UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Diseño e Implementación de una estrategia didáctica para la enseñanza de las funciones trigonométricas en los números reales para grado décimo mediante la modelación matemática y las TIC: Estudio de caso en el grupo 10° B de la Institución Educativa Montecarlo-Guillermo Gaviria Correa, del municipio de Medellín

Alexis Gil Suárez

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Medellín, Colombia

2014

Diseño e Implementación de una estrategia didáctica para la enseñanza de las funciones trigonométricas en los números reales para grado décimo mediante la modelación matemática y las TIC: Estudio de caso en el grupo 10° B de la Institución Educativa Montecarlo-Guillermo Gaviria Correa, del municipio de Medellín

Alexis Gil Suárez

Trabajo Final de Maestría presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director:

Alberto Alejandro Piedrahita Ospina, Msc.

Magister en Ingeniería – Ingeniería de Sistemas

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Medellín, Colombia

2014

Agradecimientos

A Jehová Dios, por sostenerme cada día y brindarme su apoyo y guía para cada paso que doy en el camino de la vida.

A la Universidad Nacional por abrirme la posibilidad de estudiar esta maestría y brindarme la oportunidad de crecer profesionalmente a través de la calidad de sus maestros.

A la Institución Educativa Montecarlo-Guillermo Gaviria Correa por la posibilidad de permitirme realizar la intervención de la estrategia didáctica.

A Arturo Jessie, coordinador de la Maestría, por su gestión y su trabajo constante para que el programa cumpla con las expectativas de docentes que buscan cualificarse y mejorar su práctica pedagógica.

A Alejandro Piedrahita, docente y asesor, por su orientación permanente y oportuna en los diferentes procesos que constituyeron este trabajo final.

Resumen

La modelación matemática se abre paso entre diferentes propuestas didácticas al propiciar la construcción de conceptos matemáticos y potenciar en los estudiantes un aprendizaje comprensivo de las matemáticas permitiendo mejores resultados por parte de los estudiantes frente a los estándares dados por el ministerio de educación Colombiano; por tal razón, se propone el diseño y la implementación de una estrategia didáctica para la enseñanza de las funciones trigonométricas en los reales desde la modelación matemática, mediada por el uso de las Tecnologías de la Información y la comunicación (TIC).

La implementación de las nuevas tecnologías posibilita trabajar laboratorios matemáticos y se convierte en herramienta de actividades virtuales variadas que enriquecen el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas y propicia un aprendizaje significativo.

Palabras clave

Aprendizaje significativo, modelación matemática, funciones trigonométricas, TIC, situación problema, evaluación.

Abstract

Mathematical modeling is gaining ground among different educational proposals to facilitate the construction of mathematical concepts and foster in students a comprehensive learning of mathematics allowing better results by the students against the standards given by the Colombian Ministry of Education, for this therefore proposed the design and implementation of a teaching strategy for teaching in the real trigonometric functions from mathematical modeling, mediated by the use of information technology and communication (TIC, for its acronym in Spanish).

The implementation of new technologies and enables mathematical research work becomes virtual tool varied activities that enrich the teaching and learning of mathematics fosters meaningful learning.

Keywords

Meaningful learning, mathematical modeling, trigonometric, ICT, problem situation, assessment.

Tabla de contenido

Lista de Figuras

Lista de tablas

1 Aspectos preliminares

1.1 Introducción

En la práctica docente se han encontrado dificultades en los estudiantes de educación media en la comprensión matemática. Por ejemplo, cuando se abordan diferentes contenidos se evidencia en los estudiantes que no recuerdan fácilmente los temas, estrategias y modelos vistos en los grados anteriores para resolver problemas, e incluso aquellos estudiados en el mismo grado escolar. Esto ha llegado a convertirse en una barrera para un mejor desempeño académico en el estudiante, dificultando la generación de habilidades para resolver problemas propios de la matemática y su entorno. Adicionalmente, para el docente existen limitaciones ya que en la medida en que busca potenciar competencias en los estudiantes, ve que sus estrategias no conducen a un aprendizaje significativo.

Estas dificultades enmarcan lo que es la falta de comprensión y se evidencia por lo menos en tres aspectos, los cuales señala Perkins (1992), a saber:

Aprendizaje pasivo: El conocimiento es dado a los estudiantes de tal manera que estos sólo se limitan a repetir lo elaborado por la ciencia y entregado por el docente; por ejemplo, una fórmula sale de la nada y se reproducen ejemplos y ejercicios, lo que les dificulta explicar, interpretar o inferir las situaciones problema que se les presente, así tengan habilidades para operar.

Conocimiento frágil: Los estudiantes presentan dificultades para la retención del conocimiento, por lo general, olvidan lo visto una vez terminada la clase o aprobada una evaluación, lo que lleva a una comprensión deficiente, a poca habilidad para relacionar conceptos previos con los nuevos y, sobre todo, para estar en capacidad de encontrar relaciones, procedimientos y respuestas matemáticas a problemas cotidianos. Esto lleva a un desempeño bajo en las competencias cognitivas al ser evaluados.

Pensamiento pobre: Aunque en su proceso de aprendizaje pudieran llegar a realizar operaciones básicas, sus constantes preguntas al docente sobre: ¿Cómo afrontar un problema? ¿Qué quiere decir el enunciado? ¿Cómo plantear el problema? ¿Qué vías tomar para su solución?; muestran pocas señales de que están usando un pensamiento activo para resolver actividades propuestas.

Por otro lado, el discurso que se plasma en los planes de área de matemáticas desde los lineamientos del MEN (Ministerio de educación nacional), se enfoca desde el constructivismo, donde el aprendizaje significativo es un concepto subyacente a este, el cual busca que el estudiante integre nuevos modelos mentales a experiencias anteriores y los pueda transferir a otros contextos. Sin embargo, en el aula es poco el rastro que se ve de la teoría constructivista en las diferentes actividades propuestas, en su lugar, se privilegia el aprendizaje tradicional, justificado por los docentes por diferentes razones, tales como, gran cantidad de temáticas, poco tiempo de clase y el excesivo número de estudiantes por grupo.

Preocupante también es la predisposición del estudiante al área de matemática, lo cual supone un reto para el docente quien debe buscar entornos que no solo busquen un aprendizaje significativo, sino que desde esa perspectiva cognoscitiva, atraiga al estudiante para que haya en él una inclinación a aprender. La atracción de los estudiantes se encamina hacia nuevas tendencias sociales, tales como, el Internet, los videojuegos y la televisión.

Consciente de esto, el MEN (2003b) propende por el uso de las tecnologías y de los medios en el aula, donde menciona que

> *"…todos los medios de comunicación, se convierten así en vehículos para acceder a la información y en herramienta fundamental para apoyar el cambio de rol de los maestros y los estudiantes, enriquecer los procesos de enseñanza, fortalecer los aprendizajes y transformar prácticas tradicionales."*

Sin embargo, es deber de los actores responsables en la enseñanza superar "la visión mágica de que la introducción de tecnologías mejora, por sí sola, a la educación"; más bien, debe repensarse en el rol del docente frente a la preparación de estrategias y modelos que le permitan al estudiante competencias propias del área dentro de ambientes virtuales, logrando así cerrar la brecha entre quienes saben utilizar las tecnologías digitales como quienes no lo saben (Cobo, 2010). El buen uso de las tecnologías permite al docente idear actividades en las cuales los estudiantes pueden recoger información, formular hipótesis, diseñar experiencias, plantear modelos matemáticos, analizar tablas y gráficos, obtener conclusiones, lo cual repercutirá en una verdadera comprensión de lo que se aprende.

Los ambientes virtuales por sí solos no generan un aprendizaje significativo, pero orientados por teorías pedagógicas pueden convertirse en un recurso para: verificar conocimientos previos de los estudiantes, realizar un organizador previo, estructurar una unidad de enseñanza potencialmente significativa y evaluar al estudiante. Por otra parte, el uso de la tecnología puede favorecer un aprendizaje centrado en el estudiante, lo cual a su vez facilitará la motivación, generando una disposición hacia el conocimiento matemático.

Por otro lado, en el proceso de aprendizaje de las funciones trigonométricas se ha encontrado que los estudiantes presentan deficiencias para apropiarse de conceptos y características de las mismas por lo menos en dos aspectos:

Gráficas de las funciones trigonométricas: estas son presentadas por el docente, en ocasiones en forma resumida para analizar sus características; por tanto, no son el producto de la construcción que pueda hacer el estudiante de a partir de una situación problema; a su vez, el estudiante presenta dificultades para asociar las transformaciones de las funciones seno y coseno a situaciones de modelado de un problema.

Aplicaciones: Se aplican las funciones trigonométricas únicamente a problemas estáticos de resolución de triángulos rectángulos y oblicuángulos, lo cual puede repercutir en el estudiante en que tenga una idea reducida sobre las funciones trigonométricas dejando de lado el estudio de fenómenos periódicos, de procesos dinámicos; esto, a propósito de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas donde menciona como estándar para los grados décimo-once “Describo y modelo fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas” (MEN, 2006).

Por todo lo anterior, este trabajo final de maestría pretende fortalecer el aprendizaje significativo de los estudiantes y por tal razón presenta una estrategia didáctica para la enseñanza de las funciones trigonométricas en los números reales enfatizando el uso de las nuevas tecnologías y la modelación matemática mediante un estudio de caso en la Institución Educativa Montecarlo-Guillermo Gaviria Correa, de Medellín.

Este documento se ha organizado de la siguiente manera: primero, se presenta un marco teórico que incluye la modelación matemática, el aprendizaje significativo y las nuevas tecnologías de la comunicación; segundo, un referente disciplinar donde se discriminan los contenidos matemáticos sobre los cuales se realizó la intervención; tercero, el diseño y la implementación de la estrategia didáctica la cual se llevó a cabo en el grado décimo de la Institución Educativa Montecarlo-Guillermo Gaviria Correa; cuarto las conclusiones que se desprenden del trabajo realizado y por último se presenta la bibliografía.

