Sobre el Espectro de Operadores Elípticos en Dominios Acotados

Sobre el Espectro de Operadores Elípticos en Dominios Acotados

David Santiago Correa Cardeño

Trabajo presentado como requisito parcial para optar por el título de
Magíster en Matemáticas

Director:
Carlos Augusto Vélez López

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Facultad de Ciencias - Escuela de Matemáticas
Medellín - Colombia
2016

Este trabajo ha sido apoyado parcialmente por COLCIENCIAS, Programa Jóvenes investigadores, Proyecto código 27543, Abril de 2015- Abril de 2016

Esta tesis fue apoyada por Colciencias, Fondo nacional de financiamiento para la ciencia, la tecnología y la innovación Francisco José de Caldas. Proyecto “Ecuaciones diferenciales dispersivas y elípticas no lineales”, Código 111865842951

Agradecimientos

Quiero expresar mi más sincera gratitud a mis padres y a mi hermano, con quienes estoy eternamente en deuda por su apoyo, comprensión y sacrificio. Asimismo, quiero agradecer de manera especial al profesor Carlos Vélez sus valiosas enseñanzas académicas y personales, así como su confianza, paciencia y generosidad. Finalmente, a las personas más cercanas, a mis amigos y compañeros, gracias por todo cuanto han hecho a mi favor.

Dedicado a mi mamá y a mi abuela.

"… a saber, pues la forma de todo el universo es de lo más perfecto, y de hecho diseñado por el creador más sabio, nada ocurrirá en el mundo sin que destaque, de alguna manera, la presencia de una regla máxima o mínima".

Leonhard Euler

Índice general

Introducción

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ un dominio acotado (es decir, Ω es abierto, conexo y acotado). Para una función $u \in C^2(\Omega)$, el operador Laplaciano se define como

$$\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u) = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

El problema de valores propios para $-\Delta$ en Ω con **condición de Dirichlet** homogénea en $\partial\Omega$ (o simplemente condición de Dirichlet, para abreviar) consiste, informalmente, en hallar los valores $\lambda \in \mathbb{R}$ para los cuales existe $u \equiv u_\lambda \neq 0$, en un espacio de funciones "adecuado", tal que

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u \quad \text{en } \Omega, \\ \quad u &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{0.1}$$

Si Ω es, además, un dominio suave (de clase C^1), el problema de valores propios para $-\Delta$ en Ω con **condición de Neumann** homogénea en $\partial\Omega$ (o solamente condición de Neumann, cuando no haya lugar a confusión) consiste, informalmente, en hallar los valores $\lambda \in \mathbb{R}$ para los cuales existe $u \equiv u_\lambda \neq 0$, en un espacio de funciones "adecuado", tal que

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{en} \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.2}$$

donde $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ denota la derivada normal exterior de u en $\partial\Omega$.

Los resultados conocidos con relación al espectro del operador $-\Delta$ con condición de Dirichlet han sido estudiados ampliamente por distintos autores y hoy día, hacen parte de la teoría clásica de las ecuaciones diferenciales parciales elípticas lineales (ver, por ejemplo, [CH], [MMP], [B], [Ke], [Ev], [MZ] y las referencias allí contenidas). Las técnicas desarrolladas han sido especialmente útiles en las últimas cinco décadas para abordar problemas no lineales del tipo

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) &= 0 \quad \text{en } \Omega, \\ \qquad u &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.3}$$

siendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dada. El estudio de (0.3) es todavía un área de investigación activa en la cual, recientemente, ha crecido el interés en los casos en que la condición de Dirichlet en la frontera se sustituye por una condición de Neumann o una condición mixta.

El valioso trabajo de Courant y Hilbert, en adelante [CH], contiene los resultados principales del problema de valores propios para $-\Delta$ bajo condiciones de frontera que comprenden, como caso particular, las condiciones de Dirichlet y Neumann. No obstante, el enfoque de [CH] presenta ciertos aspectos desfavorables, a saber:

(i) El tema está disperso en varias secciones de los tomos I y II.

(ii) El tratamiento de [CH] no incluye espacios de Sobolev; un asunto que desde el punto de vista moderno, extiende y dificulta algunos argumentos.

(iii) El desarrollo de la teoría tiene lugar en el plano.

Por otro lado, en contraste con la abundante bibliografía moderna que trata el problema (0.1) (ver [B], [Ev], [Ke], [MMP], [MZ], entre otros), no es fácil hallar en la literatura referencias que expongan minuciosamente el problema de valores propios para $-\Delta$ con condición de Neumann. Por ejemplo,

(i) en [B] se demuestra que el conjunto de valores propios de $-\Delta$ con condición de Dirichlet se puede escribir como el rango de una sucesión $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, creciente y estrictamente positiva, tal que $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$. También se comprueba que la correspondiente sucesión de funciones propias $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base ortonormal para el espacio de Hilbert $L^2(\Omega)$. No obstante, se omite la caracterización variacional de los valores propios y no se hace alusión alguna al problema (0.2).

(ii) En [Ev], para operadores elípticos de segundo orden con condición de Dirichlet en la frontera, se estudia la existencia de una sucesión creciente de valores propios $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$. Más aún, se discute la caracterización variacional del primer valor propio y se propone como ejercicio, al final de la sección, el teorema de Courant-Fischer (teorema que enunciamos más adelante en el Capítulo 2). En [Ev] no se menciona el problema de valores propios para el operador $-\Delta$ con condición de Neumann.

(iii) En [Ke] se muestra la existencia de una sucesión de valores propios para el operador $-\Delta$ con condición de Dirichlet y se presentan las caracterizaciones variacionales en términos de mínimo y máximo, al igual que la formulación mixta min-max (Teorema de Courant-Fischer). Sin embargo, no hay comentarios relativos al problema (0.2).

(iv) En [MMP] se estudian los hechos más relevantes sobre el espectro de $-\Delta$ con condición de Dirichlet, pasando por las caracterizaciones variacionales y las propiedades más importantes de los valores y funciones propias correspondientes. Aunque [MMP] se destaca como una de las referencias más completas, ciertos argumentos no son fácilmente aplicables a problemas más generales. A esto se suma que en el caso (0.2), si bien se listan teoremas equivalentes, la mayoría aparecen sin demostración.

(v) En [GP] (cuyos argumentos seguimos de cerca en el Capítulo 1) se estudia a fondo el problema de valores propios para un operador lineal, compacto y auto-adjunto. A continuación, se enuncian sin demostración las caracterizaciones variacionales de los valores propios para un operador elíptico de segundo orden con ambas condiciones de frontera (Dirichlet y Neumann).

(vi) En [MZ] se inicia con un repaso (sin incluir pruebas) de los principales teoremas relacionados con el espectro de operadores lineales compactos y auto-adjuntos. Luego, través del operador $(-\Delta)^{-1}$ (que introduciremos más adelante en el Capítulo 2) y la teoría abstracta preliminar, se estudia el problema de valores propios para el operador $-\Delta$ con condición de Dirichlet y algunas de sus propiedades fundamentales. Si bien [MZ] plantea un punto de vista que se puede aplicar a problemas más generales, el tratamiento del tema tiene pocos detalles y sólo se aplica al problema (0.1) (esto es, el caso Dirichlet).

Tomando en cuenta la descripción anterior, en este trabajo presentamos una revisión completa del problema de valores propios para el operador $-\Delta$ con condición de Dirichlet y condición de Neumann, respectivamente. Aún en el caso (0.1), hemos procurado recoger en un solo documento, resultados provenientes de diferentes fuentes bibliográficas. Además, como hecho clave, adoptamos la estrategia de estudiar los problemas (0.1) y (0.2) a partir de la teoría espectral abstracta aplicada a operadores lineales, compactos, auto-adjuntos y definidos positivos en espacios de Hilbert reales. Esta aproximación difiere de aquella que siguen muchos de los textos que hemos citado (exceptuando [GP] y [MZ]), en tanto que en ellos, se incluyen pruebas *ad hoc* de la mayoría de teoremas y proposiciones. En ese sentido, consideramos que nuestro enfoque abre la posibilidad de abordar operadores un poco más generales (operadores tipo Schrödinger), usando básicamente el mismo procedimiento.

Para terminar, explicamos brevemente la estructura del trabajo: en el Capítulo 1 recordamos varios conceptos familiares de análisis real, teoría de la medida y espacios de Sobolev, así como los principios de la teoría espectral abstracta para operadores lineales, compactos, auto-adjuntos y definidos positivos en espacios de Hilbert reales. En el Capítulo 2 definimos de manera precisa la noción de valor propio para el operador $-\Delta$ con condición de Dirichlet y presentamos en detalle las propiedades cualitativas de los valores y funciones propias asociadas. En el Capítulo 3, que es la principal contribución de la tesis, definimos de manera precisa la noción de valor propio para el operador $-\Delta$ con condición de Neumann y, siguiendo el enfoque del Capítulo 2, estudiamos las propiedades de los valores propios y las correspondientes funciones propias. Finalmente, en el Capitulo 4 mostramos ejemplos típicos en una y dos dimensiones, donde se explora una interesante conexión entre los valores propios y la teoría de números.

Capítulo

1 Resultados preliminares

En este capítulo presentamos parte de la teoría que sirve de base a las ideas centrales de este trabajo. En la Sección 1.1 comenzamos con un repaso de algunos resultados clásicos de análisis real que usaremos frecuentemente para discutir los problemas propuestos y probar sus propiedades esenciales. En la Sección 1.2 definimos los espacios funcionales adecuados (espacios de Sobolev) para formular de manera precisa el problema de valores propios para el operador $-\Delta$ con condición de Dirichlet y condición de Neumann, respectivamente. Finalmente, en las Secciones 1.3 y 1.4, desarrollamos los aspectos fundamentales de la teoría espectral abstracta en el contexto de operadores compactos, auto-adjuntos y definidos positivos en espacios de Hilbert reales.

1.1. Resultados de análisis real

Iniciamos con un lema sencillo de mucha utilidad a futuro.

Lema 1.1.1. *Sea $A \subset (0, \infty)$ un conjunto acotado y no vacío. Si*

$$\frac{1}{A} := \left\{ \frac{1}{a} : a \in A \right\},$$

entonces $\frac{1}{A}$ está acotado inferiormente y se cumple

$$\operatorname{ínf} \frac{1}{A} = \frac{1}{\sup A}.$$

Demostración. Por hipótesis, existe $\sup A$ y

$$0 < a \leq \sup A \quad \forall a \in A;$$

es decir,

$$\frac{1}{\sup A} \leq \frac{1}{a} \quad \forall a \in A. \tag{1.1}$$

La ecuación (1.1) muestra que $\frac{1}{A}$ es acotado inferiormente y

$$\frac{1}{\sup A} \leq \text{ínf}\, \frac{1}{A}.$$

Para comprobar la desigualdad opuesta, razonemos por contradicción y supongamos que $\frac{1}{\sup A} < \text{ínf}\, \frac{1}{A}$. Por la propiedad de aproximación al supremo, existe una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ en A tal que $a_n \to \sup A$ cuando $n \to \infty$. Tomando recíprocos de los términos a_n, es inmediato que

$$\frac{1}{a_n} \to \frac{1}{\sup A} \quad \text{conforme} \quad n \to \infty. \tag{1.2}$$

Sea $\varepsilon := \text{ínf}\, \frac{1}{A} - \frac{1}{\sup A} > 0$. Por (1.2) existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_\varepsilon$, entonces

$$\left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{\sup A} \right| < \varepsilon \quad \text{y} \quad \frac{1}{a_n} < \varepsilon + \frac{1}{\sup A} = \text{ínf}\, \frac{1}{A},$$

lo cual resulta absurdo por la definición del ínfimo. En suma, $\text{ínf}\, \frac{1}{A} = \frac{1}{\sup A}$. □

Enunciamos ahora, sin demostración, algunos resultados típicos de análisis real en varias variables. Las pruebas se pueden consultar en los textos que aparecen como referencia.

Lema 1.1.2. *Sea Q un rectángulo en $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. Existe una función $\phi : \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \to \mathbb{R}$ de clase C^∞ tal que $\phi(x) > 0$ para $x \in \operatorname{Int} Q$ y $\phi(x) = 0$ en otro caso.*

Demostración. Ver [Mu, pág. 136] Lema 16.1.

Teorema 1.1.1 (Teorema del multiplicador de Lagrange)**.** *Sean X un espacio de Banach y $U \subset X$ un conjunto abierto. Supongamos que para $1 \leq i \leq m$, $f, g_i : U \to \mathbb{R}$ son funciones de clase $C^1(U)$. Si $x \in S$ es un extremo relativo para $f|_S$, donde*

$$S := \{x \in U : g_i(x) = 0 \quad 1 \leq i \leq m\},$$

entonces existen constantes $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m$ tales que

$$\lambda_0 \nabla f(x) = \lambda_1 \nabla g_1(x) + \cdots + \lambda_m \nabla g_m(x).$$

Demostración. Ver [Ar, pág. 266] Teorema 9.36, [ST, pág. 300].

Proposición 1.1.1 (Fórmula de integración por partes)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. Si $f \in C^1(\Omega)$ y $\varphi \in C_0^1(\Omega)$, entonces*

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi \, dx + \int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx = 0 \quad \forall i \in \{1, ..., \mathrm{N}\}.$$

Demostración. Ver [MC, pág. 394] Proposición 16.1.

Teorema 1.1.2 (Teorema de la divergencia de Gauss)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ un conjunto abierto y acotado con frontera suave (o suave a trozos) $\partial\Omega$. Sea $\overrightarrow{n}$ el vector normal unitario que apunta hacia afuera en $\partial\Omega$. Si $\vec{F} : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \to \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ es un campo vectorial C^1, entonces*

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \int_\Omega \operatorname{div} \vec{F} \, dx,$$

donde σ es la medida superficial en $\partial\Omega$.

Demostración. Ver [Mu, pág. 319] Teorema 38.8, [Ru, pág. 312] Teorema 10.51.

Teorema 1.1.3 (Principio del máximo fuerte)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ un conjunto abierto y conexo. Supongamos que $u \in C^2(\Omega)$ satisface la desigualdad*

$$\Delta u(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega.$$

Si u alcanza un máximo M en un punto $x_0 \in \Omega$, entonces $u \equiv M$ en Ω.

Demostración. Ver [PW, pág. 53] Teorema 2.

1.2. Teoría de la medida y espacios de Sobolev

En esta sección definimos los espacios de Sobolev y mencionamos sus propiedades más importantes. Informalmente, un espacio de Sobolev consta de elementos de $L^p(\Omega)$ cuyas "derivadas" de cierto orden (en un sentido por precisar) también pertenecen a $L^p(\Omega)$. Este tipo de espacio, aparte de ser un objeto interesante por sí mismo, resulta ser el marco de referencia acertado para estudiar el problema de valores propios para el operador $-\Delta$ con una condición prescrita en la frontera. Una revisión completa del tema, se encuentra en: [B] Capítulo 9, [Ev] Capítulo 5, [MC] Capítulo 16 y [Ke] Capítulo 2.

Antes de introducir los espacios de Sobolev, recordemos algunos hechos conocidos de teoría de la medida:

Definición 1.2.1. *Sean $f : \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \to \mathbb{R}$ y $\{\omega_i\}_{i\in I}$ la familia de todos los conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ tal que, para cada $i \in I$, $f = 0$ c.t.p. en ω_i. Si $\omega := \bigcup_{i\in I} \omega_i$, el soporte de f, que denotamos por $\operatorname{supp} f$, se define como*

$$\operatorname{supp} f = \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \setminus \omega.$$

Se puede demostrar (ver [B, pág. 105] Proposición 4.17) que $f = 0$ c.t.p. en ω. Este hecho es, precisamente, el que motiva la definición anterior.

Proposición 1.2.1. *Supongamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ tiene medida finita y $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Si $f \in L^q(\Omega)$, entonces $f \in L^p(\Omega)$ y*

$$\|f\|_{L^p} \leq |\Omega|^{\frac{q-p}{pq}} \|f\|_{L^q}.$$

Demostración. Ver [Ar, pág. 41] Proposición 2.18, [MC, pág. 346] Proposición 14.31.

Lema 1.2.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ un conjunto abierto. Si $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ y*

$$\int_\Omega u\varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

entonces $u = 0$ c.t.p. en Ω.

Demostración. Ver [B, pág. 110] Corolario 4.24, [MC, pág. 358] Proposición 14.49.

A continuación, definimos los espacios de Sobolev y listamos varias de sus propiedades principales.

Definición 1.2.2. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ un conjunto abierto y $1 \leq p \leq \infty$. Definimos*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \begin{array}{ll} \exists\, g_1, g_2, \cdots, g_{\mathrm{N}} \in L^p(\Omega) & \text{tales que} \\ \displaystyle\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega g_i \varphi\, dx & \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \forall i \in \{1, ..., \mathrm{N}\} \end{array} \right\}.$$

La función g_i, que denotamos por $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, es única y se denomina derivada débil de u respecto a la variable x_i. Si $1 \leq p < \infty$, $W^{1,p}(\Omega)$ se puede dotar con la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \left(\|u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

En particular,

$$H^1(\Omega) \equiv W^{1,2}(\Omega) \quad \text{y} \quad \|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.3}$$

En este caso, la norma está inducida por el producto escalar

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \int_\Omega \left(uv + \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx.$$

Finalmente, $H_0^1(\Omega)$ denota la clausura de $C_0^\infty(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$.

Puede probarse (ver [B, pág. 264] Proposición 9.1) que para todo $1 < p < \infty$, $W^{1,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach reflexivo y separable. Además, $H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert separable.

Lema 1.2.2. *Sea $v \in H^1(\Omega)$. Si $\|v\|_{H^1} > 0$, entonces $\|v\|_{L^2} > 0$.*

Demostración. Razonemos por el absurdo y supongamos que $\|v\|_{L^2} = 0$. Como $v = 0$ en Ω, excepto quizás en un conjunto de medida cero,

$$\nabla v = 0 \quad \text{c.t.p.} \quad \text{en} \quad \Omega.$$

En vista de ello [1], $\|v\|_{H^1}^2 = \|v\|_{L^2}^2 + \|\nabla v\|_2^2 = 0$, en contra de la hipótesis. □

Proposición 1.2.2. *Sea Ω un conjunto abierto y conexo. Si $u \in H^1(\Omega)$ y*

$$\nabla u = 0 \quad \text{c.t.p.} \quad en \quad \Omega,$$

entonces u es constante c.t.p. *en Ω.*

Demostración. Ver [B, pág. 269] Observación 7, [Ev, pág 291] Ejercicio 10.

Proposición 1.2.3 (Densidad). *Supongamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ es de clase C^1. Si $u \in H^1(\Omega)$, existe una sucesión $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ de $C_0^\infty\left(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}\right)$, tal que $u_n|_\Omega \to u$ en $H^1(\Omega)$. En otras palabras, la restricción a Ω de las funciones $C_0^\infty\left(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}\right)$ es un subespacio denso de $H^1(\Omega)$.*

[1] Cuando sea necesario hacer referencia a $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$, para abreviar, escribiremos $\|\nabla u\|_2$.

Demostración. Ver [B, pág. 277] Corolario 9.8, [Ev, pág. 252] Teorema 3.

Proposición 1.2.4 (Desigualdad de Poincaré)**.** *Supongamos que Ω es un conjunto abierto y acotado. Entonces, existe una constante C (que depende únicamente de Ω) tal que*

$$\|u\|_{L^2} \leq C\|\nabla u\|_2, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Además, $\|\nabla u\|_2$ es una norma en $H_0^1(\Omega)$ equivalente a $\|u\|_{H^1}$ y la expresión $\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx$ es un producto escalar en $H_0^1(\Omega)$ que induce $\|\nabla u\|_2$.

Demostración. Ver [B, pág. 290] Corolario 9.19, [Ev, pág. 275] Teorema 1.

Proposición 1.2.5. *Sea $u \in H^1(\Omega)$. Si $\operatorname{supp} u$ es un subconjunto compacto de Ω, entonces $u \in H_0^1(\Omega)$.*

Demostración. Ver [B, pág. 287] Lema 9.5.

Proposición 1.2.6. *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ es un conjunto abierto y $u \in H^1(\Omega)$ (resp. $H_0^1(\Omega)$), entonces $u^+, u^- \in H^1(\Omega)$ (resp. $H_0^1(\Omega)$) y*

$$\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u & \text{c.t.p. en } \{u > 0\} \\ 0 & \text{c.t.p. en } \{u \leq 0\}, \end{cases}$$
$$\nabla u^- = \begin{cases} -\nabla u & \text{c.t.p. en } \{u < 0\} \\ 0 & \text{c.t.p. en } \{u \geq 0\}. \end{cases}$$

Demostración. Ver [MMP, pág. 6] Proposición 1.29, [RP, pág. 187] Proposición 8.2.

Teorema 1.2.1 (Teorema de encaje de Sobolev)**.** *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ un conjunto abierto y acotado de clase C^1 y $m \geq 1$ un número entero. Si $1 \leq p < \infty$, entonces*

$$\begin{aligned} &W^{m,p}(\Omega) \subset L^{p^\star}(\Omega) \quad \text{donde} \quad p^\star = \frac{p\mathrm{N}}{\mathrm{N} - pm} && \text{si} \quad \frac{1}{p} - \frac{m}{\mathrm{N}} > 0, \\ &W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad \forall q \in [p, \infty) && \text{si} \quad \frac{1}{p} - \frac{m}{\mathrm{N}} = 0, \\ &W^{m,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega) && \text{si} \quad \frac{1}{p} - \frac{m}{\mathrm{N}} < 0, \end{aligned}$$

y en el último caso, es decir, cuando $m > \frac{\mathrm{N}}{p}$, si

$$k := \left[m - \frac{\mathrm{N}}{p}\right] \quad \text{y} \quad \theta := \left(m - \frac{\mathrm{N}}{p}\right) - k,$$

donde $[\,\cdot\,]$ denota la parte entera de un número real, entonces

$$\|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{m,p}} \quad \forall\,|\alpha| \leq k$$

y

$$|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \leq C\|u\|_{W^{m,p}}|x - y|^\theta \quad \text{c.t.p. } x, y \in \Omega \quad \forall\,|\alpha| = k.$$

En particular, $W^{m,p}(\Omega) \subset C^k(\Omega)$, si $m > \frac{\mathrm{N}}{p}$.

Demostración. Ver [Ke, pág. 79] Teorema 2.4.5, [B, pág. 285] Corolario 9.15, [Ev, pág. 270] Teorema 6.

Teorema 1.2.2 (Rellich-Kondrachov)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ un conjunto abierto y acotado de clase C^1. Se tienen las siguientes inyecciones compactas:*

$$\begin{aligned} &H^1(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, 2^\star) \quad 2^\star := \frac{2\mathrm{N}}{\mathrm{N}-2} && si \quad \mathrm{N} > 2, \\ &H^1(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad \forall q \in [2, \infty) && si \quad \mathrm{N} = 2, \\ &H^1(\Omega) \subset C\left(\overline{\Omega}\right) && si \quad \mathrm{N} = 1. \end{aligned}$$

En particular, $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ con inyección compacta para todo N*.*

Demostración. Ver [B, pág. 285] Teorema 9.16, [Ke, pág. 84] Teorema 2.5.3, [Ev, pág. 272] Teorema 1.

Observación 1.2.1. Si Ω es un conjunto abierto y acotado, la conclusión del Teorema 1.2.2 es válida para $H_0^1(\Omega)$, sin apelar a la hipótesis de frontera suave. (ver [B, pág. 290] Observación 20).

Teorema 1.2.3. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ de clase C^1 y $u \in H^1(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

(i) *$u = 0$ en $\partial\Omega$.*

(ii) *$u \in H_0^1(\Omega)$.*

Demostración. Ver [B, pág 288] Teorema 9.17.

Definición 1.2.3. *Dada una función u definida en $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, denotamos por $\overline{u}(x)$ a la extensión trivial de u a $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, es decir,*

$$\overline{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{si} \quad x \in \Omega, \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \backslash \Omega. \end{cases}$$

Teorema 1.2.4. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ y $u \in L^2(\Omega)$. Si $u \in H_0^1(\Omega)$, entonces $\overline{u}(x) \in H^1\left(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}\right)$ y se cumple $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} = \overline{\frac{\partial u}{\partial x_i}}$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$.*

Demostración. Ver [B, pág. 289] Proposición 9.18 y [B, pág. 290] Observación 20.

Teorema 1.2.5. *Sea Ω un conjunto abierto de clase C^2 con frontera acotada. Sean $f \in L^2(\Omega)$ y $u \in H^1(\Omega)$ que satisfacen*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_\Omega u\varphi \, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega).$$

Entonces $u \in H^2(\Omega)$ y $\|u\|_{H^2} \leq C\|f\|_{L^2}$, donde C es una constante que depende únicamente de Ω. Más aún, si Ω es de clase $C^{m+2}(\Omega)$ y $f \in H^m(\Omega)$, entonces

$$u \in H^{m+2}(\Omega) \quad \text{y} \quad \|u\|_{H^{m+2}} \leq C\|f\|_{H^m}.$$

En particular, si $f \in H^m(\Omega)$ con $m > N/2$, entonces $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$. Finalmente, si Ω es de clase C^∞ y $f \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$, entonces $u \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$.

Demostración. Ver [B, pág. 298-299] Teoremas 9.25 y 9.26, [Ev, pág. 309-314] Teoremas 1 y 2.

Teorema 1.2.6. *Sean Ω un conjunto abierto arbitrario, $u \in H^1(\Omega)$ y $f \in H^m(\Omega)$ tales que*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Entonces $\theta u \in H^{m+2}(\Omega)$ para cada $\theta \in C_0^\infty(\Omega)$ y decimos que $u \in H_{loc}^{m+2}(\Omega)$. En particular, si $f \in C^\infty(\Omega)$, entonces $u \in C^\infty(\Omega)$.

Demostración. Ver [B, pág. 306] Observación 25.

1.3. Teoría abstracta de operadores lineales compactos, auto-adjuntos y definidos positivos

En esta sección recordamos varios conceptos fundamentales relacionados con análisis funcional y teoría espectral abstracta. Aunque algunas ideas se pueden generalizar a operadores lineales acotados definidos en espacios de Banach (ver [Ar]), buena parte de nuestro estudio tendrá lugar en el contexto más natural de los espacios de Hilbert y los operadores lineales, compactos, auto-adjuntos y definidos positivos. En las condiciones descritas, enunciamos y probamos, entre otras cosas, la caracterización variacional de los valores propios y la existencia de una base ortonormal del espacio en términos de vectores propios.

Comenzamos con dos definiciones indispensables.

Definición 1.3.1. *Sea X un espacio vectorial normado. Supongamos que $T : X \to X$ es un operador lineal y $\mu \in \mathbb{C}$. Si $T_\mu := T - \mu I : X \to X$ es biyectivo y T_μ^{-1} continuo, diremos que μ pertenece al resolvente de T, que denotamos por $\rho(T)$. El conjunto $\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ se llama espectro de T.*

Definición 1.3.2. *Supongamos que X es un espacio vectorial y $T : X \to X$ un operador lineal. Decimos que $\mu \in \mathbb{C}$ es un valor propio de T, si existe $x \in X$, $x \neq 0$, tal que*

$$Tx = \mu x.$$

En tal caso decimos que $x \in X$ es un vector propio de T asociado al valor propio μ. Si X es un espacio vectorial cuyos elementos son funciones, los vectores propios suelen llamarse también funciones propias.

Continuamos con algunos resultados preliminares acerca de operadores lineales compactos en espacios de Banach (cuando sea apropiado, nos concentraremos en espacios de Hilbert).

Proposición 1.3.1. *Sean X, Y y Z tres espacios de Banach y $T : X \to Y$ y $K : Y \to Z$ dos operadores lineales. Si T es continuo y K compacto (resp. T compacto y K continuo), entonces $K \circ T$ es lineal y compacto.*

Demostración. Ver [B, pág. 159] Proposición 6.3, [DM, pág. 181] Teorema 4.8.9.

Teorema 1.3.1. *Supongamos que X y Y son espacios vectoriales normados y $T : X \to Y$ un operador lineal y compacto. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $x_n \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente a $x \in X$, es decir,*

$$x_n \rightharpoonup x,$$

entonces,

$$Tx_n \to Tx$$

en norma.

Demostración. Ver [Ar, pág. 95] Teorema 4.13, [DM, pág. 183] Teorema 4.8.15.

Proposición 1.3.2 (Alternativa de Fredholm)**.** *Supongamos que X es un espacio vectorial normado y $T : X \to X$ un operador lineal y compacto. Si $\mu \neq 0$, entonces $\ker (T - \mu I)$ es un espacio vectorial de dimensión finita.*

Demostración. Ver [Ar, pág. 97] Proposición 4.15.

Definición 1.3.3. *La dimensión de $\ker (T - \mu I)$ en la Proposición 1.3.2 se llama multiplicidad de μ.*

Proposición 1.3.3. *Supongamos que X es un espacio vectorial normado y $T : X \to X$ un operador lineal y compacto. El espectro $\sigma (T)$ consta sólo de valores propios y posiblemente del $0 \in \mathbb{C}$. Además, $\sigma (T)$ es a lo sumo contable (podría ser vacío) y, si es infinito, debe acumularse en 0. En particular, si $\sigma (T)$ es infinito, el conjunto de valores propios no nulos de T puede escribirse como el rango de una sucesión $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que*

$$|\mu_1| \geq |\mu_2| \geq \cdots |\mu_n| \geq \cdots \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \mu_n = 0,$$

donde cada valor propio μ_n se repite de acuerdo a su multiplicidad finita.

