)Y(y)=(a\cos\lambda x+b\sin\lambda x)\left(ce^{\lambda y}+de^{-\lambda y}\right)=(A\cos\lambda x+B\sin\lambda x)\,e^{-\lambda y}$$

por tanto

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\right) e^{-\lambda y} d\lambda$$

y como

$$u(x,0) = f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\right) e^{-\lambda 0} d\lambda = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\right) d\lambda =$$

entonces por el teorema de la integral de Fourier se tiene

$$A(\lambda) = \int_{-\infty}^\infty f(v)\cos\lambda v dv \quad y\ B(\lambda) = \int_{-\infty}^\infty f(v)\sin\lambda v dv$$

así que

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty f(v)\cos\lambda v dv\cos\lambda x + \int_{-\infty}^\infty f(v)\sin\lambda v dv\sin\lambda x\right) e^{-\lambda y} d\lambda$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f(v)\cos(\lambda v - \lambda x) e^{-\lambda y} dv d\lambda$$

Analizar el caso en que $\alpha = 0$ y $\alpha = \lambda^2$.

Ejemplo 4.45 *Solucionar la ecuación*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

si

$$u(0,y,z) = u(1,y,z) = u(x,0,z) = u(x,1,z) = u(x,y,0) = 0,\ \ u(x,y,1) = xy$$

En efecto : La solución es de la forma

$$u(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

derivando y reemplazando en la ecuación se tiene que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=X''YZ+XY''Z+XYZ''=0$$

y dividiendo por XYZ se tiene que

$$\frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}+\frac{Z''}{Z}=0$$

y de aquí

$$\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}-\frac{Z''}{Z}=\alpha=\lambda^2$$

por tanto

$$\frac{X''}{X}=\alpha \quad \text{y} \quad -\frac{Y''}{Y}-\frac{Z''}{Z}=\alpha$$

luego

$$X''-\alpha X=0 \quad X(0)=0,\ X(1)=0$$

y la solución no nula de esta ecuación coresponde cuando $\alpha=-\lambda^2=-(n\pi)^2$ y ella es

$$X(x)=a\sin n\pi x$$

Con este valor de α solucionemos

$$-\frac{Y''}{Y}-\frac{Z''}{Z}=\alpha=-(n\pi)^2$$

Como

$$-\frac{Y''}{Y}-\frac{Z''}{Z}=\alpha=-(n\pi)^2 \ \text{ entonces } \frac{Y''}{Y}=-\frac{Z''}{Z}+(n\pi)^2=\beta$$

entonces

$$\frac{Y''}{Y}=\beta \ \text{ y } \ -\frac{Z''}{Z}+(n\pi)^2=\beta$$

luego

$$Y''-\beta Y=0 \ \text{ con } Y(0)=0, Y(1)=0$$

Que tiene por solución no nula

$$Y(y)=b\sin m\pi y \ \text{ cuando } \beta=-(m\pi)^2$$

por lo tanto

$$-\frac{Z''}{Z}+(n\pi)^2=-(m\pi)^2 \text{ luego } Z''-\pi^2(n^2+m^2)Z=0 \text{ con } Z(0)=0$$

cuya solución es

$$Z(z) = a\cosh\left(\pi\sqrt{n^2+m^2}\right)z + b\sinh\left(\pi\sqrt{n^2+m^2}\right)z = b\sinh\left(\pi\sqrt{n^2+m^2}\right)z$$

luego la solución es

$$u(x,y,z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} b_{nm}\sin n\pi x\sin m\pi y\sinh\left(\pi\sqrt{n^2+m^2}\right)z$$

y como

$$u(x,y,1) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} b_{nm}\sin n\pi x\sin m\pi x\sinh\left(\pi\sqrt{n^2+m^2}\right)1 = xy$$

entonces

$$b_{nm}\sinh\left(\pi\sqrt{n^2+m^2}\right) = 4\int_0^1\int_0^1 xy\sin n\pi x\sin m\pi y dxdy$$

por tanto

$$b_{nm} = \frac{4}{\sinh\left(\pi\sqrt{n^2+m^2}\right)}\int_0^1\int_0^1 xy\sin n\pi x\sin m\pi y dxdy$$

Por tanto

$$u(x,y,z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} b_{nm}\sin n\pi x\sin m\pi y\sinh\left(\pi\sqrt{n^2+m^2}\right)z =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{\sinh\left(\pi\sqrt{n^2+m^2}\right)}\int_0^1\int_0^1 xy\sin n\pi x\sin m\pi y dxdy\right)\sin n\pi x\sin m\pi y\sinh\left(\pi\sqrt{n^2+m^2}\right)z$$

Ejercicio Solucionar la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

si

$$u(0,y,z) = u(L,y,z) = u(x,0,z) = u(x,M,z) = u(x,y,0) = 0,\ u(x,y,P) = f(x,y)$$

Ejemplo 4.46 *Solucionar la ecuación*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

si

$$u(0,y,t) = u(2\pi,y,t) = u(x,0,t) = u(x,2\pi,t) = 0, u(x,y,0) = x^2 \sin y, \ \frac{\partial u}{\partial t}u(x,y,0) = 0$$

