# El Principio Variacional de Ekeland y Aplicaciones

por

German Enrique Jimenez Blanco

Trabajo presentado como requisito parcial
para optar al Título de

Magister en Matemáticas

Director: Jorge Cossio Betancur

Universidad Nacional de Colombia
Sede Medellín

Facultad de Ciencias

Convenio Uninorte-Universidad Nacional

Agosto 2003

Este trabajo ha sido apoyado parcialmente por COLCIENCIAS,
Contrato No. 063-2002, Proyecto código 1118-05-11412.

# Resumen

En este trabajo se estudia el Principio Variacional de Ekeland y algunas aplicaciones a la teoría de puntos críticos y a ecuaciones diferenciales parciales. Se prueba a partir del Principio Variacional de Ekeland el Teorema del Paso de la Montaña y el Teorema de Punto de Silla; también se demuestra la existencia de soluciones débiles para problemas de Dirichlet semilineales.

# Contenido

# Agradecimientos

Quiero agradecer a los profesores del Posgrado en Matemáticas, en especial a los profesores Jorge Mejía y a mi director de tesis Jorge Cossio, por sus enseñanzas y correcciones, las cuales han hecho posible la realización de este trabajo. También agradezco a la Biblioteca de Uninorte que me colaboró en la consecución bibliográfica y a la secretaria Failing Gallego quien transcribió en LaTex gran parte de este trabajo.

# Introducción

En el presente trabajo se estudia el Principio Variacional de Ekeland y se presentan aplicaciones de éste a la teoría de puntos fijos, a la teoría de puntos críticos y a ecuaciones diferenciales parciales.
Desde su publicación en 1972, el Principio Variacional de Ekeland, ha sido utilizado en múltiples aplicaciones en Optimización, Teoría de Control, Geometría Diferencial y Ecuaciones Diferenciales, entre otras. Además, a partir del Principio Variacional de Ekeland, se pueden dar demostraciones sencillas y elegantes de resultados anteriores en Análisis no Lineal. Por ejemplo, se puede probar el Teorema del Paso de Montaña, debido a A. Ambrossetti y P. Rabinowitz, y el Teorema de Punto de Silla de P. Rabinowitz, los cuales son métodos simples para hallar puntos críticos de tipo minimax.
El enunciado del Principio Variacional es el siguiente.
**Teorema 1.** (Principio Variacional de Ekeland-forma fuerte)
Sean $(X, d)$ un espacio métrico completo y $\phi : X \to R \cup \{+\infty\}$ una función semicontinua inferiormente, no idénticamente igual a $+\infty$ y acotada inferiormente.
Sean $\varepsilon > 0$ y $\overline{u} \in X$ tales que

$$\phi(\overline{u}) \leq \inf_X \phi + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces para cada $\lambda > 0$ existe $u_\lambda \in X$ tal que se cumplen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \phi(u_\lambda) &\leq \phi(\overline{u}) \\ d(u_\lambda, \overline{u}) &\leq \lambda \\ \phi(u_\lambda) &< \phi(u) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(u_\lambda, u) \quad \forall u \neq u_\lambda. \end{aligned}$$

**Teorema 2.** (Principio Variacional de Ekeland-forma débil)
Sean $(X, d)$ un espacio métrico completo y $\phi : X \to R \cup \{+\infty\}$ una función semicontinua inferiormente, no idénticamente igual a $+\infty$ y acotada inferiormente. Entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $u_\varepsilon \in X$ tal que se cumplen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \phi(u_\varepsilon) &\leq \inf_X \phi + \varepsilon \\ \phi(u_\varepsilon) &< \phi(u) + \varepsilon d(u, u_\varepsilon) \ \forall u \in X \quad u \neq u_\varepsilon. \end{aligned}$$

El presente trabajo consta de cuatro capítulos. En el Capítulo 1 se enuncian unos teoremas importantes como los Teoremas de Nemytskii, el Teorema de Encaje de Sobolev y la Desigualdad de Poincaré, que se necesitan en capítulos posteriores, especialmente en el Capítulo 4. La prueba de estos resultados aparece en los textos que se citan como referencia.
En el Capítulo 2 se demuestra el Principio Variacional de Ekeland en sus formas fuerte y débil y se incluye una aplicación a la teoría de puntos fijos debida a J. Caristi.
En el Capítulo 3 se presentan aplicaciones del Principio Variacional de Ekeland a la teoría de puntos críticos. Se prueban un teorema de mínimo, el Teorema del Paso de Montaña de A. Ambrossetti y P. Rabinowitz y el Teorema de Punto de Silla de P. Rabinowitz.
En el Capítulo 4 se presentan tres aplicaciones a la existencia de soluciones débiles para problemas elípticos semilineales, las cuales presentaré a continuación.
Sean $\Omega$ un dominio acotado de $R^N$ $(N \geq 3)$, $\Delta$ el operador de Laplace y $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq .... \leq \lambda_k ....$la sucesión de valores propios de $-\Delta$ en $\Omega$ con condiciones de Dirichlet cero en la frontera.
El siguiente teorema es consecuencia de un principio de minimización obtenido del Principio Variacional de Ekeland.
**Teorema 3**. Si $\lim\limits_{s \to -\infty} \dfrac{f(s)}{s} = a$ y $\lim\limits_{s \to \infty} \dfrac{f(s)}{s} = b$, donde $a, b \in (0, \lambda_1)$, y $f : R \to R$ es una función continua entonces el problema

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) & = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \\ \qquad u & = 0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

tiene una solución débil.

El siguiente resultado se obtiene a partir del Teorema de Punto de Silla.
**Teorema 4**. (Dolph [7]). Sea $f : R \to R$ una función continua. Supongamos que existen constantes $\alpha$ y $\beta \in R$ tales que $\lambda_k < \alpha, \beta < \lambda_{k+1}$,

$$\lim_{s \to -\infty} \frac{f(s)}{s} = \alpha \quad , \qquad \lim_{s \to \infty} \frac{f(s)}{s} = \beta$$

y sea $h \in C(\overline{\Omega})$. Entonces el problema

$$\begin{cases} -\Delta u & = f(u) + h(x) \quad \text{en} \quad \Omega \\ \quad u & = 0 \qquad\qquad\quad \text{en} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

tiene una solución débil.

A partir del Teorema de Paso de Montaña se demuestra el siguiente resultado.
**Teorema 5** (Ambrosetti-Rabinowitz [1]). Supongamos que

$$|f(x, s)| \leq c\, |s|^{p-1} + b(x), \;\; b(\cdot) \in L^{p'} \text{con } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \;\; y \;\; 1 \leq p < \frac{2N}{N-2}.$$

Supongamos que existen $\theta > 2$ $y$ $s_0 > 0$ tales que

$$0 < \theta F(x,s) \leq s f(x,s) \quad \forall x \in \overline{\Omega} \quad \forall\, |s| \geq s_0,$$

donde $F(x,s) = \displaystyle\int_0^s f(x,t)dt$. Si $\displaystyle\lim_{s \to 0} \frac{f(x,s)}{s} < \lambda_1$ entonces el problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(x,u) \quad \text{en} \quad \Omega \\ \quad u &= 0 \quad \quad \text{en} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

tiene una solución débil no trivial.

# Capítulo 1

# Preliminares

En este capítulo se presentan resultados importantes del Análisis Funcional como los operadores de Nemytskii, el Teorema de Encaje de Sobolev y la Desigualdad de Poincaré, que se utilizan en el desarrollo de los capítulos posteriores, especialmente en las aplicaciones a Ecuaciones Diferenciales del Capítulo 4. La prueba de estos teoremas aparece en los textos que se citan como referencia.

## 1.1 Teoremas Fundamentales

**Definición 1.1.1** *Sea (X,d) un espacio métrico. Una función* $\phi : X \to R$ *es semicontinua inferiormente si para toda sucesión* $x_n \to x_0$ *se tiene que* $\liminf_{n\to\infty} \phi(x_n) \geq \phi(x_0)$.

***Teorema 1.1.1*** *Sean* $\Omega$ *un dominio acotado de* $R^N$, $f : \overline{\Omega} \times R \to R$ *una función continua y* $u : \overline{\Omega} \to R$ *una función medible. Sea* $N_f(u)(\cdot) := f(\cdot, u(\cdot))$. *Si existe una constante* $c > 0$ *tal que*

$$|f(x,s)| \leq c\,|s|^{p-1} + b(x) \quad \forall x \in \overline{\Omega} \;\; s \in R, \quad b(\cdot) \in L^q(\Omega) \text{ con } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \;\; (p \geq 1) \quad (1.1)$$

*entonces el operador* $N_f \in C(L^p, L^q)$, *donde* $L^p \equiv L^p(\Omega)$, $L^q \equiv L^q(\Omega)$.

**Prueba.** Ver [5] pags 8-9 ■

**Teorema 1.1.2** *Supongamos que* $f$ *y* $u$ *satisfacen las hipótesis del teorema anterior y sea*

$$F(x,s) = \int_0^s f(x,t)dt. \quad (1.2)$$

*Entonces existe* $c_1 > 0$ *tal que*

$$|F(x,s)| \leq c_1 \, |s|^p + h(x), \quad \textit{donde } h(\cdot) \in L^1 \quad \textit{y} \ \ N_F \in C(L^p, L^1). \tag{1.3}$$

**Prueba.** Ver [5] pags (13-17) ■

**Teorema 1.1.3** *Supongamos que se tienen* (1.1) *y* (1.2). *Sea* $\Psi : L^p \to R$ *el funcional definido por*

$$\Psi(u) = \int_\Omega F(x, u(x))dx,$$

*entonces* $\Psi \in C^1(L^p, R)$ *y* $\langle \Psi'(u), v\rangle = \int_\Omega f(x,u)v \ \ \forall v \in L^p.$

**Prueba.** Ver [5] (pag 17) ■

**Definición 1.1.2** *Sean* $\Omega$ *un dominio acotado de* $R^N$ *de clase* $C^1$ *y* $u : \Omega \to R$ *una función medible. Los espacios de Sobolev* $H^1(\Omega)$ *y* $H_0^1(\Omega)$ *se definen de la siguiente manera:*
$H^1(\Omega) = \left\{ u \ \in L^2 \Big/ \exists g_1, ..., g_N \in L^2 \textit{ tales que} \int_\Omega u \partial_j \phi = -\int_\Omega g_j \phi \ \ \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega) \ \ \forall j = 1, ..., N \right\}$
$H_0^1(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{H^1(\Omega)}.$

**Teorema 1.1.4** *(Encaje de Sobolev). Sea* $\Omega$ *un dominio acotado de* $R^N$ *de clase* $C^1$. *Entonces la inclusión de* $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ *es continua para* $p \in \left[1, \frac{2N}{N-2}\right]$

**Prueba.** Ver [3] (pags 168-174) ■

**Teorema 1.1.5** *(Rellich-Kondrachov). Sea* $\Omega$ *un dominio acotado de* $R^N$ *de clase* $C^1$. *Entonces la inclusión de* $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ *es compacta para* $p \in \left[1, \frac{2N}{N-2}\right).$

**Prueba.** Ver [3] (pags 168-174) ■

**Teorema 1.1.6** *Supongamos que se tienen* (1.1), (1.2) *y* $p \in \left[1, \frac{2N}{N-2}\right]$. *Entonces el funcional* $\Psi : H_0^1 \to R$ *definido por*

$$\Psi(u) = \int_\Omega F(x, u(x))dx,$$

*es tal que* $\Psi \in C^1(H_0^1, R)$ *y* $\langle \Psi'(u), v\rangle = \int_\Omega f(x,u)v \quad \forall v \in H_0^1$.