1.2 Problema de investigación

¿Cómo potenciar aprendizajes significativos de las funciones trigonométricas en los reales en los estudiantes de 10° de la I.E. Montecarlo - Guillermo Gaviria Correa, del municipio de Medellín?

1.3 Justificación

El aprendizaje de las matemáticas y el hacer de éste un proceso que envuelva activamente tanto a maestros como estudiantes ha sido objeto de reflexión tanto para pedagogos, investigadores de la educación y docentes. El Ministerio de Educación Nacional (MEN), por ejemplo, ha buscado maneras de mejorar la calidad de la educación desde los lineamientos curriculares, la promoción de buenas prácticas educativas en las aulas de clase y la verificación de los avances logrados desde las pruebas de estado.

Por tal razón, el MEN ha llevado a cada Institución los requerimientos mínimos de lo que debe aprender un estudiante y los criterios para determinar si es competente con su saber en diferentes contextos.

Pero más allá de los contenidos que se deben enseñar y la forma de evaluarlos, siguen existiendo problemáticas a las que se enfrentan muchos docentes, una de ellas es cómo realizar un proceso de enseñanza-aprendizaje que contribuya a potenciar el aprendizaje significativo en los estudiantes; otra problemática es utilizar eficazmente mediadores que sirvan para motivar el proceso de aprendizaje del estudiante, a la vez que permitan ilustrar fenómenos reales susceptibles de ser estudiados.

El trabajo de investigación que se ha planteado trae beneficios al proceso de enseñanza-aprendizaje, en tanto que busca un mejoramiento en el aprendizaje de las matemáticas desde la propuesta de una estrategia didáctica soportada en la modelación matemática y el uso de la tecnología, que como se ha mencionado, es de interés para los diferentes agentes involucrados en la educación.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo general

Diseñar e implementar una estrategia didáctica para la enseñanza de las funciones trigonométricas en los números reales para grado décimo mediante la modelación matemática y las TIC: Estudio de caso en el grupo 10° B de la Institución Educativa Montecarlo-Guillermo Gaviria Correa, del municipio de Medellín.

1.4.2 Objetivos específicos

- Identificar y caracterizar metodologías para la enseñanza de las funciones trigonométricas utilizando la modelación matemática y las TIC.
- Construir actividades de modelación matemática apoyadas con las Nuevas Tecnologías para la enseñanza de las funciones trigonométricas en los números reales.
- Aplicar las actividades propuestas por medio de un estudio de caso en el grupo 10° B de la Institución Educativa Montecarlo-Guillermo Gaviria Correa.
- Evaluar el desempeño de la estrategia didáctica planteada por medio del estudio de caso en los estudiantes del grupo 10° B de la Institución Educativa Montecarlo-Guillermo Gaviria Correa.

1.5 Metodología

La siguiente es la metodología que se desarrollará para la ejecución de este Trabajo Final de Maestría. La metodología se encuentra dividida en Fases, objetivos y Actividades, tal como se muestra en la Tabla 1-1Tabla 1-1.

Tabla 1-1 Metodología Trabajo final de maestría

FASE	OBJETIVOS	ACTIVIDADES
Fase 1: Caracterización	Identificar y caracterizar metodologías para la enseñanza de las funciones trigonométricas utilizando la modelación matemática y las TIC.	1.1. Revisión bibliográfica sobre el aprendizaje significativo para la enseñanza de las funciones trigonométricas en los números reales. 1.2. Revisión bibliográfica sobre la teoría de la modelación matemática para la enseñanza de las funciones trigonométricas. 1.3. Revisión bibliográfica de los documentos del MEN enfocados a los estándares en la enseñanza de las funciones trigonométricas, la modelación y la enseñanza de la matemática en grado decimo. 1.4. Revisión bibliográfica de herramientas TIC utilizadas para la enseñanza de las funciones trigonométricas.
Fase 2: Diseño e Implementación.	Construir actividades de modelación matemática apoyadas con las Nuevas Tecnologías para la enseñanza de las funciones trigonométricas en los números reales.	2.1. Diseño y construcción de actividades para evaluación de los preconceptos. 2.2. Diseño y construcción de guías de clase para la modelación de las funciones trigonométricas en los números reales. 2.3. Diseño y construcción de actividades didácticas utilizando las TIC para modelar matemáticamente las funciones trigonométricas.
Fase 3: Aplicación	Aplicar las actividades propuestas por medio de un estudio de caso en el grupo 10° B de la Institución Educativa Montecarlo-Guillermo Gaviria Correa.	3.1. Implementación de la estrategia didáctica de enseñanza propuesta.
Fase 4: Análisis y Evaluación	Evaluar el desempeño de la estrategia didáctica planteada por medio del estudio de caso en los estudiantes del grupo 10° B de la Institución Educativa Montecarlo-Guillermo Gaviria Correa.	4.1. Construcción y aplicación de actividades evaluativas durante la implementación de la estrategia didáctica propuesta. 4.2. Construcción y aplicación de una actividad evaluativa al finalizar la implementación de la estrategia didáctica propuesta. 4.3. Realización del análisis de los resultados

		obtenidos al implementar la estrategia didáctica en los estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Montecarlo-Guillermo Gaviria Correa.

1.6 Cronograma

La Tabla 1-2 presenta la planeación aproximada para este Trabajo Final de Maestría, la cual tendrá una duración de 16 semanas.

Tabla 1-2 Planeación Trabajo final de maestría

Actividades	Semanas															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Actividad 1.1	X	X														
Actividad 1.2		X	X													
Actividad 1.3		X	X													
Actividad 1.4			X	X												
Actividad 2.1				X	X	X	X									
Actividad 2.2				X	X	X	X									
Actividad 2.3				X	X	X	X									
Actividad 3.1						X	X	X	X	X	X	X	X			
Actividad 4.1												X	X	X		
Actividad 4.2												X	X	X		
Actividad 4.3															X	X

2 Marco Referencial

En esta sección se presenta el referente teórico sobre el cual se fundamentará este Trabajo Final de Maestría. Los conceptos teóricos que se abordarán en esta sección están organizados de la siguiente manera: referencia sobre estrategia didáctica, modelación matemática, aprendizaje significativo, y Tecnologías de la información y la comunicación en la enseñanza.

2.1 Marco Teórico

2.1.1 Sobre el concepto de Estrategia didáctica

La estrategia en el aula se vuelve necesaria ya que en el proceso de enseñanza y aprendizaje, y como producto de reflexión, el docente debe buscar transformar su quehacer desde: la planificación, la construcción y aplicación de actividades con propósitos y por último una evaluación que permita replantear y controlar el proceso.

Precisamente Diadenys (2010) define la estrategia didáctica en el campo pedagógico para realizar un cambio sobre la realidad del aula; señala que

"la estrategia es la manera de planificar y dirigir las acciones y recursos necesarios para alcanzar determinados objetivos claves a través de la determinación de metas y objetivos a largo, mediano y corto plazo[...] La Estrategia Didáctica permite definir qué hacer para transformar la acción existente e implica un proceso de planificación que culmina en un plan general con misiones organizativas, metas, objetivos básicos a desarrollar en determinado plazo con recursos mínimos y los métodos que aseguren el cumplimiento de dichas metas."

Además, Rosser (1995) señala la estrategia desde la perspectiva didáctica como "una secuencia ordenada y sistematizada de actividades y recursos que los profesores utilizamos en nuestra práctica educativa". Es el docente quien, viendo una necesidad, se marca como objetivo superarla mediante un cambio en la rutina, en el esquema usado, realizando para tales efectos la construcción y aplicación de un conjunto de herramientas claves que obedecen a unos principios metodológicos, teorías de aprendizaje -adecuadas a los ejes temáticos- , grupo al que se dirige y el momento del proceso de enseñanza-aprendizaje.

2.1.2 Modelación matemática

La modelación matemática se abre espacio entre diferentes propuestas pedagógicas de corte cognitivo, que busca más que la mera transmisión de contenidos, que propende por un método de enseñanza que genere conocimientos significativos y habilidades para aplicar y socializarlos. Los investigadores en modelación matemática, Salett y Hein (2006), definen la Modelización Matemática como:

"El arte de traducir un fenómeno determinado o problemas de la realidad en un lenguaje matemático: el modelo matemático".

"Un modelo matemático de un fenómeno o situación problema es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que traducen, de alguna manera, un fenómeno en cuestión o un problema de la realidad".

Esta propuesta parte de la búsqueda de solucionar un problema que requiere una formulación matemática. De esta manera un modelo puede retratar, "aunque con una visión simplificada, una situación investigada" (Biembengut, 1997).

Es necesario tener en cuenta que el fin de la modelación matemática no es enseñar la modelización en las Instituciones educativas, sino el enseñar matemáticas a través de este método (Bassanezi, 1997).

En 2007, Arzarello menciona algunos ejemplos de actividades que propenden por la modelación en el proceso de enseñanza:

- Analizar un gráfico y responder preguntas sobre patrones de acuerdo a los puntos coordenados
- Medir la longitud de objetos con diferentes herramientas (regla, metro, etc) y encontrar regularidades
- Representar datos en tablas o gráficos usando herramientas tecnológicas

- Construir modelos de un fenómeno conociendo la tasa de cambio como cociente de dos variables
- Realizar estimaciones numéricas a partir de una situación dada
- Probar estadísticamente un modelo existente
- Solucionar problemas
- Realizar simulaciones

En un proceso de modelación matemática se comienza desde la escogencia de un tema pertinente y sobre este la formulación de preguntas. La búsqueda de respuestas por parte del estudiante debe ser mediante el uso de un "conjunto de herramientas matemáticas y de la investigación sobre el tema". De esta manera el alumno es capaz de "construir conocimientos significativos, sea en forma de conceptos matemáticos, sea sobre el tema que se estudia" (Hein, 2006).