En efecto : La solución es de la forma

$$u(x,y,z) = X(x)Y(y)T(t)$$

derivando y reemplazando en la ecuación se tiene que

$$XYT'' = X''YT + XY''T$$

y dividiendo por XYT se tiene que

$$\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} \text{ entonces } \frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} - \frac{Y''}{Y}$$

y de aquí

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} - \frac{Y''}{Y} = \alpha = \lambda^2$$

por tanto

$$\frac{X''}{X} = \alpha \quad \text{y} \quad \frac{T''}{T} - \frac{Y''}{Y} = \alpha$$

luego

$$X'' - \alpha X = 0 \quad X(0) = 0, \ X(2\pi) = 0$$

y la solución no nula de esta ecuación coresponde cuando $\alpha = -\lambda^2 = -(\frac{n}{2})^2$ y ella es

$$X(x) = a \sin \frac{nx}{2}$$

Con este valor de α solucionemos

$$\frac{T''}{T} - \frac{Y''}{Y} = \alpha = -(\frac{n}{2})^2$$

Como

$$\frac{T''}{T} - \frac{Y''}{Y} = -(\frac{n}{2})^2 \text{ entonces } \frac{Y''}{Y} = \frac{T''}{T} + (\frac{n}{2})^2 = \beta$$

entonces

$$\frac{Y''}{Y} = \beta \;\text{ y }\; \frac{T''}{T} + (\frac{n}{2})^2 = \beta$$

luego

$$Y'' - \beta Y = 0 \;\text{ con } Y(0) = 0, Y(2\pi) = 0$$

Que tiene por solución no nula

$$Y(y) = b \sin\frac{mt}{2} \;\text{ cuando } \beta = -(\frac{m}{2})^2$$

por lo tanto

$$\frac{T''}{T} + (\frac{n}{2})^2 = \beta = -(\frac{m}{2})^2 \;\text{ luego } T'' + \frac{1}{4}(n^2 + m^2)T = 0 \text{ con } T'(0) = 0$$

cuya solución es

$$T(t) = a\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{n^2+m^2}\right)t + b\sin\frac{1}{2}\left(\sqrt{n^2+m^2}\right)t = a\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{n^2+m^2}\right)t$$

luego la solución es

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} b_{nm}\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{my}{2}\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{n^2+m^2}\right)t$$

y como

$$u(x,y,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} b_{nm}\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{mx}{2} = x^2\sin y$$

entonces

$$b_{nm} = 4\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2\sin y\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{mx}{2}dxdy$$

por tanto

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} b_{nm}\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{my}{2}\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{n^2+m^2}\right)t =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(4\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2\sin y\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{my}{2}dxdy\right)\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{my}{2}\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{n^2+m^2}\right)t$$

4.10 Ecuación de Laplace en coordenadas polares.

Pasar la ecuación $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ a coordenadas polares.

En efecto recordemos que $x = rcos\theta \quad y = rsin\theta$ y así u depende de r y θ es decir $u(x(r,\theta),y(r,\theta))$ luego

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x}\right]\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x}\right]\frac{\partial \theta}{\partial x}+$$
$$+\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)\frac{\partial \theta}{\partial y}\right]\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}\right)+\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\frac{\partial \theta}{\partial y}\right]\frac{\partial \theta}{\partial y}$$
$$+\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$$

entonces

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial^2 u}{\partial \theta\partial r}\frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2+$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial^2 u}{\partial \theta\partial r}\frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2+$$
$$\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\left(\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\left(\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial \theta\partial r}\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial y}\right)$$
$$+\frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial u}{\partial \theta}\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \theta}\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\left(\frac{\cos^2\theta}{r^2} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r}\left(\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} - \frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\right) +$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{\cos^2\theta}{r} + \frac{\sin^2\theta}{r}\right) + \frac{\partial u}{\partial \theta}\left(\frac{-2\sin\theta\cos\theta}{r^2} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta}\left(\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} - \frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0$$

por tanto

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0$$

es la ecuación de Laplace en cordenadas polares

Ahora como

$$x = r\cos\theta \quad \text{y } = \text{rsin}\theta \quad \text{r} = \sqrt{x^2+y^2} \quad \tan\theta = \frac{y}{x} \quad \theta = \arctan\frac{y}{x} \quad \text{entonces}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\theta, \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2} = -\frac{\sin\theta}{r} \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{\sin^2\theta}{r} \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta \quad \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{\cos^2\theta}{r} \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r} \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = -\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}$$

De la deducción anterior se desprende que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

es la ecuación de Laplace en cordenadas cilíndricas

Ejemplo 4.47 *Una placa en forma de sector circular de radio a, tiene un angulo central β. Si la parte circular se mantiene a una temperatura $f(\theta)$, $0 < \theta < \beta$, mientras que los rayos limitantes se mantienen a una temperatura de cero, hallar la temperatura en condiciones estables en cualquier punto del sector.*

En efecto, solucionaremos la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0, \;\; si \;\; u(r,0) = 0, \; u(r,\beta) = 0, \; u(a,\theta) = f(\theta)$$

