XIV SEMINARIO NACIONAL
DE HIDRAULICA E HIDROLOGIA

LA SECCION CRITICA SON TRES

Autor: Jorge Alberto Naranjo Mesa. Profesor del Posgrado en Aprovechamiento de Recursos Hidráulicos. Facultad de Minas. Universidad Nacional. Medellín. Colombia.

RESUMEN

Las secciones de mínima energía y momentum no se producen en la “sección crítica” de balance entre inercia y gravedad o sección crítica según masa. Aquí se demuestra y se evalúa esa diferencia entre las secciones críticas para masa, momentum y energía.

ABSTRACT

The mínimum energy and momentum sections are not produced at “the”critical section (in which inertia and gravity forces balances). This is demostrated here, and the differences are evaluated between three critical sections, according mass, momentum or energy criterions.

1. *EL PROBLEMA.*

Los ingenieros hidráulicos definen la sección crítica de un flujo a superficie libre como aquella en la que el número de Froude

$$F_Q = \frac{V}{\sqrt{g(A/B)}} \tag{1}$$

es unitario. Aquí A es la sección transversal, B el ancho de la superficie libre y V la velocidad media en la sección. Este criterio tiene valor muy restringido, y se aplica incorrectamente ya que se asume que la sección donde ese número es unitario es, al mismo tiempo, crítica para la energía y para el momentum. Esto en general es falso, las secciones críticas según masa, energía y momentum no coinciden ni pueden coincidir, como no sea en el caso trivial en que los factores de Boussinesq, β, y de Coriolis, α, sean unitarios.

2. *SECCIÓN CRÍTICA SEGÚN ENERGÍA.*

La energía específica, sin incluír potencial centrífugo,

$$\frac{\alpha Q^2}{2gA^2} + H = E \tag{2}$$

se hace mínima en la sección crítica. Este criterio define la sección de mínima energía, y produce que

$$\frac{dE}{dH} = 1 + \frac{Q^2}{2gA^2}\frac{d\alpha}{dH} - \frac{\alpha Q^2}{gA^3}\frac{dA}{dH} = 0 \tag{3}$$

para $H = H_{\text{crítica según energía}} = H_c^{(\alpha)}$. Esta condición produce, con $\bar{B}H_c^{(\alpha)} = \int_0^{H_c^{(\alpha)}} B(H)dH$, que

$$1 = \frac{\alpha Q^2}{gA^2}\left[\frac{dA}{AdH} - \frac{1}{2}\frac{d\alpha}{\alpha dH}\right]$$

$$= \frac{\alpha V^2}{g}\left[\frac{B(H)}{\bar{B}H_c^{(\alpha)}} - \frac{1}{2}\frac{d\ln\alpha}{dH}\right]$$

$$\boxed{1 = \frac{\alpha V^2}{gH_c^{(\alpha)}}\left[\frac{B}{\bar{B}} - \frac{1}{2}\frac{d\ln\alpha}{d\ln H_c^{(\alpha)}}\right]} \tag{4}$$

La altura $H_c^{(\alpha)}$ que satisface lo enmarcado sería la crítica para la energía.

Si

$$F_\alpha = \frac{\sqrt{\alpha}V}{\sqrt{gh\alpha}} = \frac{V}{\sqrt{gH_c^{(\alpha)}}} \tag{5}$$

con

$$h_\alpha = \frac{H_c}{\frac{B}{\overline{B}} - \frac{1}{2}\frac{d\ln\alpha}{d\ln H}} \quad \text{ó} \quad H_c^{(\alpha)} = \frac{h_\alpha}{\alpha} \tag{6}$$

entonces resulta que $F_\alpha = 1$ en esa sección, y no se evalúa con H_c sino con h_α ó $H_c^{(\alpha)}$. La fórmula

$$F_\alpha = \sqrt{\frac{\alpha Q^2 B}{gA^3} - \frac{Q^2}{2gA^2}\frac{d\alpha}{dH}} \tag{7}$$

usada por Galindo et al (1) coincide exactamente con la escrita arriba, como se ve con ligeras manipulaciones algebraicas.