- **¿Por qué modelación matemática?**

En los últimos años se han notado esfuerzos en la pedagogía por dejar a un lado el enfoque teórico en la enseñanza de las matemáticas y privilegiar su aplicación. Por tal razón, la modelación matemática muestra la actividad científica del matemático, quien, desde problemas concebidos en la cotidianidad promueve la construcción e interpretación de modelos, "con el ánimo de construir un concepto matemático dotado de un significado, y con la intención de despertar una motivación e interés por las matemáticas, debido a la relación que esta área del conocimiento tiene con los problemas del contexto real de los estudiantes" (Villa, 2009).

Los argumentos que se han utilizado para justificar y sugerir la creación de un espacio para entrar en actividades de modelización matemática en la estructura currículo de Matemáticas se muestran en la Tabla 2-1 (Almeida, 2004).

Tabla 2-1. Justificación sobre pertinencia de la modelación matemática

Justificación	Lo que propicia en el estudiante
El desarrollo de los aspectos sociales.	Producto de la interacción de diferentes individuos con sus pares al analizar una situación particular desde diferentes perspectivas. Las actividades llevadas a cabo

	en grupos puede permitir el desarrollo de un sentido de responsabilidad, autoestima, cooperación y criticidad.
El reconocimiento del papel de las matemáticas en la sociedad.	Las matemáticas se han utilizado como argumento para hacer sugerencias y soluciones a problemas políticos y sociales. Por lo tanto, es importante que cada individuo conozca y reconozca el importante papel que las matemáticas han logrado en la vida, tanto en el ámbito académico, profesional y social. "si la matemática es tan importante en la sociedad parece natural que la enseñanza de las matemáticas lo demuestre" (Niss, 1992).
Adquisición de los conceptos matemáticos y su Aplicaciones.	Cuando el estudiante no ha tenido la oportunidad durante su vida académica de participar activamente en la formulación y solución problemas, recolección de datos, sugerencia de hipótesis, tendrá menos posibilidades de enfrentarse con éxito a problemas encontrados en su vida profesional. La modelación matemática de una actividad puede apoyar a los estudiantes en la adquisición y comprensión de los contenidos matemáticos, promociona acciones y habilidades que estimulan la creatividad y la solución problemas, además de tener un papel motivador.
Desarrollo del conocimiento reflexivo.	Se considera necesario desarrollar una competencia crítica en los alumnos que les permita hacer frente a lo social y a la tecnología que esta presenciando. El conocimiento reflexivo se refiere a reflexionar sobre el uso de las matemáticas y como evaluarlo.
Procesos cognitivos desarrollados por los estudiantes	Si el concepto se construye a través de un proceso desde la observación, recolección de datos, demanda de soluciones y toma decisiones, será recordado con facilidad cuando sea necesario. Algunos aspectos cognitivos encontrados en prácticas en el aula, desarrollados por grupos de estudiantes son: Comprensión de situaciones extra-matemáticos, asignación de significados a los aspectos matemáticos, aplicación del conocimiento, introducción de nuevas conceptos, desarrollando sus propias estrategias.

Dada la pertinencia de la modelación matemática para promover habilidades y competencias, a continuación se explicará sobre cómo llevarla al aula como método de enseñanza.

- **Modelación como método de enseñanza**

La modelación matemática se puede trabajar en el aula para aprender a hacer investigación o como modelación de un tema a enseñar.

La modelación vista como método de enseñanza "proporciona al alumno una mejor aprehensión de los conceptos matemáticos, capacitación para leer, interpretar, formular y resolver situaciones-problemas, así como despertar el sentido crítico y creativo" (Hein, 2006).

El papel del docente es en dos sentidos: el primero es el de planear un contenido programático a partir de modelos matemáticos aplicados a las diferentes áreas del conocimiento y segundo orientar al estudiante para que efectúe la modelación. Este método consta de las siguientes etapas, que se muestran en la Tabla 2-2 (Biembengut, 2004):

Tabla 2-2. Etapas de la modelación matemática

ETAPA	Descripción de lo que realiza el docente
Exposición del tema	La clase comienza con una breve explicación del asunto a tratar, invitando a los estudiantes a formular preguntas sobre el mismo.
Delimitación del problema	Selecciona las preguntas que guíen el contenido.
Formulación del problema	Plantea el problema, construcción de la hipótesis, planteamiento de ecuaciones u organización de datos de acuerdo a la resolución requerida.
Desarrollo del contenido programático	Presentación del contenido (concepto, definición, propiedad, etc.) estableciendo conexión con la pregunta que generó el problema.
Presentación de ejemplos análogos	Presenta ejemplos análogos, amplía el abanico de aplicaciones, de tal manera que el contenido no se restringe al tema o problema presentado. Además, es importante el estímulo y orientación para el uso de la tecnología que es parte de la práctica diaria, tales como calculadoras o computadoras.
Formulación de un modelo matemático y resolución del problema a partir del modelo	Propone al estudiante que regresen al problema inicial y lo resuelva.
Interpretación de la solución y validación del modelo.	Insta al estudiante a validar el resultado obtenido. Esta etapa permite al estudiante una mejor comprensión o

	discernimiento de los resultados obtenidos.

Sobre estas etapas de la modelación cabe precisar varios asuntos mencionados por Villa (2010):

- La noción de que una situación es sacada de la realidad incluye la naturaleza, la sociedad, la vida cotidiana y otras disciplinas científicas, pero, no significa necesariamente que sea externa a la matemática pues ésta es parte de la realidad sesgada en la que estamos inmersos.
- Dentro del proceso de llevar un problema real a la matemática, demandará "actividades de simplificación y estructuración buscando una delimitación y precisión de la situación o problema".
- Para validar el proceso es necesario que los resultados matemáticos puedan "ser traducidos nuevamente al contexto de donde fueron derivados para realizar un proceso de interpretación".

2.1.3 Aprendizaje significativo

La teoría nace del constructivismo, en el cual se privilegia la construcción de significados que realiza el estudiante modificando sus conocimientos previos, introduciendo nuevos elementos y estableciendo relaciones entre dichos elementos. En resumen, el aprendizaje significativo posibilita la apropiación de núcleos temáticos integrados de conocimiento que tengan sentido y relación.

El punto de partida de la construcción que hace el estudiante es el antecedente conceptual sobre el tema a tratar; sobre esto Ausubel menciona que "el factor aislado más importante que influye en el aprendizaje es aquello que el aprendiz ya sabe. Averígüese esto y enséñese de acuerdo con ello" (Díaz, 2010).

Igualmente es importante la relación no arbitraria y sustancial entre los temas abordados, es decir, que el material o contenido de aprendizaje debe presentarse desde ideas que sean capaces de aprenderse y puede ser expresado de maneras distintas y transmitirá el mismo significado. Si los contenidos o materiales no tienen significado lógico potencial para el estudiante se propiciará un aprendizaje rutinario y carente de significado.

También se debe tener en cuenta que los contenidos escolares deben presentarse de manera organizada, interrelacionados y jerarquizados, y no como datos aislados y sin orden; dicha presentación debe hacerse con el soporte de materiales didácticos.

Otro aspecto a tener en cuenta es que el alumno es responsable de su proceso de estudio, por tal razón el docente debe motivar su participación activa para aumentar el significado potencial de los materiales educativos.

Finalmente, se debe evaluar la significatividad de los aprendizajes, teniendo en cuenta que la evaluación es parte integral de una buena enseñanza. Siendo una actividad necesaria, puede aportar al docente un mecanismo de autocontrol para regular y conocer los problemas y aciertos que afectan el proceso de aprendizaje.

A continuación se mencionarán algunas características de la evaluación en el aprendizaje significativo:

La evaluación formativa ocupa un lugar importante en el aprendizaje significativo, la cual, desde el enfoque constructivista, debe estar inmersa desde los objetivos del área, no puede estar aislada del proceso educativo, debe procurar la significatividad del aprendizaje teniendo en cuenta el nivel inicial del estudiante y debe servir para verificar el progreso del estudiante, sin olvidar que su finalidad es la regulación del aprendizaje.

Dentro de las características de la evaluación formativa en el aprendizaje significativo Díaz (2005) destaca los siguientes:

- **Integradora**: busca la armonía y coherencia del proceso de enseñanza-aprendizaje, es decir, entre los objetivos, contenidos y criterios de evaluación. El docente debe responder a preguntas como qué evaluar, cuál es la finalidad, cuáles son los instrumentos adecuados y cómo evaluarlos.

- **Diversificada**: utiliza diferentes instrumentos y medios. El docente planifica diferentes tipos de actividades; esto con el fin de permitir diferentes abordajes que lleven al estudiante a la construcción de una red conceptual amplia sobre la temática tratada.

- **Actividad continua y sistemática:** sigue el mismo camino que el proceso de enseñanza permitiendo contrastar resultados. En cuanto a lo continuo, el docente debe realizar seguimiento constante del trabajo del estudiante, para medir no solo el conocimiento adquirido sino también su desempeño alcanzado; esto no excluye una prueba final. En cuanto a que sea sistemática, por cuanto la toma de resultados debe ser fiable, válida para los actores del proceso, que permita formar juicios de valor y, posteriormente, tomar decisiones en dos sentidos: al docente, para reorientar su proceso de enseñanza y al estudiante para reflexionar sobre su progreso.
- **Recurrente:** permite la retroalimentación. Es un momento que permite al estudiante la reflexión sobre los resultados obtenidos detectando aciertos y dificultades, logrando así la posibilidad de mejorar.
- **Formativa:** asegurando que los alumnos aprendan y progresen. Esto solo es posible si el docente conoce las necesidades de cada estudiante, para ello debe indagar sus saberes previos mediante un diagnóstico en la fase inicial del proceso, después realizar orientación del proceso y, por último, análisis de resultados que arrojen elementos que le lleven a determinar si hubo el nivel de aprendizaje alcanzado.