**Prueba.** Ver [5] (pags 16-19) ∎

**Definición 1.1.3** *Sea* $X$ *una espacio de Banach. Una función* $F : X \to R \cup \{+\infty\}$ *es Fréchet diferenciable si para todo* $u_0 \in X$, *con* $F(u_0) < +\infty$, *existen un funcional lineal continuo* $F'(u_0) \in X^*$ *y una funcion real* $E(u_0, v)$ *tal que* $\forall v \in X$

$$F(u_0 + v) - F(u_0) = \langle F'(u_0), v\rangle + \|v\| E(u_0, v)$$

*donde* $E(u_0, v) \to 0$ *cuando* $\|v\| \to 0$

**Teorema 1.1.7** *Sean* $f : \overline{\Omega} \times R \to R$ *una función continua y* $\phi : H_0^1 \to R$ *el funcional definido por*

$$\phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega F(x,u), \text{ donde } F(x,s) = \int_0^s f(x,t)\,dt.$$

*Supongamos que (1.1) es válido y* $1 \leq p \leq \frac{2N}{N-2}$. *Entonces* $\phi$ *es continuamente Fréchet diferenciable y*

$$\left\langle \phi'(u), v\right\rangle = \int_\Omega \nabla u.\nabla v - \int_\Omega f(x,u)v, \quad \forall v \in H_0^1.$$

**Prueba.** Ver [5] (pags 16-19) ∎

**Teorema 1.1.8** *(Desigualdad de Poincaré) Sean* $\Omega$ *un dominio acotado en* $R^N$ *y* $u \in H_0^1$. *Entonces*

$$\int_\Omega u^2 \leq \frac{1}{\lambda_1}\int_\Omega |\nabla u|^2.$$

**Prueba.** Ver [3] (pags 168-174), [4] y [6] ∎

**Teorema 1.1.9** *Sean* $X, Y$ *espacios vectoriales normados y* $T : X \to Y$ *un operador lineal compacto. Sea* $(x_n)$ *una sucesión débilmente convergente a* $x$ *en* $X$, *entonces* $T(x_n)$ *converge fuertemente a* $T(x)$ *en* $Y$.

**Prueba.** Ver [12] (pag 410) ■

**Teorema 1.1.10** *Sean $E$ un espacio de Banach reflexivo y $(x_n)$ una sucesión acotada en $E$. Entonces existe una subsucesión $\left(x_{n(k)}\right)$ que converge en la topología débil.*

**Prueba.** Ver [3] (pag 50 ) ■

**Teorema 1.1.11** *Sea $E$ un espacio de Banach reflexivo. Sea $(x_n)$ una sucesión débilmente convergente a $x$ en $E$ tal que $\limsup \|x_n\| \leq \|x\|$, entonces $x_n \to x$ fuertemente.*

**Prueba.** Ver [3] (pag 52) ■

# Capítulo 2

# El Principio Variacional de Ekeland

## 2.1 Introducción

En el presente capítulo se demuestra, en la sección 2, el Principio Variacional de Ekeland probado por I. Ekeland en [8] en sus formas fuerte y débil. Desde su publicación en 1972, el Principio Variacional de Ekeland ha sido utilizado en múltiples aplicaciones en Optimización, Teoría de Control, Geometría Diferencial y Ecuaciones Diferenciales, entre otras. En la Sección 3 presentamos una aplicación a la teoría de puntos fijos debida a J. Caristi.

## 2.2 El Principio Variacional de Ekeland

Presentamos inicialmente el siguiente lema, necesario en la demostración del Principio Variacional de Ekeland.

**Lema 2.2.1** *Sean $(X, d)$ un espacio métrico completo y $F_n$, $n \in N$, una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados no vacios cuyos diámetros tienden a cero, es decir,*

$$F_n \supset F_{n+1} \text{ y } diam F_n \to 0,$$

*entonces existe un único punto $x \in X$ tal que*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x\}$$

***Prueba.*** *Para cada* $n \in N$, *escojamos un punto* $x_n \in F_n$. *Demostraremos que* $(x_n)$ *es una sucesión de Cauchy en* $X$. *En efecto, dado* $\varepsilon > 0$, *existe* $N_0 \in N$ *suficientemente grande, tal que* $diam F_{N_0} < \varepsilon$.
*Si* $n \geq N_0$ *y* $m \geq N_0$, *como* $F_n \subset F_{N_0}$ *y* $F_m \subset F_{N_0}$ *se sigue que* $x_n \in F_{N_0}$ *y* $x_m \in F_{N_0}$, *por lo tanto*

$$d(x_n, x_m) \leq diam F_{N_0} < \varepsilon.$$

*Luego* $(x_n)$ *es una sucesión de Cauchy en* $X$ *y como* $X$ *es completo, existe* $x \in X$ *tal que* $x_n \to x$.
*Dado que cualquier* $F_n$ *contiene todos los puntos de la sucesión* $x_n$, *excepto un número finito de ellos, y* $F_n$ *es cerrado, se sigue que*

$$x \in F_n \ \ \forall n \in N, \text{ por lo tanto } x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n.$$

*Veamos que* $x$ *es el único punto en la intersección de los* $F_n$. *En efecto, si existe otro punto* $y \in X$, *tal que*

$$y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n,$$

*entonces* $x$ *y* $y$ *pertenecen a todos los* $F_n$, *por lo tanto* $d(x,y) \leq diam F_n \ \forall_n \in N$. *Como* $diam F_n \to 0$ *se sigue que* $d(x,y) = 0$ *luego* $x = y$ ■

**Teorema 2.2.2** *(Principio Variacional de Ekeland- forma fuerte)*
*Sean* $(X,d)$ *un espacio métrico completo y* $\phi : X \to R \cup \{+\infty\}$ *una función semicontinua inferiormente, no idénticamente igual a* $+\infty$, *y acotada inferiormente.*
*Sean* $\varepsilon > 0$ *y* $\overline{u} \in X$ *tales que* $\phi(\overline{u}) \leq \inf\limits_X \phi + \frac{\varepsilon}{2}$.
*Entonces para cada* $\lambda > 0$ *existe* $u_\lambda \in X$ *tal que se cumplen las siguientes condiciones:*

$$\phi(u_\lambda) \leq \phi(\overline{u}), \tag{2.1}$$

$$d(u_\lambda, \overline{u}) \leq \lambda \qquad y \tag{2.2}$$

$$\phi(u_\lambda) < \phi(u) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(u_\lambda, u) \quad \forall u \neq u_\lambda. \tag{2.3}$$

**Prueba.** Para $\lambda > 0$, sea $d_\lambda(x,y) := \dfrac{d(x,y)}{\lambda}$
Definamos la siguiente relación en $X$

$$u \leq v \Longleftrightarrow \phi(u) \leq \phi(v) - \varepsilon d_\lambda(u,v).$$

Probemos inicialmente que esta relación es un orden parcial. Evidentemente $u \leq u$; es decir, la relación es reflexiva.
La relación es antisimétrica. En efecto, si $u \leq v$ y $v \leq u$ entonces

$$\phi(u) \leq \phi(v) - \varepsilon d_\lambda(u,v) \text{ y } \phi(v) \leq \phi(u) - \varepsilon d_\lambda(u,v)$$

y por lo tanto

$$\phi(u) + \phi(v) \leq \phi(v) + \phi(u) - 2\varepsilon d_\lambda(u,v)$$
$$0 \leq -2\varepsilon d_\lambda(u,v).$$
$$\text{Luego } d_\lambda(u,v) = 0 \text{ de donde se sigue } u = v.$$

La relación es transitiva. En efecto, si $u \leq v$ y $v \leq w$ entonces

$$\phi(u) \leq \phi(v) - \varepsilon d_\lambda(u,v) \text{ y } \phi(v) \leq \phi(w) - \varepsilon d_\lambda(v,w)$$

Luego

$$\begin{aligned} \phi(u) &\leq \phi(w) - \varepsilon\left(d_\lambda(u,v) + d_\lambda(v,w)\right), \\ \phi(u) &\leq \phi(w) - \varepsilon d_\lambda(u,w), \end{aligned}$$

de donde se concluye que $u \leq w$.

Definamos una sucesión $(S_n)$ de subconjuntos de $X$ de la siguiente manera: Tomemos $u_1 = \overline{u}$ y sea

$$S_1 = \{u \in X : u \leq u_1\}.$$

Por la definición de ínfimo se sigue que existe

$$u_2 \in S_1 \quad tal\ que \quad \phi(u_2) \leq \inf_{S_1} \phi + \frac{\varepsilon}{2^2}.$$

Definamos

$$S_2 = \{u \in X : u \leq u_2\}. \text{ Obviamente } S_2 \subset S_1.$$

Continuando inductivamente construímos los conjuntos $S_n$, con

$$S_n = \{u \in X : u \leq u_n\}$$

y los puntos

$$u_{n+1} \in S_n \quad tales \quad que \quad \phi(u_{n+1}) \leq \inf_{S_n} \phi + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Por lo tanto

$$S_1 \supset S_2 \supset S_3 \supset ...$$

Probemos que cada $S_n$ es cerrado. En efecto, si $(x_j) \subset S_n$ y $x_j \to x \in X$ entonces

$$\phi(x_j) \leq \phi(u_n) - \varepsilon\, d_\lambda(x_j, u_n).$$

Tomando el límite inferior y usando el hecho de que $\phi$ es semicontinua inferiormente se sigue que

$$\phi(x) \leq \lim_{j\to\infty} \inf \phi(x_j) \leq \lim_{j\to\infty} \inf (\phi(u_n) - \varepsilon d_\lambda(x_j, u_n)) = \phi(u_n) - \lim_{j\to\infty} \varepsilon d_\lambda(x_j, u_n)$$

Usando la continuidad de la distancia $d_\lambda$ se tiene

$$\phi(x) \leq \phi(u_n) - \varepsilon d_\lambda(x, u_n).$$

Por lo tanto $x \leq u_n$, es decir $x \in S_n$. Hemos probado que $S_n$ es cerrado.

Demostremos que $diam S_n \to 0$. En efecto si $x \in S_n,\ x \leq u_n$, luego

$$\phi(x) \leq \phi(u_n) - \varepsilon\, d_\lambda(x, u_n). \tag{2.4}$$

Ahora $\phi(u_n) \leq \inf\limits_{S_{n-1}} \phi + \dfrac{\varepsilon}{2^n} \leq \phi(x) + \dfrac{\varepsilon}{2^n}$ $\quad ya \quad que \quad x \in S_{n-1}$.

Reemplazando la desigualdad anterior en (2.4) tenemos

$$d_\lambda(x, u_n) \leq 2^{-n}.$$

Por lo tanto si $x, y \in S_n$ entonces

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq d(x,u_n) + d(y,u_n) \\ d(x,y) &\leq \lambda 2^{-n+1}. \end{aligned}$$

Luego $\lim\limits_{n\to\infty} diam S_n = 0$.

Aplicando el Lema 2.2.1 tenemos que existe un único elemento $u_\lambda \in X$ tal que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \{u_\lambda\}.$$

Probemos que $u_\lambda$ satisface las condiciones (2.1), (2.2), (2.3). Como $u_\lambda \in S_1$ se sigue que $u_\lambda \leq \overline{u}$. Por lo tanto $\phi(u_\lambda) \leq \phi(\overline{u}) - \varepsilon\, d_\lambda(u_\lambda, \overline{u})$. Es decir, $\phi(u_\lambda) \leq \phi(\overline{u})$ y se cumple (2.1).

Sea $u \in X$ con $u \neq u_\lambda$. Afirmamos que $u \not\leq u_\lambda$ porque si $u \leq u_\lambda$, como $u_\lambda \leq u_n\ \ \forall n$ se tendría que $u \leq u_n\ \forall n$, luego $u \in S_n\ \ \forall n$, es decir $u \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} S_n = \{u_\lambda\}$ entonces

$u = u_\lambda$ ¡absurdo!. Por lo tanto $u \nleq u_\lambda$, es decir

$$\phi(u) > \phi(u_\lambda) - \varepsilon\, d_\lambda(u, u_\lambda).$$

Esto prueba (2.3).

Demostremos (2.2). Como

$$d_\lambda(\overline{u}, u_n) \leq \sum_{j=1}^{n-1} d_\lambda(u_j, u_{j+1}) \leq \sum_{j=1}^{n-1} 2^{-j},$$

tomando límite cuando $n \to \infty$, como $u_n \to u_\lambda$ y $\sum\limits_{j=1}^{\infty} 2^{-j} = 1$, se sigue que

$$d_\lambda(\overline{u}, u_\lambda) \leq 1.$$

Por lo tanto

$$d(\overline{u}, u_\lambda) \leq \lambda \quad \blacksquare$$

El siguiente teorema es muy importante y se conoce con el nombre de forma débil del Principio Variacional de Ekeland. Este teorema es una herramienta para hallar "casi" puntos mínimos de un funcional.

