



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

**Escenarios prospectivos de sostenibilidad en la
cooperación entre comunidades rurales: análisis de
bifurcaciones y sistemas de Filippov**

**Prospective sustainability scenarios in the cooperation
between rural communities: bifurcation analysis and
Filippov systems**

Jorge Armando Amador Moncada

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ingeniería y Arquitectura, Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y
Computación
Manizales, Colombia
2019

**Escenarios prospectivos de sostenibilidad en la
cooperación entre comunidades rurales: análisis de
bifurcaciones y sistemas de Filippov**

**Prospective sustainability scenarios in the cooperation
between rural communities: bifurcation analysis and
Filippov systems**

Tesis o trabajo de grado presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:
Ph.D. en Ingeniería - Línea Automática

Director:

Ph.D. Gerard Olivar Tost

Co-Director:

Ph.D. Johan Manuel Redondo

Línea de Investigación:

Modelamiento y simulación de sistemas complejos

Grupo de Investigación:

Percepción y Control Inteligente PCI

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ingeniería y Arquitectura, Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y
Computación

Manizales, Colombia

2019

A mi padre

Resumen

En el contexto de la sostenibilidad de sistemas socio-ecológicos existe una creciente comunidad académica estudiando las relaciones que definen este tipo de sistemas y las herramientas para cualificarlos y cuantificarlos. Desde el modelamiento matemático, los sistemas dinámicos son una alternativa para desarrollar estas herramientas. En esta tesis se proponen diferentes modelos matemáticos desde una construcción sistémica, y se analizan sus implicaciones dinámicas a partir de la teoría de bifurcaciones y el mapeo de Poincaré, con el propósito de evaluar la sensibilidad de los sistemas ante cambios en los valores de los parámetros y entender todos los escenarios de sostenibilidad en diferentes planos paramétricos. Este análisis se propone como una metodología para evaluar la sostenibilidad de sistemas socio-ecológicos a partir del estado estacionario de los mismos. Los modelos propuestos consideran la interacción dinámica entre la población y el uso que le dan a sus recursos renovables desde tres temas principales: el comportamiento de comunidades aisladas en las que no existe interacción con actores externos, el rol del intercambio comercial (continuo y discontinuo) entre dos comunidades y como este intercambio cambia los escenarios de sostenibilidad de las comunidades involucradas. Los resultados indican que los diagramas de bifurcaciones permiten entender el cambio que sufren los escenarios de sostenibilidad cuando se cambian uno o dos parámetros simultáneamente, lo que permite proponer medidas de sostenibilidad basadas en las propiedades dinámicas del sistema.

Palabras clave: sistemas socio-ecológico, resiliencia, sostenibilidad, Dinámica de Sistemas, bifurcaciones, sistemas de Filippov.

Abstract

In the context of the sustainability of socioecological systems there is a growing academic community studying the relationships that define this type of systems and the tools to qualify and quantify them. From mathematical modeling, Dynamical Systems Theory is an alternative to develop these tools. This thesis proposes different mathematical models from a systemic construction, and its dynamic implications are analyzed from the bifurcation theory and the Poincare mapping, with the purpose of evaluating the sensitivity of the systems to changes in the values of the parameters and understand all sustainability scenarios in different parameters. This analysis is proposed as a methodology to evaluate the sustainability of socioecological systems from the steady state of the same. The proposed models consider the dynamic interaction between the population and the use they give their renewable resources from three main themes: the behavior of isolated communities in which there is no interaction with external actors, the role of commercial exchange (continuous and discontinuous) between two communities and how this exchange changes the sustainability

scenarios of the communities involved. The results indicate that the bifurcation diagrams allow to understand the change suffered by the sustainability scenarios when one or two parameters are changed simultaneously, which allows proposing sustainability measures based on the dynamic properties of the system.

Keywords: socioecological systems, resilience, sustainability, Systems Dynamics, bifurcations, Filippov systems

Contenido

Resumen	VI
Contenido	IX
Lista de figuras	XI
Lista de tablas	XIII
1 Introducción	1
1.1 Sistemas de Filippov	7
1.2 Sostenibilidad y resiliencia	8
1.2.1 Sostenibilidad	9
1.2.2 Resiliencia en sistemas socio-ecológicos	10
1.3 Planteamiento del problema	12
1.4 Justificación	12
1.5 Objetivos	13
1.5.1 Objetivo General	13
1.5.2 Objetivos Específicos	13
1.6 Estructura general de la Tesis	13
2 Bifurcaciones locales y globales en el análisis desde el desarrollo sostenible de un sistema socio-ecológico planar	15
2.1 Construcción sistémica del modelo matemático	16
2.1.1 Efecto Allee fuerte	22
2.2 Simulaciones preliminares	23
2.3 Cuencas de atracción	26
2.4 Bifurcaciones uno-paramétricas	27
2.4.1 Bifurcaciones locales	27
2.4.2 Bifurcaciones globales	31
2.4.3 Resiliencia potencial	36
2.5 Bifurcaciones dos-paramétricas	36
2.5.1 Bifurcación de Hopf degenerada	37
2.5.2 Bifurcación Bodganov-Takens	38
2.6 Diagramas de sostenibilidad en dos parámetros	39

3	Cooperación económica entre comunidades rurales: caso continuo	43
3.1	Estructura general del modelo	44
3.2	Construcción sistémica de las comunidades acopladas	45
3.3	Caso base - comunidades aisladas	51
3.4	Caso de referencia - comunidades acopladas	53
3.4.1	Cooperación unidireccional	54
3.4.2	Cooperación bidireccional	56
3.4.3	Análisis de estado estacionario	56
3.5	Caso 1 - Menor eficiencia en la extracción de recursos	67
3.6	Caso 2 - Mayor eficiencia en la extracción de recursos	67
4	Cooperación económica entre comunidades rurales: caso discontinuo	71
4.1	El modelo acoplado discontinuo	71
4.1.1	Mecanismo de cooperación discontinua	71
4.2	Computaciones numéricas	75
4.2.1	Caso de referencia - intercambio discontinuo	76
4.2.2	Caso 1 - intercambio discontinuo	79
4.2.3	Caso 2 - intercambio discontinuo	79
5	Conclusiones, trabajos futuros	84
5.1	Conclusiones	84
5.2	Trabajo futuro	86
5.2.1	Ideas futuras del presente trabajo	87
5.2.2	Retos para el estudio de paisajes reales	89
6	Apéndices	91
.1	Estabilidad del los puntos de equilibrio del sistema planar	91
.1.1	Estabilidad del equilibrio trivial	93
.2	Estabilidad de Puntos de equilibrio del sistema acomplado	94
	Bibliografía	96

Lista de Figuras

1-1	Esperanza de vida para las civilizaciones antiguas. Tomada de [Kemp, 2019]	2
1-2	Multiplicidad de cuencas de atracción para un sistema planar.	8
2-1	Diagrama causal del modelo propuesto en [D'Alessandro, 2007].	18
2-2	Diagrama de niveles y flujos del modelo propuesto en [D'Alessandro, 2007]. .	20
2-3	Efecto Allee fuerte	22
2-4	Continuación de puntos de equilibrio y cuencas de atracción para para el parámetro de control α	25
2-5	Variación de la parte real de un valor propio con respecto al parámetro λ . . .	31
2-6	Bifurcaciones locales y globales para el parámetro de control β	32
2-7	Representación esquemática paso a paso de las bifurcaciones globales.	33
2-8	Bifurcaciones globales: (a) Construcción del mapa para la órbita homoclínica, (b) órbita homoclínica para $\beta_0 = 0.3044111137$, (c) coexistencia de dos ciclos límite para $\beta = 0.3044677245$, y (d) colisión de ciclos límite para $\beta = 0.3044843354$	35
2-9	Resiliencia Potencial en un parámetro.	37
2-10	Bifurcaciones dos-paramétricas: (a) curva de Hopf en el espacio β - λ , (b) primer coeficiente de Lyapunov, (c) bifurcación de Hopf subcrítica, y (d) retrato de fases cerca el equilibrio BT	38
2-11	Representación del diagrama de bifurcaciones dos-paramétrico en el plano $\beta - \lambda$	40
2-12	Diagrama de bifurcaciones dos-paramétrico y resiliencia potencial en dos parámetros.	40
3-1	Diagrama causal del modelo sistema acoplado.	45
3-2	Diagrama de niveles y flujos para el modelo acoplado	48
3-3	Comportamiento dinámico de las comunidades aisladas ($(C_k = 1)$): (a) es la salida para la comunidad 1 que alcanza el foco estable P_4 y (b) es la salida para la comunidad 2 que agota completamente sus recursos aproximándose al origen, en este caso P_4 es un foco inestable.	53
3-4	Solución del sistema del sistema acoplado (3-13) con ayuda económica de la comunidad 1 a la comunidad 2, $C_1 = 0.92$ y $C_2 = 1$	55
3-5	Solución del sistema del sistema acoplado (3-13) bajo cooperación mutua, $C_1 = C_2 = 0.92$	57
3-6	Diagrama de bifurcaciones 2-paramétrico por continuación para $\alpha = 0.0001$.	58

3-7	Doblamiento de Periodo: (a) DP de órbitas estables (supercrítica) y (b) DP de órbitas inestables (subcrítica)	59
3-8	Elección del mapeo de Poincaré. (a) y (b) órbita 1-periódica para $C_1 = 1$ y $C_2 = 0.9$, (c) y (d) órbita 2-periódica para $C_1 = 1$ y $C_2 = 0.95$	60
3-9	Diagramas de bifurcaciones 1-paramétrico a partir de continuación y mapas de Poincaré. $\alpha_2 = 0.0001$, $C_2 = 0.92$ y C_1 es parámetro de control.	63
3-10	Diagramas de bifurcaciones 1-paramétrico a partir de continuación y mapeos de Poincaré. $\alpha_2 = 0.0001$, $C_1 = 0.92$ y C_2 es parámetro de control.	64
3-11	Coexistencia de órbitas periódicas estables e inestables: (a) continuación de órbitas periódicas y su estabilidad, (b) comportamiento de estado estacionario y (c) coexistencia de órbita periódica estable e inestable.	65
3-12	Diagrama de bifurcaciones 2-paramétrico para $\alpha = 0.0001$: (a) s_1 , (b) s_2 , (c) L_1 y (d) L_2	66
3-13	Diagrama de bifurcaciones 2-paramétrico para $\alpha = 0.00009$: (a) s_1 , (b) s_2 , (c) L_1 y (d) L_2	68
3-14	Diagramas de bifurcaciones 1-paramétrico a partir de continuación y mapeos de Poincaré. $\alpha_2 = 0.00011$, $C_2 = 0.8$ y C_1 es parámetro de control.	69
3-15	Diagrama de bifurcaciones 2-paramétrico para $\alpha = 0.00009$: (a) s_1 , (b) s_2 , (c) L_1 y (d) L_2	70
4-1	Mecanismo de cooperación discontinuo: (a) sub-regiones en los espacios L_k-S_k y (b) asignación de las tasas de intercambio.	73
4-2	Asignación de tasas de intercambio para $n = 4$, $C_1 = 0.72$ y $C_2 = 0.89$	76
4-3	Comportamiento del sistema discontinuo para una superficie de conmutación. La configuración es $\alpha_2 = 0.0001$, $C_1=0.72$, $C_2=0.89$, $n = 1$ y $\Sigma_{k,1}= 0.24$	77
4-4	Comportamiento del sistema discontinuo para una superficie de conmutación. La configuración es $\alpha_2 = 0.0001$, $C_1=0.72$, $C_2=0.89$, $n = 4$ $\Sigma_{k,4}=0.2$	78
4-5	Comportamiento del sistema discontinuo para una superficie de conmutación. La configuración es $\alpha_2 = 0.00009$, $C_1=0.72$, $C_2=0.89$, $\Sigma= 0.24$	80
4-6	Comportamiento del sistema discontinuo para una superficie de conmutación. La configuración es $\alpha_2 = 0.00009$, $C_1=0.72$, $C_2=0.89$, $\Sigma= 0.2$	81
4-7	Comportamiento del sistema discontinuo para una superficie de conmutación. La configuración es $\alpha_2 = 0.00011$, $C_1=0.72$, $C_2=0.89$, $\Sigma= 0.24$	82
4-8	Comportamiento del sistema discontinuo para una superficie de conmutación. La configuración es $\alpha_2 = 0.00011$, $C_1=0.72$, $C_2=0.9$ $\Sigma= 0.2$	83
5-1	Red de cooperación económica entre 4 comunidades.	88
5-2	Diagrama dos-paramétrico donde se diferencian las configuraciones de C_k que permiten un nivel mayor del 50% de los recursos para cada comunidad.	89

Lista de Tablas

2-1	Valores de los parámetros para el modelo [D'Alessandro, 2007]	24
3-1	Valores de los parámetros para dos comunidades aisladas.	52

1 Introducción

La economía actual ha ido aumentando su interés por los procesos dinámicos que involucran asuntos ambientales, pues día tras día aparecen más evidencias científicas de que las actividades económicas están llevando a los ecosistemas muy cerca de cruzar sus umbrales máximos de explotación. Muchos de los investigadores alrededor del mundo han estado estudiando estos umbrales, la forma de determinarlos y las medidas que deben implementarse para evitar sobrepasarlos de manera que se pueda alejar la sociedad actual de un colapso irreversible. Entendido como colapso a la manifestación de pérdida rápida y significativa de un nivel establecido de complejidad socio-ecológica [Tainter, 1988]. Para lograr esto, es necesario que el desarrollo vaya de la mano con la preservación de los ecosistemas, de forma tal que, se pueda lograr una armonía constante entre la sociedad, la economía y el ambiente. Esto implica responsabilidades mundiales que lleven a estilos de vida y patrones de producción y consumo más sostenibles, pues hay preocupación que las tendencias actuales que involucran el uso de recursos naturales sean insostenibles y que, por lo tanto, la posibilidad de colapso local y global estén aumentando. Aunque esta posibilidad aun no es clara y causa controversia, actualmente existe un gran número de investigadores tratando de explicar la ruta hacia el colapso y cuáles son los desafíos para evitarlo.

Muchos investigadores se han dado a la tarea de estudiar durante las últimas cuatro décadas las civilizaciones antiguas que han colapsado por diferentes razones políticas, sociales y/o ambientales. El profesor Joseph Tainter en su libro “The collapse of complex societies” [Tainter, 1988] hace una síntesis de las principales civilizaciones históricas y de las razones por las que colapsaron permitiendo plantear la pregunta ¿son las civilizaciones modernas vulnerables al colapso?, cuya respuesta aun no es clara ya que históricamente se ha evidenciado la fragilidad de las civilizaciones pero es posible que las civilizaciones actuales sean menos vulnerables al colapso, sin embargo, aún existe la posibilidad de que lo sean. El interés (y preocupación) por estudiar estos temas han dejado ser comunicaciones únicamente dentro de la comunidad académica para convertirse en reportajes y notas periodísticas que pueden llegar a otro tipo de público, tal es el caso de [Kemp, 2019] reportaje de la BBC en el que se comunica una comparación de la longevidad de varias civilizaciones pasadas entre los años 3000 AC y 1000 DC. Los resultados arrojaron que el promedio de vida de esas civilizaciones fue de 336 años lo que evidencia la fragilidad de colapso que tienen las sociedades, ver Figura 1-1. Esto lleva a que se planteen preguntas como: ¿por qué ha ocurrido el colapso de las civilizaciones antiguas? ¿qué pueden decirnos los auges y declives de estas civilizaciones acerca

de nuestra propia civilización? ¿seguimos patrones similares en la actualidad? y ¿cuáles son las fuerzas que aceleran o retrasan el colapso?.

De hecho, algunas de estas civilizaciones históricas han evidenciado procesos cíclicos recurrentes de auge y declive, como es el caso de la sociedad Greco-Romana (1500-500 A.C) que presentó varios ciclos de regeneración y colapso debido a factores geopolíticos y culturales críticos, así como a causas climáticas y enfermedades [Morris, 2006, Redman, 1999]. Algo similar le ocurrió a las sociedades de Mesopotamia, India, Egipto y China cuyos emperadores en diferentes épocas las llevaron al colapso socio-económico [McGovern, 2008, Edwards et al., 1971, Chu and Lee, 1994]. Las civilizaciones de China y Egipto lograron recuperarse y transformarse después del colapso.

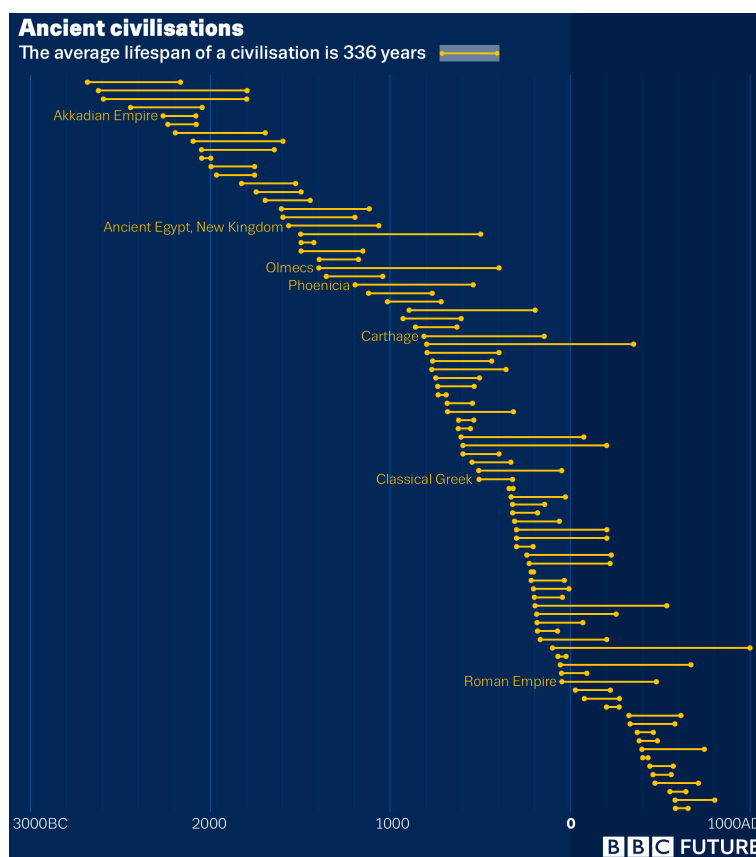


Figura 1-1: Esperanza de vida para las civilizaciones antiguas. Tomada de [Kemp, 2019]

En América, el colapso de la civilización Maya es uno de los más conocidos. La mayoría de las teorías apuntan a que se produjo debido a razones ambientales como la deforestación (que produjo erosión de tierra), erupciones volcánicas, enfermedades y cambio climático o a las guerras que fueron producto de los conflictos de clases [Roman et al., 2018] y a la migración que ocasionó el abandono de las ciudades [Webster, 2009]. Como consecuencia, los paisajes agro-culturales se convirtieron completamente en bosques [Webster, 2009, Palka, 2005]. De

acuerdo con los arqueólogos, las áreas sobrepobladas hacen que el colapso sea mas dramático y catastrófico y esto pudo haberle sucedido a los Mayas cuyas densidades poblacionales alcanzaron niveles insostenibles para garantizar el sustento de su población [Webster, 2009]. En consecuencia, entre el 90 % y el 99 % de la población Maya desapareció llevándose con ella sus instituciones políticas y culturales.

Otra civilización histórica bien conocida es aquella que habitó la Isla de Pascua entre los años 400-1840 DC. y que es considerada como un misterio arqueológico debido a que no hay suficientes registros escritos y evidencia arqueológica de su supervivencia y de su colapso. Sin embargo, los científicos haciendo uso de la información disponible han determinado que en la isla existieron bosques de palmeras y que el sustento alimenticio de la población fue principalmente los peces y las aves, lo que llevó a un crecimiento acelerado de la población seguido del agotamiento del bosque y la erosión de la tierra, por lo que la agricultura también se vio limitada. Como consecuencia, tanto el estado ambiental como social se volvieron inestables y el desarrollo de la civilización tomó un comportamiento oscilatorio que finalmente llevó al completo agotamiento de sus recursos y a una eventual desaparición de la población [Kirch, 1989].

La civilización Maya y la de la Isla de Pascua, son ejemplos de la relación directa entre las actividades económicas, el uso de recursos naturales y el crecimiento de la población, por lo tanto, se hace necesario identificar estas relaciones y representarlas adecuadamente para entender el sistema y poder identificar las acciones pertinentes en pro de evitar algún tipo de colapso. Teniendo en cuenta esto, el modelamiento matemático se convierte en una herramienta muy útil que permite incorporar la evidencia científica e histórica en un modelo. Por ejemplo Brander y Taylor [Brander and Taylor, 1998] presentaron un modelo general de equilibrio que representa la interacción dinámica entre los recursos renovables y la población. Este modelo fue ajustado para el caso de la Isla de Pascua usando los escasos registros disponibles para estimar parámetros y simular numéricamente la posible dinámica de esta civilización antes del colapso. El modelo calibrado reveló la existencia de ciclos de abundancia y hambruna para algunos de los parámetros más confiables, seguidos de un completo agotamiento de los recursos. Aunque el modelo fue propuesto para tratar de dar una posible explicación al colapso de la Isla de Pascua, se han generado muchas expansiones de la estructura de este modelo que han pretendido lograr una mejor aproximación a los sistemas modernos de extracción y uso de recursos renovables, los cuales son más grandes y complejos. Los modelos que han tomado como base el modelo propuesto por [Brander and Taylor, 1998] serán llamados a lo largo del documento como modelos de tipo *B&T*.

Estos modelos del tipo *B&T* han incorporado múltiples actividades económicas como en [Reuveny and Decker, 2000] que, además de la extracción de recursos, consideró la producción de bienes manufacturados o como en [D'Alessandro, 2007] donde se introdujo la

agricultura como una actividad paralela a la extracción. También se han incluido ajustes institucionales y algunas estructuras económicas de derechos de propiedad que restringen las condiciones de extracción y consumo que pudieron mitigar o amortiguar los ciclos de abundancia y hambruna [Dalton and Coats, 2000, Dalton et al., 2005]. En este mismo contexto, en [Pezzey and Anderies, 2003] se consideraron políticas de conservación como la imputación de impuestos, cuotas de manejo sobre el total de los recursos extraídos y el esfuerzo per cápita como medida de control sobre la explotación excesiva.

La dinámica del conflicto entre dos grupos de poblaciones rivales también ha sido introducida en diferentes modelos tipo *B&T* como en [Reuveny and Maxwell, 2001] que considera que el conflicto generalmente surge debido a la escasez de recursos y a las limitadas restricciones que existen para su extracción, llevando a que la población se distribuya entre los que se apropian de los recursos extraídos por su rival y los que se encargan de las extracción, de forma tal que se puedan maximizar sus utilidades. En [Prskawetz et al., 2003, de la Croix and Dottori, 2008] se consideró que los diferentes grupos de la población compiten por los recursos generando conflictos, y es esa competencia, la que lleva al colapso de la sociedad, pues afecta negativamente no solo el crecimiento de los recursos naturales, sino también el nivel de la población. Por otro lado, en [Uehara, 2013] se analizan los umbrales ecológicos a través de tres consideraciones: los límites del sistema, la no-convexidad¹ y la adaptación.

Otros modelos del tipo *B&T* han tenido otras consideraciones o modificaciones como es el caso de [Basener and Ross, 2004], en el que se realizaron cambios en la forma de las ecuaciones de crecimiento asumiendo que tanto los recursos como la población crecen de forma logística o en [Nagase and Uehara, 2011] que presenta un análisis del modelo *B&T* y de sus descendientes desde diferentes puntos de vista como el crecimiento poblacional, la innovación y progreso tecnológico, la acumulación de capital, derechos de propiedad y políticas de conservación de los recursos renovables y no renovables, y los enfoques de modelado. Un modelo más reciente es el publicado por [Angulo et al., 2015] en el que se representó la dependencia dinámica entre las dimensiones del desarrollo sostenible: ambiental, social y económica. En este último modelo se destaca su aplicación al estudio de tres regiones específicas del departamento de Caldas (Colombia).

Aunque se han desarrollado muchos modelos que son del tipo *B&T*, existen otros que aunque no son precisamente extensiones si han sido altamente influenciados por este trabajo y sus descendientes, como es el modelo propuesto en [von der Osten et al., 2017] que explora los nexos entre el costo beneficio de las decisiones tomadas en la extracción de recursos de uso común. Llegando a la conclusión que si realmente existe un balance, entonces pueden

¹La no-convexidad en sistemas dinámicos generalmente se refiere a la existencia de múltiples puntos de equilibrio, umbrales, y ciclos de realimentación positiva

emerger salidas sociales y económicas aceptables, pero si este balance se inclina hacia los ingresos, el panorama es de colapso ambiental y social. En [Roman et al., 2018] se propone un modelo que ofrece una explicación del colapso de la civilización Maya clásica considerando el estado de la tierra para la agricultura y desagregando la población entre los que se dedican a las actividades agrícolas y los que se dedican a la construcción de monumentos, algo similar a lo que se propuso en [D'Alessandro, 2007] donde se consideró que, un porcentaje de la población total se dedicaba a la extracción de recursos y el restante a la agricultura. En [Motesharrei et al., 2014] se propuso un modelo de la dinámica de población humana considerando la acumulación de riqueza y la desigualdad económica como un modelo depredador - presa. Otros trabajos han considerado por ejemplo, la cooperación y la competición por la explotación comercial de un recurso renovable [Biancardi, 2010], o han utilizado sistemas de ecuaciones diferenciales con aplicaciones en la biología, basados en principios ecológicos realistas como el uso de la concentración de nutrientes para medir la población o la disponibilidad de recursos en pro de restringir el crecimiento de una población basados en modelos Lotka-Volterra [Cropp and Norbury, 2015].

Todos estos trabajos son modelos de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden (*EDO's*) cuyos resultados numéricos y simulaciones se basan principalmente en la solución de cada sistema y su representación como evolución temporal o como retratos de fase dadas unas ciertas condiciones iniciales. Otros trabajos utilizan la teoría de bifurcaciones para estudiar todos los posibles escenarios que se obtendrían al variar uno o dos parámetros simultáneamente [Guckenheimer and Holmes, 1983, Perko, 2001, Kuznetsov, 2004]. Por ejemplo en [Reuveny and Decker, 2000] se realizaron dinámicas comparativas, para diferentes configuraciones de los parámetros, representadas como evoluciones temporales que permitieron concluir por ejemplo, que el progreso tecnológico es determinante en la generación de fluctuaciones grandes no solo de las poblaciones sino también de los recursos y de la utilidad per-cápita y que incluso podrían llevar al colapso. En [D'Alessandro, 2007] los resultados se presentaron como retratos de fase para mostrar el cambio que sufre el campo vectorial del sistema cuando los parámetros varían. En este trabajo el autor no realizó análisis de bifurcaciones pero si motivó a otros autores a realizarlo, como es el caso de [Angulo et al., 2009], en el que presenta una continuación de puntos de equilibrio que muestra la existencia de una bifurcación de Hopf y una bifurcación Silla-Nodo y se considera además la posible ocurrencia de bifurcaciones en dos parámetros del tipo Hopf degenerada (también llamada Hopf Generalizada). Posteriormente en [Zhou and Liu, 2010], se desarrolló la demostración analítica de la existencia de la bifurcación de Hopf para los diferentes parámetros del sistema. Luego en [Jiang et al., 2013] se discretizó este modelo y se realizó un análisis de bifurcaciones.

Entre otros trabajos que han dado uso a la teoría de bifurcaciones para analizar los modelos propuestos se encuentra [Prskawetz et al., 2003]. En él se desarrolló un estudio completo de las bifurcaciones en uno y dos parámetros permitiendo entender la variedad de estados esta-

cionarios. Como parámetros de control se usaron aquellos que afectan directamente el nivel de recursos disponibles. En [Roman et al., 2018] se determinó que la caída de la civilización Maya puede ser explicado matemáticamente por la ocurrencia de una bifurcación de Hopf supercrítica.

Todos los modelos del tipo *B&T* y sus descendientes así como la mayoría de los modelos existentes que estudian la relación dinámica entre la población y los recursos han contemplado sociedades aisladas sin considerar el movimiento de personas entre comunidades o el intercambio de productos. Debido a que las sociedades modernas están altamente interconectadas y los sistemas socio-ecológicos son mas complejos, el estudio de las comunidades acopladas que interactúan entre sí, ya sea por el flujo de personas o el intercambio de bienes y servicios, no puede pasar desapercibido y, por el contrario, se debería prestar especial atención al modelamiento de comunidades acopladas que permita establecer nuevos escenarios de desarrollo, tanto para el mundo modernos que esta completamente conectado como para las civilizaciones históricas en las cuales el intercambio de productos desempeñó un rol fundamental en la economía.

Recientemente se han propuesto modelos que incorporan de alguna manera el acoplamiento entre sociedades. Por ejemplo en [Anderies and Hegmon, 2011] se presenta un modelo que trata de capturar el efecto que tiene la migración sobre la degradación de los recursos naturales, para esto se toma como caso de estudio dos regiones en el sudeste de los Estados Unidos, cada una con su población y recursos naturales. En [Sabin et al., 2017] se utiliza un modelo del tipo *B&T* para investigar los efectos emergentes del movimiento de personas, bienes y recursos naturales entre dos sociedades que tienen características similares a las de la Isla de Pascua. Para lograr estos flujos, los autores consideraron que las dos sociedades están representadas por el mismo conjunto de *EDO's* y usaron funciones simples de difusión dentro de las *EDO's* encontrando que las regiones en el espacio de parámetros en las cuales las sociedades pueden sobrevivir de manera estable, es significativamente más grande en el modelo acoplado. Un método diferente de acople es usado en [Angulo et al., 2015], ellos proponen un sistema de *EDO's* en 4 dimensiones del tipo *B&T* pero incluyen, además, dos nuevas variables de estado: las inventario de capital y desarrollo social, luego construyen una red dinámica de migración entre los diferentes municipios del departamento de Caldas (Colombia). El acoplamiento se realizó utilizando una matriz laplaciana, la cual contiene información acerca de la existencia de conexiones entre dos diferentes municipios.

Debe observarse que los modelos previamente mencionados son sistemas de *EDO's* cuyo campo vectorial es continuo. Tales sistemas son conocidos como sistemas suaves. Sin embargo, cuando se esta modelando sistemas físicos, es frecuente obtener campos vectoriales donde su evolución suave cambie abruptamente, convirtiéndose en sistemas discontinuos o no-suaves que, dependiendo de sus características, suelen ser analizados con diferentes métodos. A

continuación, se describen algunas generalidades de estos sistemas y se presentan algunas aplicaciones en diferentes campos del conocimiento, ya que uno de los modelos propuestos en el documento es un sistema discontinuo.

1.1. Sistemas de Filippov

Muchos procesos físicos son modelados a través de sistemas dinámicos suaves a tramos (PWS por las siglas en inglés de *Piece Wise Smooth Systems*). Es decir, su movimiento se caracteriza por periodos de evolución suave que son interrumpidos por eventos instantáneos o cambios abruptos. El análisis tradicional de sistemas dinámicos se ha enfocado en problemas suaves donde estos eventos instantáneos no ocurren, dejando a un lado aquellos sistemas que son no-suaves, como es el caso de la fricción, colisión, sistemas con restricciones intermitentes y procesos con componentes conmutados.

En general los PWS son conjuntos de ecuaciones diferenciales ordinarias *EDO's* en \mathbb{R}^n , donde el espacio de estados está dividido en un número finito de regiones, en cada una de las cuales actúa un sistema de *EDO's* suave. Los sistemas de Filippov [Filippov, 1988] son un caso particular de *PWS* en el que el campo vectorial es discontinuo. Las aplicaciones de este tipo de sistemas son muy diversas, encontrándose en la literatura modelos para sistemas mecánicos, electrónicos, ecología, biología, epidemiología, entre muchos otros.

En electrónica, por ejemplo, se ha utilizado para modelar motores eléctricos y convertidores de potencia [Giaouris et al., 2009], en ecología se ha utilizado para modelar sistemas donde a través de cambios abruptos en la dieta o en el hábitat se controla una determinada población [Dercole et al., 2007], o para estudiar la dinámica de la población de depredadores que se alimentan de dos tipos de presas o deben estar intercambiando entre dos diferentes tipos de hábitats [Krivan, 1996, Krivan, 1998, Krivan and Sikder, 1999, Krivan and Eisner, 2003].

Cada día, el modelado como sistemas de Filippov ha ido capturando el interés de más investigadores. En la actualidad se pueden encontrar modelos que estudian: el tráfico vehicular [Buřić and Janovský, 2013], el control de la contaminación del aire al considerar que se debe hacer una reducción en las emisiones cuando el índice de calidad del aire sobrepasa un cierto umbral [Chen et al., 2019], el control de enfermedades en plantas [Zhao et al., 2013], el cambio de cobertura de los medios de información cuando durante una epidemia el número de infectados excede cierto umbral [Wang and Xiao, 2014, Chen et al., 2018a], la efectividad de las interrupciones estructuradas del tratamiento en pacientes con VIH considerando como umbral de control la carga de virus en la que se realizará la terapia [Tang et al., 2017, Tang et al., 2015], el proceso de control de plagas infecciosas por el rocío de pesticidas asumiendo que al sobrepasar un umbral de población se enciende el rocío de plaguicidas y se apaga cuando el nivel vuelve a estar por debajo del umbral de control [Liu et al., 2015],

el corte de ramas infectadas y la reforestación como acción de control para mantener el número de árboles infectados bajo cierto umbral [Chen and Chen, 2018], el control de enfermedades infecciosas cuando se tienen recursos médicos limitados y se hace necesario determinar los umbrales de casos infectados y proponer tácticas de tratamiento selectivo para controlar la enfermedad [Qin et al., 2016], el instinto anti-depredación de las presas para buscar refugio cuando la proporción de depredadores y presas está fuera de los umbrales [Chen and Huang, 2015], entre muchos otros. Todos estos modelos han sido construidos, inicialmente, como un sistema de *EDO's* suave, y es la acción de control la que induce la discontinuidad o discontinuidades.

Generalmente, los modelos de Filippov en la literatura tienen una sola discontinuidad y la teoría para estudiarlos es bien conocida, ver [Di Bernardo et al., 2008]. No obstante, algunos autores han considerado umbrales en las diferentes variables de estado que inducen múltiples discontinuidades que se cruzan entre sí [Chen et al., 2018c, Chen et al., 2018b, Chen and Chen, 2018, Chen et al., 2018a] logrando múltiples estados estacionarios en los que las variables de estado conservan el equilibrio a diferentes niveles, vea Figura 1-2.

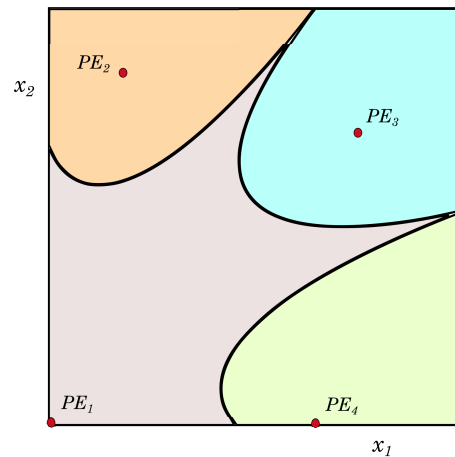


Figura 1-2: Multiplicidad de cuencas de atracción para un sistema planar.

Desde el campo de los sistemas socio-ecológicos estos múltiples estados estacionarios están relacionados con el concepto de resiliencia y sostenibilidad que se presentan a continuación.

1.2. Sostenibilidad y resiliencia

Para el año 2000, se empezó a hablar de sostenibilidad y resiliencia como dos conceptos que aunque diferentes presentan una estrecha relación [Wu, 2013, Holling, 2001]. A continuación se presenta una breve descripción de lo que significan estos dos conceptos y cómo han evolucionado durante los últimos 30 años.

1.2.1. Sostenibilidad

La literatura ha crecido enormemente desde la década de los 80's alrededor del concepto de desarrollo sostenible, encontrándose más de cien definiciones de sostenibilidad [Marshall and Toffel, 2005]. Esto se debe en gran parte a que el término desarrollo sostenible tiene diferentes significados o interpretaciones entre diferentes comunidades académicas y no académicas. Por ejemplo, los ecólogos lo enfocan a los temas ambientales mientras que muchos de los economistas aun lo direccionan hacia la generación de capital, creando divergencia entre las ciencias sociales y las ciencias naturales [Redclift, 1991].

Dentro de todas estas definiciones que existen de desarrollo sostenible, algunas han sido más examinadas y adoptadas, como por ejemplo, la definición en [Brundtland et al., 1987], el triple balance (triple bottom line) [Elkington, 2004], la sostenibilidad fuerte y débil [Jacobs, 1993], el bienestar humano y los recursos ecosistémicos [Wu, 2013].

Durante los 80's, la discusión acerca de la definición de desarrollo sostenible se centró principalmente en lo que debía ser sostenible. Por un lado, estaban los que daban una definición basada en la maximización de los beneficios del desarrollo económico siempre y cuando estos se pudieran mantener en el tiempo con la misma calidad [Pearce et al., 1988]. Por otro lado, estaban las definiciones basadas principalmente en lo humano, como es el caso de [Chambers et al., 1987a], donde se consideró que el desarrollo sostenible debía garantizar una adecuada satisfacción de las necesidades básicas. La famosa definición "Es el desarrollo que satisface las necesidades presentes sin comprometer la capacidad de que las generaciones futuras satisfagan las suyas" dada en [Brundtland et al., 1987] también entra en este grupo, pues se hace énfasis en el desarrollo sostenible de las necesidades humanas, más que de las compensaciones entre los sistemas económicos y biológicos. A pesar de esto, también se enfatizó en que el desarrollo sostenible es un proceso en el que la extracción de recursos, las inversiones, la orientación del progreso tecnológico y los cambios institucionales deben estar todos en un nivel de armonía que permita mejorar el potencial actual y futuro de satisfacer las necesidades y aspiraciones de la población.

Finalmente, están aquellas definiciones centradas en el ambiente como es el caso de [Chambers et al., 1987b] donde se definió el desarrollo sostenible en términos ecológicos como la habilidad del sistema natural para poder enfrentar las perturbaciones.

Para inicio de los 90's el concepto de desarrollo sostenible ya consideraba las tres dimensiones. La dimensión económica, la dimensión social y la dimensión ambiental. En [Hyberg, 1990] se define el desarrollo sostenible económico como el nivel óptimo de interacción entre los sistemas biológicos, económicos, y social, y este se alcanza a través de un proceso adaptativo de compensaciones entre las dimensiones. En [Jacobs, 1993] se empezó a hablar de la sostenibili-

dad fuerte/dura y de sostenibilidad débil/suave. El concepto de sostenibilidad fuerte tiene un enfoque más ambiental, considerando que los recursos renovables no pueden ser explotados a una tasa más alta que la tasa de regeneración, lo que pone restricción al gasto del capital natural; mientras que la sostenibilidad débil acepta que ciertos recursos pueden ser agotados siempre y cuando sean sustituidos en el tiempo, lo que implica que el capital natural puede ser usado siempre y cuando sea transformado en capital manufacturado que tenga igual valor. Es decir, la sostenibilidad fuerte tiene como prioridad la dimensión ambiental del desarrollo sostenible, mientras que la sostenibilidad débil tiene como prioridad la dimensión económica.

1.2.2. Resiliencia en sistemas socio-ecológicos

La resiliencia es un concepto importante en el estudio de sistemas socio-ecológicos que ha evolucionado en el tiempo. Inicialmente fue definido en [Holling, 1973] como una medida de la persistencia de los sistemas y de su capacidad para absorber cambios y perturbaciones, manteniendo las mismas relaciones entre poblaciones o variables de estado.

El concepto trató de ser más ecológico diciéndose que la resiliencia es la magnitud de la perturbación que puede absorberse antes que el sistema cambie su estructura, al cambiar las variables y los procesos que controlan el comportamiento [Gunderson and Holling, 2001] o la capacidad de un sistema de experimentar choques manteniendo al tiempo la misma función, estructura, realimentación y, por lo tanto, identidad [Walker et al., 2006].

En la interpretación de las definiciones, se ha dicho que la resiliencia es:

- La cantidad de cambio que un sistema puede sufrir y aún permanecer dentro del mismo dominio de atracción, es decir, retener los mismos controles en la estructura y los procesos [Carpenter et al., 2001].
- El grado en que el sistema es capaz de autoorganizarse [Folke, 2006].
- El grado en que el sistema expresa la capacidad de aprendizaje y adaptación [Walker et al., 2002].