Demostración. Ver [Ar, pág. 96] Proposición 4.14 y su demostración, [Ar, pág. 99] Teorema 4.17.

El siguiente ejemplo, en dimensión finita, se propone motivar los teoremas abstractos que se presentan más adelante en este capítulo. Con este fin, supongamos que $M : \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \to \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, $M \neq 0$ es un operador lineal, continuo y auto-adjunto. Sea

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^{\mathrm{N}} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) := \langle Mx, x \rangle . \end{aligned}$$

Consideremos el problema de encontrar los extremos relativos de la función f sujeta a la restricción $g(x) = \|x\|_2^2 := \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} x_i^2 = 1$, escrita con frecuencia como el conjunto de nivel:

$$S := \left\{ x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} : \|x\|_2^2 = \langle x, x \rangle = 1 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} : \|x\|_2 = 1 \right\}. \tag{1.4}$$

Sea

$$\mu := \sup_{\|x\|_2 = 1} \langle Mx, x \rangle . \tag{1.5}$$

La función continua $f|_S$ está definida sobre un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ y por el Teorema de los valores extremos, existe $x_0 \in S$, $x_0 \neq 0$ tal que

$$f(x_0) = \langle Mx_0, x_0 \rangle = \sup_{\|x\|_2 = 1} \langle Mx, x \rangle = \mu. \tag{1.6}$$

Hagamos notar que estamos en las hipótesis del Teorema del multiplicador de Lagrange (ver Teorema 1.1.1). Como f tiene un extremo relativo en $x_0 \in S$, si $\nabla g(x_0) \neq 0$, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0). \tag{1.7}$$

Veamos cómo calcular $\nabla f(x_0)$ y $\nabla g(x_0)$. Para todo $h \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, siendo que la matriz M es simétrica y satisface $\langle Mx_0, h \rangle = \langle x_0, Mh \rangle$, se cumple

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) = \langle M(x_0 + h), (x_0 + h) \rangle &= \langle Mx_0, x_0 \rangle + \langle Mx_0, h \rangle + \langle x_0, Mh \rangle + \langle Mh, h \rangle \\ &= \langle Mx_0, x_0 \rangle + 2\langle Mx_0, h \rangle + \langle Mh, h \rangle. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Sea

$$R_{x_0}(h) \coloneqq f(x_0 + h) - f(x_0) - 2\langle Mx_0, h \rangle = \langle Mh, h \rangle. \tag{1.9}$$

Visto que $\|R_{x_0}(h)\| \leq \|M\|\|h\|^2 \to 0$ cuando $h \to 0$, $Df(x_0)h = 2\langle Mx_0, h \rangle$. Además, considerando que $Df(x_0) \in B\left(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathbb{R}\right)$, por el Teorema de representación de Riesz, existe un único elemento $\nabla f(x_0) \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ tal que

$$\langle \nabla f(x_0), h \rangle = Df(x_0)h = 2\langle Mx_0, h \rangle \quad \forall h \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}. \tag{1.10}$$

Un procedimiento análogo para $g(x) = \|x\|_2^2$ muestra que

$$\langle \nabla g(x_0), h \rangle = 2\langle x_0, h \rangle \quad \forall h \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}. \tag{1.11}$$

Reemplazando las expresiones (1.10) y (1.11) en (1.7), para todo $h \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, obtenemos

$$\langle Mx_0, h \rangle = \lambda \langle x_0, h \rangle \tag{1.12}$$

y en consecuencia,

$$Mx_0 = \lambda x_0.$$

Al final, $\mu = f(x_0) = \langle Mx_0, x_0 \rangle = \langle \lambda x_0, x_0 \rangle = \lambda \|x_0\|_2^2 = \lambda$. En otras palabras, el valor máximo de f en S, corresponde a un valor propio del operador M.

Ampliamos ahora nuestro repaso de la teoría espectral con varios teoremas indispensables.

Proposición 1.3.4. *Sea H un espacio de Hilbert y $T : H \to H$ un operador lineal. Si T es auto-adjunto, entonces*

(i) $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R} \quad \forall x \in H$ *y*

(ii) $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.

DEMOSTRACIÓN. Ver [Ar, pág. 99] Proposición 4.20 y Teorema 4.22. □

Definición 1.3.4. *Sean H un espacio de Hilbert y $T : H \to H$ un operador lineal, continuo y auto-adjunto. El operador T se dice definido positivo, si para todo $x \in H$, $x \neq 0$,*

$$\langle Tx, x\rangle_H > 0.$$

Vale la pena mencionar que para $T : H \to H$ definido positivo, $\ker(T) = \{0\}$. De lo contrario, para algún $x \in H$, $x \neq 0$, $\langle Tx, x\rangle_H = 0$.

En lo que sigue y salvo mención explícita, supondremos:

(i) $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ es un espacio de Hilbert real con $d := \dim H \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

(ii) $A : H \to H$ denota un operador lineal, compacto, auto-adjunto y definido positivo.

Teorema 1.3.2. *Si H_1 es un subespacio cerrado de H, entonces*

$$H = H_1 \oplus H_1^{\perp}.$$

Demostración. Ver [Ar, pág. 76] Teorema 3.10 (b), [DM, pág. 130] Teorema 3.6.6.

Teorema 1.3.3. *Vectores propios de A asociados a valores propios distintos entre sí, son ortogonales.*

Demostración. Sean $\mu, \eta \in \mathbb{R}$, $\mu \neq \eta$, dos valores propios del operador A. Si $u, v \in H$ corresponden a vectores propios de μ y η, respectivamente, entonces

$$\eta\langle u, v\rangle_H = \langle \eta u, v\rangle_H = \langle Au, v\rangle_H = \langle u, Av\rangle_H = \langle u, \mu v\rangle_H = \mu\langle u, v\rangle_H. \tag{1.13}$$

Restando ambos extremos de la ecuación (1.13) y teniendo en cuenta que $\mu \neq \eta$, debe ocurrir que $\langle u, v\rangle_H = 0$. □

En lo que queda de esta sección, seguiremos de cerca los argumentos de [Ar] y [GP].

Teorema 1.3.4. *Los valores propios de A tienen la siguiente caracterización variacional.*

(i) *Si*

$$\mu_1 := \sup\{\langle Ax, x\rangle_H : \|x\|_H = 1\},$$

existe $u_1 \in H$ con $\|u_1\|_H = 1$, tal que $Au_1 = \mu_1 u_1$ y $\langle Au_1, u_1\rangle_H = \mu_1$.

(ii) *Supongamos que $2 \leq d$. Si*

$$\mu_2 := \sup\{\langle Ax, x\rangle_H : \|x\|_H = 1,\ \langle x, u_1\rangle = 0\},$$

existe $u_2 \in H$ con $\|u_2\|_H = 1$, tal que $Au_2 = \mu_2 u_2$, $\langle Au_2, u_2\rangle_H = \mu_2$ y $\langle u_2, u_1\rangle = 0$.

(iii) *Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $2 < n < d + 1$. Para $1 \leq k \leq n-1$, supongamos que u_k es un vector propio asociado a μ_k tal que $\|u_k\|_H = 1$. Si*

$$\mu_n := \sup\{\langle Ax, x\rangle_H : \|x\|_H = 1,\ \langle x, u_k\rangle_H = 0 \ \text{para}\ 1 \leq k \leq n-1\},$$

existe $u_n \in H$ con $\|u_n\|_H = 1$, tal que $Au_n = \mu_n u_n$, $\langle Au_n, u_n\rangle_H = \mu_n$ y $\langle u_n, u_k\rangle = 0$ para todo $1 \leq k \leq n-1$.

(iv) *El conjunto* $\{u_n \in H : 1 \leq n < d+1,\ n \in \mathbb{N}\}$ *de vectores propios de* A *generados de forma recursiva en los numerales* (i)-(iii) *es una base ortonormal de* H*.*

(v) *Si* μ *es un valor propio de* A*, existe* $\ell \in \mathbb{N}$ *tal que* $\mu = \mu_\ell$*. Dicho de otra manera, los elementos de* $\{\mu_n : n \in \mathbb{N}\}$ *son todos los valores propios de* A*.*

Demostración.

(i) Claramente μ_1 está bien definido. Por la propiedad de aproximación al supremo, existe una sucesión $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$\langle Av_n, v_n\rangle_H \nearrow \mu_1 \quad \text{y} \quad \|v_n\|_H = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Además, como H es reflexivo y $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ acotada, existe una subsucesión $\{v_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ que converge débilmente en H, digamos a v, y para la cual se cumple que

$$\|v\|_H \leq \liminf_{n\to\infty} \|v_{n_k}\|_H = 1. \tag{1.14}$$

En particular, ya que $\langle Av, \cdot\,\rangle_H : H \to \mathbb{R}$ es un funcional lineal continuo,

$$\langle Av, v_{n_k}\rangle_H \longrightarrow \langle Av, v\rangle_H\,. \tag{1.15}$$

De acuerdo con el Teorema 1.3.1, conforme $k \to \infty$

$$Av_{n_k} \to Av, \tag{1.16}$$

y gracias a la desigualdad de Cauchy-Schwarz y a las expresiones (1.14), (1.15) y (1.16),

$$\begin{aligned}
\left|\langle Av_{n_k}, v_{n_k}\rangle_H - \langle Av, v\rangle_H\right| &\leq \left|\langle Av_{n_k}, v_{n_k}\rangle_H - \langle Av, v_{n_k}\rangle_H\right| + \left|\langle Av, v_{n_k}\rangle_H - \langle Av, v\rangle_H\right| \\
&\leq \left|\langle Av_{n_k} - Av, v_{n_k}\rangle_H\right| + \left|\langle Av, v_{n_k} - v\rangle_H\right| \\
&\leq \|Av_{n_k} - Av\|_H \|v_{n_k}\|_H + \|Av\|_H \|v_{n_k} - v\|_H \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Más aún, como $\langle Av_{n_k}, v_{n_k}\rangle_H \to \mu_1$, la unicidad del límite implica

$$\langle Av, v\rangle_H = \mu_1. \tag{1.17}$$

Sea $S \coloneqq \mu_1 I - A$. Usando (1.14), resulta

$$\langle Sv, v\rangle_H = \langle \mu_1 v - Av, v\rangle_H = \mu_1\langle v, v\rangle_H - \langle Av, v\rangle_H = \mu_1\|v\|_H^2 - \mu_1 \leq \mu_1 - \mu_1 = 0. \tag{1.18}$$

En cambio, para $x \in H$ arbitrario, $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\langle Sx, x\rangle_H = \langle \mu_1 x - Ax, x\rangle_H = \mu_1\langle x, x\rangle_H - \langle Ax, x\rangle_H &= \|x\|^2\left(\mu_1 - \frac{\langle Ax, x\rangle_H}{\|x\|_H^2}\right) \\
&= \|x\|_H^2\left(\mu_1 - \left\langle A\left(\frac{x}{\|x\|_H}\right), \frac{x}{\|x\|_H}\right\rangle_H\right) \\
&\geq \|x\|_H^2\left(\mu_1 - \sup_{\|x\|_H=1}\langle Ax, x\rangle_H\right) \\
&= \|x\|_H^2\left(\mu_1 - \mu_1\right) = 0.
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Sean $h \in H$ y $x = v + th$, $t \in \mathbb{R}$. Teniendo en cuenta que S es un operador auto-adjunto (como consecuencia de que el operador A también lo es), de las desigualdades (1.18) y (1.19), se obtiene

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle Sx, x\rangle_H = \langle S\left(v + th\right), v + th\rangle_H &= \langle Sv, v\rangle_H + t\langle Sv, h\rangle_H + t\langle Sh, v\rangle_H + t^2\langle Sh, h\rangle_H \\ &\leq t^2\langle Sh, h\rangle_H + 2t\langle Sv, h\rangle_H. \end{aligned} \tag{1.20}$$

En términos generales, no existe ninguna restricción sobre el parámetro t en la expresión (1.20) y podemos tomar $t = r\langle Sv, h\rangle_H$, con $r \in \mathbb{R}$ aún por especificar. Por lo anterior,

$$0 \leq \left[r\langle Sv, h\rangle_H\right]^2\langle Sh, h\rangle_H + 2\left[r\langle Sv, h\rangle_H\right]\langle Sv, h\rangle_H = r\left\langle Sv, h\right\rangle_H^2\left[r\langle Sh, h\rangle_H + 2\right]. \tag{1.21}$$

Si $r < 0$ y $|r|$ es “suficientemente pequeño”, entonces

$$r\left\langle Sv, h\right\rangle_H^2 \leq 0 \quad \text{y} \quad r\langle Sh, h\rangle_H + 2 > 0.$$

Así que, la expresión de la derecha en (1.21) también es menor o igual que cero, y por consiguiente $\langle Sv, h\rangle_H = 0$. Como h es arbitrario, $Sv = \left(\mu_1 I - A\right)v = 0$ y

$$Av = \mu_1 v.$$

Para finalizar con lo propuesto, notemos que $v \neq 0$. En otro caso,

$$\mu_1 = \sup_{\|x\|_H = 1}\langle Ax, x\rangle_H = \langle Av, v\rangle_H = 0,$$

lo que contradice la hipótesis del teorema en cuestión (A es un operador definido positivo). En realidad, $\|v\|_H = 1$ como se probará en breve: si $u_1 \coloneqq \frac{v}{\|v\|_H}$, entonces u_1 satisface

$$Au_1 = \mu_1 u_1 \quad \text{y} \quad \langle Au_1, u_1\rangle_H = \langle \mu_1 u_1, u_1\rangle_H = \mu_1\left\|u_1\right\|_H^2 = \mu_1,$$

al tiempo que

$$\langle Au_1, u_1\rangle_H = \left\langle A\left(\frac{v}{\|v\|_H}\right), \frac{v}{\|v\|_H}\right\rangle_H = \frac{\mu_1}{\|v\|_H^2}.$$

Luego $u_1 = v$.

(ii) Por el numeral (i), existe un vector propio $u_1 \in H$ asociado al valor propio μ_1 tal que $\|u_1\|_H = 1$. Si $d \geq 2$, entonces $\operatorname{span}\{u_1\} \subsetneq H$ y $Q_1 \coloneqq \{u_1\}^{\perp} \neq \{0\}$ es un subespacio vectorial cerrado de H, es decir, un espacio de Hilbert en si mismo. Además, para todo $x \in Q_1$,

$$\langle Ax, u_1\rangle_H = \langle x, Au_1\rangle_H = \langle x, \mu_1 u_1\rangle_H = \mu_1\left\langle x, u_1\right\rangle_H = 0$$

y en ese sentido, decimos que Q_1 es un subespacio invariante bajo A, esto es, $A\left(Q_1\right) \subset Q_1$. Sea $A_1 \coloneqq A|_{Q_1}$. El operador $A_1 : Q_1 \to Q_1$ es lineal, compacto, auto-adjunto y definido positivo. Por lo tanto, como

$$\mu_2 = \sup\left\{\langle A_1 x, x\rangle_H : \|x\|_H = 1,\ x \in Q_1\right\},$$

el numeral (i) aplicado a A_1 concluye que existe un elemento $u_2 \in Q_1$ con $\|u_2\|_H = 1$, tal que

$$A_1 u_2 = Au_2 = \mu_2 u_2 \quad \text{y} \quad \langle Au_2, u_2\rangle_H = \mu_2,$$

completando el resultado.

(iii) Si $n < d+1$, entonces $\operatorname{span}\{u_1, \cdots u_{n-1}\} \subsetneq H$ y $Q_{n-1} := \{u_1, \cdots, u_{n-1}\}^{\perp} \neq \{0\}$ es un subespacio vectorial cerrado de H, es decir, un espacio de Hilbert en si mismo. Además, para todo $x \in Q_{n-1}$ y $1 \leq k \leq n-1$,

$$\langle Ax, u_k \rangle = \langle x, Au_k \rangle = \langle x, \mu_k u_k \rangle = \mu_k \langle x, u_k \rangle = 0,$$

de modo que Q_{n-1} es un subespacio invariante bajo A. Sea $A_{n-1} := A|_{Q_{n-1}}$. El operador $A_{n-1} : Q_{n-1} \to Q_{n-1}$ es lineal, compacto, auto-adjunto y definido positivo. Por lo tanto, como

$$\mu_n = \sup \left\{ \langle A_{n-1}x, x \rangle_H : \|x\|_H = 1,\ x \in Q_{n-1} \right\},$$

el numeral (i) aplicado a A_{n-1} concluye que existe un elemento $u_n \in Q_{n-1}$ con $\|u_n\|_H = 1$, tal que

$$A_{n-1}u_n = Au_n = \mu_n u_n \quad \text{y} \quad \langle Au_n, u_n \rangle_H = \mu_n.$$

(iv) Si $d = \dim H < \infty$, $\{u_n \in H : 1 \leq n \leq d, n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto ortonormal de d vectores linealmente independientes y, por definición, una base de H. Por el contrario, si $d = \infty$ (ver Proposición 1.3.3), el conjunto de valores propios de A puede escribirse como el rango de una sucesión $\{\hat{\mu}_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $\hat{\mu}_1 \geq \hat{\mu}_2 \geq \cdots \geq \hat{\mu}_k \geq \cdots$ y $\lim\limits_{k\to\infty} \hat{\mu}_k = 0$. Sea $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de vectores propios de A generada de forma recursiva según el numeral (iii). Supongamos que $\mathscr{H} := \overline{\operatorname{span}\{u_n : n \in \mathbb{N}\}} \neq H$. Por el Teorema 1.3.2, si $x \in H \backslash \mathscr{H}$, existe un único elemento $v \in \mathscr{H}^{\perp} := \{y \in H : \langle y, u_n \rangle_H = 0, n \in \mathbb{N}\}$, $v \neq 0$, tal que

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, u_k \rangle u_k + v.$$

En particular, $\mathscr{H}^{\perp} \subset Q_n = \{u_1, \cdots, u_n\}^{\perp}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y

$$\left\langle A\left(\frac{v}{\|v\|_H}\right), \frac{v}{\|v\|_H} \right\rangle_H \leq \sup_{\substack{z \in Q_n \\ \|z\|_H = 1}} \langle Az, z \rangle_H = \mu_{n+1}, \tag{1.22}$$

donde μ_{n+1} es un valor propio de A con base en el numeral (iii). En consecuencia, como $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{\hat{\mu}_k\}_{k=1}^{\infty}$, al tomar el límite cuando $n \to \infty$ en (1.22), el lado derecho tiende a cero mientras que el lado izquierdo no depende de n. Así, $\langle Av, v \rangle = 0$ y dado que A es definido positivo, necesariamente $v = 0$. La contradicción demuestra que $\mathscr{H}^{\perp} = \{0\}$ y $H = \overline{\operatorname{span}\{u_n : n \in \mathbb{N}\}}$.

(v) Razonemos por el absurdo y supongamos que μ es un valor propio de A tal que $\mu \neq \mu_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $w \in H$ es una función propia asociada a μ tal que $\|w\|_H = 1$, por el Teorema 1.3.3,

$$\langle w, u_n \rangle_H = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En estas condiciones, $\{u_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{w\}$ es un conjunto ortonormal que contiene propiamente a $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$. No obstante, este hecho contradice el numeral (iv), a saber, que $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto ortonormal maximal. $\square$

Observación 1.3.1. Antes de continuar, conviene destacar dos hechos importantes:

(i) La caracterización variacional del Teorema 1.3.4 es consistente con el hecho de enumerar cada valor propio de acuerdo a su multiplicidad. En efecto, supongamos que μ_n es un valor propio de A tal que

$$\mu_{n-1} > \mu_n = \mu_{n+1} > \mu_{n+2} \geq \cdots .$$

Sea $Q_{n-1} \coloneqq \{u_1, \ldots, u_{n-1}\}^{\perp}$ y $Q_n \coloneqq \{u_1, \ldots, u_n\}^{\perp}$. Debemos mostrar que

$$\sup \{\langle Ax, x\rangle_H : \|x\|_H = 1, x \in Q_{n-1}\} = \sup \{\langle Ax, x\rangle_H : \|x\|_H = 1, x \in Q_n\} . \tag{1.23}$$

Comparando ambos conjuntos en (1.23), es inmediato que

$$\sup \{\langle Ax, x\rangle_H : \|x\|_H = 1, x \in Q_{n-1}\} \geq \sup \{\langle Ax, x\rangle_H : \|x\|_H = 1, x \in Q_n\} ;$$

luego, bastará demostrar la desigualdad opuesta. Sea $x \in H$ tal que $x \in \{u_1, \ldots, u_{n-1}\}^{\perp}$ y $\|x\|_H = 1$. Como $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una base ortonormal para H y A un operador lineal continuo,

$$\langle Ax, x\rangle_H = \left\langle A\left(\sum_{i=n}^{\infty} \langle x, u_i\rangle_H u_i\right), x\right\rangle_H = \left\langle \sum_{i=n}^{\infty} \langle x, u_i\rangle_H \mu_i u_i, x\right\rangle_H = \sum_{i=n}^{\infty} \mu_i \langle x, u_i\rangle_H^2.$$

Definamos y tal que sus proyecciones en la base $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ satisfagan:

$$\langle y, u_i\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq n \\ \sqrt{\langle x, u_n\rangle^2 + \langle x, u_{n+1}\rangle^2} & \text{si } i = n+1 \\ \langle x, u_i\rangle & \text{si } i \geq n+2. \end{cases}$$

Así las cosas, $y \in \{u_1, \ldots, u_n\}^{\perp}$ y

$$\|y\|_H^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \langle y, u_i\rangle_H^2 = \langle x, u_n\rangle_H^2 + \langle x, u_{n+1}\rangle_H^2 + \sum_{i=n+2}^{\infty} \langle x, u_i\rangle_H^2 = \sum_{i=n}^{\infty} \langle x, u_i\rangle_H^2 = 1.$$

Además, en vista de que $\mu_n = \mu_{n+1}$,

$$\begin{aligned}\langle Ay, y\rangle_H &= \mu_{n+1}\left(\langle x, u_n\rangle_H^2 + \langle x, u_{n+1}\rangle_H^2\right) + \sum_{i=n+2}^{\infty} \mu_i \langle x, u_i\rangle_H^2 \\ &= \mu_n \langle x, u_n\rangle_H^2 + \mu_{n+1} \langle x, u_{n+1}\rangle_H^2 + \sum_{i=n+2}^{\infty} \mu_i \langle x, u_i\rangle_H^2 = \sum_{i=n}^{\infty} \mu_i \langle x, u_i\rangle_H^2 = \langle Ax, x\rangle_H.\end{aligned}$$

De esta manera,

$$\sup_{\substack{z \in Q_n \\ \|z\|_H = 1}} \langle Az, z\rangle_H \geq \langle Ay, y\rangle_H = \langle Ax, x\rangle_H. \tag{1.24}$$

Puesto que $x \in \{u_1, \ldots, u_{n-1}\}^{\perp}$ con $\|x\|_H = 1$ se eligió arbitrariamente, al tomar supremo del lado derecho de (1.24) se prueba la desigualdad deseada, de donde se sigue la igualdad (1.23).

(ii) Con la finalidad de usar

$$\sup_{\|x\|_H=1} \langle Ax, x\rangle_H \quad \text{y} \quad \sup_{x\neq 0} \frac{\langle Ax, x\rangle_H}{\|x\|_H^2}$$

indistintamente en lo que resta del trabajo, demostramos la identidad

$$\sup_{\|x\|_H=1} \langle Ax, x\rangle_H = \sup_{x\neq 0} \frac{\langle Ax, x\rangle_H}{\|x\|_H^2}.$$

Sean

$$B_1 := \{\langle Ax, x\rangle_H : \|x\|_H = 1\} \quad \text{y} \quad B_2 := \left\{ \left\langle A\left(\frac{1}{\|x\|_H}x\right), \frac{1}{\|x\|_H}x \right\rangle_H : x \neq 0 \right\}.$$

Observemos que

$$\sup_{\|x\|_H=1} \langle Ax, x\rangle_H = \sup_{\|x\|_H=1} \left\langle A\left(\frac{1}{\|x\|_H}x\right), \frac{1}{\|x\|_H}x \right\rangle_H \leq \sup_{x\neq 0} \left\langle A\left(\frac{1}{\|x\|_H}x\right), \frac{1}{\|x\|_H}x \right\rangle_H.$$

Por otro lado, si $\left\langle A\left(\frac{1}{\|x\|_H}x\right), \frac{1}{\|x\|_H}x \right\rangle_H \in B_2$ y $v := \frac{1}{\|x\|_H}x$, entonces $\langle Av, v\rangle_H \in B_1$ y $B_2 \subset B_1$. Así,

$$\sup_{x\neq 0} \left\langle A\left(\frac{1}{\|x\|_H}x\right), \frac{1}{\|x\|_H}x \right\rangle_H \leq \sup_{\|x\|_H=1} \langle Ax, x\rangle_H,$$

lo cual prueba la otra desigualdad.

El próximo lema es útil en la prueba de los Teoremas 1.3.5 y 1.3.6.

Lema 1.3.1. *Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $2 \leq n < d+1$. Supongamos que $\{w_i \in H : 1 \leq i \leq n,\, i \in \mathbb{N}\}$ es una colección arbitraria de vectores ortonormales. Si $\{v_k \in H : 1 \leq k \leq n-1, k \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto cuyos elementos son ortogonales entre sí, entonces existe $w := \sum_{i=1}^{n} \beta_i w_i \in H$ tal que*

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2 = 1 \quad \textit{y} \quad \langle w, v_k\rangle_H = 0 \quad \forall k \in \{1, ..., n-1\}.$$

Demostración. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq k \leq n-1$. Reemplazando $w := \sum_{i=1}^{n} \beta_i w_i$ en $\langle w, v_k\rangle_H = 0$ y empleando las propiedades del producto interno, tenemos

$$\langle w, v_k\rangle_H = \langle w_1, v_k\rangle_H \beta_1 + \langle w_2, v_k\rangle_H \beta_2 + \cdots + \langle w_n, v_k\rangle_H \beta_n = 0. \tag{1.25}$$

Si suponemos ahora que k varía, es fácil ver que (1.25) conforma un conjunto de $n-1$ ecuaciones lineales con n incógnitas. De la teoría de álgebra lineal, es bien sabido que el conjunto de soluciones de un sistema homogéneo tiene estructura de espacio vectorial. En tal caso, es suficiente elegir un vector solución normalizado para terminar la prueba. $\square$

A continuación, mostramos una caracterización alternativa del n-ésimo valor propio de A. Aunque la escritura de μ_n en el siguiente teorema no es mucho más clara con relación al Teorema 1.3.4 (iii), tiene la ventaja de no depender del conocimiento previo de los vectores propios. Este enfoque tendrá varias consecuencias interesantes en los Capítulos 2 y 3.

Teorema 1.3.5. *Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $2 \leq n < d+1$. Supongamos μ_n definido como en el Teorema 1.3.4* (ii)-(iii). *Si $\mathscr{L}_{n-1}$ es el conjunto de todos los subespacios de H de dimensión $n-1$, entonces*

$$\mu_n = \inf_{Y \in \mathscr{L}_{n-1}} \sup_{\substack{x \in Y^\perp \\ \|x\|_H = 1}} \langle Ax, x \rangle_H = \inf_{Y \in \mathscr{L}_{n-1}} \sup_{\substack{x \in Y^\perp \\ x \neq 0}} \frac{\langle Ax, x \rangle_H}{\|x\|_H^2}. \tag{1.26}$$

Demostración. Sea $\{u_k \in H : 1 \leq k < d+1,\, k \in \mathbb{N}\}$ el conjunto de funciones propias de A generadas de forma recursiva según el Teorema 1.3.4 (i)-(iii). Definamos

$$H_{n-1} = \operatorname{span}\{u_k : 1 \leq k \leq n-1\}.$$

Con base en el Teorema 1.3.4 (iii),

$$\mu_n = \sup_{\substack{x \in H_{n-1}^\perp \\ \|x\|_H = 1}} \langle Ax, x \rangle_H,$$

y considerando que $H_{n-1} \in \mathscr{L}_{n-1}$,

$$\inf_{Y \in \mathscr{L}_{n-1}} \sup_{\substack{x \in Y^\perp \\ \|x\|_H = 1}} \langle Ax, x \rangle_H \leq \sup_{\substack{x \in H_{n-1}^\perp \\ \|x\|_H = 1}} \langle Ax, x \rangle_H = \mu_n. \tag{1.27}$$

Para verificar la desigualdad contraria a (1.27), supongamos que $\{v_k \in H : 1 \leq k \leq n-1\}$ es un conjunto de vectores arbitrarios no nulos y mutuamente ortogonales. Definamos $Y = \operatorname{span}\{v_k : 1 \leq k \leq n-1\}$. Por el Lema 1.3.1, existe $u = \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i \in H$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2 = 1 \quad \text{y} \quad \langle u, v_k \rangle_H = 0 \quad \forall k \in \{1, ..., n-1\},$$

es decir, $u \in Y^\perp$ y $\|u\|_H = 1$. Desarrollando $\langle Au, u \rangle_H$ y tomando en cuenta que $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_n$ (ver Proposición 1.3.3), obtenemos:

$$\begin{aligned}
\langle Au, u \rangle_H = \left\langle A\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i\right), \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i \right\rangle_H &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \beta_i A u_i, \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i \right\rangle_H \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mu_i u_i, \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i \right\rangle_H \\
&= \sum_{i=1}^{n} \beta_i^2 \mu_i \geq \mu_n \sum_{i=1}^{n} \beta_i^2 = \mu_n.
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\sup_{\substack{x \in Y^\perp \\ \|x\|_H = 1}} \langle Ax, x \rangle_H \geq \langle Au, u \rangle_H \geq \mu_n \quad \forall Y \in \mathscr{L}_{n-1}. \tag{1.28}$$

Tomar ínfimo en (1.28) variando Y en el conjunto de subespacios de dimensión $n-1$ de H concluye la prueba de la igualdad en (1.27). La segunda identidad de (1.26), se sigue de la Observación 1.3.1 (ii) y el resultado anterior. $\square$

Un examen cuidadoso del Teorema 1.3.5 muestra que la caracterización variacional de μ_n exige tomar el supremo sobre un subespacio, posiblemente, de dimensión infinita. Sortear esa cuestión da lugar al siguiente teorema.