2.1.4 Tecnologías de la información y la comunicación en la enseñanza

Las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) son un término que agrupa a las técnicas y los mecanismos utilizados en el tratamiento y la transmisión de la información. El modelo social actual se ve afectado por el desarrollo de las tecnologías de la información el cual se evidencia en la vida cotidiana de las personas.

Dentro de las ventajas de la implementación de las TIC se cuentala flexibilidad del tiempo y del espacio, ya que permiten un ahorro temporal y de desplazamiento, lo cual lleva a la realización de actividades continuadas por parte del docente invirtiendo mayor cantidad de espacio y tiempo en el análisis de las situaciones.

Sin embargo, la incorporación de las TIC en el aula debe responder al para qué (finalidad) y al cómo (implementación), para potenciarlas al máximo.

La finalidad de las Nuevas tecnologías en la educación, según Coll (2010), es “contribuir a la mejora de las prácticas educativas, con la aportación de nuevos recursos metodológicos que promuevan el aprendizaje del alumnado y faciliten la labor docente del profesorado”.

Pons (2010), menciona que, en cuanto a las estrategias de implementación es adecuado preguntarse por las características de buenas prácticas pedagógicas en el uso de la tecnología; de esta manera se pueden utilizar como:

- Una manera de modelizar y ejemplificar un trabajo a realizar, dando resultados satisfactorios. Esto le permite al estudiante avanzar en un contexto específico
- Herramienta que permite la construcción del conocimiento y la toma de decisiones sobre el mismo
- Configuración de nuevos entornos de enseñanza- aprendizaje
- Promoción de otros tipos de actividades educativas
- Fomento de estrategias de trabajo colaborativo

A continuación se describen algunas de estas herramientas tecnológicas como su incidencia en la educación formativa.

- **La internet**

La Internet es una red de conexiones, que permite a un conjunto de computadoras compartir una cantidad de contenidos; es una red informática descentralizada ya que no está en un lugar físico. Millones de usuarios a través de un módem o banda ancha acceden a información en millones de páginas. Las páginas ofrecen información de carácter personal, educativo y sobre negocios (Amar, 2006).

A través de internet se pueden desarrollar conversaciones en línea, transferencias de archivos. Enviar y recibir correos electrónicos, mensajería instantánea entre otras utilidades. En el campo educativo la Internet se ha convertido en una herramienta útil al servicio del proceso de enseñanza.

- **Sistemas de Gestión de Aprendizaje**

Los sistemas de gestión de aprendizaje o LMS por sus siglas en inglés, son programas instalados en un servidor que es empleado para administrar cursos y tener control de actividades formativas en línea. Su principal objetivo es permitir la gestión de temas creados por diferentes fuentes. Sobre esto existen dos tipos:

- Sistemas propietarios: WebCt, Blackboard, Catedr@
- Sistemas Libres: ATutor, Docebo, Claroline, Dokeos, Moodle

Nos vamos a centrar en Moodle, por ser una de las herramientas tecnológicas que más utiliza actualmente.

El LMS más utilizado a nivel mundial es Moodle, la cual es una herramienta al servicio de la educación que permite al docente la gestión de cursos interactivos en un entorno de aprendizaje virtual. Es una aplicación web gratuita donde los educadores pueden crear sitios de aprendizaje. Esta herramienta promueve el aprendizaje teniendo en cuenta el ritmo del estudiante y la rigurosidad del tema. A continuación se mencionan algunos aportes de Moodle a la enseñanza como espacio de:

- Presentación de temáticas a través de notas, videos y documentos
- Expresión, donde se privilegia la opinión y el debate de contenidos gracias a la utilización de los foros, chat y mensajería
- Trabajo mediante recursos que permiten acceder, realizar y entregar tareas al docente
- Construcción en equipo, logrando la creación y organización de grupos para la investigación en torno a un contenido formativo

- **Laboratorio de matemáticas**

Dentro de la justificación de las matemáticas como área necesaria en la enseñanza básica secundaria está: que cumple con uno de los objetivos de la ley 115 de 1994, a saber:

El desarrollo de las capacidades para el razonamiento lógico, mediante el dominio de los sistemas numéricos, geométricos, métricos, lógicos, analíticos, de conjuntos de operaciones y relaciones, así como para su utilización en la interpretación y solución de los problemas de la ciencia, de la tecnología y los de la vida cotidiana

Para lograr lo anterior, la enseñanza de las matemáticas debe estar marcada por actividades experimentales, dirigidas a la construcción de significados de objetos matemáticos que lleven al dominio de los sistemas numéricos; esta actividad se asemeja a los laboratorios matemáticos, los cuales Chapman (2008) define como "Un laboratorio de matemáticas es una metodología basada en varias actividades estructuradas, y dirigida hacia la construcción de significados de objetos matemáticos". Las actividades de laboratorio permiten a los estudiantes aprender "haciendo, viendo, imitando y comunicándose con otros, es decir, practicando". De esta manera se entretejen alumnos, estructuras mentales, ideas y la movilización del pensamiento.

Una de las herramientas que permite la actividad experimental en el aula es Geogebra, el cual es de uso libre para la enseñanza de las matemáticas. Con esta herramienta se favorece el trabajo dinámico y el conjunto de los pensamientos numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional, propuestos por el MEN para potenciar el pensamiento matemático.

La exploración dinámica ayuda a construcciones geométricas desde diferentes comandos para representar diferentes objetos matemáticos organizados en planillas, tablas y hojas de datos vinculadas. Las representaciones elaboradas van desde gráficas, tratamiento algebraico hasta el cálculo de funciones reales como sus derivadas e integrales.

- **PhysicsSensor ®**

Es una Plataforma hardware-software que permite la implementación de recursos basados en las TIC para potenciar los laboratorios de enseñanza de la física (y en general de las ciencias naturales) con muy baja inversión; es desarrollada por docentes de la Escuela de Física de la Universidad Nacional de Colombia sede Medellín. Se distribuye de forma gratuita el software y se presenta las hojas técnicas que permiten la reproducción del hardware. Adicionalmente se dispone de un buen número de tutoriales y guías de laboratorio (Aristizábal, 2014).

Mediante PhysicsSensor es posible la representación virtual de situaciones reales para el estudio del movimiento periódico. Por medio de instrumentación electrónica y análoga es posible medir las variables físicas de un fenómeno que posteriormente será graficado para su análisis. Es importante señalar que su contribución a la enseñanza se desprende de la posibilidad de hacer simulaciones de prácticas manipulativas en la pantalla del computador (Aristizábal, et al., 2013).

- **That Quiz**

Es un portal web que permite al docente la realización de pruebas virtuales. Los resultados de las pruebas que resuelven los estudiantes, se pueden observar inmediatamente y analizar las estadísticas del desempeño en las pruebas.

El docente puede crear ejercicios prediseñados y configurar opciones como el largo de la prueba, nivel de dificultad y duración de la prueba. También puede crear una clase (o grupo), listar grupos de estudiantes, diseñar sus propias pruebas y asignarlas mediante un código que se le entrega a los estudiantes.

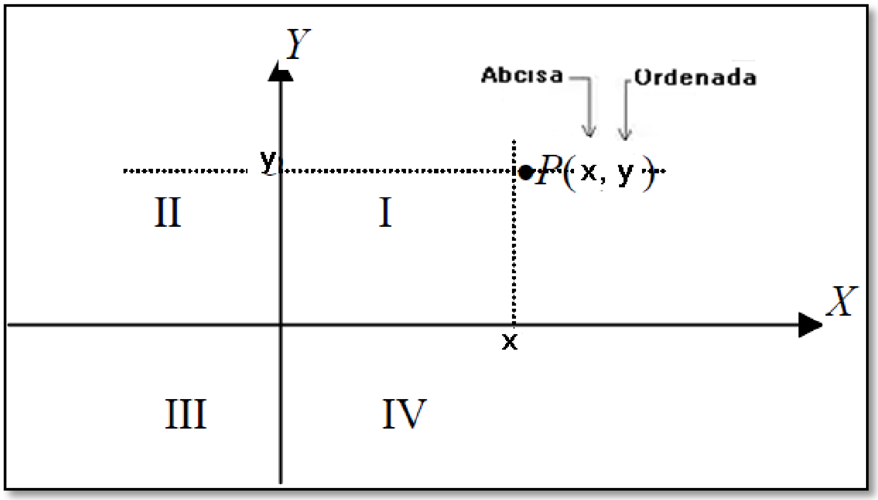
2.2 Marco Disciplinar y Conceptual

2.2.1 Sistema de Coordenadas cartesianas rectangulares

El método de coordenadas para indicar la posición de un punto, ya sea en el plano o el espacio, comenzó a utilizarse por el matemático René Descartes, debido a esto se deriva el nombre de coordenadas cartesianas.

Dado un plano coordenado con sus respectivos ejes, para ubicar un punto se establece una biyección entre los puntos P del plano R^2 y los pares ordenados (x,y) de números reales, donde a cada par ordenado le corresponde un único punto P del plano. En Figura 2-1 se observa un punto coordenado en un plano cartesiano.