Estas interpretaciones de la resiliencia han dado lugar a la inclusión de una perspectiva desde los sistemas dinámicos adaptativos, donde se explica que los sistemas necesariamente evolucionan en el tiempo, aunque también podrían hacerlo en el espacio y que, mientras lo hacen, tienen la posibilidad de caer en conjuntos invariantes, como lo son las órbitas periódicas, los atractores extraños o los puntos de equilibrio. El conjunto de todos los estados del sistema que evolucionan hacia los conjuntos invariantes se denomina cuenca de atracción. Se dice que un sistema es resiliente mientras su estado se encuentre en la cuenca de atracción, incluso a pesar de experimentar perturbaciones.

En este contexto, se dice que los comportamientos tendenciales de los sistemas socio-ecológicos son determinados por la resiliencia, la adaptabilidad y la transformabilidad [Walker et al., 2004]. De acuerdo con [Folke et al., 2002, Walker et al., 2004] la resiliencia tiene cuatro componentes:

1. Latitud: la cantidad máxima en que se puede cambiar el sistema antes de perder su capacidad de recuperación, por ejemplo, el ancho de la cuenca de atracción.
2. Resistencia: que coincide con la facilidad o dificultad de cambiar el sistema, por ejemplo, la topología de la cuenca de atracción.
3. Precariedad: es decir, la trayectoria actual del sistema y la proximidad a un límite o umbral.
4. Panarquía: relaciones de escala cruzada, o cómo los tres aspectos anteriores están influenciados por la dinámica de los sistemas a escalas superiores e inferiores a la escala de interés.

La adaptabilidad es la capacidad de los actores del sistema para influir en la resiliencia. Hay cuatro formas generales en que esto se puede hacer, que corresponde a los cuatro componentes de la resiliencia. La transformabilidad es la capacidad de crear un sistema fundamentalmente nuevo cuando las estructuras ecológicas, económicas o sociales hacen que el sistema existente sea insostenible [Walker et al., 2004].

Como advertencia para la implementación del concepto de resiliencia a casos empíricos, es fundamental especificar la resiliencia de “qué a qué” [Carpenter et al., 2001]. En este documento se tratará la resiliencia de los paisajes socio-ecológicos a perturbaciones externas sobre los recursos renovables y sobre la población. A este respecto, en la literatura también se ha discutido sobre la resiliencia social y sobre la resiliencia de los ecosistemas.

La resiliencia social se define como la capacidad de los grupos o las comunidades para hacer frente a las tensiones y perturbaciones externas como resultado del cambio social, político y ambiental [Adger, 2000]. La resiliencia de los ecosistemas corresponde a la capacidad subyacente de un ecosistema para mantener los servicios ecosistémicos deseables frente al uso humano y a un entorno fluctuante [Carpenter et al., 2001, Folke et al., 2002]. Sin embargo, autores afirman que es fundamental aplicar el concepto de resiliencia a los sistemas socio-ecológicos acoplados, ya que es un error de la política ambiental separar el sistema humano del sistema natural, considerándolos como independientes [Anderies et al., 2006, Folke et al., 2002, Walker et al., 2006]

1.3. Planteamiento del problema

Siendo la toma de decisiones una de las actividades más importantes del ser humano, y bajo el supuesto que mejor información de un sistema conduce a mejores decisiones, se propone en esta tesis doctoral contestar a la pregunta que sigue:

¿Cómo definir escenarios prospectivos de sostenibilidad en la cooperación entre comunidades rurales?

Sin embargo, para contestar esta pregunta deben tenerse en cuenta las dificultades en la forma de abordarla. Los escenarios prospectivos se refieren al conjunto de todas las posibles trayectorias que un estado del sistema podría tomar y para hacer que estos escenarios se correspondan con el comportamiento del sistema, debe poderse representar en consideración de todas sus partes.

Además, ha de tenerse en cuenta que la sostenibilidad ha sido considerada como un estado, aunque autores ya hablan de sostenibilidades, lo cual es contrario a la noción implícita de temporalidad de la definición realizada en Bruntland, vea [Wu, 2013], que sugiere que un estado sostenible lo debe ser para todos sus estados futuros, y que no se puede considerar una única sostenibilidad.

A paso seguido, también se debe considerar que ninguna comunidad se desarrolla aislada, pues siempre es susceptible de la interacción con otras comunidades, razón por la que, se requiere de alternativas que permitan identificar el comportamiento generado por las interacciones entre comunidades.

De este modo, ha de pensarse que lo que realmente se busca con la pregunta es determinar desde las reglas que se definen en un sistema socio-ecológico, el qué y el cómo de la intervención humana que sea capaz de generar desarrollo económico sin deteriorar lo social y degradar lo ambiental. Sin que esos experimentos que evalúen el comportamiento de la intervención antrópica sobre el sistema socio-ecológico se hagan a ensayo y error, sino bajo entornos de simulación computarizada en los que las condiciones están controladas y no se exponen las personas, los recursos naturales y el dinero de los contribuyentes e inversionistas.

1.4. Justificación

Responder a la pregunta de investigación propuesta en esta tesis doctoral, es responder a una manera distinta de tomar decisiones entre comunidades que interactúan, que se preguntan sobre su devenir y que desean contextualizarse en el marco del desarrollo sostenible. Considera interacciones en el sistema y establece su comportamiento, haciendo que puedan explicarse y prescribirse las dinámicas de la relación socio-ecológica.

A su vez, al responder la pregunta, hace que se defina un marco conceptual que permitirá el desarrollo de técnicas para analizar la sostenibilidad, condicionando el desarrollo territorial y sus respectivos planes locales, regionales y nacionales.

Adicionalmente, esta tesis doctoral abrirá un nuevo campo de aplicaciones de los análisis de

bifurcaciones y de los sistemas de Filippov, confirmando que los diagramas de bifurcación son mapas de todos los escenarios prospectivos posibles de un sistema [Redondo et al., 2018] y que las decisiones humanas sobre sistemas complejos se comportan como sistemas de Filippov.

1.5. Objetivos

1.5.1. Objetivo General

Definir escenarios prospectivos de sostenibilidad en la cooperación entre comunidades rurales usando análisis de bifurcaciones y sistemas de Filippov.

1.5.2. Objetivos Específicos

1. Analizar las bifurcaciones locales y globales de codimensión uno y dos de un sistema diferencial suave de ecuaciones que modele la relación entre una población y sus recursos renovables en el contexto de la sostenibilidad.
2. Definir el comportamiento prospectivo de la cooperación económica entre comunidades rurales usando el sistema diferencial suave de ecuaciones identificado.
3. Definir el comportamiento prospectivo de la cooperación económica entre comunidades rurales usando un sistema diferencial no suave de ecuaciones.

1.6. Estructura general de la Tesis

Esta tesis esta organizado como sigue:

En el Capítulo 1 se presenta una contextualización sobre la sostenibilidad de las civilizaciones históricas y la importancia del modelamiento matemático en la toma de decisiones en esa dirección. También se abordan algunos fundamentos sobre Sistemas de Filippov (1.1), y sobre sostenibilidad y resiliencia (1.2), para ubicar al lector sobre los conceptos que son abordados durante el documento, de modo que, cobre mayor sentido la formulación del trabajo de investigación realizada en 1.3, 1.4 y 1.5.

En el Capítulo 2 usando Dinámica de Sistemas, se realiza una interpretación del sistema diferencial propuesto en [D'Alessandro, 2007] para hacer explicitas las relaciones y poder entender de forma clara lo que se está modelando y lo que no (sección 2.1). Luego se realiza un análisis completo de bifurcaciones locales y globales de codimensión 1 (sección 2.4) y codimensión 2 (sección 2.5) que permiten trazar diagramas paramétricos que definen todos

los escenarios posibles de estado estacionario (sección 2.6) y se proponen como herramienta para evaluar la sostenibilidad y resiliencia en este tipo de sistemas.

En el Capítulo 3 se estudia el efecto a largo plazo de la cooperación económica continua entre dos comunidades que son modeladas por sistemas similares de *EDO's*. Para esto se realiza la construcción del sistema acoplado y de las relaciones que permiten el intercambio comercial usando Dinámica de Sistemas (sección 3.2). Luego se realiza a partir de continuación y simulaciones numéricas, el análisis de estado estacionario en espacios dos-paramétricos que permiten ver todos los escenarios posibles de sostenibilidad del sistema (secciones 3.4, 3.5 y 3.6).

En el Capítulo 4 se realiza una adaptación del modelo continuo de intercambio comercial propuesto en el Capítulo 3 a un modelo PWS discontinuo en el que se considera que la cooperación económica no es constante y, que por el contrario, cambia de acuerdo a las necesidades que tengan las dos comunidades (sección 4.1). Para esto se propuso un modelo de Filippov 4-dimensional capaz de capturar el proceso de cooperación discontinua. También se realizaron simulaciones numéricas para evaluar el efecto de este tipo de cooperación en la dinámica global del sistema (sección 4.2).

En el Capítulo 5 se presentan las conclusiones de la tesis (sección 5.1) y se propone el trabajo futuro basado en los alcances de esta tesis y en los retos que se tienen desde el modelamiento a partir de *EDO's* en las ciencias de la sostenibilidad (sección 5.2).

En el Capítulo 6 se muestran algunas generalidades de la estabilidad de los puntos de equilibrio en los sistemas planares estudiados en esta tesis (apéndice .1) y de la estabilidad de los puntos de equilibrio no triviales del sistema acoplado (apéndice .2).

2 Bifurcaciones locales y globales en el análisis desde el desarrollo sostenible de un sistema socio-ecológico planar

La mayoría de los trabajos mencionados en la introducción, son modelos de equilibrio basados en ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden *EDO's* que consideran el uso de recursos como la única actividad económica. Un modelo más elaborado es propuesto en [D'Alessandro, 2007]. En este modelo se incluyen dos consideraciones importantes: la agricultura como una actividad económica paralela a la extracción de recursos y un nivel crítico de recursos en el cual su tasa de regeneración se vuelve negativa y, por lo tanto, el agotamiento total de los recursos se vuelve inevitable. Como base de este modelo se utilizó la necesidad calórica de la población, la cual se supone que está completamente suministrada por el consumo (uso) de recursos renovables (como la madera o los peces) y la explotación de la tierra para la agricultura.

Los resultados presentados en [D'Alessandro, 2007] fueron básicamente retratos de fase que mostraron el cambio que sufre el campo vectorial del sistema cuando los parámetros varían. Aunque en este trabajo no se realizó algún tipo de análisis de bifurcaciones, si logró motivar a otros autores para hacerlo como es el caso de [Angulo et al., 2009] que presenta una continuación de puntos de equilibrio en el que se detecta la existencia de una bifurcación de Hopf y una bifurcación silla-nodo, y se considera la posible ocurrencia de bifurcaciones en dos parámetros del tipo Hopf degenerada (Hopf Generalizada). Más adelante en [Zhou and Liu, 2010] se desarrolló la demostración analítica de la existencia de la bifurcación de Hopf para los diferentes parámetros del sistema, y en [Jiang et al., 2013] se discretizó el modelo y se realizó un análisis de bifurcaciones de este modelo discreto.

En este capítulo se realiza un análisis numérico completo de bifurcaciones del sistema propuesto en [D'Alessandro, 2007] ya que, además de las bifurcaciones encontradas en trabajos previos, existen otras de codimensión 1 y codimensión 2 que permiten trazar diagramas paramétricos que definen todos los escenarios posibles de estado estacionario que presenta el sistema y que permite usarse como herramienta para evaluar la sostenibilidad y resiliencia en este tipo de sistemas.

Aunque el sistema de *EDO's* ya está bien definido en [D'Alessandro, 2007], es necesario identificar el alcance y las limitaciones del modelo, para entender de forma clara lo que se está modelando y lo que no. Para lograr esto, se realizó una interpretación del sistema diferencial usando Dinámica de Sistemas, haciendo explícitas las relaciones con las que se construyó el modelo.

2.1. Construcción sistémica del modelo matemático

Realizando una interpretación con Dinámica de Sistemas del sistema diferencial que será estudiado en este capítulo, se ha obtenido el diagrama causal de la Figura 2-1. La hipótesis dinámica de este diagrama consiste de los siguientes enunciados:

- E1** *Si aumentan los recursos renovables se incrementa el crecimiento natural del recurso renovable.* Se asume que la producción de nuevos recursos renovables depende de los recursos renovables existentes. Así, tener más recursos renovables conduce a un aumento en producción de nuevos recursos.
- E2** *Si se incrementa el crecimiento natural del recurso renovable aumentan los recursos renovables.* Este enunciado es natural: si se producen más recursos, se obtienen más recursos renovables acumulados.
- E3** *Cambios en la cantidad de recursos renovables genera cambios en el umbral de los recursos.* Nótese que la relación en este caso no es proporcional o inversamente proporcional de manera estricta, razón por la cual se habla de “cambios” y no de aumento o disminución de la cantidad de recursos renovables. La razón es que existe un umbral en el que es posible el crecimiento natural, que se encuentra entre un mínimo para que el sistema se autoproduzca y un máximo que viene dado por la capacidad de carga (vea una explicación más detallada en la Sección 2.1.1) .
- E4** *Entre más grande sea el umbral de recursos, más grande será el crecimiento natural del recurso renovable.* Si este umbral de generación de recursos es más amplio, se tiene un rango más amplio para generar recursos.
- E5** *A mayor cantidad de recursos renovables, mayor será el ingreso de calorías obtenidas por extracción de recursos renovables.* Los recursos renovables, a través de la extracción, son la base del ingreso de calorías para la supervivencia de una población.
- E6** *El aumento en el ingreso de calorías obtenidas por extracción de recursos renovables genera aumento en la población.* Al tener un ingreso de calorías por la extracción de recursos renovables, la población tiene la posibilidad de sostener nuevas generaciones de ella.

- E7** *El aumento en la población conduce al incremento en la extracción del recurso renovable. Tener más habitantes aumenta las demandas de recursos renovables para su sostenimiento, por lo tanto, debe aumentar la extracción de recursos.*
- E8** *Si aumenta la extracción del recurso renovable disminuyen sus existencias. Este es otro enunciado natural: al aumentar la capacidad de extracción mas allá de la capacidad de regeneración de los mismo, la acumulación de estos disminuye.*
- E9** *A mayor población hay mayor gasto calórico. Las actividades de la población demandan de energía para realizarse, lo que conduce a que el aumento de la población es aumento de la energía que se demanda para la realización de sus actividades, haciendo que la población tenga un mayor gasto calórico.*
- E10** *Si aumenta el gasto calórico disminuye la población. Cuando el gasto calórico es muy alto, la población comienza a competir por los recursos, limitando la aparición de nuevos individuos.*
- E11** *El incremento de la población aumenta la producción agrícola. Con el propósito de obtener energía para el gasto calórico de la población, se debe contar con alternativas como lo es, en este modelo, la agricultura, de modo que, al aumentar las demandas de energía calórica por el incremento de la población, debe aumentar la producción de la alternativa, es decir, debe aumentar la producción agrícola.*
- E12** *A mayor producción agrícola mayor ingreso de calorías obtenidas por producción agrícola. Evidentemente, si se ha desarrollado la producción agrícola para obtener calorías, el incremento de la producción agrícola aumentará el ingreso de calorías por esta alternativa.*
- E13** *El aumento en el ingreso de calorías obtenidas por producción agrícola genera aumento en la población. Este enunciado es similar al E6 pero tomando como fuente la producción agrícola.*

Con los anteriores enunciados debe quedar claro que la población crece por el consumo de calorías provenientes tanto del sector agrícola como de la extracción de recursos renovables y que este crecimiento está limitado por la disponibilidad de energía calórica y por la capacidad de carga del sistema que limita tanto la producción agrícola como la cantidad de recursos renovables.

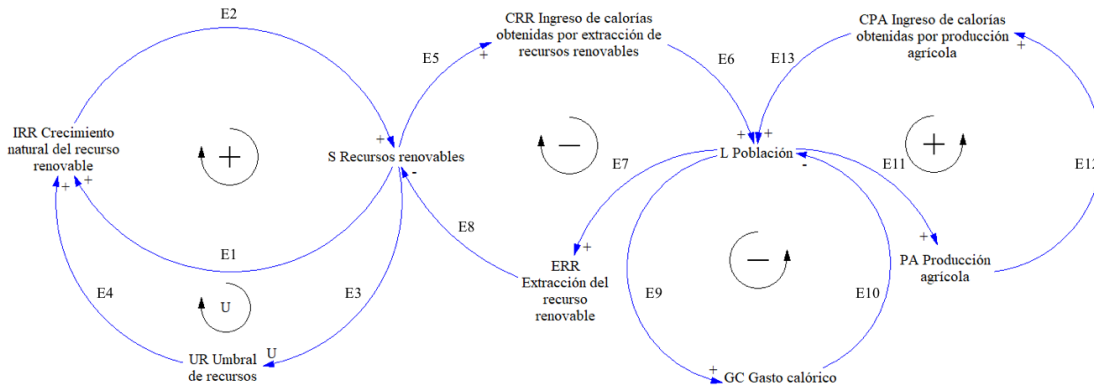


Figura 2-1: Diagrama causal del modelo propuesto en [D'Alessandro, 2007].

El diagrama causal es la representación de los atributos y las relaciones causales del sistema. Esta representación sistémica, de acuerdo con la metodología de la Dinámica de Sistemas, permite la construcción de la representación denominada “diagrama de niveles y flujo”, en la que los atributos del sistema son representados como los elementos de un modelo matemático determinista: variables de estado (niveles), razones de cambio (flujos), variables auxiliares y parámetros. Se denomina niveles a las variables de estado y flujos a las razones de cambio, en analogía a una representación hidráulica de un sistema en la que las razones de cambio acumulan las variables de estado, así como un flujo hidráulico genera acumulación de nivel en un tanque de agua.

Es importante entender que el diagrama causal se construye a partir de atributos conectados por relaciones de causa y efecto y no define las variables de estado, las razones de cambio ni las variables auxiliares que son las que permiten al modelador llegar a las ecuaciones diferenciales. La definición de estos componentes de las ecuaciones diferenciales se hace a través del diagrama de niveles y flujos. Esto permite que el diagrama causal sea visto como un conjunto de campos vectoriales que al hacer la selección de variables de estado, razones de cambio y variables auxiliares corresponden a la selección de un campo vectorial dentro del conjunto de todos los campos vectoriales posibles del diagrama causal. Por lo tanto, no es posible pasar directamente del diagrama causal al sistema de *EDO's*, o en otras palabras, al tratar de hacerlo se tendrían múltiples posibilidades de modelos que responden al mismo diagrama causal [Bayer, 2004] y [Aracil and Gordillo, 1995].

El diagrama causal es en si un conjunto de campos vectoriales y al hacer la selección de variables y razones de cambio lo que hace es seleccionar un campo vectorial del conjunto de todos los posibles campos vectoriales que pudieron haberse obtenido. ver [Bayer, 2004] y [Aracil and Gordillo, 1995].

El diagrama de niveles y flujos que se ha interpretado en esta tesis para el diagrama causal de la Figura 2-1 se encuentra en la Figura 2-2, donde se han tomado como variables de estado los recursos renovables *S* y la población *L*, obteniendo el modelo matemático presentado en

[D'Alessandro, 2007], como se mostrará a continuación, siguiendo el diagrama de niveles y flujos.

El cambio de la población L en el tiempo t esta dado por:

$$\frac{dL}{dt} = CRR + CPA - GC. \quad (2-1)$$

Donde CRR , CPA y GC son respectivamente la razón de cambio del ingreso de calorías obtenidas por la extracción de recursos renovables, la razón de cambio del ingreso de calorías obtenidas por la producción agrícola y la razón de cambio del gasto calórico por parte de la población. Las expresiones matemáticas de estas razones de cambio son:

$$CRR = \phi\alpha\beta LS, \quad (2-2)$$

$$CPA = \gamma PA, \quad (2-3)$$

$$GC = \sigma L. \quad (2-4)$$

Donde $\alpha > 0$ es una medida de la tecnología usada para la extracción de los recursos renovables; $\beta \in [0, 1]$ representa el porcentaje de la población dedicada a la explotación de los recursos renovables, lo que implica que $(1 - \beta)$ de la población se dedica a las actividades agrícolas; $\sigma > 0$, $\gamma > 0$ y $\phi > 0$ representan respectivamente las calorías per-capita necesarias para sobrevivir, el valor calórico del producto agrícola (por ejemplo del maíz), y el valor calórico de los recursos renovables.

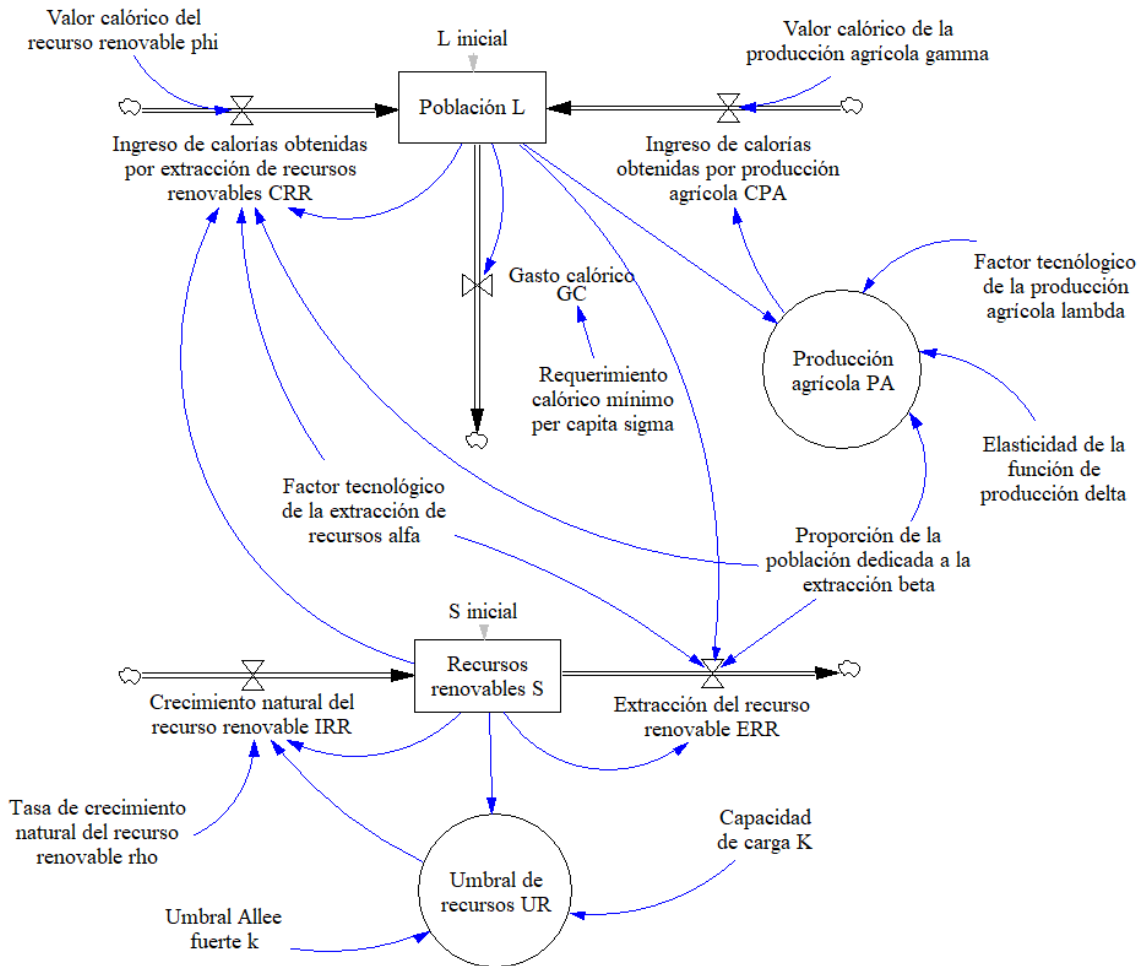


Figura 2-2: Diagrama de niveles y flujos del modelo propuesto en [D'Alessandro, 2007].

La producción agrícola PA es representada por una función de producción Cobb-Douglas con retorno a escala constante. Esta función es usada generalmente para representar la relación que existe entre las cantidades de dos o más entradas que por lo general son capital físico o laboral y la cantidad a la salida que estas cantidades pueden producir, siendo propuesta originalmente en [Coma and Douglas, 1928]. La variable auxiliar PA tiene la forma:

$$PA = \lambda(1 - \beta)^\delta L^\delta. \quad (2-5)$$

Donde $\lambda > 0$ es un indicador de la fertilidad de la tierra y δ es la elasticidad en la producción agrícola. De este modo, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{dL}{dt} &= CRR + CPA - GC \\
&= \phi\alpha\beta LS + \gamma PA - \sigma L \\
&= \phi\alpha\beta LS + \gamma\lambda(1 - \beta)^\delta L^\delta - \sigma.
\end{aligned}$$

Es decir:

$$\frac{dL}{dt} = (\gamma\lambda(1 - \beta)^\delta L^{\delta-1} + \phi\alpha\beta S - \sigma) L. \quad (2-6)$$

Por otro lado, el cambio del nivel de recursos renovables en el tiempo esta dado por:

$$\frac{dS}{dt} = IRR - ERR. \quad (2-7)$$

Donde IRR representa la razón de cambio del crecimiento natural del recurso renovable y ERR la razón de cambio de la extracción. Las expresiones matemáticas de estas dos razones de cambio son:

$$IRR = \rho \cdot UR \cdot S \quad (2-8)$$

$$ERR = \alpha\beta LS \quad (2-9)$$

Donde $\rho > 0$ es la tasa de regeneración de los recursos y UR es el umbral de recurso que corresponde al componente logístico que incluye la capacidad de carga y el umbral critico de recursos. La variable auxiliar UR tiene la forma:

$$UR = \left(\frac{S}{k} - 1\right) \left(1 - \frac{S}{K}\right). \quad (2-10)$$

Donde K es la capacidad de carga, esto significa que si $S = K$ la tasa de crecimiento de los recursos es cero; k es el nivel de recursos por debajo del cual la tasa de crecimiento se vuelve negativa. Así, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= IRR - ERR \\
&= \rho \cdot UR \cdot S - \alpha\beta LS \\
&= \rho \left(\frac{S}{k} - 1\right) \left(1 - \frac{S}{K}\right) S - \alpha\beta LS.
\end{aligned}$$

Es decir:

$$\frac{dS}{dt} = \rho \left(\frac{S}{k} - 1 \right) \left(1 - \frac{S}{K} \right) S - \alpha\beta LS \quad (2-11)$$

Así, se obtiene el sistema de *EDO's* acoplado que representa la interacción entre la población L y los recursos naturales S :

$$\begin{cases} \frac{dL}{dt} = \left(\gamma\lambda(1 - \beta)^\delta L^{\delta-1} + \phi\alpha\beta S - \sigma \right) L, \\ \frac{dS}{dt} = \rho \left(\frac{S}{k} - 1 \right) \left(1 - \frac{S}{K} \right) S - \alpha\beta LS. \end{cases} \quad (2-12)$$

2.1.1. Efecto Allee fuerte

Una de las características importantes de este modelo es la incorporación del punto de no retorno representado el parámetro k dentro de la ecuación del crecimiento natural del recurso renovable (2-8). Esta ecuación se conoce como ecuación logística con efecto Allee fuerte ya que no solo tiene la capacidad de representar la capacidad reproductiva de una población limitada por la capacidad de carga sino que establece el umbral bajo el cual esta capacidad reproductiva se hace negativa, es decir que la reproducción no se lleva a cabo debido a que los individuos no pueden encontrarse (o logran ser polinizados) debido al bajo número que existen. La Figura 2-3 es una representación del comportamiento de la función *IRR* cuando cambia el valor de la variable S . Esta ecuación es un polinomio de grado 3, por lo que tiene tres puntos de corte con el eje S : $S = 0$, $S = k$ y $S = K$. De acuerdo con la gráfica, si $S < k$ la tasa de crecimiento natural es negativo, es decir, los recursos inevitablemente se extinguirán, pero, también existe un punto en el cual la tasa de crecimiento de recursos es máxima.

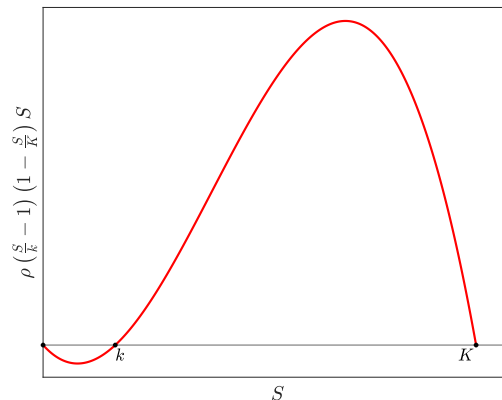


Figura 2-3: Efecto Allee fuerte

2.2. Simulaciones preliminares

El sistema de la Ecuación 2-12 puede tener cuatro, cinco o seis puntos de equilibrio, de los cuales, hay cuatro en los que al menos una de sus coordenadas es nula, es decir, hay cuatro puntos de equilibrio sobre los ejes coordenados del sistema. Denominaremos a estos puntos de equilibrio “equilibrios triviales” $P_{et} = (\bar{L}, \bar{S})$, $et = 1, \dots, 4$, (ver los retratos de fase en la Figura 2-4). Los otros dos posibles equilibrios no triviales P_5 y P_6 no tienen solución analítica y, por lo tanto, deben ser calculados numéricamente a través del método de Newton. El caso en el que se tiene un único equilibrio no trivial, corresponde al caso especial en el que ocurre una bifurcación silla-nodo, como se explica en la sección 2.4.1.

En este trabajo se presta especial atención a los puntos de equilibrio no triviales P_5 y P_6 , sin embargo, es importante resaltar el significado del punto de equilibrio trivial P_4 , pues aunque representa un condición extrema caracterizada por la ausencia de recursos renovables, sugiere que una porción pequeña de la población puede sobrevivir a través de las actividades agrícolas allí desarrolladas. Las siguientes son sus coordenadas:

$$P_4 = \left(\left(\frac{\lambda(1-\beta)^\delta}{\sigma} \right)^{1/(1-\delta)}, 0 \right). \quad (2-13)$$

Este punto de equilibrio es un nodo estable para cualquier arreglo de parámetros, es decir, siempre existirán soluciones del sistema (2-12) que converjan a este punto. Este hecho se interpreta como que, en la ausencia de recursos renovables, existe un estado sostenible del sistema en el que la población puede sobrevivir únicamente de la agricultura. Detalles sobre la estabilidad de este punto de equilibrio se presentan en el Apéndice .1.

El sistema de ecuaciones diferenciales presentadas en [D’Alessandro, 2007] fue simulado inicialmente usando los valores estudiados en [Brander and Taylor, 1998], para después considerar otras configuraciones paramétricas, con el propósito de obtener diferentes conjuntos invariantes: puntos de equilibrio y ciclos límite.

En este capítulo se utilizarán los valores que aparecen en la tabla 2-1, los cuales solo serán cambiados cuando sean usados como parámetros de bifurcación.

En [Angulo et al., 2009] se presentó una continuación de puntos de equilibrio tomando a α como parámetro de control. Los resultados en [Angulo et al., 2009] mostraron la existencia de dos bifurcaciones de codimensión uno, específicamente las bifurcaciones locales Hopf y silla-nodo, y consideraron la posible existencia de una curva en dos parámetros de bifurcaciones Hopf degenerada. La Figura 2-4a es el diagrama de bifurcaciones uno-parámetro en [Angulo et al., 2009], pero incluyendo no solo la estabilidad de los puntos de equilibrio en un espacio de tres dimensiones $\alpha - L - S$ sino también diferentes cortes que muestran el cambio

Parámetro	Valor
β	0.3
α	0.0001
ρ	0.025
λ	12.95
δ	0.7
k	700
K	12000
γ	0.1
σ	0.14
ϕ	0.3

Tabla 2-1: Valores de los parámetros para el modelo [D'Alessandro, 2007]

de las cuencas de atracción para diferentes valores de α . Los valores de los parámetros son reportados en la Tabla 2-1 y la definición de cuenca de atracción se presenta en la sección 2.3.

En la Figura 2-4a se observa la existencia de un punto límite marcado como LP (limit point por sus siglas en inglés), que define, hacia la derecha de la figura, la existencia de dos puntos de equilibrio denominados P_5 (abajo a la izquierda de los planos transversales) y P_6 (arriba a la derecha de los planos transversales). El equilibrio P_5 se comporta como un punto silla para cualquier valor de los parámetros, mientras que la estabilidad de P_6 es sensible a los valores de los parámetros.

Al seguir la curva marcada en la Figura 2-4a de izquierda a derecha partiendo desde el punto marcado LP, se logran los escenarios representados en el plano de estados que se muestran en las Figuras 2-4b a 2-4h. Si $\alpha = 5 \times 10^{-5}$ y $\alpha = 9 \times 10^{-5}$ el punto de equilibrio P_6 es asintóticamente estable tal como se muestra en las Figuras 2-4b 2-4c respectivamente. Pero un poco más allá de la bifurcación de Hopf, este punto de equilibrio pierde estabilidad y se vuelve inestable lo que genera una familia de ciclos límite (para esta configuración de parámetros se trata de ciclos límite estables).

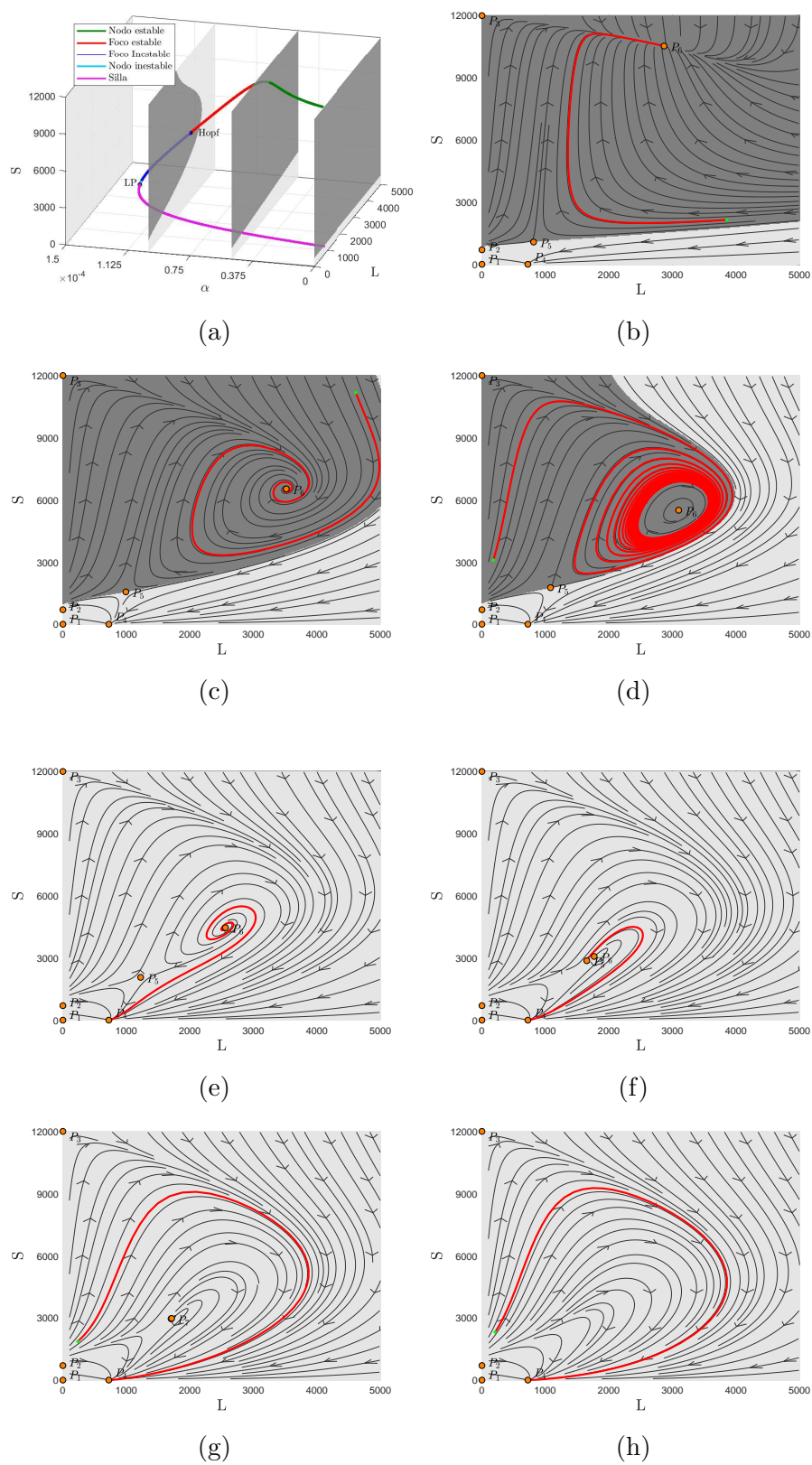


Figura 2-4: Continuación de puntos de equilibrio y cuencas de atracción para para el parámetro de control α .

Uno de estos ciclos límite se observa en la Figura 2-4d para $\alpha = 10 \times 10^{-5}$. Un análisis mas detallado de la bifurcación de Hopf se presenta en la sección 2.4.1. Para un incremento adicional en el parámetro de control, e.g. $\alpha = 11 \times 10^{-5}$, los ciclos límite desaparecen y el sistema se aproxima al equilibrio trivial P_4 para toda condición inicial. Este estado estable sugiere que incluso en ausencia de recursos renovables una pequeña población podría sobrevivir de la agricultura (Figura 2-4e).

Existe un pequeño intervalo de α antes de que ocurra la bifurcación silla-nodo, en el cual P_6 es un nodo inestable como se muestra en la Figura 2-4f para $\alpha = 11.9 \times 10^{-5}$. Los puntos de equilibrio no triviales colisionan si $\alpha = 11.9076 \times 10^{-5}$ en un punto límite llamado P_7 (ver Figure 2-4g) para luego desaparecer, como por ejemplo si $\alpha = 13 \times 10^{-5}$ no existen puntos de equilibrio internos, vea Figura 2-4h. Los detalles acerca del cálculo de los valores propios y la estabilidad de los puntos de equilibrio para el sistema (2-12) están en el Apéndice .1.

Finalmente, en [Zhou and Liu, 2010] se desarrolló la demostración analítica de la existencia de la bifurcación de Hopf para los diferentes parámetros del sistema. Estos autores tuvieron en cuenta el signo del parámetro a reportado en [Guckenheimer and Holmes, 1983] para determinar la estabilidad de la familia de ciclos límite que bifurcan del punto de equilibrio Hopf.

2.3. Cuencas de atracción

Si (L_{ss}, S_{ss}) son las soluciones de estado estacionario que pueden ser puntos de equilibrio u órbitas periódicas, el dominio o cuenca de atracción B_{ss} del estado estacionario ss es el conjunto de todas las condiciones iniciales para las cuales el sistema sistema (2-12) se aproxima a ss , es decir:

$$B_{ss} = \left\{ (L_0, S_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \mid \lim_{t \rightarrow \infty} (L(t), S(t)) = (L_{ss}, S_{ss}) \right\}. \quad (2-14)$$

Donde $(L(t), S(t))$ representa la solución del sistema (2-12) y (L_0, S_0) son las condiciones iniciales que tienen sentido físico si las dos variables de estado son positivas [Derissen et al., 2011].

Como se mencionó anteriormente, este sistema presenta dos cuencas de atracción que se pueden ver en los diferentes retratos de fase de la Figura 2-4. Una de estas cuencas, es el conjunto de todas las condiciones iniciales para las cuales el sistema se aproxima al atractor no trivial, mientras que la otra cuenca representa todas las condiciones iniciales que llevan al sistema al agotamiento de los recursos renovables con el sostenimiento de una cantidad pequeña población que exclusivamente sobrevive de la agricultura.

El concepto de cuenca de atracción es considerado durante todo el capítulo, sobre todo en la sección 2.4.3 donde se define la resiliencia potencial como medida de la sostenibilidad.