Teorema 1.3.6. *Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $2 \leq n < d+1$. Supongamos μ_n definido como en el Teorema 1.3.4* (ii)-(iii). *Si $\mathscr{L}_n$ es el conjunto de todos los subespacios de H de dimensión n, entonces*

$$\mu_n = \sup_{Y\in\mathscr{L}_n} \inf_{\substack{x\in Y\\ \|x\|_H=1}} \langle Ax,x\rangle_H = \sup_{Y\in\mathscr{L}_n} \inf_{\substack{x\in Y\\ x\neq 0}} \frac{\langle Ax,x\rangle_H}{\|x\|_H^2}. \tag{1.29}$$

Demostración. Sea $\{u_k \in H : 1 \leq k < d+1,\ k \in \mathbb{N}\}$ el conjunto de funciones propias de A generadas a partir del Teorema 1.3.4 (i)-(iii). Definamos $H_n = \operatorname{span}\{u_k : 1 \leq k \leq n\}$. Si $w \in H_n$ y $\|w\|_H = 1$, existen constantes $\alpha_1, ..., \alpha_n$ tales que $w = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k u_k$ y $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k^2 = 1$. Combinando el hecho anterior y la Proposición 1.3.3, resulta

$$\begin{aligned}\langle Aw,w\rangle_H = \left\langle A\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k u_k\right), \sum_{k=1}^n \alpha_k u_k\right\rangle_H &= \left\langle \sum_{k=1}^n \alpha_k A u_k, \sum_{k=1}^n \alpha_k u_k\right\rangle_H \\ &= \left\langle \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu_k u_k, \sum_{k=1}^n \alpha_k u_k\right\rangle_H \\ &= \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \mu_k \geq \mu_n \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 = \mu_n.\end{aligned} \tag{1.30}$$

De la elección arbitraria de $w \in H_n$ y la ecuación (1.30), es inmediato que

$$\inf_{\substack{x\in H_n\\ \|x\|_H=1}} \langle Ax,x\rangle_H \geq \mu_n,$$

y

$$\sup_{Y\in\mathscr{L}_n} \inf_{\substack{x\in Y\\ \|x\|_H=1}} \langle Ax,x\rangle_H \geq \inf_{\substack{x\in H_n\\ \|x\|_H=1}} \langle Ax,x\rangle_H \geq \mu_n. \tag{1.31}$$

Para comprobar la desigualdad opuesta a (1.31), supongamos que $Y \subset H$ es un subespacio arbitrario de dimensión n y $\{v_k : 1 \leq k \leq n\}$ una base ortonormal de Y. Por el Lema 1.3.1, existe $v = \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k v_k \in H$ tal que

$$\sum_{k=1}^n \beta_k^2 = 1 \quad \text{y} \quad \langle v, u_j\rangle_H = 0 \quad \forall j \in \{1, ..., n-1\},$$

esto es, $v \in \{u_1, \cdots, u_{n-1}\}^{\perp}$ y $\|v\|_H = 1$. De acuerdo con el Teorema 1.3.4 (iii) y las condiciones impuestas al elemento $v \in H$,

$$\inf_{\substack{x\in Y\\ \|x\|_H=1}} \langle Ax,x\rangle_H \leq \langle Av,v\rangle_H \leq \mu_n. \tag{1.32}$$

Más aún, dado que el extremo derecho de (1.32) no depende de Y,

$$\sup_{Y\in\mathscr{L}_n} \inf_{\substack{x\in Y\\ \|x\|_H=1}} \langle Ax,x\rangle_H \leq \mu_n. \tag{1.33}$$

Las expresiones (1.31) y (1.33) completan la demostración de la primera igualdad en (1.29). La segunda identidad:

$$\mu_n = \sup_{Y \in \mathscr{L}_n} \inf_{\substack{x \in Y \\ x \neq 0}} \frac{\langle Ax, x \rangle_H}{\|x\|_H^2} \tag{1.34}$$

se deduce de la Observación 1.3.1 (ii) y el caso anterior. □

Teorema 1.3.7. *Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $2 \leq n < d+1$. Para $1 \leq k \leq n$, supongamos que u_k es una función propia asociada a μ_k tal que $\|u_k\|_H = 1$. Si $H_n := \operatorname{span}\{u_1, ..., u_n\}$, entonces*

$$\mu_n = \inf_{\substack{x \in H_n \\ \|x\|_H = 1}} \langle Ax, x \rangle_H = \inf_{\substack{x \in H_n \\ x \neq 0}} \frac{\langle Ax, x \rangle_H}{\|x\|_H^2}.$$

Demostración. El resultado es inmediato a partir de la prueba de la Proposición 1.3.6; concretamente, de las desigualdades (1.31) y (1.33). □

Observación 1.3.2. Puesto que el ínfimo y el supremo se alcanzan en cualquiera de las caracterizaciones anteriores, los resultados obtenidos podrían escribirse en términos de mínimos y máximos.

Capítulo

2 Valores propios del operador $-\Delta$ con condición de Dirichlet

Este capítulo está dedicado a estudiar los principales aspectos del problema de valores propios para el operador $-\Delta$ con condición de Dirichlet, fijando como punto de partida la teoría abstracta del Capítulo 1, de la que hacemos amplio uso. En la Sección 2.1, comenzamos discutiendo varios conceptos relacionados con la formulación variacional del problema de Dirichlet homogéneo. En la Sección 2.2, definimos de manera precisa la noción de valor propio para el operador $-\Delta$ con condición de Dirichlet y empleamos algunas técnicas clásicas de la teoría lineal de ecuaciones diferenciales parciales (elípticas) para demostrar propiedades cualitativas de los valores y funciones propias correspondientes.

A lo largo de este capítulo y a menos que se indique lo contrario, $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ es un conjunto no vacío, abierto, acotado y conexo.

2.1. Resultados preliminares

Para una función $u \in C^2(\Omega)$, el operador de Laplace o Laplaciano, se define como:

$$\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u) = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}. \tag{2.1}$$

Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Consideremos el problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{en } \Omega, \\ \quad u &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.2}$$

donde $\partial\Omega$ denota la frontera de Ω. La condición $u = 0$ en $\partial\Omega$ se acostumbra llamar *condición de Dirichlet homogénea* (o simplemente condición de Dirichlet, cuando no haya lugar a confusión).

Definición 2.1.1. *Una función $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ que satisface* (2.2) *punto a punto se llama solución clásica de* (2.2).

Una solución clásica de (2.2), si existe, satisface la siguiente propiedad:

Proposición 2.1.1. *Si* $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ *es una solución clásica de* (2.2), *entonces*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx, \quad \forall v \in C_0^\infty (\Omega) .$$

Demostración. Sea $v \in C_0^\infty (\Omega)$. Supongamos que $u \in C^2 \left(\overline{\Omega} \right)$ es una solución clásica de (2.2). Multiplicando por v ambos lados de $-\Delta u = f$ e integrando en Ω, nos queda

$$-\int_\Omega (\Delta u) \, v \, dx = \int_\Omega f v \, dx. \tag{2.3}$$

Por la Fórmula de integración por partes, Proposición 1.1.1, sabemos que

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx = -\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v \, dx \quad \forall i \in \{1, ..., n\} ; \tag{2.4}$$

de esta manera, después de sumar (2.4) para todo $i \in \{1, ..., n\}$, obtenemos:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = -\int_\Omega (\Delta u) \, v \, dx. \tag{2.5}$$

Las identidades (2.5) y (2.3), en conjunto con la elección arbitraria de $v \in C_0^\infty (\Omega)$, completan la prueba. □

La Proposición 2.1.1 motiva la siguiente definición.

Definición 2.1.2. *Una función* $u \in H_0^1 (\Omega)$ *que satisface la ecuación*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1 (\Omega) , \tag{2.6}$$

se denomina solución débil del problema (2.2).

La Proposición 2.1.2 indica que una solución débil de (2.2), en circunstancias apropiadas, realmente es una solución clásica de (2.2).

Proposición 2.1.2. *Sea* Ω *de clase* C^1. *Dada* $f \in L^2 (\Omega) \cap C \left(\overline{\Omega} \right)$, *si* $u \in H_0^1 (\Omega) \cap C^2 \left(\overline{\Omega} \right)$ *es una solución débil del problema* (2.2), *entonces* u *es solución clásica de* (2.2).

Demostración. Por hipótesis, $u \in H_0^1 (\Omega) \cap C^2 \left(\overline{\Omega} \right)$ satisface

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1 (\Omega) . \tag{2.7}$$

Tomando cualquier $v \in C_0^\infty (\Omega)$ en (2.7) e invocando la fórmula de Green, ecuación (2.5), resulta

$$-\int_\Omega (\Delta u) \, v \, dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx. \tag{2.8}$$

Después de reunir los extremos y sacar factor común, la expresión (2.8) se transforma en

$$\int_\Omega (\Delta u + f) \, v \, dx = 0, \quad \forall v \in C_0^\infty (\Omega) . \tag{2.9}$$

Por lo tanto, luego de aplicar el Lema 1.2.1 a (2.9),

$$\Delta u + f = 0 \quad \text{c.t.p.} \quad \text{en} \quad \Omega,$$

y por la continuidad de $\Delta u + f$,

$$\Delta u + f \equiv 0 \quad \text{en} \quad \Omega.$$

Por último, para confirmar que se trata de una solución clásica $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ de (2.2), basta probar que ella satisface, además de la ecuación diferencial $-\Delta u = f$, la condición de frontera $u = 0$ en $\partial\Omega$. En efecto, como $u \in H_0^1(\Omega) \cap C^2\left(\overline{\Omega}\right)$, según el Teorema 1.2.3, $u = 0$ en $\partial\Omega$. $\square$

Las ideas que permiten estimar el grado de regularidad de una solución débil son bastantes delicadas y se omiten en este trabajo. El lector interesado puede consultar los textos de referencia: [B] Sección 9.6 y [Ev] Sección 6.3.

2.2. Valores propios y descomposición espectral

En términos generales, el problema de valores propios para el operador $-\Delta$ con condición de Dirichlet, consiste en hallar los valores $\lambda \in \mathbb{R}$, para los cuales existe $u \equiv u_\lambda \neq 0$, tal que

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u \quad \text{en } \Omega, \\ \quad u &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.10}$$

Un procedimiento análogo al descrito en la demostración de la Proposición 2.1.1, motiva la definición precisa de solución débil para el problema de valores propios (2.10).

Definición 2.2.1. *Una solución débil de* (2.10) *es una pareja* (λ, u), *con* $\lambda \in \mathbb{R}$ *y* $u \in H_0^1(\Omega)$, *que satisface*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \lambda \int_\Omega uv \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.11}$$

Un número real λ *es un valor propio de* $-\Delta$ *con condición de Dirichlet si existe* $u \in H_0^1(\Omega)$, $u \neq 0$, *tal que* (λ, u) *es solución débil de* (2.10). *En ese caso, decimos que* $u \in H_0^1(\Omega)$ *es una función propia de* $-\Delta$ *con condición de Dirichlet asociada al valor propio* λ.

El próximo teorema juega un papel fundamental en el estudio de los valores propios del operador $-\Delta$ con condición de Dirichlet.

Teorema 2.2.1.

(i) *Dada* $f \in L^2(\Omega)$, *el problema con valores en la frontera*

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{en } \Omega, \\ \quad u &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.12}$$

admite una única solución débil $u := Rf \in H_0^1(\Omega)$ *en el sentido de la Definición 2.1.2.*

(ii) *El operador*

$$\begin{aligned} R : L^2(\Omega) &\longrightarrow H_0^1(\Omega) \\ f \quad &\longmapsto u = Rf, \end{aligned}$$

es lineal, continuo e inyectivo.

(iii) *Si* $K : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ *es la inyección compacta dada por el Teorema de Rellich-Kondrachov (ver Teorema 1.2.2), los operadores* $S := K \circ R : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ *y* $S^\star := R \circ K : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ *son lineales, compactos, auto-adjuntos y definidos positivos.*

(iv) *El conjunto de valores propios de* S *puede escribirse como el rango de una sucesión* $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$*, decreciente y estrictamente positiva, tal que* $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = 0$.

(v) *Existe una base ortonormal* $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ *para el espacio de Hilbert* $\left(L^2(\Omega), \langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2}\right)$ *tal que, para cada* $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in L^2(\Omega)$ *es una función propia asociada al valor propio* μ_n *de* S.

(vi) *Los valores propios del operador* $-\Delta$ *con condición de Dirichlet son positivos.*

(vii) *Las siguientes propiedades son equivalentes:*

(a) λ *es un valor propio de* $-\Delta$ *con condición de Dirichlet (en el sentido de la Definición 2.2.1) y* $u \in H_0^1(\Omega)$ *es una función propia correspondiente a* λ,

(b) $\mu = \frac{1}{\lambda}$ *es un valor propio de* $S^\star$ *y* $u \in H_0^1(\Omega)$ *es una función propia correspondiente al valor propio* μ,

(c) $\mu = \frac{1}{\lambda}$ *es un valor propio de* S *y* $u \in L^2(\Omega)$ *es una función propia correspondiente al valor propio* μ.

Demostración.

(i) Sea

$$\begin{aligned} \psi : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v \quad &\longmapsto \psi(v) := \int_\Omega f v \, dx. \end{aligned}$$

Por hipótesis, $f \in L^2(\Omega)$ y de acuerdo con las desigualdades de Cauchy-Schwarz y Poincaré (con constante C),

$$|\psi(v)| \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq C\|f\|_{L^2}\|v\|_{H_0^1} < \infty.$$

En otras palabras, ψ está bien definido y es un funcional lineal continuo. Por el Teorema de representación de Riesz, existe un único elemento $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx =: \langle u, v\rangle_{H_0^1} = \psi(v) = \int_\Omega f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

esto es, existe una única solución débil del problema (2.12).

(ii) La buena definición del operador R es consecuencia de (i). Las demás propiedades se prueban a continuación:

Linealidad: Sean $f_1, f_2 \in L^2(\Omega)$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Como $\hat{f} := \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \in L^2(\Omega)$, existe una única función $\hat{u} \in H_0^1(\Omega)$ tal que $R\hat{f} = \hat{u}$. Si $u_1 := Rf_1$ y $u_2 := Rf_2$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) \cdot \nabla v \, dx &= \alpha_1 \int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla v \, dx + \alpha_2 \int_\Omega \nabla u_2 \cdot \nabla v \, dx \\
&= \alpha_1 \int_\Omega f_1 v \, dx + \alpha_2 \int_\Omega f_2 v \, dx \\
&= \int_\Omega (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) v \, dx \\
&= \int_\Omega \hat{f} v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),
\end{aligned}$$

es decir, $R(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = \alpha_1 R f_1 + \alpha_2 R f_2$. El operador R es lineal.

Continuidad: Sean $f \in L^2(\Omega)$ y $u = Rf \in H_0^1(\Omega)$. Si C es una constante que verifica la desigualdad de Poincaré, entonces

$$\begin{aligned}
\|Rf\|_{H_0^1}^2 = \|u\|_{H_0^1}^2 = \langle u, u \rangle_{H_0^1} &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \, dx \\
&= \int_\Omega f u \, dx \\
&\leq \|f\|_{L^2} \|u\|_{L^2} \\
&\leq C\|f\|_{L^2} \|u\|_{H_0^1} = C\|f\|_{L^2} \|Rf\|_{H_0^1}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Cancelando $\|u\|_{H_0^1}$ en ambos lados de (2.13), resulta

$$\|Rf\|_{H_0^1} \leq C \|f\|_{L^2},$$

o sea que el operador lineal R es continuo.

Inyectividad: Basta notar que $\ker(R) = \{0\}$.

(iii) El operador $K : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ es lineal, compacto e inyectivo. Además, S y $S^\star$ están bien definidos y en ambos casos cumplen las siguientes propiedades:

Linealidad: la compuesta de los operadores lineales R y K es lineal.

Compacidad: S y $S^\star$ son funciones compuestas, a saber, del operador lineal continuo R que asigna a cada $f \in L^2(\Omega)$ la única solución $u \in H_0^1(\Omega)$ del problema (2.12) y del operador compacto $K : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ dado por el Teorema de Rellich-Kondrachov. La compacidad de S y $S^\star$ es inmediata a partir de la Proposición 1.3.1.

Auto-adjunto: Sean $f, g \in L^2(\Omega)$ y $u, w \in H_0^1(\Omega)$ tales que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{2.14}$$

y

$$\int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega g v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.15}$$

Si $v = w \equiv Sg$ en (2.14) y $v = u \equiv Sf$ en (2.15), entonces

$$\langle Sf, g\rangle_{L^2} = \int_\Omega ug\, dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w\, dx = \int_\Omega fw\, dx = \langle f, Sg\rangle_{L^2},$$

es decir, S es un operador auto-adjunto. Si $f, g \in H_0^1(\Omega)$, haciendo $v = g$ en (2.14) y $v = f$ en (2.15), obtenemos

$$\langle S^\star f, g\rangle_{H_0^1} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla g\, dx = \int_\Omega fg\, dx = \int_\Omega \nabla f \cdot \nabla w\, dx = \langle f, S^\star g\rangle_{H_0^1},$$

de manera que $S^\star$ es un operador auto-adjunto.

Definido Positivo: Para $f \in L^2(\Omega)$, la única solución débil Sf del problema (2.12) satisface

$$\langle Sf, v\rangle_{H_0^1} = \langle f, v\rangle_{L^2} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.16}$$

Si $v = Sf$ en (2.16), entonces

$$\langle Sf, f\rangle_{L^2} = \langle Sf, Sf\rangle_{H_0^1} = \|\nabla Sf\|_2^2 \geq 0.$$

En particular, siempre que $\langle Sf, f\rangle_{L^2} = 0$, $\nabla Sf = 0$ y

$$\int_\Omega \nabla Sf \cdot \nabla v\, dx = \int_\Omega fv\, dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Como $|\Omega| < \infty$, $f \in L^1(\Omega)$ (ver Proposición 1.2.1) y con motivo del Lema 1.2.1, $f = 0$ c.t.p. $x \in \Omega$ y por lo tanto, $f = 0$ en $L^2(\Omega)$.

Por otro lado, si $f \in H_0^1(\Omega)$,

$$\langle S^\star f, v\rangle_{H_0^1} = \langle f, v\rangle_{L^2} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.17}$$

Eligiendo $f = v$ en (2.17), $\langle S^\star f, f\rangle_{H_0^1} = \langle f, f\rangle_{L^2} = \|f\|_2^2 \geq 0$ y $\langle S^\star f, f\rangle_{H_0^1} = 0$ si y sólo si $f = 0$ en $L^2(\Omega)$. Así, por el Lema 1.2.2, $\langle S^\star f, f\rangle_{H_0^1} = 0$ implica que $f = 0$ en $H_0^1(\Omega)$.

(iv) Según la Proposición 1.3.3 y las propiedades de S descritas en el numeral (iii),

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_n \geq \cdots,$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = 0$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mu_n \neq 0$ (de otro modo, existiría un elemento $u \in L^2(\Omega)$, $u \neq 0$, tal que $Su = \mu_n u = 0$. Absurdo, ya que S es un operador inyectivo).

(v) Considerando que S es un operador lineal, compacto y auto-adjunto y $L^2(\Omega)$ un espacio de Hilbert separable, de acuerdo con el Teorema 1.3.4 (iv), existe una base ortonormal $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ de $L^2(\Omega)$, tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, u_n es una función propia asociada a μ_n.

(vi) Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ un valor propio de $-\Delta$ con condición de Dirichlet y $u \in H_0^1(\Omega)$ una función propia asociada a λ. Visto que (λ, u) satisface

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx = \lambda \int_\Omega uv\, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{2.18}$$

y $\|u\|_{L^2}^2 > 0$ (ver el Lema 1.2.2), toda vez que $v = u$ en (2.18)

$$\lambda = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx}{\int_\Omega u^2\, dx} = \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_{L^2}^2} > 0.$$

(vii) (viia) $\implies$ (viib): Supongamos que $\lambda > 0$ es un valor propio de $-\Delta$ con condición de Dirichlet y $u \in H_0^1(\Omega)$, $u \neq 0$, es una función propia correspondiente a λ. Para todo $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \langle u, v \rangle_{H_0^1} = \lambda \langle u, v \rangle_{L^2} = \langle \lambda u, v \rangle_{L^2} = \langle S^\star(\lambda u), v \rangle_{H_0^1} = \langle \lambda S^\star u, v \rangle_{H_0^1},$$

y por esa razón,

$$S^\star u = \frac{1}{\lambda} u.$$

Luego, $\mu = \frac{1}{\lambda}$ es un valor propio de $S^\star$ y $u \in H_0^1(\Omega)$ una función propia asociada a μ.

(viib) $\implies$ (viic): Si $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ es una función propia asociada al valor propio μ de $S^\star$, entonces $u \neq 0$ en $L^2(\Omega)$ y

$$Su = S^\star u = \mu u.$$

Así, μ es un valor propio de S y $u \in L^2(\Omega)$ es una función propia correspondiente a μ.

(viic) $\implies$ (viia): Supongamos ahora que $\mu > 0$ es un valor propio de S y $u \in L^2(\Omega)$, $u \neq 0$, es una función propia asociada a μ. Como $S\left(L^2(\Omega)\right) \subset H_0^1(\Omega)$,

$$u = \frac{1}{\mu} Su \in H_0^1(\Omega), \tag{2.19}$$

y al combinar la definición de solución débil y la expresión (2.19)

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1} = \left\langle \frac{1}{\mu} Su, v \right\rangle_{H_0^1} = \left\langle S\left(\frac{1}{\mu} u\right), v \right\rangle_{H_0^1} = \left\langle \frac{1}{\mu} u, v \right\rangle_{L^2} = \frac{1}{\mu} \langle u, v \rangle_{L^2}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Por lo anterior, $\lambda = \frac{1}{\mu}$ es un valor propio de $-\Delta$ con condición de Dirichlet y $u \in H_0^1(\Omega)$ una función propia asociada a λ. □

Observación 2.2.1. Con base en el Teorema 2.2.1, S (resp. $S^\star$) suele llamarse operador menos laplaciano inverso y se denota $(-\Delta)^{-1}$ (el significado dependerá, en cada caso, del espacio de Hilbert donde tenga lugar el análisis).

Proposición 2.2.1. *Los valores propios de $-\Delta$ con condición de Dirichlet, están acotados inferiormente por una constante positiva.*

Demostración. Sea λ un valor propio de $-\Delta$ con condición de Dirichlet. Si $u \in H_0^1(\Omega)$ es una función propia asociada a λ, entonces

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1} = \lambda \langle u, v \rangle_{L^2} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.20}$$

Combinando la desigualdad de Poincaré (con constante C) y la ecuación (2.20) con $u = v$, tenemos:

$$\|u\|_{L^2}^2 \leq C^2 \|u\|_{H_0^1}^2 = C^2 \lambda \|u\|_{L^2}^2,$$

o sea que,

$$0 < \frac{1}{C^2} \leq \lambda. \qquad \square$$

Para continuar, probamos dos hechos adicionales acerca de las funciones propias de $-\Delta$ con condición de Dirichlet.

Teorema 2.2.2. *Sean λ y η dos valores propios de $-\Delta$ con condición de Dirichlet y $u, w \in H_0^1(\Omega)$ funciones propias correspondientes a λ y η, respectivamente. Se cumplen las siguientes propiedades:*

(i) *Si $\lambda \neq \eta$, entonces $\langle u, w \rangle_{L^2} = 0$ y $\langle u, w \rangle_{H_0^1} = 0$.*

(ii) *El conjunto*
$$E_\lambda = \left\{ \tilde{u} \in H_0^1(\Omega) : (\lambda, \tilde{u}) \text{ es solución débil de } (2.10) \right\}$$
es un espacio vectorial de dimensión finita.

Demostración.

(i) Supongamos que $\lambda \neq \eta$. Por hipótesis, $u, w \in H_0^1(\Omega)$ son funciones propias de $-\Delta$ con condición de Dirichlet y ellas satisfacen
$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \lambda \int_\Omega uv \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{2.21}$$
y
$$\int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v \, dx = \eta \int_\Omega wv \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.22}$$
Si $v = w$ en (2.21) y $v = u$ en (2.22), después de restar ambas expresiones, resulta
$$(\lambda - \eta) \int_\Omega uw \, dx = 0.$$
Dado que $\lambda - \eta \neq 0$, se sigue que $\langle u, w \rangle_{L^2} = \int_\Omega uw \, dx = 0$ y por consiguiente, $\langle u, w \rangle_{H_0^1} = \lambda \langle u, w \rangle_{L^2} = 0$.

(ii) Si $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ es una función propia asociada a λ, el Teorema 2.2.1 (vii) afirma que $\frac{1}{\lambda}$ es un valor propio del operador $S^\star \equiv (-\Delta)^{-1}$ y $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ una función propia correspondiente a $\frac{1}{\lambda}$. Escribiendo el conjunto E_λ en términos de $S^\star_{1/\lambda} := S^\star - \frac{1}{\lambda} I$, obtenemos:
$$\begin{aligned} E_\lambda &= \left\{ \tilde{u} \in H_0^1(\Omega) : \tilde{u} \text{ es función propia de } -\Delta \text{ con condición de Dirichlet} \right\} \cup \{0\} \\ &= \left\{ \tilde{u} \in H_0^1(\Omega) : S^\star \tilde{u} = \frac{1}{\lambda} \tilde{u} \right\} = \ker \left(S^\star_{1/\lambda} \right). \end{aligned}$$
La conclusión del teorema se sigue de la compacidad de $S^\star$, la Proposición 1.3.2 y la ecuación $E_\lambda = \ker\left(S^\star_{1/\lambda}\right) = \ker\left(S^\star - \frac{1}{\lambda} I\right)$. □

Definición 2.2.2. *Un valor propio de $-\Delta$ con condición de Dirichlet se dice simple si* $\dim E_\lambda = 1$.

El próximo teorema reúne varios resultados fundamentales sobre el espectro del operador $-\Delta$ con condición de Dirichlet.

Teorema 2.2.3.

(i) *El conjunto de valores propios de $-\Delta$ con condición de Dirichlet puede escribirse como el rango de una sucesión $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ que verifica las siguientes propiedades.*

(a) *La sucesión es creciente, estrictamente positiva y $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$.*

(b) *Si λ es un valor propio de $-\Delta$ con condición de Dirichlet, $\lambda \neq \lambda_1$ y $d_\lambda := \dim(E_\lambda)$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_k = \lambda$ y*

$$\lambda_{k-1} < \lambda_k = \lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_{k+d_\lambda-1} < \lambda_{k+d_\lambda}.$$

En otras palabras, cada valor propio $\lambda \neq \lambda_1$ se repite de acuerdo a su multiplicidad (finita) .

(ii) *Existe una base ortonormal $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ para el espacio de Hilbert $\left(L^2(\Omega), \langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2}\right)$ con las siguientes propiedades.*

(a) *Para cada $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in H_0^1(\Omega)$ es una función propia asociada al valor propio λ_n de $-\Delta$ con condición de Dirichlet.*

(b) *El rango de la sucesión $\left\{\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} u_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ es una base ortonormal del espacio $\left(H_0^1(\Omega), \langle\cdot,\cdot\rangle_{H_0^1}\right)$.*

(c) *Una función propia $u \in H_0^1(\Omega)$ asociada al valor propio λ_n es de clase $C^\infty(\Omega)$ y satisface*

$$-\Delta u(x) = \lambda_n u(x),$$

para todo $x \in \Omega$.

Observación 2.2.2. Respecto al literal (ib) del teorema anterior, más adelante se mostrará qué ocurre cuando se considera $\lambda = \lambda_1$ (Ver Teorema 2.2.8 (i)).

DEMOSTRACIÓN.