Figura 2-1 Coordenadas cartesianas



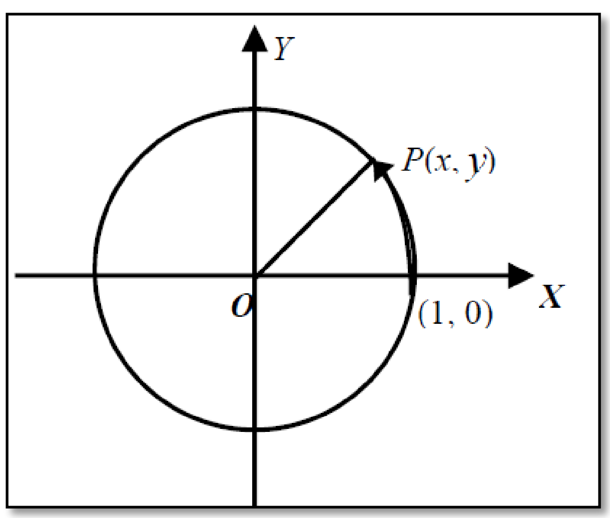
2.2.2 Circunferencia unitaria

En una circunferencia con centro en el origen y radio 1, cuyos puntos P (x,y) $\epsilon \ R$ y su ecuación es

$$x^2 + y^2 = 1$$

Su gráfica se presenta en la Figura 2-2

Figura 2-2 Gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = 1$



2.2.3 Funciones trigonométricas

Una función es una regla que asigna a un número real otro número real. A partir de la circunferencia unitaria se pueden definir las funciones trigonométricas. Para determinar un punto sobre la circunferencia o punto terminal P(x,y) se realiza un movimiento formando un ángulo t respecto al eje X, contrario a las manecillas del reloj si el ángulo t es positivo y en dirección de las manecillas si t es negativo. Con las coordenadas del punto terminal se definen varias funciones. A cada número real t le corresponde un único punto P (x,y) sobre el círculo unitario. (Sullivan, 1997). Sin importar el número t que se escoja, siempre habrá un punto P que le corresponda sobre la circunferencia.

De esta manera se definen las seis funciones trigonométricas, las cuales se resumen en la Tabla 2-3.

Tabla 2-3. Definición de las funciones trigonométricas en la circunferencia unitaria

Función seno	Función coseno	Función tangente
$sen\, t = y$	$cos\, t = y$	$tan\, t = \frac{y}{x} (x \neq 0)$
Función cotangente	Función secante	Función cotangente
$\csc t = \frac{1}{y} (y \neq 0)$	$\sec t = \frac{1}{x} (x \neq 0)$	$Cot\, t = \frac{x}{y} (y \neq 0)$

2.2.4 Propiedades de las funciones trigonométricas

Sobre las funciones trigonométricas se tienen algunas propiedades que las caracterizan. A continuación se muestran 3 de ellas

1. Para un ángulo perteneciente a los reales se cumple que:

$$Sen(-\theta) = -sen(\theta);\ es\ decir, lafunciónsenoesfunciónimpar$$

$$Cos\ (-\theta) = Cos\ (\theta);\ es\ decir, la\ función\ coseno\ es\ función\ par$$

$$Sen\ (\theta + \pi) = -sen\ (\theta)$$

$$Cos\ (\theta + \pi) = -Cos\ (\theta)$$

2. Las funciones trigonométricas son periódicas

$$El\ período\ de\ las\ funciones: seno, coseno, secante\ y\ cosecante\ es\ 2\pi$$

$$El\ período\ de\ las\ funciones: tangente\ y\ cotangente\ es\ \pi$$

3. Dos ángulos son complementarios si suman 90º. El valor de una función trigonométrica es igual al valor de la cofunción correspondiente de su ángulo complementario, esto se puede expresar:

$$Cos\ \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = Sen(\theta)$$

$$Sen\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = Cos(\theta)$$

$$Tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = Cot(\theta)$$

$$Sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = Csc(\theta)$$

2.2.5 Gráficas de las funciones seno y coseno

- **Función Seno**

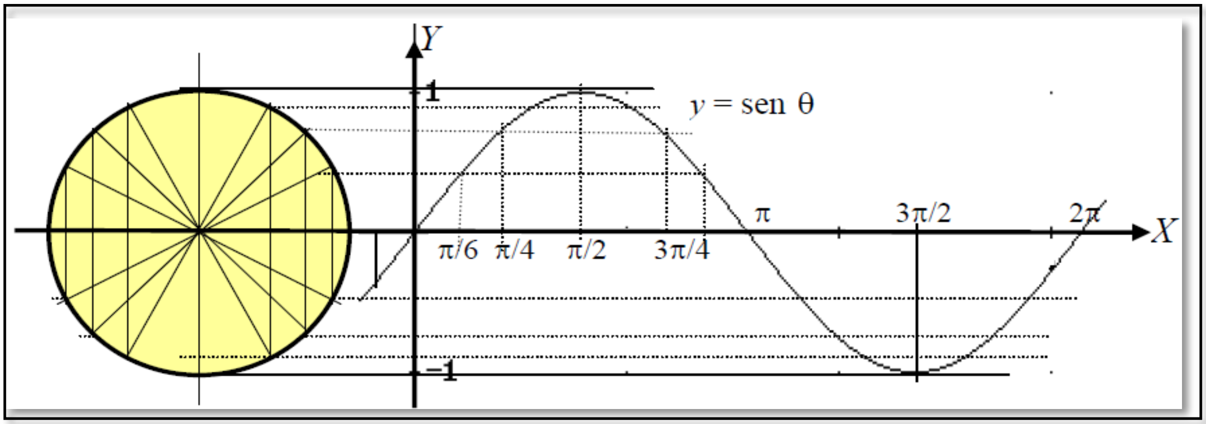
Además de las propiedades antes mencionadas, las características de la función $y = sen\theta$ son:

La función está definida para todos los números reales, por tal razón, su dominio es $\mathbb{R}$.

El valor mínimo de la función es -1 y el máximo es 1; por tanto su rango es $\{y\ \epsilon\ \mathbb{R}/-1 \leq y \leq 1\}$

Su gráfica se presenta en la Figura 2-3

Figura 2-3 Gráfica de la función y=senθ



La función es creciente en los cuadrantes I y IV y decreciente en los cuadrantes II y III.

- **Función coseno**

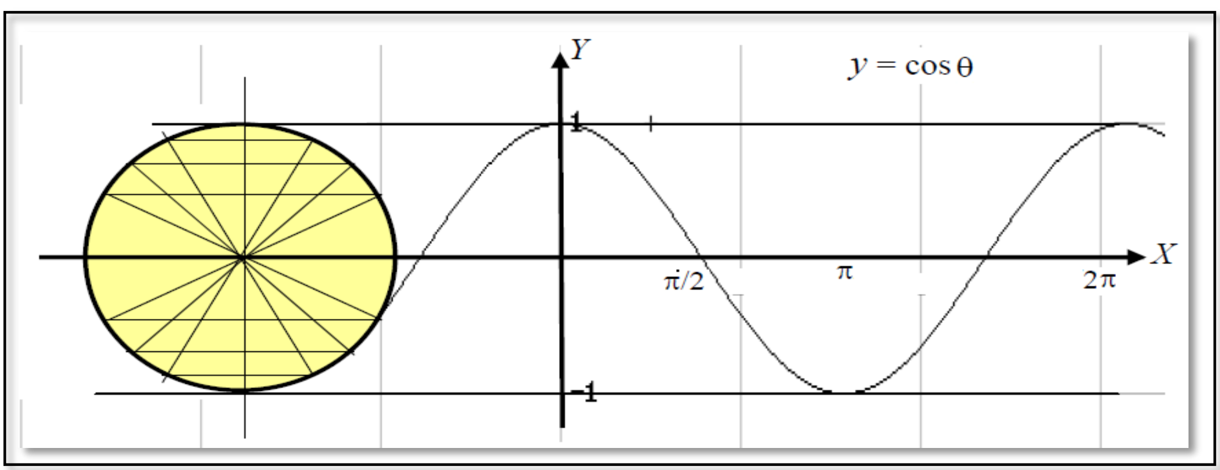
Además de las propiedades antes mencionadas, las características de la función $y = cos\ \theta$ son:

La función está definida para todos los números reales, por tal razón, su dominio es $\mathbb{R}$.

El valor mínimo de la función es -1 y el máximo es 1; por tanto su rango es $\{y\ \epsilon\ \mathbb{R}/-1 \leq y \leq 1\}$

Su gráfica se representa en la Figura 2-4

Figura 2-4 Gráfica de la función y=cosθ



La función es creciente en los cuadrantes III y IV y decreciente en los cuadrantes I y II.

2.2.6 Generalización de las funciones seno y coseno

Las gráficas de las funciones seno y coseno son curvas de la forma $y = a\, sen\, (bx + c)$ e $y = a\, cos\, (bx + c)$, donde a, b y c en $\mathbb{R} - \{0\}$; sobre esto se precisa que:

- $|a|$ es la amplitud, $\frac{2\pi}{|b|}$ es el período
- El desplazamiento de fase y el intervalo de la ecuación donde se encuentra el período se puede calcular resolviendo las ecuaciones resolviendo las dos ecuaciones siguientes: $bx + c = 0$ y $bx + c = 2\pi$.

Es interesante observar cómo a, b y c afecta a la gráfica inicial de seno o coseno, según sea el caso.

Ejemplo:

Calcular la amplitud, el período y el desplazamiento de fase de $y = 2sen(3x + \frac{\pi}{2})$

La ecuación es de la forma $y = a\, sen\, (bx + c)$, donde a=2, b=3 y c= $\frac{\pi}{2}$

$\therefore |a| = 3$, e período es $\frac{2\pi}{|3|}$ y el desplazamiento de fase se obtiene así:

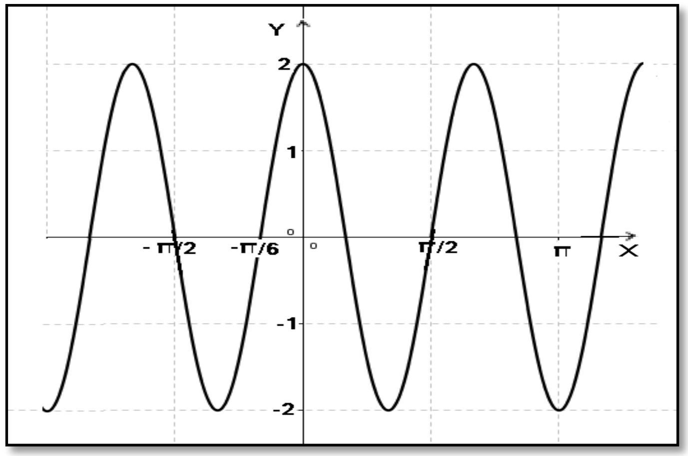
$3x + \frac{\pi}{2} = 0$ y $3x + \frac{\pi}{2} = 2\pi$.