**Teorema 2.2.3** *(Principio Variacional de Ekeland-forma débil). Sean $(X, d)$ un espacio métrico completo y $\phi : X \to R \cup \{+\infty\}$ una función semicontinua inferiormente, no idénticamente igual a $+\infty$, y acotada inferiormente. Entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $u_\varepsilon \in X$ tal que se cumplen las siguientes condiciones:*

$$\phi(u_\varepsilon) \leq \inf_X \phi + \varepsilon, \tag{2.5}$$

$$\phi(u_\varepsilon) < \phi(u) + \varepsilon d(u, u_\varepsilon)\ \forall u \in X \quad u \neq u_\varepsilon. \tag{2.6}$$

**Prueba.** Sea $\varepsilon > 0$. Usando la definición de ínfimo existe $\overline{u} \in X$ tal que

$$\phi(\overline{u}) \leq \inf_X \phi + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Aplicando el teorema anterior con $\lambda = 1$ tenemos que existe $u_\varepsilon$ tal que se cumplen (2.5) y (2.6) ■

**Corolario 2.2.4** *Sean $X$ un espacio de Banach y $\phi : X \to R \cup \{+\infty\}$ una función semicontinua inferiormente, no idénticamente igual a $+\infty$, y acotada inferiormente. Si $\overline{u} \in X$ es tal que*

$$\phi(\overline{u}) \leq \inf_X \phi + \varepsilon,$$

*entonces existe $u_\varepsilon \in X$ tal que*

$$\phi(u_\varepsilon) \leq \phi(\overline{u}), \tag{2.7}$$

$$\|\overline{u} - u_\varepsilon\| \leq \sqrt{\varepsilon}, \tag{2.8}$$

$$\phi(u_\varepsilon) < \phi(u) + \sqrt{\varepsilon}\, \|\overline{u} - u_\varepsilon\| \qquad \forall u \in X \quad u \neq u_\varepsilon. \tag{2.9}$$

**Prueba.** Basta aplicar el Teorema 2.2.2 tomando $\lambda = \sqrt{\varepsilon}$ y $d(x,y) = \|x - y\|$. ■

## 2.3 Aplicación a la teoría de puntos fijos

El siguiente teorema, debido a J. Caristi, es una aplicación del Principio Variacional de Ekeland a la teoría de puntos fijos. Este teorema es importante y no requiere la continuidad de la función $f$.

**Teorema 2.3.1** *Sean $X$ un espacio métrico completo y $f : X \to X$ una función tal que*

$$d(u, f(u)) \leq \phi(u) - \phi(f(u)) \quad \forall u \in X, \tag{2.10}$$

*donde $\phi : X \to R$ es una función semicontinua inferiormente y acotada inferiormente. Entonces existe $v \in X$ tal que $f(v) = v$*

***Prueba.*** *Aplicando el Teorema* 2.2.3 *(forma débil) con* $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, *existe* $v \in X$ *tal que*

$$\phi(v) - \phi(w) < \frac{1}{2} d(v, w) \quad \forall w \in X.$$

*Tomando* $w = f(v)$ *en la desigualdad anterior y aplicando* (2.10) *tenemos*

$$d(v, f(v)) \leq \phi(v) - \phi(f(v)) < \frac{1}{2} d(v, f(v)).$$

*Por lo tanto* $d(v, f(v)) = 0$. *Luego* $f(v) = v$ ■

**Teorema 2.3.2** *(Punto fijo de Caristi para funciones multivaluadas)*
*Sean* $X$ *un espacio métrico completo y* $\phi : X \to R \cup \{+\infty\}$ *una función semicontinua inferiormente y acotada inferiormente. Sea* $T : X \to 2^X$ *una función multivaluada tal que*

$$\phi(y) \leq \phi(x) - d(x, y) \quad \forall x \in X\ , \forall y \in T(x). \tag{2.11}$$

*Entonces existe* $x_0 \in X$ *tal que* $x_0 \in T(x_0)$.

***Prueba.*** *Aplicando el Teorema* 2.2.3 *(forma débil) con* $\varepsilon$=1, *existe* $x_0 \in X$ *tal que*

$$\phi(x_0) < \phi(x) + d(x, x_0) \quad \forall x \neq x_0. \tag{2.12}$$

*Probemos ahora que* $x_0 \in T(x_0)$. *Supongamos, por el absurdo, que* $y \neq x_0 \quad \forall y \in T(x_0)$. *Por* (2.11) *se tiene que*

$$\phi(y) \leq \phi(x_0) - d(x_0, y)$$

*y por* (2.12)

$$\phi(x_0) < \phi(y) + d(y, x_0).$$

*Por lo tanto,* $d(y, x_0) < d(y, x_0)$, *lo cual es imposible.* ■

**Corolario 2.3.3** *(Teorema de Punto Fijo de Banach). Sean* $(X, d)$ *un espacio métrico completo y* $T : X \to X$ *una contracción. Entonces existe* $x_0$ *tal que* $T(x_0) = x_0$.

***Prueba.*** *Como* $T$ *es una contracción, existe* $0 < k < 1$ *tal que*

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y) \;\; \forall x, y \in X.$$

*Probemos que*

$$d(x, T(x)) \leq \phi(x) - \phi(T(x)), \quad \text{donde} \quad \phi(x) = \frac{1}{1-k} d(x, T(x)).$$

*En realidad:*

$$\begin{aligned} d(x, T(x)) - \phi(x) + \phi(T(x)) &= d(x, T(x)) - \frac{1}{1-k} d(x, T(x)) + \frac{1}{1-k} d\left(T(x), T^2(x)\right) \\ &\leq \frac{-k}{1-k} d(x, T(x)) + \frac{k}{1-k} d(x, T(x)) = 0. \end{aligned}$$

*Por lo tanto,*

$$d(x, T(x)) \leq \phi(x) - \phi(T(x)).$$

*Como* $\phi$ *es continua y no negativa, es claro que* $\phi$ *es semicontinua inferiormente y acotada inferiormente, el resultado se sigue aplicando el Teorema* 2.3.1 ■

# Capítulo 3

# Aplicaciones a la teoría de puntos críticos

En este capítulo se presentan aplicaciones del Principio Variacional de Ekeland a la teoría de puntos críticos. En la Sección 1 se establecen condiciones para que un funcional acotado inferiormente alcance su punto de mínimo. En la Sección 2 se demuestran a partir del Principio Variacional de Ekeland el Teorema del Paso de la Montaña de A. Ambrossetti y P. Rabinowitz y el Teorema de Punto de Silla de P. Rabinowitz.

## 3.1 Aplicación a la optimización

Sea $X$ un espacio de Banach. Una función $F : X \to R \cup \{+\infty\}$ es Gateaux-diferenciable si para todo $u_0 \in X$, con $F(u_0) < +\infty$, existe un funcional lineal continuo $F'(u_0) \in X^*$ tal que $\forall v \in X$

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(u_0 + tv) - F(u_0)}{t} = \langle F'(u_0), v \rangle .$$

Si el operador $u \to F'(u)$ definido de $X \to X^*$ es continuo entonces $F$ es continuamente Frechet diferenciable, es decir $F$ es una función de clase $C^1$.

El siguiente teorema es muy útil en teoría de optimización, ya que nos proporciona "casi" un punto mínimo de funcionales definidos en un espacio de Banach.

**Teorema 3.1.1** *Sean $X$ un espacio de Banach y $\phi : X \to R$ una función semicontinua inferiormente, acotada inferiormente y Gateaux-diferenciable $\forall x \in X$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ y $\overline{u} \in X$ tales que*

$$\phi(\overline{u}) \leq \inf_X \phi + \varepsilon \tag{3.1}$$

*existe $u_\varepsilon \in X$ tal que*

$$\phi(u_\varepsilon) \leq \phi(\overline{u}), \tag{3.2}$$

$$\|\overline{u} - u_\varepsilon\| \leq \sqrt{\varepsilon}, \tag{3.3}$$

$$\|\phi'(u_\varepsilon)\|_{X^*} \leq \sqrt{\varepsilon}. \tag{3.4}$$

**Prueba.** Sean $\varepsilon > 0$ y $\overline{u} \in X$ tales que satisfacen (3.1). Por el Corolario 2.2.4 existe $u_\varepsilon \in X$ tal que se cumplen (3.2), (3.3) y

$$\phi(u_\varepsilon) < \phi(u) + \sqrt{\varepsilon}\,\|u - u_\varepsilon\| \quad \forall u \in X \quad u \neq u_\varepsilon.$$

Sean $v \in X - \{0\}$ y $t > 0$. Tomando $u = u_\varepsilon + tv$ se tiene

$$\begin{array}{rrcl} & \phi(u_\varepsilon) & \leq & \phi(u_\varepsilon + tv) + \sqrt{\varepsilon} t\,\|v\|. \\ \text{Luego} & \dfrac{\phi(u_\varepsilon) - \phi(u_\varepsilon + tv)}{t} & \leq & \sqrt{\varepsilon}\,\|v\|. \end{array}$$

Tomando el límite cuando $t \to 0^+$ obtenemos

$$-\langle \phi'(u_\varepsilon), v\rangle \leq \sqrt{\varepsilon}\,\|v\| \quad \forall v \in X.$$

Esta desigualdad es válida para todo $v \in X$ y como $-v \in X$ y $\phi'(u_\varepsilon)$ es lineal entonces

$$|\langle \phi'(u_\varepsilon), v\rangle| \leq \sqrt{\varepsilon}\,\|v\| \quad \forall v \in X.$$

Por lo tanto $\|\phi'(u_\varepsilon)\|_{X^*} = \sup_{v \in X, v \neq 0} \dfrac{|\langle \phi'(u_\varepsilon), v\rangle|}{\|v\|} \leq \sqrt{\varepsilon}$ ■

**Corolario 3.1.2** *Sean $X$ un espacio de Banach y $\phi : X \to R$ una función acotada inferiormente y Gateaux-diferenciable en $X$. Entonces para cada sucesión minimizante $(u_k)$, es decir una sucesión $(u_k)$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} \phi(u_k) = \inf\limits_X \phi$, existe una sucesión minimizante $(v_k)$*

$$\phi(v_k) \leq \phi(u_k), \qquad \|u_k - v_k\| \to 0 \qquad y \qquad \|\phi'(v_k)\|_{X^*} \to 0 \tag{3.5}$$

**Prueba.** Sea $(u_k)$ una sucesión minimizante. Definamos

$$\varepsilon_k = \begin{cases} \phi(u_k) - \inf\limits_X \phi & \text{si} \quad \phi(u_k) - \inf\limits_X \phi > 0 \\ \frac{1}{k} & \text{si} \quad \phi(u_k) - \inf\limits_X \phi = 0. \end{cases}$$

Aplicando el teorema anterior, para cada $k \in N$ existe $v_k$ tal que

$$\phi(v_k) \leq \phi(u_k), \quad \|u_k - v_k\| < \sqrt{\varepsilon_k} \quad \text{y} \quad \|\phi'(v_k)\|_{X^*} < \sqrt{\varepsilon_k}.$$

Como $\varepsilon_k \to 0$, tomando límite cuando $k \to \infty$ se obtiene (3.5) ■

**Definición 3.1.1** *Sean $X$ un espacio de Banach y $\phi : X \to R$ una función de clase $C^1$. Decimos que $\phi$ satisface la condición de Palais-Smale si toda sucesión $(u_n)$ en $X$ tal que $\phi(u_n)$ es una sucesión acotada y*

$$\phi'(u_n) \to 0 \text{ en } \quad X^*,$$

*tiene una subsucesión convergente en $X$.*

Un funcional definido en un espacio de Banach acotado inferiormente no necesariamente alcanza el ínfimo. El siguiente teorema establece condiciones para que un funcional acotado inferiormente alcance el ínfimo.

**Teorema 3.1.3** *Sean $X$ un espacio de Banach y $\phi : X \to R$ un funcional de clase $C^1$ que satisface la condición de Palais-Smale y tal que $\phi$ está acotado inferiormente. Entonces existe $u_0 \in X$ tal que*

$$\inf_X \phi = \phi(u_0) \quad y \quad \phi'(u_0) = 0.$$

*Es decir, el ínfimo de $\phi$ se asume en $u_0 \in X$ y $u_0$ es un punto crítico de $\phi$.*

***Prueba.*** *Sea $n \in N$. Aplicando el Teorema 3.1.1 con $\varepsilon = \frac{1}{n}$, existe $u_n \in X$ tal que*

$$\phi(u_n) \leq \inf_X \phi + \frac{1}{n} \quad y \quad \left\|\phi'(u_n)\right\|_{X^*} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

*Por lo tanto, la sucesión $\phi(u_n)$ es acotada y $\phi'(u_n) \to 0$ en $X^*$. Como $\phi$ satisface la condición de Palais-Smale, existen una subsucesión $\left(u_{n(j)}\right)$ y un $u_0 \in X$ tales que $u_{n(j)} \to u_0$. Como $\phi$ es continua se tiene que*

$$\begin{aligned} \lim_{j\to\infty} \phi\left(u_{n(j)}\right) &\leq \lim_{j\to\infty}\left(\inf_X \phi + \frac{1}{n(j)}\right) \\ \phi(u_0) &\leq \inf_X \phi. \end{aligned}$$

*Luego*

$$\phi(u_0) = \inf_X \phi.$$

*Además, como $\phi'$ es continua,*

$$\begin{aligned} \lim_{j\to\infty} \left\|\phi'\left(u_{n(j)}\right)\right\| &\leq \lim_{j\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n(j)}}\right) \\ \left\|\phi'(u_0)\right\| &\leq 0. \end{aligned}$$

*Por lo tanto*

$$\phi'(u_0) = 0. \quad \blacksquare$$

## 3.2 Teoremas de minimax

Utilizando el Principio Variacional de Ekeland demostraremos, en esta sección, el Teorema del Paso de Montaña y el Teorema de Punto de Silla, dos importantes teoremas de la teoría de puntos críticos.