(i) (a) El Teorema 2.2.1(iv) afirma que el conjunto de valores propios de S puede escribirse como el rango de una sucesión $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$, decreciente y estrictamente positiva, tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = 0$. Si $u_n \in L^2(\Omega)$ es una función propia asociada a μ_n, conforme el Teorema 2.2.1(vii), $\lambda_n = \frac{1}{\mu_n}$ es un valor propio de $-\Delta$ con condición de Dirichlet, $u_n \in H_0^1(\Omega)$ y u_n es una función propia asociada a λ_n. Así,

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \cdots,$$

y $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$.

(b) Sean $\lambda \neq \lambda_1$ un valor propio de $-\Delta$ con condición de Dirichlet, $d_\lambda \geq 1$ la dimensión del espacio propio E_λ y $k \in \mathbb{N}$ tal que $k = \min\{n \in \mathbb{N} : \lambda_n = \lambda\}$. Entonces, $\mu_k = \frac{1}{\lambda_k}$ es un valor propio de $S^\star$ y se repite en la sucesión de valores propios de acuerdo a su multiplicidad, es decir,

$$\mu_{k-1} > \mu_k = \cdots = \mu_{k+d_\lambda-1} > \mu_{k+d_\lambda}.$$

Tomar recíprocos nuevamente completa la prueba.

(ii) (a) Se sigue del Teorema 2.2.1 (v) y del hecho de que las funciones propias de $S^\star$ son, a su vez, funciones propias del operador $-\Delta$ con condición de Dirichlet.

(b) Consideremos índices $m, n \geq 1$ y funciones propias $u_m, u_n \in H_0^1(\Omega)$ correspondientes a valores propios λ_m y λ_n, respectivamente. Si $\delta_{mn} := 1$ siempre que $m = n$ y $\delta_{mn} := 0$ en otro caso, entonces

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} u_n, \frac{1}{\sqrt{\lambda_m}} u_m \right\rangle_{H_0^1} &= \int_\Omega \nabla\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} u_n\right) \cdot \nabla\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_m}} u_m\right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_n \lambda_m}} \int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla u_m \, dx = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n \lambda_m}} \langle u_n, u_m \rangle_{H_0^1} \\ &= \frac{\lambda_n}{\sqrt{\lambda_n \lambda_m}} \langle u_n, u_m \rangle_{L^2} = \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_m}} \langle u_n, u_m \rangle_{L^2} = \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_m}} \delta_{mn};\end{aligned}$$

de manera que el rango de la sucesión $\left\{\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} u_n\right\}_{n=1}^\infty$ es un conjunto ortonormal en $H_0^1(\Omega)$. Para comprobar que es maximal, supongamos que $h \in H_0^1(\Omega)$ verifica $\langle h, u_n \rangle_{H_0^1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como (λ_n, u_n) es una solución débil de (2.10) y $\lambda_n \neq 0$,

$$0 = \langle h, u_n \rangle_{H_0^1} = \int_\Omega \nabla h \cdot \nabla u_n \, dx = \lambda_n \int_\Omega h u_n \, dx \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.23}$$

y

$$\int_\Omega h u_n \, dx = \langle h, u_n \rangle_{L^2} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.24}$$

Recordando que $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ es una base ortonormal para $L^2(\Omega)$, como consecuencia de las identidades (2.23) y (2.24), $h = 0$ en $L^2(\Omega)$. Más aún, gracias al Lema 1.2.2, $h = 0$ en $H_0^1(\Omega)$ y con ello queda probada la afirmación.

(c) Sean $x_0 \in \Omega$ y $r > 0$ un número real tal que $\overline{B}_r(x_0) \subset \Omega$. Para $k \in \mathbb{N}$, definamos

$$\omega_k = \left\{x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} : d(B_r(x_0), x) < \frac{1}{k}\right\}; \tag{2.25}$$

de modo que existe $K \in \mathbb{N}$ tal que

$$B_r(x_0) \subset \cdots \subset \bar{\omega}_{k+1} \subset \bar{\omega}_k \subset \cdots \subset \bar{\omega}_K \subset \Omega. \tag{2.26}$$

Si $u \in H_0^1(\Omega)$ es una función propia asociada al valor propio λ_n, entonces $\lambda_n u \in H^1(\Omega)$ y

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \lambda_n \int_\Omega u v \, dx \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega). \tag{2.27}$$

En este contexto, el Teorema 1.2.6 afirma que $u \in H^3(\omega)$ para todo $\omega \subset\subset \Omega$ y en especial, que $u \in H^3(\omega_K)$. Si a continuación, se eligen en (2.27) funciones de prueba $v \in C_0^\infty(\omega_K) \subset C_0^\infty(\Omega)$, $u \in H^3(\omega_K)$ satisface

$$\int_{\omega_K} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \lambda_n \int_{\omega_K} u v \, dx \quad \forall v \in C_0^\infty(\omega_K).$$

Usando otra vez el Teorema 1.2.6, $u \in H^5(\omega)$ para todo $\omega \subset\subset \omega_K$. En particular, $u \in H^5(\omega_{K+1})$. Al final, para todo $m \in \mathbb{N}$, existe $k_m \in \mathbb{N}$, $k_m \geq K$, tal que $B_r(x_0) \subset \omega_{k_m}$ y $u \in H^m(\omega_{k_m})$, de forma que

$$u \in \bigcap_{m=1}^{\infty} H^m(B_r(x_0)).$$

Más aún, por el Teorema de encaje de Sobolev (Teorema 1.2.1), $u \in C^\infty(B_r(x_0))$. Por último, ya que $x_0 \in \Omega$ se escogió arbitrariamente, debe ocurrir que $u \in C^\infty(\Omega)$, lo que indica que la función propia u es una solución de $-\Delta u = \lambda_n u$ en sentido clásico. □

Observación 2.2.3. Es bien sabido que una función propia u asociada al valor propio λ satisface, bajo ciertas hipótesis, la ecuación diferencial $-\Delta u = \lambda u$ en Ω y también la condición de frontera $u = 0$ en $\partial\Omega$. Ésta es la situación, por ejemplo, cuando Ω es un abierto de clase C^2 con frontera acotada. En efecto, como $(1+\lambda)u \in H^m(\Omega)$ para todo $m \in \mathbb{N}$ (ver la demostración del Teorema 2.2.3 (iic)) y

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_\Omega u\varphi \, dx = (1+\lambda) \int_\Omega u\varphi \, dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

por el Teorema 1.2.5, $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$. Entretanto, si Ω es un abierto de clase C^∞ con frontera acotada, el Teorema 1.2.5 indica que $u \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$. En cualquier caso, $u \in H_0^1(\Omega) \cap C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ es una solución débil del problema (2.10) y por la Proposición 2.1.2, $u = 0$ en $\partial\Omega$.

Ahora, podemos utilizar las herramientas desarrolladas en las secciones previas para caracterizar los valores propios del operador $-\Delta$ con condición de Dirichlet. En adelante, como marco de referencia para los Teoremas 1.3.4, 1.3.5 y 1.3.6, supondremos el espacio de Hilbert real $H_0^1(\Omega)$ dotado con el producto interno inducido por la desigualdad de Poincaré, y el operador compacto, auto-adjunto y definido positivo $S^\star : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$.

Teorema 2.2.4. *El primer valor propio de $-\Delta$ con condición de Dirichlet está caracterizado por la expresión:*

$$\lambda_1 = \inf\left\{ \frac{\|\nabla v\|_2^2}{\|v\|_{L^2}^2} : v \in H_0^1(\Omega), v \neq 0 \right\}, \tag{2.28}$$

y el ínfimo se alcanza, exactamente, en el conjunto $E_{\lambda_1} \setminus \{0\}$. En otras palabras, $u \in E_{\lambda_1}$ si y sólo si $\lambda_1 = \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_{L^2}^2}$.

Demostración. Considerando que $S^\star : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ es un operador lineal, continuo, auto-adjunto y definido positivo, de acuerdo con el Teorema 1.3.4 (i) y la Observación 1.3.1 (ii), el primer valor propio de $S^\star$ tiene la siguiente caracterización variacional:

$$\mu_1 = \sup_{v \neq 0} \frac{\langle S^\star v, v\rangle_{H_0^1}}{\|v\|_{H_0^1}^2}. \tag{2.29}$$

Notemos también que para toda función $f \in H_0^1(\Omega)$, existe una única solución débil $u := S^\star f$ del problema (2.12) y esta satisface

$$\langle S^\star f, v\rangle_{H_0^1} = \langle f, v\rangle_{L^2} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.30}$$

En particular, si $f = v$ en (2.30),

$$\langle S^{\star} v, v \rangle_{H_0^1} = \langle v, v \rangle_{L^2} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.31}$$

El Teorema 2.2.1 (vii) implica que $\mu_1 = \frac{1}{\lambda_1}$ y así, al reunir las ecuaciones (2.29) y (2.31), podemos escribir

$$\frac{1}{\lambda_1} = \mu_1 = \sup_{v \neq 0} \frac{\langle S^{\star} v, v \rangle_{H_0^1}}{\|v\|_{H_0^1}^2} = \sup_{v \neq 0} \frac{\|v\|_{L^2}^2}{\|\nabla v\|_2^2}. \tag{2.32}$$

Sea

$$\mathscr{A} := \left\{ \frac{\|v\|_{L^2}^2}{\|\nabla v\|_2^2} : v \in H_0^1(\Omega), v \neq 0 \right\},$$

el conjunto donde tiene lugar el supremo en (2.32). Si $v \in H_0^1(\Omega)$ y $v \neq 0$, entonces $\|v\|_{L^2} > 0$ según el Lema 1.2.2. Como resultado,

$$0 < \frac{\|v\|_{L^2}^2}{\|\nabla v\|_2^2} \in \mathscr{A}.$$

Destaquemos además que por la desigualdad de Poincaré, Proposición 1.2.4, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\frac{\|v\|_{L^2}}{\|\nabla v\|_2} \leq C.$$

En conclusión, como $v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ se eligió arbitrariamente, el conjunto $\mathscr{A}$ es no vacío y sus elementos estrictamente positivos y acotados superiormente. Para terminar la primera parte de la prueba, basta aplicar el Lema 1.1.1 a (2.32) para obtener

$$\lambda_1 = \inf_{v \neq 0} \frac{\|\nabla v\|_2^2}{\|v\|_{L^2}^2}. \tag{2.33}$$

Resta comprobar que el ínfimo en (2.33) se alcanza, exactamente, en el conjunto $E_{\lambda_1} \setminus \{0\}$. Sea $u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0$, tal que

$$\lambda_1 = \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_{L^2}^2}. \tag{2.34}$$

Teniendo en cuenta que $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\left\{\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} u_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ son bases ortonormales de $L^2(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega)$, respectivamente (ver Teorema 2.2.3 (ii)),

$$\|\nabla u\|_2^2 = \|u\|_{H_0^1}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle u, \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} u_n \right\rangle_{H_0^1}^2 \quad \text{y} \quad \|u\|_{L^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u, u_n \rangle_{L^2}^2. \tag{2.35}$$

Combinando (2.34) y (2.35), como u_n es un función propia, resulta en primer lugar que

$$\lambda_1 = \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_{L^2}^2} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \left\langle u, \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} u_n \right\rangle_{H_0^1}^2}{\sum_{n=1}^{\infty} \langle u, u_n \rangle_{L^2}^2} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle u, u_n \rangle_{L^2}^2}{\sum_{n=1}^{\infty} \langle u, u_n \rangle_{L^2}^2},$$

y al reorganizar,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \lambda_1) \langle u, u_n \rangle_{L^2}^2 = 0. \tag{2.36}$$

Puesto que la sucesión de valores propios del operador $-\Delta$ con condición de Dirichlet es creciente y positiva (ver Teorema 2.2.3 (ia)), la expresión (2.36) es una serie de términos no negativos cuya suma es nula. Por lo anterior, $(\lambda_n - \lambda_1) \langle u, u_n \rangle_{L^2}^2 = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\langle u, u_n \rangle_{L^2} = 0$ siempre que $\lambda_n > \lambda_1$. Por lo tanto, $u \in E_{\lambda_1}$.

Supongamos ahora que $u \in E_{\lambda_1} \setminus \{0\}$. Por definición,

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1} = \lambda_1 \langle u, v \rangle_{L^2} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.37}$$

Tomando $u = v$ en (2.37), se sigue (2.34). □

Observación 2.2.4. El Teorema 2.2.4 indica que la constante óptima en la desigualdad de Poincaré es $C = \lambda_1^{-\frac{1}{2}}$. De otro modo, existiría una constante $0 < \mathscr{C}^2 < \frac{1}{\lambda_1}$ tal que

$$\|u\|_{L^2}^2 \leq \mathscr{C}^2 \|\nabla u\|_2^2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

En consecuencia,

$$\frac{1}{\mathscr{C}^2} \leq \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_{L^2}^2} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

y después de tomar ínfimo, $\frac{1}{\mathscr{C}^2} \leq \lambda_1$. La contradicción prueba la afirmación.

Nota: En las demostraciones de los Teoremas 2.2.5 y 2.2.6, como regla general, supondremos que:

(i) El operador $S^\star : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ es lineal, compacto, auto-adjunto y definido positivo (ver Teorema 2.2.1 (iii)).

(ii) $\langle S^\star v, v \rangle_{H_0^1} = \langle v, v \rangle_{L^2}$ para toda $v \in H_0^1(\Omega)$ (Ver Teorema 2.2.4 y su demostración).

(iii) El conjunto

$$\mathscr{A} := \left\{ \frac{\|v\|_{L^2}^2}{\|\nabla v\|_2^2} : v \in H_0^1(\Omega), v \neq 0 \right\}, \tag{2.38}$$

es no vacío y sus elementos estrictamente positivos y acotados superiormente (Ver Teorema 2.2.4 y su demostración).

(iv) Si $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión de funciones propias del operador $-\Delta$ con condición de Dirichlet (ver Teorema 2.2.3 (ii)), para cada $n \in \mathbb{N}$, $H_n := \operatorname{span}\{u_1, \cdots, u_n\}$.

(v) En vista de la Observación 1.3.2, bastará verificar los resultados para ínfimos y supremos, en lugar de mínimos y máximos.

Teorema 2.2.5. *Para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, el n-ésimo valor propio de $-\Delta$ con condición de Dirichlet está caracterizado por las expresiones:*

$$\lambda_n = \min_{\substack{v \in H_{n-1}^{\perp} \\ v \neq 0}} \frac{\|\nabla v\|_2^2}{\|v\|_{L^2}^2} = \max_{\substack{v \in H_n \\ v \neq 0}} \frac{\|\nabla v\|_2^2}{\|v\|_{L^2}^2}, \tag{2.39}$$

y el mínimo (resp. máximo) se alcanza, exactamente, en el conjunto $H_{n-1}^{\perp} \cap E_{\lambda_n} \setminus \{0\}$ (resp. $H_n \cap E_{\lambda_n} \setminus \{0\}$). En otras palabras, si $u \in H_{n-1}^{\perp} \setminus \{0\}$ (resp. $u \in H_n \setminus \{0\}$), $u \in E_{\lambda_n}$ si y sólo si $\lambda_n = \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_{L^2}^2}$.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Con base en el Teorema 1.3.4 (iii), el n-ésimo valor propio de $S^\star$ puede caracterizarse en términos del supremo como:

$$\mu_n = \sup_{\substack{v \in H_{n-1}^{\perp} \\ v \neq 0}} \frac{\langle S^\star v, v \rangle_{H_0^1}}{\|v\|_{H_0^1}^2}. \tag{2.40}$$

Con relación a los valores propios del operador $-\Delta$ con condición de Dirichlet, el Teorema 2.2.1(vii) y la expresión (2.40) señalan que

$$\frac{1}{\lambda_n} = \mu_n = \sup_{\substack{v \in H_{n-1}^{\perp} \\ v \neq 0}} \frac{\langle S^\star v, v \rangle_{H_0^1}}{\|v\|_{H_0^1}^2} = \sup_{\substack{v \in H_{n-1}^{\perp} \\ v \neq 0}} \frac{\|v\|_{L^2}^2}{\|\nabla v\|_2^2}. \tag{2.41}$$

Sea

$$\mathscr{A}_{n-1} := \left\{ \frac{\|v\|_{L^2}^2}{\|\nabla v\|_2^2} : v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}, v \in H_{n-1}^{\perp} \right\}.$$

Como $H_{n-1} \subsetneq H_0^1(\Omega)$, existe $v \in H_{n-1}^{\perp}$, $v \neq 0$, tal que

$$\frac{\|v\|_{L^2}^2}{\|\nabla v\|_2^2} \in \mathscr{A}_{n-1}, \tag{2.42}$$

de modo que $\mathscr{A}_{n-1} \neq \varnothing$. Más aún, $\mathscr{A}_{n-1} \subset \mathscr{A}$ y debido a que $\mathscr{A}$ es un subconjunto acotado de números reales positivos (ver Nota (iii)), $\mathscr{A}_{n-1}$ también es acotado. Al final, luego de aplicar el Lema 1.1.1 a (2.41), obtenemos

$$\lambda_n = \inf_{\substack{v \in H_{n-1}^{\perp} \\ v \neq 0}} \frac{\|\nabla v\|_2^2}{\|v\|_{L^2}^2}. \tag{2.43}$$

El Teorema 1.3.7 permite caracterizar μ_n en términos del ínfimo, como sigue:

$$\frac{1}{\lambda_n} = \mu_n = \inf_{\substack{v \in H_n \\ v \neq 0}} \frac{\langle S^\star v, v \rangle_{H_0^1}}{\|v\|_{H_0^1}^2} = \inf_{\substack{v \in H_n \\ v \neq 0}} \frac{\|v\|_{L^2}^2}{\|\nabla v\|_2^2}. \tag{2.44}$$

Sea

$$\mathscr{B}_n := \left\{ \frac{\|v\|_{L^2}^2}{\|\nabla v\|_2^2} : v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}, v \in H_n \right\}.$$

Argumentos similares a los expuestos para $\mathscr{A}_{n-1}$, muestran que $\mathscr{B}_n$ es no vacío, acotado superiormente y sus elementos son estrictamente positivos. En definitiva, el Lema 1.1.1 y la ecuación (2.44), implican que

$$\lambda_n = \sup_{\substack{v\in H_n \\ v\neq 0}} \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_{L^2}^2}. \tag{2.45}$$

Las expresiones (2.43) y (2.45) completan la prueba de la primera parte del teorema (ver Nota (v)). Comprobemos ahora que el ínfimo en (2.43) se alcanza, exactamente en el conjunto $E_{\lambda_n}\setminus\{0\} \cap H_{n-1}^{\perp}$. Para ello, supongamos que $u \in H_{n-1}^{\perp}$, $u \neq 0$, satisface (ver Observación 1.3.2)

$$\lambda_n = \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_{L^2}^2}. \tag{2.46}$$

Dado que $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\left\{\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}u_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ son bases ortonormales de $L^2(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega)$, respectivamente, es cierto que

$$\|\nabla u\|_2^2 = \|u\|_{H_0^1}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle u, \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}u_n \right\rangle_{H_0^1}^2 \quad \text{y} \quad \|u\|_{L^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u, u_n\rangle_{L^2}^2. \tag{2.47}$$

Reemplazando (2.47) en (2.46), resulta

$$\lambda_n = \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_{L^2}^2} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \left\langle u, \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}u_k \right\rangle_{H_0^1}^2}{\sum_{k=1}^{\infty} \langle u, u_k\rangle_{L^2}^2} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle u, u_k\rangle_{L^2}^2}{\sum_{k=1}^{\infty} \langle u, u_k\rangle_{L^2}^2}. \tag{2.48}$$

Para continuar, notemos que $u \in H_{n-1}^{\perp}$ por hipótesis, de tal forma que (2.48) puede reescribirse como:

$$\lambda_n = \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_{L^2}^2} = \frac{\sum_{k=n}^{\infty} \left\langle u, \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}u_k \right\rangle_{H_0^1}^2}{\sum_{k=n}^{\infty} \langle u, u_k\rangle_{L^2}^2} = \frac{\sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \langle u, u_k\rangle_{L^2}^2}{\sum_{k=n}^{\infty} \langle u, u_k\rangle_{L^2}^2},$$

es decir,

$$\sum_{k=n}^{\infty} (\lambda_k - \lambda_n) \langle u, u_k\rangle_{L^2}^2 = 0. \tag{2.49}$$

Puesto que la sucesión de valores propios del operador $-\Delta$ con condición de Dirichlet es creciente y positiva (ver Teorema 2.2.3 (ia)), la expresión (2.49) es una serie de términos no negativos cuya suma es nula. Por esa razón, $(\lambda_k - \lambda_n)\langle u, u_k\rangle_{L^2}^2 = 0$ para todo $k \geq n$ y siempre que $\lambda_k \neq \lambda_n$, $\langle u, u_k\rangle_{L^2} = 0$. En resumen, u es una combinación lineal no trivial de funciones propias correspondientes al valor propio λ_n, o sea que $u \in E_{\lambda_n}$.

Por otro lado, si $u \in H_n$, $\langle u, u_k\rangle_{H_0^1} = \lambda_k \langle u, u_k\rangle_{L^2} = 0$ para $k > n$ y

$$\lambda_n = \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_{L^2}^2} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \left\langle u, \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}u_k \right\rangle_{H_0^1}^2}{\sum_{k=1}^{n} \langle u, u_k\rangle_{L^2}^2} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle u, u_k\rangle_{L^2}^2}{\sum_{k=1}^{n} \langle u, u_k\rangle_{L^2}^2}.$$

Ahora bien, si reordenamos, nos queda

$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda_n - \lambda_k) \langle u, u_k \rangle_{L^2}^2 = 0. \tag{2.50}$$

Todos los términos en (2.50) son no negativos, así que $(\lambda_k - \lambda_n) \langle u, u_k \rangle_{L^2}^2 = 0$ para todo $1 \le k \le n$. En particular, si $\lambda_n \ne \lambda_k$, necesariamente $\langle u, u_k \rangle_{L^2} = 0$. En otras palabras, $u \in E_{\lambda_n}$.

Para finalizar con lo propuesto, supongamos que $u \in H_{n-1}^{\perp} \cap E_{\lambda_n}$ (resp. $u \in H_n \cap E_{\lambda_n}$). Por definición,

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1} = \lambda_n \langle u, v \rangle_{L^2} \quad \forall v \in H_0^1 (\Omega). \tag{2.51}$$

Haciendo $u = v$ en (2.51),

$$\lambda_n = \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_{L^2}^2},$$

que es lo que se quería probar. $\square$

Observación 2.2.5. Dos hechos sobresalen como consecuencia del Teorema 2.2.5:

(i) En principio, si

$$\lambda_n = \text{mín} \left\{ \frac{\|\nabla v\|_2^2}{\|v\|_{L^2}^2} : v \in H_{n-1}^{\perp}, v \ne 0 \right\},$$

entonces

$$\lambda_n \le \frac{\|\nabla v\|_2^2}{\|v\|_{L^2}^2} \quad \forall v \in H_{n-1}^{\perp} \setminus \{0\}; \tag{2.52}$$

o bien, después de tomar raíz cuadrada

$$\|v\|_{L^2} \le \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \|\nabla v\|_2 \quad \forall v \in H_{n-1}^{\perp}. \tag{2.53}$$

Ninguna contradicción, vale la pena decir, surge de la Observación 2.2.4 y la desigualdad (2.53). La desigualdad (2.53), aunque más fina, únicamente es válida para algunos elementos de $H_0^1(\Omega)$; a saber, los del subespacio $H_{n-1}^{\perp}$.

(ii) si

$$\lambda_n = \text{máx} \left\{ \frac{\|\nabla v\|_2^2}{\|v\|_{L^2}^2} : v \in H_n, v \ne 0 \right\},$$

entonces

$$\frac{\|\nabla v\|_2^2}{\|v\|_{L^2}^2} \le \lambda_n \quad \forall v \in H_n \setminus \{0\}.$$

En tal caso, la desigualdad de Poincaré y la expresión

$$\|\nabla v\|_2 \le \sqrt{\lambda_n} \|v\|_{L^2} \quad \forall v \in H_n$$

muestran que las normas $\|\cdot\|_{L^2}$ y $\|\cdot\|_{H_0^1}$ son equivalentes en H_n.

A diferencia de la formulación variacional del Teorema 2.2.5, la caracterización que presentamos a continuación tiene la ventaja de no depender del conocimiento previo de las funciones propias.

Teorema 2.2.6 (Teorema de Courant-Fischer)**.** *Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Supongamos que $\mathscr{L}_n$ es la familia de todos los subespacios vectoriales de $H_0^1(\Omega)$ de dimensión n. El n-ésimo valor propio del operador $-\Delta$ con condición de Dirichlet está caracterizado por las expresiones:*

$$\lambda_n = \max_{Y \in \mathscr{L}_{n-1}} \min_{\substack{v \in Y^\perp \\ v \neq 0}} \frac{\|\nabla v\|_2^2}{\|v\|_{L^2}^2} = \min_{Y \in \mathscr{L}_n} \max_{\substack{v \in Y \\ v \neq 0}} \frac{\|\nabla v\|_2^2}{\|v\|_{L^2}^2}. \tag{2.54}$$

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. De acuerdo con el Teorema 1.3.5, el n-ésimo valor propio de $S^\star$ tiene la siguiente caracterización variacional:

$$\mu_n = \inf_{Y \in \mathscr{L}_{n-1}} \sup_{\substack{v \in Y^\perp \\ v \neq 0}} \frac{\langle S^\star v, v \rangle_{H_0^1}}{\|v\|_{H_0^1}^2}. \tag{2.55}$$

Nuevamente, vale destacar que $\mu_n = \frac{1}{\lambda_n}$ (ver Teorema 2.2.1(vii)) y por lo tanto

$$\frac{1}{\lambda_n} = \mu_n = \inf_{Y \in \mathscr{L}_{n-1}} \sup_{\substack{v \in Y^\perp \\ v \neq 0}} \frac{\langle S^\star v, v \rangle_{H_0^1}}{\|v\|_{H_0^1}^2} = \inf_{Y \in \mathscr{L}_{n-1}} \sup_{\substack{v \in Y^\perp \\ v \neq 0}} \frac{\|v\|_{L^2}^2}{\|\nabla v\|_2^2}. \tag{2.56}$$

Sea $Y \in \mathscr{L}_{n-1}$. Como $Y \subsetneq H_0^1(\Omega)$, $Y^\perp \neq \{0\}$ y el conjunto

$$\mathscr{A}_Y = \left\{ \frac{\|v\|_{L^2}^2}{\|\nabla v\|_2^2} : v \in Y^\perp,\ v \neq 0 \right\}, \tag{2.57}$$

es no vacío. Luego, por el Lema 1.2.2, si $v \in Y^\perp$ y $v \neq 0$, entonces $\|v\|_{L^2} > 0$ y

$$0 < \frac{\|v\|_{L^2}^2}{\|\nabla v\|_2^2} \in \mathscr{A}_Y. \tag{2.58}$$

Además, la desigualdad de Poincaré garantiza la existencia de una constante positiva, que denotamos por C, tal que

$$\frac{\|v\|_{L^2}^2}{\|\nabla v\|_2^2} \leq C.$$

En conclusión, como v se escogió arbitrariamente en $Y^\perp$, el conjunto $\mathscr{A}_Y$ es no vacío y sus elementos estrictamente positivos y acotados superiormente. Definamos $a_Y = \sup \mathscr{A}_Y$. De (2.58), tenemos que

$$0 < \frac{\|v\|_{L^2}^2}{\|\nabla v\|_2^2} \leq a_Y \quad \forall v \in Y^\perp, \tag{2.59}$$

y según el Lema 1.1.1,

$$a_Y = \sup \mathscr{A}_Y = \sup_{\substack{v \in Y^\perp \\ v \neq 0}} \frac{\|v\|_{L^2}^2}{\|\nabla v\|_2^2} = \frac{1}{\inf\limits_{\substack{v \in Y^\perp \\ v \neq 0}} \frac{\|\nabla v\|_2^2}{\|v\|_{L^2}^2}}. \tag{2.60}$$

Sea $A := \{a_Y : Y \in \mathscr{L}_{n-1}\}$. Por la igualdad (2.56) sabemos que

$$\frac{1}{\lambda_n} = \text{ínf}\, A = \text{ínf}\left\{a_Y : Y \in \mathscr{L}_{n-1}\right\},$$

de manera que bastará mostrar que A satisface las hipótesis del Lema 1.1.1. En efecto, La elección arbitraria de Y al principio de la prueba y la desigualdad (2.59), implican que

$$0 < a_Y \quad \forall Y \in \mathscr{L}_{n-1}, \tag{2.61}$$

es decir, $A \subset (0, \infty)$. En virtud de la Observación 2.2.4, notemos también que

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{v \in H_0^1 \\ v \neq 0}} \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_{L^2}^2} \leq \inf_{\substack{v \in Y^\perp \\ v \neq 0}} \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_{L^2}^2} \quad \forall Y \in \mathscr{L}_{n-1},$$

esto es,

$$a_Y = \frac{1}{\inf\limits_{\substack{v \in Y^\perp \\ v \neq 0}} \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_{L^2}^2}} \leq \frac{1}{\lambda_1}, \quad \forall Y \in \mathscr{L}_{n-1}. \tag{2.62}$$