2.4. Bifurcaciones uno-paramétricas

La Figura 2-4a es la continuación de los puntos de equilibrio cuando el parámetro de control es α . Esta figura muestra, además, algunas de las bifurcaciones que ocurren en el sistema (2-12), específicamente, la bifurcación de Hopf y la bifurcación silla-nodo que ocurren cuando únicamente se varía un parámetro. Este tipo de bifurcaciones en un parámetro explican el cambio en el comportamiento que ocurre cuando un punto de equilibrio estable (o inestable) pierde (o gana) estabilidad creando oscilaciones estables (o inestables) como se observa en la secuencia de retratos de fase en las Figuras 2-4b a 2-4f, o por la colisión seguida de la desaparición de equilibrios como en las Figuras 2-4g y 2-4h. A continuación, se presentan los resultados de la computación numérica de las bifurcaciones en un parámetro cuando se involucran puntos de equilibrio (bifurcación local) o ciclos límite (bifurcación global). Específicamente, se analiza numéricamente la existencia de equilibrios silla-nodo y Hopf que son bifurcaciones locales, y la Homoclínica y el punto límite de ciclos (Limit point of cycles LPC) que son globales.

Otros parámetros de control diferentes a α , específicamente, λ , β y δ se usarán de forma tal que los resultados puedan ser comparados con aquellos reportados en trabajos previos pero que además tienen justificación física para ser considerados como parámetros de control. Concretamente, al considerar cambios en el valor de α se hace referencia a la efectividad en que los recursos son extraídos, en otras palabras, refleja el aumento o la disminución en la tasa de extracción de recursos que generalmente se debe a cambios tecnológicos. Un cambio en el valor de β se refiere a la cantidad de personas dedicadas a la actividad extractiva que, al igual que α , incide directamente en la extracción de recursos. Por otro lado, cambios en el valor λ hablan acerca del cambio de la fertilidad de la tierra por la intervención humana a través del uso de agroquímicos y, finalmente, el cambio en el valor δ indica los cambios en la eficiencia en que se desarrolla la producción agrícola, que generalmente se da por cambios tecnológicos. En este trabajo, los demás parámetros no son considerados parámetros de control debido a que son propiedades endógenas tanto de la población, como es el caso de σ ; de los recursos renovables, como es el caso ϕ y ρ ; o de los productos agrícolas, como es el caso de γ .

2.4.1. Bifurcaciones locales

Consideremos los equilibrios no-triviales del sistema (2-12). En el sentido de Lyapunov, este equilibrio es asintóticamente estable si todas las trayectorias en una pequeña vecindad tienden hacia el equilibrio y éste, a la vez, es hiperbólico si su matriz Jacobiana no tiene

valores propios con parte real cero. El método indirecto de Lyapunov [Khalil, 2002] y el teorema de Hartman-Grobman determinan la estabilidad local de este tipo de puntos de equilibrio al asumir que en una pequeña vecindad del equilibrio hiperbólico, el sistema no-lineal se comporta cualitativamente como un sistema lineal [Perko, 2001]. A continuación se testean las condiciones bajo las cuales ocurren las bifurcaciones donde los valores propios pierden su hiperbolicidad a través de simulaciones numéricas.

Bifurcación silla-nodo

Esta bifurcación esta asociada a la colisión seguida de la desaparición de un punto de silla y un nodo. Para comprobar que efectivamente esta bifurcación ocurre para el sistema (2-12) basta con verificar el cumplimiento de las condiciones en el Teorema 1.

Teorema 1 ([Perko, 2001]) *Suponga que el sistema $\dot{x} = f(x, \mu)$, donde $x \in \mathbb{R}^2$ y $\mu \in \mathbb{R}$ es el parámetro de bifurcación, con f suave, tiene un punto de equilibrio (x_0, μ_0) en el cual se satisfacen las siguientes condiciones:*

F1 *Condición de equilibrio: existe un único valor propio cero, con vector propio normalizado a la derecha v y a la izquierda w ,*

F2 *Condición de transversalidad: $w^T f_\mu(x_0, \mu_0) \neq 0$, y*

F3 *Condición de No-degeneración: $w^T D^2 f(x_0, \mu_0)(v, v) \neq 0$.*

Entonces, existe una bifurcación Silla-Nodo en el sistema $\dot{x} = f(x, \mu)$.

Si λ es el parámetro de control y el resto de los parámetros toman los valores de la Tabla 2-1, existe un equilibrio no-hiperbólico para $\lambda_0 = 14.33238$ y variables de estado $x_0 = (L_0, S_0) = (2236.42633, 3287.43202)$ donde se satisfacen las condiciones del Teorema 1.

Bajo estas condiciones la matriz de Jordan es

$$J = \begin{bmatrix} 0.026804543 & 0 \\ 0 & 0.208166817e^{-16} \end{bmatrix}, \quad (2-15)$$

por lo tanto, se cumple la condición **F1** pues uno de los valores propios es cero: considerando errores numéricos se tiene $0.208166817e^{-16} \rightarrow 0$.

Los vectores propios normalizados a derecha e izquierda son respectivamente

$$v^T = \begin{bmatrix} -1.235758195 & -0.750911404 \end{bmatrix}$$

y

$$w^T = \begin{bmatrix} 1 & -2.977392782 \end{bmatrix}.$$

Para testear la condición de transversalidad **F2** es suficiente con calcular el producto

$$w^T f_\mu(x_0, \mu_0) = w^T \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} \end{bmatrix} = -51.297119230 \neq 0, \quad (2-16)$$

Donde $f_\mu(x_0, \mu_0)$ es la matriz Jacobiana (2-18) evaluada en el punto de equilibrio. Para verificar la condición de no-degeneración **F3** se calcula el producto:

$$w^T D^2 f(x_0, \mu_0)(v, v) = w^T \left[\sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) \cdot v_i \cdot v_j \right] = -0.622077539e^{-4} \neq 0. \quad (2-17)$$

Estos resultados indican que las condiciones **F2** y **F3** también se satisfacen y, por lo tanto, es correcto afirmar la existencia de la bifurcación Silla-Nodo.

Bifurcación de Hopf

La condición de equilibrio **H1** y la condición de transversalidad **H2** que se presentan en el Teorema 2 son suficientes para garantizar la ocurrencia de una bifurcación de Hopf. Sin embargo, si la condición de no-degeneración **H3** no se satisface, la bifurcación de Hopf es degenerada y no es posible concluir acerca de la estabilidad de los ciclos límite que se generan por la bifurcación. En [Zhou and Liu, 2010] la bifurcación de Hopf es estudiada en detalle para el sistema (2-12). Los autores siguieron el procedimiento presentado en [Guckenheimer and Holmes, 1983] y concluyeron que existen bifurcaciones de Hopf tanto del tipo subcrítica como del tipo supercrítica cuando se consideran diferentes configuraciones de los parámetros, lo que significa que se satisface la condición de no degeneración. En este trabajo se consideró que la condición **H3** puede que no se satisfaga, es decir, la bifurcación de Hopf podría ser degenerada.

Teorema 2 ([Guckenheimer and Holmes, 1983, Kuznetsov, 2004]) *Suponga que el sistema $\dot{x} = f(x, \mu)$, donde $x \in \mathbb{R}^2$ y $\mu \in \mathbb{R}$ es el parámetro de bifurcación, con f suave, tiene un punto de equilibrio (x_0, μ_0) en el cual se satisfacen las siguientes condiciones:*

H1 *Condición de equilibrio: $f_\mu(x_0, \mu_0)$ tiene un par de valores propios imaginarios puros $\tau(\mu)$ y $\bar{\tau}(\mu)$. Entonces existe una curva suave de puntos de equilibrio $(x(\mu), \mu)$ con $x(\mu_0) = x_0$. Los valores propios $\tau(\mu)$ y $\bar{\tau}(\mu)$ de $f_\mu(x(\mu), \mu_0)$ varían suavemente con μ .*

H2 *Condición de transversalidad: $d = \frac{d}{d\mu} \text{Re}(\tau(\mu_0)) \neq 0$.*

H3 *Condición de no-degeneración: se satisface si $l_1(\mu_0) \neq 0$. El coeficiente l_1 Se llama el primer coeficiente de Lyapunov. El ciclo límite es estable si $l_1 < 0$ (supercrítica) e inestable si $l_1 > 0$ (subcrítica).*

Entonces, existe una bifurcación de Andronov-Hopf que corresponde al surgimiento de un ciclo límite en la variedad central, la cual tiene tangencia cuadrática con el espacio propio de $\tau_{1,2}(\mu_0) = \pm i\omega_0$.

Para garantizar la existencia de la bifurcación de Hopf, lo primero es verificar la condición de equilibrio **H1** y la condición de transversalidad **H2**. Si se satisfacen estas condiciones, se procede a verificar la no-degeneración **H3** para establecer la estabilidad de los ciclos límite que se generan.

Al considerar λ como el parámetro de bifurcación, existe un punto de equilibrio para $\lambda_0 = 12.92141$ y coordenadas $x_0 = (3099.71044, 5526.94546)$ donde las dos primeras condiciones del Teorema 2 se satisfacen. Cuando se evalúa la matriz Jacobiana (2-18) en el punto de bifurcación (x_0, λ_0) , con $x_0 = (L_0, S_0)$, existe el par de valores propios puros imaginarios presentados en la matriz de Jordan (2-19). Esto indica que P_6 pierde su hiperbolicidad, por lo que se satisface **H1**.

$$f_\mu(x_0, \mu_0) = \begin{bmatrix} \frac{2\rho S_0 K - 3\rho S_0^2 + 2\rho S_0 k - \rho k K - \alpha\beta L_0 k K}{kK} & -\alpha\beta S_0 \\ \phi\alpha\beta L_0 & \gamma\lambda_0(1-\beta)^\delta L_0^{\delta-1}\delta + \phi\alpha\beta S_0 - \sigma \end{bmatrix}, \quad (2-18)$$

$$J = \begin{bmatrix} 0.062389453i & 0 \\ 0 & -0.062389453i \end{bmatrix}. \quad (2-19)$$

Para verificar la condición **H2** se calcula la derivada de la parte real de un valor propio con respecto al parámetro de control λ en el punto de bifurcación y se verifica que esta derivada sea diferente de cero para garantizar que en efecto existe un cambio de signo de la parte real y descartar que se trata de un punto tangente al cero. Para esto, se realizó la gráfica de la parte real de uno de los valores propios para la continuación de puntos de equilibrio con λ como parámetro de control y se calculó la derivada en el punto de bifurcación, vea la Figura 2-5. El resultado es:

$$d = \frac{d}{d\lambda} \text{Re}(\tau(\lambda_0)) = 0.00244478309 \neq 0.$$

El valor obtenido es igual al valor reportado en [Zhou and Liu, 2010]. Hasta ahora es correcto afirmar que la bifurcación de Hopf realmente ocurre, ya que tanto la condición de equilibrio como la condición de transversalidad se satisfacen. Para verificar la condición de no-degeneración el primer coeficiente de Lyapunov l_1 tiene que ser calculado. Si $l_1 = 0$, la bifurcación de Hopf es degenerada, en otro caso, los ciclos límite deben ser estables o inestables dependiendo del signo de l_1 . El cálculo numérico de l_1 se realizó siguiendo el procedimiento descrito en [Sotomayor et al., 2007a, Sotomayor et al., 2007b] obteniéndose como resultado:

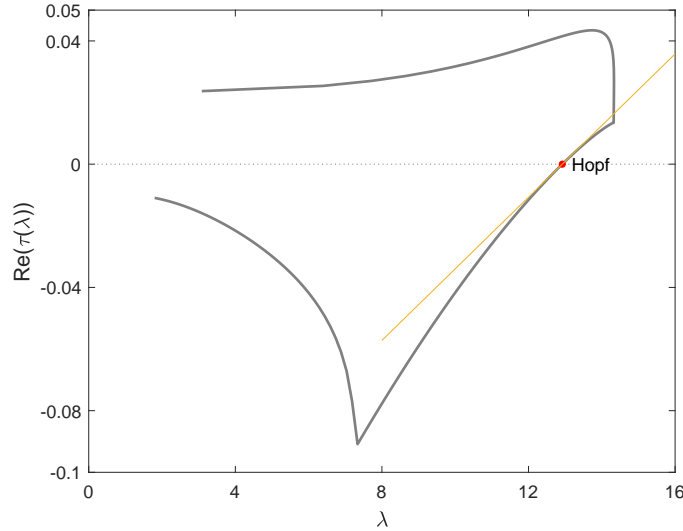


Figura 2-5: Variación de la parte real de un valor propio con respecto al parámetro λ .

$$l_1 = -9.8354732 \times 10^{-10}.$$

Realizando la comparación entre el primer coeficiente de Lyapunov en [Kuznetsov, 2004] y el parámetro a en [Guckenheimer and Holmes, 1983], se observa que son muy similares pero no iguales. Ambos valores son del mismo orden y tiene el mismo signo, $l_1 = -9.8354732 \times 10^{-10}$ y $a = -9.79969 \times 10^{-10}$, lo que significa que la bifurcación de Hopf para $\lambda_0 = 12.92141$ debería ser supercrítica. En este trabajo se consideró que $l_1 = -9.8354732 \times 10^{-10}$ está demasiado cercano a cero¹ y sus signo no debe ser considerado para establecer la estabilidad de las órbitas periódicas asociadas a la bifurcación de Hopf (diferente a lo reportado en [Zhou and Liu, 2010]). La estabilidad de estas órbitas se estudia mas adelante en la Subsección 2.5.1 a través del análisis de bifurcaciones en dos parámetros. Por ahora, se considera que la condición **H3** no se satisface.

2.4.2. Bifurcaciones globales

Hasta ahora, se ha demostrado que el sistema (2-12) bifurca localmente bajo la variación de un único parámetro. Además de la familia de órbitas asociadas a la bifurcación de Hopf, se encontró una segunda familia de órbitas que bifurca de una órbita homoclínica. La coexistencia de estas dos órbitas sugieren la posibilidad de una colisión de ciclos límite seguida por su desaparición. En esta sección se trata el análisis numérico de las bifurcaciones locales que fueron encontradas para el sistema (2-12), e.g. se analizan la bifurcación homoclínica y

¹Basado en el criterio reportado en [Sotomayor et al., 2006] el cual establece que para valores menores a $1e - 5$, l_1 puede ser aproximado a cero.

la colisión de ciclos límite (o *LPC* del inglés Limit Point of Cycles). Para este propósito se realizan simulaciones numéricas mostrando el diagrama de bifurcaciones en un parámetro usando como parámetro de control a β (Figura 2-6) y una representación esquemática del nacimiento de la órbita homoclínica seguida por una *LPC* (Figura 2-7).

Al considerar a β como parámetro de bifurcación y el resto de los parámetros con los valores de la Tabla 2-1, la bifurcación silla-nodo no ocurre como si lo hizo con el parámetro α , ver la Figura 2-6. Adicional a esto, esta figura presenta la familia de ciclos límite asociados a la bifurcación de Hopf, la cual desaparece a través de una colisión con una segunda órbita originada por una órbita homoclínica. Para entender lo que ocurre en la caja dentro de la Figura 2-6 se presenta en la Figura 2-7 una representación esquemática paso a paso de todas las transiciones de las órbitas y de las bifurcaciones involucradas.

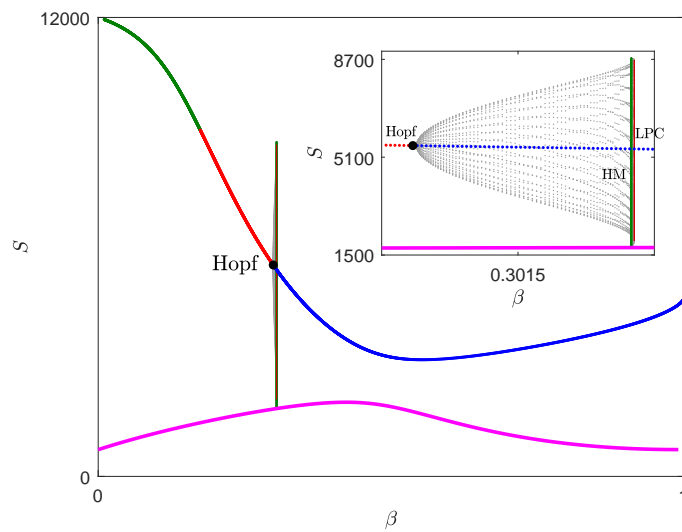


Figura 2-6: Bifurcaciones locales y globales para el parámetro de control β .

Justo antes de la bifurcación de Hopf, el estado P_6 es un foco estable y el estado P_5 es una silla, como se representa en la Figura 2-7a. Después de la bifurcación de Hopf, P_6 pierde estabilidad y se convierte en un foco inestable, esto implica que se ha creado una órbita periódica a su alrededor (Figura 2-7b). Luego, las variedades estable e inestable de la silla coinciden creando una órbita homoclínica inestable como se muestra en la Figura 2-7c. De esta órbita homoclínica nace un nuevo ciclo límite que es inestable, Figura 2-7d que luego desaparece al colisionar con el ciclo límite generado en la bifurcación de Hopf, es decir, ocurre la bifurcación *LPC* que se muestra en la Figura 2-7e. Finalmente, después de la colisión desaparecen los ciclos límite y solo queda P_6 que es inestable, por lo tanto, P_4 se convierte en el único atractor.

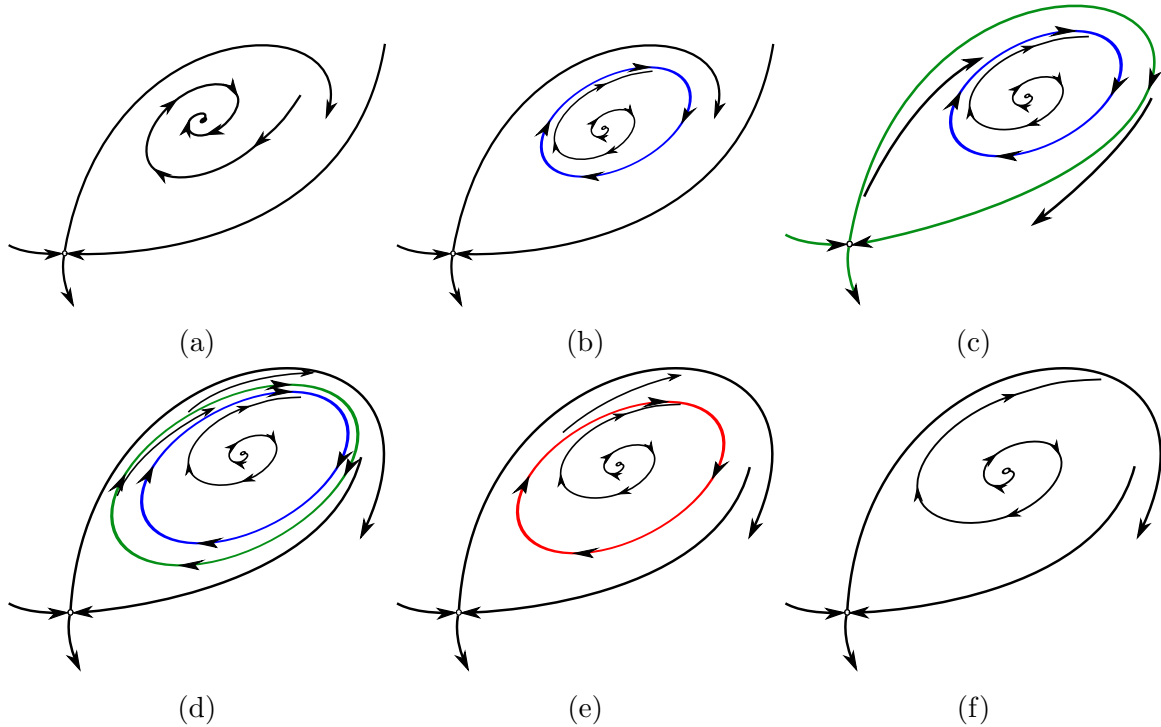


Figura 2-7: Representación esquemática paso a paso de las bifurcaciones globales.

Bifurcación Homoclínica

Esta bifurcación está asociada con la creación (o destrucción) de una órbita periódica a través de la destrucción (o creación) de una órbita homoclínica. El Teorema 3 presenta las condiciones necesarias para garantizar la ocurrencia de la bifurcación homoclínica.

Teorema 3 ([Meiss, 2007]) *Suponga que el sistema $\dot{x} = f(x, \mu)$, donde $x \in \mathbb{R}^2$ y $\mu \in \mathbb{R}$ es el parámetro de bifurcación, con $f \in C^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$, tiene un punto de equilibrio $p_0 = (x_0, \mu_0)$ en el cual se satisfacen las siguientes condiciones:*

HM1 *Condición de no-degeneración: p_0 tiene una órbita homoclínica Γ_0 ,*

$$\chi \equiv \text{tr}(Df_\mu(x_0, \mu_0)) = \nabla \cdot f_\mu(x_0, \mu_0) \neq 0.$$

Sea $p(\mu)$ un punto de silla de f que continua desde p_0 con variedades $W^u(p)$ y $W^s(p)$. Se define una sección Σ hacia f_0 en un punto $q \in \Gamma_0$ y sean $s(\mu) = Z \cap W^s(p)$ y $u(\mu) = Z \cap W^u(p)$ funciones continuas de μ tal que $s(0) = u(0) = q$. Suponga que

HM2 *Condición de transversalidad: $\Delta \equiv \frac{d}{d\mu}(s(\mu) - u(\mu))_{\mu=0} \neq 0$.*

Entonces, si $\chi > 0$ ($\chi < 0$), existe una familia $\Gamma(\mu)$ de órbitas inestables (estables) que bifurcan desde Γ_0 . Los periodos de estas órbitas son ilimitados cuando $\mu \rightarrow 0$. Además, existe un ε (el cual puede ser negativo) tales que existe exactamente una órbita periódica en una vecindad de Γ_0 cuando $\mu \in (0, \varepsilon)$.

La Figura 2-8a incorpora gráficamente el Teorema 3. El propósito es encontrar el valor del parámetro de control y las condiciones iniciales que computan la órbita homoclínica y garantizan que se satisfaga la condición **HM1**. En otras palabras, es necesario encontrar el valor del parámetro para el cual las variedades estable e inestable de la silla P_5 se sobreponen dando origen a la órbita. Se implementó un algoritmo iterativo teniendo en cuenta el Teorema 3 y se encontró que para $\beta = 0.3044111137$ las variedades coinciden creando la órbita homoclínica. Para este valor de β , el punto silla tiene como coordenadas $x_0=(1072.89766,1773.02789)$.

Ahora se procede a verificar que en efecto si se satisface la condición **HM1**, para ello se evalúa la traza (2-20) de la matriz Jacobiana (2-18) evaluada en el punto silla (x_0, μ_0) donde $x_0 = (L_0, S_0)$ y $\mu_0 = \beta_0$.

$$\chi = -\frac{-2\rho S_0 K + 3\rho S_0^2 - 2\rho S_0 k + \rho k K + \alpha\beta_0 L_0 k K}{kK} + \gamma\lambda(1 - \beta_0)^\delta L_0^{\delta-1} \delta + \phi\alpha\beta_0 S_0 - \sigma, \quad (2-20)$$

el valor resultante es

$$\chi(x_0, \mu_0) = -1.10311133712544 \neq 0.$$

De este modo, se verifica que la condición **HM1** se satisface. Para verificar la condición de transversalidad **HM2** es necesario aproximar la derivada en términos de diferencias debido a que las soluciones analíticas para $s(\mu)$ y $u(\mu)$ no están disponibles pero sí lo están las soluciones numéricas. Esto significa que

$$\Delta \equiv \frac{d}{d\mu} (s(\mu) - u(\mu))_{\mu=0} \approx \left(\frac{\Delta s(\beta)}{\Delta\beta} - \frac{\Delta u(\beta)}{\Delta\beta} \right), \quad (2-21)$$

$$\Delta \approx (-3.769618758 - 2.035230695) \times 10^{+4} = -5.804849453 \times 10^{+4}. \quad (2-22)$$

Por lo tanto, también se satisface la condición **HM2**.

Los resultados anteriores demuestran, numéricamente, que sí ocurre una bifurcación homoclínica. La Figura 2-8b es el retrato de fases donde se diferencian las dos cuencas de atracción cuando coexisten la órbita homoclínica (inestable de color verde) y la órbita que se generó a partir de la bifurcación de Hopf (estable de color azul). La cuenca de atracción interna es el conjunto de todas las condiciones iniciales que llevan a que el sistema se aproxime a la órbita estable.

Colisión de ciclos límite

Esta bifurcación esta relacionada con la colisión y posterior desaparición de ciclos límite. Como ya se explicó anteriormente, los ciclos límite que colisionan tienen diferente origen:

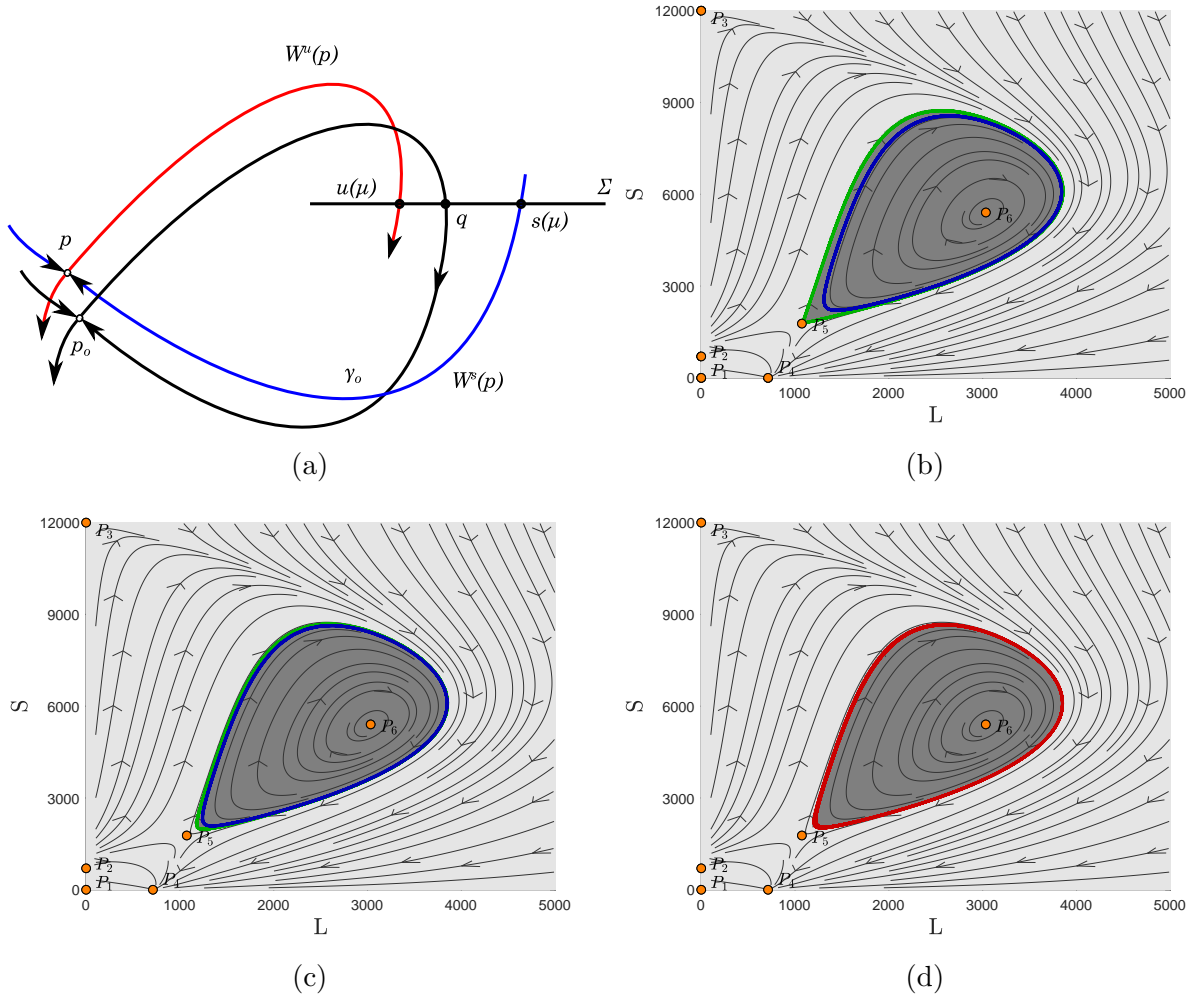


Figura 2-8: Bifurcaciones globales: (a) Construcción del mapa para la órbita homoclínica, (b) órbita homoclínica para $\beta_0 = 0.3044111137$, (c) coexistencia de dos ciclos límite para $\beta = 0.3044677245$, y (d) colisión de ciclos límite para $\beta = 0.3044843354$.

bifurcación de Hopf y bifurcación homoclínica. Para visualizar la ocurrencia de esta bifurcación se realizaron computaciones numéricas. Las Figuras 2-8b, 2-8c y 2-8d son retratos de fase que muestran respectivamente la aparición de la órbita homoclínica, la coexistencia de los dos ciclos límite y la ocurrencia de la bifurcación LPC cuando β incrementa levemente. El estudio detallado de estas dos bifurcaciones globales está reportado en [Kuznetsov, 2004, Govaerts et al., 2005].

2.4.3. Resiliencia potencial

Hasta ahora todos los retratos de fase han sido acompañados de las respectivas cuencas de atracción. Si se define la cuenca más oscura como la cuenca de resiliencia cr , se observa claramente que el área del retrato de fase cubierta por esta cuenca cambia a medida que se varía uno de los parámetros de control como ocurre en los retratos de fase en las Figuras 2-4 y 2-8. Esto permite proponer una medida de la resiliencia potencial que tiene el sistema y que depende de los valores de los parámetros del sistema. La resiliencia potencial se define como:

$$R_p = \frac{A_{cr}(\mu)}{A_T}. \quad (2-23)$$

Donde $A_{cr}(\mu)$ es el área del plano de estados A_T que se encuentra cubierta por la cuenca de resiliencia y que depende del parámetro de control μ , entonces, $R_p \in [0, 1]$. De acuerdo con el análisis de bifurcaciones que se ha realizado hasta ahora, $R_p = 0$ después de que ocurre la bifurcación LPC , pues una vez ocurre la colisión de los ciclos límite desaparecen los ciclos límite y el punto de equilibrio P_6 es inestable.

En la Figura 2-9, se muestra el comportamiento de la resiliencia potencial cuando el parámetro de control es β . Esta Figura es complementaria a la continuación de puntos de equilibrio en la Figura 2-6 y representa el cambio que tiene la cuenca de resiliencia con respecto al área total del espacio de estados cuando se varía el parámetro β . Se observa que R_p disminuye a medida que β aumenta y que $R_p = 0$ para valores de β mayores al punto de bifurcación LPC .

Es importante anotar que para poder determinar A_T y $A_{cr}(\mu)$ fue necesario considerar un máximo de población que el sistema puede soportar, pues a diferencia de los recursos renovables S que están limitados por la capacidad de carga K , la variable población L no cuenta con una capacidad de carga. El valor que se asumió fue de 5000 pues este mostró ser el valor mínimo para el cual todas las órbitas periódicas quedaban contenidas en el espacio de estados cuando se consideran los valores de los parámetros reportados en 2-1.

2.5. Bifurcaciones dos-paramétricas

Anteriormente, se presentó un análisis completo de las bifurcaciones en un parámetro que ocurren en el sistema (2-12). En esta sección se estudian las bifurcaciones que ocurren cuando se varían simultáneamente dos parámetros. En particular, la bifurcación de Hopf degenerada GH y la bifurcación Bodganov-Takens BT son presentadas en las secciones 2.5.1 y 2.5.2 respectivamente para diferentes configuraciones de los parámetros de control de control β , λ , α y δ .

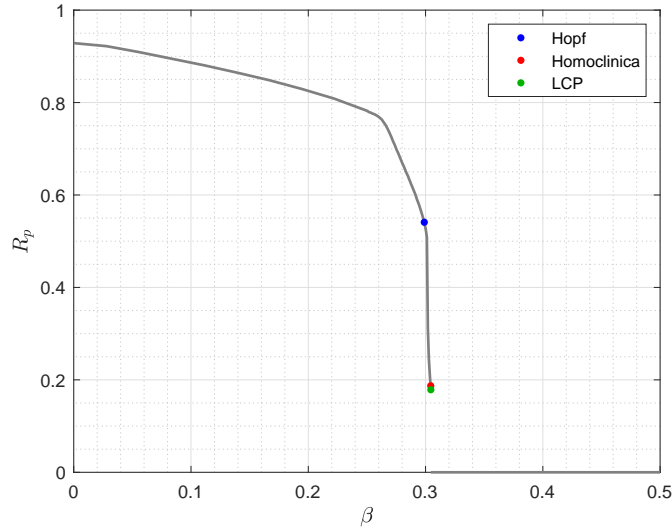


Figura 2-9: Resiliencia Potencial en un parámetro.

2.5.1. Bifurcación de Hopf degenerada

En la sección 2.4.1 se demostró la existencia de la bifurcación de Hopf. Particularmente, se verificaron las condiciones de equilibrio **H1** y de transversalidad **H2**. Sin embargo, el primer coeficiente de Lyapunov l_1 obtenido es demasiado cercano a cero y puede no ser concluyente acerca de la estabilidad de las órbitas periódicas que se generan. Con respecto a $l_1 = -9.8354732x10^{-10}$ se tienen dos posibilidades: considerar que $l_1 \approx 0$ o considerar el signo de modo que $l_1 < 0$. En el primer caso, la bifurcación de Hopf debería ser degenerada, mientras que en el segundo se trataría de una bifurcación de Hopf supercrítica. Para decidir si la condición de no-degeneración **H3** se satisface o no, se realizó una continuación de la bifurcación de Hopf en dos parámetros y se obtuvo la curva de Hopf en el espacio $\beta - \lambda$ que se muestra en la Figura 2-10a. Cada punto sobre esta curva satisface las condiciones **H1** y **H2**, pero l_1 es demasiado cercano a cero para todos los puntos sobre la curva como se ve en la Figura 2-10b. Sin embargo, la caja dentro la Figura 2-10b revela que existe un punto de transición ($l_1 = 0$) donde la bifurcación de Hopf subcrítica ($l_1 > 0$) pasa a ser supercrítica ($l_1 < 0$), lo que significa que de hecho, si existe un único punto donde no se satisface la condición de no-degeneración **H3**. Esta bifurcación ocurre para $\beta_0 = 0.2350355601$ y $\lambda_0 = 14.7236982644$ y coordenadas de equilibrio en $x_0 = (5398.2942109582, 3927.5362814099)$. Con este resultado se pudo concluir que incluso para esos valores de l_1 tan pequeños, es posible garantizar la estabilidad de los ciclos límite, pero es necesario reconfirmar los resultados mediante el cálculo de l_1 para cada punto en una curva de Hopf dos-paramétrica y poder descartar la existencia o ausencia de una bifurcación *GH*.

De acuerdo con la Figura 2-10b, si $\lambda = 17$ y β es el parámetro de control, la bifurcación de

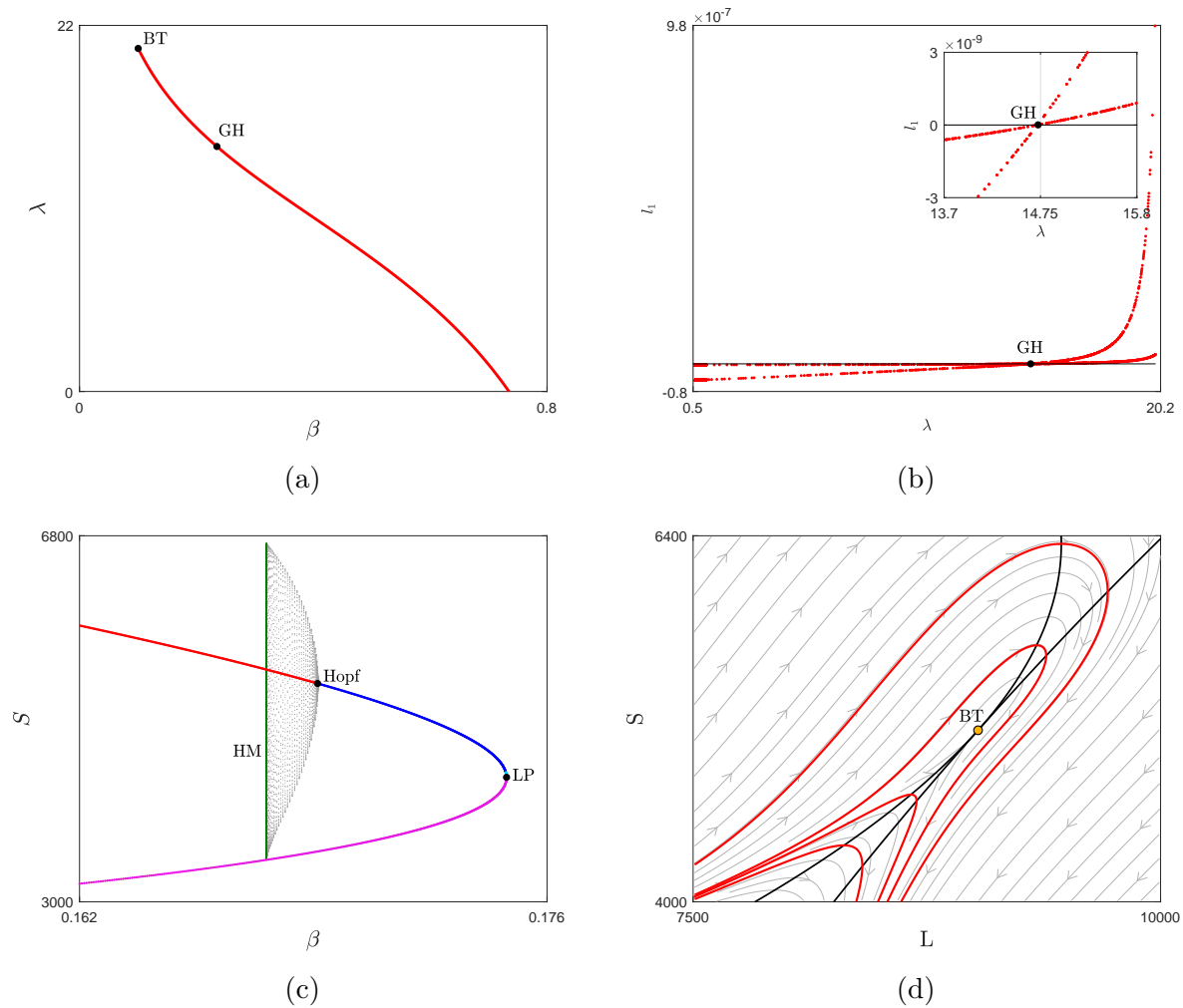


Figura 2-10: Bifurcaciones dos-paramétricas: (a) curva de Hopf en el espacio β - λ , (b) primer coeficiente de Lyapunov, (c) bifurcación de Hopf subcrítica, y (d) retrato de fases cerca el equilibrio BT .

Hopf tiene que ser subcrítica. Para validar este resultado, se construyó la curva de bifurcaciones uno-paramétrica presentada en la Figura 2-10c. A medida que β aumenta ligeramente, aparece una órbita homoclínica HM creando una familia de ciclos límite inestable que luego desaparece a través de una bifurcación de Hopf. En este caso, La bifurcación LPC no ocurre debido a que no existen dos familias diferentes de ciclos límite que puedan colisionar [Kuznetsov, 2004]

2.5.2. Bifurcación Bodganov-Takens

La otra bifurcación dos-paramétrica es la bifurcación Bodganov-Takens que se caracteriza por la existencia de dos valores propios iguales a cero. Esta bifurcación es el punto inicial

(o final) de una curva de Hopf dos-paramétrica como se ve en la figura **2-10a** e implica la existencia de una bifurcación homoclínica [Arnold, 1983, Al-Hdaibat et al., 2017]. La Figura **2-10d** es el retrato de fases alrededor del equilibrio BT que se obtiene para $\beta_0 = 0.100334$ y $\lambda_0 = 20.615268$ y está ubicado en las coordenadas $x_0=(9025.480965,5124.860177)$.