El siguiente lema es necesario en la demostración del Teorema 3.2.2.

**Lema 3.2.1** *Sean $K$ un espacio métrico compacto, $K_0 \subset K$ un subconjunto cerrado, $X$ un espacio de Banach y $\chi \in C(K_0, X)$. Entonces el conjunto*

$$M = \{g \in C(K, X) \ / \ g(s) = \chi(s) \ \ \forall s \in K_0\}$$

*es un espacio métrico completo con métrica $d(x, y) = \max_{t \in K} \|x(t) - y(t)\|$.*

**Prueba.** Es suficiente demostrar que $M$ es cerrado en $C(K, X)$, ya que sabemos que $C(K, X)$ es completo.

Sea $(x_n)$ una sucesión en $M$ tal que $x_n \to h$ en $C(K, X)$. Demostremos que $h \in M$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$ existe $N_0 \in N$ tal que

$$\max_{t \in K} \|x_n(t) - h(t)\| < \varepsilon \ \ \forall n \geq N_0.$$

$$\text{Luego} \quad \max_{s \in K_0} \|x_n(s) - h(s)\| \leq \max_{t \in K} \|x_n(t) - h(t)\| < \varepsilon,$$

$$\max_{s \in K_0} \|\chi(s) - h(s)\| < \varepsilon,$$

Y como $\varepsilon > 0$ es arbitrario se sigue que $\chi(s) = h(s) \ \forall s \in K_0$. Luego $h \in M$. Hemos probado que $M$ es cerrado. ■

El siguiente teorema es muy importante debido a que a partir de él se demuestran el Teorema del Paso de Montaña y el Teorema de Punto de Silla.

**Teorema 3.2.2** *Sean $K$ un espacio métrico compacto, $K_0 \subset K$ un subconjunto cerrado de $K$, $X$ un espacio de Banach, $\chi \in C(K_0, X)$ y $M$ definido por*

$$M = \{g \in C(K,X) / g(s) = \chi(s) \quad \forall s \in K_0\}.$$

$$Sea \quad \phi \in C^1(X,R). \quad Definamos \quad c = \inf_{g\in M} \max_{s\in K} \phi(g(s)) \quad y \quad c_1 = \max_{\chi(K_0)} \phi.$$

*Si $c > c_1$ entonces para cada $\varepsilon > 0$ y cada $f \in M$ tales que*

$$\max_{s\in K} \phi(f(s)) \leq c + \varepsilon,$$

*existe $v \in X$ tal que*

$$c - \varepsilon \leq \phi(v) \leq \max_{s\in K} \phi(f(s)), \tag{3.6}$$

$$dist(v, f(K)) \leq \sqrt{\varepsilon} \qquad y \tag{3.7}$$

$$\left\| \phi'(v) \right\| \leq \sqrt{\varepsilon}. \tag{3.8}$$

**Prueba.** Por el lema anterior, $M$ con la métrica

$$d(x,y) = \max_{t\in K} \|x(t) - y(t)\|$$

es un espacio métrico completo. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $0 < \varepsilon < c - c_1$. Definamos la función $\Psi : M \to R$ de la siguiente manera

$$\Psi(g) = \max_{s\in K} \phi(g(s)).$$

Observamos que $c = \inf_M \Psi > c_1$ y por lo tanto $\Psi$ está acotada inferiormente.

**Afirmación 1** $\Psi$ es continua.

**Prueba.** Sea $g_1 \in M$. Demostremos que $\Psi$ es continua en $g_1$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, como $f_1(K)$ es compacto. existe $\delta > 0$ tal que si $y \in f_1(K)$ y $x \in X$

$$\|x - y\| \leq \delta \implies |\phi(x) - \phi(y)| \leq \varepsilon. \ \forall x \in X \quad \forall y \in g_1(K). \tag{3.9}$$

Sea $g \in M$, tal que $d(g, g_1) < \delta$. Sea $t_1 \in K$ tal que

$$\Psi(g) = \phi(g(t_1)).$$

Por lo tanto

$$\Psi(g) - \Psi(g_1) = \phi(g(t_1)) - \max_{s \in K} \phi(g_1(s)) \leq \phi(g(t_1)) - \phi(g_1(t_1)). \tag{3.10}$$

Como $\|g(t_1) - g_1(t_1)\| \leq d(g, g_1) < \delta$, de (3.9) y (3.10) se sigue que

$$\Psi(g) - \Psi(g_1) < \varepsilon.$$

De manera análoga, intercambiando los papeles de $g$ y $g_1$, se tiene que

$$|\Psi(g) - \Psi(g_1)| < \varepsilon.$$

Por lo tanto $\Psi$ es continua. Esto prueba la afirmación 1. $\square$

Sea $f \in M$ tal que

$$\Psi(f) = \max_{s \in K} \phi(f(s)) \leq c + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Aplicando el Principio Variacional de Ekeland-forma fuerte, existe $h \in M$ tal que

$$\Psi(h) \leq \Psi(f) \leq c + \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.11}$$

$$d(h, f) \leq \sqrt{\varepsilon} \tag{3.12}$$

$$\Psi(h) < \Psi(g) + \sqrt{\varepsilon} d(h, g), \quad \forall g \in M, \ g \neq h. \tag{3.13}$$

**Afirmación 2**. La conclusión del teorema se sigue si demostramos que existe $s \in K$ tal que

$$c - \varepsilon \leq \phi\left(h\left(s\right)\right) \tag{3.14}$$

$$y \qquad \left\|\phi^{'}\left(h\left(s\right)\right)\right\| \leq \sqrt{\varepsilon}. \tag{3.15}$$

**Prueba.** Si (3.14) es válido tenemos que

$$\phi\left(h\left(s\right)\right) \leq \max_{s \in K} \phi\left(h\left(s\right)\right) = \Psi\left(h\right) \leq \Psi\left(f\right) = \max_{s \in K} \phi\left(f\left(s\right)\right).$$

Por lo tanto existe $v \in X$, $v = h\left(s\right)$, tal que

$$c - \varepsilon \leq \phi\left(v\right) \leq \max_{s \in K} \phi\left(f\left(s\right)\right).$$

Luego (3.6) es válido.

Ahora usando (3.12) se tiene

$$\begin{aligned} d\left(v, f\left(K\right)\right) &= \inf_{w \in K} \left\|h\left(s\right) - f\left(w\right)\right\| \\ &\leq \left\|h\left(s\right) - f\left(s\right)\right\| \\ &\leq d\left(h, f\right) < \sqrt{\varepsilon}, \end{aligned}$$

luego se cumple (3.7).

(3.8) se cumple debido a (3.15). Esto prueba la afirmación 2. $\square$

De (3.15) se sigue que

$$\left\|\phi^{'}\left(h\left(s\right)\right)\right\| = \sup_{\|w\|=1} \left|\left\langle \phi^{'}\left(h\left(s\right)\right), w\right\rangle\right| \leq \sqrt{\varepsilon}.$$

Luego

$$\left\langle \phi^{'}(h\left(s\right)), w\right\rangle \geq -\sqrt{\varepsilon} \quad \forall w \quad \text{con} \quad \|w\| = 1.$$

Demostremos ahora (3.14) y (3.15). Razonando por contradicción, supongamos que no existe $s$ tal que se cumplen (3.14) y (3.15). Entonces para cada $s \in S$, donde

$$S = \{s \in K : c - \varepsilon \leq \phi(h(s))\},$$

existen $\delta_s > 0$, $w_s \in X$ con $\|w_s\| = 1$ y una bola abierta $\beta_s \subset K$, que contiene a $s$ tal que para $t \in \beta_s$ y $u \in X$ con $\|u\| \leq \delta_s$ tenemos

$$\left\langle \phi'(h(t) + u), w_s \right\rangle < -\sqrt{\varepsilon}. \tag{3.16}$$

En la afirmación anterior hemos usado la continuidad de $\phi'$.

$S$ es un conjunto cerrado, por ser la imagen inversa de un cerrado, y como $S \subset K$ y $K$ es compacto entonces $S$ es compacto. Como $S \subset \cup\beta_s$ entonces existe un subcubrimiento finito de $S$ que denotaremos $\left\{\beta_{s_i}\right\}_{i=1}^{k}$.

Para $i = 1, ..., k$ definamos $P_j : K \to [0,1]$ por

$$P_j(t) = \begin{cases} \dfrac{dist\left(t, \complement\beta_{s_j}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{k} dist\left(t, \complement\beta_{s_j}\right)}, & si\ t \in \bigcup\limits_{i=1}^{k} \beta_{s_i} \\ 0, \text{ si } \ t \in K - \bigcup\limits_{i=1}^{k} \beta_{s_i} \end{cases}$$

donde $\complement\beta_{s_j}$ es el complemento de $\beta_{s_j}$. Sea $\delta = \min\left(\delta_{s_1}, \delta_{s_2}, ..., \delta_{s_k}\right)$.

Sea $P : K \to [0,1]$ una función continua tal que $P(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } \ c \leq \phi(h(t)) \\ 0 \text{ si } \ \phi(h(t)) \leq c - \varepsilon, \end{cases}$

y sea $g \in C(K, X)$ definida por

$$g(t) = h(t) + \delta P(t) \sum_{j=1}^{k} P_j(t)\, w_{s_j}\ . \tag{3.17}$$

Probemos que $g \in M$. En efecto, sea $t \in K_0$, luego $h(t) = \chi(t)$, por definición de $M$. Por lo tanto

$$\phi(h(t)) = \phi(\chi(t)) \leq \max_{\chi(K_0)} \phi = c_1 < c - \varepsilon.$$

Luego $\phi(h(t)) \leq c - \varepsilon$ y se tiene entonces que $P(t) = 0$. Por lo tanto

$$g(t) = h(t) = \chi(t) \;\; para \;\; t \in K_0,$$

de donde se sigue que $g \in M$.

**Afirmación 3.**

**a)** Si $t \in S$ entonces $\phi(g(t)) - \phi(h(t)) \leq -\sqrt{\varepsilon}\delta P(t)$.

**b)** Si $t \notin S$ entonces $\phi(g(t)) = \phi(h(t))$.

**Prueba**. **a)** Utilizando la versión clasica del teorema del valor medio, para cada $t \in S$ existe $0 < r < 1$ para el cual

$$\begin{aligned}
\phi(g(t)) - \phi(h(t)) &= \left\langle \phi'(h(t) + r(g(t) - h(t))),\ (g(t) - h(t)) \right\rangle \\
&= \left\langle \phi'\left(h(t) + r\delta P(t)\sum_{j=1}^{k} P_j(t)\, w_{s_j}\right),\ \delta P(t)\sum_{j=1}^{k} P_j(t)\, w_{s_j} \right\rangle \\
&= \delta P(t)\sum_{j=1}^{k} P_j(t) \left\langle \phi'\left(h(t) + r\delta P(t)\sum_{j=1}^{k} P_j(t)\, w_{s_j}\right), w_{s_j} \right\rangle. \quad (3.18)
\end{aligned}$$

Ahora

$$\left\| r\delta P(t)\sum_{j=1}^{k} P_j(t)\, w_{s_j} \right\| \leq r\delta\, |P(t)| \sum_{j=1}^{k} P_j(t) \left\| w_{s_j} \right\| < \delta.$$

Usando (3.16) tenemos que

$$\left\langle \phi'\left(h(t) + r\delta P(t)\sum_{j=1}^{k} P_j(t)\, w_{s_j}\right), w_{s_j} \right\rangle \leq -\sqrt{\varepsilon}.$$

Por lo tanto de (3.18) se sigue que

$$\phi(g(t)) - \phi(h(t)) \leq -\sqrt{\varepsilon}\delta P(t). \tag{3.19}$$

Esto prueba la afirmación a). $\square$

**Prueba b)** Si $t \notin S$ entonces $\phi(h(t)) < c - \varepsilon$. En consecuencia $P(t) = 0$. Usando (3.17) se sigue que

$$\phi(g(t)) = \phi(h(t)).$$

Esto prueba la afirmación b). $\square$

Sea $\bar{t} \in K$ tal que

$$\phi\left(g\left(\bar{t}\right)\right) = \max_{t\in K} \phi(g(t)) = \Psi(g).$$

De la Afirmación 3 se sigue que

$$\phi\left(g\left(\bar{t}\right)\right) - \phi\left(h\left(\bar{t}\right)\right) \leq 0.$$

Por lo tanto

$$\phi\left(h\left(\bar{t}\right)\right) \geq \phi\left(g\left(\bar{t}\right)\right) = \Psi(g) \geq c.$$

Luego $\bar{t} \in S$ y $P\left(\bar{t}\right) = 1$.