Como

$$u(r,\theta) = R(r)\theta(\theta)$$

entonces

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = R''(r)\theta(\theta), \quad \frac{\partial u}{\partial r} = R'(r)\theta(\theta), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = R(r)\theta''(\theta)$$

y reemplazando en la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0$$

obtenemos

$$R''(r)\theta(\theta) + \frac{1}{r^2}R(r)\theta''(\theta) + \frac{1}{r}R'(r)\theta(\theta) = 0$$

y dividiendo esta igualdad por $R(r)\theta(\theta)$, se tiene

$$\frac{R''(r)}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\theta''(\theta)}{\theta} + \frac{1}{r}\frac{R'(r)}{R} = 0$$

y de aquí se obtiene

$$\frac{R''(r)}{R} + +\frac{1}{r}\frac{R'(r)}{R} = -\frac{1}{r^2}\frac{\theta''(\theta)}{\theta}$$

y multiplicando ambos lados de la igualdad anterior por r^2 se obtiene que

$$r^2\frac{R''(r)}{R} + +r\frac{R'(r)}{R} = -\frac{\theta''(\theta)}{\theta} = \alpha \text{ luego } r^2R''(r) + rR'(r) - \alpha R = 0 \quad \theta''(\theta) + \alpha\theta = 0$$

y así solucionaremos las ecuaciones

$$\theta''(\theta) + \alpha\theta = 0 \quad \theta(0) = 0 \quad \theta(\beta) = 0 \quad \text{y} \quad r^2R''(r) + rR'(r) - \alpha R = 0$$

luego si

a) Si $\alpha = 0$ entonces $\theta''(\theta) = 0$, por tanto $\theta(\theta) = a\theta + b$ y como $\theta(0) = a0 + b = 0$ se tiene que $b = 0$ y así $\theta(\theta) = a\theta$ y como $\theta(\beta) = a\beta = 0$ se tiene que $a = 0$ y así $u = 0$

b) Si $\alpha < 0$, $\alpha = -\lambda^2$ $\theta''(\theta)+\alpha\theta = \theta''(\theta)-\lambda^2\theta = 0$ cuya solución es $\theta(\theta) = ae^{\lambda\theta}+be^{-\lambda\theta}$ y como $\theta(0) = ae^{\lambda 0} + be^{-\lambda 0} = a + b = 0$ entonces $a = -b$ y así $\theta(\theta) = a(e^{\lambda\theta} - be^{-\lambda\theta})$ y como $\theta(\beta) = a(e^{\lambda\beta} - be^{-\lambda\beta}) = 0$ entonces $a = 0$ y así $u = 0$

c) Si $\alpha > 0$, $\alpha = \lambda^2$ $\theta''(\theta) + \alpha\theta = \theta''(\theta) + \lambda^2\theta = 0$ cuya solución es $\theta(\theta) = a\cos\lambda\theta + b\sin\lambda\theta$ y como $\theta(0) = a\cos 0 + b\sin 0 = a = 0$ entonces $a = 0$ y así $\theta(\theta) = b\sin\lambda\theta$ y como $\theta(\beta) = b\sin\lambda\beta = 0$ entonces $\lambda\beta = n\pi$ por tanto $\lambda = \dfrac{n\pi}{\beta}$ y así $\theta(\theta) = b\sin\dfrac{n\pi\theta}{\beta}$

Ahora para este valor propio solucionaremos la ecuación

$$r^2R''(r) + rR'(r) - \alpha R = r^2R''(r) + rR'(r) - \lambda^2 R = 0$$

que es una ecuación de cauchy cuya solución es de la forma $R = r^n$, con $n = \pm\lambda$, es decir, $R = ar^{\lambda} + br^{-\lambda} = ar^{\lambda}$ por lo tanto la solución de la ecuación es de la forma

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n r^{\frac{n\pi}{\beta}} \sin\frac{n\pi\theta}{\beta}$$

y como

$$u(a,\theta) = f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n a^{\frac{n\pi}{\beta}} \sin \frac{n\pi\theta}{\beta}$$

entonces

$$b_n a^{\frac{n\pi}{\beta}} = \frac{2}{\beta} \int_0^{\beta} f(\theta) \sin \frac{n\pi\theta}{\beta} d\theta \text{ por tanto } b_n = \frac{2}{\beta a^{\frac{n\pi}{\beta}}} \int_0^{\beta} f(\theta) \sin \frac{n\pi\theta}{\beta} d\theta$$

y así la solución es

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\beta a^{\frac{n\pi}{\beta}}} \int_0^{\beta} f(\theta) \sin \frac{n\pi\theta}{\beta} d\theta \right) r^{\frac{n\pi}{\beta}} \sin \frac{n\pi\theta}{\beta}$$

Ejemplo 4.48 *Solucionar la ecuación*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad si \quad u(r,0) = 0 \qquad u(r,a) = 0 \qquad u(1,z) = f(z)$$