2.6. Diagramas de sostenibilidad en dos parámetros

Se construyó el diagrama de bifurcaciones dos-paramétrico en el plano $\beta - \lambda$ utilizando como puntos de inicio cada una de las bifurcaciones uno-paramétricas y utilizando el paquete de continuación AUTO-07P [Doedel et al., 2007] se realizaron las continuaciones dos-paramétricas respectivas tanto de puntos de equilibrio como de ciclos límite. Este diagrama permite la identificación de diferentes escenarios caracterizados por niveles positivos tanto de recursos renovables como de población no solo en el transitorio sino también en el estacionario (cuando $t \rightarrow \infty$). Estos escenarios son llamados “escenarios de sostenibilidad” y básicamente indican que bajo ciertas condiciones iniciales, el sistema (2-12) se aproxima a algún tipo de estado estacionario donde no solo el nivel de recursos naturales sino también de la población son siempre positivos. Específicamente, estos “escenarios de sostenibilidad” son puntos de equilibrio o ciclos límite estables.

La Figura **2-11** representa el plano $\beta - \lambda$ el cual incluye todas las transiciones entre las curvas de bifurcaciones en un parámetro y la desaparición (o aparición) de algunas bifurcaciones después (o antes) de los puntos de bifurcación en dos-parámetros. Por ejemplo, el punto de equilibrio para la GH tiene coordenadas (β^*, λ^*) y determina la existencia de la curva de bifurcación LPC , e.g. si $\lambda < \lambda^*$ y $\beta > \beta^*$, la bifurcación LPC ocurre para incrementos muy leves en los parámetros de control; en otro caso, esta bifurcación no ocurre. Además, el equilibrio GH es el punto de transición en el cual la bifurcación de Hopf pasa de ser subcrítica ($l_1 > 0$) a ser supercrítica ($l_1 < 0$), por lo que si $\lambda > \lambda^*$ los ciclos límite que bifurcan son inestable mientras que el punto de equilibrio P_6 es estable, como se muestra en la Figura **2-10c**, pero si $\lambda > \lambda^*$ los ciclos límite que se generan son estables mientras que P_6 es inestable como en el caso de la Figura **2-6**.

El diagrama de continuación en dos parámetros realizado con AUTO-07P se presenta en la Figura **2-12a**. Este diagrama sintetiza los cálculos numéricos en el espacio $\beta - \lambda$ estableciendo los límites entre las regiones de sostenibilidad y no-sostenibilidad.

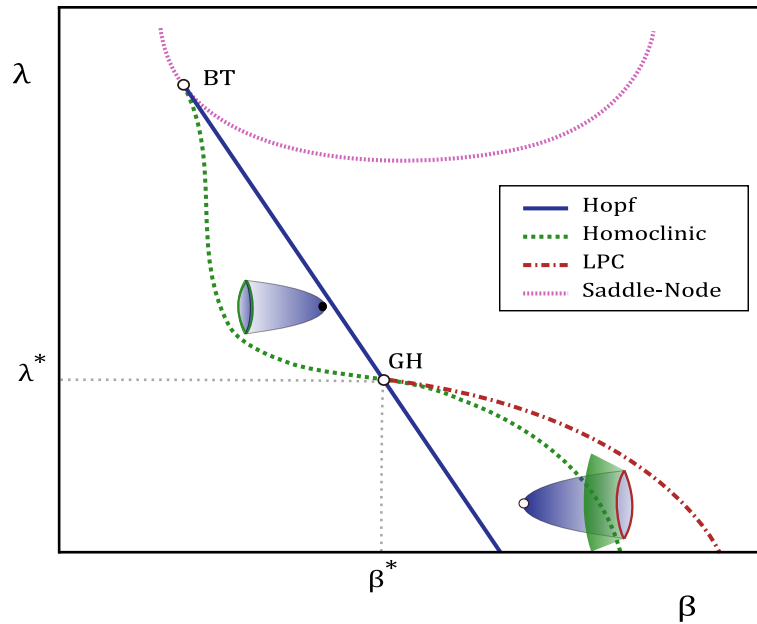


Figura 2-11: Representación del diagrama de bifurcaciones dos-parámetro en el plano $\beta - \lambda$

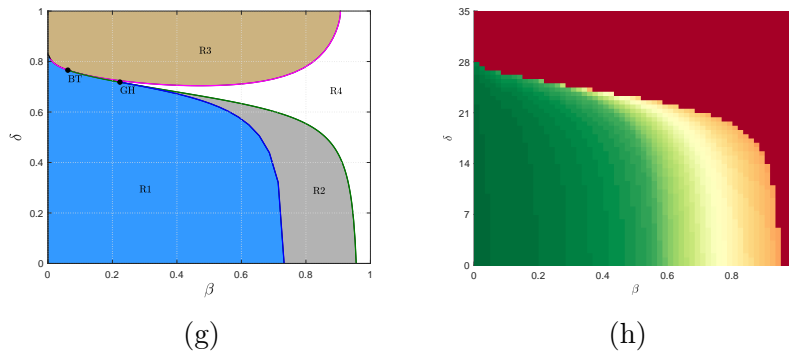
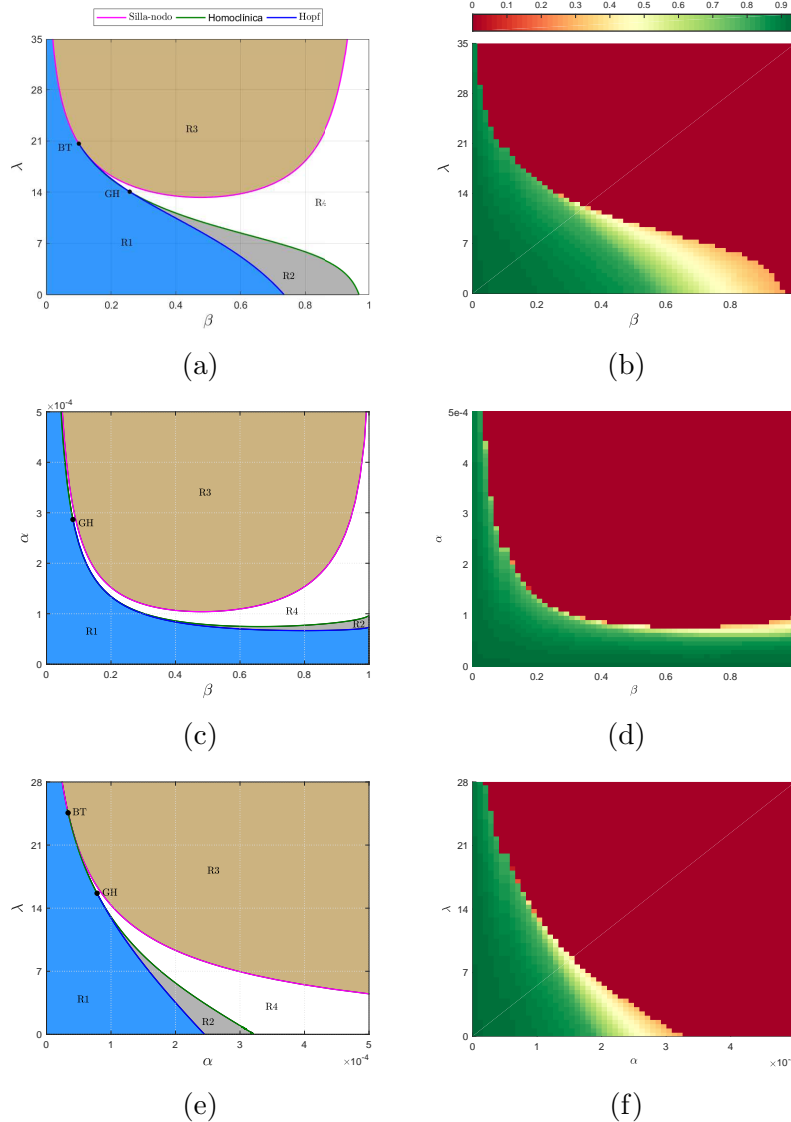


Figura 2-12: Diagrama de bifurcaciones dos-paramétrico y resiliencia potencial en dos parámetros.

Debido a que las curvas de *LPC* y homoclínica están muy cercanas entre sí, no es posible distinguir las a simple vista, por lo tanto se optó por incluir únicamente la curva de bifurcaciones homoclínicas. Con respecto a las simulaciones numéricas, existen dos tipos de regiones principales: la región de sostenibilidad y la región de no-sostenibilidad. La primera está compuesta por las regiones *R1* y *R2*. Para cualquier pareja de parámetros (β, λ) en la región *R1*, el sistema (2-12) evoluciona y se aproxima asintóticamente al equilibrio P_6 mientras que alguna configuración de parámetros en la región *R2* hace que el sistema alcance una ciclo límite estable. La segunda región esta constituida por los conjuntos *R3* y *R4*. La región *R3* se caracteriza por la ausencia de equilibrios no-triviales P_5 y P_6 , por



lo que el sistema puede aproximarse únicamente al equilibrio trivial P_4 . Finalmente, R_4 es una región donde los puntos de equilibrio no-triviales son inestables y no existen ciclos límite.

Las continuaciones de puntos de equilibrio y ciclos límite en dos parámetros se extendieron a diferentes planos dos-parámétricos, usando como parámetros de control los diferentes parámetros que tienen sentido físico, tal como se explicó al inicio de la sección 2.4. Los resultados de estas computaciones numéricas se presentan en las gráficas del lado izquierdo de la Figura 2-12. En estos diagramas de bifurcaciones se observa la existencia de las cuatro conjuntos de configuraciones de los parámetros que definen las regiones de sostenibilidad y de no-sostenibilidad.

Como resultado complementario se realizaron los diagramas de resiliencia potencial en dos parámetros para evaluar el cambio de la resiliencia potencial cuando se varían dos parámetros simultáneamente. El resultado de estas simulaciones se presenta en las gráficas del lado derecho de la Figura **2-12**. Se observa que existe una correspondencia entre los diagramas de bifurcaciones y los diagramas de resiliencia potencial en dos parámetros. Los valores más altos de R_p se obtienen para la región R_1 donde las condiciones iniciales hacen que el sistema se aproxime al punto de equilibrio P_6 . Sin embargo la R_p va disminuyendo gradualmente a medida que la configuración de parámetros se acerca a la bifurcación LPC .

3 Cooperación económica entre comunidades rurales: caso continuo

En general, los modelos del tipo *B&T* y la mayoría de los modelos existentes que estudian la relación dinámica entre la población y los recursos naturales, han considerado comunidades aisladas en las que no existen flujos de personas, intercambio de productos u otro tipo de interacciones entre múltiples comunidades. Como aproximación al modelamiento de las sociedades modernas que son altamente conectadas, es necesario considerar los flujos de personas y el intercambio de bienes y servicios de manera que se logre capturar el acoplamiento entre comunidades que permita establecer nuevos escenarios de desarrollo tanto para el mundo moderno como para las comunidades históricas en las cuales el intercambio de productos desempeñó un rol fundamental en la economía.

Son pocos los trabajos que han incorporado de alguna manera el acople entre comunidades, pero aun así, se observa un aumento en el interés por estudiar este tipo de sistemas. Recientemente se han propuesto modelos que incorporan de alguna manera el acoplamiento entre sociedades. Por ejemplo en [[Anderies and Hegmon, 2011](#)] se presenta un modelo que trata de capturar el efecto que tiene la migración sobre la degradación de los recursos naturales, para esto, se toma como caso de estudio dos regiones en el sudeste de los Estados Unidos cada una con su población y recursos naturales. En [[Sabin et al., 2017](#)] se utiliza un modelo del tipo *B&T* para investigar los efectos emergentes del movimiento de personas, bienes y recursos naturales entre dos sociedades que tienen características similares a las de la Isla de Pascua considerando que las dos sociedades están representadas por el mismo conjunto de *EDO's* y usando funciones simples de difusión dentro de las ecuaciones, encontrando que las regiones en el espacio de parámetros en las cuales las sociedades pueden sobrevivir de manera estable, es significativamente más grande en el modelo acoplado. Un método diferente de acople es usado en [[Angulo et al., 2015](#)]. En este trabajo los autores proponen un sistema de *EDO's* en 4 dimensiones del tipo *B&T* pero incluyen, además, dos nuevas variables de estado: el stock de capital y un índice de desarrollo social, luego construyen una red dinámica de migración entre los diferentes municipios del departamento de Caldas (Colombia). El acoplamiento se realizó utilizando una matriz laplaciana, la cual contiene información acerca de la existencia de conexiones entre los diferentes municipios.

En este capítulo se estudia el efecto a largo plazo de la cooperación económica entre dos

comunidades que son modeladas por sistemas similares de *EDO's* del tipo *B&T* y que considera la extracción de recursos como la única actividad económica. El modelo es similar al estudiado en el capítulo 2 pero sin considerar la producción agrícola.

3.1. Estructura general del modelo

Suponga que las dos comunidades están modeladas por el mismo sistema de *EDO's* del tipo *B&T* donde el nivel de población L y el nivel de recursos S son las variables de estado. De este punto en adelante, los subíndices 1 y 2 se referirán a las variables y parámetros de la comunidad 1 y comunidad 2, respectivamente. Con el propósito de incorporar el movimiento de los recursos, se consideró que el requerimiento de ingresos de cada comunidad puede ser suministrado por el consumo tanto de sus propios recursos naturales como de una porción de los recursos producidos por la otra comunidad. Esta dinámica es similar a un proceso simple de importación y exportación donde lo exportado por la comunidad 1 hacia la comunidad 2 se convierte en lo importado por la comunidad 2 desde la comunidad 1 y viceversa. Por otro lado, se contempló una cooperación doble-propósito caracterizada por el beneficio económico de los intercambios y la protección de los recursos asumiendo que la cooperación no se trata únicamente de recibir sino también de proteger, por lo tanto, los flujos de ingreso deberían reflejar de alguna manera la protección de los recursos naturales para evitar su completo agotamiento. La estructura general para la dinámica de comunidades que interactúan bajo estas consideraciones esta dada por el sistema 3-1.

$$\begin{cases} \frac{dL_k}{dt} = +F_k(L_k, S_k, S_l) - E_k(L_k), \\ \frac{dS_k}{dt} = G_k(S_k) - H_k(L_k, S_k) + S_{l \rightarrow k}(S_l). \end{cases} \quad (3-1)$$

Consideremos el caso de comunidades aisladas. Las razones de cambio $\frac{dS_k}{dt}$ (con $k, l = 1, 2$ y $l \neq k$) están dadas por las tasas de crecimiento natural en ausencia de explotación humana $G_k(S_k)$ menos las tasas de cosecha $H_k(L_k, S_k)$. Por otro lado, se asume que las poblaciones aumentan con el ingreso generado por las actividades económicas desarrolladas dentro de cada comunidad $F_k(L_k, S_k)$ y decrecen cuando los ingresos son insuficientes para sobrevivir $E_k(L_k)$. Ahora, cuando se incorporan los flujos de entrada y salida, las comunidades aisladas 1 y 2 se convierten en comunidades acopladas que protegen $S_{1 \rightarrow 2}(S_1)$ y $S_{2 \rightarrow 1}(S_2)$ cantidades de sus recursos disponibles, respectivamente. Sin embargo, las poblaciones consumen los recursos recibidos desde la otra comunidad, entonces, las funciones de ingreso dependerán también de ambos niveles de recursos, e.g. $F_1(L_1, S_1, S_2)$ y $F_2(L_2, S_2, S_1)$.

3.2. Construcción sistémica de las comunidades acopladas

Las relaciones que construyen el modelo propuesto que representa la cooperación económica entre dos comunidades se muestran en el diagrama causal de la Figura 3-1. Debido a que las dos comunidades son similares y modeladas por el mismo sistemas de *EDO's*, las relaciones que representan la dinámica de cada una de ellas en ausencia de cooperación son las mismas que fueron presentadas en 2.1, sin embargo, existen relaciones que definen la dinámica de la cooperación económica entre ellas. Usando la convención de colores del diagrama causal se establece que las líneas de color verde hacen referencia a las relaciones en la comunidad 1, las líneas de color naranja hacen referencia a las relaciones en la comunidad 2, y las líneas negras hacen referencia a las relaciones de la cooperación. Los enunciados que definen las mencionadas relaciones de cooperación se presentan a continuación.

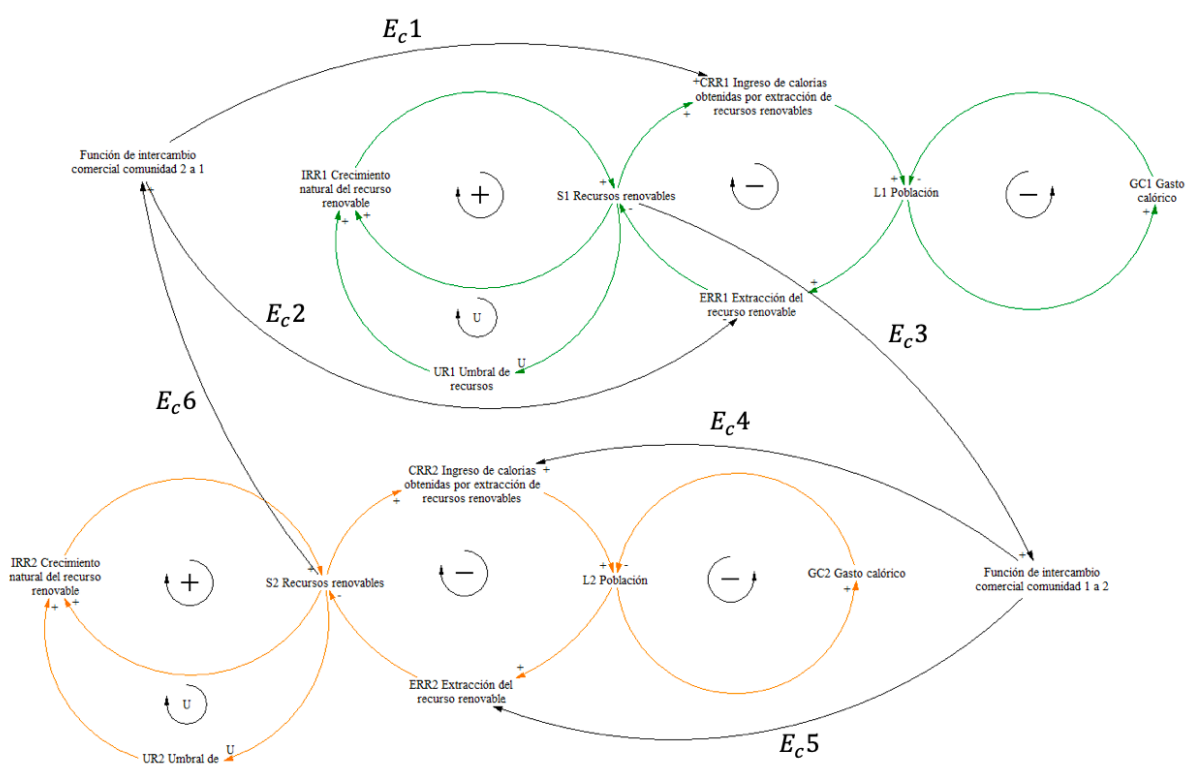


Figura 3-1: Diagrama causal del modelo sistema acoplado.

E_c1 : Si la función de intercambio comercial de la comunidad 2 a la comunidad 1 aumenta, entonces el ingreso de calorías a la comunidad 1, obtenidas por la extracción de recursos renovables, aumenta.

La función de intercambio comercial es la que determina los ingresos de recursos renovables de una comunidad a la otra. El enunciado E_c1 expresa la entrada de recursos

renovables de la comunidad 2 a la 1, aumentando los recursos, expresados en calorías, de la comunidad 1.

E_c2: *Si la función de intercambio comercial de la comunidad 2 a la comunidad 1 aumenta, entonces la extracción de recursos renovables en la comunidad 1 disminuye.*

La entrada de recursos renovables de la comunidad 2 a la comunidad 1 hace que las actividades de extracción de la comunidad 1 disminuya, porque puede suplir en parte sus demandas con lo que llega de la otra comunidad.

E_c3: *Si los recursos renovables de la comunidad 1 aumentan, entonces la función de intercambio comercial de la comunidad 1 a la comunidad 2 aumenta.*

Este enunciado afirma que los excesos de recursos renovables disponibles en la comunidad 1 serán comercializados en la comunidad 2, aumentando los valores de la función de intercambio comercial de la comunidad 1 a la 2.

E_c4: *Si la función de intercambio comercial de la comunidad 1 a la comunidad 2 aumenta, entonces el ingreso de calorías a la comunidad 2, obtenidas por la extracción de recursos renovables, aumenta.*

Como se mencionó, la función de intercambio comercial es la que determina los ingresos de recursos renovables de una comunidad a la otra. El enunciado E_c4 expresa la entrada de recursos renovables de la comunidad 1 a la 2, aumentando los recursos, expresados en calorías, de la comunidad 2.

E_c5: *Si la función de intercambio comercial de la comunidad 1 a la comunidad 2 aumenta, entonces la extracción de recursos renovables en la comunidad 2 disminuye.*

La entrada de recursos renovables de la comunidad 1 a la comunidad 2 hace que las actividades de extracción de la comunidad 2 disminuya, porque puede suplir en parte sus demandas con lo que llega de la otra comunidad.

E_c6: *Si los recursos renovables de la comunidad 2 aumentan, entonces la función de intercambio comercial de la comunidad 2 a la comunidad 1 aumenta.*

Este enunciado afirma que los excesos de recursos renovables disponibles en la comunidad 2 serán comercializados en la comunidad 1, aumentando los valores de la función de intercambio comercial de la comunidad 2 a la 1.

Con el propósito de incorporar el movimiento de los recursos, se consideró que el requerimiento de ingresos de cada comunidad puede ser suministrado por el consumo tanto de sus propios recursos naturales como de una porción de los recursos producidos por la otra comunidad. Esta dinámica es similar a un proceso simple de importación y exportación donde lo exportado por la comunidad 1 hacia la comunidad 2 se convierte en lo importado por la

comunidad 2 desde la comunidad 1 y viceversa. Por otro lado, se contempló que la cooperación es doble-propósito caracterizada por el beneficio económico de los intercambios y la protección de los recursos asumiendo que la cooperación no se trata únicamente de recibir, sino también, de proteger. Por lo tanto, los flujos de ingreso deberían reflejar de alguna manera la protección de los recursos naturales para evitar su completo agotamiento.

Como en el capítulo anterior, partiendo del diagrama causal de la Figura 3-1, se construyó el diagrama de niveles y flujos de la Figura 3-2. Como el modelo para cada una de las comunidades tiene dos variables de estado que son el nivel de los recursos renovables S_k y el nivel de población L_k con $k = 1, 2$, el sistema resultante es cuatro dimensional.

A partir del diagrama de niveles y flujos, se establecieron las ecuaciones diferenciales para las dos comunidades acopladas por un intercambio económico comercial. El cambio de la población para cada comunidad esta dado por:

$$\frac{dL_k}{dt} = CRR_k - GC_k. \quad (3-2)$$

Donde CRR_k y GC_k son, respectivamente, la razón de cambio del ingreso de calorías obtenidas por la extracción de recursos renovables y la razón de cambio del gasto calórico por parte de la población dentro de cada comunidad. La función CRR_k esta compuesta por las calorías aportadas por la extracción de los propios recursos renovables y por las calorías que aporta el intercambio comercial entre comunidades, específicamente, cada comunidad consume un porcentaje de sus propios recursos pero, adicionalmente, consume un porcentaje de los recursos que recibe de la otra comunidad gracias al intercambio comercial. Matemáticamente CRR_k se expresa como:

$$CRR_k = C_1 \phi_k \alpha_k \beta_k L_k + \phi_k \alpha_k \beta_k L_k S_{l \rightarrow k}. \quad (3-3)$$

Donde $S_{l \rightarrow k}$ son las funciones de intercambio comercial que actúan como factor de conversión entre las unidades de los recursos renovables de las dos comunidades,

$$S_{l \rightarrow k} = \frac{(1 - C_l) \phi_l \alpha_l \beta_l S_k}{\phi_k \alpha_k \beta_k}, \quad (3-4)$$

y GC_k se expresa como:

$$GC_k = \sigma L_k. \quad (3-5)$$

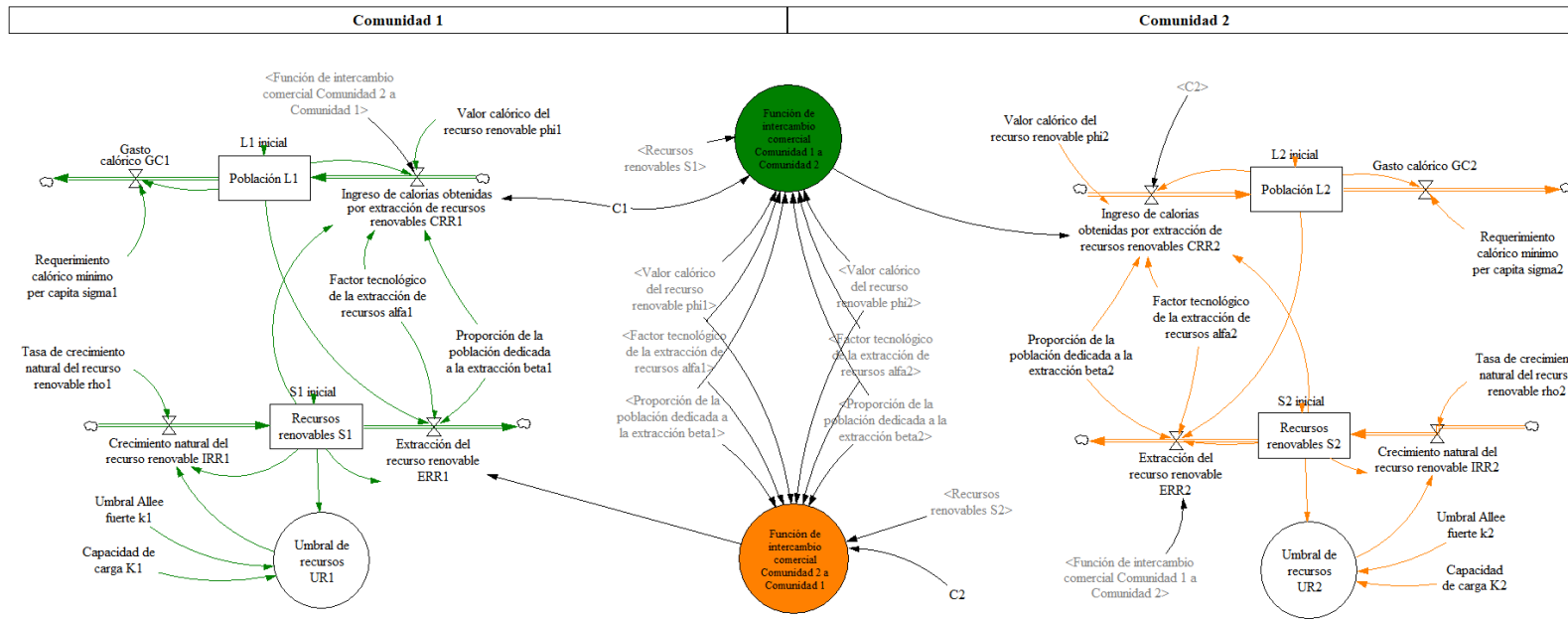


Figura 3-2: Diagrama de niveles y flujos para el modelo acoplado

De este modo, se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{dL_k}{dt} &= CRR_k - GC_k \\ &= C_1\phi_k\alpha_k\beta_kL_k + \phi_k\alpha_k\beta_kL_kS_{l\rightarrow k} - \sigma_kL_k \\ &= C_1\phi_k\alpha_k\beta_kL_k + \phi_k\alpha_k\beta_kL_k\frac{(1 - C_l)\phi_l\alpha_l\beta_lS_k}{\phi_k\alpha_k\beta_k} - \sigma_kL_k.\end{aligned}$$

Que simplificando conduce a:

$$\frac{dL_k}{dt} = (C_1\phi_k\alpha_k\beta_k + (1 - C_l)\phi_l\alpha_l\beta_lS_k - \sigma_k) L_k. \quad (3-6)$$

Por otro lado, el cambio del nivel de recursos renovables en cada comunidad está dado por:

$$\frac{dS_k}{dt} = IRR_k - ERR_k. \quad (3-7)$$

Donde IRR_k representa la razón de cambio del crecimiento natural del recurso renovable en cada comunidad y ERR_k es la razón de cambio de la extracción de los mismos. Las expresiones matemáticas de estas razones de cambio son:

$$IRR_k = \rho_k \cdot UR_k \cdot S_k, \quad (3-8)$$

$$ERR_k = \alpha_k\beta_kL_k(S_k - S_{l\rightarrow k}). \quad (3-9)$$

Donde las variables auxiliares UR_k son los componentes logísticos del crecimiento natural de los recursos renovables. Si se asume que diferentes recursos naturales son producidos en diferentes regiones debido a factores sociales y ambientales como el clima, la geografía y la cultura, entonces cada una de las comunidades del modelo explota recursos naturales diferentes pero similares. Esto significa que las tasas de crecimiento natural pueden ser representadas matemáticamente por la misma función de crecimiento.

$$UR_k = \left(\frac{S_k}{T_k} - 1\right) \left(1 - \frac{S}{K_k}\right). \quad (3-10)$$

La ecuación (3-10) indica que, un incremento en el nivel de recursos lleva a incrementos en sus habilidades reproductivas ocasionando una acumulación de recursos que está limitada por sus capacidades de carga K_k .

Por otro lado, el modelo propuesto asume que cada comunidad protege una cantidad igual, en unidades calóricas, a la cantidad recibida por el intercambio comercial. Por ejemplo, si se considera que las comunidades explotan diferentes bosques para extraer diferentes tipos de madera, las expresiones matemáticas con unidades consistentes son las funciones de intercambio comercial (3-4). Esto se ve reflejado en el término $(S_k - S_{l \rightarrow k})$ de la ecuación (3-9).

Con lo anterior, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{dS_k}{dt} &= IRR_k - ERR_k \\ &= \rho_k \cdot UR_k \cdot S_k - \alpha_k \beta_k L_k (S_k - S_{l \rightarrow k}). \end{aligned}$$

Es decir:

$$\frac{dS_k}{dt} = \rho_k \left(\frac{S_k}{T_k} - 1 \right) \left(1 - \frac{S}{K_k} \right) S_k - \alpha_k \beta_k L_k (S_k - S_{l \rightarrow k}). \quad (3-11)$$

El sistema de ecuaciones diferenciales que se obtiene es:

$$\begin{cases} \frac{dL_k}{dt} = (C_1 \phi_k \alpha_k \beta_k + (1 - C_l) \phi_l \alpha_l \beta_l S_k - \sigma_k) L_k, \\ \frac{dS_k}{dt} = \rho_k \left(\frac{S_k}{T_k} - 1 \right) \left(1 - \frac{S}{K_k} \right) S_k - \alpha_k \beta_k L_k (S_k - S_{l \rightarrow k}). \end{cases} \quad (3-12)$$

Donde las tasas de intercambio $C_k \in [0, 1]$ representan el porcentaje de los recursos extraídos y que son consumidos por la población que los produce, por lo tanto, $(1 - C_k)$ representa los porcentajes de recursos que son compartidos por cada comunidad.

La forma desagregada del sistema 3-12 para dos comunidades es:

$$\begin{cases} \frac{dL_1}{dt} = (C_1 \phi_1 \alpha_1 \beta_1 S_1 + (1 - C_2) \phi_2 \alpha_2 \beta_2 S_2 - \sigma_1) L_1, \\ \frac{dS_1}{dt} = \rho_1 \left(\frac{S_1}{T_1} - 1 \right) \left(1 - \frac{S_1}{K_1} \right) S_1 - \alpha_1 \beta_1 L_1 (S_1 - S_{2 \rightarrow 1}), \\ \frac{dL_2}{dt} = (C_2 \phi_2 \alpha_2 \beta_2 S_2 + (1 - C_1) \phi_1 \alpha_1 \beta_1 S_1 - \sigma_2) L_2, \\ \frac{dS_2}{dt} = \rho_2 \left(\frac{S_2}{T_2} - 1 \right) \left(1 - \frac{S_2}{K_2} \right) S_2 - \alpha_2 \beta_2 L_2 (S_2 - S_{1 \rightarrow 2}). \end{cases} \quad (3-13)$$

De acuerdo con el sistema (3-13), si $C_k = 1$; cada comunidad consume el 100 % de los recursos que extrae, por lo tanto, no existe intercambio comercial. Ahora, podría suceder que solo una de las comunidades suministre ayuda económica a la otra. En este caso, una de las tasas de intercambio es igual a uno. También podría suceder que las dos comunidades intercambien recursos mutuamente, en este caso $C_K < 1$. A continuación se estudian estos casos a partir de simulaciones numéricas.

3.3. Caso base - comunidades aisladas

En esta sección se analiza el comportamiento a largo plazo de las comunidades aisladas (esto tiene sentido porque debe recordarse que el sistema diferencial de este capítulo difiere del presentado en el capítulo anterior). Los movimientos de recursos entre las comunidades no son incluidos por lo que los requerimientos para la subsistencia son brindados exclusivamente por la extracción de los recursos dentro de cada comunidad. Debido a que no hay esta cooperación, tampoco se adoptan medidas de protección de los recursos. Básicamente, si $C_k = 1$ el sistema acoplado de dos comunidades (3-13) se convierte en dos sistemas de *EDO's* desacopladas que pueden ser estudiadas independientemente. El modelo que describe la dinámica de las comunidades aisladas esta dado por:

$$\begin{cases} \frac{dL_k}{dt} = (\phi_k \alpha_k \beta_k S_k - \sigma_k) L_k, \\ \frac{dS_k}{dt} = \rho_k \left(\frac{S_k}{T_k} - 1 \right) \left(1 - \frac{S_k}{K_k} \right) S_k - \alpha_k \beta_k L_k S_k. \end{cases} \quad (3-14)$$

El sistema (3-14) es un sistema autónomo cuyos puntos de equilibrio pueden ser calculados. Este caso, tiene cuatro puntos de equilibrio de los cuales tres son equilibrios triviales, $P_i = (\bar{L}_k, \bar{S}_k)$ para $i = 1, 2, 3$, y un equilibrio interno cuya estabilidad depende fuertemente de los valores de los parámetros. Este equilibrio interno tiene la siguiente solución:

$$P_4 = \left(-\frac{\rho_k (K_k \alpha_k^2 \beta_k^2 \phi_k^2 T_k - K_k \alpha_k \beta_k \phi_k \sigma_k - \alpha_k \beta_k \phi_k T_k \sigma_k + \sigma_k^2)}{\phi_k^2 \alpha_k^2 \beta_k^3 K_k T_k}, \frac{\sigma_k}{\phi_k \alpha_k \beta_k} \right). \quad (3-15)$$

Como se verá, el análisis está enfocado principalmente a estudiar el efecto de largo plazo de la cooperación económica representada por el sistema acoplado (3-13), se presta atención especial a este equilibrio P_4 porque su estabilidad puede cambiar a través de bifurcaciones, conduciendo a diferentes estados estacionarios sostenibles.

Los valores de simulación se corresponden con los parámetros del modelo *B&T* [Brander and Taylor, 1998] y el modelo en [D'Alessandro, 2007], vea Tabla 3-1.

Tabla 3-1: Valores de los parámetros para dos comunidades aisladas.

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
β_1	0.5	β_2	0.7
α_1	0.0001	α_2	0.0001
ρ_1	0.03	ρ_2	0.04
T_1	700	T_2	700
K_1	12000	K_2	12000
σ_1	0.14	σ_2	0.14
ϕ_1	0.4	ϕ_2	0.4

Se consideró que los parámetros del sistema (3-14) son diferentes en cada comunidad, con el fin de capturar diferencias tanto en las propiedades naturales de los recursos naturales como en la mano de obra dentro de cada comunidad. Específicamente, se asume que la comunidad 1 explota el bosque 1 para producir madera de tipo 1 y la comunidad 2 explota el bosque 2 para producir madera del tipo 2 cuyos valores calóricos ϕ_k , tasas de regeneración ρ_k , capacidades de carga K_k , y efectos Allee T_k pueden ser similares pero, con diferencias leves en sus valores. De esta forma, se considera que el bosque 2 se regenera mas rápido que el bosque 1, así que $\rho_2 > \rho_1$. Además, la mano de obra dedicada a la cosecha se asume que es menor en la comunidad 1, e.g. $\beta_1 < \beta_2$.

Por conveniencia, se definen el porcentaje disponible de recursos en el tiempo t como $s_k = S_k/K_k$. Esto significa que $s_k \in [0, 1]$ y las tasas de crecimiento se vuelven negativas si $s_k < T_k/K_k$. Particularmente, para los valores de T_k en la Tabla 3-1, sí el nivel de recursos llegase a estar por debajo del 5,83% su extinción sería inevitable.

La Figura 3-3 muestra la solución del sistema (3-14) bajo la configuración de parámetros de la Tabla 3-1 en los espacios $L_k - s_k - tiempo$. Cada uno de estos espacios permite ver la evolución temporal de cada uno de las variables de estado así como el plano de estados para cada una de las comunidades. Esta simulación muestra que las dos comunidades muestran patrones de consumo diferentes que llevan a estados estacionarios diferentes. Si la población inicial es de 2000 y el nivel de recursos inicial de 10400 unidades másicas de recursos en la comunidad 1, y de 2500 personas y 86000 unidades másicas de recursos en la comunidad 2, la dinámica trazada en la Figura 3-3a presenta un estado transitorio sub-amortiguado seguido por un estado estable sin oscilaciones con nivel de recursos y población positivos. Este comportamiento es posible cuando, por ejemplo, los pobladores viven en armonía con la naturaleza consumiendo únicamente lo que la naturaleza puede regenerar por sí misma y está determinada por la estabilidad del equilibrio interno $P_4 = (2250, 0.583)$ cuyos valores propios son $-0.01625 \pm 0.12443i$, lo que significa que P_4 es un foco estable. Con respecto a la comunidad 2, el escenario es muy diferente y el estado estacionario está caracterizado por el agotamiento rápido de los recursos y, por lo tanto, también de su población, como se ve

en la Figura 3-3b. En este caso $P_4=(2047.619,0.416)$ es un foco inestable con valores propios $0.03214 \pm 0.13796i$. Detalles acerca de la estabilidad de los puntos de equilibrio internos están reportados en el Apéndice .2.

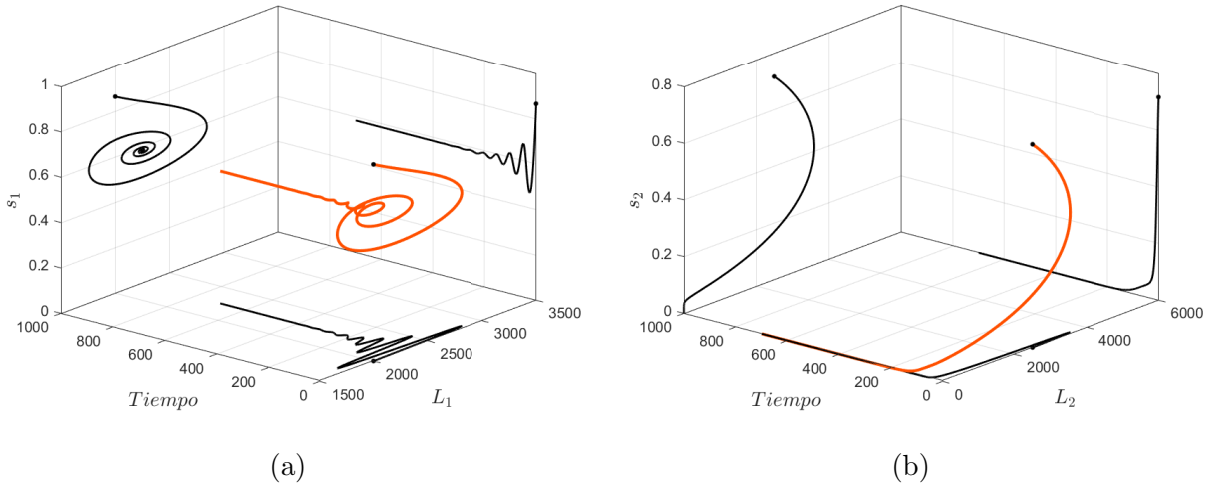


Figura 3-3: Comportamiento dinámico de las comunidades aisladas ($(C_k = 1)$): (a) es la salida para la comunidad 1 que alcanza el foco estable P_4 y (b) es la salida para la comunidad 2 que agota completamente sus recursos aproximándose al origen, en este caso P_4 es un foco inestable.