De (3.19) tenemos

$$\phi\left(g\left(\bar{t}\right)\right) - \phi\left(h\left(\bar{t}\right)\right) \leq -\sqrt{\varepsilon}\delta.$$

En consecuencia

$$\Psi(g) + \sqrt{\varepsilon}\delta \leq \phi\left(h\left(\bar{t}\right)\right) \leq \Psi(h).$$

Luego $g \neq h$. Ahora,

$$d(g,h) = \sup_{t\in K} \|g(t) - h(t)\| = \sup_{t\in K} \left\| \delta P(t) \sum_{j=1}^{k} P_j(t) w_{sj} \right\| < \delta,$$

de donde se concluye que

$$\Psi(g) + \sqrt{\varepsilon} d(h, g) \leq \Psi(h),$$

lo que contradice (3.13). Hemos demostrado (3.14) y (3.15) y esto concluye la demostración del teorema ■

**Corolario 3.2.3** *Sean $K$, $K_0$, $X$, $\chi$, $M$, $\phi$, $c$ y $c_1$ definidas como en el teorema anterior y supongamos que existe $S \subset X$ tal que*

$$g(K) \cap S \neq \emptyset \text{ para todo } g \in M$$

$$\text{y sea } c_0 = \inf_S \phi.$$

*Si $c_1 < c_0$ entonces $c > c_1$ y en consecuencia se tienen todas las conclusiones del teorema anterior.*

**Prueba.** Si $g(K) \cap S \neq \emptyset$ para todo $g \in M$, existe $k_1 \in K$ tal que $g(k_1) \in S$. Luego

$$\max_{t \in K} \phi(g(t)) \geq \phi(g(k_1)) \geq \inf_S \phi = c_0.$$

Por lo tanto

$$c = \inf_{g \in M} \max_{t \in K} \phi(g(t)) \geq c_0 > c_1,$$

y se tienen las conclusiones del teorema anterior. ■

**Corolario 3.2.4** *Supongamos las mismas hipótesis del Teorema 3.2.2. Entonces para cada sucesión $(f_k)$ en $M$ tal que*

$$\max_K (\phi \circ f_k) \to c,$$

*existe una sucesión $(v_k)$ en $X$ tal que*

$$\phi(v_k) \to c, \quad dist(v_k, f_k(K)) \to 0 \quad y \quad \|\phi'(v_k)\| \to 0 \quad cuando \quad k \to \infty. \tag{3.20}$$

**Prueba.** Definamos

$$\varepsilon_k = \begin{cases} \max\limits_K(\phi \circ f_k) - c & \text{si} \quad \max\limits_K(\phi \circ f_k) - c > 0 \\ \frac{1}{k} & \text{si} \quad \max\limits_K(\phi \circ f_k) - c \leq 0. \end{cases}$$

Aplicando el teorema anterior, para cada $k \in N$ existe $v_k \in X$ tal que

$$c - \varepsilon_k \leq \phi(v_k) \leq \max_K(\phi \circ f_k), \quad \operatorname{dist}(v_k, f_k(K)) \leq \sqrt{\varepsilon_k} \quad \text{y} \quad \|\phi'(v_k)\| \leq \sqrt{\varepsilon_k}.$$

Como $\varepsilon_k \to 0$ cuando $k \to \infty$, tomando el límite cuando $k \to \infty$ en la expresión anterior se obtiene (3.20) ■

**Corolario 3.2.5** *Supongamos las mismas hipótesis del Teorema* 3.2.2. *Si $\phi$ satisface la condición de Palais-Smale entonces c es un valor crítico de $\phi$.*

**Prueba.** Aplicando el corolario anterior tenemos que existe una sucesión $(v_k)$ en $X$ tal que

$$\phi(v_k) \to c \quad \text{y} \quad \|\phi'(v_k)\| \to 0 \quad \text{cuando} \quad k \to \infty.$$

Como $\phi$ satisface la condición de Palais-Smale existen una subsucesión $v_{k(j)}$ y un $v_0 \in X$ tales que $v_{k(j)} \to v_0$. Utilizando la continuidad de $\phi$ y de $\phi'$ se sigue que

$$\phi(v_0) = c \quad \text{y} \quad \phi'(v_0) = 0.$$

Es decir, c es un valor crítico de $\phi$. ■

Escogencias adecuadas de $K, K_0$ *y* $\chi$ en el Teorema 3.2.2 nos proporcionan los dos teoremas siguientes, que son muy importantes en la teoría de puntos críticos. El siguiente teorema debido a A. Ambrosetti y P. Rabinowitz (ver [1]) nos proporciona, bajo hipótesis adecuadas, puntos críticos de tipo minimax, útiles para estudiar la existencia de soluciones de problemas elípticos semilineales.

**Teorema 3.2.6** *(Paso de la Montaña) Sean $X$ un espacio de Banach y $\phi \in C^1(X,R)$. Supongamos que existen $u_0 \in X$, $u_1 \in X$ y una vecindad acotada $\Omega$ de $u_0$ tal que $u_1 \in \left(X - \overline{\Omega}\right)$ y*

$$\inf_{\partial\Omega} \phi > \max\left(\phi(u_0),\ \phi(u_1)\right).$$

$$Sean\ \ \Gamma = \{g \in C([0,1], X)\ /\ g(0) = u_0, g(1) = u_1\}\ \ y\ c = \inf_{g\in\Gamma} \max_{s\in[0,1]} \phi(g(s)).$$

*Si $\phi$ satisface la condición de Palais-Smale entonces $c$ es un valor crítico de $\phi$ y*

$$c > \max\left(\phi(u_0), \phi(u_1)\right).$$

*Es decir, existe $u \in X$ tal que $\phi(u) = c$ y $\phi^{'}(u) = 0$.*

**Prueba.** Escojamos $K = [0,1]$, $K_0 = \{0,1\}$, $\chi(0) = u_0$, $\chi(1) = u_1$, $M = \Gamma$, $S = \partial\Omega$, $c_0 = \inf_{\partial\Omega} \phi$ y $c_1 = \max(\phi(u_0), \phi(u_1))$ en el Teorema 3.2.2 y en el Corolario 3.2.3.

Para tener todas las hipótesis del Corolario 3.2.3 resta demostrar que

$$g([0,1]) \cap \partial\,\Omega \neq \emptyset \ \text{ para todo } g \in \Gamma.$$

Como $g(0) = u_0 \in \Omega$, $g(1) = u_1 \in \left(X - \overline{\Omega}\right)$ y la función $g : [0,1] \to X$ describe en camino continuo que une los puntos $u_0$ y $u_1$ *y* $g([0,1])$ es un conjunto conexo se sigue que

$$g([0,1]) \cap \partial\Omega \neq \emptyset.$$

Como $c_0 > c_1$, por el Corolario 3.2.3 se tiene $c > c_1$ y se siguen todas las conclusiones del Teorema 3.2.2.

Como $\phi$ cumple la condición de Palais-Smale, aplicando el corolario anterior existe $u \in X$ tal que

$$\phi(u) = c \qquad y \quad \phi^{'}(u) = 0. \qquad \blacksquare$$

**Definición 3.2.1** *Sean* $\Omega$ *dominio acotado en* $R^n$ *y* $f \in C^1(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$*. Si* $y \in R^n - f(\partial\Omega)$ *es un valor regualar de* $f$*, es decir y no es un valor critico, definimos el grado de Brouwer*

$$d(f, \Omega, y) = \begin{cases} \sum\limits_{f(x)=y} sign\left(\det\left(f'(x)\right)\right) & \text{si } \; f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } \; f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

Usando el teorema de aproximación de Weierstrass se define el grado para funciones continuas en la clasura de Omega.

**Definición 3.2.2** *Sean* $Y$ *un espacio de Banach real de dimensión finita,* $\Omega$ *un subconjunto abierto acotado de* $Y$*, y* $f : \Omega \to Y$ *un función continua, definimos*

$$d(f, \Omega, y) := d\left(\varphi\left(f\left(\varphi^{-1}(\cdot)\right)\right), \varphi(\Omega) . \varphi(y)\right)$$

*donde* $\varphi : Y \to R^m$ *es un isomorfismo y* $m = \dim Y$

El siguiente teorema, debido a P. Rabinowitz, también nos proporciona puntos críticos para funcionales definidos en un espacio de Banach de dimensión infinita.

**Teorema 3.2.7** *(Punto de Silla). Sean* $X$ *un espacio de Banach y* $\phi : X \to \mathbb{R}$ *un funcional de clase* $C^1$ *que satisface la condición de Palais-Smale. Supongamos que* $X = V \oplus W$*, donde* $V$ *y* $W$ *son subespacios cerrados, con* $dimV < \infty$*. Sean*

$$\begin{aligned} S_R &= \{u \in V \;\; / \;\; \|u\| = R \;\;\}, \quad \overline{B_R} = \{u \in V \;\; / \;\; \|u\| \leq R\}, \\ M &= \left\{g \in C(\overline{B_R}, X) \quad / \;\; g(s) = s \;\; si \; s \in S_R\right\} \quad y \quad c = \inf_{f \in M} \max_{s \in \overline{B_R}} \phi(f(s)). \end{aligned}$$

*Si* $\inf\limits_{W} \phi > \max\limits_{S_R} \phi$*, entonces* $c$ *es un valor crítico de* $\phi$*.*

**Prueba.** Apliquemos el Corolario 3.2.3 con $\chi : S_r \to X$ definida por $\chi(s) = s$ $\forall s \in S_R$,

$c_1 = \max\limits_{\chi(S_R)} \phi, \quad W = S, \quad K = \overline{B_R}, \quad K_0 = S_R.$
Obsérvese que

$$c_0 = \inf_W \phi > \max_{S_R} \phi = \max_{\chi(S_R)} \phi = c_1.$$

Luego $c_0 > c_1$. Falta demostrar que

$$g(\overline{B_R}) \cap W \neq \emptyset \quad \forall g \in M.$$

Sea P la proyección de $X$ sobre $V$ con núcleo $W$. Luego $P(w) = 0 \ \ \forall w \in W$. Sea $g \in M$. Consideremos la función compuesta $P \circ g : \overline{B_R} \to V$, por lo tanto $(P \circ g) \in C(\overline{B_R}, V)$ y $(P \circ g) = Id$ en $\partial \overline{B_R} = S_R$.
Consideremos la homotopía $H : [0,1] \times \overline{B_R} \to V$ definida por $H(t,x) = t\,(P \circ g)\,(x) + (1-t)x$.
Obsérvese que $H(0,x) = x$ y $H(1,x) = (P \circ g)\,(x)$. Luego por la propiedad de invarianza del grado de Brouwer bajo homotopía (ver [11], pag 33-34) se sigue que

$$\deg(P \circ g, B_R, 0) = \deg(Id, B_R, 0) = 1.$$

Por lo tanto $(P \circ g)$ tiene un cero en $\overline{B_R}$. Entonces existe $s_1 \in \overline{B_R}$ tal que $(P \circ g)\,(s_1) = 0$.
Luego $g(s_1) \in W$ y

$$g(\overline{B_R}) \cap W \neq \emptyset.$$

Por lo tanto se tienen todas las conclusiones del Teorema 3.2.2. Como $\phi$ satisface la condición de Palais-Smale, por el Corolario 3.2.5 se sigue que $c$ es un valor crítico de $\phi$.
∎

# Capítulo 4

# Aplicaciones a las Ecuaciones Diferenciales Parciales

En este capítulo se presentan aplicaciones de los teoremas vistos en el Capítulo 3 a la existencia de soluciones débiles para problemas elípticos semilineales. En la primera sección se establecen condiciones para las cuales un funcional satisface la condición de Palais-Smale, la cual es necesaria para la obtención de puntos críticos del funcional. En la segunda sección se presenta una aplicación utilizando un teorema de minimización obtenido del Principio Variacional de Ekeland. En la Sección 3 se presentan dos aplicaciones, la primera utiliza el Teorema de Punto de Silla (Teorema 3.2.7) y la segunda usa el Teorema del Paso de la Montaña (Teorema 3.2.6).

