EL TIEMPO Y EL PROBLEMA DEL CONTINUO

Juan Diego Vélez C.
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín

Se le atribuyen a Zenón de Elea [490 a. C.], cuatro argumentos sutiles y profundos, conocidos como las cuatro aporías de Zenón sobre el movimiento, que lo convierten en el iniciador de la filosofía del infinito. Estos cuatro argumentos han merecido la atención de filósofos y matemáticos durante más de dos mil años y siguen siendo fuente de preguntas y reflexiones sobre la naturaleza del tiempo y el espacio.

Todo movimiento es imposible, afirmaba Zenón: "en efecto, un móvil antes de llegar al término de su carrera, debe antes efectuar la mitad, y antes de terminar esta mitad de carrera, debe recorrer a su vez la mitad de ésta y así sucesivamente hasta el infinito". Este argumento toma otra forma ligeramente distinta en su paradoja más conocida: la carrera de Aquiles y la tortuga. Aquiles reta a la tortuga a una carrera. Éste corre diez veces más rápido y por esta razón le da una ventaja inicial. Antes de que Aquiles alcance la tortuga tendrá que llegar a la posición que ocupaba ésta en el momento en que comenzó la carrera. Pero cuando Aquiles llega a esta posición la tortuga habrá tomado de nuevo una ventaja y habrá por tanto un nuevo punto por el que deberá pasar. Alcanzado este nuevo punto, el razonamiento vuelve a repetirse, y la tortuga habrá avanzado a un nuevo punto que Aquiles tendrá que superar, y así hasta el infinito. Por tanto Aquiles no alcanzará jamás a la tortuga. Como veremos, estos problemas son mucho más sutiles de lo que podría parecer a simple vista, y considerarlos completamente resueltos o no dependerá en últimas del punto de vista que se adopte.

En cada uno de ellos se pueden distinguir dos aspectos distintos que habría que considerar por separado. Por un lado, en cada problema se está haciendo referencia a una situación particular del mundo físico, la cual involucra la existencia de un espacio y un tiempo, real y exterior, y por otro lado, se hace referencia a un razonamiento formal sobre un modelo matemático particular adoptado. La bondad de cada modelo que se adopte, y si éste proporciona o no una solución a las paradojas, es algo que habrá que decidir en forma empírica, y de acuerdo con el método tradicional de las ciencias exactas, es decir, confrontando cada modelo particular con la evidencia experimental disponible. Por otro lado, las propiedades internas del modelo, como objeto puramente mental, tendrán que ser despojadas de toda niebla metafísica, y sus propiedades lógicas esclarecidas. Es en este terreno donde ha ocurrido, en mi opinión, los avances más sorprendentes y significativos. Según B. Rusell, "desde Zenón hasta nuestros días, los más eminentes talentos de cada generación abordaron sucesivamente estos problemas, pero, hablando en términos generales, sin lograr nada. Tres hombres, Weierstrass, Dedekind y Cantor los resolvieron por completo. Este éxito es probablemente el más grande del que pueda jamás jactarse nuestro tiempo, y no conozco ninguna época (salvo tal vez la edad de oro de Grecia) capaz de ofrecer una prueba más convincente del extraordinario genio de sus grandes hombres". La creación de la lógica matemática y la adopción del punto de vista formalista han llevado al descubrimiento de las propiedades más íntimas, paradójicas y contraintuitivas del infinito, así como de la naturaleza del continuo matemático, y han proporcionado un avance sin precedentes en la historia del pensamiento humano.

En lo que sigue me propongo discutir en detalle las cuatro aporías de Zenón, invitar al lector a una discusión de carácter especulativo sobre la naturaleza del continuo espacio temporal y mostrar la concepción que del mismo han adoptado los lógicos y matemáticos de nuestra época.

Cuatro aporías del movimiento según Zenón de Elea.

Primera aporía del movimiento: la dicotomía espacio infinitamente divisible tiempo no infinitamente divisible.

Imaginemos un móvil que parte del punto A, situado a un metro de distancia de otro punto B, y que avanza hacia éste, a una velocidad constante de un metro por segundo. Este móvil podría ser una flecha separada un metro de su blanco, el cual deberá alcanzar al cabo de un segundo. Zenón propone un análisis del movimiento de la flecha como sigue: supongamos, dice Zenón, que el espacio puede partirse tan finamente como queramos, y que la punta de la flecha, al atravesar este continuo de puntos espaciales, alcanza en algún momento cada uno de sus puntos. Por otro lado imaginemos que hay una unidad mínima de tiempo, indivisible, una especie de quantum de tiempo, por debajo del cual no existirá ninguna fracción de tiempo menor. Esta situación nos llevaría a la siguiente situación paradójica: si llamamos al punto medio del segmento AB, p_1, al punto medio entre p_1 y B, p_2, al punto medio entre p_2 y B, p_3, y así sucesivamente,

|________________________|____________|_____|__|_|_|
A p_1 p_2 p_3 B

entonces la flecha tardará ½ segundo en alcanzar p_1, ¼ de segundo en recorrer el segmento p_1-p_2, 1/8 de segundo en recorrer p_2-p_3, etc. Para pasar del punto p_n a p_{n+1} tardará $1/2^{n+1}$ segundos. Es claro entonces que existirá un primer valor de n, lo suficientemente grande, para el cual el tiempo en recorrer el segmento p_n -p_{n+1} . $1/2^{n+1}$ segundos, será menor que el valor del quantum de tiempo minimal, y por lo tanto la flecha no pasará nunca por p_{n+1}, lo que contradice nuestras hipótesis.

Segunda aporía del movimiento: espacio y tiempo infinitamente divisibles.

Consideremos dos móviles (Aquiles y la tortuga) que recorren la misma distancia con velocidades diferentes. El móvil más lento parte primero. Cuando el móvil más rápido comienza su carrera, antes que alcance a su contendor, tendrá que llegar a la posición que ocupaba éste en el momento en que comenzó la carrera. Pero cuando el más rápido llegue a esta posición, el más lento habrá tomado de nuevo una ventaja y habrá por tanto un nuevo punto por el que el más rápido deberá pasar. Alcanzado este nuevo punto, el razonamiento vuelve a repetirse, y el más lento habrá avanzado a un nuevo punto que el más rápido tendrá que superar, y así indefinidamente. Por lo tanto Aquiles no alcanzará jamás a la tortuga.

Otra consecuencia paradójica que Zenón deriva de este razonamiento es la siguiente: supongamos, por el absurdo, que Aquiles alcanza la tortuga en un intervalo de tiempo [0,T]. A cada punto del recorrido de la tortuga corresponde un único instante de tiempo t, y solamente uno. Lo mismo ocurre para Aquiles. Cada uno de los puntos recorridos por Aquiles se corresponde entonces con cada uno de los instantes de tiempo del intervalo comprendido entre el inicio de la carrera y T. Uno puede imaginar que tanto Aquiles como la tortuga, a medida que avanzan, van marcando cada uno de los puntos de su trayectoria con alfileres, y que cada alfiler tiene grabado en la cabeza el instante preciso en el que se alcanzó dicho punto. Es claro que Aquiles y la tortuga habrán empleado tantos alfileres como instantes hay en el