El caso base se utilizará para realizar la comparación de los resultados con el sistema acoplado por intercambio comercial, de forma que se pueda establecer claramente el efecto que tienen los flujos de entrada y salida en cada comunidad, así como el esfuerzo que cada una de ellas hace por preservar sus propios recursos. A continuación, se estudia en detalle el sistema con intercambio económico, $C_k \neq 1$, teniendo como punto de referencia los valores de los parámetros en la Tabla 3-1 y usando únicamente C_1 y C_2 como parámetros de control. Más adelante, en la sección 3.5, se considera un valor de α_2 menor al del caso de referencia y en la sección 3.6 se considera un valor mayor de α_2 , en estos dos casos también se utilizan C_1 y C_2 como parámetros de control. El objetivo es obtener a partir de diagramas de bifurcaciones todos los escenarios posibles cuando cambian las tasas de intercambio C_k pero teniendo como referencia un tercer parámetro, que para este caso es α_2 .

3.4. Caso de referencia - comunidades acopladas

Para evaluar el rol que cumple la cooperación económica, primero se introduce el movimiento de recursos en una sola dirección y se analizan los cambios que sufren las dos comunidades

en el estado estacionario. Segundo, se considera el intercambio de recursos mutuo y se construyen diagramas de bifurcaciones en uno y dos parámetros con el objetivo de obtener una perspectiva general de las características que los flujos de entrada y salida pueden revelar.

Habiendo analizado las soluciones para las comunidades aisladas dadas unas condiciones iniciales fijas y valores de los parámetros, es claro que la comunidad necesitada de ayuda económica es la comunidad 2 más que la comunidad 1. Esta afirmación se basa en el tamaño final de la población y en los recursos disponibles en el estado estacionario que se muestran en la Figura 3-3.

3.4.1. Cooperación unidireccional

En este contexto, se considera que las personas en la población 1 pueden ayudar económicamente a las personas en la comunidad 2 a través del flujo de un cierto porcentaje de los recursos disponibles para su consumo. Con esta ayuda se espera que mejoren los requerimientos para la subsistencia y permitan que la población 2 no agote completamente sus recursos. De hecho, la población necesitada adquiere automáticamente la responsabilidad de preservar una cantidad de sus recursos disponibles igual, en unidades calóricas, a la ayuda económica recibida. Con este esquema, la cooperación satisface el doble propósito de ayudar a la población necesitada y la protección de recursos. Para efectos numéricos, se asume que la población 1 soporta la población 2 con el 8% de sus recursos extraídos y sin recibir nada a cambio, es decir, $C_1 = 0.92$ y $C_2 = 1$.

En la Figura 3-4 se muestra el comportamiento de las dos comunidades bajo las condiciones de cooperación unidireccional. Al comparar estos resultados con los del caso base (Figura 3-3), existe un pequeño cambio en el tamaño final de los recursos de la comunidad 1: el estado estable de los recursos aumenta (ver Figura 3-4b). Esto sucede por que la comunidad 1 no consume el 100% de sus recursos extraídos, lo que ocasiona una disminución del ingreso per-cápita y, por lo tanto, una reducción de la tasa de extracción, que se ve reflejado en el aumento del nivel de recursos.

Por otro lado, los cambios más significativos emergen en el comportamiento global de la comunidad 2, ya que logra evitar el agotamiento completo de sus recursos aproximándose a una órbita periódica, como se muestra en la Figura 3-4d. En ausencia de cooperación, la población agota completamente los recursos ya que cruza el umbral del 5.83% después de 31.89 unidades de tiempo, y como consecuencia, las tasas de regeneración de los recursos disponibles se vuelven negativas irreversiblemente (alcanzan el punto de no retorno). Una vez se introduce la ayuda económica, el nivel de recursos permanece por encima del 5.83% evitando el agotamiento completo de los recursos, lo que permite que el sistema adopte el

comportamiento oscilatorio con estados positivos. Los retratos de fase y la evolución de temporal de las variables de estado pueden verse en las Figuras 3-4a y 3-4c. En estas Figuras se muestra, además, el umbral del %5.83 bajo el cual la regeneración de los recursos renovables no es posible.

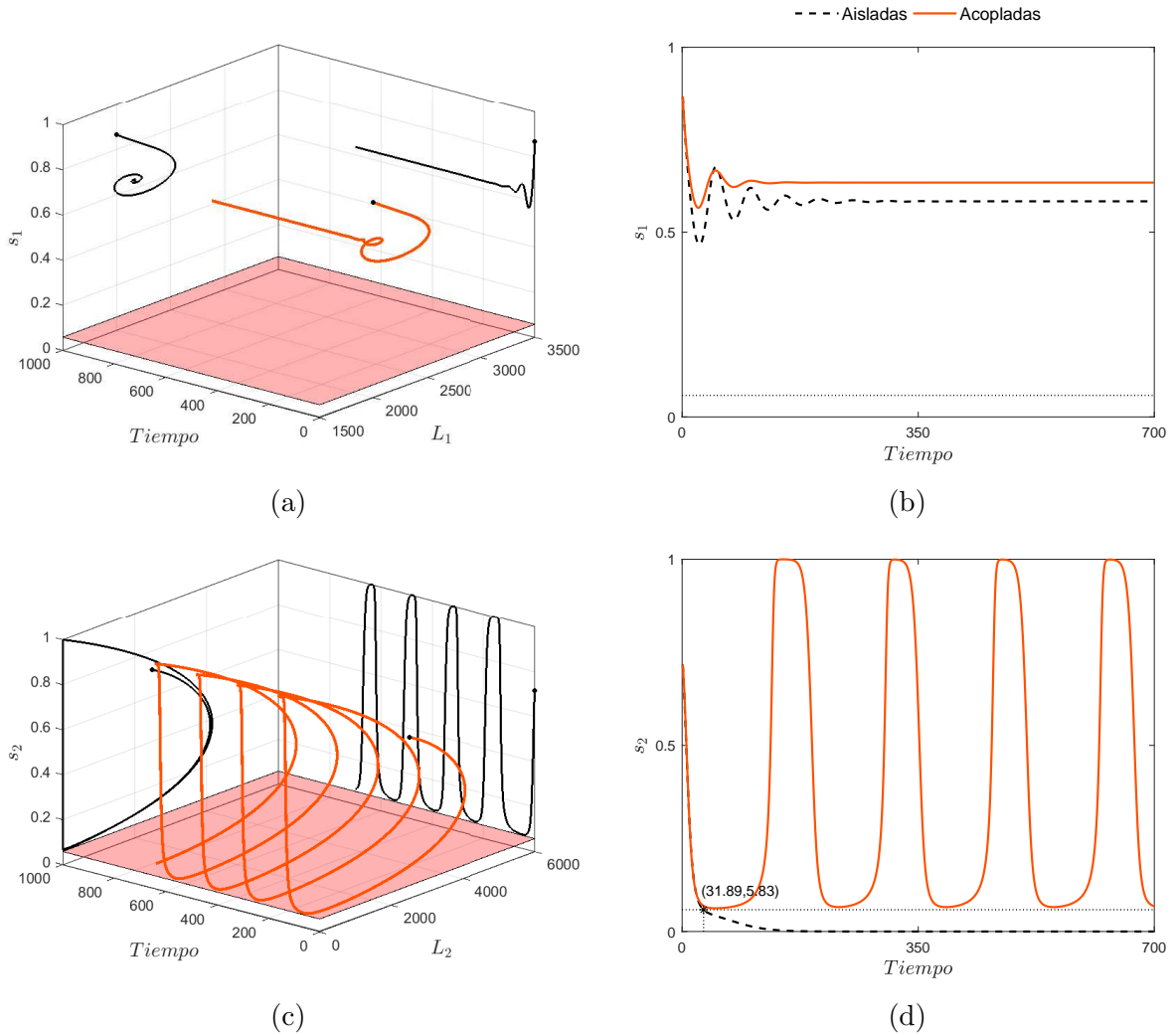


Figura 3-4: Solución del sistema del sistema acoplado (3-13) con ayuda económica de la comunidad 1 a la comunidad 2, $C_1 = 0.92$ y $C_2 = 1$.

El sistema (3-13) tiene 16 puntos de equilibrio, pero solo uno es no trivial con coordenadas en $P_{in} = (\bar{L}_1, \bar{s}_1, \bar{L}_2, \bar{s}_2)$. Los otros 15 equilibrios son triviales y están localizados sobre los ejes coordenados. Al calcular numéricamente los puntos de equilibrio usando los valores en la Tabla 3-1, $C_1 = 0,92$ y $C_2 = 1$ se obtiene:

$$P_{in}=(2167.01323,0.63405,2160.68052,0.38043).$$

Los valores propios de la matriz Jacobiana evaluada en este punto de equilibrio son los dos pares de complejos conjugados $\tau_{1,2}$ y $\tau_{3,4}$ que se muestran en (3-16) (detalles de estos valores propios están en el Apéndice .2) cuyas partes reales definen la estabilidad del sistema. Como $\tau_{3,4}$ tienen partes reales positivas, P_{in} tiene que ser inestable. Sin embargo, al graficar las soluciones en los espacios $L_k - s_k$ ¹ como se muestra en las Figuras 3-4a y 3-4c se pueden asociar $\tau_{1,2}$ a la estabilidad de los estados de la comunidad 1 y $\tau_{3,4}$ a la estabilidad de los estados en la comunidad 2.

$$\begin{aligned}\tau_{1,2} &= -0.03420 \pm 0,11832i, \\ \tau_{3,4} &= 0.03159 \pm 0,12843i.\end{aligned}\tag{3-16}$$

3.4.2. Cooperación bidireccional

Ahora, cuando se introduce cooperación mutua a través del movimiento del 8% de los recursos cosechados ($C_k=0.92$), la solución del sistema en los espacios $L_k - s_k - tiempo$ son aquellos en las Figuras 3-5a y 3-5c. Bajo estas tasas de intercambio, las dos comunidades evolucionan y se aproximan a estados estacionarios oscilatorios, lo que significa que P_{in} es inestable y que todos los valores propios tienen parte real positiva. A pesar de estos periodos de abundancia-escasez y escasez de recursos renovables, ni los recursos en la comunidad 1 ni los de la comunidad 2 son explotados por debajo del 5.83%, como sí ocurre en las comunidades aisladas. Con estos resultados se puede decir que la cooperación ha logrado su finalidad de salvar las comunidades del colapso. Se observa que los recursos en la comunidad 1 pasaron de tener un estado estacionario fijo a comportarse de manera oscilatoria como se ve en la Figura 3-5b, mientras que las oscilaciones en la comunidad 2 se encuentran más distantes del 5.83%, Figura 3-5d.

3.4.3. Análisis de estado estacionario

Para hacer una descripción más completa de lo que sucede en el estado estacionario cuando se varían los valores de las tasas de intercambio C_k , se realiza un análisis de estado estacionario, a través de continuación numérica de puntos de equilibrio y de órbitas periódicas usando el paquete de continuación AUTO-07P [Doedel et al., 2007], así como el análisis de estado

¹Las cuatro variables de estado del sistema (3-13) no pueden ser graficadas en una vista ortogonal del espacio de estados, por esta razón, es muy útil graficar proyecciones en dos dimensiones. Para este caso, las proyecciones más deseables son los planos $L_k - s_k$ que pueden ser comparados con los resultados previos.

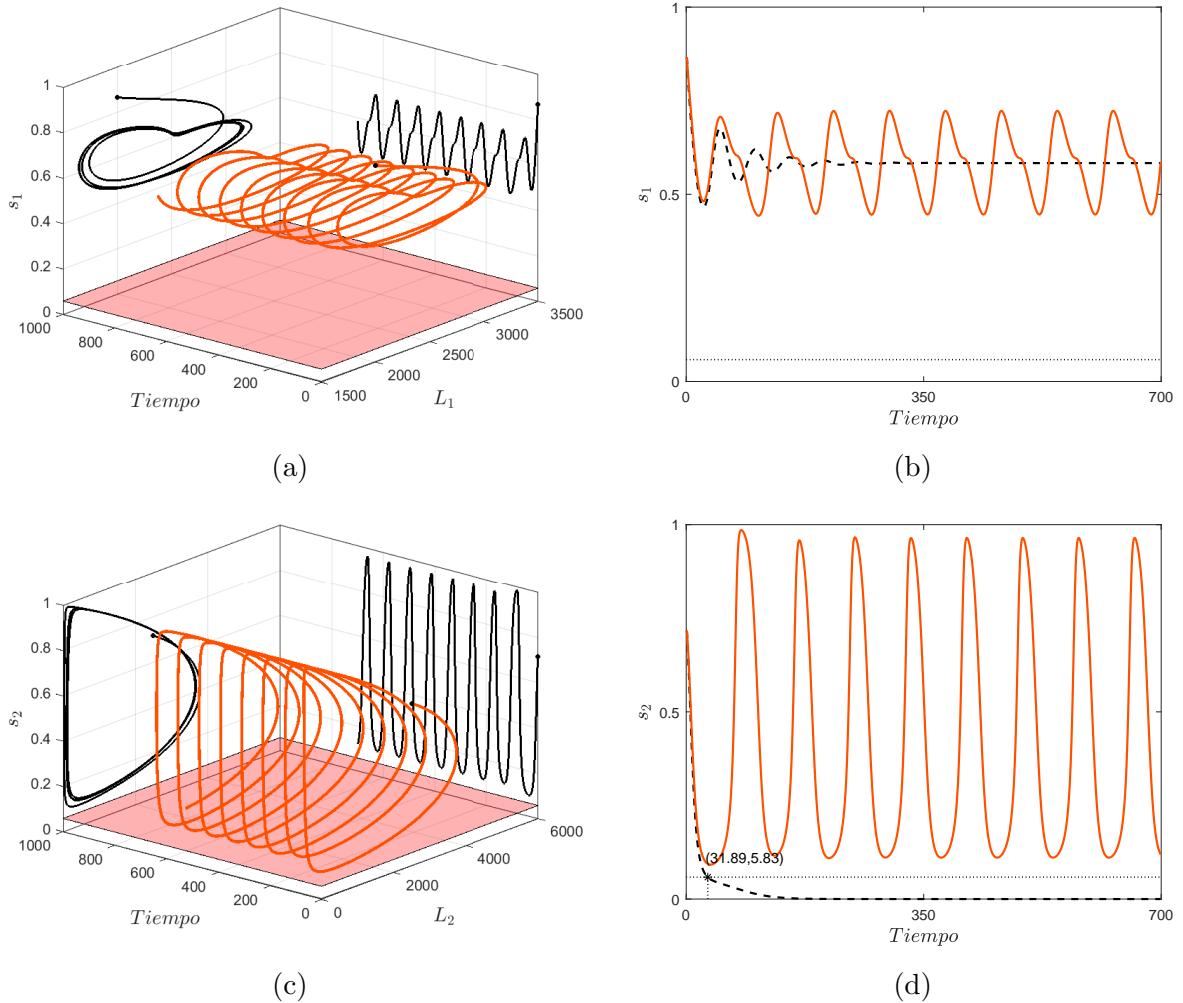


Figura 3-5: Solución del sistema del sistema acoplado (3-13) bajo cooperación mutua, $C_1 = C_2 = 0.92$.

estacionario por medio de simulación usando el mapeo por secciones de Poincaré presentado en [Wiggins, 2003].

Los dos métodos de simulación numérica son diferentes pero arrojan resultados complementarios que permiten identificar todos los escenarios posibles cuando se varían uno o dos parámetros. A continuación, se presentan los diagramas de bifurcaciones que se obtienen por continuación de puntos de equilibrio y órbitas periódicas cuando se varían simultáneamente las tasas de intercambio C_k y se contrasta con los resultados que se obtienen al utilizar un mapeo por secciones de Poincaré, esto, con el propósito de identificar lo que se puede y lo que no se puede representar con los dos métodos de simulación, en pro de entender lo que sucede en el estado estacionario del sistema.

Diagrama de bifurcaciones a partir de continuaciones

Anteriormente se mostró que el estado estacionario del sistema (3-13) cambia al utilizar diferentes valores de las tasas de intercambio C_k . El sistema pasa de aproximarse a un punto de equilibrio (Figura 3-4a) a caer en un atractor periódico (Figura 3-5a), este cambio en el comportamiento del sistema implica la existencia de una bifurcación de Hopf debido a la pérdida de estabilidad del punto de equilibrio. Para obtener los valores de C_k para los cuales el sistema presenta órbitas periódicas, estables o inestables, se realiza una continuación en dos parámetros de la bifurcación de Hopf. Además, cuando se realiza la continuación de ciclos límite que se generan a partir de una bifurcación de Hopf, aparece una bifurcación de ciclos límite llamada doblamiento de periodo (DP). La Figura 3-6 muestra el diagrama de bifurcaciones por continuación de la bifurcación de Hopf y de doblamiento de periodo. De este diagrama se puede decir que, la región comprendida entre las curvas de Hopf presenta ciclos límite, estables y/o inestables mientras que el resto de este espacio paramétrico son puntos de equilibrio estable.

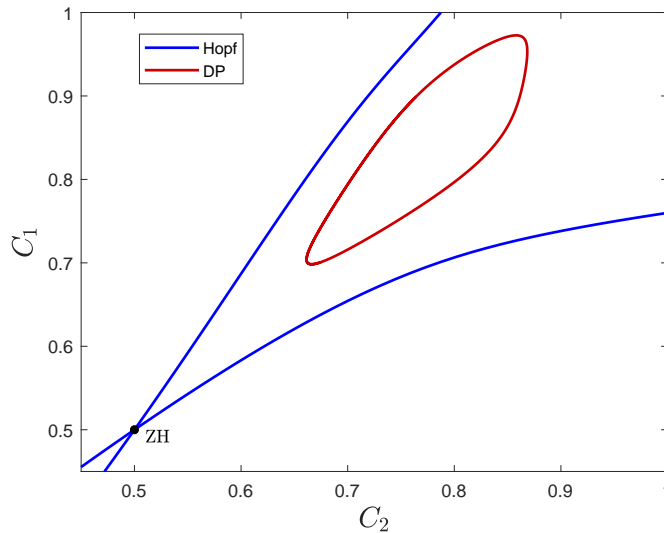


Figura 3-6: Diagrama de bifurcaciones 2-paramétrico por continuación para $\alpha = 0.0001$

La bifurcación Zero-Hopf (ZH) ocurre cuando se tiene un valor propio igual a cero y un par de valores propios que son imaginarios puros. Para este capítulo, esta bifurcación no es de interés por lo que no se estudia en profundidad. En cuanto a la bifurcación DP , esta ocurre cuando se crea o se destruye una órbita periódica con el doble de periodos de la órbita original [Azar et al., 2015, Kuznetsov, 2004]. La forma en que ocurre esta bifurcación se esquematiza en la Figura 3-7. Si una órbita periódica estable se vuelve inestable, y además, se crea una nueva órbita estable que tiene el doble de periodos que la órbita original, se dice que la bifurcación de doblamiento de periodo es supercrítica, ver Figura 3-7a. Pero si sucede

lo contrario y una órbita inestable se vuelve estable creando una nueva órbita inestable con el doble de periodos que la órbita original, se dice que el DP es subcrítico, ver Figura 3-7b.

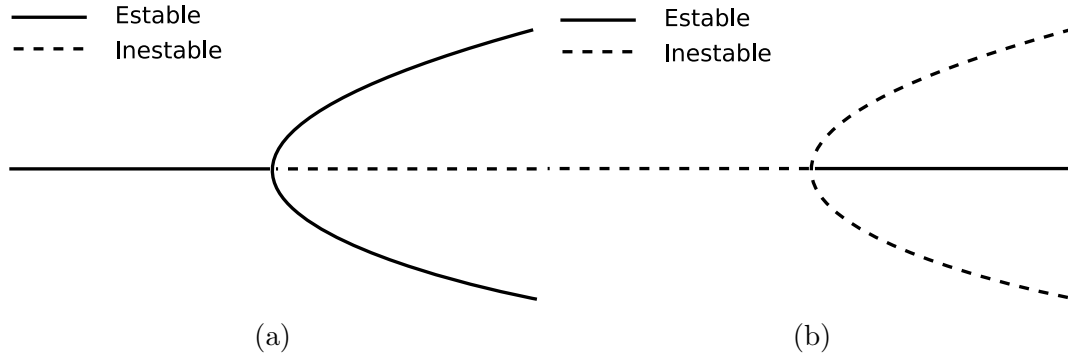


Figura 3-7: Doblamiento de Periodo: (a) DP de órbitas estables (supercrítica) y (b) DP de órbitas inestables (subcrítica)

Teniendo en cuenta lo anterior, y conociendo de antemano la estabilidad de las órbitas que se originan justo después de la bifurcación de Hopf, se puede decir que, la región dentro de la curva 2-paramétrica de DP en la Figura 3-6, contiene órbitas estables de periodo dos y órbitas periódicas de periodo uno.

Si retomamos el caso base en el que las comunidades evolucionan de manera aislada, el estado estacionario de la comunidad 1 es sostenible ya que se trata de un punto de equilibrio estable, mientras que para la comunidad 2, el estado estacionario es insostenible ya que tanto la población como los recursos se agotan completamente. Si localizamos esta configuración de parámetros sobre la Figura 3-6, se observa que no concuerda, pues de acuerdo con el diagrama de bifurcaciones el comportamiento debería ser oscilatorio con periodo uno.

Para capturar estos comportamientos de estado estacionario que no se logran por continuación, se realiza un análisis de estado estacionario utilizando mapas de Poincaré.

Análisis de estado estacionario a partir de un mapa de Poincaré

Un mapa de Poincaré es una forma de representar un sistema dinámico continuo como un sistema discreto (mapeo). Para esto, se presenta el comportamiento del sistema en un subespacio de dimensión inferior al espacio de estados del sistema [Wiggins, 2003]. Esto permite que muchos conceptos como el comportamiento cuasi-periódico y caótico que son engorrosos en el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias se puedan estudiar de manera menos complicada.

El reto está en seleccionar adecuadamente la forma de mapear el sistema de $EDO's$. Para entender el método utilizado en este trabajo se presenta la Figura 3-8. En esta figura, se analiza el estado estacionario a partir de la evolución temporal de una de las variables de estado, usando un mapa de Poincaré con dos configuraciones diferentes de los parámetros. La primera configuración hace que el estado estacionario de la variable L_1 presente el comportamiento 1-periódico que se muestra en la Figuras 3-8a y 3-8b. En este caso, se eligió un mapa de Poincaré que fuera transversal al flujo y que corresponde a la coordenada L_1 del punto de equilibrio P_{in} . Se observa en la Figura 3-8b que la trayectoria cruza el mapeo en dos puntos, sin embargo, el mapeo considera únicamente el cruce en una de las dos direcciones (puntos rojos), como se muestra en la Figura 3-8a. De esta manera, se logra capturar el número de periodos (giros) que presenta cada variable de estado al alcanzar el estado estacionario.

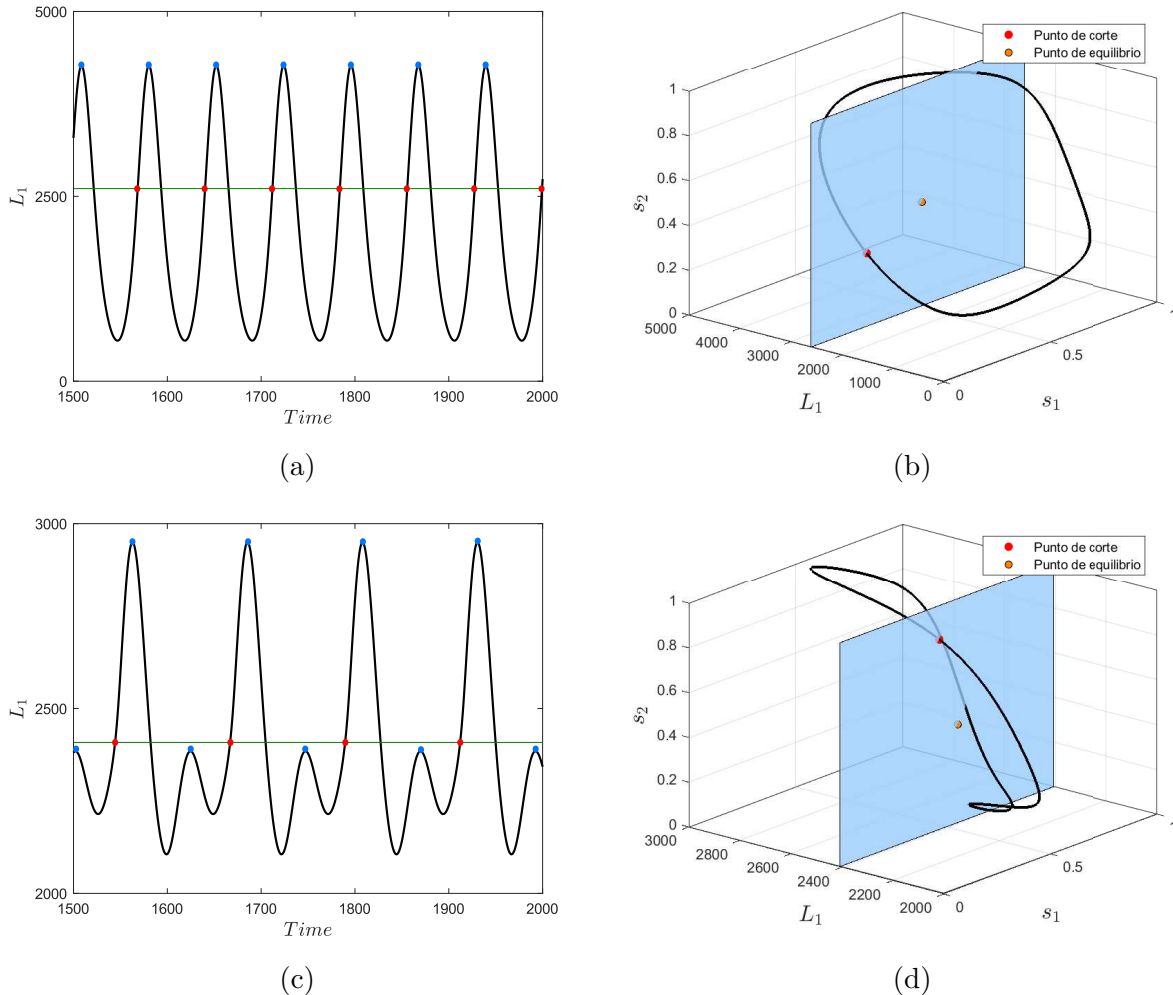


Figura 3-8: Elección del mapeo de Poincaré. (a) y (b) órbita 1-periódica para $C_1 = 1$ y $C_2 = 0.9$, (c) y (d) órbita 2-periódica para $C_1 = 1$ y $C_2 = 0.95$

Para la segunda configuración, L_1 cae sobre un atractor 2-periódico, ver Figuras 3-8c y Figura 3-8d. Si se utiliza el mismo criterio para elegir el mapeo de Poincaré, se observa que el mapeo no captura todo el comportamiento del estado estacionario de la variable L_1 , pues a pesar que el sistema da dos giros, solo uno es capturado por el mapeo. Esto se observa claramente en la evolución temporal de la Figura 3-8d, pues los dos periodos presentes en el estado estacionario no logran cruzar la coordenada L_1 del punto de equilibrio P_{in} . Para lograr capturar toda la información de estado estacionario, se propone la construcción del mapa a partir de los máximos relativos del estado estacionario para cada variable es estado. Este mapeo se observa en las Figuras 3-8a y 3-8c por medio de puntos azules en los valores máximos de cada giro.

Diagrama de bifurcaciones a partir de mapeos de Poincaré

Hasta ahora, el comportamiento a largo plazo de las comunidades acopladas (3-13) se ha estudiado a partir de la continuación de puntos de equilibrio y de órbitas periódicas y a partir de la evolución temporal para diferentes valores de C_k . Se ha propuesto un mapeo de Poincaré para determinar la periodicidad del estado estacionario del sistema. Teniendo en cuenta estos resultados, el sistema puede aproximarse a puntos de equilibrio estables con estados positivos (sostenible), órbitas periódicas atractoras de uno o dos periodos (sostenible), y el origen que es un punto de equilibrio estable con estados iguales a cero (no sostenible). Estos cambios en el estado estacionario se pueden entender mejor desarrollando un análisis de sensibilidad de estado estacionario con respecto a los valores de las tasas de intercambio C_k utilizando mapas de Poincaré, para construir diagramas de bifurcaciones en uno y dos parámetros que puedan complementar los resultados obtenidos por continuación.

Para hacer esto, lo primero que se realizó fue la continuación de un parámetro del punto de equilibrio no trivial P_{in} y se obtuvo una curva de equilibrio de la familia de órbitas periódicas que bifurcan desde una bifurcación de Hopf. Estas continuaciones se realizaron en los espacios $C_k - s_k$. Por otro lado, se realizó el diagrama de bifurcaciones utilizando el mapeo de Poincaré descrito anteriormente y usando los valores de C_k en el mismo intervalo que la continuación, de forma tal que, los resultados puedan ser contrastados. En este diagrama se clasifican los estados estacionarios de acuerdo al número de periodos que presenta cada una de sus variables de estado².

La Figura 3-9 muestra el diagrama de bifurcaciones completo para cada una de las variables de estado del sistema acoplado (3-13) cuando la tasa de intercambio C_1 es el parámetro de control y $C_2=0.92$. Cada uno de estos diagramas presenta dos tipos diferentes de estados

²Una solución n-periódica se refiere al número de giros diferentes que tiene la solución de un sistema de EDO's.

estacionarios: puntos de equilibrio (en color negro), que tienen periodicidad cero, y órbitas n -periódicas (en color rojo). Al comparar los resultados obtenidos por continuación y por mapeos de Poincaré, se observa que para algunas variables (s_2 y L_2) las continuaciones y los mapas logran capturar toda la información de estado estacionario del sistema, como se ve en las Figuras 3-9c y 3-9d. Para estas variables existe una correspondencia completa entre el máximo de las órbitas periódicas por continuación y el obtenido por el mapeo de Poincaré. Sin embargo, para las otras variables de estado (s_1 y L_1) la correspondencia entre continuación y mapeo es parcial, pues, el mapeo arroja la existencia de órbitas 2-periódicas como se ve en las Figuras 3-9a y 3-9b, comportamiento que no es capturado por la continuación de ciclos límite.

Al considerar C_2 como el parámetro de control y $C_1 = 0,92$, se obtienen los diagramas de bifurcaciones 1-paramétrico completos que se muestran en la Figura 3-10. Bajo esta configuración, el estado estacionario de todas las variables de estado presenta bifurcaciones de doblamiento de periodo DP . Esta bifurcación ocurre cuando se realiza la continuación de ciclos límite estables desde la bifurcación de Hopf. En el punto DP estos ciclos límite se vuelven inestables y se crea una familia de órbitas 2-periódica a su alrededor. Posteriormente, ocurre otra DP en la cual, el ciclo límite inestable se vuelve estable de nuevo y, por lo tanto, desaparece la órbita 2-periódica.

Para profundizar en lo que representa el diagrama de bifurcaciones por continuación y el diagrama de bifurcaciones por mapeo de Poincaré presentado en las Figuras 3-10c y 3-10d, se presenta la Figura 3-11. En tres dimensiones, la continuación de puntos de equilibrio y de órbitas periódicas para la comunidad 2 se muestra en La Figura 3-11a, en esta gráfica, se ve claramente que existe un intervalo del parámetro de control en el cual la familia de ciclos límite que bifurcan del Hopf pierde estabilidad y luego la recupera. Si se compara este resultado con los estados estacionarios mostrados en la Figura 3-11b, se concluye que los ciclos límite inestables están rodeados por órbitas estables que tienen el doble de su periodo. Esto se puede ver claramente al realizar una proyección en el espacio de estados para la comunidad 2 como se ve en la Figura 3-11c.

Hasta el momento se ha realizado un análisis de estado estacionario cuando se fija una de las tasas de intercambio comercial y la otra varía como parámetro de control. Este análisis se puede extender a dos parámetros para obtener un diagrama de bifurcaciones 2-paramétrico que permita visualizar todos los escenarios posibles cuando se varían simultáneamente las dos tasas de intercambio comercial.

Los resultados de este mapeo para cada una de las variables de estado se muestra en la Figura 3-12. Las líneas blancas horizontales y verticales que cruzan los planos corresponden a los mapeos en un parámetro presentados en las Figuras 3-9 y 3-10. En estos diagramas se

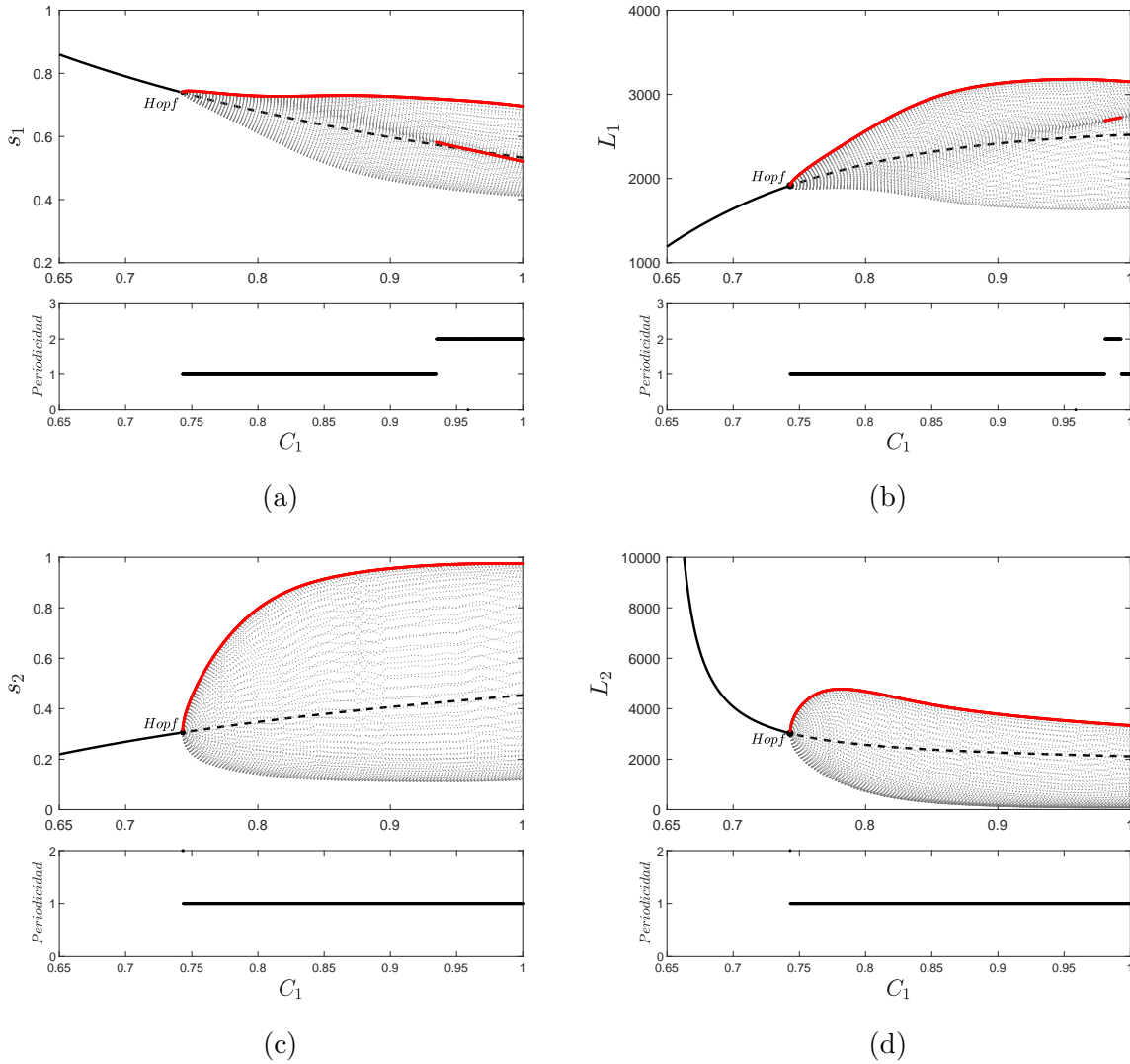


Figura 3-9: Diagramas de bifurcaciones 1-paramétrico a partir de continuación y mapas de Poincaré. $\alpha_2 = 0.0001$, $C_2 = 0.92$ y C_1 es parámetro de control.

sintetiza el efecto que tiene el intercambio comercial sobre el estado estacionario de cada una de las variables de estado, presentando comportamiento oscilatorio hasta de cuatro periodos. Se identifican tres regiones principales con sus respectivos índices de periodicidad:

- Una región en el plano $C_2 - C_1$ caracterizada por escenarios en los cuales el tamaño final de s_2 y L_2 son cero aun cuando s_1 y L_1 son positivos, lo que significa que existe una configuración de tasas de intercambio mínimas necesarias para garantizar que la cooperación cumpla su función de evitar el colapso. Esta región tiene índice 1.
- Una región caracterizada por escenarios en los cuales las dos comunidades se aproximan a un punto de equilibrio estable. Se puede decir que esta región representa los

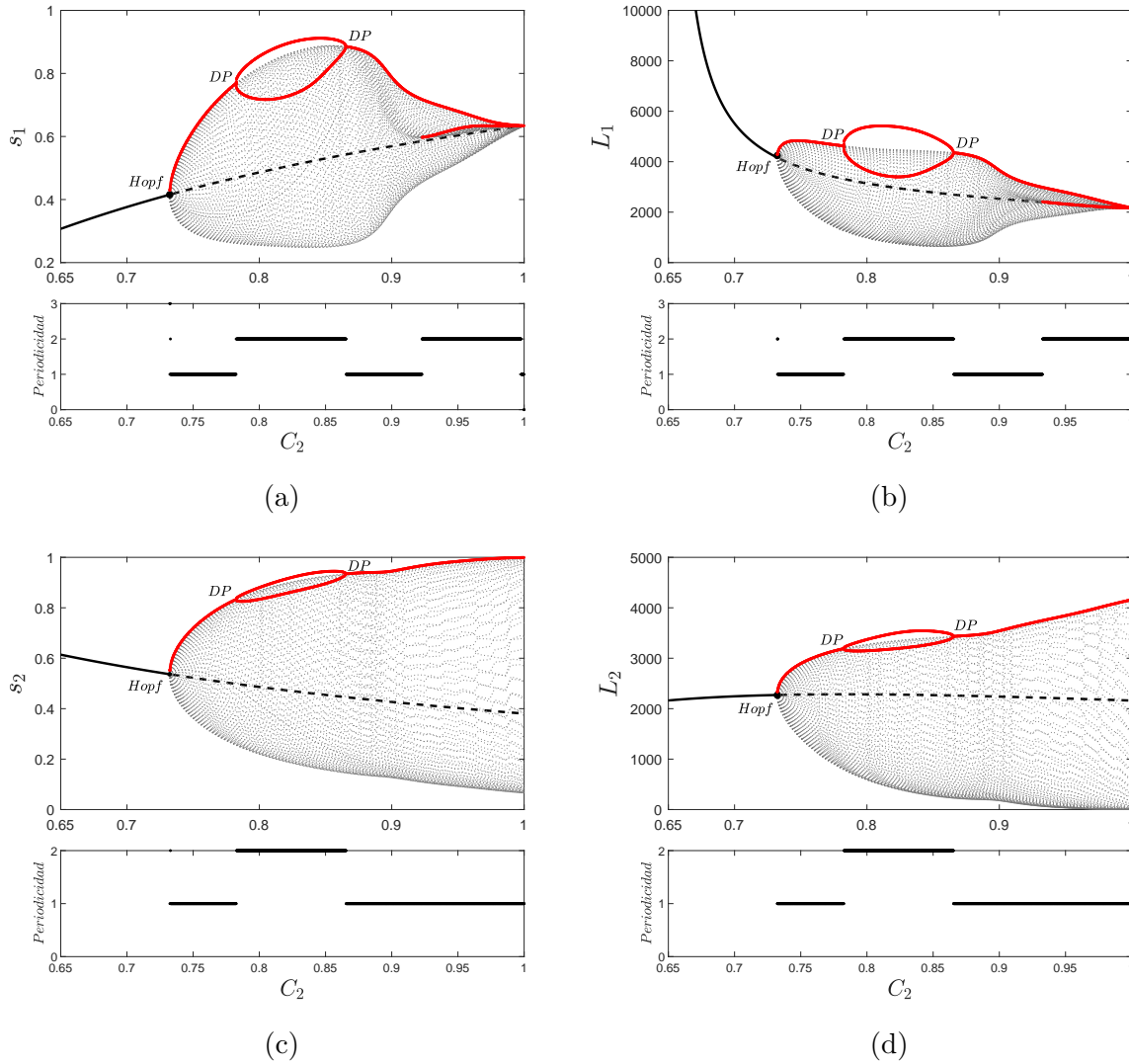


Figura 3-10: Diagramas de bifurcaciones 1-paramétrico a partir de continuación y mapeos de Poincaré. $\alpha_2 = 0.0001$, $C_1 = 0.92$ y C_2 es parámetro de control.

escenarios de sostenibilidad deseados, ya que al final, las poblaciones logran suplir sus requerimientos para la subsistencia, equilibrando el consumo y la explotación. Esta región tiene índice 0.