Al despejar, se obtiene

$x = -\pi/6$ y $x = \pi/2$.

De lo anterior se concluye que la ecuación corresponde a una onda sinusoidal de amplitud 2, tiene un desplazamiento de $-\pi/6$, y el período o ciclo se da en el intervalo $[-\pi/6\, ,\pi/2]$, el cual se puede repetir a izquierda y hacia la derecha, según se muestra en la Figura 2-5.

Figura 2-5 Gráfica de la función f(x) = 2sen(3x + π / 2)



Es importante el análisis de estas ecuaciones ya que son utilizadas en el estudio de fenómenos ondulatorios, radiaciones infrarrojas y ultravioleta y vibraciones entre otros.

2.3 Marco Legal

2.3.1 Estándares básicos

Los estándares básicos de calidad fueron creados por el MEN en su búsqueda para que los estudiantes del país sean competentes, reciban la educación adecuada y evaluarlos en sus aciertos y dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Al respecto, el MEN (2003a) define los estándares como “criterios claros y públicos que permiten conocer cual es la enseñanza que deben recibir los estudiantes. Son el punto de referencia de lo que un estudiante puede estar en capacidad de saber y saber hacer, en determinada área y en determinado nivel”.

Los estándares básicos dan los lineamientos sobre lo que se espera lograr con los estudiantes para todos los grados. Específicamente, en los grados décimo y undécimo sobre las funciones trigonométricas, los lineamientos expresan en tres de los cinco pensamientos los propósitos del aprendizaje:

- Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos: Modelar situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas.

- Pensamiento espacial y sistema geométrico: Describir y modelar fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas.
- Pensamiento numérico y Sistemas numéricos: Establecer relaciones y diferencias entre diferentes notaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada.

Cabe resaltar que el espíritu de los estándares no es la enseñanza de un contenido matemático como tal, sino que el estudiante aprenda lo que le sea pertinente para la vida y "de esta manera pueda aplicar estos saberes en su cotidianidad para la solución de problemas nuevos" (MEN, 2003a).

2.3.2 La modelación en los lineamientos curriculares

Los lineamientos curriculares del MEN (1998) organizan el currículo en tres aspectos como son: procesos generales, conocimientos básicos y contexto. Dentro del primero está la modelación junto a la comunicación, elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.

Además, en estos lineamientos se plantea un trabajo sistémico para abordar el inicio y fortalecimiento de los pensamientos matemáticos; uno de estos es el pensamiento variacional, que propone superar la fragmentación de contenidos matemáticos, a la vez que permite "analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas donde la variación se encuentre como sustrato de ellas" (MEN, 1998).

De acuerdo con ello, la modelación matemática permite el tránsito de problemas reales al mundo matemático para su formulación, interpretación y solución.

El MEN describe la modelación como una estrategia de matematización, precisando que debe partir de una situación problemática actual, "debe ser simplificada, idealizada, estructurada, sujeta a condiciones y suposiciones, y debe precisarse más, de acuerdo con los intereses del que resuelve el problema", el modelo matemático debe ser producto de los datos, conceptos, condiciones y suposiciones del problema inicial y en la resolución de este se deben revisar los ejemplos y sacar conclusiones, aplicando "métodos y resultados matemáticos conocidos, como también desarrollando otros nuevos” y, por último, validar los resultados y llevarlos nuevamente al mundo real para justificar el propósito por el que fueron construidos (MEN, 1998).

2.3.3 Lineamientos en TIC

El uso de las TIC en la enseñanza ha cobrado importancia en los últimos años para los agentes que intervienen en la educación, representados en el Estado, la sociedad y la familia.

El Plan Nacional Decenal de Educación 2006-2016 (2006), presenta en sus lineamientos en TIC los siguientes objetivos:

- Dotación e infraestructura: como apoyo a los procesos educativos pedagógicos se debe dotar y mantener infraestructura tecnológica en las Instituciones educativas.
- Fortalecimiento de procesos pedagógicos a través de las TIC: como mediador que permita fortalecer procesos pedagógicos que reconozcan la transversalidad curricular del uso de las TIC, apoyándose en la investigación pedagógica.
- Formación inicial y permanente de docentes en el uso de las TIC: como estrategia de formación, promoviendo la investigación y la competencia en estrategias interactivas de los orientadores pedagógicos.

2.3.4 Contexto regional y local

La Asamblea departamental de Antioquia, aprobó en la ordenanza 14 (2012), el plan de desarrollo departamental para los años 2012-2015, donde se muestra el programa de gobierno Antioquia la más educada, que muestra las líneas de pensamiento y de acción para los años en mención. En la línea estratégica “La educación como motor de transformación de Antioquia” señala

> Antioquia busca tener más y mejores bachilleres mediante el desarrollo profesional de sus docentes, en el diseño y utilización de nuevas estrategias didácticas apoyadas en el uso de las TIC, con la implementación y fortalecimiento de las mesas de trabajo y semilleros en las diferentes áreas, con especial énfasis en matemáticas y lengua castellana, con el desarrollo de programas de orientación vocacional, profesional, emprendimiento y proyecto de vida, así como el desarrollo de las competencias ciudadanas, el mejoramiento de los ambientes de aprendizaje en las instituciones educativas de la media, la oferta de modelos educativos flexibles y estrategias

pertinentes que faciliten el acceso y permanencia de los adolescentes y jóvenes en el sistema educativo y la entrega de incentivos que mejoren la retención escolar.

Según lo expuesto, se propicia la enseñanza de las matemáticas y el uso de las TIC como estrategia didáctica, a fin de promover la educación de calidad, la retención escolar y el desarrollo de competencias ciudadanas. Además, en el componente Educación de calidad para el siglo XXI se señala el uso y apropiación de TIC en la Educación para aprovechar los avances del departamento en dotación y equipamiento para la conectividad, mostrando así su aporte a la educación media mientras se favorece la formación profesional integral, la educación superior y la formación para el trabajo y el desarrollo humano.

A nivel local se destaca el acuerdo N° 7 (2012), mediante el cual se adopta el plan de desarrollo Medellín: un hogar para la vida. En este se evidencia la importancia de la educación en el programa del gobierno municipal al trazarse como objetivo “Garantizar el derecho fundamental a la educación inclusiva propiciando el acceso y la permanencia a la población en edad escolar”.

Sin embargo, en su diagnóstico local muestra que “la educación convencional no logra interesar a las y los estudiantes, y las deficiencias de los ambientes de aprendizaje […] son factores que intervienen en la calidad de la educación.” Por tal motivo se propone el programa: ambientes escolares y tecnológicos para ciudadanos del mundo, donde se señala la importancia de las TIC para brindar mejores ambientes de aprendizaje, mejorando las prácticas en el aula para la transformación de la Escuela.

3 Diseño e Implementación de la Estrategia Didáctica Propuesta

La modelación matemática mediada por el uso de las tecnologías permitió realizar la intervención de la estrategia propuesta en el grupo 10° B en la enseñanza de las funciones trigonométricas.

A continuación se muestran los mediadores utilizados en la estrategia didáctica, la descripción de los grupos con los que se midió la estrategia y se describe cómo se realizó el diseño y la implementación aplicando las etapas de la modelación matemática a los ejes temáticos Función Seno, Función coseno y Generalización de las funciones seno y coseno, a la vez que se muestra cómo las actividades preparadas sirvieron de soporte para la ejecución de la estrategia.

3.1 Mediadores y Herramientas TIC

Una estrategia didáctica debe valerse de instrumentos eficaces que permitan al docente acercar el conocimiento científico al estudiante. A este respecto, Espinosa (2009), menciona que "Los mediadores se conciben como el puente entre el conocimiento del docente y el conocimiento del estudiante". Además, en cuanto al papel formativo de los mediadores, Daniel Prieto (Álvarez, 2004) menciona: "es pedagógica aquella mediación capaz de promover y acompañar el aprendizaje de nuestros interlocutores, es decir, promover en los otros la tarea de construirse y apropiarse del mundo y de sí mismos".

Dado lo anterior, para la estrategia propuesta se utilizaron como mediadores y herramientas, entre otros, la rueda de Chicago a escala, el software Geogebra ®, la plataforma Moodle ®, el portal web Thatquiz ®, PhysicsSensor ® y las guías de actividades.

La rueda de Chicago se construyó de tal manera que los estudiantes pudieran armar las partes para poder realizar los cálculos. Cada rueda consta de 2 discos, una base, sillas, tornillos, un palo que sirve como eje y un transportador para facilitar la ubicación de los diferentes ángulos cuando se toman medidas de altura o distancia horizontal.

El software Geogebra® y PhysicsSensor® se utilizaron como laboratorios virtuales para facilitar el análisis de funciones; como sistemas de gestión de aprendizaje se utilizó Moodle® y como uno de los medios evaluativos y para medir avances en los desempeños de los estudiantes se utilizaron Thatquiz® y las guías de actividades.

3.2 Escenario de implementación

Para realizar la implementación de la estrategia se seleccionaron dos grupos de grado décimo: el primer grupo se denominó grupo experimental, en el cual se realizó la implementación de la estrategia; el segundo grupo fue llamado grupo control y servirá como punto de referencia para validar y observar el alcance de la estrategia planteada desde una perspectiva tradicional.

El grupo experimental escogido está conformado por 27 estudiantes del grado 10°B de la Institución Educativa Montecarlo-Guillermo Gaviria Correa. El grupo control está formado por 28 estudiantes del grado 10°A de la misma Institución. Las edades de los estudiantes están entre los 15 y 16 años del Sector de la comuna 3, barrio Jardín.