Consideremos el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(x,u) \quad \text{en} \quad \Omega \\ \quad u &= 0 \qquad\quad\; \text{en} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.1}$$

En este capítulo se supondrá que $\Omega \subset R^N$ $(N \geq 3)$ es un dominio acotado con frontera suave, $f : \overline{\Omega} \times R \to R$ es una función continua y $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)\,dt$. Se denotará por $\Delta$ el operador de Laplace y por $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots$la sucesión de valores propios del operador $-\Delta$ en $\Omega$ con condiciones de Dirichelt cero en la frontera.

Por una **solución clásica** de (4.1) entendemos una función $u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ que satisface (4.1).

Una **solución débil** de (4.1) es una función $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisface

$$\int_\Omega \nabla u . \nabla v = \int_\Omega f(x,u)\, v \quad \forall v \in H_0^1. \tag{4.2}$$

Sea $\phi : H_0^1 \to R$ el funcional definido por

$$\phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega F(x,u)\,.\text{ donde } F(x,s) = \int_0^s f(x,t)\,dt. \tag{4.3}$$

Supongamos que existe una constante $c > 0$ tal que

$$|f(x,s)| \le c\,|s|^{p-1} + b(x)\,,\ b(\cdot) \in L^{p'},\ con\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,\ 1 \le p \le \frac{2N}{N-2} \tag{4.4}$$

Entonces por el Teorema 1.1.7 $\phi$ es continuamente Fréchet Diferenciable y

$$\left\langle \phi'(u)\,, v \right\rangle = \int_\Omega \nabla u . \nabla v - \int_\Omega f(x,u)\, v \quad \forall v \in H_0^1. \tag{4.5}$$

De (4.2) y (4.5) se sigue que $u$ es una solución débil del problema (4.1) si y sólo si $u$ es un punto crítico de $\phi$.

## 4.1 La condición de Palais-Smale

La condición de Palais-Smale es una condición de compacidad sobre el conjunto de puntos críticos de un funcional. En las Secciones 4.2 y 4.3 se utiliza esta condición para obtener puntos críticos del funcional $\phi$ y de esta manera conseguir soluciones débiles de problemas elípticos semilineales. En esta sección se establecen condiciones para las cuales un funcional $\phi$ satisface la condición de Palais-Smale.

El siguiente lema se usa para demostrar los Lemas 4.1.2 y 4.1.3.

**Lema 4.1.1** *Supongamos que*

$$|f(x,s)| \leq c|s|^{p-1} + b(x)\,,\ \ donde\ c>0,\ b(\cdot)\in L^{p'}\ con\ \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1,\ \ ,1\leq p<\frac{2N}{N-2}.$$

*Si toda sucesión* $(u_n)$ *en* $H_0^1$ *tal que la sucesión* $\phi(u_n)$ *es acotada y*

$$\phi^{'}(u_n)\rightarrow 0,$$

*es acotada, entonces el funcional* $\phi$ *definido en* (4.3) *satisface la condición de Palais-Smale.*

***Prueba.*** *Hay que probar que* $(u_n)$ *contiene una subsucesión convergente en* $H_0^1$*. Como* $u_n$ *es acotada existe una subsucesión, que denotaremos* $u_j$*, débilmente convergente en* $H_0^1$*, es decir* $u_j \rightharpoonup u_0$*, con* $u_0\in H_0^1$*. Como el encaje de* $H_0^1 \hookrightarrow L^p$ *es compacto (ver Teorema* 1.1.5*) se sigue que* $u_j\rightarrow u_0$ *en* $L^p$*. Como* $\left\|\phi^{'}(u_j)\right\|\rightarrow 0$*, existe una subsucesión* $u_{n(j)}$ *tal que*

$$\sup_{v\neq 0}\frac{\left|\left\langle \phi'(u_{n(j)}),v\right\rangle\right|}{\|v\|}\leq \frac{1}{j}\quad \forall j\in N.$$

*por comodidad, denotaremos la subsucesión* $u_{n(j)}$ *nuevamente como* $u_j$ *. Usando* (4.5) *se tiene*

$$\left|\int_\Omega \nabla u_j.\nabla v-\int_\Omega f(x,u_j)\,v\right|\leq\frac{1}{j}\,\|v\|_{H_0^1}\quad \forall v\in H_0^1\ .$$

*En particular cambiando* $v=u_j-u_0\in H_0^1$ *.*

$$\left|\int_\Omega \nabla u_j.\nabla(u_j-u_0)-\int_\Omega f(x,u_j)(u_j-u_0)\right|<\frac{\|u_j-u_0\|_{H_0^1}}{j}. \tag{4.6}$$

*Por el Teorema 1.1.1* $f(x,u_j)\rightarrow f(x,u_0)$ *en* $L^{p'}$*. Ahora aplicando la desigualdad de Hölder se tiene que*

$$\left|\int_\Omega f(x,u_j)(u_j-u_0)\right|\leq \|f(x,u_j)\|_{L^{p'}}\,\|u_j-u_0\|_{L^p}\,. \tag{4.7}$$

*Usando* (4.7) *y tomando límite en* (4.6) *cuando* $j \to \infty$ *se sigue que*

$$\int_\Omega (\nabla u_j) . \nabla (u_j - u_0) \to 0.$$

*De la expresión anterior se deduce que* $\|u_j\|_{H_0^1} \to \|u_0\|_{H_0^1}$ *y como* $u_j \rightharpoonup u_0$ *en* $H_0^1$, *por el Teorema* 1.1.11 *se tiene que*

$$u_j \to u_0 \textit{ fuertemente en } H_0^1.$$

*Luego* $\phi$ *satisface la condición de Palais-Smale* ■

El siguiente lema es útil para demostrar la condición de Palais-Smale para problemas de Dirichlet asintóticamente lineales.

**Lema 4.1.2** *Supongamos que existen funciones* $\alpha$ *y* $\beta \in L^\infty(\Omega)$ *tales que*

$$\lim_{s \to -\infty} \frac{f(x,s)}{s} = \alpha(x) \quad y \quad \lim_{s \to \infty} \frac{f(x,s)}{s} = \beta(x). \textit{ uniformemente para } x \in \ \Omega \tag{4.8}$$

*Si el problema*

$$\begin{cases} -\Delta v &= & \beta(x)v^+ - \alpha(x)v^- & en \quad \Omega \\ \quad v &= & 0 & en \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

(*donde* $v^+ = \max(0, v)$ *y* $v^- = v^+ - v$) *tiene únicamente la solución trivial* $v \equiv 0$ *entonces el funcional* $\phi$ *definido por* (4.3) *satisface la condición de Palais-Smale.*

**Prueba.** Usaremos el Lema 4.1.1. De (4.8) se sigue que existen constantes $c_1$ y $c_2$ tales que

$$|f(x,s)| \leq c_1 |s| + c_2. \tag{4.9}$$

Por lo tanto se tiene la hipótesis de crecimiento de la función $f(x,s)$.
Sea $(u_n) \subset H_0^1$ tal que $|\phi(u_n)| \leq k$, donde k es una constante, y $\phi'(u_n) \to 0$. Demostraremos que $(u_n)$ es acotada. Razonando por contradicción, supongamos que

$\|u_n\|_{H_0^1} \to \infty$. Luego

$$|\phi(u_n)| = \left| \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 - \int_\Omega F(x, u_n) \right| \leq k \quad \text{y} \tag{4.10}$$

$$|\langle \phi'(u_n), v \rangle| = \left| \int_\Omega \nabla u_n \nabla v - \int_\Omega f(x, u_n) v \right| \leq \varepsilon_n \|v\|_{H_0^1} \;\; \forall v \in H_0^1, \tag{4.11}$$

donde $\varepsilon_n \to 0$.

Sea $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|}$. Como $v_n$ es acotada podemos suponer (tomando subsucesiones si es necesario) que existe $v_0 \in H_0^1$ tal que $v_n \rightharpoonup v_0$ en $H_0^1$, $v_n \to v_0$ en $L^2$ , $v_n(x) \to v_0(x)$ para casi todo $x \in \Omega$ y existe $h \in L^2(\Omega)$ tal que $|v_n(x)| \leq h(x)$ para casi todo $x \in \Omega$.

$$\textbf{Afirmación: } \|u_n\|_{H_0^1}^{-1} f(x, u_n(x)) \to \beta(x) v_0^+ - \alpha(x) v_0^- \;\text{ en }\; L^2. \tag{4.12}$$

**Prueba.** Sean $a_n := \|u_n\|_{H_0^1}$ y $l(x) = \beta(x) v_0^+ - \alpha(x) v_0^-$.

$$\text{Sea } \; f_n(x) = \frac{f(x, a_n v_n(x))}{a_n} = v_n(x) \frac{f(x, a_n v_n(x))}{a_n v_n(x)} \;\; \text{si } \; v_n(x) \neq 0. \tag{4.13}$$

Usando (4.9) se sigue que

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{a_n} (c_1 a_n |v_n(x)| + c_2) \leq c_1 h(x) + \frac{c_2}{a_n}. \tag{4.14}$$

Sea $A_1 = \{x \in \Omega \,/\, v_0(x) \neq 0\}$.

De (4.8) y (4.13) se tiene que $f_n(x) \to l(x)$ para casi todo $x \in A_1$.

Usando (4.14) y el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue se sigue que

$$f_n \chi_{A_1} \to l \;\text{ en }\; L^2.$$

Sea $A_2 = \{x \in \Omega \,/\, v_0(x) = 0\}$.

De la primera desigualdad en (4.14) se sigue que $f_n(x) \to 0$ para casi todo $x \in A_2$.

Por el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue se sigue que

$$f_n \chi_{A_2} \to 0 \;\; \text{en} \;\; L^2.$$

Por lo tanto

$$f_n \to l \;\; \text{en} \;\; L^2. \quad \square$$

Dividiendo por $\|u_n\|_{H_0^1}$ en (4.11) tenemos

$$\left| \int_\Omega \nabla v_n \nabla v - \int_\Omega \|u_n\|_{H_0^1}^{-1} f(x, u_n(x)) v \right| \leq \frac{\varepsilon_n \|v\|_{H_0^1}}{\|u_n\|_{H_0^1}} \quad \forall v \in H_0^1,$$

y tomando límite cuando $n \to \infty$ se sigue que

$$\int_\Omega \nabla v_0 \nabla v - \int_\Omega (\beta(x) v_0^+ - \alpha(x) v_0^-) v = 0 \quad \forall v \in H_0^1.$$

Luego $v_0$ es una solución débil del problema

$$\begin{cases} -\Delta v &= \beta(x) v^+ - \alpha(x) v^- \;\; \text{en} \;\; \Omega \\ \quad v &= 0 \qquad\qquad\qquad\quad\; \text{en} \;\; \partial\Omega \end{cases}$$

Por lo tanto $v_0 \equiv 0$.

Tomando en (4.11) $v = v_n$ y dividiendo por $\|u_n\|_{H_0^1}$ obtenemos

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega |\nabla v_n|^2 - \int_\Omega \|u_n\|_{H_0^1}^{-1} f(x, u_n(x)) v_n \right| &\leq \frac{\varepsilon_n \|v_n\|_{H_0^1}}{\|u_n\|_{H_0^1}}, \text{ es decir} \\ \left| 1 - \int_\Omega \|u_n\|_{H_0^1}^{-1} f(x, u_n(x)) v_n \right| &\leq \frac{\varepsilon_n \|v_n\|_{H_0^1}}{\|u_n\|_{H_0^1}} \end{aligned}$$

lo cual es absurdo porque el segundo y tercer término de esta desigualdad convergen a cero. entonces $(u_n)$ es acotada y por el Lema 4.1.1 se sigue que $\phi$ satisface la condición de Palais-Smale $\blacksquare$

El siguiente lema permite demostrar la condición de Palais-Smale para problemas de Dirichlet superlineales. La hipótesis (4.15) fue introducida por A. Ambrosetti y P. Rabinowitz.