- Una región caracterizada por escenarios en los que todas las variables de estado tienen comportamiento oscilatorio con múltiples periodicidades. La existencia de salidas periódicas representan periodos de abundancia y escasez pero sin agotar completamente los recursos. A pesar de los periodos de abundancia y escasez, el nivel de recursos no cruza el umbral Allee, ni en la comunidad 1, ni en la comunidad 2. Esta región tiene índices 1, 2, 3, y 4.

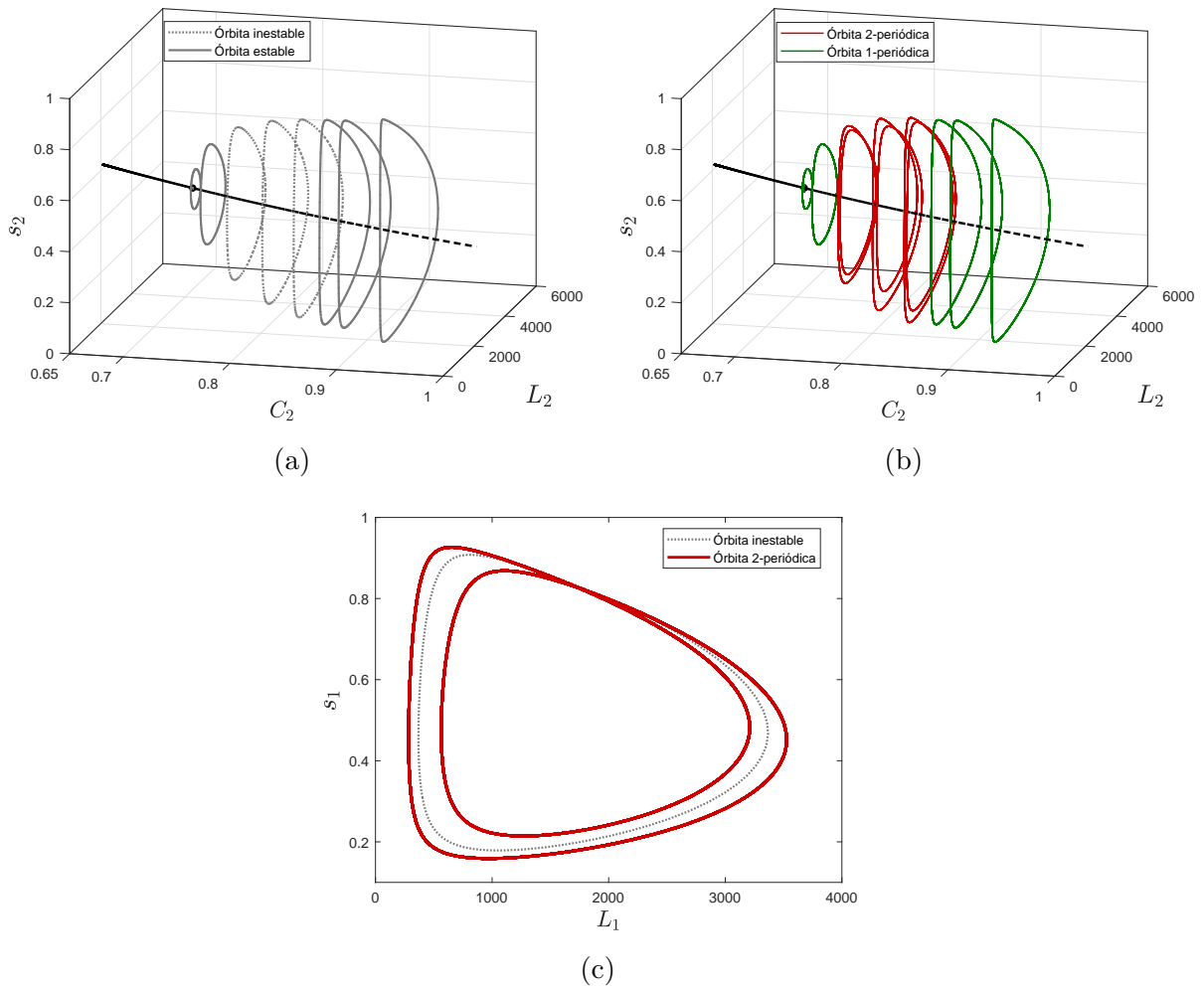


Figura 3-11: Coexistencia de órbitas periódicas estables e inestables: (a) continuación de órbitas periódicas y su estabilidad, (b) comportamiento de estado estacionario y (c) coexistencia de órbita periódica estable e inestable.

Los resultados presentados indican que el intercambio comercial doble propósito afecta positivamente, por lo menos de forma cualitativa, la dinámica de las comunidades involucradas. Partiendo del caso base en el que la ausencia de cooperación lleva a la comunidad 2 al completo agotamiento de sus recursos, se puede decir que, existe una gran región en el espacio paramétrico $C_2 - C_1$ en el que cualquier combinación de estas tasas podrían alejar a esta comunidad del colapso. Esto significa que, las poblaciones en las dos comunidades pueden evitar la sobre-explotación cuando intercambian y protegen las cantidades apropiadas de los recursos.

Por otro lado, el diagrama de bifurcaciones 2-paramétrico por continuación **3-6** puede superponerse perfectamente sobre los diagramas en la Figura **3-12**. No obstante, muchos de los

cambios en el estado estacionario del sistema, no son capturados por este diagrama, como es el caso de las órbitas con 3 y 4 periodos. Ahora, utilizar los dos tipos de simulaciones numéricas permiten un resultado más completo, ya que por continuación se tiene información acerca del cambio de estabilidad de los puntos de equilibrio y de los ciclos límite, y por mapeo se obtiene información de lo que sucede con el estado estacionario cuando esas órbitas periódicas ganan o pierden estabilidad.

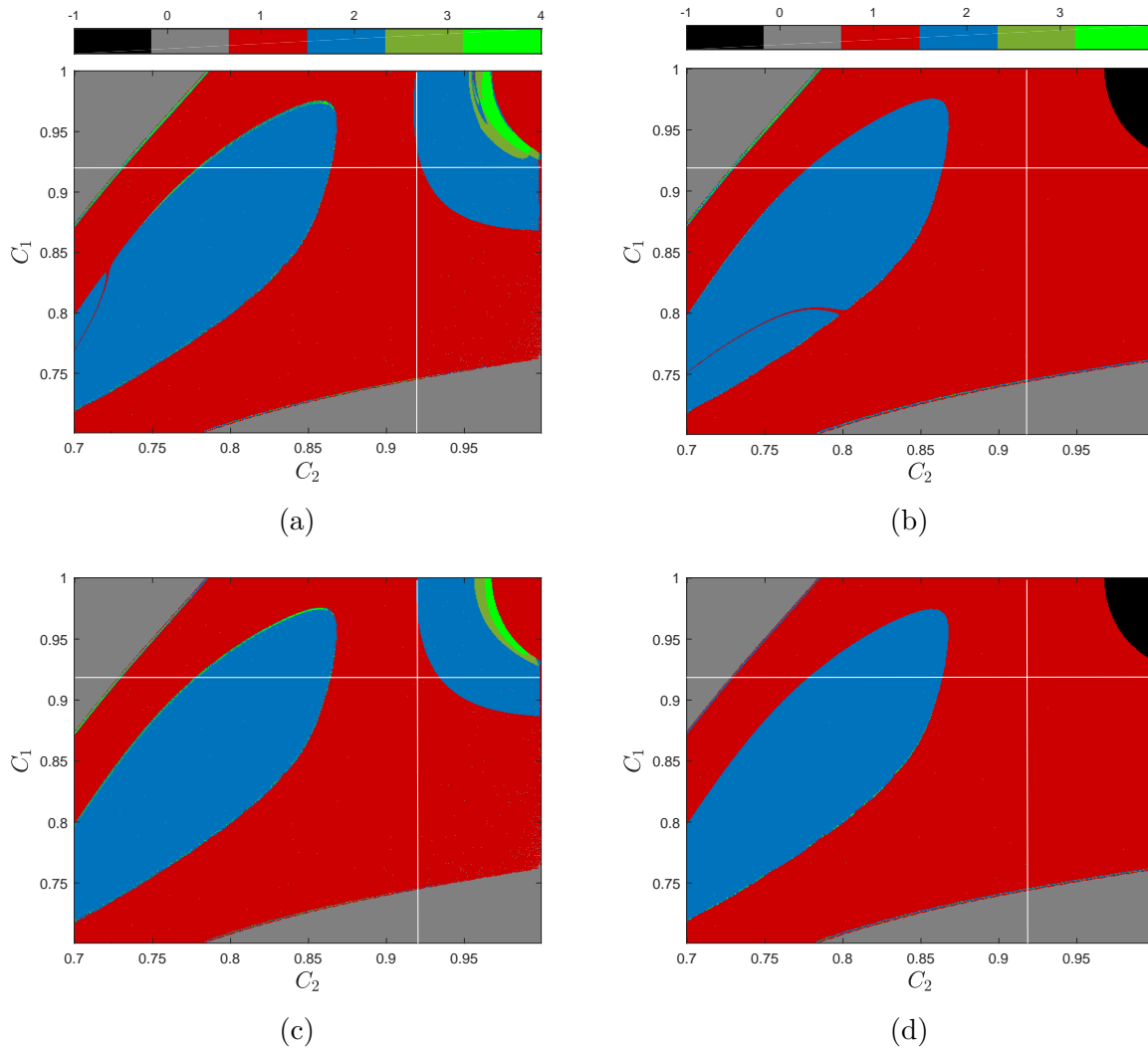


Figura 3-12: Diagrama de bifurcaciones 2-paramétrico para $\alpha = 0.0001$: (a) s_1 , (b) s_2 , (c) L_1 y (d) L_2 .

3.5. Caso 1 - Menor eficiencia en la extracción de recursos

Los resultados obtenidos hasta ahora se han basado en las comunidades aisladas para evaluar los fenómenos no lineales que emergen en el sistema cuando se introduce la cooperación económica sin cambiar los valores de los parámetros que describen la dinámica de las comunidades, en otras palabras, los parámetros en la Tabla **3-1** han permanecido constantes. En el Caso 1, se evalúa el comportamiento de estado estacionario cuando se varía uno de los parámetros del sistema (**3-14**). Específicamente, se considera que la tecnología usada para extraer los recursos renovables es menor, al valor del caso de referencia estudiado en la sección **3.4**. El valor tomado es $\alpha = 0.00009$.

Las simulaciones numéricas, tanto por continuación como por mapeo, arrojan los mismos resultados. Concretamente, por ambos métodos se obtuvieron diagramas de bifurcaciones exactamente iguales en los cuales se pueden identificar dos regiones: una donde las dos comunidades se aproximan a puntos de equilibrio estable y otra donde el estado estacionario es una órbita 1-periódica. Estas regiones están separadas por curvas de Hopf, tal como se muestra en la Figura **3-13**.

Todos las variables de estado presentan el mismo comportamiento en el estado estacionario como se aprecia en las Figuras **3-13a**, **3-13b**, **3-13c** y **3-13d**. Esto implica que, al reducir la eficiencia en la extracción de recursos en la comunidad 2 (menor valor de α_2), las dos comunidades tienen patrones de consumo sostenible, incluso en ausencia de cooperación $C_k = 1$, aunque experimentan ciclos de abundancia-escasez. Sin embargo, al introducir el intercambio comercial es posible evitar esos ciclos, si se adopta la configuración adecuada para ello.

3.6. Caso 2 - Mayor eficiencia en la extracción de recursos

El segundo y último caso considera que existe un aumento, con respecto al caso de referencia, en la tecnología para la extracción de recursos de la comunidad 2. El valor que se toma es $\alpha_2 = 0.00011$. Bajo estas condiciones, el sistema acoplado presenta fenómenos no lineales que emergen debido a la cooperación económica, como cuasi-periodicidad y caos, y que es interesante analizar a través de diagramas de bifurcaciones en uno y dos parámetros. Para este caso, los diagramas de bifurcaciones se realizan exclusivamente por medio de mapeos de Poincaré, ya que la cuasi-periodicidad y el caos son conceptos engorrosos de estudiar a partir de continuación.

Los diagramas de bifurcaciones presentados en la Figura **3-14** se construyeron considerando

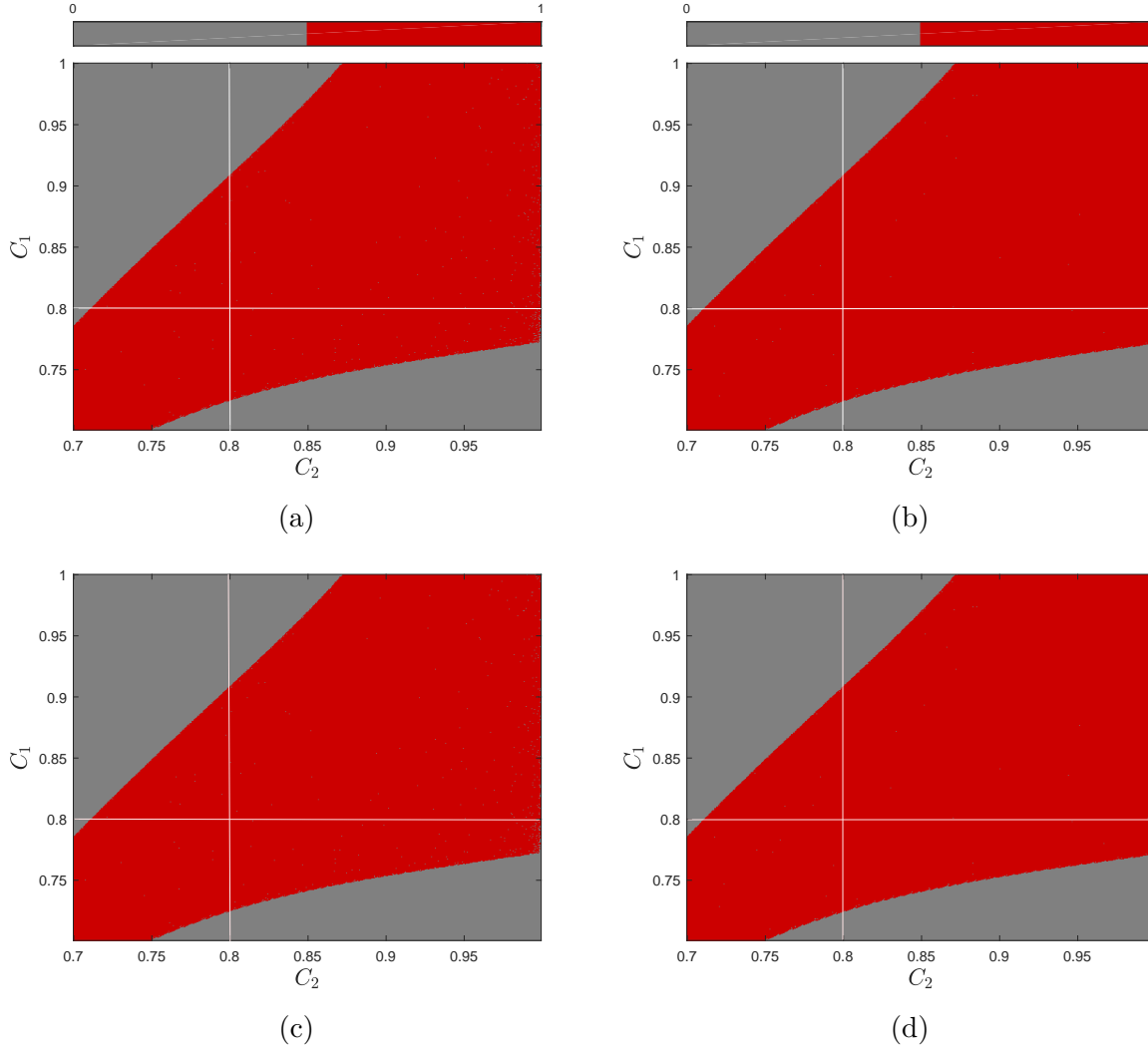


Figura 3-13: Diagrama de bifurcaciones 2-paramétrico para $\alpha = 0.00009$: (a) s_1 , (b) s_2 , (c) L_1 y (d) L_2 .

$C_2 = 0.8$ y C_1 como parámetro de control. Se observa que para los valores más bajos de C_1 , las variables de estado tienden a un punto de equilibrio estable y a medida que va aumentando, este equilibrio pierde estabilidad hasta que ocurre una bifurcación de Hopf después de la cual el sistema se vuelve 1-periódico y, posteriormente, ocurre una serie de doblamientos de periodo que llevan al sistema hasta un atractor caótico. Luego se observa una región con periodo tres, seguida de una gran franja caótica con pequeñas ventanas de cuasi-periodicidad. Finalmente, el sistemas cae en un atractor 2-periódico.

Finalmente se construyó el diagrama de bifurcaciones en dos parámetros que se presenta en la Figura 3-15. Este diagrama muestra la riqueza dinámica que emerge en el sistema al

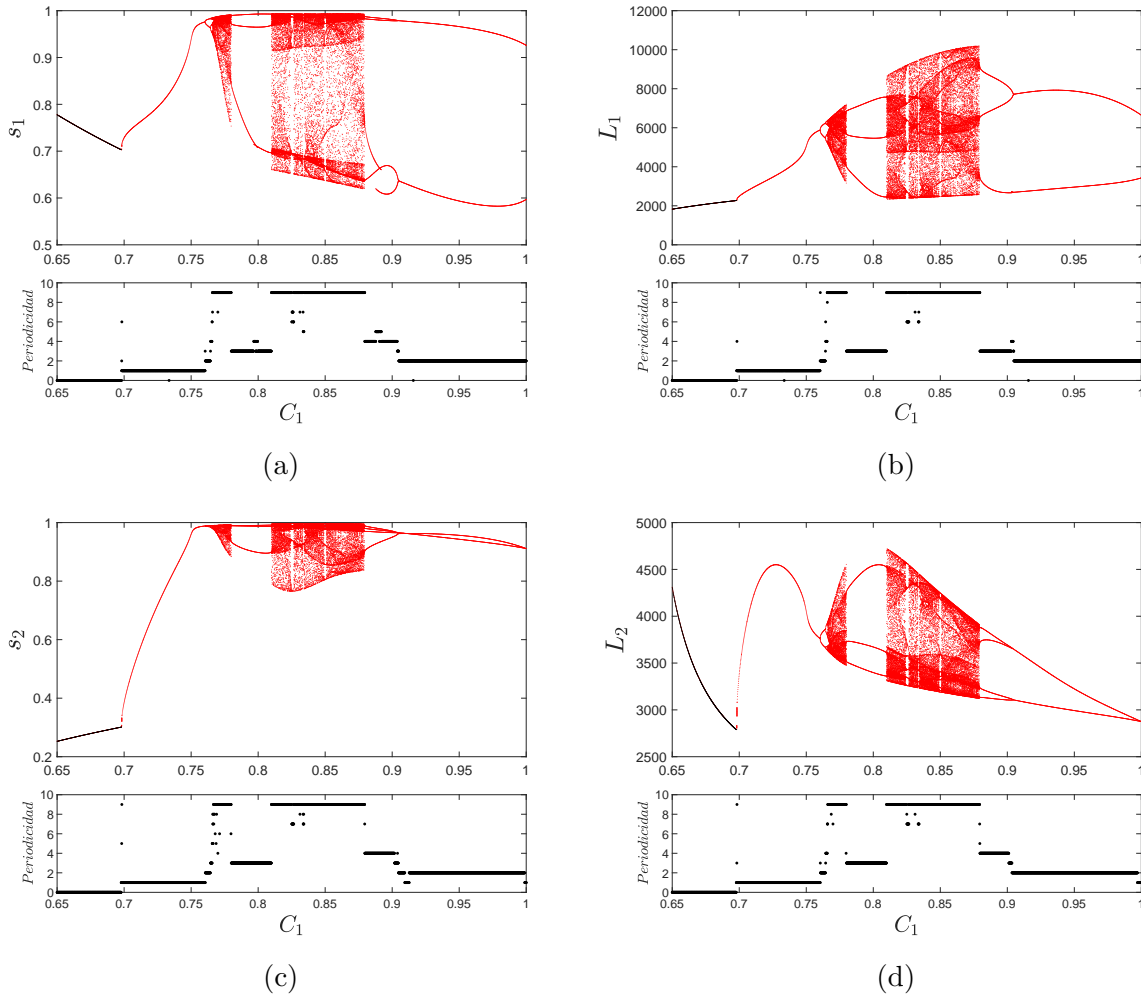


Figura 3-14: Diagramas de bifurcaciones 1-paramétrico a partir de continuación y mapeos de Poincaré. $\alpha_2 = 0.00011$, $C_2 = 0.8$ y C_1 es parámetro de control.

cambiar el valor de un tercer parámetro. Si se compara ese resultado con el obtenido en el caso de referencia (Figura 3-12, se observan dos cambios generales en los espacios $C_2 - C_1$. El primer cambio es el aumento del tamaño de la región, en la cual s_2 y L_2 son cero, es decir, las tasas de intercambio mínimas necesarias para garantizar que la cooperación cumpla su función de evitar el colapso aumentan, siendo necesaria una mayor cooperación para evitar el completo agotamiento de s_2 .

El segundo cambio, son las diferentes periodicidades de cada una de las variables de estado, lo que conduce a construir un diagrama de bifurcaciones para cada uno de los estados del sistema.

Para este caso, y al igual que los casos anteriores, la comunidad 1 es sostenible para cualquier

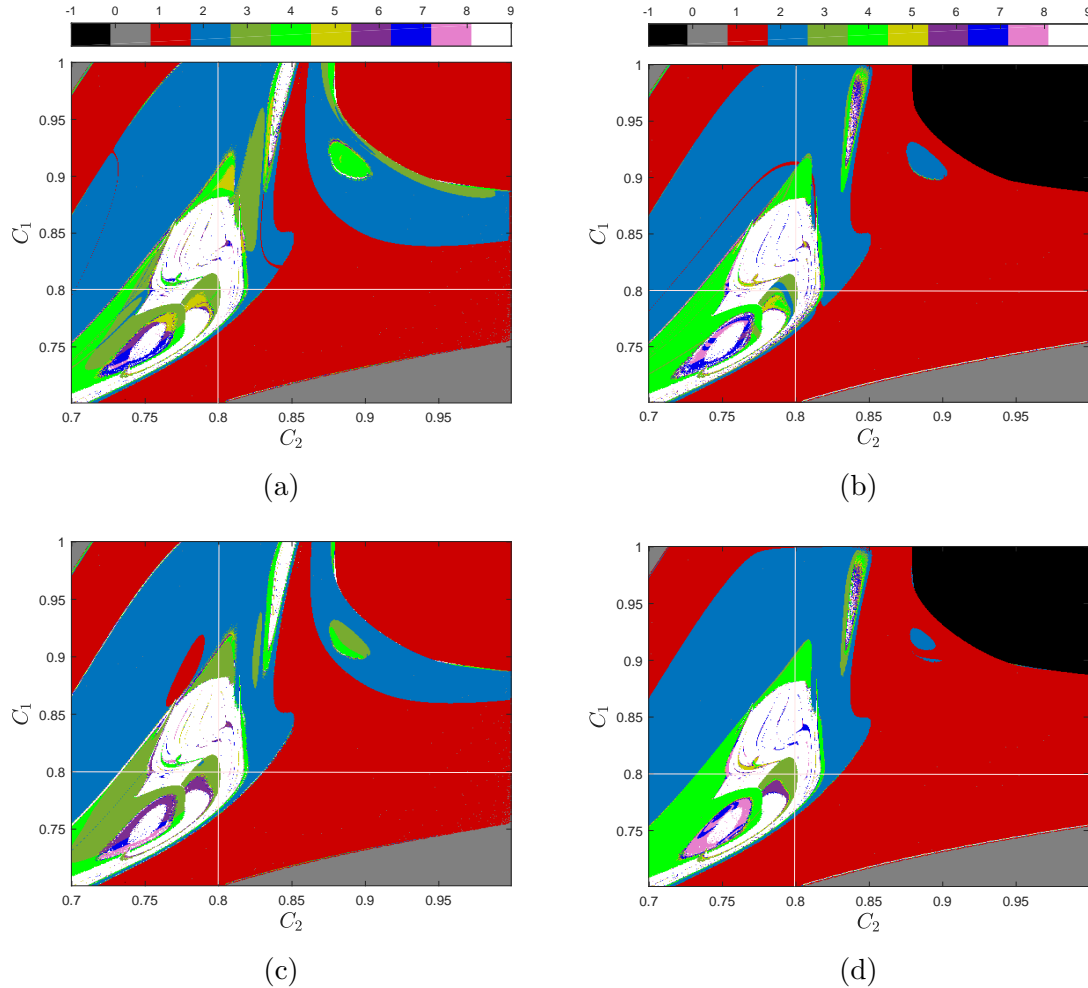


Figura 3-15: Diagrama de bifurcaciones 2-paramétrico para $\alpha = 0.00009$: (a) s_1 , (b) s_2 , (c) L_1 y (d) L_2 .

combinación de tasas de intercambio, mientras que la comunidad 2 requiere de una ayuda más grande (comparada con el caso de referencia) por parte de la comunidad 1 para salir de esa zona de no sostenibilidad. A pesar que los parámetros de la comunidad 1 permanecieron intactos, el hecho de estar acoplado con la comunidad 2 hace que la dinámica de las dos comunidades se vea afectada.

4 Cooperación económica entre comunidades rurales: caso discontinuo

En este capítulo se estudia el efecto a largo plazo del intercambio comercial en el sistema acoplado (3-12) cuando las tasas de intercambio C_k cambian de acuerdo con el nivel disponible de recursos que tienen las comunidades en cada instante de tiempo. Con este propósito, el espacio de estados se divide en diferentes regiones donde actúan diferentes tasas de intercambio, así, el modelo 4-dimensional suave que se trabajó en el Capítulo 3 se convierte en un sistema de Filippov [Filippov, 1988] con múltiples umbrales que funcionan como regiones de conmutación.

A continuación se presenta el sistema suave a trozos y discontinuo utilizando el método de control equivalente de Utkin [Utkin, 1977] para caracterizar el sistema y desarrollar las simulaciones numéricas.

4.1. El modelo acoplado discontinuo

Hasta este punto, se ha considerado que el intercambio comercial ocurre a tasas constantes durante todo el tiempo aun cuando las comunidades tienen niveles de recursos moderados o altos. El objetivo del modelo discontinuo que se propone, es incorporar el hecho que la cooperación es una decisión tomada mutuamente por ambas comunidades bajo ciertas condiciones ambientales para que se logre mitigar la sobre-explotación de los recursos en la comunidad necesitada. Entiéndase comunidad necesitada como aquella que tiene menos recursos renovables disponibles en algún instante de tiempo. Si se asume además que la cooperación depende únicamente de los recursos disponibles para el consumo, es decir, que dependiendo del nivel de recursos dentro de cada comunidad, el intercambio comercial existe, entonces se espera que se tengan diferentes valores de las tasas de intercambio.

4.1.1. Mecanismo de cooperación discontinua

Para entender la propuesta, se describe detalladamente el mecanismo de cooperación como sigue:

- Cada espacio $L_k - s_k$ se divide en $n + 1$ sub-regiones P que se encuentran separadas por n zonas de conmutación (umbrales o fronteras) $\Sigma_{k,j}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) que se definen como el conjunto cero de una función escalar $h_{k,j}(L_k, s_k)$, ver Figura 4-1a.
- Por simplicidad, se asume que las fronteras en las dos comunidades son iguales, es decir, $u_{1,j} = u_{2,j}$ así que $\Sigma_{1,j} = \Sigma_{2,j}$. Además, $u_{k,1}$ y $u_{k,n}$ son elegidas apropiadamente de modo que las $n - 2$ sub-regiones entre ellas están igualmente espaciadas. Específicamente, el tamaño de las sub-regiones $P_{k,2}$ a $P_{k,n}$ es igual.
- Los sistemas de *EDO's* $f_{k,j}$ que gobiernan cada sub-región dependen del valor $C_{k,j}$ asignado de acuerdo con la matriz en la Figura 4-1b. Las filas y las columnas representan la j th sub-región de s_1 y s_2 , respectivamente. Por lo tanto, si el nivel de recursos renovables disponibles en las comunidades se encuentran en la misma sub-región (diagonal principal), no es necesario (para altos s_k) o posible (para bajos s_k) la cooperación económica, en otro caso, la ayuda económica va de la comunidad con nivel de recursos en la región más alta hacia la comunidad necesitada que tiene menor nivel de recursos. Por ejemplo, si $s_1 \in P_{1,1}$, y $s_2 \in P_{2,2}$, la comunidad 1 soporta económicamente a la comunidad 2 con el $C_{1,2}$ por ciento de sus recursos, sin demandar recursos de la otra comunidad ($C_2 = 1$).
- La capacidad de brindar soporte económico depende de los valores de s_k en cada instante de tiempo. Si se define Δn como el número de sub-regiones intermedias entre la sub-región en la que se encuentran los recursos de la comunidad de soporte en el tiempo t y la sub-región en la que se encuentra los recursos de la comunidad necesitada, se tiene que, entre más grande sea Δn la cooperación debería ser más grande, ya que la comunidad necesitada requeriría más asistencia por parte de la comunidad de soporte con el fin de proteger sus recursos. En ese contexto, la comunidad necesitada recibirá el mismo porcentaje de recursos desde la comunidad de soporte siempre y cuando Δn sea el mismo, es decir, la asignación de las tasas de intercambio $C_{k,j}$ es independiente de los valores de s_k . Como un ejemplo, las tasas de intercambio en las posiciones (2, 1), (3, 2), y (4, 3) son iguales porque en todos los casos $\Delta n = 1$, e.g. s_1 se encuentra dentro de una sub-región por encima de la sub-región en la que encuentra s_2 .
- Los valores de $C_{k,j}$ son asignados de acuerdo al valor de Δn . Esto implica que, la cooperación siempre ocurre en una dirección donde los estados de la comunidad necesitada son $x_k = (L_k, s_k(s_l))$ con $l = 1, 2$ y $l \neq k$.

Este mecanismo de cooperación fuerza el sistema suave (3-13) a convertirse en un sistema de Filippov 4-dimensional con las siguientes características:

- El sistema admite tantas discontinuidades (regiones de conmutación $\Sigma_{k,j}$) como se desee.

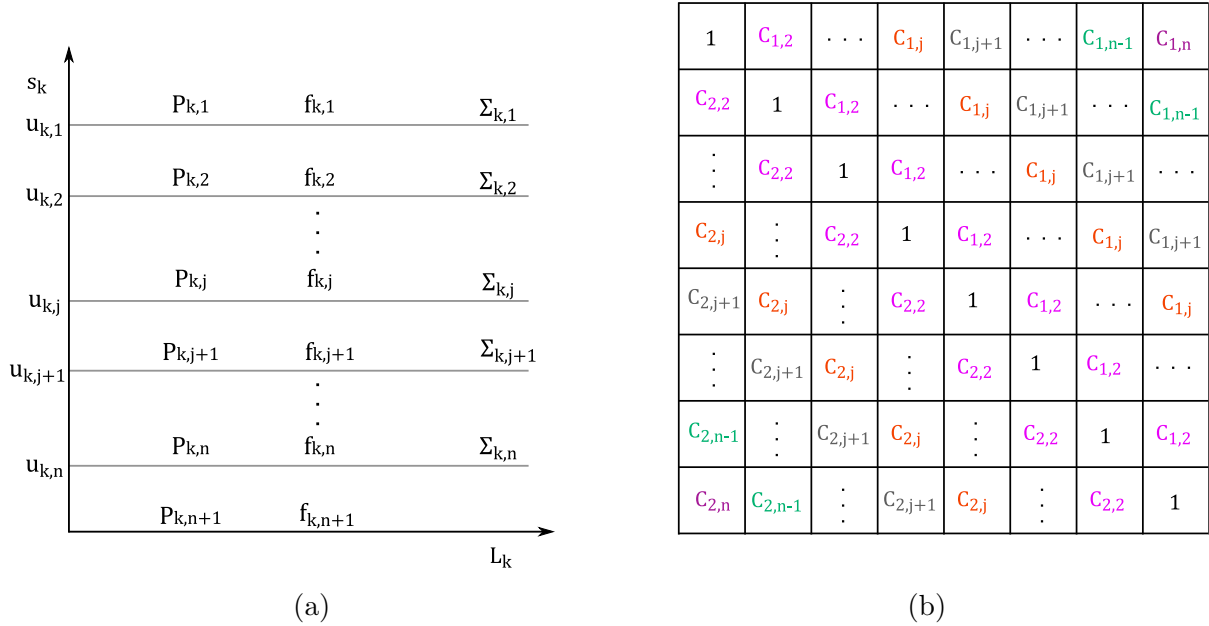


Figura 4-1: Mecanismo de cooperación discontinuo: (a) sub-regiones en los espacios $L_k - S_k$ y (b) asignación de las tasas de intercambio.

- Las discontinuidades se definen sobre el plano de estados extendido de cada comunidad $L_k - s_k - s_l$ con $l \neq k$.
- La existencia o ausencia de estas discontinuidades depende estrictamente del valor de Δ_n en cada instante de tiempo.

Cuando se considera el sistema (3-13) y las tasas de intercambio asignadas de acuerdo con la matriz en la Figura 4-1b, el sistema de Filippov en los espacios extendidos $L_k - s_k - s_l$ está compuesto por las soluciones suaves en las sub-regiones $P_{k,j}$ (con $j = 1, 2, \dots, n + 1$) y las soluciones en las regiones de conmutación $\Sigma_{k,j}$ (con $j = 1, 2, \dots, n$).

El sistema de *EDO's* que gobiernan dos sub-regiones consecutivas en el espacio $L_k - s_k - s_l$ está descrita por:

$$\dot{x}_k = \begin{cases} f_{k,j}(x_k) & \text{para } x_k \in P_{k,j}, \\ f_{k,j+1}(x_k) & \text{para } x_k \in P_{k,j+1}. \end{cases} \quad (4-1)$$

Las regiones $P_{k,j}$, $P_{k,j+1}$, y las regiones de conmutación que las separan $\Sigma_{k,j}$ están definidas por :

$$\begin{aligned} \Sigma_{k,j} &= \{x_k : h_{k,j}(x_k) = 0\} \\ &= \{x_k : s_k = u_{k,j}\}, \end{aligned} \quad (4-2)$$

$$\begin{aligned}
P_{k,j} &= \{x_k : h_{k,j}(x_k) > 0\} \\
&= \{x_k : u_{k,j} < s_k < u_{k,j-1}\}, \\
P_{k,j+1} &= \{x_k : h_{k,j}(x_k) < 0\} \\
&= \{x_k : u_{k,j+1} < s_k < u_{k,j}\}.
\end{aligned} \tag{4-3}$$

Las zonas de cruce $\Sigma_{k,j}^c \subset \Sigma_{k,j}$ son los conjuntos de todos los puntos $x_k \in \Sigma_{k,j}$ donde el campo vectorial $P_{k,j}$ y $P_{k,j+1}$ tiene componentes transversales hacia $\Sigma_{k,j}$ con el mismo signo. Entonces, se pueden definir las zonas de deslizamiento $\Sigma_{k,j}^s$ como el complemento de $\Sigma_{k,j}^c$ en $\Sigma_{k,j}$, la cual es atractora si:

$$\nabla h_{k,j}(x_k) \cdot f_{k,j}(x_k) < 0, \nabla h_{k,j}(x_k) \cdot f_{k,j+1}(x_k) > 0, \quad x_k \in \Sigma_{k,j}^s \tag{4-4}$$

y es repulsora si:

$$\nabla h_{k,j}(x_k) \cdot f_{k,j}(x_k) > 0, \nabla h_{k,j}(x_k) \cdot f_{k,j+1}(x_k) < 0, \quad x_k \in \Sigma_{k,j}^s. \tag{4-5}$$

Donde $\nabla h_{k,j}(x_k)$ es el vector gradiente de $h_{k,j}(x_k)$ sobre $\Sigma_{k,j}$.

Se formula la solución genérica de deslizamiento sobre $\Sigma_{k,j}$ a través del método de control equivalente de Utkin [Utkin, 1977]. Este método supone que x_k se mueve de acuerdo con el campo vectorial $f_{k,j}^s$, que es considerado como el promedio de los dos campos vectoriales $f_{k,j}$ y $f_{k,j+1}$ más un control $\theta_{k,j}(x_k) \in [-1, 1]$ en la dirección de la diferencia entre $f_{k,j}$ y $f_{k,j+1}$ tal que:

$$\dot{x}_k = f_{k,j}^s(x_k) \quad \text{para } x \in \Sigma_{k,j}^s, \tag{4-6}$$

donde:

$$f_{k,j}^s(x_k) = \frac{f_{k,j}(x_k) + f_{k,j+1}(x_k)}{2} + \frac{f_{k,j}(x_k) - f_{k,j+1}(x_k)}{2} \theta_{k,j}(x_k). \tag{4-7}$$

Debido a que $f_{k,j}^s$ tiene que ser tangente a $\Sigma_{k,j}$, e.g. $\nabla h_{k,j}(x_k) \cdot f_{k,j}^s(x_k) = 0$, entonces $\theta_{k,j}(x_k)$ se puede definir como:

$$\theta_{k,j}(x_k) = -\frac{\nabla h_{k,j}(x_k) (f_{k,j}(x_k) + f_{k,j+1}(x_k))}{\nabla h_{k,j}(x_k) (f_{k,j+1}(x_k) - f_{k,j}(x_k))}. \tag{4-8}$$

Ahora es posible definir la zona de deslizamiento como

$$\Sigma_{k,j}^s = \{x_k \in \Sigma_{k,j} : |\theta_{k,j}(x_k)| < 1\}, \quad (4-9)$$

cuyos límites a la izquierda y derecha son, respectivamente:

$$\partial\Sigma_{k,j}^- = \{x_k \in \Sigma_{k,j} : \theta_{k,j}(x_k) = -1\}, \quad (4-10)$$

$$\partial\Sigma_{k,j}^+ = \{x_k \in \Sigma_{k,j} : \theta_{k,j}(x_k) = 1\}.$$

Como $\partial\Sigma_{k,j}^-$ y $\partial\Sigma_{k,j}^+$ están localizados en $s_k = \mu_{k,j}$ (en concordancia con la ecuación (4-2)), la solución se puede obtener resolviendo las siguientes ecuaciones algebraicas para $L_{k,j}$:

$$\theta_{k,j}(x_k) + 1 = 0, \quad (4-11)$$

$$\theta_{k,j}(x_k) - 1 = 0.$$

Dando como resultado la expresión analítica de los límites de deslizamiento:

$$\begin{aligned} \partial\Sigma_{k,j}^- &= \frac{\rho_k \mu_{k,j} K_k \phi_k (K_k^2 \mu_{k,j} - K_k T_k - \mu_{k,j}^2 K_k^2 + \mu_{k,j} K_k T_k)}{T_k K_k (C_{l,j} s_l K_l \alpha_l \beta_l \phi_l + \mu_{k,j} K_k \alpha_k \beta_k \phi_k - s_l K_l \beta_l \phi_l)}, \\ \partial\Sigma_{k,j}^+ &= \frac{\rho_k \mu_{k,j} K_k \phi_k (K_k^2 \mu_{k,j} - K_k T_k - \mu_{k,j}^2 K_k^2 + \mu_{k,j} K_k T_k)}{T_k K_k (C_{l,j+1} s_l K_l \alpha_l \beta_l \phi_l + \mu_{k,j} K_k \alpha_k \beta_k \phi_k - s_l K_l \beta_l \phi_l)}. \end{aligned} \quad (4-12)$$

4.2. Computaciones numéricas

A continuación se muestran algunas simulaciones numéricas en el tiempo y en los planos de estado extendidos $L_k - s_k - s_l$ al considerar la configuración de parámetros de los tres casos estudiados en el Capítulo 3. El intercambio comercial discontinuo lleva a que aparezcan nuevos parámetros en el sistema que son diferentes a las tasas de intercambio C_k que surgieron por el acople de las comunidades. Estos parámetros son:

1. El número de regiones de conmutación n , que es igual para las dos comunidades.
2. El umbral $u_{k,n}$ donde se ubica la región de conmutación $\Sigma_{k,n}$. Conociendo este valor y considerando que los umbrales $u_{k,j}$ son equidistantes (hecho que se asumió por simplicidad), se conocen automáticamente los valores de $u_{k,j}$.
3. La tasa de intercambio máxima por comunidad C_k . Estas tasas permiten asignar el valor de las tasas de intercambio parciales $C_{k,j}$ de acuerdo con el valor de Δn , ver Figura 4-1b. Por simplicidad, se asume que las diferencias entre $C_{k,j}$ y $C_{k,j+1}$ son iguales, por lo tanto, $C_k = nC_{k,j}$.