La Institución Educativa presenta escalas numéricas que se ajustan a escalas de valoración nacional (MEN, 2009), los cuales se muestran en la Tabla 3-1

Tabla 3-1 Comparación de escalas de valoración

Escala de valoración Institución Educativa	Escala de valoración Nacional
1-2.9	Desempeño Bajo
3-3.9	Desempeño Básico
4-4.5	Desempeño Alto
4.6-5	Desempeño Superior

De acuerdo a los lineamientos expedidos por el MEN y adoptados por la Institución Educativa a través del PEI la escala de desempeño bajo se entiende como la no superación de los desempeños necesarios en relación a las áreas obligatorias y fundamentales, y el desempeño básico como la superación de los mismos.

3.3 Modelación de la Función Seno: ¿A qué altura está el sujeto que va en la rueda?

3.3.1 Exposición del tema

Esta etapa se comenzó hablando de las atracciones mecánicas y cómo el movimiento que las personas realizan mientras suben a estas se puede modelar en un plano cartesiano y que hay funciones que pueden describir dicho movimiento en el tiempo.

3.3.2 Delimitación y formulación del problema

De las atracciones mencionadas por los estudiantes se escogió la rueda de Chicago y de estas se pidió a los estudiantes que mencionaran algunas características del movimiento de las sillas que giran alrededor de la rueda. A continuación se propuso el siguiente problema:

> *Una rueda de Chicago gira a una velocidad constante. La rueda de radio es de 10 m y la distancia entre la rueda y el suelo es de 3,5 m. Desde un punto delante de la rueda, Camilo está viendo a una persona que está en uno de las sillas de la rueda. Camilo da cuenta de que la persona se mueve en un círculo. Él estima qué tan alto la persona está por encima del nivel del suelo, en diferentes instantes y dibuja un diagrama de dispersión de su resultados.*

Se propusieron las siguientes preguntas a los estudiantes:

- *¿Cuál es el modelo de la altura en función del ángulo recorrido por la persona que va en la silla girando alrededor de la rueda? ¿Podría una función conocida utilizarse para modelar los datos?*
- *¿Podría escribirse una función que modele los puntos coordenados en el plano cartesiano y que esta sirva para hallar más alturas en cualesquier ángulos?*
- *¿Cómo podría esta función utilizarse para encontrar la posición de la persona en cualquier punto de acuerdo a su ángulo?*
- *¿Cuál es el modelo de la altura la persona que va en la silla girando alrededor de la rueda en función del tiempo? ¿Cómo puede determinarse la velocidad?*

Una vez los estudiantes participaron con algunas respuestas al respecto, se mencionó que aunque en un principio no era fácil dar respuestas satisfactorias, ellos estarían en capacidad de mejorar sus respuestas mediante el análisis de las funciones trigonométricas.

3.3.3 Desarrollo del contenido programático

Una vez dado el problema a solucionar se comenzó a desarrollar el eje temático de la función seno en la circunferencia y el plano cartesiano. Para tal fin se diseñaron y aplicaron 3 actividades que, mientras permitían presentar los diferentes temas, no dejaban de lado el problema en torno inicial, ya que la finalidad fue mejorar las capacidades de los estudiantes para resolverlo. A continuación se describen las actividades.

- ***Actividad 1: ¿Y a qué altura está el sujeto que va en la rueda?***

Esta actividad sugiere el armado de ruedas de Chicago a escala de radios diferentes. La rueda permite tomar datos sobre la altura a la que se encuentra una persona que va en una silla moviéndose alrededor de la rueda. Para la toma de la altura se toman como referencia el suelo y el eje paralelo al eje x, siendo el origen el centro de la rueda (Ver Anexo A). En la Figura 3-1 se observa el proceso de armado de las ruedas realizado por estudiantes del grupo 10°B. En la izquierda se visualiza a dos jóvenes con la rueda desarmada y están colocando la base –amarilla- que servirá de soporte, en el centro el estudiante está ajustando las tuercas a los tornillos que sostienen las sillas y, a la derecha se encuentra un estudiante quien ya colocó el transportador delante de la rueda para poder medir los ángulos.

Figura 3-1 Proceso de armado del mediador "Rueda de Chicago"

Para facilitar la medición del ángulo se sobrepuso sobre la rueda un transportador de 360º cuyo centro está ubicado en el centro de la rueda. Se entrega el material a los estudiantes quienes realizan el montaje, tomen medida y completen la tabla de medición de alturas. En la Figura 3-1 se observa una estudiante del grupo tomando la altura de una silla respecto al suelo a un ángulo de 30°. Ella continuó tomando dicha altura en la medida en que la silla sigue su recorrido alrededor de la rueda.

Figura 3-1 Toma de datos sobre la altura de una silla de la rueda mientras varía el ángulo

En un principio la toma de datos fue lenta debido al poco manejo que se había tenido de la regla, el concepto de sistema de referencia y medición de ángulos. Sin embargo, cuando hicieron el montaje de la segunda y tercera rueda, no sólo tomaban datos, sino que predecían para qué ángulos se obtendría la misma altura, en qué momentos esta altura iba a ser negativa respecto al origen ubicado en el centro de la rueda y que la función volvía a repetir valores después de realizar una vuelta completa. Esto dio paso a que se trabajaran en clase temas como periodicidad de la función, familia de ángulos y cuadrantes donde la altura es positiva y donde es negativa. Además, los jóvenes realizaron su propia definición de la función seno como el cociente entre la altura y el radio de la rueda, y que esta relación se mantenía para un mismo ángulo aunque el radio fuese cambiado.

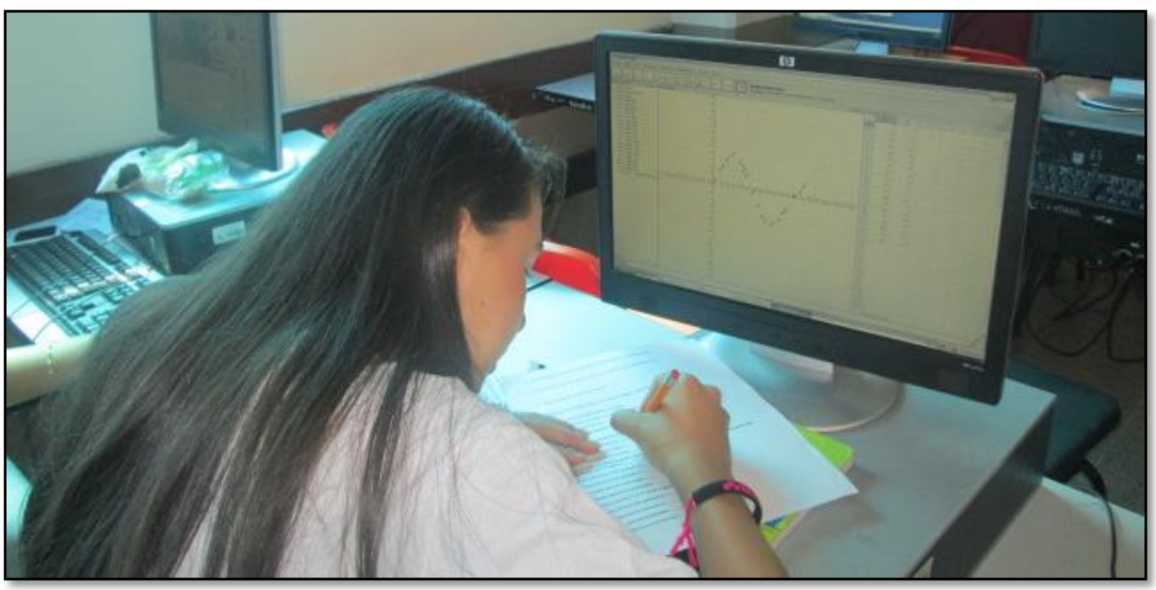
- ***Actividad 2: Representación gráfica del movimiento del sujeto que va en la rueda (Función seno)***

El estudio de la altura en la rueda de Chicago llevó a preguntarse sobre cómo se modelarían los datos encontrados de las diferentes alturas en el plano cartesiano y qué función matemática permitiría describir dicho movimiento; con este fin se construyó esta actividad además de servir de apoyo al estudiante para pasar de la función seno como función circular a función en el plano cartesiano mientras modela sus datos (Ver actividad en el Anexo B).

La actividad se realizó en la sala de sistemas de la institución, permitiendo a los estudiantes modelar los datos obtenidos en el programa Geogebra y construir su propia versión de la función $y = rsen\vartheta$ para los diferentes radios trabajados. Debido a que el programa Geogebra es poco utilizado por estudiantes, se realizó también un tutorial paso a paso a fin de que los jóvenes lograran realizar la actividad sin presentar mayores percances. (Ver Tutorial en el Anexo C).

En la Figura 3-2 se observa una estudiante del curso respondiendo sobre las características de la figura que modela los datos que ella halló de las alturas de la silla en la rueda de Chicago a diferentes ángulos. La figura de tipo senoidal corresponde a la unión de los puntos tabulados por la estudiante.