**Lema 4.1.3** *Supongamos que* $|f(x,s)| \leq c\,|s|^{p-1} + b(x)$, *donde* $c > 0$, *con* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $b(\cdot) \in L^{p'}$, $1 \leq p < \frac{2N}{N-2}$ *y supongamos que existen*

$$\theta > 2 \ \ y \ \ s_0 > 0 \ \ \textit{tales que} \ \ 0 < \theta F(x,s) \leq s f(x,s) \quad \forall x \in \overline{\Omega} \quad \forall\, |s| \geq s_0. \tag{4.15}$$

*Entonces* $\phi$ *satisface la condición de Palais-Smale.*

**Prueba.** Sea $u_n$ una sucesión contenida en $H_0^1$ que satisface (4.10) y (4.11). Tomando $v = u_n$ en (4.11) obtenemos

$$-\int_\Omega |\nabla u_n|^2 + \int_\Omega f(x,u_n)u_n \leq \varepsilon_n \|u_n\|_{H_0^1}. \tag{4.16}$$

Multiplicando por $\theta$ en (4.10) se tiene

$$\frac{\theta}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 - \int_\Omega \theta F(x,u_n) \leq C, \text{ donde } \ C \in R. \tag{4.17}$$

Sumando las desigualdades (4.17) y (4.16) se obtiene

$$(\frac{\theta}{2} - 1)\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \leq \int_\Omega (\theta F(x,u_n) - u_n f(x,u_n(x)) + \varepsilon_n \|u_n\|_{H_0^1} + C. \tag{4.18}$$

Sea $A = \{x \in \Omega \setminus |u_n(x)| \leq s_0\}$ y $B = \{x \in \Omega \setminus |u_n(x)| > s_0\}$ Ahora tenemos que

$$\int_\Omega (\theta F(x,u_n) - u_n f(x,u_n(x)) = \int_A (\theta F(x,u_n) - u_n f(x,u_n(x)) + \int_B (\theta F(x,u_n) - u_n f(x,u_n(x))$$

Usando (4.15) En la segunda integral se sigue que

$$\int_\Omega (\theta F(x,u_n) - u_n f(x,u_n(x)) \leq \int_A (\theta F(x,u_n) - u_n f(x,u_n(x))$$

Acotemos la integral sobre el conjunto $A$. En efecto las funciones $f:\overline{\Omega}\times[-s_{0,}s_0]$ y $F:\overline{\Omega}\times[-s_{0,}s_0]$ son continuas en el compacto $\overline{\Omega}\times[-s_{0,}s_0]$ y en consecuencia acotadas, es decir existe un $M\in R$ tal que $|F(x,u_n(x))|\leq M$ y $|f(x,u_n(x))|\leq M \quad \forall x\in\Omega \quad \forall n\in N$

$$\begin{aligned}\int_A|(\theta F(x,u_n)-u_nf(x,u_n(x))| &\leq \int_A(\theta\,|F(x,u_n)|+s_0\,|f(x,u_n(x))|)\\ &\leq (\theta+s_0)M\,|\Omega|=K\end{aligned}$$

Remplaando en (4.18) se sigue que

$$(\frac{\theta}{2}-1)\int_\Omega|\nabla u_n|^2\leq C_1\,\|u_n\|_{H_0^1}+C_2,\text{ donde }|\varepsilon_n|<C_1\quad\forall n\in N.$$

Por lo tanto

$$(\frac{\theta}{2}-1)\,\|u_n\|_{H_0^1}^2-C_1\,\|u_n\|_{H_0^1}-C_2\leq 0.$$

De donde se sigue que existe $M\in R$ tal que

$$\|u_n\|_{H_0^1}\leq M,\quad\forall n\in N.$$

Luego por el Lema 4.1.1 tenemos que $\phi$ satisface la condición de Palais-Smale. ■

## 4.2 Una aplicación utilizando el Principio Variacional de Ekeland

En esta sección se demuestra la existencia de una solución débil de un problema elíptico semilineal utilizando un teorema de minimización obtenido del Principio Variacional de Ekeland.

El siguiente lema será de gran utilidad en la demostración del Teorema 4.2.2.

**Lema 4.2.1** *Si* $a, b \in (0, \lambda_1)$ *entonces el problema*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta w & = & bw^+ - aw^- & en \quad \Omega \\ w & = & 0 & en \quad \partial\Omega \end{array} \right. \tag{4.19}$$

*tiene como única solución* $w \equiv 0$

**Prueba.** Si $w > 0$ en $\Omega$ entonces $w^+ = w$ y $w^- = 0$. Luego

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta w & = & bw \text{ en } \Omega \\ w & = & 0 \text{ en } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

por lo tanto b es un valor propio de $-\Delta$, esto es una contradicción ya que por hipótesis $b < \lambda_1$. Similarmente se prueba que si $w < 0$ en $\Omega$ entonces $a$ es un valor propio de $-\Delta$, lo cual es una contradicción.

Sea $w$ es una solución que cambia de signo. y sea $A = \{x \in \Omega \,/\, w(x) > 0\}$. Luego

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta w & = & bw \text{ en } A \\ w & = & 0 \text{ en } \partial A. \end{array} \right.$$

Como $b < \lambda_1$ y el autovalor principal de $-\Delta$ en cualquier subregión de $\Omega$ es mayor o igual a $\lambda_1$, se sigue que $A = \emptyset$. Similarmente se demuestra que si $B = \{x \in \Omega \,/\, w(x) < 0\}$ entonces $B = \emptyset$.

Como $w \equiv 0$ es una solución de $(4.19)$, entonces tiene lugar la afirmación del lema. ■

**Teorema 4.2.2** *Sea* $f : R \to R$ *una función continua tal que* $\lim\limits_{s \to -\infty} \dfrac{f(s)}{s} = a$ *y* $\lim\limits_{s \to \infty} \dfrac{f(s)}{s} = b$, *con* $a$ *y* $b \in (0, \lambda_1)$. *Entonces el problema*

$$\left\{ \begin{array}{rll} \Delta u + f(u) & = 0 & en \quad \Omega \\ u & = 0 & en \quad \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{4.20}$$

*tiene una solución débil.*

**Prueba.** Debemos buscar puntos críticos del funcional $\phi : H_0^1 \to R$ definido por

$$\phi(u) = \tfrac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega F(u), \quad \text{donde } F(s) = \textstyle\int_0^s f(t)dt. \tag{4.21}$$

Si $\lim\limits_{s\to-\infty} \dfrac{f(s)}{s} = a$ y $\lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{f(s)}{s} = b$, con $a$ y $b \in (0, \lambda_1)$, sea $c_1 \in R$, tal que $max\{a, b\} < c_1 < \lambda_1$. Entonces existen $s_0 > 0$ tales que

$$\left|\frac{f(s)}{s}\right| < c_1 \quad \text{para } |s| > s_0.$$

Por la continuidad de $f$ en $[-s_0, s_0]$ existe $c_2$ tal que $|f(s)| \leq c_2$ para $|s| \leq s_0$.
Luego

$$|f(s)| \leq c_1 |s| + c_2 \qquad \forall s \in R. \tag{4.22}$$

Esta desigualdad nos permite asegurar (ver teorema 1.1.7) que $\phi$ es continuamente Fréchet diferenciable y

$$\langle \phi'(u), v\rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_\Omega f(u)v \quad \forall v \in H_0^1.$$

También de (4.22) se prueba que existen $c'$ y $k$ en $R$ tales que $c_1 < c' < \lambda_1$ y

$$F(s) \leq \frac{1}{2}c's^2 + k \quad \forall s \in R. \tag{4.23}$$

Demostremos que $\phi$ está acotado inferiormente: En efecto, usando (4.23) se tiene que

$$\phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega F(u) \geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{1}{2}c'\int_\Omega u^2 - \int_\Omega k.$$

Por el Teorema 1.1.8 se sigue que

$$\phi(u) \geq \left(\frac{\lambda_1 - c'}{2}\right)\int_\Omega u^2 - \int_\Omega k \geq -\int_\Omega k =: C > -\infty$$

Luego $\phi$ está acotado inferiormente.

Además por los Lemas 4.1.2 y 4.2.1 $\phi$ satisface la condición de Palais-Smale. Usando el

Teorema 3.1.3 se sigue que existe $u_0 \in H_0^1$ tal que

$$\inf_X \phi = u_0 \quad \text{y} \quad \phi'(u_0) = 0$$

Es decir $u_0$ es un punto crítico de $\phi$ y por lo tanto una solución débil de (4.20) ■

Como una consecuencia inmediata del teorema anterior se tiene el siguiente corolario.

**Corolario 4.2.3** *Sea* $f : R \to R$ *una función continua tal que* $\lim_{|s| \to \infty} \frac{f(s)}{s} = a$ *con* $a \in (0, \lambda_1)$. *Entonces el problema*

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) & = 0 \quad en \quad \Omega \\ u & = 0 \quad en \quad \partial\Omega \end{cases}$$

*tiene una solución débil.*

## 4.3 Aplicaciones utilizando los teoremas de minimax

En esta sección se presentan dos aplicaciones a las ecuaciones diferenciales, en ellas el funcional $\phi$ no está acotado inferiormente. Para hallar puntos críticos del funcional $\phi$ utilizaremos los teoremas de minimax vistos en el Capítulo 3.

**Lema 4.3.1** *Sea* $f : \overline{\Omega} \times R \to R$ *una función continua y supongamos que* $\liminf_{s \to +\infty} \frac{f(x,s)}{s} > \lambda_1$ *uniformemente en* $\Omega$, *es decir existen* $s_0 > 0$ *y* $u' > \lambda_1$ *tales que* $\forall x \in \Omega$ *y* $\forall s > s_0$ $\frac{f(x,s)}{s} > u'$, *entonces el funcional* $\phi$ *definido por (4.3)*

$$\phi(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega F(x,u) \quad \forall u \in H_0^1,$$

*no está acotado inferiormente.*

***Prueba.*** *Sea* $b(x) = \liminf_{s \to \infty} \frac{f(x,s)}{s}$. *Como* $b(x) > \lambda_1$ *existe* $u' > \lambda_1$ *tal que*

$$F(x,s) \geq \frac{u's^2}{2} - c'.$$

*Sea $\phi_1$ la función propia asociada a $\lambda_1$. Para $t>0$, tenemos*

$$
\begin{aligned}
\phi\left(t\phi_1\right) &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega \left|\nabla\left(t\phi_1\right)\right|^2 - \frac{1}{2}u't^2\int_\Omega \phi_1^2 + c'\left|\Omega\right| \\
&\leq \frac{t^2}{2}\int_\Omega \left|\nabla\phi_1\right|^2 - \frac{u't^2}{2\lambda_1}\int_\Omega \left|\nabla\phi_1\right|^2 + c'\left|\Omega\right| \\
&\leq \frac{t^2}{2}\left(1-\frac{u'}{\lambda_1}\right)\left\|\phi_1\right\|_{H_0^1}^2 + c'\left|\Omega\right|.
\end{aligned}
$$

*Por lo tanto dado $M \in R$, existe $t>0$, tal que*

$$\phi\left(t\phi_1\right) \leq M$$

*Luego $\phi$ no está acotado inferiormente.* ■

**Lema 4.3.2** *Sean $V = \left\langle \phi_{1,}\phi_{2,}, \ldots, \phi_k \right\rangle$ el subespacio de dimensión finita generado por las primeras $k$ funciones propias de $(-\Delta, H_0^1)$ y sea $W = V^\perp = \left\langle \phi_{k+1,}\phi_{k+2,} \ldots \right\rangle$ y $H_0^1 = V \oplus W$. Entonces*

***a)*** $\int_\Omega \left|\nabla v\right|^2 \leq \lambda_k \int_\Omega v^2 \quad \forall v \in V.$

***b)*** $\int_\Omega \left|\nabla w\right|^2 \geq \lambda_{k+1} \int_\Omega w^2 \quad \forall w \in W.$

**Prueba.** a) Sea $v \in V$. Entonces $v = \sum_{i=1}^{k} a_i\phi_i$ *con* $a_i \in R.$

Luego

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \left|\nabla v\right|^2 &= \left\langle v,v\right\rangle_{H_0^1} = \left\langle \sum_{i=1}^{k} a_i\phi_i, \sum_{j=1}^{k} a_j\phi_j \right\rangle_{H_0^1} \\
&= \sum_{i=1}^{k} a_i^2 \left\langle \phi_{i,}\phi_i \right\rangle_{H_0^1} = \sum_{i=1}^{k} a_i^2 \int_\Omega \left|\nabla\phi_i\right|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{k} a_i^2 \int_\Omega \phi_i\left(-\Delta\left(\phi_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{k} a_i^2\lambda_i \int_\Omega \phi_i^2 \\
&\leq \lambda_k \sum_{i=1}^{k} \left\langle a_i\phi_i, a_i\phi_i \right\rangle_{L^2} = \lambda_k \left\langle v,v\right\rangle_{L^2} = \lambda_k \int_\Omega v^2.
\end{aligned}
$$

Se sigue que

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \leq \lambda_k \int_{\Omega} v^2. \quad \blacksquare$$

**Prueba.** b) Sea $w \in W$. Entonces $w = \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i \phi_i \;\; con \;\; a_i \in R.$

Luego

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |\nabla w|^2 &= \langle w, w \rangle_{H_0^1} = \left\langle \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i \phi_i, \sum_{j=k+1}^{\infty} a_j \phi_j \right\rangle_{H_0^1} \\
&= \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i^2 \langle \phi_{i,} \phi_i \rangle_{H_0^1} = \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i^2 \int_{\Omega} |\nabla \phi_i|^2 \\
&= \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i^2 \int_{\Omega} \phi_i \left(-\Delta \left(\phi_i\right)\right) = \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i^2 \lambda_i \int_{\Omega} \phi_i^2 \\
&\geq \lambda_{k+1} \sum_{i=k+1}^{\infty} \langle a_i \phi_i, a_i \phi_i \rangle_{L^2} = \lambda_{k+1} \langle w, w \rangle_{L^2} = \lambda_{k+1} \int_{\Omega} w^2.
\end{aligned}$$

Se sigue que

$$\int_{\Omega} |\nabla w|^2 \geq \lambda_{k+1} \int_{\Omega} w^2. \quad \blacksquare$$

El siguiente teorema es una aplicación del Teorema de Punto de Silla a un problema de Dirichlet asintóticamente lineal. Este resultado fue demostrado por Dolph en [7].