En las condiciones anteriores, el Lema 1.1.1 afirma que

$$\frac{1}{\lambda_n} = \text{ínf}\left\{a_Y : Y \in \mathscr{L}_{n-1}\right\} = \frac{1}{\sup\limits_{Y \in \mathscr{L}_{n-1}} \frac{1}{a_Y}} = \frac{1}{\sup\limits_{Y \in \mathscr{L}_{n-1}} \inf\limits_{\substack{v \in Y^\perp \\ v \neq 0}} \frac{\|\nabla v\|_2^2}{\|v\|_{L^2}^2}},$$

o mejor aún, después de tomar recíprocos (ver Observación 1.3.2):

$$\lambda_n = \sup_{Y \in \mathscr{L}_{n-1}} \inf_{\substack{v \in Y^\perp \\ v \neq 0}} \frac{\|\nabla v\|_2^2}{\|v\|_{L^2}^2}.$$

Para la segunda parte de la prueba, recurrimos a la identidad $\mu_n = \frac{1}{\lambda_n}$ y a la correspondiente caracterización variacional del Teorema 1.3.6, así:

$$\frac{1}{\lambda_n} = \mu_n = \sup_{Y \in \mathscr{L}_n} \inf_{\substack{v \in Y \\ v \neq 0}} \frac{\langle S^\star v, v\rangle_{H_0^1}}{\|v\|_{H_0^1}^2} = \sup_{Y \in \mathscr{L}_n} \inf_{\substack{v \in Y \\ v \neq 0}} \frac{\|v\|_{L^2}^2}{\|\nabla v\|_2^2}. \tag{2.63}$$

Sea $Y \in \mathscr{L}_n$. Definamos

$$\mathscr{B}_Y = \left\{\frac{\|v\|_{L^2}^2}{\|\nabla v\|_2^2} : v \in Y,\ v \neq 0\right\}. \tag{2.64}$$

Razonando como en el caso de $\mathscr{A}_Y$, se verifica fácilmente que $\mathscr{B}_Y$ es no vacío y que sus elementos son estrictamente positivos y acotados superiormente. Dicho esto, al usar el Lema 1.1.1 en (2.64), nos queda

$$b_Y = \text{ínf}\, \mathscr{B}_Y = \inf_{\substack{v \in Y \\ v \neq 0}} \frac{\|v\|_{L^2}^2}{\|\nabla v\|_2^2} = \frac{1}{\sup\limits_{\substack{v \in Y \\ v \neq 0}} \frac{\|\nabla v\|_2^2}{\|v\|_{L^2}^2}}.$$

Más aún, puesto que Y tiene dimensión finita, el conjunto $\left\{v \in Y : \|v\|_{H_0^1} \leq 1\right\}$ es compacto y por el teorema de los valores extremos existe $\bar{v} \in Y$, $\bar{v} \neq 0$, tal que

$$b_Y = \min_{\substack{v \in Y \\ \|v\|_{H_0^1}=1}} \langle S^\star v, v\rangle_{H_0^1} = \min_{\substack{v \in Y \\ v \neq 0}} \frac{\langle S^\star v, v\rangle_{H_0^1}}{\|v\|_{H_0^1}^2} = \frac{\|\bar{v}\|_{L^2}^2}{\|\nabla \bar{v}\|_2^2} > 0. \tag{2.65}$$

Sea $B \coloneqq \{b_Y : Y \in \mathscr{L}_n\}$. Debido a (2.63),

$$\frac{1}{\lambda_n} = \sup \mathscr{B} = \sup \{b_Y : Y \in \mathscr{L}_n\}, \tag{2.66}$$

y como antes, será suficiente evaluar si se cumplen las hipótesis del Lema 1.1.1. Recordando que el subespacio Y se eligió arbitrariamente en la igualdad (2.65), se deduce que $B \subset (0, \infty)$. A su vez, gracias a la Observación 2.2.4,

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{v \in H_0^1 \\ v \neq 0}} \frac{\|\nabla v\|_2^2}{\|v\|_{L^2}^2} \leq \inf_{\substack{v \in Y \\ v \neq 0}} \frac{\|\nabla v\|_2^2}{\|v\|_{L^2}^2} \leq \sup_{\substack{v \in Y \\ v \neq 0}} \frac{\|\nabla v\|_{L^2}^2}{\|v\|_{L^2}^2}, \quad \forall Y \in \mathscr{L}_n,$$

o sea que,

$$b_Y = \frac{1}{\sup\limits_{\substack{v \in Y \\ v \neq 0}} \frac{\|\nabla v\|_{L^2}^2}{\|v\|_{L^2}^2}} \leq \frac{1}{\lambda_1}, \quad \forall Y \in \mathscr{L}_n.$$

En síntesis, empleando el Lema 1.1.1 en (2.66), resulta

$$\frac{1}{\lambda_n} = \sup \{b_Y : Y \in \mathscr{L}_n\} = \frac{1}{\inf\limits_{Y \in \mathscr{L}_n} \frac{1}{b_Y}} = \frac{1}{\inf\limits_{Y \in \mathscr{L}_n} \sup\limits_{\substack{v \in Y \\ v \neq 0}} \frac{\|\nabla v\|_2^2}{\|v\|_{L^2}^2}},$$

o lo que es lo mismo,

$$\lambda_n = \inf_{Y \in \mathscr{L}_n} \sup_{\substack{v \in Y \\ v \neq 0}} \frac{\|\nabla v\|_{L^2}^2}{\|v\|_{L^2}^2}. \qquad \square$$

El siguiente resultado se infiere del Teorema de Courant-Fischer.

Teorema 2.2.7 (Monotonicidad)**.** *Sean $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ dos conjuntos no vacíos, abiertos, conexos y acotados tales que $\Omega \subset \Omega'$. Consideremos el problema de valores propios del operador $-\Delta$ con condición de Dirichlet en Ω y Ω', respectivamente. Si λ_n y λ_n' corresponden, en cada caso, al n-ésimo valor propio de $-\Delta$ con condición de Dirichlet en Ω y Ω', entonces*

$$\lambda_n' \leq \lambda_n.$$

Demostración. Sea v un elemento arbitrario de $H_0^1(\Omega)$. De acuerdo con el Teorema 1.2.4, si $\overline{v}$ es la extensión trivial de v a $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, entonces

$$\overline{v} \in H^1\left(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}\right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial \overline{v}}{\partial x_i} = \overline{\frac{\partial v}{\partial x_i}} \quad \forall i \in \{1, ..., n\}. \tag{2.67}$$

Considerando la definición de $H_0^1(\Omega)$, existe $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ en $C_0^{\infty}(\Omega)$ tal que

$$v_k \to v \quad \text{en} \quad H^1(\Omega). \tag{2.68}$$

Además, podemos suponer si así lo queremos, que $v_k \in C_0^{\infty}(\Omega')$ para todo $k \in \mathbb{N}$. En ese caso, con base en (2.67) y (2.68),

$$\|v_k - \overline{v}\|_{L^2(\Omega')} = \|v_k - v\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0,$$

y

$$\left\|\frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \overline{v}}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega')} = \left\|\frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{\overline{\partial v}}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega')} = \left\|\frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0 \quad \forall i \in \{1, ..., n\}.$$

De este modo, $\overline{v}|_{\Omega'}$ es el límite en el sentido $H^1(\Omega')$ de una sucesión de funciones en $C_0^{\infty}(\Omega')$ y por esa razón $\overline{v} \in H_0^1(\Omega')$. Más aún, si $v \neq 0$, entonces

$$\frac{\|\nabla \overline{v}\|_{L^2(\Omega')}^2}{\|\overline{v}\|_{L^2(\Omega')}^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{\|\nabla v_k\|_{L^2(\Omega')}^2}{\|v_k\|_{L^2(\Omega')}^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{\|\nabla v_k\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|v_k\|_{L^2(\Omega)}^2} = \frac{\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|v\|_{L^2(\Omega)}^2}.$$

Como consecuencia del argumento anterior, los elementos de $H_0^1(\Omega)$ pueden identificarse con sus extensiones en $H_0^1(\Omega')$, de modo que cada subespacio Y de dimensión n en $H_0^1(\Omega)$, induce en $H_0^1(\Omega')$ un subespacio Y' de dimensión n. Comparando la caracterización variacional de λ_n y λ_n' (Teorema 2.2.6) y teniendo en cuenta que el mínimo en la expresión para λ_n' se toma en un conjunto más grande, obtenemos

$$\lambda_n' = \min_{\substack{Y' \in \mathscr{L}_n' \\ \mathscr{L}_n' \subset H_0^1(\Omega')}} \max_{v \in Y' \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_{L^2}^2} \leq \min_{\substack{Y \in \mathscr{L}_n \\ \mathscr{L}_n \subset H_0^1(\Omega)}} \max_{v \in Y \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_{L^2}^2} = \lambda_n. \qquad \square$$

Teorema 2.2.8. *Si $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión de valores propios del operador $-\Delta$ con condición de Dirichlet descrita en el Teorema 2.2.3, entonces:*

(i) *el primer valor propio λ_1 es simple (es decir, $\dim E_{\lambda_1} = 1$) y ninguna función propia correspondiente a λ_1 cambia de signo.*

(ii) *Cualquier función propia correspondiente a un valor propio $\lambda > \lambda_1$ es nodal, es decir, cambia de signo en Ω.*

Demostración.

(i) Comprobemos primero que si $u \in E_{\lambda_1} \setminus \{0\}$, la función propia u debe ser positiva o negativa. A este fin, supongamos que u cambia de signo en Ω, entendiéndose que ambas funciones: u^+ y u^-, son no nulas. Según la Proposción 1.2.6, $u^+ \in H_0^1(\Omega)$, $\nabla u^+ = \nabla u$ en $\Omega^+ := \{x \in \Omega : u(x) > 0\}$ y $\nabla u^+ = 0$ en otro caso. Ahora bien,

$$\begin{aligned} \left\|\nabla u^+\right\|_2^2 = \int_{\Omega} \nabla u^+ \cdot \nabla u^+ \, dx &= \int_{\Omega^+} \nabla u \cdot \nabla u \, dx + \int_{\Omega \setminus \Omega^+} \nabla u \cdot 0 \, dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u^+ \, dx = \left\langle u, u^+ \right\rangle_{H_0^1} = \lambda_1 \left\langle u, u^+ \right\rangle_{L^2} \qquad (2.69) \\ &= \lambda_1 \int_{\Omega} u u^+ \, dx = \lambda_1 \left\|u^+\right\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

y por el Teorema 2.2.4, u^+ es una función propia asociada a λ_1. Además, por el Teorema 2.2.3 (iic), u^+ satisface

$$-\Delta u^+ = \lambda_1 u^+, \tag{2.70}$$

punto a punto en Ω. Dado que $-\Delta$ es un operador lineal, podemos reescribir (2.70) en forma conveniente como sigue:

$$\Delta\left(-u^+\right) = \lambda_1 u^+.$$

Por definición, $u^+ \geq 0$ y en consecuencia $\lambda_1 u^+ \geq 0$ y $-u^+ \leq 0$. Si $u\left(x_0\right) = 0$ para algún $x_0 \in \Omega$, el Teorema 1.1.3 (Principio del máximo) afirma que $-u^+ \equiv 0$ en Ω y por lo tanto, $u^+ \equiv 0$ en Ω. No obstante, $u^+ \neq 0$ de acuerdo con la suposición inicial, de modo que

$$u^+ > 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

Notemos que $-u$ también es una función propia asociada al valor propio λ_1 y $(-u)^+ \equiv u^-$. Aplicando un procedimiento totalmente análogo, concluimos que

$$u^- > 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

Sin embargo, $u^+ = \text{máx}\left\{u, 0\right\}$ y $u^- = -\text{mín}\left\{u, 0\right\}$ no pueden ser, simultáneamente, mayores que cero para todo $x \in \Omega$. Así, u debe ser positiva o negativa en Ω.

Para demostrar que λ_1 es simple, razonemos por el absurdo y supongamos que $\dim E_{\lambda_1} > 1$. En ese caso, al menos u_1 y u_2, elementos de la base $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $L^2\left(\Omega\right)$ (ver Teorema 2.2.1), son funciones propias asociadas a λ_1. Debido a que u_1 y u_2 no cambian de signo en Ω, el producto interno verifica

$$\langle u_1, u_2\rangle_{L^2} = \int_\Omega u_1 u_2 \, dx \neq 0.$$

No obstante, esto contradice el hecho probado en el Teorema 2.2.3(ii), acerca de la ortogonalidad de las funciones propias u_n en $L^2\left(\Omega\right)$.

(ii) Sean $u, u_1 \in H_0^1\left(\Omega\right)$ funciones propias asociadas a $\lambda > \lambda_1$ y λ_1, respectivamente. Entonces u y u_1 son ortogonales en $L^2\left(\Omega\right)$ y satisfacen

$$\int_\Omega u_1 u \, dx = 0.$$

Como u_1 es positiva o negativa, necesariamente u debe cambiar de signo en Ω. Por consiguiente, u es nodal. □

Finalizamos con una definición y dos enunciados claves para probar uno de los resultados más importantes de este capítulo: el teorema nodal de Courant.

Definición 2.2.3 (Región nodal)**.** *Para $\nu \in C\left(\Omega\right)$, definamos*

$$\mathrm{N}_\Omega\left(\nu\right) = \left\{x \in \Omega : \nu\left(x\right) = 0\right\}.$$

Una región nodal de ν es una componente conexa de $\Omega \backslash \mathrm{N}_\Omega\left(\nu\right)$.

Proposición 2.2.2. *Sea $\nu \in H^1(\Omega) \cap C(\Omega)$ (resp. $\nu \in H_0^1(\Omega) \cap C(\Omega)$). Si $\Omega' \subset \Omega$ es una región nodal de ν, entonces*

$$\widetilde{\nu}(x) := \begin{cases} \nu(x) & \text{si } x \in \Omega', \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

pertenece a $H^1(\Omega)$ (resp. $H_0^1(\Omega)$).

Demostración. Ver [MMP, pág. 12] Proposición 1.61. □

Teorema 2.2.9 (Principio de continuación única)**.** *Sea λ un valor propio del operador $-\Delta$ con condición de Dirichlet. Si $u \in H_0^1(\Omega)$ satisface $-\Delta u = \lambda u$ y u se anula en un subconjunto abierto no vacío de Ω, entonces $u \equiv 0$ en Ω.*

Demostración. Ver [DL, pág. 111] Lema 9, [HZ, pág. 12] Sección 2.1, [MMP, pág. 234] Proposición 9.23, [JK], [CH].

La demostración del siguiente teorema se basa en las ideas de [CH], [HZ, pág. 22], [DL, pág. 110] y [ST, pág 330] ejercicio 8.

Teorema 2.2.10 (Teorema nodal de Courant)**.** *Para $n \geq 2$, cualquier función propia correspondiente al valor propio λ_n divide el dominio Ω en al menos dos y en a lo sumo n regiones nodales.*

Demostración. Sea $u \in H_0^1(\Omega)$ una función propia asociada al valor propio λ_n. Supongamos por el contrario que el conjunto $\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}$ es la unión disjunta de al menos $m > n$ regiones nodales, digamos $\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_m$ (como u cambia de signo en Ω, $m \geq 2$). Para toda $1 \leq j \leq m$, definamos

$$w_j(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in \Omega_j, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Puesto que $u \in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$, es cierto que $w_j \in H_0^1(\Omega)$ (ver Proposición 2.2.2). Además, en atención a que w_j es de un signo en Ω, con base en la Proposición 1.2.6

$$\nabla w_j = \begin{cases} \nabla u & \text{si } x \in \Omega_j, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Más aún,

$$\begin{aligned} \|\nabla w_j\|_2^2 = \int_\Omega \nabla w_j \cdot \nabla w_j \, dx &= \int_{\Omega_j} \nabla u \cdot \nabla u \, dx + \int_{\Omega \setminus \Omega_j} \nabla u \cdot 0 \, dx \\ &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w_j \, dx = \langle u, w_j \rangle_{H_0^1} \\ &= \lambda_n \langle u, w_j \rangle_{L^2} = \lambda_n \int_\Omega u w_j \, dx \\ &= \lambda_n \int_\Omega w_j^2 \, dx = \lambda_n \|w_j\|_{L^2}^2 . \end{aligned}$$

Sean $\{c_1, \cdots, c_n\}$ constantes reales arbitrarias, $c_{n+1} = \cdots = c_m = 0$ y $w := c_1 w_1 + \cdots c_m w_m$. Considerando que $\Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing$ para $i \neq j$,

$$\begin{aligned}
\|\nabla w\|_2^2 &= \|c_1 \nabla w_1 + \cdots + c_m \nabla w_m\|_2^2 \\
&= c_1^2 \int_\Omega \nabla w_1 \cdot \nabla w_1 \, dx + \cdots + c_m^2 \int_\Omega \nabla w_m \cdot \nabla w_m \, dx \\
&= c_1^2 \|w_1\|_{H_0^1}^2 + \cdots + c_m^2 \|w_m\|_{H_0^1}^2 \\
&= c_1^2 \lambda_n \|w_1\|_{L^2}^2 + \cdots + c_m^2 \lambda_n \|w_m\|_{L^2}^2 \\
&= \lambda_n \left(\|c_1 w_1 + \cdots + c_m w_m\|_{L^2}^2 \right) = \lambda_n \|w\|_{L^2}^2 .
\end{aligned}$$

Ahora, elijamos constantes $c_1, \cdots, c_n$, no todas nulas, tales que para todo $1 \leq k \leq n-1$,

$$\langle w, u_k \rangle_{H_0^1} = c_1 \langle w_1, u_k \rangle_{H_0^1} + c_2 \langle w_2, u_k \rangle_{H_0^1} + \cdots + c_n \langle w_n, u_k \rangle_{H_0^1} = 0.$$

Esto es posible ya que se trata de un sistema homogéneo de $n-1$ ecuaciones con n incógnitas. En consecuencia, $w \in H_{n-1}^{\perp}$ y de acuerdo con el Teorema 2.2.5, w es una función propia asociada a λ_n que se anula en un subconjunto abierto y no vacío de Ω (para todo $n+1 \leq j \leq m$, $\Omega_j \neq \varnothing$ es abierto y $w \equiv 0$ en Ω_j), es decir, $w \equiv 0$ en Ω por el principio de continuación única. Lo anterior es absurdo, puesto que w es una función propia y es no nula por definición. $\square$

Observación 2.2.6.

(i) Sean Q y Q' rectángulos en $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ tales que $Q \subset \Omega \subset Q'$. Si $\lambda_k(Q)$, $\lambda_k(\Omega)$ y $\lambda_k(\Omega')$ denotan, respectivamente, el $k-$ésimo valor propio de $-\Delta$ con condición de Dirichlet en Q, Ω y Q', según el Teorema 2.2.7,

$$\lambda_k(Q') \leq \lambda_k(\Omega) \leq \lambda_k(Q). \tag{2.71}$$

Puede demostrarse (ver [CH], [MZ, pág. 245]) que existen constantes $C_0, C_1 > 0$ tales que

$$C_0 k^{2/\mathrm{N}} \leq \lambda_k \leq C_1 k^{2/\mathrm{N}}, \tag{2.72}$$

lo que se acostumbra escribir como $\lambda_k \sim k^{2/\mathrm{N}}$, cuando $k \to \infty$.

(ii) En 1966, Mark Kac formuló la famosa pregunta: "¿Se puede escuchar la forma de un tambor?", refiriéndose a la posibilidad de inferir la geometría de una membrana elástica a partir de los modos fundamentales a los que vibra (ver [K]). En términos matemáticos, el interrogante de Kac se puede enunciar, en otras palabras, así: ¿si $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ son dominios tales que la sucesión de valores propios del operador $-\Delta$ en Ω_1 coincide con la sucesión de valores propios del operador $-\Delta$ en Ω_2 (teniendo en cuenta la multiplicidad), necesariamente Ω_1 se puede obtener de Ω_2 a través de un movimiento rígido?. En realidad, un contraejemplo debido a Gordon, Webb y Wolpert, muestra que existen dominios con diferentes formas e idénticos valores propios (ver [GWW], [MZ, pág. 245] Observación 9).

Capítulo

3 Valores propios del operador $-\Delta$ con condición de Neumann

Este capítulo está dedicado a estudiar los principales aspectos del problema de valores propios para el operador $-\Delta$ con condición de Neumann, fijando como punto de partida la teoría abstracta del Capítulo 1. En la Sección 3.1, comenzamos enunciando varios conceptos relacionados con la formulación variacional del problema de Neumann homogéneo. En la Sección 3.2, definimos de manera precisa la noción de valor propio para el operador $-\Delta$ con condición de Neumann y, como antes, empleamos algunas técnicas clásicas de la teoría lineal de ecuaciones diferenciales parciales (elípticas) para demostrar propiedades cualitativas de los valores y funciones propias correspondientes. Como hecho general, se desea determinar cuáles afirmaciones del Capítulo 2 tienen una versión equivalente en el contexto del operador $-\Delta$ con condición de Neumann.

A lo largo de este capítulo y a menos que se indique lo contrario, $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ es un conjunto no vacío, abierto, acotado, conexo y de clase C^1.

3.1. Resultados preliminares

Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Consideremos el problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en} \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

donde $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ denota la derivada normal exterior de u en $\partial\Omega$. La condición $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ se acostumbra llamar *condición de Neumann homogénea* (o simplemente condición de Neumann, cuando no haya lugar a confusión). Como quedará claro más adelante, el término adicional u en la ecuación diferencial $-\Delta u + u = f$ en (3.1), permite analizar el problema de valores propios para el operador $-\Delta$ con condición de Neumann usando, esencialmente, las mismas ideas del Capítulo 2.

Definición 3.1.1. *Una función $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ que satisface* (3.1) *punto a punto se llama solución clásica de* (3.1).

Una solución clásica de (3.1), si existe, satisface la siguiente propiedad:

Proposición 3.1.1. *Si $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ es una solución clásica de* (3.1)*, entonces*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega uv \, dx = \int_\Omega fv \, dx \quad \forall v \in C^\infty \left(\overline{\Omega}\right).$$

Demostración. Sea $v \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$. Supongamos que $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ es una solución clásica de (3.1). Multiplicando por v ambos lados de $-\Delta u + u = f$ e integrando en Ω, obtenemos

$$-\int_\Omega (\Delta u) \, v \, dx + \int_\Omega uv \, dx = \int_\Omega fv \, dx. \tag{3.2}$$

Sea $\vec{F} : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \to \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, $x \longmapsto \vec{F}(x) := (v \nabla u)(x)$ un campo vectorial $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$. Aplicando el teorema de la divergencia de Gauss a $\vec{F}$, resulta

$$\int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \eta} \, d\sigma = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega (\Delta u) \, v \, dx.$$

De esta forma, ya que $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ en $\partial\Omega$,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = -\int_\Omega (\Delta u) \, v \, dx. \tag{3.3}$$

Las identidades (3.2) y (3.3), en conjunto con la elección arbitraria de $v \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$, completan la prueba. □

La Proposición 3.1.1 motiva la siguiente definición.

Definición 3.1.2. *Una función $u \in H^1(\Omega)$ que satisface la ecuación*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega uv \, dx = \int_\Omega fv \, dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega), \tag{3.4}$$

se denomina solución débil del problema (3.1).

La Proposición 3.1.2 indica que una solución débil de (3.1), en circunstancias apropiadas, realmente es una solución clásica de (3.1).

Proposición 3.1.2. *Dada $f \in L^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$, si $u \in H^1(\Omega) \cap C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ es una solución débil del problema* (3.1)*, entonces u es solución clásica de* (3.1)*.*

Demostración. Por hipótesis, $u \in H^1(\Omega) \cap C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ satisface

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega uv \, dx = \int_\Omega fv \, dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{3.5}$$

Según la Proposición 1.2.3, la expresión (3.5) es cierta, en especial, para funciones de prueba v en $C_0^\infty\left(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}\right)$. En ese caso y con motivo del teorema de la divergencia de Gauss,

$$\int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \eta} \, d\sigma = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega (\Delta u) \, v \, dx, \quad \forall v \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}\right). \tag{3.6}$$

Si $v \in C_0^\infty(\Omega)$ en (3.6), entonces

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = -\int_\Omega (\Delta u) \, v \, dx \tag{3.7}$$

y al combinar las ecuaciones (3.5) y (3.7),

$$\int_\Omega (-\Delta u + u - f) \, v \, dx = 0. \tag{3.8}$$

Tomando en cuenta que $v \in C_0^\infty(\Omega)$ es arbitraria, gracias al Lema 1.2.1,

$$-\Delta u + u - f = 0 \quad \text{c.t.p.} \quad \text{en} \quad \Omega$$

y por la continuidad de $-\Delta u + u - f$,

$$-\Delta u + u - f \equiv 0 \quad \text{en} \quad \Omega. \tag{3.9}$$

Resolviendo (3.5) para el primer término del lado izquierdo de la igualdad y reemplazando en (3.6), obtenemos

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v \, d\sigma = \int_\Omega (\Delta u - u + f) \, v \, dx \quad \forall v \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}\right).$$

Más aún, por (3.9),

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v \, d\sigma = 0, \quad \forall v \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}\right). \tag{3.10}$$

La ecuación (3.10) implica que $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ en $\partial\Omega$: de otra manera, existiría algún $x_0 \in \partial\Omega$, tal que $\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) \neq 0$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) > 0$. En vista de que $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ es continua en x_0, existe $r > 0$ tal que

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x) > 0, \quad \forall x \in \overline{B}_r(x_0) \cap \partial\Omega.$$

Si Q_{x_0} es un rectángulo inscrito en $B_r(x_0)$, de acuerdo con el Lema 1.1.2, existe una función $\rho \in C^\infty$, $\rho : \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \to \mathbb{R}$ tal que $\rho(x) > 0$ para $x \in \operatorname{Int} Q_{x_0} \subset B_r(x_0)$ y $\rho(x) = 0$ si $x \notin \operatorname{Int} Q_{x_0}$. Escogiendo $v(x) = \rho(x)$ en (3.10),

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v \, d\sigma = \int_{\overline{B}_r(x_0) \cap \partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} \rho \, d\sigma > 0,$$

lo cual es una contradicción. En conclusión, $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$. □

Para conocer detalles de la teoría de regularidad en el caso con condición de Neumann, remitimos al lector a la Sección 9.6 de [B].

3.2. Valores propios y descomposición espectral

En términos generales, el problema de valores propios para el operador $-\Delta$ con condición de Neumann, consiste en hallar los valores $\lambda \in \mathbb{R}$, para los cuales existe $u \equiv u_\lambda \neq 0$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{en} \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.11}$$

Un procedimiento análogo al descrito en la demostración de la Proposición 3.1.1, motiva la definición precisa de solución débil para el problema de valores propios (3.11).

Definición 3.2.1. *Una solución débil de* (3.11) *es una pareja* (λ, u), *con* $\lambda \in \mathbb{R}$ *y* $u \in H^1(\Omega)$, *que satisface*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \lambda \int_\Omega uv \, dx \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{3.12}$$

Un número real λ *es un valor propio de* $-\Delta$ *con condición de Neumann si existe* $u \in H^1(\Omega)$, $u \neq 0$, *tal que* (λ, u) *es solución débil de* (3.11). *En ese caso, decimos que* $u \in H^1(\Omega)$ *es una función propia de* $-\Delta$ *con condición de Neumann asociada al valor propio* λ.

En contraste con el caso Dirichlet, $\lambda = 0$ es un valor propio del operador $-\Delta$ con condición de Neumann y las funciones constantes en Ω son funciones propias asociadas a $\lambda = 0$. En realidad, tal y como veremos en la Proposición 3.2.2, ellas son las únicas funciones propias asociadas a $\lambda = 0$. Por ahora, probaremos el siguiente hecho.

Proposición 3.2.1. *Si* $u \in H^1(\Omega)$ *es una función propia asociada a* $\lambda = 0$, *entonces* u *es constante* c.t.p. *en* Ω.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $u \in H^1(\Omega)$ es una función propia asociada al valor propio $\lambda = 0$. Por definición, u y λ verifican

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \lambda \int_\Omega uv \, dx = 0 \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{3.13}$$

Si $v = u$ en (3.13), entonces

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx = 0,$$

es decir, $\nabla u = 0$ c.t.p. en Ω. El resultado se sigue de la Proposición 1.2.2. □

El próximo teorema juega un papel fundamental en el estudio de los valores propios del operador $-\Delta$ con condición de Neumann.

Teorema 3.2.1.

(i) *Dada* $f \in L^2(\Omega)$, *el problema con valores en la frontera*

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en} \ \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{en} \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.14}$$

admite una única solución débil $u := Qf \in H^1(\Omega)$ *en el sentido de la Definición 3.1.2.*

(ii) *El operador*

$$
\begin{aligned}
Q : L^2(\Omega) &\longrightarrow H^1(\Omega) \\
f &\longmapsto u = Qf,
\end{aligned}
$$

es lineal, continuo e inyectivo.