Por efectos prácticos, las simulaciones se realizaron fijando los valores de C_k en $C_1 = 0.72$ y $C_2 = 0.89$. Lo que reduce el número de parámetros de control a dos: n y $u_{k,n}$.

Como una primera aproximación, en este trabajo se consideran dos configuraciones de n y $u_{k,n}$.

Configuración 1 $n = 1$ y $u_{k,n}=0.24$. Bajo esta configuración el sistema presenta una sola región de conmutación $\Sigma_{k,1}=0.24$. Además, como la asignación de $C_{k,j}$ depende del valor de Δn y no del valor de s_k , no es posible asignar sus valores sobre el plano de estados, pero si se puede definir el valor de $C_{k,j}$ de acuerdo con el valor de Δn . Como $\max(\Delta n) = n$, se tiene que $C_{k,1}=1$ si $\Delta n = 1$ y si $\Delta n = 0$ entonces $C_{1,2}=0.72$ y $C_{2,2}=0.89$.

Configuración2 $n = 4$ y $u_{k,n}=0.2$. Bajo esta configuración el sistema presenta cuatro regiones de conmutación equidistantes. Si $u_{k,n}/n$ es la distancia que separa dos umbrales continuos, entonces $\Sigma_{k,1}=0.8$, $\Sigma_{k,2}=0.6$, $\Sigma_{k,3}=0.4$ y $\Sigma_{k,4}=0.2$. Además, como la diferencia entre $C_{k,j}$ y $C_{k,j+1}$ es la constante $(1 - C_k)/(n + 1)$, la asignación de $C_{k,j}$ se hace por medio de la matriz en la Figura 4-2.

1	0.93	0.86	0.79	0.72
0.9725	1	0.93	0.86	0.79
0.945	0.9725	1	0.93	0.86
0.9175	0.945	0.9725	1	0.93
0.89	0.9175	0.945	0.9725	1

Figura 4-2: Asignación de tasas de intercambio para $n = 4$, $C_1 = 0.72$ y $C_2 = 0.89$.

A continuación de realizarán simulaciones numéricas para estas dos configuraciones, pero considerando las variaciones del parámetro α_2 que se hicieron en los diferentes casos del Capítulo 3. Esto con el objetivo de evaluar el efecto que tiene el valor de α_2 en las soluciones del sistema discontinuo.

4.2.1. Caso de referencia - intercambio discontinuo

El caso referencia se planteó inicialmente en la sección 3.4, considera los valores de los parámetros en la Tabla 3-1. Si se asume que los parámetros del sistema discontinuo son los

presentados en la **Configuración 1** y **Configuración 2**, se obtienen los resultados de las Figuras 4-3 y 4-4, respectivamente.

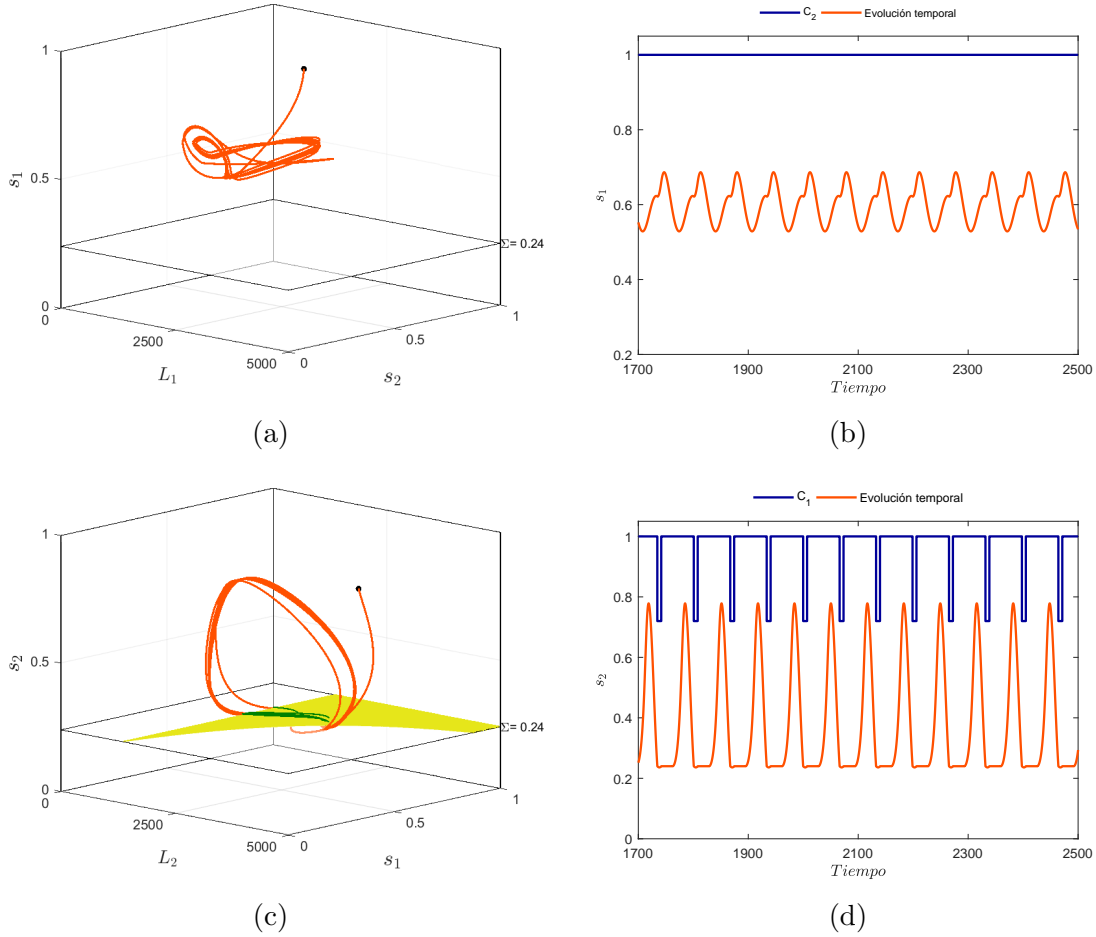


Figura 4-3: Comportamiento del sistema discontinuo para una superficie de conmutación. La configuración es $\alpha_2 = 0.0001$, $C_1=0.72$, $C_2=0.89$, $n = 1$ y $\Sigma_{k,1} = 0.24$.

Lo primero que se observa al ver las simulaciones de la Figura 4-3 es que el nivel de recursos s_1 no cruza la región de conmutación, Figura 4-3a, mientras que, s_2 no solo si lo hace, sino que también desliza sobre la región de conmutación $\Sigma_{2,1}^s$ de color amarillo, ver Figura 4-3c. En la evolución temporal, se entiende el proceso de cooperación a través de la asignación de las tasas de intercambio $C_{k,j}$ y de cómo esta asignación define la dinámica del sistema. Por ejemplo, en el proceso de intercambio la comunidad 1 recibe ayuda de la comunidad 2 siempre y cuando s_1 se encuentre en una sub-región por debajo de la sub-región en la que se encuentra s_2 . Bajo esta configuración, ésto nunca ocurre, y es esta la razón por la que C_2 en la Figura 4-3b permanece constante en el valor de 1. Por otro lado, la comunidad 2 recibe ayuda de la comunidad 1 siempre y cuando s_2 se encuentre una sub-región por debajo de

la sub-región en la que se encuentra s_1 . Al observar la Figura 4-4d se observa que la ayuda ocurre de forma intermitente con un patrón de comportamiento periódico.

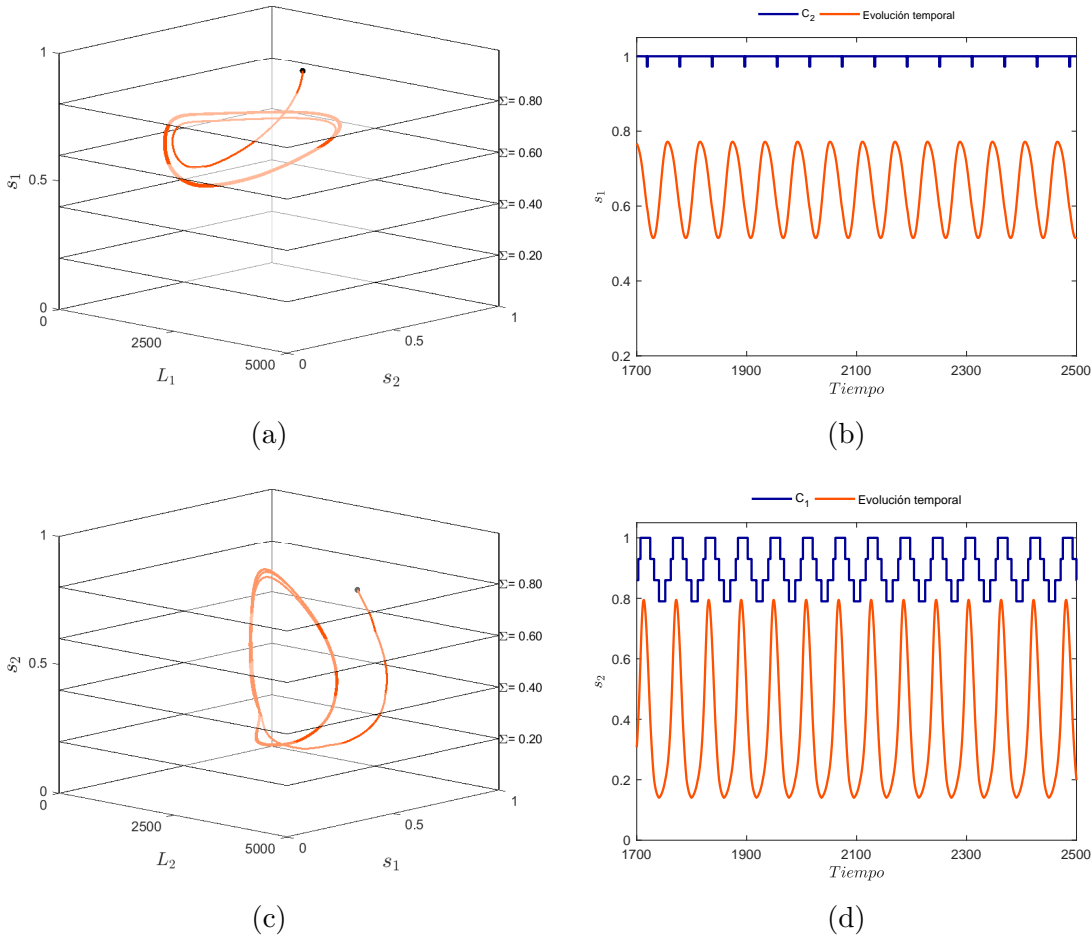


Figura 4-4: Comportamiento del sistema discontinuo para una superficie de conmutación. La configuración es $\alpha_2 = 0.0001$, $C_1=0.72$, $C_2=0.89$, $n = 4$ $\Sigma_{k,4}=0.2$.

Cualitativamente para ambas configuraciones, el sistema se comporta de manera similar presentando comportamiento oscilatorio. Al considerar más regiones de conmutación ($n = 4$), aparecen de forma periódica, momentos en los que la comunidad 1 requiere ayuda de la comunidad 2, evento que no sucede al considerar $n = 1$.

La segunda configuración para el caso de referencia da como resultado los diagramas en la Figura 4-4. En este caso se observa que hay múltiples regiones de conmutación involucradas en la solución del sistema, Figuras 4-4a y 4-4c, que ocasionan que ambas comunidades requieran ayuda en algún momento, la 2 más que la 1. Aunque no existe deslizamiento, se observa en la Figura 4-4d que emerge un comportamiento escalonado en la asignación de la

ayuda brindada por la comunidad 1 a la comunidad 2.

4.2.2. Caso 1 - intercambio discontinuo

Al igual que en el caso del intercambio comercial continuo, en el caso 1, se evalúa el comportamiento del sistema cuando se considera que la tecnología usada para extraer los recursos renovables en la comunidad 2 es menor al valor del caso de referencia estudiado en la sección 3.4. El valor tomado es $\alpha_2 = 0.00009$.

A manera de comparación con el caso de referencia, se realizan las mismas simulaciones y se evalúan los cambios que sufre el sistema para el nuevo valor de α_2 . De nuevo, s_1 no alcanza la región de conmutación (Figura 4-5a) y por lo tanto, no recibe ayuda de la comunidad 2 (Figura 4-5b), mientras que, s_2 alcanza una órbita periódica con deslizamiento (Figura 4-5c), tal y como ocurre en el caso de referencia. Sin embargo, al observar la evolución temporal de la variable s_2 , se observa que a pesar que alcanza la región de conmutación y se desliza sobre ella, en ningún instante de tiempo se activa la colaboración por parte de la comunidad 1. Esto se debe a que la frontera de conmutación es alcanzada pero no es atravesada, ver Figura 4-5d.

Los cambios que ocurren al considerar $n = 4$, son principalmente en la amplitud de las órbitas periódicas con respecto a la amplitud de las órbitas del caso de referencia, pues al extraer los recursos de forma menos eficiente se observan órbitas con amplitudes más pequeñas. La asignación de las tasas de intercambio para ambas comunidades tienen comportamiento similar al caso de referencia, Figura 4-6.

4.2.3. Caso 2 - intercambio discontinuo

En este último caso se considera que la tecnología para extracción de recursos de la comunidad 2 es mayor con respecto al caso de referencia. Específicamente, se toma el valor de $\alpha_2 = 0.00011$. Al considerar la primera configuración, se observa un comportamiento similar al de los dos casos anteriores: s_1 no alcanza la región de conmutación (Figura 4-7a) mientras que s_2 no solo la alcanza sino que la cruza para luego deslizar sobre ella, ver Figura 4-7c. No obstante, hay cambios notables en la evolución temporal de s_k como la aparición de una órbita 2-periódica sin deslizamiento, Figura 4-7b, y de una órbita 2-periódica con deslizamiento, Figura 4-7d.

Finalmente, para la segunda configuración, se obtiene comportamiento escalonado en la asignación de las tasas de intercambio y órbitas 2-periódicas en el estado estacionario de s_k como se puede apreciar en la Figura 4-8.

De esta manera, es notoria la riqueza dinámica que el sistema adquiere con la partición pro-

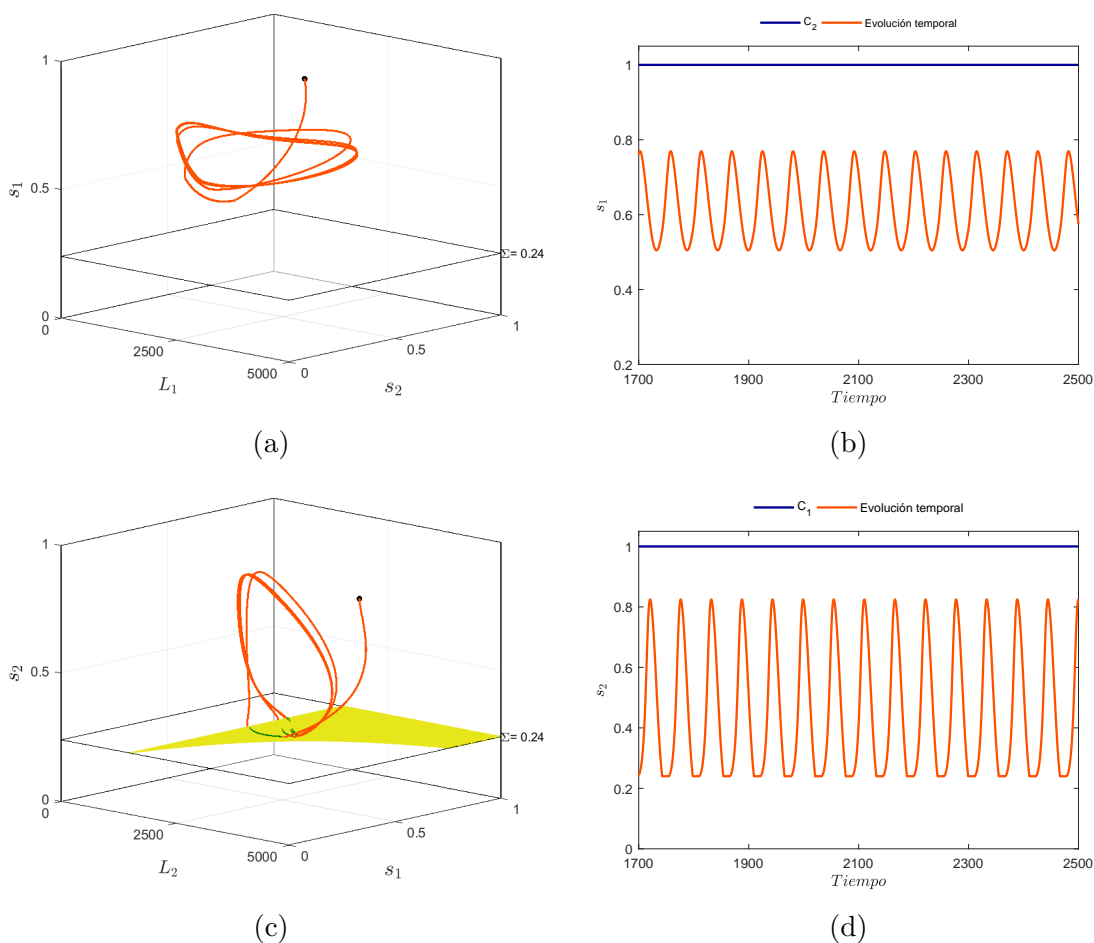


Figura 4-5: Comportamiento del sistema discontinuo para una superficie de conmutación. La configuración es $\alpha_2 = 0.00009$, $C_1=0.72$, $C_2=0.89$, $\Sigma = 0.24$.

puesta del espacio de estados, en el que logran reconocerse comportamientos que, aunque se esperaría ver en las aplicaciones, no habían sido identificadas en el contexto de problemas no teóricos, y que, adicionalmente, son más naturales y representativos de la manera como se toman las decisiones en los sistemas socio-ecológicos: intervenciones y controles no ocurren como un continuo sino como un prendido y apagado del sistema.

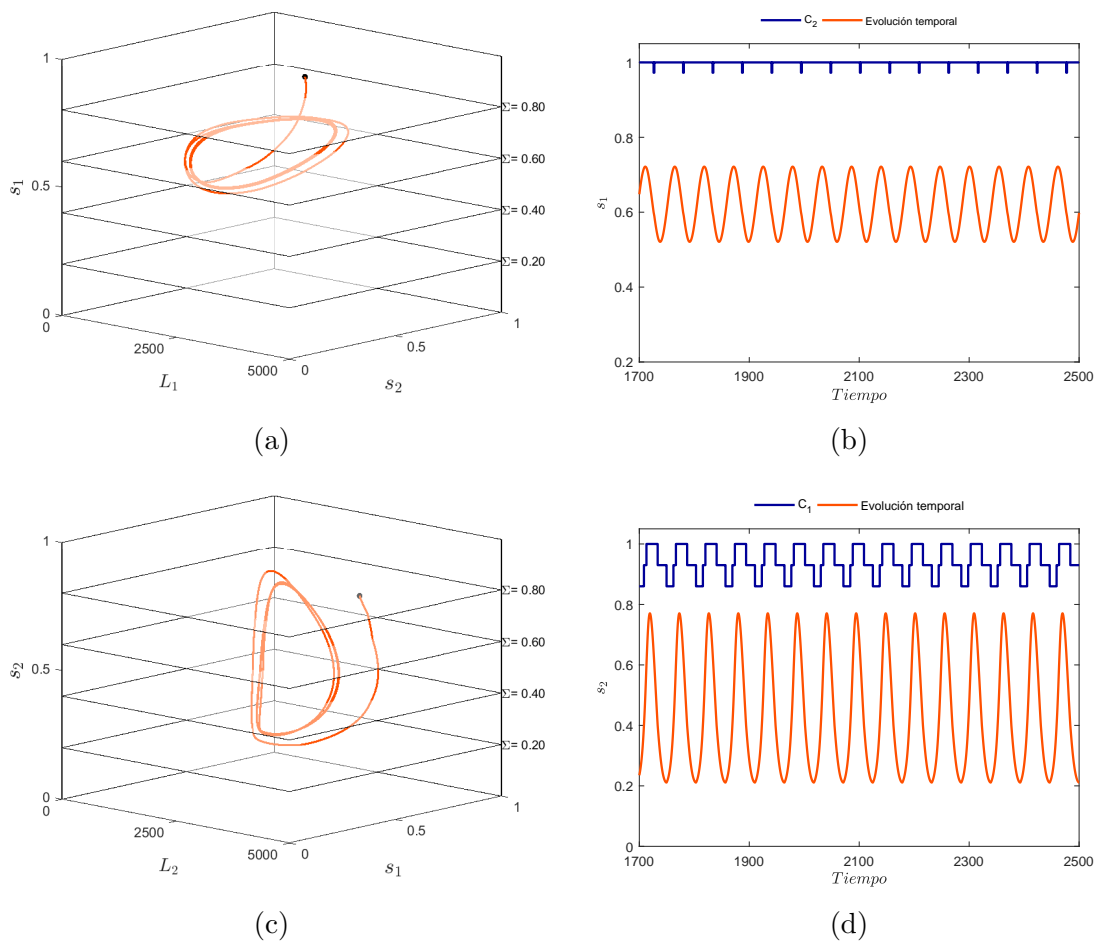


Figura 4-6: Comportamiento del sistema discontinuo para una superficie de conmutación. La configuración es $\alpha_2 = 0.00009$, $C_1 = 0.72$, $C_2 = 0.89$, $\Sigma = 0.2$.

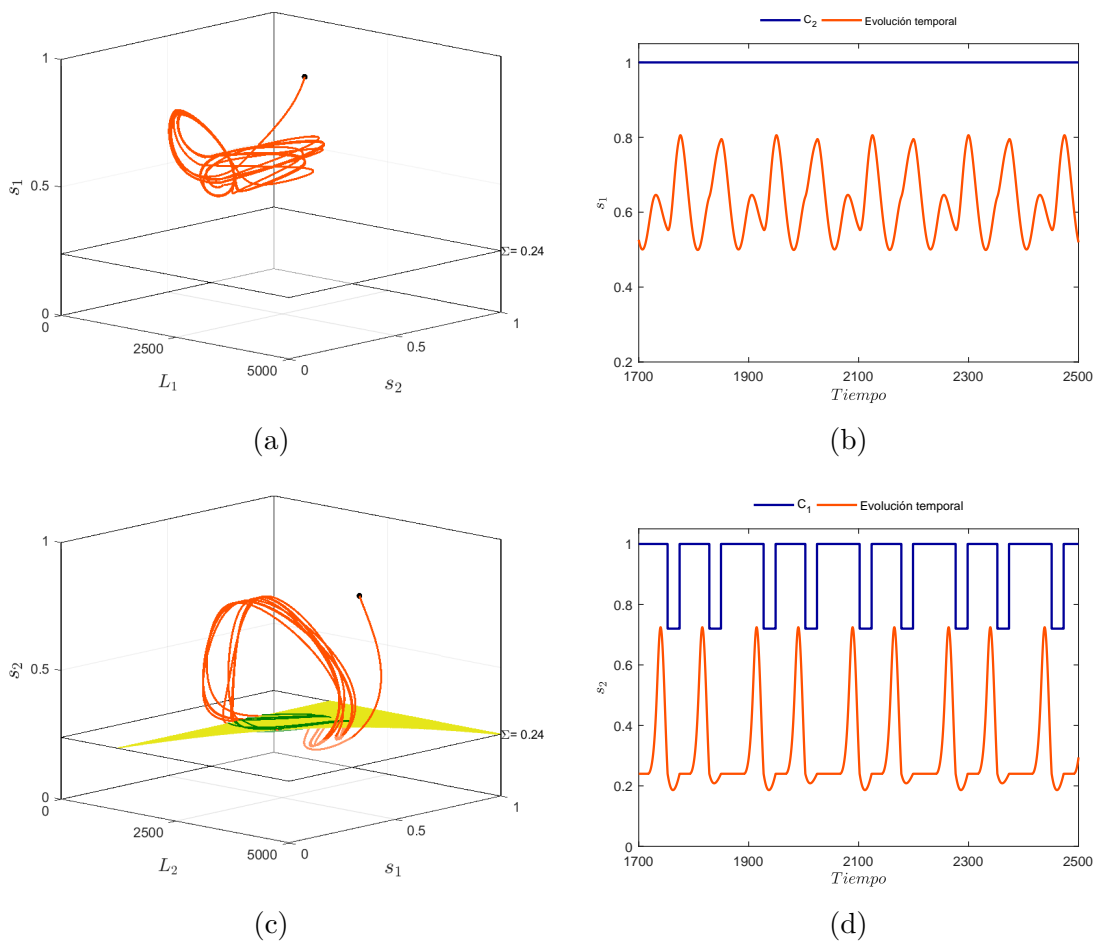


Figura 4-7: Comportamiento del sistema discontinuo para una superficie de conmutación. La configuración es $\alpha_2 = 0.00011$, $C_1=0.72$, $C_2=0.89$, $\Sigma = 0.24$.

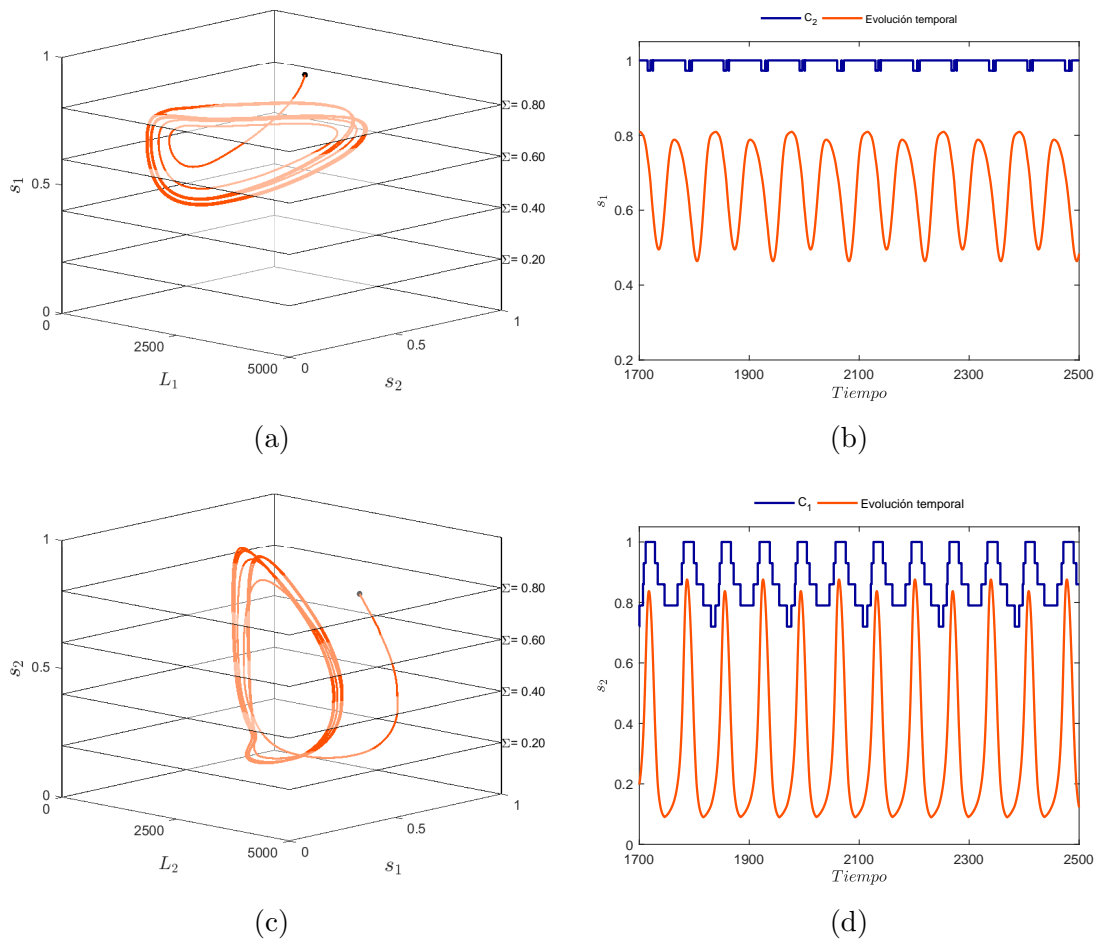


Figura 4-8: Comportamiento del sistema discontinuo para una superficie de conmutación. La configuración es $\alpha_2 = 0.00011$, $C_1 = 0.72$, $C_2 = 0.9$ $\Sigma = 0.2$.

5 Conclusiones, trabajos futuros

5.1. Conclusiones

Se modeló usando Dinámica de Sistemas un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que representa la relación entre la población y sus recursos renovables y se desarrolló un análisis de bifurcaciones completo en codimensión 1 y 2 que permitió identificar todos los escenarios posibles, en el contexto de la sostenibilidad, del estado estacionario. Se concluye que un análisis de este tipo, es en sí, un análisis cualitativo ya que las regiones comprendidas por las diferentes curvas de bifurcaciones permiten identificar el tipo de estado estacionario que se podría alcanzar más no da cuenta de la velocidad con que es alcanzado o de propiedades dinámicas del sistema como son la amplitud y frecuencia de las órbitas periódicas.

Se propuso una medida de la sostenibilidad basada en la resiliencia del nivel de recursos renovables con respecto al nivel de población, considerando que existe una cuenca de atracción de resiliencia en la que los estados permanecen positivos bajo perturbaciones en las condiciones iniciales y en los valores de los parámetros. Se determinó que esta medida de la sostenibilidad complementaria a los diagramas de bifurcaciones ya que puede dar cuenta de la pérdida (ganancia) de sostenibilidad cuando el sistema es sometido a cambios de los parámetros.

A través de simulaciones numéricas se demostró la existencia bifurcaciones en uno y dos parámetros para el modelo propuesto en [D'Alessandro, 2007]. Se realizó una continuación de equilibrio para el parámetro β y se observó que uno de los dos puntos de equilibrio no-triviales siempre se comporta como una silla, mientras que el otro pierde estabilidad a medida que β aumenta dando origen a ciclos límite estables (oscilaciones no-lineales) por la ocurrencia de una bifurcación de Hopf supercrítica. Luego, se realizó la continuación de la bifurcación de Hopf en dos parámetros ($\beta - \lambda$) y se calculó el primer coeficiente de Lyapunov l_1 para cada punto de esta curva, lo que permitió encontrar la bifurcación de Hopf generalizada GH en la cual l_1 cambia de signo. Concretamente, se demostró que la bifurcación de Hopf puede ser subcrítica o supercrítica dependiendo de los valores de los parámetros. De la continuación de puntos de equilibrio no-triviales se concluyó que su existencia o ausencia puede ser explicada por la ocurrencia de una bifurcación silla-nodo. Con respecto a las bifurcaciones globales, un segundo ciclo límite bifurca de una órbita homoclínica creando una

nueva familia de oscilaciones no-lineales. Se presentó el mecanismo que lleva a la ocurrencia de esta bifurcación, la coexistencia de las dos familias de ciclos límite, y su desaparición a través de la colisión de ciclos límite *LPC*. Finalmente, se construyó un diagrama de bifurcaciones en dos parámetros completo para diferentes duplas de parámetros resultando diagramas dos-paramétricos que definen regiones caracterizadas por diferentes tipos de conjuntos invariantes que caracterizan diferentes escenarios de sostenibilidad.

Se estableció la evolución temporal a largo plazo caracterizada por la coexistencia de población y recursos renovables como la única condición para escenarios de sostenibilidad. Bajo este supuesto, el sistema (2-12) presentó diferentes regiones de sostenibilidad delimitadas por diferentes configuraciones de parámetros, e.g. puntos de equilibrio y ciclos límite. Un punto de equilibrio estable sería el estado estacionario perfecto donde la población vive en armonía con la naturaleza consumiendo únicamente lo que ésta podría regenerar por sí misma. Además, de acuerdo a los registros históricos de algunas civilizaciones que manifestaron periodos de abundancia y escasez, se puede dar explicación matemática a los ciclos límite que bifurcaron ya sea por una bifurcación de Hopf o una bifurcación homoclínica. Esto nos puede dar un entendimiento intuitivo acerca del efecto positivo o negativo que ejercen sobre el sistema los valores de los parámetros sobre el estado estacionario. Las regiones de sostenibilidad se trazaron por diferentes curvas de bifurcaciones uno-paramétricas, por lo tanto, las regiones de no-sostenibilidad quedaron automáticamente definidas.

Se construye sistémicamente un modelo que representa la cooperación económica (o intercambio comercial) entre dos comunidades similares que pueden ser modeladas de manera aislada (ausencia de intercambio) por el mismo sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Se planteó que el acople entre estas dos comunidades debía tener dos propósitos principales: el flujo de recursos extraídos dentro de cada comunidad y la protección de una cantidad de recursos por parte de la comunidad receptora, igual a la cantidad de recursos recibidos. Bajo estas consideraciones, se estudiaron diferentes casos en los que: había ausencia de intercambio, la cooperación en una dirección, y la cooperación existe en las dos direcciones. Se concluyó que de manera general, la cooperación afecta positivamente la sostenibilidad de las comunidades garantizando que las poblaciones mejoren sus patrones de producción y consumo.

El sistema acoplado resultante del intercambio económico es 4-dimensional, y fenómenos no lineales como cuasi-periodicidad y caos pueden ocurrir. Para hacer el análisis de estado estacionario completo se realizaron continuaciones de puntos de equilibrio y ciclos límite, así como simulaciones numéricas utilizando mapas de Poincaré. Se concluyó que estos dos tipos de análisis dan resultados diferentes pero complementarios al evaluar todos los escenarios prospectivos de sostenibilidad en espacios dos-paramétricos. Se prestó especial atención en los mapas de Poincaré ya que permiten identificar los atractores a los que tiende el sistema

cuando se varían las tasas de intercambio, estos resultados arrojaron escenarios, como cuasi-periodicidad y caos, que no son fáciles de identificar por continuación.

Se consideró que además de intercambio continuo, este también podía ocurrir de forma discontinua. Se clasificaron las comunidades en comunidad de soporte (tiene el nivel más alto de recursos) y comunidad necesitada de acuerdo al nivel de recursos que cada una de ellas tienen en un instante de tiempo t , únicamente la comunidad necesitada recibe ayuda de la comunidad de soporte, lo que hace que la cooperación sea unidireccional. Se particionó el espacio de estados de cada comunidad en diferentes sub-regiones en las cuales las tasas de intercambio se asignan de acuerdo a la diferencia en el número de sub-regiones en la que se encuentra el nivel de recursos de la comunidad necesitada y de la comunidad de soporte. Bajo esta consideración el sistema continuo se convirtió en un sistema de Filippov con múltiples regiones de conmutación en cada uno de los espacios de estados. Los resultados son concluyentes sobre el efecto que tiene este tipo de cooperación discontinua y los fenómenos no suaves como el deslizamiento, en la sostenibilidad de las comunidades involucradas.

De forma general, se concluye que la dimensión del sistema determina la metodología a usarse en el análisis de la sostenibilidad de sistemas socio-ecológicos autónomos. Si el sistema es dos dimensional, se puede hacer una caracterización de todos los escenarios de sostenibilidad a partir de diagramas de bifurcaciones en 1 y 2 parámetros, considerando la estabilidad de los puntos de equilibrio y de las órbitas periódicas del sistema. Como caso particular, a partir de bifurcaciones de Hopf supercríticas se crean familias de ciclos límite estables alrededor de un punto de equilibrio inestable, pero si, las bifurcaciones son subcríticas, las órbitas periódicas que se generan son inestables y el punto de equilibrio asociado es estable. Ahora, si la dimensión del sistema es mayor a 2, los resultados por continuación pueden dar resultados parciales, pues generalmente aparecen fenómenos no-lineales como cuasi-periodicidad y caos que son difíciles de estudiar por medio de continuación y, por lo tanto, se hace necesario complementar los análisis con mapas de Poincaré.

5.2. Trabajo futuro

Como parte final del presente trabajo, se plantean a continuación algunas ideas en pro de robustecer las metodologías, las variables y la aplicabilidad del modelado a través de sistemas de ecuaciones diferenciales originarias como herramienta para la valoración de la sostenibilidad. Primero se plantean aquellas ideas relacionadas directamente con este trabajo seguido de algunos retos que permitirían llevar este análisis a paisajes reales con niveles de desagregación más alto.

5.2.1. Ideas futuras del presente trabajo

Medida más robusta de la resiliencia potencial (R_p): en el Capítulo 2 se propuso una medida para la resiliencia como la relación entre el área total del espacio de estados (en un sistema planar) y el área de la cuenca de atracción de resiliencia. Con esta medida es posible cuantificar el efecto que tienen las perturbaciones de los parámetros del sistema sobre el tamaño de la cuenca de atracción. No obstante, esta medida no se tiene en cuenta el tipo de estado estacionario al que tiende el sistema: punto de equilibrio o ciclo limite, y tampoco tiene en cuenta la rapidez con la que se alcanza dicho estado estacionario. Con lo anterior, se propone involucrar dentro de esta medida de la resiliencia aspectos como la amplitud y la frecuencia de las oscilaciones así como el tiempo en el que es alcanzado el estado estacionario de manera tal que la medida no dependa únicamente del conjunto de condiciones iniciales sino también de propiedades dinámicas del sistema.

Meta-poblaciones conectadas: en el Capítulo 3 se acoplaron dos comunidades modeladas con sistemas de *EDO's* similares pero con diferentes parámetros. Esta consideración de dos comunidades que interactúan entre si puede ser el resultado de la desagregación de una única comunidad considerada inicialmente homogénea, en dos poblaciones con diferentes características, para este caso, la explotación de diferentes recursos. Esta desagregación le da heterogeneidad al modelo permitiendo el estudio particular de meta-poblaciones como componentes de una población total. Si se considera por ejemplo la estructura generalizada del modelo (3-13) para N comunidades (meta-poblaciones) que interactúan entre si, se obtiene el sistema (5-1)

$$\begin{cases} \dot{L}_k = \left(C_k \phi_k \alpha_k \beta_k S_k + \sum_{l \neq k} (1 - C_l) \phi_l \alpha_l \beta_l S_l - \sigma_l \right) L_k, \\ \dot{S}_k = \rho_k \left(\frac{S_k}{T_k} - 1 \right) \left(1 - \frac{S_k}{K_k} \right) S_k - \alpha_k \beta_k L_k \left(S_k - \frac{\sum_{l \neq k} (1 - C_l) \phi_l \alpha_l \beta_l S_l}{\phi_k \alpha_k \beta_k S_k} \right). \end{cases} \quad (5-1)$$

Donde $k, l = 1, 2, \dots, N$. Si además se considera que existe la posibilidad de que todas las comunidades interactúen entre sí, como en el caso de las cuatro comunidades que se muestra en la Figura 5-1, se obtiene el modelo de cuatro meta-poblaciones conectadas y que posiblemente hacen parte de una única población. Como trabajo futuro se plantea involucrar más de 2 poblaciones y realizar la aproximación matemática utilizada en este trabajo.