**Teorema 4.3.3** *Supongamos que $h \in C(\overline{\Omega})$ y $f : R \to R$ es una función continua tal que existen constantes $\alpha$ y $\beta \in R$ con $\lambda_k < \alpha, \beta < \lambda_{k+1}$,*

$$\lim_{s \to -\infty} \frac{f(s)}{s} = \alpha \quad y \qquad \lim_{s \to \infty} \frac{f(s)}{s} = \beta. \tag{4.24}$$

*Entonces el problema*

$$\begin{cases} -\Delta u & = f(u) + h(x) \quad en \quad \Omega \\ \quad u & = 0 \qquad\qquad\quad\; en \;\; \partial\Omega \end{cases} \tag{4.25}$$

*tiene una solución débil.*

**Prueba.** Buscar soluciones débiles del problema (4.25) es equivalente a encontrar puntos críticos del funcional

$$\phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega F(u) - \int_\Omega hu \quad u \in H_0^1, \text{ donde } F(s) = \int_0^s f(t)dt. \qquad (4.26)$$

Queremos aplicar el Teorema de Punto de Silla. Sea $V = \langle \phi_{1,}\phi_{2,}......\phi_k \rangle$ y sea $W = V^\perp$. De manera similar al Lema 4.2.1 se prueba que el problema

$$\begin{cases} -\Delta w &= \beta w^+ - \alpha w^- \text{ en } \Omega \\ w &= 0 \qquad\qquad \text{ en } \partial\Omega \end{cases}$$

tiene únicamente la solución trivial $w \equiv 0$ y por el Lema 4.1.2 se sigue que $\phi$ satisface la condición Palais-Smale.

Sean $u$ y $\overline{u}$ tales que $\lambda_k < u < \alpha, \beta < \overline{u} < \lambda_{k+1}$. De (4.24) se sigue que existen constantes $C_1$ $y$ $C_2$ tales que

$$\frac{us^2}{2} - C_2 < F(s) < \frac{\overline{u}s^2}{2} + C_1 \quad \forall s \in R. \qquad (4.27)$$

Sea $v \in V$. Por (4.27), el Lema 4.3.2 a) y la Desigualdad de Poincaré se tiene

$$\begin{aligned} \phi(v) &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \frac{u}{2}\int_\Omega v^2 + C_2\,|\Omega| + \|h\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \\ \phi(v) &\leq \frac{1}{2}(1 - \frac{u}{\lambda_k})\int_\Omega |\nabla v|^2 + C_2\,|\Omega| + \|h\|_{L^2}\lambda_1^{-\frac{1}{2}}\|v\|_{H_0^1} \\ \phi(v) &\leq \frac{1}{2}(1 - \frac{u}{\lambda_k})\|v\|_{H_0^1}^2 + \|h\|_{L^2}\lambda_1^{-\frac{1}{2}}\|v\|_{H_0^1} + C_2\,|\Omega|\,. \end{aligned}$$

Como $u > \lambda_k$ se sigue que

$$\phi(v) \to -\infty \text{ cuando } \|v\|_{H_0^1} \to \infty \quad v \in V.$$

Por lo tanto dado $M \in R$ existe $r$ tal que $\sup\limits_{S_r} \phi \leq M$, donde $S_r = \left\{ v \in V \;\Big/\; \|v\|_{H_0^1} = r \right\}$.
Sea $w \in W$. Por (4.27), el Lema 4.3.2 b) y la Desigualdad de Poincaré se tiene

$$\begin{array}{rcl}
\phi(w) & \geq & \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |\nabla w|^2 - \dfrac{\overline{u}}{2}\int_\Omega w^2 - C_1 |\Omega| - \|h\|_{L^2} \|w\|_{L^2} \\
\phi(w) & \geq & \dfrac{1}{2}(1 - \dfrac{\overline{u}}{\lambda_{k+1}}) \displaystyle\int_\Omega |\nabla w|^2 - C_1 |\Omega| - \|h\|_{L^2} \lambda_1^{-\frac{1}{2}} \|w\|_{H_0^1} \\
\phi(w) & \geq & \dfrac{1}{2}(1 - \dfrac{\overline{u}}{\lambda_{k+1}}) \|w\|_{H_0^1}^2 - \|h\|_{L^2} \lambda_1^{-\frac{1}{2}} \|w\|_{H_0^1} - C_1 |\Omega| .
\end{array}$$

Como $\overline{u} < \lambda_{k+1}$ existe $m \in R$ tal que $\inf\limits_W \phi \geq m$. Por lo tanto

$$\inf_W \phi \geq \sup_{S_r} \phi.$$

La conclusión se obtiene aplicando el Teorema de Punto de Silla (Teorema 3.2.7). ■

El siguiente teorema es una aplicación del Teorema del Paso de Montaña a un problema superlineal, el cual fue demostrado por A. Ambrosetti y P. Rabinowitz en [1].

**Teorema 4.3.4** *Supongamos que $f$ satisface las condiciones del Lema 4.1.3 es decir,*

$$|f(x,s)| \leq c |s|^{p-1} + b(x), \ \textit{donde}\ c > 0,\ \textit{con} \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,\ b(\cdot) \in L^{p'},\ 1 \leq p < \frac{2N}{N-2}$$

*y supongamos que existen*

$$\theta > 2 \ \textit{y}\ s_0 > 0 \ \ \textit{tales que} \ \ 0 < \theta F(x,s) \leq s f(x,s) \quad \forall x \in \overline{\Omega} \quad \forall |s| \geq s_0.$$

*Adicionalmente supongamos que*

$$\lim_{s \to 0} \frac{f(x,s)}{s} < \lambda_1. \tag{4.28}$$

*Entonces el problema*

$$\begin{cases} -\Delta u & = f(x,u) \quad \textit{en} \quad \Omega \\ \quad u & = 0 \quad\quad\quad\ \ \textit{en} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{4.29}$$

*tiene una solución débil no trivial.*

**Prueba.** Buscar soluciones débiles de (4.29) es equivalente a encontrar puntos críticos del funcional

$$\phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega F(x,u), \quad u \in H_0^1.$$

Queremos aplicar el Teorema del Paso de Montaña. Por el Lema 4.1.3 $\phi$ satiface la condición de Palais-Smale. De la condición (4.15) tenemos:

$$\begin{aligned} \int_{s_0}^{s} \frac{\theta}{t} dt &\leq \int_{s_0}^{s} \frac{f(x,t)}{F(x,t)} dt \\ \ln |s|^\theta - \ln |s_0|^\theta &\leq \ln F(x,s) - \ln F(x,s_0). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{|s|^\theta}{|s_0|^\theta} \leq \frac{F(x,s)}{F(x,s_0)}.$$

Utilizando la desigualdad anterior y (4.15) se sigue que

$$f(x,s) \geq \theta F(x,s_0) s_0^{-\theta} |s|^{\theta-1}, \quad \forall s \geq s_0.$$

En consecuencia $\lim_{s\to\infty} \frac{f(x,s)}{s} = \infty$. Aplicando el Lema 4.3.1 se sigue que $\phi$ no está acotado inferiormente.

Tomando $b$ tal que $\lim_{s\to 0} \frac{f(x,s)}{s} < b < \lambda_1$ y aplicando (4.28) existe $\delta > 0$ tal que

$$|F(x,s)| \leq \frac{b\,|s|^2}{2} \quad \text{si} \quad |s| \leq \delta. \tag{4.30}$$

Usando (1.3) encontramos una constante $k > 0$ tal que

$$|F(x,s)| \leq k\,|s|^p \quad \text{si} \quad |s| > \delta. \tag{4.31}$$

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $p > 2$. De (4.30) y (4.31) se tiene

$$|F(x,s)| \leq \frac{b\,|s|^2}{2} + k\,|s|^p \qquad \forall s \in R. \tag{4.32}$$

Aplicando (4.32), la Desigualdad de Poincaré y el Teorema de Encaje de Sobolev obtenemos:

$$\begin{aligned}
\phi(u) &\geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{b}{2}\int_\Omega u^2 - k\int_\Omega u^p \\
\phi(u) &\geq \frac{1}{2}(1-\frac{b}{\lambda_1})\int_\Omega |\nabla u|^2 - k\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{\frac{p}{2}} \\
\phi(u) &\geq \frac{1}{2}(1-\frac{b}{\lambda_1})\,\|u\|_{H_0^1}^2 - k\,\|u\|_{H_0^1}^p\,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto existe $r > 0$, tal que si $\|u\|_{H_0^1} = r$ entonces $\phi(u) \geq a$ para alguna constante $a > 0$. Además $\phi(0) = 0$ y el funcional $\phi$ no está acotado inferiormente, en consecuencia existe $e \in H_0^1$ tal que

$$\|e\| > r \quad y \quad \phi(e) < 0$$

El resultado se sigue aplicando el Teorema del Paso de Montaña, Teorema 3.2.6 ■

# Bibliografía


[1] A. Ambrosetti and P. H. Rabinowitz "*Dual Variational Methods in Critical Point Theory and Applications*" J. Functional Anal 14 (1973), 349-381.

[2] J. P. Aubin and I. Ekeland. "*Applied Nonlinear Analysis*", John Wiley and Sons, (1984)

[3] H. Brézis. "*Análisis Funcional*", Alianza Editorial, Madrid, (1984)

[4] A. Castro. "*Métodos Variacionales y Análisis Funcional no Lineal*", X Coloquio Colombiano de Matemáticas, Paipa, Colombia, (1980).

[5] D.G. De Figueiredo. "*The Ekeland Variational Principle with Application and Detour*", Tata Institute of Fundamental Research, Springer Verlag, (1989)

[6] D. G. De Figueiredo. "*Positive Solutions of Semilinear Elliptic Problems*", Lecture Notes in Mathematics, Differential Equations, Proceedings (São Paulo), Springer Verlag, (1981)

[7] C. L. Dolph "*Nonlinear Integral Equations of Hammerstein Type*", Trans. AMS 66 (1949), 289-307.

[8] I. Ekeland. "*Nonconvex Minimization Problems*", Bull. Amer. Math. Soc. 1 (1979), 443-474

[9] I. Ekeland. "*On the Variational Principle*", J. Math. Anal. Appl. 47 (1974), 324-353.

[10] A. Lazer. "*Notas de Clase*". University of Cincinnati, USA (1975)

[11] P. Konder. "*Introducción a la Teoría del Grado Topológico de una Aplicación en* $R^N$ ", Ediciones Uninorte (2000)

[12] E. Kreyszig. "*Introductory Functional Analysis with Applications*", John Wiley and Sons (1989)

[13] J. Mawhin and M. Willem. "*Critical Point Theory and Hamiltonian* Systems", Springer Verlag (1989)