(iii) *Si $K : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ es la inyección compacta dada por el Teorema de Rellich-Kondrachov (ver Teorema 1.2.2), los operadores $T := K \circ Q : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ y $T^\star := Q \circ K : H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)$ son lineales, compactos, auto-adjuntos y definidos positivos.*

(iv) *El conjunto de valores propios de T está contenido en $(0,1]$ y puede escribirse como el rango de una sucesión $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$, decreciente y estrictamente positiva, tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = 0$.*

(v) *Existe una base ortonormal $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ para el espacio de Hilbert $\left(L^2(\Omega), \langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2}\right)$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in L^2(\Omega)$ es una función propia asociada al valor propio μ_n de T.*

(vi) *Los valores propios del operador $-\Delta$ con condición de Neumann son no negativos.*

(vii) *Las siguientes propiedades son equivalentes:*

(a) *λ es un valor propio de $-\Delta$ con condición de Neumann (en el sentido de la Definición 3.2.1) y $u \in H^1(\Omega)$ es una función propia correspondiente a λ,*

(b) *$\mu = \frac{1}{1+\lambda}$ es un valor propio de $T^\star$ y $u \in H^1(\Omega)$ es una función propia correspondiente al valor propio μ,*

(c) *$\mu = \frac{1}{1+\lambda}$ es valor propio de T y $u \in L^2(\Omega)$ es una función propia correspondiente al valor propio μ.*

Demostración.

(i) Sea

$$
\begin{aligned}
\xi : H^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
v &\longmapsto \xi(v) := \int_\Omega f v \, dx.
\end{aligned}
$$

Por hipótesis, $f \in L^2(\Omega)$ y de acuerdo con la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la definición de la norma en $H^1(\Omega)$,

$$
|\xi(v)| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{H^1} < \infty.
$$

En otras palabras, ξ está bien definido y es un funcional lineal continuo. Por el teorema de representación de Riesz, existe un único elemento $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$
\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega uv \, dx = \langle u, v\rangle_{H^1} = \xi(v) = \int_\Omega fv \, dx \quad \forall v \in H^1(\Omega),
$$

esto es, existe una única solución débil del problema (3.14).

(ii) La buena definición del operador Q es consecuencia de (i). Las demás propiedades se prueban a continuación:

Linealidad: Sean $f_1, f_2 \in L^2(\Omega)$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Como $\hat{f} := \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \in L^2(\Omega)$, existe una única función $\hat{u} \in H^1(\Omega)$ tal que $Q\hat{f} = \hat{u}$. Si $Qf_1 = u_1$ y $Qf_2 = u_2$, entonces

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) v \, dx &= \alpha_1 \left(\int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega u_1 v \, dx \right) \\ &\quad + \alpha_2 \left(\int_\Omega \nabla u_2 \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega u_2 v \, dx \right) \\ &= \alpha_1 \int_\Omega f_1 v \, dx + \alpha_2 \int_\Omega f_2 v \, dx \\ &= \int_\Omega (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) v \, dx \\ &= \int_\Omega \hat{f} v \, dx \quad \forall v \in H^1(\Omega),\end{aligned}$$

es decir, $Q(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = \alpha Q f_1 + \alpha_2 Q f_2$. El operador Q es lineal.

Continuidad: Sean $f \in L^2(\Omega)$ y $u = Qf \in H^1(\Omega)$. Puesto que $\|u\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1}$,

$$\begin{aligned}\|Qf\|_{H^1}^2 = \|u\|_{H^1}^2 = \langle u, u \rangle_{H^1} &= \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \int_\Omega u^2 \, dx \\ &= \int_\Omega f u \, dx \\ &\leq \|f\|_{L^2} \|u\|_{L^2} \\ &\leq \|f\|_{L^2} \|u\|_{H^1}.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Cancelando $\|u\|_{H^1}$ en ambos lados de (3.15), resulta

$$\|Qf\|_{H^1} \leq \|f\|_{L^2},$$

o sea que el operador lineal Q es continuo.

Inyectividad: Basta notar que $\ker(Q) = \{0\}$.

(iii) El operador $K : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ es lineal, compacto e inyectivo. Por tanto, T y $T^\star$ están bien definidos y en ambos casos cumplen las siguientes propiedades:

Linealidad: La compuesta de los operadores lineales Q y K es lineal.

Compacidad: T y $T^\star$ son funciones compuestas, a saber, del operador lineal continuo Q que asigna a cada $f \in L^2(\Omega)$ la única solución $u \in H^1(\Omega)$ del problema (3.14) y del operador compacto $K : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ dado por el teorema de Rellich-Kondrachov. La compacidad de T y $T^\star$ es inmediata a partir de la Proposición 1.3.1.

Auto-adjunto: Sean $f, g \in L^2(\Omega)$ y $u, w \in H^1(\Omega)$ tales que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega uv \, dx = \int_\Omega fv \, dx \quad \forall v \in H^1(\Omega), \tag{3.16}$$

y

$$\int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega wv \, dx = \int_\Omega gv \, dx \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{3.17}$$

Si $v = w \equiv Tg$ en (3.16) y $v = u \equiv Tf$ en (3.17), entonces

$$\langle Tf, g\rangle_{L^2} = \int_\Omega ug\,dx = \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla w\,dx + \int_\Omega uw\,dx = \int_\Omega fw\,dx = \langle f, Tg\rangle_{L^2},$$

es decir, T es un operador auto-adjunto. Si $f, g \in H^1(\Omega)$, haciendo $v = g$ en (3.16) y $v = f$ en (3.17), obtenemos

$$\begin{aligned}\langle T^\star f, g\rangle_{H^1} = \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla g\,dx + \int_\Omega ug\,dx = \int_\Omega fg\,dx &= \int_\Omega \nabla f\cdot\nabla w\,dx + \int_\Omega fw\,dx\\ &= \langle f, T^\star g\rangle_{H^1},\end{aligned}$$

de manera que $T^\star$ es un operador auto-adjunto.

Definido Positivo: Para $f \in L^2(\Omega)$, la única solución débil Tf del problema (3.14) satisface

$$\langle Tf, v\rangle_{H^1} = \langle f, v\rangle_{L^2} \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{3.18}$$

Si $v = Tf$ en (3.18), entonces

$$\langle Tf, f\rangle_{L^2} = \langle Tf, Tf\rangle_{H^1} = \|Tf\|^2_{H^1} \geq 0.$$

En particular, siempre que $\langle Tf, f\rangle_{L^2} = 0$, $Tf = 0$ en $H^1(\Omega)$ y

$$\int_\Omega fv\,dx = 0 \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Como $|\Omega| < \infty$, $f \in L^1(\Omega)$ (Ver Proposición 1.2.1) y con motivo del Lema 1.2.1, $f \equiv 0$ en Ω.

Por otro lado, si $f \in H^1(\Omega)$,

$$\langle T^\star f, v\rangle_{H^1} = \langle f, v\rangle_{L^2} \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{3.19}$$

Eligiendo $f = v$ en (3.19), $\langle T^\star f, f\rangle_{H^1} = \langle f, f\rangle_{L^2} = \|f\|_2^2 \geq 0$ y $\langle T^\star f, f\rangle_{H^1} = 0$ si y sólo si $f = 0$ en $L^2(\Omega)$. Así, por el Lema 1.2.2, $\langle T^\star f, f\rangle_{H^1} = 0$ implica que $f = 0$ en $H^1(\Omega)$.

(iv) De la demostración del numeral (vii), se infiere de manera natural que el conjunto de valores propios de T está contenido en $(0, 1]$ y su prueba se aplaza hasta entonces. Por otra parte, según la Proposición 1.3.3 y las propiedades de T descritas en el numeral (iii),

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_n \geq \cdots,$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = 0$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mu_n \neq 0$ (de otro modo, existiría un elemento $u \in L^2(\Omega)$, $u \neq 0$, tal que $Tu = \mu_n u = 0$. Absurdo, ya que T es un operador inyectivo).

(v) Considerando que T es un operador lineal, compacto y auto-adjunto y $L^2(\Omega)$ un espacio de Hilbert separable, de acuerdo con el Teorema 1.3.4 (iv), existe una base ortonormal $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ de $L^2(\Omega)$, tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, u_n es una función propia asociada a μ_n.

(vi) Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ un valor propio de $-\Delta$ con condición de Neumann y $u \in H^1(\Omega)$ una función propia asociada a λ. Visto que (λ, u) satisface

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \lambda \int_\Omega uv \, dx \quad \forall v \in H^1(\Omega), \tag{3.20}$$

y $\|u\|_{L^2}^2 > 0$ (ver el Lema 1.2.2), toda vez que $v = u$ en (3.20)

$$\lambda = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx}{\int_\Omega u^2 \, dx} = \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_{L^2}^2} \geq 0. \tag{3.21}$$

(vii) (viia) $\Longrightarrow$ (viib) Supongamos que $\lambda \geq 0$ es un valor propio de $-\Delta$ con condición de Neumann y $u \in H^1(\Omega)$, $u \neq 0$, es una función propia asociada a λ. Para todo $v \in H^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \lambda \int_\Omega uv \, dx, \tag{3.22}$$

y al sumar a ambos lados de (3.22) el término $\int_\Omega uv \, dx$, se tiene:

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_{H^1} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega uv \, dx &= (1+\lambda) \int_\Omega uv \, dx \\ &= (1+\lambda) \langle u, v \rangle_{L^2} \\ &= \langle (1+\lambda) u, v \rangle_{L^2} \\ &= (1+\lambda) \langle T^\star u, v \rangle_{H^1} \quad \forall v \in H^1(\Omega), \end{aligned}$$

de manera que

$$\left(\frac{1}{1+\lambda} \right) u = T^\star u.$$

Luego, $\mu = \frac{1}{1+\lambda}$ es un valor propio del operador $T^\star$ y $u \in H^1(\Omega)$ una función propia asociada a μ.

(viib) $\Longrightarrow$ (viic): Si $u \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}$ es una función propia asociada al valor propio μ de $T^\star$, entonces $u \neq 0$ en $L^2(\Omega)$ y

$$Tu = T^\star u = \mu u.$$

Por consiguiente, μ es un valor propio de T y $u \in L^2(\Omega)$ es una función propia correspondiente a μ.

(viic) $\Longrightarrow$ (viia): Supongamos ahora que $\mu > 0$ es un valor propio de T y $u \in L^2(\Omega)$, $u \neq 0$, es una función propia asociada a μ. Como $T\left(L^2(\Omega)\right) \subset H^1(\Omega)$,

$$\frac{1}{\mu} Tu = u \in H^1(\Omega), \tag{3.23}$$

y al combinar la definición de solución débil y la expresión (3.23),

$$\langle u, v \rangle_{L^2} = \langle Tu, v \rangle_{H^1} = \langle \mu u, v \rangle_{H^1} = \mu \langle u, v \rangle_{H^1} \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{3.24}$$

En particular, eligiendo $v = u$ en (3.24) concluimos que

$$\mu = \frac{\|u\|_{L^2}}{\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_{L^2}} \in (0,1] .$$

Si en lugar de productos internos en (3.24) escribimos integrales, después de agrupar términos con $\int_\Omega uv\,dx$ del lado derecho de la igualdad, obtenemos

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx = \frac{(1-\mu)}{\mu}\int_\Omega uv\,dx \quad \forall v \in H^1(\Omega) . \tag{3.25}$$

Como la expresión (3.25) es válida para todo elemento $v \in H^1(\Omega)$, el número real $\lambda = \frac{1}{\mu} - 1$ satisface la Definición 3.2.1 y es un valor propio del operador $-\Delta$ con condición de Neumann. □

Antes de continuar, conviene mencionar un hecho interesante.

Observación 3.2.1.

(i) Teniendo en cuenta los planteamientos del Capítulo 2, en comparación con (3.14) el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.26}$$

luce como un punto de partida más natural para abordar el problema de valores propios en el caso Neumann. Este enfoque, sin embargo, presenta varias dificultades, que discutimos brevemente siguiendo las ideas de [AH] y [DG]. Procediendo como en la Proposición 3.1.1, podemos determinar una noción de solución débil de (3.26), así:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx = \int_\Omega fv\,dx \quad \forall v \in H^1(\Omega) . \tag{3.27}$$

Una condición necesaria para la existencia de una solución de (3.26) se deduce al escoger $v = \chi_\Omega \equiv 1$ en (3.27), de modo que

$$\int_\Omega f\,dx = 0.$$

Más aún, si la solución débil de (3.26) existe, no puede ser única (si u satisface (3.27) y $c \in \mathbb{R}$, basta reemplazar $u + c$ en (3.27) para comprobarlo). Estos hechos dificultan la definición de un operador como Q (su dominio no sería todo $L^2(\Omega)$, ni sería claro cómo definir la imagen de una función f dada). Una aproximación al problema en las condiciones descritas (ver [AH, pág. 342]), consiste en considerar el espacio cociente $\tilde{H}^1(\Omega) := H^1(\Omega)/\mathbb{R}$, donde cada elemento $[v] := \{v + \alpha : \alpha \in \mathbb{R}\} \in \tilde{H}^1(\Omega)$ es una clase de equivalencia. En $\tilde{H}^1(\Omega)$, la expresión

$$\tilde{a}([u],[v]) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx, \quad u \in [u], v \in [v], \tag{3.28}$$

define una forma bilineal continua y coerciva, al tiempo que

$$\tilde{\varphi}\left([v]\right) = \int_{\Omega} f v \, dx \quad v \in [v]\,,$$

es un funcional lineal continuo en $\tilde{H}^1(\Omega)$. Por el teorema de Lax-Milgram, existe una único elemento $[u] \in \tilde{H}^1(\Omega)$ tal que

$$\tilde{a}\left([u], [v]\right) = \tilde{\varphi}\left([v]\right) \quad \forall\, [v] \in \tilde{H}^1(\Omega)\,; \tag{3.29}$$

o dicho de otra manera, una única solución débil de (3.26) salvo adición por una constante. En este capítulo no seguimos este enfoque.

(ii) Con el fin de estudiar el espectro de $-\Delta$ con condición de Neumann como consecuencia de la teoría abstracta del Capítulo 1, agregamos con respecto al Capítulo 2, el término u en la ecuación diferencial $-\Delta u + u = f$ para definir el "operador inverso"de $-\Delta + I$. Hecho esto, como hemos visto en el Teorema 3.2.1, llegamos a un contexto similar al descrito en el Capítulo 2 para $(-\Delta)^{-1}$.

Para continuar, probamos dos hechos adicionales acerca de las funciones propias de $-\Delta$ con condición de Neumann.

Teorema 3.2.2. *Sean λ y η dos valores propios de $-\Delta$ con condición de Neumann y $u, w \in H^1(\Omega)$ funciones propias correspondientes a λ y η, respectivamente. Se cumplen las siguientes propiedades:*

(i) *Si $\lambda \neq \eta$, entonces $\langle u, w\rangle_{L^2} = 0$ y $\langle u, w\rangle_{H^1} = 0$.*

(ii) *El conjunto*

$$E_\lambda = \left\{\tilde{u} \in H^1(\Omega) : (\lambda, \tilde{u}) \text{ es solución débil de } (3.11)\right\},$$

es un espacio vectorial de dimensión finita.

Demostración.

(i) Del Teorema 3.2.1 (vii), u y w son funciones propias asociadas a los valores propios $\frac{1}{1+\lambda}$ y $\frac{1}{1+\eta}$ de $T^\star$. Siendo que $\frac{1}{1+\lambda} \neq \frac{1}{1+\eta}$, por el Teorema 1.3.3, $\langle u, w\rangle_{H^1} = 0$. Por lo tanto,

$$\langle u, w\rangle_{H^1} = (1+\lambda)\langle u, w\rangle_{L^2} = (1+\eta)\langle u, w\rangle_{L^2} = 0,$$

y $\langle u, w\rangle_{L^2} = 0$.

(ii) Si $\tilde{u} \in H^1(\Omega)$ es una función propia asociada a λ, el Teorema 3.2.1 (vii) afirma que $\frac{1}{1+\lambda}$ es un valor propio del operador $T^\star \equiv (-\Delta + I)^{-1}$ y $\tilde{u} \in H^1(\Omega)$ una función propia correspondiente a $\frac{1}{1+\lambda}$. Escribiendo el conjunto E_λ en términos de $T^\star_{1/(1+\lambda)} := T^\star - \left(\frac{1}{1+\lambda}\right) I$, obtenemos:

$$\begin{aligned} E_\lambda &= \left\{\tilde{u} \in H_0^1(\Omega) : \tilde{u} \text{ es función propia de} -\Delta \text{ con condición de Neumann}\right\} \cup \{0\} \\ &= \left\{\tilde{u} \in H^1(\Omega) : T^\star \tilde{u} = \frac{1}{1+\lambda}\tilde{u}\right\} = \ker\left(T^\star_{1/(1+\lambda)}\right). \end{aligned}$$

La conclusión del teorema se sigue de la compacidad de $T^\star$, la Proposición 1.3.2 y la ecuación $E_\lambda = \ker\left(T^\star_{1/(1+\lambda)}\right) = \ker\left(T^\star - \left(\frac{1}{1+\lambda}\right) I\right)$. □

El próximo teorema reúne varios resultados fundamentales sobre el espectro del operador $-\Delta$ con condición de Neumann.

Teorema 3.2.3.

(i) *El conjunto de valores propios de $-\Delta$ con condición de Neumann puede escribirse como el rango de una sucesión $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ que verifica las siguientes propiedades.*

(a) *La sucesión es creciente, no negativa y $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$.*

(b) *Si λ es un valor propio de $-\Delta$ con condición de Neumann, $\lambda \neq \lambda_1$ y $d_\lambda := \dim(E_\lambda)$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_k = \lambda$ y*

$$\lambda_{k-1} < \lambda_k = \lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_{k+d_\lambda-1} < \lambda_{k+d_\lambda}.$$

En otras palabras, cada valor propio $\lambda \neq \lambda_1$ se repite de acuerdo a su multiplicidad (finita).

(ii) *Existe una base ortonormal $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ para el espacio de Hilbert $\left(L^2(\Omega), \langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2}\right)$ con las siguientes propiedades.*

(a) *Para cada $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in H^1(\Omega)$ es una función propia asociada al valor propio λ_n de $-\Delta$ con condición de Neumann.*

(b) *El rango de la sucesión $\left\{\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_n}} u_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ es una base ortonormal del espacio $\left(H^1(\Omega), \langle\cdot,\cdot\rangle_{H^1}\right)$.*

(c) *Una función propia $u \in H^1(\Omega)$ asociada al valor propio λ_n es de clase $C^\infty(\Omega)$ y satisface*

$$-\Delta u(x) = \lambda_n u(x),$$

para todo $x \in \Omega$.

Observación 3.2.2. Respecto al numeral (ib) del teorema anterior, más adelante se mostrará qué ocurre cuando se considera $\lambda = \lambda_1$ (ver Teorema 3.2.6. (i)).

Demostración.

(i) (a) El Teorema 3.2.1(iv) afirma que el conjunto de valores propios de T puede escribirse como el rango de una sucesión $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$, decreciente y estrictamente positiva, tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = 0$. Si $u_n \in L^2(\Omega)$ es una función propia asociada a μ_n, conforme el Teorema 3.2.1(vii), $\lambda_n = \frac{1}{\mu_n} - 1$ es un valor propio de $-\Delta$ con condición de Neumann, $u_n \in H^1(\Omega)$ y u_n es una función propia asociada a λ_n. Así, debido a que $0 \leq \frac{1}{\mu_n} - 1 \leq \frac{1}{\mu_{n+1}} - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \cdots$$

y $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$.

(b) Sean $\lambda \neq \lambda_1$ un valor propio de $-\Delta$ con condición de Neumann, $d_\lambda \geq 1$ la dimensión del espacio propio E_λ y $k \in \mathbb{N}$ tal que $k = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : \lambda_n = \lambda\}$. Entonces, $\mu_k = \frac{1}{1+\lambda_k}$ es un valor propio de $T^\star$ y se repite en la sucesión de valores propios de acuerdo a su multiplicidad, es decir,

$$\mu_{k-1} > \mu_k = \cdots = \mu_{k+d_\lambda-1} > \mu_{k+d_\lambda}.$$

Aplicar el Teorema 3.2.1(vii) y tomar recíprocos nuevamente completa la prueba.

(ii) (a) Se sigue del Teorema 3.2.1(v) y del hecho de que las funciones propias de $T^\star$ son, a su vez, funciones propias del operador $-\Delta$ con condición de Neumann..

(b) Consideremos índices $m, n \geq 1$ y funciones propias $u_m, u_n \in H^1(\Omega)$ correspondientes a valores propios λ_m y λ_n, respectivamente. Si $\delta_{mn} := 1$ siempre que $m = n$ y $\delta_{mn} := 0$ en otro caso, entonces

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_n}}u_n, \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_m}}u_m \right\rangle_{H^1} &= \frac{1}{\sqrt{(1+\lambda_n)(1+\lambda_m)}} \langle u_n, u_m\rangle_{H^1} \\ &= \frac{1+\lambda_n}{\sqrt{(1+\lambda_n)(1+\lambda_m)}}\langle u_n, u_m\rangle_{L^2} \\ &= \frac{\sqrt{1+\lambda_n}}{\sqrt{1+\lambda_m}}\delta_{mn};\end{aligned}$$

de manera que el rango de la sucesión $\left\{\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_n}}u_n\right\}_{n=1}^\infty$ es un conjunto ortonormal en $H^1(\Omega)$. Para comprobar que es maximal, supongamos que $h \in H^1(\Omega)$ verifica $\langle h, u_n\rangle_{H^1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $n = 1$, con base en la Proposición 3.2.1 y su demostración, $\nabla u_1 = 0$ c.t.p. en Ω y u_1 es una función constante c.t.p. en Ω. En tal caso,

$$\langle h, u_1\rangle_{H^1} = \int_\Omega \nabla h \cdot \nabla u_1 \, dx + \int_\Omega h u_1 \, dx = u_1 \int_\Omega h \, dx = 0 \tag{3.30}$$

y $\langle h, u_1\rangle_{L^2} = 0$. Para $n \geq 2$, en cambio, $\lambda_n \neq 0$ y

$$\langle h, u_n\rangle_{H^1} = \int_\Omega \nabla h \cdot \nabla u_n \, dx + \int_\Omega h u_n \, dx = (1+\lambda_n) \int_\Omega h u_n \, dx = 0,$$

así que

$$\langle h, u_n\rangle_{L^2} = \int_\Omega h u_n \, dx = 0. \tag{3.31}$$

Dado que $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ es una base ortonormal para $L^2(\Omega)$, de las identidades (3.30) y (3.31), $h = 0$ en $L^2(\Omega)$ y gracias al Lema 1.2.2, $h = 0$ en $H^1(\Omega)$.

(c) La demostración es totalmente análoga a la prueba del Teorema 2.2.3 (iic) en el caso Dirichlet. □

Observación 3.2.3. Es bien sabido que una función propia u asociada al valor propio λ satisface, bajo ciertas condiciones, la ecuación diferencial $-\Delta u = \lambda u$ en Ω y también la condición de frontera $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ en $\partial\Omega$. Ésta es la situación, por ejemplo, cuando Ω es un abierto de clase C^2 con frontera acotada. En efecto, como $(1+\lambda)\,u \in H^m(\Omega)$ para todo $m \in \mathbb{N}$ (ver la demostración del Teorema 2.2.3 (iic)) y

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_\Omega u\varphi \, dx = (1+\lambda) \int_\Omega u\varphi \, dx \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega),$$

del Teorema 1.2.5, $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$. Entretanto, si Ω es un abierto de clase C^∞ con frontera acotada, el Teorema 1.2.5 indica que $u \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$. En cualquier caso, $u \in H^1(\Omega) \cap C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ es una solución débil del problema (3.11) y por la Proposición 3.1.2 , $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ en $\partial\Omega$.

Proposición 3.2.2. *Sea $u \in H^1(\Omega)$. Entonces, u es una función propia asociada a $\lambda_1 = 0$ si y sólo si u es constante en Ω.*

Demostración. Si $u \in H^1(\Omega)$ es una función propia asociada al valor propio $\lambda_1 = 0$, entonces $u \in C^\infty(\Omega)$ (ver Teorema 3.2.3 (iic)) y u es constante c.t.p. en Ω (ver Proposición 3.2.1); esto es, $u(x)$ es constante para todo $x \in \Omega$. La implicación recíproca es obvia. $\square$

Ahora, podemos utilizar las herramientas desarrolladas en las secciones previas para caracterizar los valores propios del operador $-\Delta$ con condición de Neumann. En adelante, como marco de referencia para los Teoremas 1.3.4, 1.3.5 y 1.3.6, supondremos el espacio de Hilbert real $H^1(\Omega)$ y el operador compacto, auto-adjunto y definido positivo $T^\star : H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)$. Asimismo, si $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ es la sucesión de funciones propias del operador $-\Delta$ con condición de Neumann (ver Teorema 3.2.3 (ii)), para cada $n \in \mathbb{N}$, $H_n \coloneqq \operatorname{span}\{u_1, \cdots, u_n\}$. Por último, en vista de la Observación 1.3.2, en las demostraciones de los Teoremas 3.2.4 y 3.2.5, bastará verificar los resultados para ínfimos y supremos, en lugar de mínimos y máximos.

Teorema 3.2.4. *Para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, el n-ésimo valor propio de $-\Delta$ con condición de Neumann está caracterizado por las expresiones:*

$$\lambda_n = \min_{\substack{v \in H_{n-1}^\perp \\ v \neq 0}} \frac{\|\nabla v\|_2^2}{\|v\|_{L^2}^2} = \max_{\substack{v \in H_n \\ v \neq 0}} \frac{\|\nabla v\|_2^2}{\|v\|_{L^2}^2}, \tag{3.32}$$

y el mínimo (resp. máximo) se alcanza, exactamente, en el conjunto $H_{n-1}^\perp \cap E_{\lambda_n} \setminus \{0\}$ (resp. $H_n \cap E_{\lambda_n} \setminus \{0\}$). En otras palabras, si $u \in H_{n-1}^\perp \setminus \{0\}$ (resp. $u \in H_n \setminus \{0\}$), $u \in E_{\lambda_n}$ si y sólo si $\lambda_n = \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_{L^2}^2}$.