Análisis de estado estacionario del sistema discontinuo: el estudio de los escenarios prospectivos de sostenibilidad a través del análisis de estado estacionario usado en el

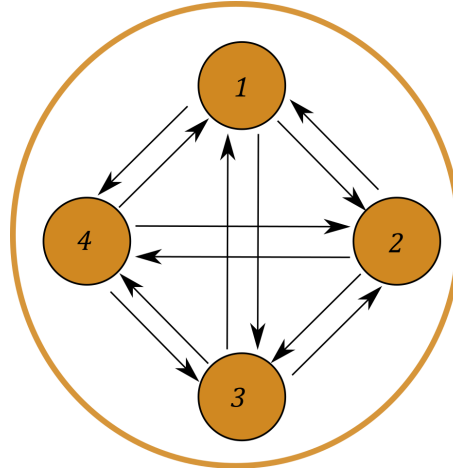


Figura 5-1: Red de cooperación económica entre 4 comunidades.

Capítulo 3 permitió construir diagramas dos-paramétricos en los cuales, además de identificar las zonas de no-sostenibilidad se pueden caracterizar los diferentes estados estacionarios alcanzados. El Capítulo 4 se centró principalmente en la descripción del modelo discontinuo y limitó el análisis numérico a simulaciones en el espacio de estados para diferentes configuraciones de las regiones de conmutación. Como trabajo futuro se plantea hacer un análisis de estado estacionario similar al del modelo continuo que permita contrastar los resultados de la cooperación continua y la cooperación discontinua. Para esto, es necesario desarrollar los algoritmos de mapeo de celdas que permitan determinar la periodicidad de las órbitas en sistemas de Filippov.

Análisis de Viabilidad: el análisis de estado estacionario a partir de la teoría de bifurcaciones o por simulación permite determinar las regiones en el espacio paramétrico en el que las variables de estado se aproximan a estados estacionarios de sostenibilidad (escenarios de sostenibilidad) donde ninguna de las variables (dimensiones) alcanza el cero absoluto sin considerar los valores de las variables en algún instante de tiempo. Sin embargo, en la práctica se hace necesario considerar restricciones que se desean cumplir y que están ligadas a las trayectorias que pueden seguir las variables cuando son perturbados los parámetros del sistema. Como resultado muy preliminar se plantea el siguiente problema: se desea conocer cuales son las configuraciones de las tasas de intercambio C_k que permiten que para todo tiempo t el nivel de recursos de cada comunidad este por encima del 50 % dada una condición inicial fija $x_0 = (L_{1,0}, s_{1,0}, L_{2,0}, s_{2,0})$. Los resultados se presentan en la Figura 5-2.

Como trabajo complementario al realizado en esta tesis, se plantea realizar un análisis de viabilidad riguroso tanto en los sistemas continuos como discontinuos que permitan orientar futuros trabajos hacia mejores herramientas matemáticas para la toma de decisiones.

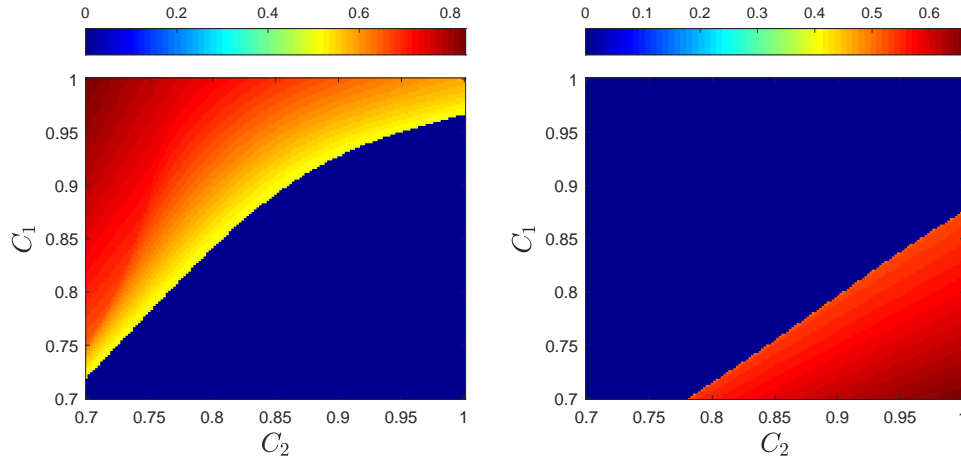


Figura 5-2: Diagrama dos-paramétrico donde se diferencian las configuraciones de C_k que permiten un nivel mayor del 50% de los recursos para cada comunidad.

5.2.2. Retos para el estudio de paisajes reales

En teoría todos los métodos de continuación y de simulación pueden ser implementados en sistemas de N dimensiones. Si es el caso de paisajes reales, el grado de detalle o nivel de desagregación al que se desea llegar con el modelo puede influir en la dificultad al implementar un análisis numérico similar al que se desarrollo en este trabajo e incluso puede llevar a considerar otras técnicas de modelamiento diferentes a las EDO's como lo son las redes complejas para estudiar las dinámicas sociales dentro del paisaje. Para llevar esta aproximación matemática de la sostenibilidad a paisajes reales se plantean las siguientes consideraciones:

Las tres dimensiones de la sostenibilidad: el termino sostenibilidad tiene implícita la variable tiempo pues hace referencia a que sus tres dimensiones son dinámicas y deben garantizarse o perdurar en el tiempo, por esta razón, un estudio de sostenibilidad en paisajes reales (urbanos o rurales) debe involucrar variables representativas de estas dimensiones. Por ejemplo, se pueden considerar la productividad (dimensión económica), la multifuncionalidad (dimensión ambiental) y el bienestar (dimensión social).

Nivel de desagregación: por ejemplo, si se considera la productividad total en los sectores primario, secundario y terciario dentro del paisaje es posible hacerlo a través de ecuaciones de producción Cobb-Douglas (como se hizo en el Capítulo 2). Pero si por el contrario, lo que se desea es obtener un modelo más desagregado que incluya por ejemplo las diferentes cadenas productivas dentro del sector primario, es posible que la dimensión del sistema de EDO's aumente a un punto tal que conseguir datos para calibrar el modelo se convierta en una gran dificultad. Algo similar puede ocurrir con la multifuncionalidad al considerar niveles de desagregación que involucren los cambios de cobertura, la oferta de servicios ecosistémicos, la conectividad, la riqueza, el

endemismo y la transformación de la biodiversidad. Al considerar mayor nivel de desagregación cabe la posibilidad de utilizar diferentes marcos de modelado especialmente para el componente social donde las relaciones e interacciones entre los diferentes actores son determinantes de las acciones que llevan a la sostenibilidad. Dentro de estos marcos están los modelos basados en agentes, la teoría de juegos o las redes complejas que requieren de las características de los actores (o agentes). Modelos con niveles de desagregación mas altos permiten entender dinámicas mas detalladas y especificas de lo que pasa en los paisajes, pero existen dos grandes retos: la disponibilidad de datos y la implementación numérica y computacional para su análisis. En particular, los modelos propuestos y analizados en este trabajo no tienen un grado de desagregación alto por lo que poseen capacidad limitada para dar cuentas sobre las relaciones que afectan la biodiversidad, por esta razón, se propone como trabajo futuro involucrar niveles de desagregación que permitan entender las relaciones que existen entre la biodiversidad, la sociedad y los sectores productivos.

Conexión entre paisajes: los paisajes no se encuentran aislados. Aunque puede ser una primera aproximación estudiarlos de esa manera, es importante considerar las conexiones entre ellos. Existe el desplazamiento de personas, el comercio, las diferentes coberturas, entre muchos otros factores que hacen que los sistemas de EDO's que modelan un paisaje estén conectados con los paisajes que lo rodean e incluso con otros que no. Si se hace por ejemplo un estudio de sostenibilidad usando está aproximación matemática en una región con un número elevado de paisajes, se puede obtener un sistema de alta dimensión que desde el punto de vista numérico puede presentar muchas dificultades sobre todo para el análisis de bifurcaciones. Lograr esta conexión entre paisajes a través de modelos de *EDO's* es un reto importante ya que permitiría no solo la valoración de las dinámicas propias del paisaje y de las interacciones con los demás, sino también la espacialización de los resultados.

6 Apéndices

.1. Estabilidad del los puntos de equilibrio del sistema planar

En este apéndice se presenta el análisis de la estabilidad de los puntos de equilibrio no triviales P_5 y P_6 así como del punto de equilibrio trivial P_4 del sistema planar (2-12). Para hacer esto, se utiliza el método indirecto de Lyapunov [Khalil, 2002] y el teorema de Hartman-Grobman. En el sentido de Lyapunov, un equilibrio es asintóticamente estable si todas las trayectorias que empiezan cerca permanecen cerca y es hiperbólico si su matriz Jacobiana no tiene valores propios con parte real cero. Si se asume que en una vecindad pequeña de un equilibrio hiperbólico el sistema no-lineal (2-12) se comporta cualitativamente equivalente a un sistema lineal, el sistema no-lineal puede ser escrito como un sistema linealizado en la forma matricial $\dot{x} = Jx$, donde J es la matriz Jacobiana evaluada en el punto de equilibrio y x es el vector de estados. Debido a que este sistema puede ser expresado como $\dot{x} = f(x(t), \mu)$ con $x(L, S)$ y $\mu \in R$, la matriz Jacobiana se calcula como

$$J = \begin{vmatrix} \frac{df_1}{dL} & \frac{df_1}{dS} \\ \frac{df_2}{dL} & \frac{df_2}{dS} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2\rho\bar{S}K - 3\rho\bar{S}^2 + 2\rho\bar{S}k - \rho kK - \alpha\beta\bar{L}kK}{kK} & -\alpha\beta\bar{S} \\ \phi\alpha\beta\bar{L} & \gamma\lambda(1 - \beta)^\delta \bar{L}^{\delta-1}\delta + \phi\alpha\beta\bar{S} - \sigma \end{vmatrix}, \quad (-1)$$

y los valores propios se calculan resolviendo el polinomio característico de segundo orden

$$|J - \tau I| = 0. \quad (-2)$$

No obstante, las soluciones analíticas tanto del polinomio característico como de los valores propios son muy extensas y llevan a un análisis tedioso. Por esta razón se optó por la descripción general de la estabilidad de los puntos de equilibrio en términos de la traza y el determinante de la matriz Jacobiana evaluada en el punto de equilibrio. Sean la traza y el determinante

$$DET(J) = -\frac{1}{kK} \left(\gamma \left(KL(1-\beta)^{\delta} \bar{L}^{\delta-1} \alpha \beta \delta k \lambda - 2K(1-\beta)^{\delta} \bar{L}^{\delta-1} \bar{S} \delta \lambda \rho + K(1-\beta)^{\delta} \bar{L}^{\delta-1} \delta k \lambda \rho - 2K \bar{S}^2 \alpha \beta \phi \rho + K \bar{S} \alpha \beta k \phi \rho + 3(1-\beta)^{\delta} \bar{L}^{\delta-1} \bar{S}^2 \delta \lambda \rho - 2(1-\beta)^{\delta} \bar{L}^{\delta-1} \bar{S} \delta k \lambda \rho + 3 \bar{S}^3 \alpha \beta \phi \rho - 2 \bar{S} \alpha \beta k \phi \rho - K \bar{L} \alpha \beta k \sigma + 2K \bar{S} \rho \sigma - K k \rho \sigma - 3 \bar{S}^2 \rho \sigma + 2 \bar{S} k \rho \sigma \right) \right), \quad (-3)$$

$$TR(J) = \left(\frac{\rho(1-\frac{\bar{S}}{K})}{k} - \frac{\rho(\frac{\bar{S}}{k}-1)}{K} \right) \bar{S} + \rho \left(\frac{\bar{S}}{k} - 1 \right) \left(1 - \frac{\bar{S}}{K} \right) - \alpha \beta \bar{L} + \gamma \lambda (1-\beta)^{\delta} \bar{L}^{\delta-1} (\delta-1) + \gamma \left(\lambda (1-\beta)^{\delta} \bar{L}^{\delta-1} + \phi \alpha \beta \bar{S} - \sigma \right). \quad (-4)$$

El polinomio característico de J es la ecuación cuadrática

$$\tau^2 - TR\tau + DET = 0, \quad (-5)$$

cuyas soluciones corresponden a los valores propios

$$\tau_{1,2} = \frac{TR \pm \sqrt{TR^2 - 4DET}}{2}. \quad (-6)$$

La estabilidad de los puntos de equilibrio interno no triviales P_5 y P_6 depende tanto del signo de TR como del signo del discriminante $TR^2 - 4DET$, es así que se tienen las siguientes opciones

- Si $TR \neq 0$ y $TR^2 - 4DET < 0$, existe un par de valores propios complejos conjugados. El punto de equilibrio es un foco inestable si $TR > 0$ y es un foco estable si $TR < 0$.
- Si $TR \neq 0$ y $TR^2 - 4DET > 0$, existe un par de valores propios reales. El punto de equilibrio es un nodo inestable si $\tau_1, \tau_2 > 0$, un nodo estable si $\tau_1, \tau_2 < 0$, o un punto de silla si $\tau_1 \tau_2 < 0$.
- Si $TR = 0$ y $DET > 0$, existe un par de valores propios puros imaginarios. En este caso existe una bifurcación de Hopf.
- Si $TR = 0$ y $DET = 0$, existe una bifurcación Bodganov-Takens.

.1.1. Estabilidad del equilibrio trivial

Se analiza la estabilidad del punto de equilibrio trivial P_4 cuyas coordenadas son

$$P_4 = \left(\left(\frac{\lambda(1-\beta)^\delta}{\sigma} \right)^{1/(1-\delta)}, 0 \right).$$

Primero se evalúa la matriz Jacobiana (-1) en estas coordenadas, luego se resuelve el polinomio característico (-2) dando como resultado los valores propios

$$\begin{aligned} \tau_1 &= -\left(\frac{\lambda(1-\beta)\delta}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\delta-1}} \alpha\beta - \rho, \\ \tau_2 &= \gamma\lambda(1-\beta)^\delta \left(\left(\frac{\lambda(1-\beta)}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\delta-1}} \right)^{\delta-1} \delta - \sigma. \end{aligned} \quad (-7)$$

Dado que todos los parámetros del sistema son positivos, el análisis de la estabilidad de este punto de equilibrio se centra en el valor que podrían tomar los parámetros β y δ ya que son estos los únicos que podrían cambiar el signo de τ_1, τ_2 . De las ecuaciones de los valores propios (-7) es fácil verificar que no es posible evaluar τ_1, τ_2 en $\delta = 1$, por lo tanto, se restringe a $\delta \in [0, 1)$.

- Si $\beta = 1$, $\tau_1 = -\rho$ y $\tau_2 = -\sigma$.
- Si $\beta = 0$, $\tau_1 = -\rho$ y $\tau_2 = -\left(\left(\frac{\lambda}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\delta-1}} \right)^{\delta-1} \delta - \sigma$ que es negativo para cualquier $\delta \in [0, 1)$.
- Si $\delta = 0$, $\tau_1 = -\frac{\lambda\alpha\beta}{\sigma} - \rho$ que siempre es negativo y $\tau_2 = -\sigma$.

Por lo tanto se concluye que el punto de equilibrio no trivial P_4 siempre es un nodo estable.

.2. Estabilidad de Puntos de equilibrio del sistema acoplado

En este apéndice se analiza la estabilidad de los puntos de equilibrio internos para las comunidades acopladas (3-13) y también para las comunidades aisladas (3-14). Estos sistemas también se pueden expresar como $\dot{x} = f(x(t), \mu)$ con $x(S_1, L_1, S_2, L_2)$ y $\mu \in R$, en este caso la matriz Jacobiana esta dada por

$$J = \begin{vmatrix} \frac{df_1}{dS_1} & \frac{df_1}{dL_1} & \frac{df_1}{dS_2} & \frac{df_1}{dL_2} \\ \frac{df_2}{dS_1} & \frac{df_2}{dL_1} & \frac{df_2}{dS_2} & \frac{df_2}{dL_2} \\ \frac{df_3}{dS_1} & \frac{df_3}{dL_1} & \frac{df_3}{dS_2} & \frac{df_3}{dL_2} \\ \frac{df_4}{dS_1} & \frac{df_4}{dL_1} & \frac{df_4}{dS_2} & \frac{df_4}{dL_2} \end{vmatrix}, \quad (-8)$$

que al ser evaluada en el punto de equilibrio $P = (\bar{S}_1, \bar{L}_1, \bar{S}_2, \bar{L}_2)$ se obtiene

$$J = \begin{vmatrix} -\alpha_1\beta_1 \left(\bar{S}_1 - \frac{(1-C_2)\phi_2\alpha_2\beta_2\bar{S}_2}{\phi_1\alpha_1\beta_1} \right) & \frac{\rho_1 \left(1 - \frac{\bar{S}_1}{K_1} \right) \bar{S}_1}{k_1} - \frac{\rho_1 \left(\frac{\bar{S}_1}{k_1} - 1 \right) \bar{S}_1}{k_1} + \rho_1 \left(\frac{\bar{S}_1}{k_1} - 1 \right) \left(1 - \frac{\bar{S}_1}{K_1} \right) - \alpha_1\beta_1\bar{L}_1 & 0 & \frac{\bar{L}_1(1-C_2)\phi_2\alpha_2\beta_2}{\phi_1} \\ C_1\phi_1\alpha_1\beta_1\bar{S}_1 + (1-C_2)\phi_2\alpha_2\beta_2\bar{S}_2 - \sigma_1 & C_1\phi_1\alpha_1\beta_1\bar{L}_1 & 0 & (1-C_2)\phi_2\alpha_2\beta_2\bar{L}_1 \\ 0 & \frac{\bar{L}_2(1-C_1)\phi_1\alpha_1\beta_1}{\phi_2} & -\alpha_2\beta_2 \left(\bar{S}_2 - \frac{(1-C_1)\phi_1\alpha_1\beta_1\bar{S}_1}{\phi_2\alpha_2\beta_2} \right) & \frac{\rho_2 \left(1 - \frac{\bar{S}_2}{K_2} \right) \bar{S}_2}{k_2} - \frac{\rho_2 \left(\frac{\bar{S}_2}{k_2} - 1 \right) \bar{S}_2}{k_2} + \rho_2 \left(\frac{\bar{S}_2}{k_2} - 1 \right) \left(1 - \frac{\bar{S}_2}{K_2} \right) - \alpha_2\beta_2\bar{L}_2 \\ 0 & (1-C_1)\phi_1\alpha_1\beta_1\bar{L}_2 & C_2\phi_2\alpha_2\beta_2\bar{S}_2 + (1-C_1)\phi_1\alpha_1\beta_1\bar{S}_1 - \sigma_2 & C_2\phi_2\alpha_2\beta_2\bar{L}_2 \end{vmatrix}. \quad (-9)$$

Entonces los valores propios se calculan resolviendo el polinomio característico (-2) que para este caso es de cuarto orden .

No obstante, las soluciones analíticas tanto del polinomio característico como de los valores propios son muy extensas y llevan a análisis tedioso. Por esta razón se optó por calcularlos numéricamente. En cuanto a al caso de comunidades aisladas(caso base), la matriz Jacobiana se puede obtener fácilmente de las ecuaciones (-8) y (-9) al hacer $C_k = 1$. Así que, la Jacobiana evaluada en el punto de equilibrio para la comunidad 1 es

$$J_1 = \begin{vmatrix} \frac{df_1}{dS_1} & \frac{df_1}{dL_1} \\ \frac{df_2}{dS_1} & \frac{df_2}{dL_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\alpha_1\beta_1\bar{S}_1 & \frac{\rho_1 \left(1 - \frac{\bar{S}_1}{K_1} \right) \bar{S}_1}{k_1} - \frac{\rho_1 \left(\frac{\bar{S}_1}{k_1} - 1 \right) \bar{S}_1}{K_1} + \rho_1 \left(\frac{\bar{S}_1}{k_1} - 1 \right) \left(1 - \frac{\bar{S}_1}{K_1} \right) - \alpha_1\beta_1\bar{L}_1 \\ \phi_1\alpha_1\beta_1\bar{S}_1 - \sigma_1 & \phi_1\alpha_1\beta_1\bar{L}_1 \end{vmatrix}, \quad (-10)$$

y para la comunidad 2

$$J_2 = \begin{vmatrix} \frac{df_3}{dS_2} & \frac{df_3}{dL_2} \\ \frac{df_4}{dS_2} & \frac{df_4}{dL_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\alpha_2\beta_2\bar{S}_2 & \frac{\rho_2 \left(1 - \frac{\bar{S}_2}{K_2} \right) \bar{S}_2}{k_2} - \frac{\rho_2 \left(\frac{\bar{S}_2}{k_2} - 1 \right) \bar{S}_2}{K_2} + \rho_2 \left(\frac{\bar{S}_2}{k_2} - 1 \right) \left(1 - \frac{\bar{S}_2}{K_2} \right) - \alpha_2\beta_2\bar{L}_2 \\ \phi_2\alpha_2\beta_2\bar{S}_2 - \sigma_2 & \phi_2\alpha_2\beta_2\bar{L}_2 \end{vmatrix}. \quad (-11)$$

Las ecuaciones (-10) y (-11) son similares y tienen la misma traza (TR)

$$TR_k = L_k \phi_k \alpha_k \beta_k - S_k \alpha_k \beta_k, \quad (-12)$$

y determinante (DET)

$$DET_k = -\frac{2K_k \bar{S}_k^2 \phi_k \alpha_k \beta_k \rho_k - K_k \bar{S}_k \phi_k \alpha_k \beta_k \rho_k k_k - 3\bar{S}_k^3 \phi_k \alpha_k \beta_k \rho_k + 2\bar{S}_k^2 \phi_k \alpha_k \beta_k \rho_k k_k + K_k \bar{L}_k \alpha_k \beta_k \sigma_k k_k - 2K_k \bar{S}_k \sigma_k \rho_k + K_k k_k \sigma_k \rho_k + 3\bar{S}_k^2 \sigma_k \rho_k - 2\bar{S}_k k_k \sigma_k \rho_k}{k_k K_k}. \quad (-13)$$

Por lo tanto el análisis de estabilidad de los puntos de equilibrio se realiza de la misma forma que se presenta en el apéndice (.1).

Bibliografía

- [Adger, 2000] Adger, W. N. (2000). Social and ecological resilience: are they related? *Progress in human geography*, 24(3):347–364.
- [Al-Hdaibat et al., 2017] Al-Hdaibat, B., Govaerts, W., van Kekem, D. L., and Kuznetsov, Y. A. (2017). Remarks on homoclinic structure in bogdanov-takens map. *Journal of Difference Equations and Applications*, 0(0):1–13.
- [Anderies and Hegmon, 2011] Anderies, J. and Hegmon, M. (2011). Robustness and resilience across scales: Migration and resource degradation in the prehistoric u.s. southwest. *Ecology and Society*, 16(2).
- [Anderies et al., 2006] Anderies, J., Walker, B., and Kinzig, A. (2006). Fifteen weddings and a funeral: case studies and resilience-based management. *Ecology and society*, 11(1).
- [Angulo et al., 2015] Angulo, D., Angulo, F., and Olivar, G. (2015). Dynamics and forecast in a simple model of sustainable development for rural populations. *Bulletin of Mathematical Biology*, 77(2):368–389.
- [Angulo et al., 2009] Angulo, F., Olivar, G., Osorio, A., Velásquez, L. S., et al. (2009). Nonlinear dynamics and bifurcation analysis in two models of sustainable development. *Revista Internacional Sostenibilidad, Tecnología y Humanismo*, -(4):41–46.
- [Aracil and Gordillo, 1995] Aracil, J. and Gordillo, F. (1995). *Dinámica de sistemas*. Isdefe Madrid.
- [Arnold, 1983] Arnold, V. I. (1983). *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*. Springer Verlag.
- [Azar et al., 2015] Azar, A. T., Vaidyanathan, S., and DeMarco, A. (2015). *Handbook of research on advanced intelligent control engineering and automation*. Engineering Science Reference.
- [Basener and Ross, 2004] Basener, B. and Ross, D. (2004). Booming and crashing populations and easter island. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 65(2):684–701.
- [Bayer, 2004] Bayer, S. (2004). Business dynamics: systems thinking and modeling for a complex world.

- [Biancardi, 2010] Biancardi, M. (2010). Competition and cooperation in a dynamical model of natural resources. *Natural Resource Modeling*, 23(1):79–106.
- [Brander and Taylor, 1998] Brander, J. and Taylor, M. S. (1998). The simple economics of easter island: A ricardo-malthus model of renewable resource use. *American Economic Review*, 88(1):119–38.
- [Brundtland et al., 1987] Brundtland, G., Khalid, M., Agnelli, S., Al-Athel, S., Chidzero, B., Fadika, L., Hauff, V., Lang, I., Shijun, M., de Botero, M. M., et al. (1987). Our common future (\'brundtland report\').
- [Buřič and Janovský, 2013] Buřič, L. and Janovský, V. (2013). A traffic flow model with overtaking as a filippov system. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 254:55 – 64. Nonlinear Elliptic Differential Equations, Bifurcation, Local Dynamics of Parabolic Systems and Numerical Methods.
- [Carpenter et al., 2001] Carpenter, S., Walker, B., Anderies, J. M., and Abel, N. (2001). From metaphor to measurement: resilience of what to what? *Ecosystems*, 4(8):765–781.
- [Chambers et al., 1987a] Chambers, R. et al. (1987a). Sustainable rural livelihoods: a strategy for people, environment and development. *Sustainable rural livelihoods: a strategy for people, environment and development*.
- [Chambers et al., 1987b] Chambers, R. et al. (1987b). Sustainable rural livelihoods: a strategy for people, environment and development. *Sustainable rural livelihoods: a strategy for people, environment and development*.
- [Chen and Chen, 2018] Chen, C. and Chen, X. (2018). Rich sliding motion and dynamics in a filippov plant-disease system. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 28(01):1850012.
- [Chen et al., 2018a] Chen, C., Chong, N. S., and Smith?, R. (2018a). A filippov model describing the effects of media coverage and quarantine on the spread of human influenza. *Mathematical Biosciences*, 296:98 – 112.
- [Chen et al., 2018b] Chen, C., Kang, Y., and Smith?, R. (2018b). Sliding motion and global dynamics of a filippov fire-blight model with economic thresholds. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 39:492 – 519.
- [Chen et al., 2018c] Chen, C., Li, C., and Kang, Y. (2018c). Modelling the effects of cutting off infected branches and replanting on fire-blight transmission using filippov systems. *Journal of Theoretical Biology*, 439:127 – 140.

- [Chen et al., 2019] Chen, D., Xiao, Y., and Tang, S. (2019). Air quality index induced nonsmooth system for respiratory infection. *Journal of Theoretical Biology*, 460:160 – 169.
- [Chen and Huang, 2015] Chen, X. and Huang, L. (2015). A filippov system describing the effect of prey refuge use on a ratio-dependent predator–prey model. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 428(2):817 – 837.
- [Chu and Lee, 1994] Chu, C. Y. C. and Lee, R. D. (1994). Famine, revolt, and the dynastic cycle: Population dynamics in historic china. *Journal of Population Economics*, 7(4):351–378.
- [Coma and Douglas, 1928] Coma, C. W. and Douglas, P. H. (1928). A theory of production. In *Proceedings of the Fortieth Annual Meeting of the American Economic Association*, volume 139, page 165.
- [Cropp and Norbury, 2015] Cropp, R. and Norbury, J. (2015). Population interactions in ecology: A rule-based approach to modeling ecosystems in a mass-conserving framework. *SIAM Review*, 57(3):437–465.
- [D’Alessandro, 2007] D’Alessandro, S. (2007). Non-linear dynamics of population and natural resources: The emergence of different patterns of development. *Ecological Economics*, 62(3):473 – 481.
- [Dalton and Coats, 2000] Dalton, T. R. and Coats, R. M. (2000). Could institutional reform have saved easter island? *Journal of Evolutionary Economics*, 10(5):489–505.
- [Dalton et al., 2005] Dalton, T. R., Coats, R. M., and Asrabadi, B. R. (2005). Renewable resources, property-rights regimes and endogenous growth. *Ecological Economics*, 52(1):31 – 41.
- [de la Croix and Dottori, 2008] de la Croix, D. and Dottori, D. (2008). Easter island’s collapse: a tale of a population race. *Journal of Economic Growth*, 13(1):27–55.
- [Dercole et al., 2007] Dercole, F., Gagnani, A., and Rinaldi, S. (2007). Bifurcation analysis of piecewise smooth ecological models. *Theoretical Population Biology*, 72(2):197–213.
- [Derissen et al., 2011] Derissen, S., Quaas, M. F., and Baumgärtner, S. (2011). The relationship between resilience and sustainability of ecological-economic systems. *Ecological Economics*, 70(6):1121 – 1128.
- [Di Bernardo et al., 2008] Di Bernardo, M., Budd, C. J., Champneys, A. R., Kowalczyk, P., Nordmark, A. B., Tost, G. O., and Piironen, P. T. (2008). Bifurcations in nonsmooth dynamical systems. *SIAM review*, 50(4):629–701.

- [Doedel et al., 2007] Doedel, E. J., Fairgrieve, T. F., Sandstede, B., Champneys, A. R., Kuznetsov, Y. A., and Wang, X. (2007). Auto-07p: Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations.
- [Edwards et al., 1971] Edwards, I., Gadd, C., Hammond, N., and Sollberger, E. (1971). The cambridge ancient history vol. i, part 2. *History of the Middle East and the Aegean Region*.
- [Elkington, 2004] Elkington, J. (2004). The triple bottom line: does it all add up. *The Triple Bottom Line. Does it all add up*.
- [Filippov, 1988] Filippov, A. F. (1988). *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*, volume 18. Springer Netherlands.
- [Folke, 2006] Folke, C. (2006). Resilience: The emergence of a perspective for social-ecological systems analyses. *Global environmental change*, 16(3):253–267.
- [Folke et al., 2002] Folke, C., Carpenter, S., Elmqvist, T., Gunderson, L., Holling, C. S., and Walker, B. (2002). Resilience and sustainable development: building adaptive capacity in a world of transformations. *AMBIO: A journal of the human environment*, 31(5):437–441.
- [Giaouris et al., 2009] Giaouris, D., Maity, S., Banerjee, S., Pickert, V., and Zahawi, B. (2009). Application of filippov method for the analysis of subharmonic instability in dc-dc converters. *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 37(8):899–919.
- [Govaerts et al., 2005] Govaerts, W., Kuznetsov, Y. A., and Dhooge, A. (2005). Numerical continuation of bifurcations of limit cycles in matlab. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 27(1):231–252.
- [Guckenheimer and Holmes, 1983] Guckenheimer, J. and Holmes, P. (1983). *Nonlinear Oscillations, Dynamical systems and Bifurcation of Vector Fields*. Springer.
- [Gunderson and Holling, 2001] Gunderson, L. H. and Holling, C. S. (2001). *Panarchy: understanding transformations in human and natural systems*. Island press.
- [Holling, 1973] Holling, C. S. (1973). Resilience and stability of ecological systems. *Annual review of ecology and systematics*, 4(1):1–23.
- [Holling, 2001] Holling, C. S. (2001). Understanding the complexity of economic, ecological, and social systems. *Ecosystems*, 4(5):390–405.
- [Hyberg, 1990] Hyberg, B. (1990). Barbier, edward b. economics, natural resources scarcity and development: Conventional and alternative views. london: Earthscan publications limited, 1989, xvii+ 223 pp., price unknown.
- [Jacobs, 1993] Jacobs, M. (1993). *The green economy: Environment, sustainable development and the politics of the future*. UBC press.

- [Jiang et al., 2013] Jiang, X.-W., Ding, L., Guan, Z.-H., and Yuan, F.-S. (2013). Bifurcation and chaotic behavior of a discrete-time ricardo–malthus model. *Nonlinear Dynamics*, 71(3):437–446.
- [Kemp, 2019] Kemp, L. (2019). Are we on the road to civilization collapse? www.bbc.com [Online; posted 19-Febrero-2019].
- [Khalil, 2002] Khalil, H. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall.
- [Kirch, 1989] Kirch, P. V. (1989). *The evolution of the Polynesian chiefdoms*. Cambridge University Press.
- [Krivan, 1996] Krivan, V. (1996). Optimal foraging and predator-prey dynamics. *Theoretical Population Biology*, 49(0014):265–290.
- [Krivan, 1998] Krivan, V. (1998). Effects of optimal antipredator behavior of prey on predator-prey dynamics: the rol of refuges. *Theoretical Population Biology*, 53(TP981351):131–142.
- [Krivan and Eisner, 2003] Krivan, V. and Eisner, J. (2003). Optimal foraging and predator-prey dynamics, iii. *Theoretical Population Biology*, 63:269–279.
- [Krivan and Sikder, 1999] Krivan, V. and Sikder, A. (1999). Optimal foraging and predator-prey dynamics, ii. *Theoretical Population Biology*, 55:111–126.
- [Kuznetsov, 2004] Kuznetsov, Y. A. (2004). *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer-Verlag.
- [Liu et al., 2015] Liu, B., Liu, W., Tao, F., Kang, B., and Cong, J. (2015). A dynamical analysis of a piecewise smooth pest control si model. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 25(05):1550068.
- [Marshall and Toffel, 2005] Marshall, J. D. and Toffel, M. W. (2005). Framinf the elusive concept of sustainability: A sustainability hierarchy. *Environmental Science and Technology*, 39(3):673–682.
- [McGovern, 2008] McGovern, T. H. (2008). The archaeology of global change: The impact of humans on their environment edited by charles l. redman, steven r. james, paul r. fish, and j. daniel rogers. *American Anthropologist*, 110(1):76–78.
- [Meiss, 2007] Meiss, J. D. (2007). *Differential Dynamical Systems*. SIAM Mathematical modelling and computation.
- [Morris, 2006] Morris, I. (2006). The collapse and regeneration of complex society in greece, 1500–500 bc. *After collapse: The regeneration of complex societies*, pages 72–84.

- [Motesharrei et al., 2014] Motesharrei, S., Rivas, J., and Kalnay, E. (2014). Human and nature dynamics (handy): Modeling inequality and use of resources in the collapse or sustainability of societies. *Ecological Economics*, 101:90 – 102.
- [Nagase and Uehara, 2011] Nagase, Y. and Uehara, T. (2011). Evolution of population-resource dynamics models. *Ecological Economics*, 72:9 – 17.
- [Palka, 2005] Palka, J. W. (2005). The terminal classic in the maya lowlands: Collapse, transition, and transformation. *The Americas*, 61(4):706–707.
- [Pearce et al., 1988] Pearce, D. W., Barbier, E. B., and Markandya, A. (1988). Sustainable development and cost benefit analysis. Technical report, IIED, London (RU).
- [Perko, 2001] Perko, L. (2001). *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer.
- [Pezzey and Anderies, 2003] Pezzey, J. C. and Anderies, J. M. (2003). The effect of subsistence on collapse and institutional adaptation in population-resource societies. *Journal of Development Economics*, 72:299–320.
- [Prskawetz et al., 2003] Prskawetz, A., Gragnani, A., and Feichtinger, G. (2003). Reconsidering the dynamic interaction of renewable resources and population growth: A focus on long-run sustainability. *Environmental Modeling & Assessment*, 8(1):35–45.
- [Qin et al., 2016] Qin, W., Tang, S., Xiang, C., and Yang, Y. (2016). Effects of limited medical resource on a filippov infectious disease model induced by selection pressure. *Applied Mathematics and Computation*, 283:339 – 354.
- [Redclift, 1991] Redclift, M. (1991). The multiple dimensions of sustainable development. *Geography*, 76(1):36–42.
- [Redman, 1999] Redman, C. L. (1999). *Human impact on ancient environments*. University of Arizona Press.
- [Redondo et al., 2018] Redondo, J. M., Olivar, G., Ibarra-Vega, D., and Dyner, I. (2018). Modeling for the regional integration of electricity markets. *Energy for sustainable development*, 43:100–113.
- [Reuveny and Decker, 2000] Reuveny, R. and Decker, C. S. (2000). Easter island: historical anecdote or warning for the future? *Ecological Economics*, 35:271–287.
- [Reuveny and Maxwell, 2001] Reuveny, R. and Maxwell, J. W. (2001). Conflict and renewable resources. *Journal of Conflict Resolution*, 45(6):719–742.
- [Roman et al., 2018] Roman, S., Palmer, E., and Brede, M. (2018). The dynamics of human–environment interactions in the collapse of the classic maya. *Ecological Economics*, 146:312 – 324.

- [Sabin et al., 2017] Sabin, Bullock, S., and Brede, M. (2017). Coupled societies are more robust against collapse: A hypothetical look at easter island. *Ecological Economics*, 132:264 – 278.
- [Sotomayor et al., 2006] Sotomayor, J., Mello, L. F., and Braga, D. D. (2006). Stability and hopf bifurcation in the watt governor system. *Communications on Applied Nonlinear Analysis*, 13(4):1–17.
- [Sotomayor et al., 2007a] Sotomayor, J., Mello, L. F., and Braga, D. D. (2007a). Bifurcation analysis of the watt governor system. *Computational & Applied Mathematics*, 26(1):19–44.
- [Sotomayor et al., 2007b] Sotomayor, J., Mello, L. F., and Braga, D. d. C. (2007b). Lyapunov coefficients for degenerate hopf bifurcations. *arXiv preprint arXiv:0709.3949*.
- [Tainter, 1988] Tainter, J. (1988). *The collapse of complex societies*. Cambridge university press.
- [Tang et al., 2015] Tang, B., Xiao, Y., Cheke, R. A., and Wang, N. (2015). Piecewise virus-immune dynamic model with hiv-1 rna-guided therapy. *Journal of Theoretical Biology*, 377:36 – 46.
- [Tang et al., 2017] Tang, B., Xiao, Y., Sivaloganathan, S., and Wu, J. (2017). A piecewise model of virus-immune system with effector cell-guided therapy. *Applied Mathematical Modelling*, 47:227 – 248.
- [Uehara, 2013] Uehara, T. (2013). Ecological threshold and ecological economic threshold: Implications from an ecological economic model with adaptation. *Ecological Economics*, 93:374 – 384.
- [Utkin, 1977] Utkin, V. (1977). Variable structure systems with sliding modes. *IEEE Transactions on Automatic control*, 22(2):212–222.
- [von der Osten et al., 2017] von der Osten, F. B., Kirley, M., and Miller, T. (2017). Sustainability is possible despite greed-exploring the nexus between profitability and sustainability in common pool resource systems. *Scientific reports*, 7(1):2307.
- [Walker et al., 2002] Walker, B., Carpenter, S., Anderies, J., Abel, N., Cumming, G., Janssen, M., Lebel, L., Norberg, J., Peterson, G., and Pritchard, R. (2002). Resilience management in social-ecological systems: a working hypothesis for a participatory approach. *Conservation ecology*, 6(1).
- [Walker et al., 2006] Walker, B., Gunderson, L., Kinzig, A., Folke, C., Carpenter, S., and Schultz, L. (2006). A handful of heuristics and some propositions for understanding resilience in social-ecological systems. *Ecology and society*, 11(1).

- [Walker et al., 2004] Walker, B., Holling, C. S., Carpenter, S., and Kinzig, A. (2004). Resilience, adaptability and transformability in social–ecological systems. *Ecology and society*, 9(2).
- [Wang and Xiao, 2014] Wang, A. and Xiao, Y. (2014). A filippov system describing media effects on the spread of infectious diseases. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 11:84 – 97.
- [Webster, 2009] Webster, D. (2009). The uses and abuses of the ancient maya. *The Emergence of the Modern World Conference*.
- [Wiggins, 2003] Wiggins, S. (2003). *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, volume 2. Springer Science & Business Media.
- [Wu, 2013] Wu, J. (2013). Landscape sustainability science: ecosystem services and human well-being in changing landscapes. *Landscape ecology*, 28(6):999–1023.
- [Zhao et al., 2013] Zhao, T., Xiao, Y., and Smith?, R. J. (2013). Non-smooth plant disease models with economic thresholds. *Mathematical Biosciences*, 241(1):34 – 48.
- [Zhou and Liu, 2010] Zhou, M.-C. and Liu, Z.-Y. (2010). Hopf bifurcation in a ricardo-malthus model. *Applied Mathematics and Computation*, 217:2425–2432.