Pasando la ecuación anterior a cordenadas cilíndricas se tiene que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \text{ con temperatura interior independiente de } \theta$$

es decir, solucionaremos la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Como

$$u(r,z) = R(r)Z(z), \ \text{entonces } u(r,0) = R(r)Z(0) = 0, \text{ luego } Z(0) = 0$$

$$y \ u(r,a) = R(r)Z(a) = 0, \ \text{entonces } Z(a) = 0$$

$$\text{Como} \ \ u(r,z) = R(r)Z(z) \ \text{entonces} \ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = R''(r)Z(z), \ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = R(r)Z''(z)$$

por tanto reemplazando en la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

se tiene que

$$R''(r)Z(z)+\frac{1}{r}R'(r)Z(z)+R(r)Z''(z)=0 \text{ y dividiendo por } R(r)Z(z) \text{ se tiene que}$$

$$\frac{R''(r)}{R(r)}+\frac{1}{r}\frac{R'(r)}{R(r)}+\frac{Z''(z)}{Z(z)}=0 \text{ entonces } \frac{R''(r)}{R(r)}+\frac{1}{r}\frac{R'(r)}{R(r)}=-\frac{Z''(z)}{Z(z)}=\alpha$$

luego hay que solucionar

$$Z''(z)+\alpha Z(z)=0 \;\text{ con }\; Z(0)=0,\;\; Z(a)=0 \;\text{ y }\; r^2R''(r)+rR'(r)-\alpha r^2R=0$$

a) Si $\alpha=0$, $Z''(z)=0$ entonces $Z(z)=cz+d$ y como $Z(0)=d=0$ entonces $Z(z)=cz$ y como $Z(a)=ca=0$ se tiene que $c=0$ por lo tanto $Z(z)=0$ y asì $u(r,z)=R(r)Z(z)=0$

b) Si $\alpha=-\lambda^2<0$, $Z''(z)-\lambda^2Z(z)=0$, entonces $Z(z)=Ae^{\lambda z}+Be^{-\lambda z}$ como $Z(0)=A+B=0$ luego $A=-B$ y por tanto $Z(z)=A(e^{\lambda z}-e^{-\lambda z})$ y como $Z(a)=A(e^{\lambda a}-e^{-\lambda a})=0$ se concluye que $A=0$ luego $Z(z)=0$ y $u(r,z)=R(r)Z(z)=0$

c) Si $\alpha=\lambda^2>0$, $Z''(z)+\lambda^2Z(z)=0$ tiene por solución

$$Z(z)=A\cos\lambda z+B\sin\lambda z \text{ y como } Z(0)=A=0 \text{ entonces } Z(z)=B\sin\lambda z \text{ y como}$$

$$Z(a)=B\sin\lambda a=0 \text{ se tiene que } \sin\lambda a=0 \text{ luego } \lambda a=n\pi \text{ por tanto } \lambda=\frac{n\pi}{a}$$

$$\text{y así } Z(z)=B\sin\frac{n\pi z}{a}$$

Ahora para este valor de α se soluciona la ecuación

$$r^2R''(r)+rR'(r)-\alpha r^2R=r^2R''(r)+rR'(r)+((\lambda ri)^2-0)R=0 \text{ cuya solución es}$$

$$R(r)=CI_0(\lambda r)+DK_0(\lambda r)=CI_0(\frac{n\pi r}{a})+DK_0(\frac{n\pi r}{a})=CI_0(\frac{n\pi r}{a}) \text{ pues } D=0$$

ya que K_0 en $r=0$ no es acotada,

$$\text{por tanto}\quad u(r,z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nI_0(\frac{n\pi r}{a})\sin\frac{n\pi z}{a}\quad\text{y como}$$

$$u(1,z)=f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nI_0(\frac{n\pi}{a})\sin\frac{n\pi z}{a} \text{ se tiene que}$$

$$b_n I_0(\frac{n\pi}{a}) = \frac{2}{a}\int_0^a f(z)\sin\frac{n\pi z}{a}dz \text{ entonces } b_n = \frac{2}{aI_0(\frac{n\pi}{a})}\int_0^a f(z)\sin\frac{n\pi z}{a}dz$$

$$\text{por tanto } u(r,z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{aI_0(\frac{n\pi}{a})}\int_0^a f(z)\sin\frac{n\pi z}{a}dz\right) I_0(\frac{n\pi r}{a})\sin\frac{n\pi z}{a}$$

es la solución

Ejemplo 4.49 *Solucionar la ecuación*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \text{ si } \; u(r,0) = f(r) \quad u(r,a) = 0 \;\; u(1,z) = 0$$

con temperatura interior independiente de θ

es decir, solucionaremos la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Como

$$\begin{aligned} u(r,z) &= R(r)Z(z), \text{ entonces } u(r,a) = R(r)Z(a) = 0 \text{ luego } Z(a) = 0 \text{ y} \\ u(1,z) &= R(1)Z(z) = 0, \text{ entonces } R(1) = 0 \end{aligned}$$

Ahora

$$u(r,z) = R(r)Z(z) \quad \text{entonces} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = R''(r)Z(z), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = R(r)Z''(z)$$

por tanto, reemplazando en la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

se tiene que

$$R''(r)Z(z) + \frac{1}{r}R'(r)Z(z) + R(r)Z''(z) = 0 \text{ y dividiendo por } R(r)Z(z) \text{ esta igualdad}$$

se tiene que

$$\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r}\frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = 0 \text{ entonces } \frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r}\frac{R'(r)}{R(r)} = -\frac{Z''(z)}{Z(z)} = \alpha$$

luego hay que solucionar

$$Z''(z) + \alpha Z(z) = 0 \text{ con } \quad Z(a) = 0 \text{ y } r^2R''(r) + rR'(r) - \alpha r^2 R = 0 \text{ con } R(1) = 0$$