Demostración. Considerando que $T^\star : H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)$ es un operador lineal, continuo, auto-adjunto y definido positivo, de acuerdo con en el Teorema 1.3.4 (iii) y la Observación 1.3.1 (ii), el n-ésimo valor propio de $T^\star$ puede caracterizarse en términos del supremo como:

$$\mu_n = \sup_{\substack{v \in H_{n-1}^\perp \\ v \neq 0}} \frac{\langle T^\star v, v\rangle_{H^1}}{\|v\|_{H^1}^2}. \tag{3.33}$$

Notemos también que para toda función $f \in H^1(\Omega)$, existe una única solución débil $u \coloneqq T^\star f$ del problema (3.14) y ella satisface

$$\langle T^\star f, v\rangle_{H^1} = \langle f, v\rangle_{L^2} \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{3.34}$$

En particular, si $f = v$ en (3.34),

$$\langle T^{\star}v, v\rangle_{H^1} = \langle v, v\rangle_{L^2} \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{3.35}$$

Con relación a los valores propios del operador $-\Delta$ con condición de Neumann, el Teorema 3.2.1 (vii) y la expresión (3.33) señalan que

$$\frac{1}{1+\lambda_n} = \mu_n = \sup_{\substack{v\in H_{n-1}^{\perp}\\ v\neq 0}} \frac{\langle T^{\star}v, v\rangle_{H^1}}{\|v\|_{H^1}^2} = \sup_{\substack{v\in H_{n-1}^{\perp}\\ v\neq 0}} \frac{\|v\|_{L^2}^2}{\|v\|_{H^1}^2}. \tag{3.36}$$

Sea

$$\mathscr{A}_{n-1} := \left\{ \frac{\|v\|_{L^2}^2}{\|v\|_{H^1}^2} : v \in H^1(\Omega)\setminus\{0\}, v \in H_{n-1}^{\perp} \right\}.$$

Como $H_{n-1} \subsetneq H^1(\Omega)$, $\mathscr{A}_{n-1} \neq \varnothing$. Más aún, si $v \in H_{n-1}^{\perp}\setminus\{0\}$, entonces $\|v\|_{L^2} > 0$ según el Lema 1.2.2 y como resultado,

$$0 < \frac{\|v\|_{L^2}^2}{\|v\|_{H^1}^2} \in \mathscr{A}_{n-1}.$$

Destaquemos además que por la definición de la norma en $H^1(\Omega)$,

$$\|v\|_{L^2} \leq \|v\|_{H^1}.$$

En conclusión, como $v \in H_{n-1}^{\perp}(\Omega)\setminus\{0\}$ se eligió arbitrariamente, el conjunto $\mathscr{A}_{n-1}$ es no vacío y sus elementos estrictamente positivos y acotados superiormente. Al final, luego de aplicar el Lema 1.1.1 a (3.36), obtenemos

$$1+\lambda_n = \frac{1}{\mu_n} = \inf_{\substack{v\in H_{n-1}^{\perp}\\ v\neq 0}} \frac{\|v\|_{H^1}^2}{\|v\|_{L^2}^2} = \inf_{\substack{v\in H_{n-1}^{\perp}\\ v\neq 0}} \frac{\|v\|_{L^2}^2 + \|\nabla v\|_2^2}{\|v\|_{L^2}^2},$$

es decir,

$$\lambda_n = \inf_{\substack{v\in H_{n-1}^{\perp}\\ v\neq 0}} \frac{\|\nabla v\|_2^2}{\|v\|_{L^2}^2}. \tag{3.37}$$

Comparado con (3.33), el Teorema 1.3.7 permite caracterizar μ_n en términos del ínfimo, como sigue:

$$\frac{1}{1+\lambda_n} = \mu_n = \inf_{\substack{v\in H_n\\ v\neq 0}} \frac{\langle T^{\star}v, v\rangle_{H^1}}{\|v\|_{H^1}^2} = \inf_{\substack{v\in H_n\\ v\neq 0}} \frac{\|v\|_{L^2}^2}{\|v\|_{H^1}^2}. \tag{3.38}$$

Sea

$$\mathscr{B}_n := \left\{ \frac{\|v\|_{L^2}^2}{\|v\|_{H^1}^2} : v \in H^1(\Omega)\setminus\{0\}, v \in H_n \right\}.$$

Argumentos similares a los expuestos para $\mathscr{A}_{n-1}$, muestran que $\mathscr{B}_n$ es no vacío y sus elementos son estrictamente positivos y acotados superiormente. En definitiva, el Lema 1.1.1 y la ecuación (3.38), implican que

$$1+\lambda_n = \frac{1}{\mu_n} = \sup_{\substack{v\in H_n\\ v\neq 0}} \frac{\|v\|_{H^1}^2}{\|v\|_{L^2}^2} = \sup_{\substack{v\in H_n\\ v\neq 0}} \frac{\|v\|_{L^2}^2 + \|\nabla v\|_2^2}{\|v\|_{L^2}^2},$$

o bien,

$$\lambda_n = \sup_{\substack{v \in H_n \\ v \neq 0}} \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_{L^2}^2}. \tag{3.39}$$

Las expresiones (3.37) y (3.39) completan la primera parte de la demostración del teorema. Comprobemos ahora que el ínfimo en (3.37) se alcanza exactamente en el conjunto $E_{\lambda_n} \setminus \{0\} \cap H_{n-1}^{\perp}$. Para ello, supongamos que $u \in H_{n-1}^{\perp}(\Omega)$, $u \neq 0$, satisface

$$\lambda_n = \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_{L^2}^2}. \tag{3.40}$$

Si enseguida añadimos una unidad en ambos lados de (3.40), tenemos que

$$1 + \lambda_n = \frac{\|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_{L^2}^2} = \frac{\|u\|_{H^1}^2}{\|u\|_{L^2}^2}. \tag{3.41}$$

Como $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\left\{\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_k}} u_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ son bases ortonormales de $L^2(\Omega)$ y $H^1(\Omega)$, respectivamente, se cumple que

$$\|u\|_{H^1}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle u, \tfrac{1}{\sqrt{1+\lambda_k}} u_k \right\rangle_{H^1}^2 \quad \text{y} \quad \|u\|_{L^2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, u_k \rangle_{L^2}^2. \tag{3.42}$$

Reemplazando (3.42) en (3.41), resulta que

$$1 + \lambda_n = \frac{\|u\|_{H^1}}{\|u\|_{L^2}^2} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \left\langle u, \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_k}} u_k \right\rangle_{H^1}^2}{\sum_{k=1}^{\infty} \langle u, u_k \rangle_{L^2}^2} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} (1+\lambda_k) \langle u, u_k \rangle_{L^2}^2}{\sum_{k=1}^{\infty} \langle u, u_k \rangle_{L^2}^2}. \tag{3.43}$$

Para continuar, observemos que $u \in H_{n-1}^{\perp}$ por hipótesis, de tal forma que (3.43) puede reescribirse como:

$$1 + \lambda_n = \frac{\|u\|_{H^1}}{\|u\|_{L^2}^2} = \frac{\sum_{k=n}^{\infty} \left\langle u, \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_k}} u_k \right\rangle_{H^1}^2}{\sum_{k=n}^{\infty} \langle u, u_k \rangle_{L^2}^2} = \frac{\sum_{k=n}^{\infty} (1+\lambda_k) \langle u, u_k \rangle_{L^2}^2}{\sum_{k=n}^{\infty} \langle u, u_k \rangle_{L^2}^2},$$

es decir,

$$\sum_{k=n}^{\infty} (\lambda_k - \lambda_n) \langle u, u_k \rangle_{L^2}^2 = 0. \tag{3.44}$$

Puesto que la sucesión de valores propios del operador $-\Delta$ con condición de Neumann es creciente y no negativa (ver Teorema 3.2.3 (ia)), la expresión (3.44) es una serie de términos no negativos cuya suma es nula. Por esa razón, $(\lambda_k - \lambda_n) \langle u, u_k \rangle_{L^2}^2 = 0$ para todo $k \geq n$ y siempre que $\lambda_k \neq \lambda_n$, $\langle u, u_k \rangle_{L^2} = 0$. En resumen, u es una combinación lineal no trivial de funciones propias correspondientes al valor propio λ_n, o sea que $u \in E_{\lambda_n}$.

Por otro lado, si $u \in H_n$, $\langle u, u_k \rangle_{H^1} = (1+\lambda_k) \langle u, u_k \rangle_{L^2} = 0$ para $k > n$ y

$$1 + \lambda_n = \frac{\|u\|_{H^1}}{\|u\|_{L^2}^2} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \left\langle u, \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_k}} u_k \right\rangle_{H^1}^2}{\sum_{k=1}^{n} \langle u, u_k \rangle_{L^2}^2} = \frac{\sum_{k=1}^{n} (1+\lambda_k) \langle u, u_k \rangle_{L^2}^2}{\sum_{k=1}^{n} \langle u, u_k \rangle_{L^2}^2}.$$

Ahora bien, si reordenamos, obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda_n - \lambda_k) \langle u, u_k \rangle_{L^2}^2 = 0. \tag{3.45}$$

Todos los términos en (3.45) son no negativos, así que $(\lambda_k - \lambda_n) \langle u, u_k \rangle_{L^2}^2 = 0$ para todo $1 \leq k \leq n$. En particular, si $\lambda_n \neq \lambda_k$, necesariamente $\langle u, u_k \rangle_{L^2} = 0$. En otras palabras, $u \in E_{\lambda_n}$.

Para finalizar con lo propuesto, supongamos que $u \in H_{n-1}^{\perp} \cap E_{\lambda_n}$ (resp. $u \in H_n \cap E_{\lambda_n}$). Por definición,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \lambda_n \int_\Omega uv \, dx \quad \forall v \in H^1(\Omega) . \tag{3.46}$$

Haciendo $u = v$ en (3.46),

$$\lambda_n = \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_{L^2}^2},$$

que es lo que se quería probar. □

A diferencia de la formulación variacional del Teorema 3.2.4, la caracterización que presentamos a continuación tiene la ventaja de no depender del conocimiento previo de las funciones propias.

Teorema 3.2.5 (Teorema de Courant-Fischer). *Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Supongamos que $\mathscr{L}_n$ es la familia de todos los subespacios vectoriales de $H^1(\Omega)$ de dimensión n. El n-ésimo valor propio del operador $-\Delta$ con condición de Neumann está caracterizado por las expresiones:*

$$\lambda_n = \max_{Y \in \mathscr{L}_{n-1}} \min_{\substack{v \in Y^\perp \\ v \neq 0}} \frac{\|\nabla v\|_2^2}{\|v\|_{L^2}^2} = \min_{Y \in \mathscr{L}_n} \max_{\substack{v \in Y \\ v \neq 0}} \frac{\|\nabla v\|_2^2}{\|v\|_{L^2}^2}. \tag{3.47}$$

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. De acuerdo con el Teorema 1.3.5, el n-ésimo valor propio de $T^\star$ tiene la siguiente caracterización variacional:

$$\mu_n = \inf_{Y \in \mathscr{L}_{n-1}} \sup_{\substack{v \in Y^\perp \\ v \neq 0}} \frac{\langle T^\star v, v \rangle_{H^1}}{\|v\|_{H^1}^2}. \tag{3.48}$$

Nuevamente, vale destacar que $\mu_n = \frac{1}{1+\lambda_n}$ (ver Teorema 3.2.1 (vii)) y por lo tanto

$$\frac{1}{1+\lambda_n} = \mu_n = \inf_{Y \in \mathscr{L}_{n-1}} \sup_{\substack{v \in Y^\perp \\ v \neq 0}} \frac{\langle T^\star v, v \rangle_{H^1}}{\|v\|_{H^1}^2} = \inf_{Y \in \mathscr{L}_{n-1}} \sup_{\substack{v \in Y^\perp \\ v \neq 0}} \frac{\|v\|_{L^2}^2}{\|v\|_{H^1}^2}. \tag{3.49}$$

Sea $Y \in \mathscr{L}_{n-1}$. Como $Y \subsetneq H^1(\Omega)$, $Y^\perp \neq \{0\}$ y el conjunto

$$\mathscr{A}_Y = \left\{ \frac{\|v\|_{L^2}^2}{\|v\|_{H^1}^2} : v \in Y^\perp, \ v \neq 0 \right\}, \tag{3.50}$$

es no vacío. Luego, por el Lema 1.2.2, si $v \in Y^{\perp}$ y $v \neq 0$, entonces $\|v\|_{L^2} > 0$ y

$$0 < \frac{\|v\|_{L^2}^2}{\|v\|_{H^1}^2} \in \mathscr{A}_Y. \tag{3.51}$$

Además, por la definición de la norma en $H^1(\Omega)$,

$$\frac{\|v\|_{L^2}^2}{\|v\|_{H^1}^2} \leq 1. \tag{3.52}$$

En conclusión, como v se escogió arbitrariamente en $Y^{\perp}$, el conjunto $\mathscr{A}_Y$ es no vacío y sus elementos estrictamente positivos y acotados superiormente. Definamos $a_Y = \sup \mathscr{A}_Y$. Con motivo de (3.51) y (3.52),

$$0 < \frac{\|v\|_{L^2}^2}{\|v\|_{H^1}^2} \leq a_Y \leq 1 \quad \forall v \in Y^{\perp}, \tag{3.53}$$

y según el Lema 1.1.1,

$$a_Y = \sup \mathscr{A}_Y = \sup_{\substack{v \in Y^{\perp} \\ v \neq 0}} \frac{\|v\|_{L^2}^2}{\|v\|_{H^1}^2} = \frac{1}{\inf\limits_{\substack{v \in Y^{\perp} \\ v \neq 0}} \frac{\|v\|_{H^1}^2}{\|v\|_{L^2}^2}}.$$

Sea $A \coloneqq \{a_Y : Y \in \mathscr{L}_{n-1}\}$. Por la ecuación (3.49) sabemos que

$$\frac{1}{1+\lambda_n} = \operatorname{ínf} A = \operatorname{ínf} \{a_Y : Y \in \mathscr{L}_{n-1}\},$$

de manera que bastará mostrar que A satisface las hipótesis del Lema 1.1.1. En efecto, La elección arbitraria de Y al principio de la prueba y la ecuación (3.53), implican que

$$0 < a_Y \leq 1 \quad \forall Y \in \mathscr{L}_{n-1}, \tag{3.54}$$

es decir, $A \subset (0, \infty)$ es acotado. En las condiciones anteriores, el Lema 1.1.1 afirma que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+\lambda_n} = \operatorname{ínf} \{a_Y : Y \in \mathscr{L}_{n-1}\} &= \frac{1}{\sup\limits_{Y \in \mathscr{L}_{n-1}} \frac{1}{a_Y}} = \frac{1}{\sup\limits_{Y \in \mathscr{L}_{n-1}} \inf\limits_{\substack{v \in Y^{\perp} \\ v \neq 0}} \frac{\|v\|_{H^1}^2}{\|v\|_{L^2}^2}} \\
&= \frac{1}{\sup\limits_{Y \in \mathscr{L}_{n-1}} \inf\limits_{\substack{v \in Y^{\perp} \\ v \neq 0}} \left(1 + \frac{\|\nabla v\|_2^2}{\|v\|_{L^2}^2}\right)} \\
&= \frac{1}{1 + \sup\limits_{Y \in \mathscr{L}_{n-1}} \inf\limits_{\substack{v \in Y^{\perp} \\ v \neq 0}} \frac{\|\nabla v\|_2^2}{\|v\|_{L^2}^2}},
\end{aligned}$$

o mejor aún, tomando recíprocos (ver Observación 1.3.2):

$$\lambda_n = \sup_{Y \in \mathscr{L}_{n-1}} \inf_{\substack{v \in Y^{\perp} \\ v \neq 0}} \frac{\|\nabla v\|_2^2}{\|v\|_{L^2}^2}.$$

Para la segunda parte de la prueba, recurrimos a la identidad $\mu_n = \frac{1}{1+\lambda_n}$ y a la correspondiente caracterización variacional del Teorema 1.3.6, así:

$$\frac{1}{1+\lambda_n} = \mu_n = \sup_{Y \in \mathscr{L}_n} \inf_{\substack{v \in Y \\ v \neq 0}} \frac{\langle T^\star v, v\rangle_{H^1}}{\|v\|_{H^1}^2} = \sup_{Y \in \mathscr{L}_n} \inf_{\substack{v \in Y \\ v \neq 0}} \frac{\|v\|_{L^2}^2}{\|v\|_{H^1}^2}. \tag{3.55}$$

Sea $Y \in \mathscr{L}_n$. Definamos

$$\mathscr{B}_Y = \left\{ \frac{\|v\|_{L^2}^2}{\|v\|_{H^1}^2} : v \in Y,\ v \neq 0 \right\}. \tag{3.56}$$

Razonando como en el caso de $\mathscr{A}_Y$, se verifica fácilmente que $\mathscr{B}_Y$ es no vacío y que sus elementos son estrictamente positivos y acotados superiormente. Dicho esto, al usar el Lema 1.1.1 en (3.56), tenemos

$$b_Y = \inf \mathscr{B}_Y = \inf_{\substack{v \in Y \\ v \neq 0}} \frac{\|v\|_{L^2}^2}{\|v\|_{H^1}^2} = \frac{1}{\sup\limits_{\substack{v \in Y \\ v \neq 0}} \frac{\|v\|_{H^1}^2}{\|v\|_{L^2}^2}}.$$

Más aún, puesto que Y tiene dimensión finita, el conjunto $\{v \in Y : \|v\|_{H^1} \leq 1\}$ es compacto y por el teorema de los valores extremos existe $\bar{v} \in Y$, $\bar{v} \neq 0$, tal que

$$b_Y = \min_{\substack{v \in Y \\ \|v\|_{H^1} = 1}} \langle T^\star v, v\rangle_{H^1} = \min_{\substack{v \in Y \\ v \neq 0}} \frac{\langle T^\star v, v\rangle_{H^1}}{\|v\|_{H^1}^2} = \frac{\|\bar{v}\|_{L^2}^2}{\|\bar{v}\|_{H^1}^2} > 0. \tag{3.57}$$

Sea $\mathscr{B} := \{b_Y : Y \in \mathscr{L}_n\}$. Debido a (3.55),

$$\frac{1}{1+\lambda_n} = \sup \mathscr{B} = \sup \{b_Y : Y \in \mathscr{L}_n\}, \tag{3.58}$$

y como antes, será suficiente evaluar si se cumplen las hipótesis del Lema 1.1.1. Recordando que el subespacio Y se eligió arbitrariamente en la ecuación (3.57), se deduce que $B \subset (0, \infty)$. A su vez, gracias a la desigualdad $\|v\|_{L^2}^2 \leq \|v\|_{H^1}^2$,

$$1 \leq \frac{\|v\|_{H^1}^2}{\|v\|_{L^2}^2} \leq \sup_{\substack{v \in Y \\ v \neq 0}} \frac{\|v\|_{H^1}^2}{\|v\|_{L^2}^2} \quad \forall Y \in \mathscr{L}_n,$$

o sea que

$$0 < b_Y = \frac{1}{\sup\limits_{\substack{v \in Y \\ v \neq 0}} \frac{\|v\|_{H^1}^2}{\|v\|_{L^2}^2}} \leq 1 \quad \forall Y \in \mathscr{L}_n.$$

En síntesis, empleando el Lema 1.1.1 en (3.58), resulta

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1+\lambda_n} = \sup\{b_Y : Y \in \mathscr{L}_n\} = \frac{1}{\inf\limits_{Y\in\mathscr{L}_n} \frac{1}{b_Y}} &= \frac{1}{\inf\limits_{Y\in\mathscr{L}_n} \sup\limits_{\substack{v\in Y\\ v\neq 0}} \frac{\|v\|_{H^1}^2}{\|v\|_{L^2}^2}} \\
&= \frac{1}{\inf\limits_{Y\in\mathscr{L}_n} \sup\limits_{\substack{v\in Y\\ v\neq 0}} \left(1+\frac{\|\nabla v\|_2^2}{\|v\|_{L^2}^2}\right)} \\
&= \frac{1}{1+\inf\limits_{Y\in\mathscr{L}_n} \sup\limits_{\substack{v\in Y\\ v\neq 0}} \frac{\|\nabla v\|_2^2}{\|v\|_{L^2}^2}},
\end{aligned}
$$

o bien,

$$
\lambda_n = \inf_{Y\in\mathscr{L}_n} \sup_{\substack{v\in Y\\ v\neq 0}} \frac{\|\nabla v\|_{L^2}^2}{\|v\|_{L^2}^2}. \qquad \square
$$

Observación 3.2.4. Sean $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ tales que $\Omega \subset \Omega'$. De acuerdo con el Teorema 2.2.7, si el problema de valores propios de $-\Delta$ con condición de Dirichlet tiene sentido en Ω y Ω', entonces $\lambda'_n \leq \lambda_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Lamentablemente, esta propiedad es falsa en el caso Neumann, inclusive en regiones con geometrías sorprendentemente simples. Para probarlo, consideremos

$$
\Omega' := \{(x,y) : 0 < x < \ell_1, 0 < y < \ell_2\}
$$

y Ω como en la Figura 3.1. Pese a que la región rectangular $(0,\ell_1)\times(0,\ell_2)$ no es de clase C^1 (más precisamente, es C^1 a trozos), aún tiene sentido plantear allí el problema de valores propios para el operador $-\Delta$ con condición de Neumann (ver [H, pág. 7] Teorema 1.2.8, [MMP, pág. 232]). De hecho, se puede demostrar (ver [NW, pág. 16] Proposición 5.4) la existencia de una sucesión de dominios suaves $\{\Omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que, si $\lambda_{2,k}$ es el segundo valor propio de $-\Delta$ con condición de Neumann en Ω_k, entonces $\lambda_{2,k} \to \lambda_2$ cuando $k \to \infty$.

Los valores propios y funciones propias de $-\Delta$ con condición de Neumann en Ω' y Ω (ver la Sección 4.5) son:

$$
\begin{cases}
\lambda'_{nm} = \pi^2\left(\dfrac{n^2}{\ell_1^2}+\dfrac{m^2}{\ell_2^2}\right) \\[2ex]
\lambda_{nm} = \pi^2\left(\dfrac{n^2}{c_1^2}+\dfrac{m^2}{c_2^2}\right)
\end{cases}
\quad m,n \in \mathbb{N}_0.
$$

Si $n = 1$ y $m = 0$, entonces

$$
\lambda'_2 := \lambda'_{1,0} = \left(\frac{\pi}{\ell_1}\right)^2 \quad \text{y} \quad \lambda_2 := \lambda_{1,0} = \left(\frac{\pi}{c_1}\right)^2, \tag{3.59}
$$

de tal forma que λ'_2 y λ_2 dependen, cada uno, de la longitud de Ω' y Ω. Para concluir el contraejemplo, basta hallar valores x y y (ver Figura 3.1) tales que

$$
c_1 = \sqrt{(\ell_1 - x)^2 + (\ell_2 - y)^2} > \ell_1, \tag{3.60}
$$

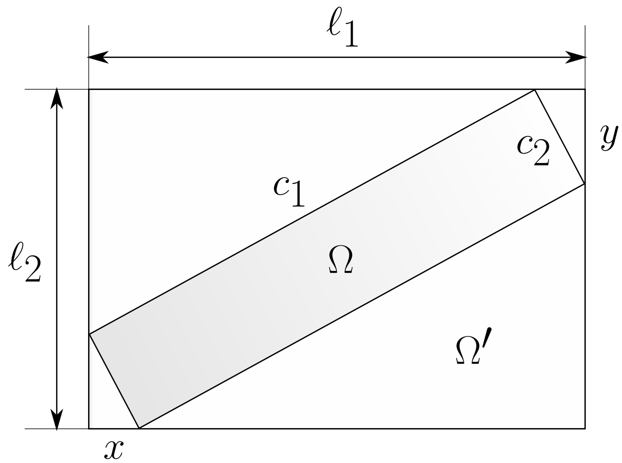

Figura 3.1: Dominios Ω' y Ω

de manera que $\lambda_2 < \lambda_2'$ (una combinación de valores que verifica (3.60) es: $\ell_1 = 2$, $\ell_2 = 1$ y $x = y = 0{,}1$).

Teorema 3.2.6. *Si $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión de valores propios del operador $-\Delta$ con condición de Neumann descrita en el Teorema 3.2.3, entonces:*

(i) *el primer valor propio $\lambda_1 = 0$ es simple.*

(ii) *Cualquier función propia correspondiente a un valor propio $\lambda > \lambda_1$ es nodal, es decir, cambia de signo en Ω.*

Demostración.

(i) Para demostrar que $\lambda_1 = 0$ es simple, razonemos por el absurdo y supongamos que $\dim E_{\lambda_1} > 1$. En ese caso, al menos u_1 y u_2, elementos de la base $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $L^2(\Omega)$ (ver Teorema 3.2.3), son funciones propias asociadas a λ_1. Debido a que u_1 y u_2 deben ser constantes en Ω,
$$\langle u_1, u_2\rangle_{L^2} = \int_\Omega u_1 u_2 \, dx \neq 0.$$
Sin embargo, eso contradice el hecho probado en el Teorema 3.2.3 (ii), acerca de la ortogonalidad de las funciones propias u_n en $L^2(\Omega)$.

(ii) Sean $u, u_1 \in H^1(\Omega)$ funciones propias asociadas a $\lambda > \lambda_1$ y λ_1, respectivamente. Entonces u y u_1 son ortogonales en $L^2(\Omega)$ y satisfacen
$$\int_\Omega u_1 u \, dx = 0.$$
Como u_1 es constante (positiva o negativa), necesariamente u debe cambiar de signo en Ω. En otras palabras, u es nodal. $\square$

A continuación, enunciamos una versión del teorema nodal de Courant para el operador $-\Delta$ con condición de Neumann. Vale la pena decir que el principio de continuación única, Teorema 2.2.9, también es válido en el caso Neumann (ver [CH], [JK], [MMP, pág. 234] Proposición 9.23).

Teorema 3.2.7 (Teorema nodal de Courant)**.** *Para $n \geq 2$, cualquier función propia correspondiente al valor propio λ_n divide el dominio Ω en al menos dos y en a lo sumo n regiones nodales.*

Demostración. Sea $u \in H^1(\Omega)$ una función propia asociada al valor propio λ_n. Supongamos por el contrario que el conjunto $\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}$ es la unión disjunta de al menos $m > n$ regiones nodales, digamos $\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_m$ (como u cambia de signo en Ω, $m \geq 2$). Para toda $1 \leq j \leq m$, definamos

$$w_j(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in \Omega_j, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Puesto que $u \in H^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$, es cierto que $w_j \in H^1(\Omega)$ (ver Proposición 2.2.2). Además, en atención a que w_j es de un signo en Ω, con base en la Proposición 1.2.6

$$\nabla w_j = \begin{cases} \nabla u & \text{si } x \in \Omega_j, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Más aún,

$$\begin{aligned} \|\nabla w_j\|_2^2 = \int_\Omega \nabla w_j \cdot \nabla w_j \, dx &= \int_{\Omega_j} \nabla u \cdot \nabla u \, dx + \int_{\Omega \setminus \Omega_j} \nabla u \cdot 0 \, dx \\ &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w_j \, dx \\ &= \lambda_n \int_\Omega u w_j \, dx \\ &= \lambda_n \int_\Omega w_j^2 \, dx = \lambda_n \|w_j\|_{L^2}^2 . \end{aligned}$$

Sean $\{c_1, \cdots, c_n\}$ constantes reales arbitrarias, $c_{n+1} = \cdots = c_m = 0$ y $w := c_1 w_1 + \cdots c_m w_m$. Considerando que $\Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing$ para $i \neq j$,

$$\begin{aligned} \|\nabla w\|_2^2 &= \|c_1 \nabla w_1 + \cdots + c_m \nabla w_m\|_2^2 \\ &= c_1^2 \int_\Omega \nabla w_1 \cdot \nabla w_1 \, dx + \cdots + c_m^2 \int_\Omega \nabla w_m \cdot \nabla w_m \, dx \\ &= c_1^2 \lambda_n \int_\Omega w_1^2 \, dx + \cdots + c_m^2 \lambda_n \int_\Omega w_m^2 \, dx \\ &= c_1^2 \lambda_n \|w_1\|_{L^2}^2 + \cdots + c_m^2 \lambda_n \|w_m\|_{L^2}^2 \\ &= \lambda_n \left(\|c_1 w_1 + \cdots + c_m w_m\|_{L^2}^2 \right) = \lambda_n \|w\|_{L^2}^2 . \end{aligned}$$

Elijamos constantes $c_1, \cdots, c_n$, no todas nulas, tales que para todo $1 \leq k \leq n-1$, $\langle w, u_k \rangle_{H^1} = 0$ (esto es posible ya que se trata de un sistema homogéneo de $n-1$ ecuaciones con n incógnitas). En consecuencia, $w \in H_{n-1}^\perp$ y de acuerdo con el Teorema 2.2.5, w es una función propia asociada a λ_n que se anula en un subconjunto abierto y no vacío de Ω (para todo $n+1 \leq j \leq m$, $\Omega_j \neq \varnothing$ es abierto y $w \equiv 0$ en Ω_j), es decir, $w \equiv 0$ en Ω por el principio de continuación única. Lo anterior es absurdo, puesto que w es una función propia y es no nula por definición. $\square$

Finalizamos esta sección con un teorema que relaciona (siempre que tenga sentido plantear los problemas (2.10) y (3.11) simultáneamente) la sucesión de valores propios del operador $-\Delta$ con condición de Dirichlet y la correspondiente sucesión de valores propios con condición de Neumann. El resultado se deduce a partir de los teoremas de Courant-Fischer.

Teorema 3.2.8. *Sean* $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *y* $\{\lambda_n'\}_{n=1}^{\infty}$ *las sucesiones de valores propios del operador* $-\Delta$ *con condición de Dirichlet y con condición de Neumann, respectivamente. Entonces,*

$$\lambda_n' \leq \lambda_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Sea Y un subespacio arbitrario de dimensión n de $H_0^1(\Omega)$. Puesto que $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, Y es a su vez un subespacio de dimensión n de $H^1(\Omega)$. Así, de la caracterización variacional en cada caso (Teoremas 2.2.6 y 3.2.5), se sigue que

$$\lambda_n' = \min_{\substack{Y' \in \mathscr{L}_n \\ \mathscr{L}_n \subset H^1(\Omega)}} \max_{\substack{v \in Y \\ v \neq 0}} \frac{\|\nabla v\|_2^2}{\|v\|_2^2} \leq \min_{\substack{Y \in \mathscr{L}_n \\ \mathscr{L}_n \subset H_0^1(\Omega)}} \max_{\substack{v \in Y \\ v \neq 0}} \frac{\|\nabla v\|_2^2}{\|v\|_2^2} = \lambda_n. \qquad \square$$

Observación 3.2.5. Las técnicas de los Capítulos 2 y 3 se pueden usar para estudiar problemas más generales. Para fijar ideas, sean $f \in L^2(\Omega)$, $\zeta \in L^\infty(\Omega)$ y $K : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ la inyección compacta dada por el Teorema de Rellich-Kondrachov (ver Teorema 1.2.2). Supongamos que $C > 0$ es una constante tal que $\|\zeta\|_{L^\infty} < C$. Consideremos el problema

$$\begin{cases} -\Delta u + (\zeta + C)\, u = f & \text{en} \quad \Omega, \\ \text{Cond. de Dirichlet o de Neumann} & \text{en} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Razonando como al inicio del Capítulo 3, se obtiene un operador $\widetilde{Q} := (-\Delta + (\zeta + C)\, I)^{-1} : L^2(\Omega) \to H^1(\Omega)$ tal que $T := K \circ \widetilde{Q} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ y $T^\star := \widetilde{Q} \circ K : H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)$ son operadores lineales, compactos, auto-adjuntos y definidos positivos. A continuación se aplicaría la teoría abstracta de la Sección 1.3.

Capítulo

4 Ejemplos

Históricamente, el origen de la teoría espectral y parte de su desarrollo, se debe a intentos por comprender problemas concretos, a menudo vinculados al comportamiento de un sistema físico. Por ese motivo, complementamos el estudio de los capítulos previos, explorando ejemplos del problema de valores propios para el operador $-\Delta$ con condición de Dirichlet y condición de Neumann, en una y dos dimensiones.