3. *SECCIÓN CRÍTICA SEGÚN MOMENTUM.*

El momentum específico, sin presión centrífuga,

$$\frac{\beta Q^2}{gA} + \overline{Y}A = P \tag{8}$$

se hace mínimo en la sección crítica para transporte de momentum. Esto produce que

$$\frac{dP}{dH} = \frac{d}{dH}\overline{Y}A + \frac{Q^2}{gA}\frac{d\beta}{dH} - \frac{\beta Q^2}{gA^2}\frac{dA}{dH} = 0 \tag{9}$$

Y como $\frac{d}{dH}\overline{Y}A = A$, resulta que

$$1 = \frac{\beta Q^2}{gA^2}\left[\frac{B}{A} - \frac{d\ln\beta}{dH}\right]$$

$$\boxed{1 = \frac{\beta V^2}{gH_c^{(\beta)}}\left[\frac{B}{\overline{B}} - \frac{d\ln\beta}{d\ln H_c^{(\beta)}}\right]} \tag{10}$$

La altura $H_c^{(\beta)}$ que satisface lo enmarcado sería la crítica. Con

$$F_\beta = \frac{\sqrt{\beta}V}{\sqrt{gh_\beta}} = \frac{V}{\sqrt{gH_c^{(\beta)}}}, \tag{11}$$

$$h_\beta = \frac{H_c}{\frac{B}{\bar{B}} - \frac{d\ln\beta}{d\ln H_c}} \quad \text{ó} \quad H_c^{(\beta)} = \frac{h_\beta}{\beta}, \tag{12}$$

resulta que $F_\beta = 1$ en esa sección, y no se evalúa con H_c sino con h_β ó $H_c^{(\beta)}$. La fórmula

$$F_\beta = \sqrt{\frac{\beta Q^2 B}{gA^3} - \frac{Q^2}{gA^2}\frac{d\beta}{dH}} \tag{13}$$

coincide exactamente con la escrita arriba, como se ve con ligeras manipulaciones algebraicas.

4. PRIMERAS CONSECUENCIAS.

En el cuadro se presentan valores de h_α y h_β según secciones.

h_α / H_c	h_β / H_c	SECCIÓN
$\left(1 - \frac{1}{2}\frac{d\ln\alpha}{d\ln H_c}\right)^{-1}$	$\left(1 - \frac{d\ln\beta}{d\ln H_c}\right)^{-1}$	Rectangular
$\left(2 - \frac{1}{2}\frac{d\ln\alpha}{d\ln H_c}\right)^{-1}$	$\left(2 - \frac{d\ln\beta}{d\ln H_c}\right)^{-1}$	Triangular
$\left(\frac{B_0 + 2H_c\tan\phi}{B_0 + H_c\tan\phi} - \frac{1}{2}\frac{d\ln\alpha}{d\ln H_c}\right)^{-1}$	$\left(\frac{B_0 + 2H_c\tan\phi}{B_0 + H_c\tan\phi} - \frac{d\ln\beta}{d\ln H_c}\right)^{-1}$	Trapezoidal

Incluso pues si β y α son constantes para cambio en H, las alturas h_α y h_β son diferentes de la altura crítica H_c, y además son diferentes entre sí:

$$h_\alpha \neq h_\beta \neq H_c$$

La única excepción sería el canal rectangular con α y β constantes: en tal caso las tres alturas serían iguales; pero $F_Q \neq F_\alpha \neq F_\beta$ a menos que α y β sean unitarios. Pero la demostración es general: si se usa

$$F_Q = \frac{V}{\sqrt{g(A/B)}} \tag{14}$$

para una sección cualquiera, puede probarse fácilmente que, siempre,

$$F_\alpha = F_Q \sqrt{\alpha\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\overline{B}}{B}\frac{d\ln\alpha}{d\ln H}\right)} \tag{15}$$

$$F_\beta = F_Q \sqrt{\beta\left(1 - \frac{\overline{B}}{B}\frac{d\ln\beta}{d\ln H}\right)} \tag{16}$$

y entonces no es posible que simultáneamente sea $F_Q = F_\alpha = F_\beta = 1$, excepto si $\alpha = \beta = 1$, lo que ya parece trivial. Y puesto que

$$\alpha \cong 3\beta - 2 \tag{17}$$

tampoco puede ser $F_\alpha = F_\beta$ en la misma sección crítica. La cuestión no sería problemática si el ingeniero hidráulico no forzara F_α y F_β a ser uno porque F_Q es 1: ya que en general el ingeniero hidráulico asume α y $\beta \neq 1$ en aras a ser más exacto, pero luego evalúa mal la energía y el momentum críticos, porque supone que son los de la sección en que F_Q =1 , y en esa sección F_α no será uno, luego no habrá energía crítica, y F_β no será uno, luego tampoco habrá momentum crítico! La cuestión merece repensarse. En realidad, habrá que acostumbrarse a distinguir 3 secciones críticas.

BIBLIOGRAFIA.

Galindo, Ramón. Comunicación personal.

Medellín, Febrero 18 de 1998