a) Si $\alpha = 0$

$r^2R''(r) + rR'(r) - \alpha r^2 R = r^2R''(r) + rR'(r) = 0$, entonces $r^2u'(r) + ru = 0$, luego $\ln u = \ln\left(\frac{c}{r}\right)$ entonces $u = \frac{c}{r} = R'(r)$, por tanto $R(r) =$ c $\ln r + k = k$ y como $R(1) = 0 = k$ entonces luego $R(r) = 0$, luego $u(r, z) = 0$

b) Si $\alpha = \lambda^2 > 0$,

$$r^2R''(r) + rR'(r) - \lambda^2 r^2 R = 0 = r^2R''(r) + rR'(r) + ((ir\lambda)^2 - 0)R = 0$$

que tiene por solución

$$R(r) = AI_0(\lambda r) + BK_0(\lambda r) = AI_0(\lambda r) \text{ pues } B = 0 \text{ y como } R(1) = AI_0(\lambda) = 0$$

$$\text{entonces } A = 0 \text{ y así } u(r, z) = 0$$

c) Si $\alpha = -\lambda^2 < 0$,

$$r^2R''(r) + rR'(r) + \lambda^2 r^2 R = 0 = r^2R''(r) + rR'(r) + ((r\lambda)^2 - 0)R = 0$$

$$\text{cuya solución es } R(r) = AJ_0(\lambda r) + BY_0(\lambda r) = AJ_0(\lambda r) \text{ y como}$$

$$R(1) = AJ_0(\lambda) = 0 \text{ entonces } J_0(\lambda) = 0 \text{ por tanto } \lambda_{o,n} = \lambda \text{ y así } R(r) = AJ_0(r\lambda_{o,n})$$

Ahora

$$Z'' - \lambda_{o,n}^2 Z = 0 \text{ y así } Z(z) = A\cosh\lambda_{o,n}z + B\sinh\lambda_{o,n}z \text{ y como}$$

$$Z(a) = A\cosh\lambda_{o,n}a + B\sinh\lambda_{o,n}a = 0 \text{ entonces } B = -A\frac{\cosh\lambda_{o,n}a}{\sinh\lambda_{o,n}a} \text{ y así}$$

$$Z(z) = d\sinh\left(\lambda_{o,n}(a - z)\right) \text{ por lo tanto}$$

$$u(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n J_0(\lambda_{o,n}r)\sinh\left(\lambda_{o,n}(a - z)\right) \text{ y así}$$

$$u(r, 0) = f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n J_0(\lambda_{o,n}r)\sinh\left(\lambda_{o,n}a\right) \text{ entonces}$$

$$\int_0^1 rJ_0(\lambda_{o,n}r)f(r)dr = b_n\sinh\left(\lambda_{o,n}a\right)\int_0^1 r\left[J_0(\lambda_{o,n}r)\right]^2 dr \text{ y de aquí}$$

$$b_n = \frac{\int_0^1 rJ_0(\lambda_{o,n}r)f(r)dr}{\sinh(\lambda_{o,n}a)\int_0^b r\left[J_0(\lambda_{o,n}r)\right]^2 dr} \text{ por lo tanto}$$

$$u(r,z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\int_0^1 rJ_0(\lambda_{o,n}r)f(r)dr}{\sinh(\lambda_{o,n}a)\int_0^1 r\left[J_0(\lambda_{o,n}r)\right]^2 dr}\right)J_0(\lambda_{o,n}r)\sinh(\lambda_{o,n}(a-z))$$

es la solución

Ejemplo 4.50 *Solucionar la ecuación*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \text{ si}$$

$$u(b,\theta,z) = 0, \quad u(r,\theta,0) = 0, \;\; u(r,\theta,h) = f(r,\theta), \qquad u(r,0,z) = 0, \;\; u(r,\pi,z) = 0$$

Como

$$u(r,z) = R(r)Z(z)\theta(\theta), \text{ entonces}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = R''(r)Z(z)\theta(\theta), \;\; \frac{\partial u}{\partial r} = R'(r)Z(z)\theta(\theta), \;\; \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \theta'' R(r)Z(z) \;\; \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = R(r)Z''(z)\theta(\theta)$$

y reemplazando en la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

obtenemos

$R''(r)Z(z)\theta + \frac{1}{r}R'(r)Z(z)\theta + R(r)Z''(z)\theta + \frac{1}{r^2}\theta'' RZ = 0$ y dividiendo por $R(r)Z(z)\theta(\theta)$ se tiene que

$$\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r}\frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} + \frac{1}{r^2}\frac{\theta''}{\theta} = 0 \text{ entonces } \frac{r^2R''(r)}{R(r)} + r\frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{r^2Z''(z)}{Z(z)} = -\frac{\theta''}{\theta} = \alpha$$

luego hay que solucionar

I)

$$\theta'' + \alpha\theta = 0 \;\; \text{con} \quad \theta(0) = 0, \;\; \theta(\pi) = 0$$

a) Si $\alpha = 0$, $\theta'' = 0$, luego $\theta = A\theta + B$, y como $\theta(0) = B = 0$, entonces $\theta = A\theta$, y como $\theta(\pi) = A\pi = 0$, entonces $\theta = 0$

b)Si $\alpha < 0, \alpha = -\lambda^2$ entonces $\theta'' + \alpha\theta = \theta'' - \lambda^2\theta = 0$ por tanto $\theta = Ae^{\lambda\theta} + Be^{-\lambda\theta}$, y aplicando las condiciones iniciales se concluye que $\theta = 0$

c) Si $\alpha > 0$, $\alpha = \lambda^2$, entonces $\theta''+\alpha\theta = \theta''+\lambda^2\theta = 0$, por tanto $\theta = A\cos\lambda\theta+B\sin\lambda\theta$, y como $\theta(0) = A = 0$, se tiene $\theta = B\sin\lambda\theta$, y como $\theta(\pi) = B\sin\lambda\pi = 0$, se concluye $\sin\lambda\pi = 0$, luego $\lambda\pi = n\pi$, y asì $\lambda = n$, por lo tanto $\theta = B\sin n\theta$