A lo largo de este capítulo, usaremos habitualmente la notación $\mathbb{N}_0$ para referirnos al conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

4.1. Resultados preliminares

La solución general de la ecuación diferencial con coeficientes constantes

$$-u''(x) = \lambda u(x) \quad 0 \leq x \leq \ell,$$

depende del valor de λ y puede determinarse usando los métodos clásicos de solución de ecuaciones diferenciales ordinarias (ver, por ejemplo, [ZC] Capítulo 4). En efecto, si a y b son constantes reales arbitrarias, $u(x)$ es de la forma:

$$\begin{cases} u(x) = ax + b & \text{si} \quad \lambda = 0, \\ u(x) = ae^{\sqrt{-\lambda}x} + be^{-\sqrt{-\lambda}x} & \text{si} \quad \lambda < 0, \\ u(x) = a\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + b\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}x\right) & \text{si} \quad \lambda > 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Recordemos dos enunciados clásicos de mucha utilidad a futuro.

Teorema 4.1.1. *El conjunto*

$$\left\{\cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) : n \in \mathbb{N}_0\right\} \cup \left\{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) : n \in \mathbb{N}\right\},$$

es una base ortonormal de $L^2((-\ell,\ell))$.

Demostración. Ver [FL, pág. 78] Teorema 3.5.

Teorema 4.1.2. *Si $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base ortogonal de $L^2((a,b))$ y $\{\psi_m\}_{m=1}^{\infty}$ es una base ortogonal de $L^2((c,d))$, entonces $\{\varphi_{nm}\}_{n,m=1}^{\infty}$ con*

$$\varphi_{nm}(x,y) := \phi_n(x)\,\psi_m(y), \tag{4.2}$$

es una base ortonormal de $L^2((a,b)\times(c,d))$.

Demostración. Ver [FL, pág. 121] Teorema 4.1. □

4.2. El problema de valores propios con condición de Dirichlet en una dimensión

Sea $\Omega = (0,\ell)$, $\ell > 0$. Consideremos el problema de valores propios

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda u(x) & x \in \Omega, \\ u(0) = 0, \\ u(\ell) = 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

Proposición 4.2.1.

(i) *Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$ es un valor propio de (4.3) y $u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$ es una función propia asociada a λ_n.*

(ii) *El rango de la sucesión $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base ortonormal de $L^2(0,\ell)$.*

Demostración.

(i) Si $\lambda < 0$ o $\lambda = 0$, $u \equiv 0$ es la única solución que satisface la ecuación diferencial y las condiciones de frontera. Si $\lambda > 0$, de acuerdo con (4.1)

$$u(x) = a\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + b\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}x\right) \quad \forall x \in (0,\ell),$$

donde a y b son constantes reales por establecer. Al usar las condiciones de frontera,

$$u(0) = a = 0 \quad \text{y} \quad u(\ell) = b\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\ell\right) = 0, \tag{4.4}$$

o sea que $\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\ell\right) = 0$ (si $b = 0$, $u \equiv 0$). Así, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2,$$

es un valor propio de (4.3) y

$$u_n(x) = b\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \quad \forall x \in (0,\ell),$$

una función propia asociada a λ_n. Finalmente, elijamos $b \in \mathbb{R}$ de manera que

$$\|u_n\|_{L^2(0,\ell)} = \sqrt{\int_0^{\ell} b^2\operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)dx} = 1,$$

esto es, $b = \sqrt{\frac{2}{\ell}}$.

(ii) Sean $f \in L^2(0,\ell)$ y $\hat{f}$ la extensión periódica impar de f de período 2ℓ. Entonces $\hat{f}$ tiene una representación en términos únicamente de funciones seno (ver [ST, pág. 104], [KE, pág. 43]), de modo que

$$\hat{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \quad \text{con } \; b_n := \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \hat{f}(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx. \tag{4.5}$$

Luego, conforme $k \to \infty$

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{n=1}^{k} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)\right\|_{L^2(0,\ell)} &\leq \sqrt{\int_{-\ell}^{\ell}\left|\hat{f} - \sum_{n=1}^{k} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)\right|^2 dx} \\ &= \left\|\hat{f} - \sum_{n=1}^{k} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)\right\|_{L^2(-\ell,\ell)} \longrightarrow 0. \end{aligned} \tag{4.6}$$

En otras palabras, $\{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) : n \in \mathbb{N}\}$ es una base de $L^2(0,\ell)$ y $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal de $L^2(0,\ell)$. □

Proposición 4.2.2.

(i) *Si λ es un valor propio de $-\Delta$ con condición de Dirichlet (en una dimensión), existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda = \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2$. Dicho de otra manera, los elementos de $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ son todos los valores propios del problema 4.3.*

(ii) *Para todo $n \in \mathbb{N}$, λ_n es simple.*

Demostración.

(i) Se sigue de la Proposición 4.2.1 (ii), el Teorema 2.2.2 (i) y de reemplazar $-\Delta$ por A en la prueba del Teorema 1.3.4 (v).

(ii) Sean $k, n \in \mathbb{N}$. Razonemos por el absurdo y supongamos que $\dim(E_{\lambda_k}) > 1$. En ese caso, existe al menos una función propia w asociada a λ_k tal que $\|w\|_{L^2} = 1$ y $\langle w, u_k\rangle_{L^2} = 0$. Además, toda vez que $k \neq n$, $\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2 \neq \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 = \lambda_n$ y por el Teorema 2.2.2 (i), $\langle w, u_n\rangle_{L^2} = 0$. En consecuencia, $\{u_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{w\}$ es un conjunto ortonormal que contiene propiamente a $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$, un hecho que contradice la Proposición 4.2.1 (ii). □

4.3. El problema de valores propios con condición de Neumann en una dimensión

Sea $\Omega = (0,\ell)$, $\ell > 0$. Consideremos el problema de valores propios

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda u(x) & x \in \Omega, \\ u'(0) = 0, \\ u'(\ell) = 0. \end{cases} \tag{4.7}$$

Proposición 4.3.1.

(i) *Para todo* $n \in \mathbb{N}_0$, $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$ *es un valor propio de* (4.7) *y*

$$u_n(x) := \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1}{\ell}} & \text{si } n = 0, \\ \sqrt{\dfrac{2}{\ell}} \cos\left(\dfrac{n\pi x}{\ell}\right) & \text{si } n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

es una función propia asociada a λ_n.

(ii) *El rango de la sucesión* $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ *es una base ortonormal de* $L^2(0,\ell)$.

Observación 4.3.1. Por simplicidad en la notación, enumeramos la sucesión de valores propios y la correspondiente sucesión de funciones propias de $-\Delta$ con condición de Neumann desde cero.

Demostración.

(i) Si $\lambda < 0$, un cálculo directo indica que $u \equiv 0$ es la única solución de (4.7). Por otro lado, si $\lambda = 0$, de acuerdo con (4.1), $u(x) = ax + b$ y al evaluar las condiciones de frontera

$$u'(0) = u'(\ell) = a = 0. \tag{4.8}$$

Reuniendo (4.8) y la condición $\|u\|_{L^2(0,\ell)} = 1$, resulta que $u_0(x) := u(x) = b = \sqrt{\frac{1}{\ell}}$. En cambio, si $\lambda > 0$,

$$u(x) = a\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + b\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}x\right) \quad \forall x \in (0,\ell),$$

donde a y b son constantes reales por establecer. Al usar las condiciones de frontera,

$$u'(0) = \sqrt{\lambda}\, b = 0 \quad \text{y} \quad u'(\ell) = -\sqrt{\lambda}\, a \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\ell\right) = 0, \tag{4.9}$$

tenemos que, $b = 0$ y $\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\ell\right) = 0$ (si $a = 0$, $u \equiv 0$). Así, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2,$$

es un valor propio de (4.7) y

$$u_n(x) = a\cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \quad \forall x \in (0,\ell),$$

una función propia asociada a λ_n. Finalmente, elijamos $a \in \mathbb{R}$ de manera que

$$\|u_n\|_{L^2(0,\ell)} = \sqrt{\int_0^{\ell} a^2 \cos^2\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx} = 1,$$

esto es, $a = \sqrt{\frac{2}{\ell}}$.

(ii) Sean $f \in L^2(0,\ell)$ y $\hat{f}$ la extensión periódica par de f de período 2ℓ. Entonces $\hat{f}$ tiene una representación en términos únicamente de funciones coseno (ver [ST, pág. 104], [KE, pág. 43]), de modo que

$$\hat{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), \quad \text{con } a_0 = \frac{1}{\ell}\int_0^\ell \hat{f}(x)\, dx \text{ y } \quad a_n := \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \hat{f}(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx. \tag{4.10}$$

Luego, conforme $k \to \infty$

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{n=0}^{k} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)\right\|_{L^2(0,\ell)} &\leq \sqrt{\int_{-\ell}^{\ell}\left|\hat{f} - \sum_{n=0}^{k} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)\right|^2 dx} \\ &= \left\|\hat{f} - \sum_{n=0}^{k} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)\right\|_{L^2(-\ell,\ell)} \longrightarrow 0. \end{aligned} \tag{4.11}$$

En otras palabras, $\left\{\cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) : n \in \mathbb{N}_0\right\}$ es una base de $L^2(0,\ell)$ y $\{u_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ una base ortonormal de $L^2(0,\ell)$. □

Proposición 4.3.2.

(i) *Si λ es un valor propio de $-\Delta$ con condición de Neumann (en una dimensión), existe $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $\lambda = \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2$. Dicho de otra manera, los elementos de $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ son todos los valores propios del problema 4.7.*

(ii) *Para todo $n \in \mathbb{N}$, λ_n es simple.*

Demostración. La demostración de esta afirmación, que omitimos, es totalmente análoga a la de la Proposición 4.2.2. □

Observación 4.3.2.

(i) Las proposiciones 4.2.2 (Dirichlet) y 4.3.2 (Neumann) muestran que, en ciertas circunstancias, todos los valores propios pueden ser simples.

(ii) Sean p, q y w funciones con valores reales en $[a,b]$, $-\infty < a < b < \infty$ con $p \neq 0$ y $w > 0$. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0 \quad \text{y} \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0. \tag{4.12}$$

Se sabe que (4.3) y (4.7) son casos particulares del problema más general de hallar $x \in C^2[a,b]$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que

$$\begin{cases} \dfrac{1}{w}\left[(px')' + qx\right] = \lambda x, \\ \alpha_1 x(a) + \alpha_2 x'(a) \quad = 0, \\ \beta_1 x(b) + \beta_2 x'(b) \quad = 0, \end{cases}$$

llamado el problema de *Sturm-Liouville* regular.

En los próximos ejemplos, se hace uso extensivo de la técnica de separación de variables. Para una descripción completa de este método, se pueden consultar entre otras referencias, [KE] Capítulo 11 y [ST] Capítulo 4.

4.4. Un problema de valores propios con condición de Dirichlet en dos dimensiones

Sea $\Omega \coloneqq \{(x,y) : 0 < x < \ell_1, 0 < y < \ell_2\}$. Consideremos el problema de valores propios

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u \quad \text{en } \Omega, \\ \quad u &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.13}$$

Proposición 4.4.1.

(i) *Para todo* $n, m \in \mathbb{N}$, $\lambda_{nm} = \pi^2 \left(\frac{n^2}{\ell_1^2} + \frac{m^2}{\ell_2^2}\right)$ *es un valor propio de* (4.13) *y* $u_{nm}(x,y) = \frac{2}{\sqrt{\ell_1 \ell_2}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell_1}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{\ell_2}\right)$ *es una función propia asociada a* λ_{nm}.

(ii) *El conjunto* $\{u_{nm} : n, m \in \mathbb{N}\}$ *es una base ortonormal para el espacio de Hilbert* $L^2(\Omega)$.

Demostración.

(i) Supongamos una solución de la forma $u(x,y) = F(x)G(y)$. Reemplazando $u(x,y) = F(x)G(y)$ en (4.13) y dividiendo por $F(x)G(y)$ (siempre que $F(x) \neq 0$ y $G(y) \neq 0$) obtenemos,

$$\frac{F''(x)}{F(x)} + \frac{G''(y)}{G(y)} = -\lambda.$$

Más aún, después de reorganizar,

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = -\left(\frac{G''(y)}{G(y)} + \lambda\right) \eqqcolon p. \tag{4.14}$$

Dado que se trata de la igualdad de dos funciones que dependen de distintas variables, p debe ser constante. Combinando la ecuación (4.14) y las condiciones de frontera en (4.13) (ver [KE, pág. 94] Capítulo 11), resulta

$$\begin{cases} F''(x) - pF(x) = 0 \quad x \in (0, \ell_1), \\ F(0) = 0, \\ F(\ell_1) = 0. \end{cases} \tag{4.15}$$

Resolviendo (4.15) como en la prueba de la Proposición 4.2.1 (i), se sigue que $p = -\left(\frac{n\pi}{\ell_1}\right)^2$ y $F_n(x) \coloneqq \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell_1}\right)$ para $n \in \mathbb{N}$. Por consiguiente, el problema de valores en la frontera para $G(y)$ queda así:

$$\begin{cases} G''(y) + \left(\lambda - \dfrac{n^2\pi^2}{\ell_1^2}\right) G(y) = 0 \quad y \in (0, \ell_2), \\ G(0) = 0, \\ G(\ell_2) = 0. \end{cases}$$

Procediendo nuevamente como en la Proposición 4.2.1 (i), encontramos que $\lambda_{nm} = \pi^2 \left(\frac{n^2}{\ell_1^2} + \frac{m^2}{\ell_2^2}\right)$ es un valor propio de $-\Delta$ con condición de Dirichlet y $u_{nm}(x,y) = F_n(x)G_m(y) = \zeta \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell_1}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{\ell_2}\right)$, con $\zeta \in \mathbb{R}$, es una función propia asociada a λ_{nm}. Para terminar, elijamos $\zeta = \frac{2}{\sqrt{\ell_1 \ell_2}}$ de tal manera que $\|u_{nm}\|_{L^2(\Omega)} = 1$.

(ii) Consecuencia de la demostración de la Proposición 4.2.1 (ii) y el Teorema 4.1.2. □

Corolario 4.4.1. *Si λ es un valor propio de* (4.13)*, existen $j,k \in \mathbb{N}$ tales que $\lambda = \lambda_{jk} = \pi^2\left(\frac{j^2}{\ell_1^2} + \frac{k^2}{\ell_2^2}\right)$. Dicho de otra manera, los elementos de $\{\lambda_{nm} : n,m \in \mathbb{N}\}$ son todos los valores propios del problema* (4.13).

Demostración. Se sigue de la Proposición 4.4.1 (ii), el Teorema 2.2.2 (i) y de reemplazar $-\Delta$ por A en la prueba del Teorema 1.3.4 (v). □

4.5. Un problema de valores propios con condición de Neumann en dos dimensiones

Sean $\Omega := \{(x,y) : 0 < x < \ell_1, 0 < y < \ell_2\}$ y $\mathscr{P} := \{0,\ell_1\} \times \{0,\ell_2\}$. Consideremos el problema de valores propios

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{en} \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega \backslash \mathscr{P}. \end{cases} \tag{4.16}$$

Proposición 4.5.1.

(i) *Para todo $n,m \in \mathbb{N}_0$, $\lambda_{nm} = \pi^2\left(\frac{n^2}{\ell_1^2} + \frac{m^2}{\ell_2^2}\right)$ es un valor propio de* (4.16) *y $u_{nm}(x,y) = \frac{2}{\sqrt{\ell_1 \ell_2}} \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell_1}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{\ell_2}\right)$ es una función propia asociada a λ_{nm}.*

(ii) *El conjunto $\{u_{nm} : n,m \in \mathbb{N}_0\}$ es una base ortogonal para el espacio de Hilbert $L^2(\Omega)$.*

Demostración.

(i) Supongamos una solución de la forma $u(x,y) = F(x)G(y)$. Reemplazando $u(x,y) = F(x)G(y)$ en (4.16) y dividiendo por $F(x)G(y)$ (siempre que $F(x) \neq 0$ y $G(y) \neq 0$) obtenemos,

$$\frac{F''(x)}{F(x)} + \frac{G''(y)}{G(y)} = -\lambda.$$

Más aún, después de reorganizar,

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = -\left(\frac{G''(y)}{G(y)} + \lambda\right) =: p. \tag{4.17}$$

Dado que se trata de la igualdad de dos funciones que dependen de distintas variables, p debe ser constante. Combinando la ecuación (4.17) y las condiciones de frontera en (4.16) (ver [KE, pág. 94] Capítulo 11), resulta

$$\begin{cases} F''(x) - pF(x) = 0 \quad x \in (0,\ell_1), \\ F'(0) = 0, \\ F'(\ell_1) = 0. \end{cases} \tag{4.18}$$

Resolviendo (4.18) como en la prueba de la Proposición 4.3.1 (i), se sigue que $p = -\left(\frac{n\pi}{\ell_1}\right)^2$ y $F_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell_1}\right)$ para $n \in \mathbb{N}_0$. Por consiguiente, el problema de valores en la frontera para $G(y)$ queda así:

$$\begin{cases} G''(y) + \left(\lambda - \dfrac{n^2\pi^2}{\ell_1^2}\right) G(y) = 0, \\ G'(0) = 0, \\ G'(\ell_2) = 0. \end{cases}$$

Procediendo otra vez como en la Proposición 4.3.1 (i), encontramos que $\lambda_{nm} = \pi^2\left(\frac{n^2}{\ell_1^2} + \frac{m^2}{\ell_2^2}\right)$ es un valor propio de $-\Delta$ con condición de Neumann y $u_{nm}(x, y) = F_n(x) G_m(y) = \zeta \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell_1}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{\ell_2}\right)$, con $\zeta \in \mathbb{R}$, es una función propia asociada a λ_{nm}.

(ii) Consecuencia de la demostración de la Proposición 4.3.1 (ii) y el Teorema 4.1.2. □

Corolario 4.5.1. *Si λ es un valor propio de* (4.16)*, existen $j, k \in \mathbb{N}_0$ tales que $\lambda = \lambda_{jk} = \pi^2\left(\frac{j^2}{\ell_1^2} + \frac{k^2}{\ell_2^2}\right)$. Dicho de otra manera, los elementos de $\{\lambda_{nm} : n, m \in \mathbb{N}_0\}$ son todos los valores propios del problema* (4.16)*.*

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de la Proposición 4.5.1 (ii), el Teorema 3.2.2 (i) y de reemplazar $-\Delta$ por A en la prueba del Teorema 1.3.4 (v). □

Un ejemplo particular

Si $\ell_1 = \ell_2 = \pi$, obtenemos las expresiones más sencillas para el problema de valores propios con condición de Dirichlet en dos dimensiones:

$$\begin{cases} \lambda_{nm} = n^2 + m^2 \\ u_{nm}(x, y) = \dfrac{2}{\pi}\operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(my) \end{cases} \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}, \tag{4.19}$$

y también para el problema de valores propios con condición de Neumann:

$$\begin{cases} \lambda_{nm} = n^2 + m^2 \\ u_{nm}(x, y) = \dfrac{2}{\pi}\cos(nx)\cos(my) \end{cases} \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}_0. \tag{4.20}$$

Las ecuaciones (4.19) y (4.20) motivan una interesante pregunta: ¿cuáles números pueden escribirse como la suma de dos cuadrados de enteros no negativos?. Con el objetivo de resolver este interrogante, presentamos un resultado clásico de teoría de números.

Teorema 4.5.1. *Un entero positivo n es la suma de dos cuadrados si y sólo si cada factor primo de n de la forma $4k + 3$, con $k \in \mathbb{N}_0$, aparece elevado a una potencia par en la factorización de n.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [JW, pág. 131] Corolario 3, [TK, pág. 605] Teorema 13.5.

Los siguientes ejemplos ilustran el uso del Teorema 4.5.1.

Cuadro 4.1: Números naturales menores que 100 que satisfacen el Teorema 4.5.1.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

(i) Sea $n = 5733 = 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13$. Si $p_1 := 3$, $p_2 := 7$ y $p_3 := 13$, entonces $p_1 \equiv 3 \pmod 4$, $p_2 \equiv 3 \pmod 4$ y $p_3 \equiv 1 \pmod 4$. Los factores primos p_1 y p_2 son congruentes con 3 módulo 4 y en ambos casos el exponente es par e igual a 2. De acuerdo con el Teorema 4.5.1, n puede escribirse como suma de cuadrados ($5733 = 63^2 + 42^2$).

(ii) Sea $n = 3185 = 5 \cdot 7^2 \cdot 13$. Si $p_1 := 5$, $p_2 := 7$ y $p_3 := 13$, entonces $p_1 \equiv 1 \pmod 4$, $p_2 \equiv 3 \pmod 4$ y $p_3 \equiv 1 \pmod 4$. El factor p_2 es el único de la forma $4k + 3$ y aparece elevado al cuadrado en la descomposición de n en factores primos. De acuerdo con el Teorema 4.5.1, n puede escribirse como suma de cuadrados ($3185 = 56^2 + 7^2$).

(iii) Sea $n = 6 = 2 \cdot 3$. Si $p_1 := 2$ y $p_2 := 3$, entonces $p_1 \equiv 2 \pmod 4$ y $p_2 \equiv 3 \pmod 4$. Visto que p_2 aparece sólo una vez en la descomposición de n en términos de factores primos, $n = 6$ no es la suma de cuadrados.

El Cuadro 4.1 agrupa todos los números naturales menores o iguales que 100 que se pueden escribir como suma de dos cuadrados de enteros no negativos (ver [TK, pág. 602]). Hay que decir, no obstante, que no todos ellos corresponden a valores propios del operador $-\Delta$ con condición de Dirichlet. En efecto, si $\lambda \in \mathbb{N}$ es un cuadrado perfecto, $\sqrt{\lambda} \in \mathbb{N}$ y siempre es posible escribir

$$\lambda = \left(\sqrt{\lambda}\right)^2 + 0^2. \tag{4.21}$$

Si la representación (4.21) es única, λ es un valor propio del operador $-\Delta$ con condición de Neumann, pero no así con condición de Dirichlet. Por esa razón, es de suma utilidad determinar de cuántas formas distintas se puede expresar cierta cantidad como suma de cuadrados. El siguiente teorema debido a Gauss, Legendre y Jacobi responde esta pregunta.

Teorema 4.5.2. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $k \in \mathbb{N}_0$. Si d_1 es el número de divisores de n de la forma $4k+1$ y d_3 es el número de divisores de n de la forma $4k+3$, entonces el número total de formas de escribir n como la suma de dos cuadrados es $4\,(d_1 - d_3)$.*

Demostración. Ver [JW, pág. 218], [HW, pág. 241]. $\square$

Cuadro 4.2: Algunos valores propios de $-\Delta$ con condición de Dirichlet y Neumann.

Valor Propio	Representaciones	Dirichlet	Neumann	Simple D	Simple N
1	1^2+0^2 0^2+1^2	✗	✓	–	✗
2	1^2+1^2	✓	✓	✓	✓
4	2^2+0^2 0^2+2^2	✗	✓	–	✗
5	1^2+2^2 2^2+1^2	✓	✓	✗	✗
8	2^2+2^2	✓	✓	✓	✓
9	3^2+0^2 0^2+3^3	✗	✓	–	✗
10	1^2+3^2 3^2+1^3	✓	✓	✗	✗

El número $n = 45 = 3^2 \cdot 5$, por ejemplo, tiene seis divisores: cuatro de ellos de la forma $4k+1 : 1, 5, 9, 45$ y dos restantes de la forma $4k+3 : 3, 15$. Según el Teorema 4.5.2, el número de representaciones de 45 como suma de cuadrados es $4\,(4-2) = 8$. En realidad, esto concuerda con el hecho de escribir $45 = 3^2 + 6^2$ tomando en cuenta los signos y el orden de los sumandos, es decir, $45 = (\pm 3)^2 + (\pm 6)^2 = (\pm 6)^2 + (\pm 3)^2$. Para nuestros propósitos, sin embargo, resulta de mayor utilidad el siguiente corolario que enunciamos sin demostración.

Corolario 4.5.2. *Sean $n \in \mathbb{N}$ y d_1, d_3 como en el Teorema 4.5.2. El número total de formas de escribir n como la suma de cuadrados de números enteros, salvo signos, es $d_1 - d_3$.*

El Teorema 4.5.1, en conjunto con el Corolario 4.5.2, permiten determinar los valores propios del operador $-\Delta$ con condición de Dirichlet (resp. condición de Neumann) y distinguir cuales de ellos son simples. Las propiedades anteriores se resumen en el Cuadro 4.2 para algunos elementos del Cuadro 4.1.

4.6. El problema de valores propios con condición de Dirichlet en el disco

Sean $R > 0$ y $\Omega := \{z \in \mathbb{R}^2 : |z| < R\}$. Consideremos el problema de valores propios

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u \quad \text{en } \Omega, \\ \quad u &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.22}$$

Los valores y funciones propias para el operador $-\Delta$ con condición de Dirichlet en Ω (ver [H, pág. 11] Proposición 1.2.14) son:

$$\begin{cases} \lambda_{0,k} = \dfrac{j_{0,k}^2}{R^2} & \\ u_{0,k}(r,\theta) = \sqrt{\dfrac{1}{\pi}} \dfrac{1}{R\left|J_0'(j_{0,k})\right|} J_0\left(\dfrac{j_{0,k} r}{R}\right) & k \geq 1, \\ & \\ \lambda_{n,k} = \dfrac{j_{n,k}^2}{R^2} & \\ u_{n,k,1}(r,\theta) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{1}{R\left|J_n'(j_{n,k})\right|} J_n\left(\dfrac{j_{n,k} r}{R}\right) \cos(n\theta) & n, k \geq 1. \\ u_{n,k,2}(r,\theta) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{1}{R\left|J_n'(j_{n,k})\right|} J_n\left(\dfrac{j_{n,k} r}{R}\right) \operatorname{sen}(n\theta) & \end{cases}$$

donde $j_{n,k}$ es el k-ésimo cero de la función de Bessel J_n (ver [H, pág. 11]). Este ejemplo muestra un dominio con simetría radial donde las funciones propias dependen, simultáneamente, de r y θ.

Bibliografía

[Ar] T. Arbogast, J. Bona. *Methods of Applied Mathematics*, versión corregida 2007-2008, Texas, 2008.

[AH] K. Atkinson, W. Han. *Theoretical Numerical Analysis*, tercera edición, Springer, Iowa, 2009.

[B] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010.

[MC] M. Clapp. *Análisis Matemático*, México, 2013.

[CH] R. Courant, D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics*, Wiley, New York, 1937.

[DL] R. Dautray, J.L. Lions. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, volumen III, *Spectral Theory and Applications*, Springer, 1984.

[DM] L. Debnath, P. Mikusinski. *Introduction to Hilbert Spaces with Applications*, tercera edición, Elsevier, 2005.

[Ev] L. Evans. *Partial Differential Equations*, AMS, Berkeley, 1997.

[FL] G. Folland. *Fourier Analysis and its Applications*, Wadsworth & Brooks, California, 1992.

[GP] L. Gasinski, N. Papageorgiou. *Nonlinear Analysis*, volumen 9, Chapman & Hall, 2005.

[DG] D.N. Ghosh, L.S. Couchman. *Inverse Problems and Inverse Scattering of Plane Waves*, Elsevier, 2001.

[GWW] C. Gordon, D.L. Webb, S. Wolpert. *One Cannot Hear the Shape of a Drum*, Bull. AMS (1993), 134-138.

[HW] G.H. Hardy, E.M. Wright. *An Introduction To The Theory of Numbers*, cuarta edición, Universidad de Oxford, 1975.

[H] A. Henrot. *Extremum Problems for eigenvalues of Elliptic Operators*, Birkhäuser, 2006.

[JK] D. Jerison, C. Kenig. *Unique Continuation and Absence of Positive Eigenvalues for Schrödinger Operators*, Ann. Math **2**(121)1985, 463-494.

[K] M. Kac. *Can one hear the shape of a drum?*, Amer. Math. Monthly 73 (1966), 1-23.

[Ke] S. Kesavan. *Topics in Functional Analysis and Applications*, Wiley Eastern Limited, Bangalore, 1989.

[TK] T. Koshy. *Elementary Number Theory with Applications*, segunda edición, Elsevier, 2007.

[KE] E. Kreyszig. *Advanced Engineering Mathematics*, Limusa Wiley, Vol 2, tercera edición, 2004.

[MZ] D. Mitrović, D. Žubrinić. *Fundamentals of Applied Functional Analysis*, Longman, 1998.

[MMP] D. Motreanu, V. Motreanu, N. Papageorgiou. *Topological and Variational Methods with Applications to Nonlinear Boundary Value Problems*, Springer, 2014.

[Mu] J. Munkres. *Analysis on Manifolds*, Addison-Wesley Publishing Company, 1991.

[NW] W. Ni, X. Wang. *On the First Positive Neumann Eigenvalue*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 17, 1-19, 2007.

[RP] R. Precup. *Linear and Semilinear Partial Differential Equations, an Introduction*, De Gruyter, 2013.

[PW] M. Protter, H. Weinberger. *Maximal Principles in Differential Equations*, Springer, 1984.

[Ru] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*, tercera edición, McGraw-Hill, 1964.

[ST] W. Strauss. *Partial Differential Equations: An Introduction*, John Wiley & Sons, 1992.

[JW] J. Watkins. *Number Theory, A Historical Approach*, Princeton University, 2014.

[HZ] H. Zhu. *Courant's Nodal Line Theorem and its Discrete Counterparts*, Tesis de doctorado, Universidad de Waterloo, 2000.

[ZC] D. Zill, M. Cullen. *Differential Equations with Boundary-Value Problems*, quinta edición, Thomson learning, 2002.