II)

$$\frac{r^2R''(r)}{R(r)} + r\frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{r^2Z''(z)}{Z(z)} = n^2 \text{ , con } R(b) = 0$$

entonces

$$\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r}\frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = \frac{n^2}{r^2}$$

así

$$\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r}\frac{R'(r)}{R(r)} - \frac{n^2}{r^2} = -\frac{Z''(z)}{Z(z)} = p$$

entonces

$$r^2R''(r)+rR'(r)+pr^2R-n^2R = r^2R''(r)+rR'(r)+\left(pr^2 - n^2\right)R = 0 \text{ y } \; Z''(z)-pZ(z) = 0$$

luego

a) Si $p = 0$, entonces

$$r^2R''(r) + rR'(r) + \left(0 - n^2\right)R = 0, \text{ entonces } R(r) = r^m$$

y así

$$m(m-1) + m - n^2 = m^2 - n^2 = 0, \text{ por tanto } m = \pm n \text{ y asì}$$

$$R(r) = Ar^n + Br^{-n} = Ar^n \;\text{ como } R(b) = Ab^n = 0, \text{ entonces } A = 0 \text{ y así } R(r) = 0$$

b) Si $p = -\lambda^2 < 0$,

$$r^2R''(r) + rR'(r) + \left(-\lambda^2r^2 - n^2\right)R = r^2R''(r) + rR'(r) + ((ir\lambda)^2 - n^2)R = 0$$

que tiene por solución

$$R(r) = AI_n(\lambda r) + BK_n(\lambda r) = AI_n(\lambda r) \;\text{ pues } B = 0 \text{ y como } R(b) = AI_n(b\lambda) = 0$$

$$\text{entonces } \; A = 0 \text{ y así } \; u(r,z) = 0$$

c) Si $p = \lambda^2 > 0$,

$$r^2R''(r) + rR'(r) + (\lambda^2r^2 - n^2)R = 0$$

cuya solución es $R(r) = AJ_n(\lambda r) + BY_n(\lambda r) = AJ_n(\lambda r)$ y como

$R(b) = AJ_n(\lambda b) = 0$ entonces $J_n(\lambda b) = 0$ por tanto $\lambda_{n,m} = \lambda b$ y así $R(r) = AJ_n(\frac{r\lambda_{n,m}}{b})$

III) Ahora

$$Z'' - \frac{\lambda_{n,m}^2}{b^2} Z = 0 \text{ y asì } Z(z) = A\cosh\frac{\lambda_{n,m}}{b}z + B\sinh\frac{\lambda_{n,m}}{b}z \text{ y como}$$

$$Z(0) = A = 0 \text{ entonces}$$

$$Z(z) = B\sinh\left(\frac{\lambda_{n,m}}{b}z\right) \text{ por lo tanto}$$

$$u(r,\theta,z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}\sin n\theta J_n(\frac{\lambda_{n,m}}{b}r)\sinh\left(\frac{\lambda_{n,m}}{b}z\right) \text{ y así}$$

$$u(r,\theta,h) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin n\theta\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}J_n(\frac{\lambda_{n,m}}{b}r)\sinh\left(\frac{\lambda_{n,m}}{b}h\right) = f(r,\theta) \text{ entonces}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}J_n(\frac{\lambda_{n,m}}{b}r)\sinh\left(\frac{\lambda_{n,m}}{b}h\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(r,\theta)\sin n\theta d\theta$$

y así

$$a_{nm}\sinh\left(\frac{\lambda_{n,m}}{b}h\right)\int_0^b rJ_n^2(\frac{\lambda_{n,m}}{b}r)dr = \left(\int_0^b rJ_n(\frac{\lambda_{n,m}}{b}r)\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(r,\theta)\sin n\theta d\theta\right)dr \text{ y asì}$$

$$a_{nm} = \frac{\left(\int_0^b rJ_n(\frac{\lambda_{n,m}}{b}r)\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(r,\theta)\sin n\theta d\theta\right)dr}{\sinh\left(\frac{\lambda_{n,m}}{b}h\right)\int_0^b rJ_n^2(\frac{\lambda_{n,m}}{b}r)dr}$$

luego

$$u(r,\theta,z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\left(\int_0^b rJ_n(\frac{\lambda_{n,m}}{b}r)\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(r,\theta)\sin n\theta d\theta\right)dr}{\sinh\left(\frac{\lambda_{n,m}}{b}h\right)\int_0^b rJ_n^2(\frac{\lambda_{n,m}}{b}r)dr}\sin n\theta J_n(\frac{\lambda_{n,m}}{b}r)\sinh\left(\frac{\lambda_{n,m}}{b}z\right)$$

es la solución

Ejemplo 4.51 *Hallar la distribuciòn de temperatura en el interior de la esfera de radio 1, si la temperatura es independiente de* θ *y en la superficie es,* $u(1,\varphi) = \ f(\varphi)$.

Solucionaremos la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{r^2}\cot\varphi\frac{\partial u}{\partial \varphi}+\frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0$$

En efecto : Como La temperatura es independiente de θ, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0$ luego hay que solucionar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{r^2}\cot\varphi\frac{\partial u}{\partial \varphi}=0, \qquad \text{si} \quad u(1,\varphi)=f(\varphi)$$

y así

$$u(r,\varphi)=R(r)A(\varphi)$$

derivando y reemplazando en la ecuación se tiene

$$R''A+\frac{2}{r}R'A+\frac{1}{r^2}A''R+\frac{\cot\varphi}{r^2}A'R=0 \text{ y dividiendo por } R(r)A(\varphi)\text{, se tiene}$$

$$\frac{R''}{R}+\frac{2}{r}\frac{R'}{R}+\frac{1}{r^2}\frac{A''}{A}+\frac{1}{r^2}\cot\varphi\frac{A'}{A}=0 \ \text{ y separando variables tenemos}$$

$$\frac{r^2R''}{R}+\frac{2r^2}{r}\frac{R'}{R}=-\left(\frac{A''}{A}+\cot\varphi\frac{A'}{A}\right)=\alpha$$

luego

$$-\left(\frac{A''}{A}+\cot\varphi\frac{A'}{A}\right)=\alpha \quad \text{y} \quad \frac{r^2R''}{R}+\frac{2rR'}{R}=\alpha \text{ y de la primera ecuación se tiene}$$

$$\frac{A''}{A}+\cot\varphi\frac{A'}{A}=-\alpha \quad \text{ sisi } \ A''+\cot\varphi A'+\alpha A=0 \text{ el cual para solucionarla}$$

hacemos el cambio de variable $x = cos\varphi$, luego

$$\frac{\partial A}{\partial \varphi}=\frac{\partial A}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial \varphi}=\frac{\partial A}{\partial x}\left(-\sin\varphi\right)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2} &= -\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\sin\varphi\right)=-\left[\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)\sin\varphi+\frac{\partial A}{\partial x}\cos\varphi\right]\\
&= -\left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)\sin\varphi.\sin\varphi+\frac{\partial A}{\partial x}\cos\varphi\right]=\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\sin^2\varphi-\frac{\partial A}{\partial x}\cos\varphi
\end{aligned}$$

luego

$$A'' + \cot\varphi A' + \alpha A = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\sin^2\varphi - \frac{\partial A}{\partial x}\cos\varphi + \cot\varphi\left(\frac{\partial A}{\partial x}(-\sin\varphi)\right) + \alpha A = 0$$

y simplificando

$$(1-\cos^2\varphi)\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - 2\cos\varphi\frac{\partial A}{\partial x} + \alpha A = (1-x^2)\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial A}{\partial x} + \alpha A = 0$$

que tiene soluciones acotada en el intervalo $(-1,1)$, solo si elegimos $\alpha = n(n+1)$ con funciones propias a $P_n(x)$, luego $A(x) = CP_n(x)$ y con el valor propio $\alpha = n(n+1)$ solucionaremos la ecuación

$$r^2R'' + 2rR' - n(n+1)R = 0 \text{ que es una ecuación de cauchy cuya solución es}$$

$$R(r) = Br^n \quad \text{ya que la otra solución no es acotada}$$

y así

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\varphi) \text{ y como}$$

$$u(1,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos\varphi) = f(\varphi)$$

entonces

$$\int_0^{\pi} \sin\varphi P_n(\cos\varphi) f(\varphi) d\varphi = A_n \int_0^{\pi} \sin\varphi P_n^2(\cos\varphi) d\varphi$$

de donde

$$A_n = \frac{\int_0^{\pi} \sin\varphi P_n(\cos\varphi) f(\varphi) d\varphi}{\int_0^{\pi} \sin\varphi P_n^2(\cos\varphi) d\varphi}$$

y así

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\int_0^{\pi} \sin\varphi P_n(\cos\varphi) f(\varphi) d\varphi}{\int_0^{\pi} \sin\varphi P_n^2(\cos\varphi) d\varphi}\right) r^n P_n(\cos\varphi)$$

Ejemplo 4.52 *Hallar la temperatura u(x,y,t) de la làmina* $0 < x < L$, $0 < y < M$ *, si la temperatura inicial* $u(x, y, 0) = f(x, y)$ *en toda ella, y si los bordes se mantienen a una temperatura de cero. Solucionaremos para ello la ecuaciòn*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad si$$

$$u(0, y, t) = 0,\ u(L, y, t) = 0,\quad u(x, 0, t) = 0,\quad u(x, M, t) = 0,\quad u(x, y, 0) = f(x, y)$$

En efecto

$$u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$$

y así

$$X''(x)Y(y)T(t) + X(x)Y''(y)T(t) = X(x)Y(y)T'(t)$$

y dividiendo por XYT, se tiene

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = \frac{T'}{T} \text{ entonces separando variables tenemos que}$$

$$\frac{Y''}{Y} - \frac{T'}{T} = -\frac{X''}{X} = \alpha$$

luego se tienen las ecuaciones

I)

$$X'' + \alpha X = 0 \quad \text{con} \quad X(0) = 0, X(L) = 0$$

cuya solución es

$$X(x) = B \sin\frac{n\pi x}{L} \quad \text{para } \alpha = \lambda^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

II)

$$\frac{Y''}{Y} - \frac{T'}{T} = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \quad \text{luego} \quad \frac{Y''}{Y} = \frac{T'}{T} + \frac{n^2\pi^2}{L^2} = p \text{ entonces}$$

$$Y'' - pY = 0 \qquad Y(0) = 0, \quad Y(M) = 0$$

cuya solución es

$$Y(y) = C \sin\frac{m\pi y}{M} \quad \text{si} \quad p = -\lambda^2 = -\frac{m^2\pi^2}{M^2}$$

III)

$$\frac{T'}{T} = -\frac{n^2\pi^2}{L^2} - \frac{m^2\pi^2}{M^2}, \quad \text{es decir, } T' + \left(\frac{n^2\pi^2}{L^2} + \frac{m^2\pi^2}{M^2}\right)T = 0$$

cuya solución es

$$T(t) = Ke^{-\left(\frac{n^2\pi^2}{L^2} + \frac{m^2\pi^2}{M^2}\right)t}$$

por lo tanto

$$u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_{nm}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{M}e^{-\left(\frac{n^2\pi^2}{L^2}+\frac{m^2\pi^2}{M^2}\right)t}$$

y como

$$u(x,y,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_{nm}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{M}=f(x,y)$$

luego

$$a_{nm}=\frac{2}{M}\frac{2}{L}\int_0^M\int_0^L f(x,y)\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{M}dxdy$$

por tanto la soluciòn es

$$u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{4}{ML}\int_0^M\int_0^L f(x,y)\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{M}dxdy\right)\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{M}e^{-\left(\frac{n^2\pi^2}{L^2}+\frac{m^2\pi^2}{M^2}\right)t}$$

La serie doble de Fourier para una función f(x,y) definida en una región rectangular viene dada por

$$f(x,y)=a_{oo}+\sum_{m=1}^{\infty}a_{mo}\cos\frac{m\pi x}{L}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{on}\cos\frac{n\pi y}{M}+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}\cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi y}{M}$$

donde

$$a_{oo}=\frac{1}{ML}\int_0^M\int_0^L f(x,y)dxdy$$

$$a_{mo}=\frac{2}{ML}\int_0^M\int_0^L f(x,y)\cos\frac{m\pi x}{L}dxdy$$

$$a_{on}=\frac{2}{ML}\int_0^M\int_0^L f(x,y)\cos\frac{n\pi y}{M}dxdy$$

$$a_{mn}=\frac{4}{ML}\int_0^M\int_0^L f(x,y)\cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi y}{M}dxdy$$

Ejercicio 6

Solucionar la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \text{ si } \frac{\partial u}{\partial y}(x,0)=0 \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,M)=0 \quad u(L,y)=0 \quad u(0,y)=f(y)$$

Solucionar la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \text{ si } \frac{\partial u}{\partial y}(x,0)=0 \quad u(x,M)=0 \quad u(L,y)=0 \quad u(0,y)=f(y)$$

Solucionar la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \text{ si } u(x,0)=0 \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,M)=0 \quad u(L,y)=0 \quad u(0,y)=f(y)$$

Solucionar la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \text{ si } \frac{\partial u}{\partial y}(x,0)=0 \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,M)=0 \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L,y)=0 \quad u(0,y)=f(y)$$

Solucionar la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad si \;\; u(0,y)=0 \qquad u(L,y)=0 \qquad u(x,M)=f(x) \qquad u(x,0)=0$$

Solucionar la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad si\; u(0,y)=f(y) \qquad u(L,y)=0 \qquad u(x,M)=0 \qquad u(x,0)=0$$

Solucionar la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad si\; u(x,0)=0 \qquad u(L,y)=f(y) \qquad u(x,M)=0 \qquad u(0,y)=0$$

Solucionar la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad si \quad u(0,y)=0 \quad u(L,y)=f(y) \quad u(x,M)=0 \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,0)=0$$

Solucionar la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \;\; si\; u(x,0)=f(x) \quad u(L,y)=0 \quad u(x,M)=0 \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,y)=0$$

Bibliografía

[1] ANSI/ASME Measurement Uncertainty, Part I. ANSI/ASME PTC 19.1–1985. 1986

[2] .

[3] Popov, E., P., Mechanics of Materials, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1976.

[4] Soderstrand, M., A., Mitra,S., K., "Sensitivity Analysis of Third–Order Filters", International Journal of Electronics, v. 30, No. 3, pp 265–272. 1971.

[5] Streeter, V., L., Wylie, E., B., Fluid Mechanics, McGraw–Hill, N. Y., 1985.

[6] Vrbancis, W., P., "The operational amplifier summer–a practical design procedure". Wescon Conference Record, Session 2, 1982, pp.1–4.

[7] Johnson, R., Elementary Statistics, PWS–Kent, Boston, USA. 1988.