Figura 3-2 Estudiante analiza gráfica de la función Seno generada a partir de datos experimentales



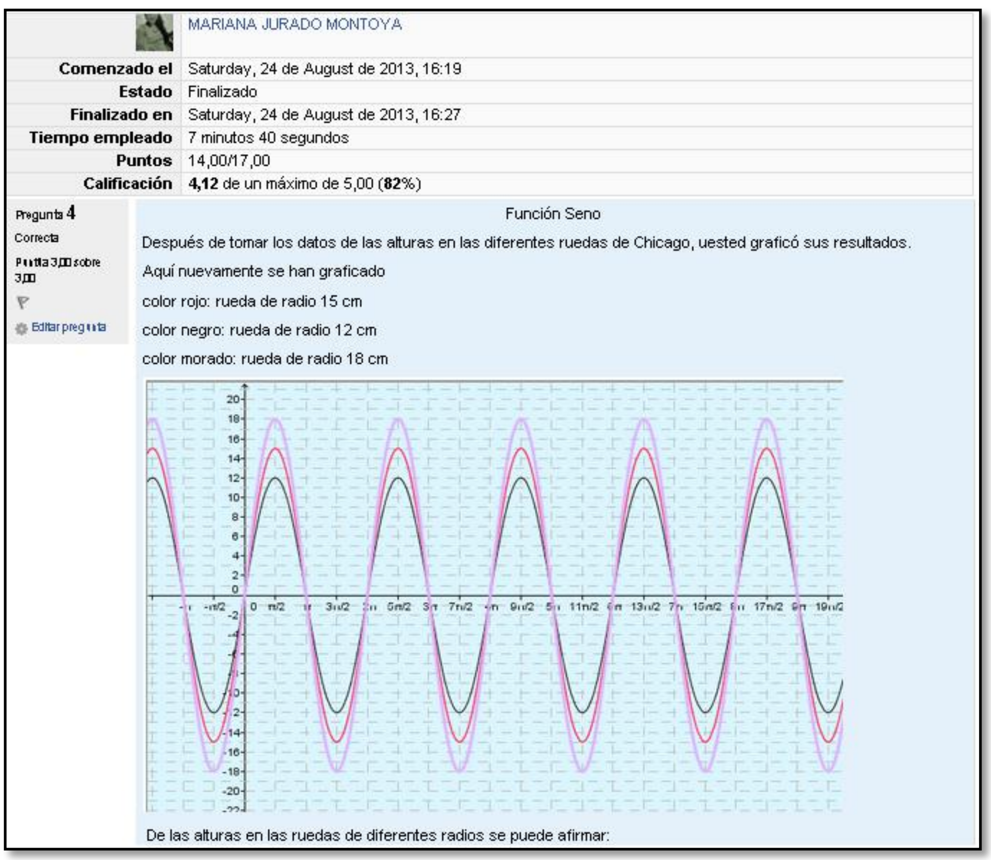
Con esto se trabajaron los contenidos de características de la función seno en el plano cartesiano, su relación con la función circular y su comportamiento en cada cuadrante. Esta actividad les permitió a los estudiantes validar sus datos tomados con los teóricos cuando encontraron valores de la función para diferentes ángulos usando la función mencionada.

- **Actividad 3: Relación entre el seno y la altura (tarea práctica)**

Atendiendo a la consideración de la evaluación como parte del proceso de aprendizaje y no meramente de resultados finales, se diseñaron tareas que permitieran al estudiante realizar un análisis de sus avances y dificultades frente a cómo está asimilando los contenidos estudiados.

En la plataforma Moodle se realizó un cuestionario de 6 preguntas, de selección múltiple donde cada pregunta llevó al estudiante a establecer conexión entre los temas vistos y el problema inicial que dio origen al tema. La Figura 3-3 muestra los resultados del intento de una estudiante del curso junto a una de las preguntas del cuestionario realizada en Geogebra.

Figura 3-3 Resultados de la tarea práctica de la función Seno de una estudiante del curso.



Se mostraron diferentes funciones en Geogebra y se pidió que identificaran características de la función seno desde su gráfica en el plano cartesiano como en la circunferencia unitaria.

Aunque inicialmente la actividad fue concebida como tarea, ésta tuvo que ser realizada en la sala de sistemas debido a dificultades para cargar el programa Geogebra desde los computadores instalados en las casas de los estudiantes. Los resultados obtenidos- de los cuales el 50% superó la nota de 4,0 sobre 5,0- permitieron concluir que los estudiantes estaban preparados para la siguiente etapa.

3.3.4 Presentación de ejemplos análogos

Como bien sugiere la modelación matemática, el docente debe garantizar que las capacidades desarrolladas por el estudiante para resolver un problema dado, puedan ser aplicables a otros contextos. Con esta finalidad se trabajó la siguiente actividad.

- **Actividad 4: Ejemplos análogos: pon a prueba tus conocimientos**

La actividad presenta varias preguntas para un problema de la rueda de Chicago y para las manecillas de un reloj. Esta actividad se diseñó para llevar al estudiante a la ejercitación de lo aprendido en la rueda de Chicago y a otras situaciones que permitan aplicar lo aprendido. Para la rueda se pidió hallar la ordenada dado el ángulo recorrido, y el ángulo que corresponde a una altura dada; además, se solicitó encontrar otro ángulo para la misma ordenada. Para el reloj se requirió que se encontrara las coordenadas de la punta de las manecillas cuando muestran variadas horas, minutos y segundos, como su longitud (Ver actividad en el Anexo D).

Las preguntas dadas en la actividad sobre posición, ángulo y magnitud de las manecillas del reloj para algunas horas dadas permitió a los estudiantes trabajar la función seno para hallar ángulos, hallar la abscisa como la posición en el eje y respecto al centro del reloj y hallar el radio dados el ángulo y la altura de la aguja del reloj. Durante el desarrollo de la actividad se pudo descubrir la dificultad de varios grupos para llevar lo aprendido en la rueda de Chicago a las manecillas del reloj como si estos se resolvieran de manera diferente. Fue necesario explicar cómo el modelo y la función matemática que sirvieron para el estudio de la rueda de Chicago, era aplicable a otras situaciones del entorno susceptibles de ser medidas. Por tal razón, se realizó retroalimentación de la actividad realizada.

3.3.5 Resolución del problema para validar modelo

- **Actividad 5: *Solución del problema de la altura en la Rueda de Chicago***

Para esta última etapa de la modelación matemática, se vuelve a llamar la atención del estudiante sobre el problema que se planteó al inicio del tema de la función Seno. El objetivo de esta actividad es formular el modelo matemático para el problema en cuestión y pedir al estudiante resolverlo. El desempeño del estudiante indica si su proceso le llevó a aprender el modelo, trabajar matemáticas para darle solución y fortalecer las habilidades de su pensamiento.

Por tal razón, se sugirió al estudiante evaluar su avance al responder las preguntas del problema inicial. Se pidió que modelara una posible gráfica del recorrido de una persona en la rueda de Chicago de radio de 10 m, escribir la función correspondiente para determinar la altura de la persona en función del ángulo y también en función del tiempo y hallar la velocidad de la persona que se mueve en la rueda. La actividad se puede observar en el Anexo E.

Al realizar la actividad, los estudiantes pudieron plantear la ecuación de la altura en función del ángulo, hecho que mostró que presentaron destrezas para realizar modelos sencillos a partir de la información dada, pero presentaron dificultades para escribir la ecuación de la altura en función del tiempo y trasladar el eje de simetría cuando se tiene en cuenta la altura respecto al suelo. Esto visibilizó la importancia de trabajar el tema de Generalización de las funciones Seno y Coseno (véase la sección 3.4) para suprimir obstáculos cuando la función original de Seno sea transformada desde el modelo formado a partir de los datos.

De esta manera se diseñó y aplicó la estrategia didáctica concerniente a la modelación matemática mediada por la tecnología para el caso de la función Seno.

3.4 Modelación de la función coseno: ¿Y qué tan alejado del centro está el sujeto que va en la rueda?

Los objetivos que se trazaron para este segundo eje temático fueron los siguientes: 1) encontrar desde la función coseno el modelo matemático que describa una situación del entorno susceptible de ser estudiada, 2) trabajar con la rueda de Chicago como situación cercana al estudiante por haberla trabajado en el tema anterior, para fortalecer la idea de modelar situaciones reales y 3) preparar al estudiante para la generalización de la función Coseno desde la caracterización de ésta como función sencilla con pequeñas transformaciones.

3.4.1 Exposición del tema

En esta etapa se retomó la rueda de Chicago como mediador del conocimiento, se repasó su utilidad para definir la función seno y cómo el modelo matemático encontrado sirvió para hallar la altura de una persona que se mueve alrededor de la rueda en función del ángulo recorrido o en función del tiempo transcurrido.

3.4.2 Delimitación y formulación del problema

Para motivar al estudiante al aprendizaje de la función coseno se propuso el problema de la rueda de Chicago, similar al que se analizó en el tema de la función Seno, con la diferencia que esta vez Camilo –personaje que se enfrenta al problema- se interesa por tomar nota no sólo de la altura de la persona sino de su distancia al eje vertical que pasa por el centro de la rueda (Ver Anexo F). El problema es el siguiente:

> *Una rueda de Chicago gira a una velocidad constante. La rueda de radio es de 10 m y la distancia entre la rueda y el suelo es de 3,5 m. Desde un punto delante de la rueda, Camilo está viendo a una persona que está en uno de las sillas de la rueda. Camilo se da cuenta de que la persona se mueve en un círculo. Él estima qué tan alto <u>y qué tan distante del eje vertical que pasa por el centro de la rueda</u> está la persona si su sistema de referencia es el centro de la rueda, en cada intervalo que pasa, a su vez, dibuja un diagrama de dispersión de su resultado en el plano cartesiano.*

Se propusieron las siguientes preguntas a los estudiantes:

- *¿Cómo es su gráfico del recorrido cuando se analiza su distancia horizontal respecto al centro? ¿Podría una función conocida utilizarse para modelar los datos?*
- *¿Podrían escribirse funciones que modelen los puntos coordenados en el plano cartesiano y que a la vez sirvan para encontrar más posiciones de la persona en cualesquier ángulos?*

- *¿Cómo podría una función matemática utilizarse para encontrar la distancia horizontal respecto al centro de la persona en cualquier punto de acuerdo a su ángulo?*
- *¿Cómo podría esta función utilizarse para encontrar cuál es la distancia máxima horizontal de la persona y en cuál la mínima?*

Los estudiantes concordaron en que, para expresar la ordenada de un punto dado, se utilizaba la función Seno, pero se debía encontrar otra función para hallar la abscisa en dicho punto.

3.4.3 Desarrollo del contenido programático

Esta etapa que sigue al problema dado, se concibió para desarrollar como eje temático la función Coseno en la circunferencia (con radio mayor o igual a 1) y en el plano cartesiano; se pretende que el estudiante analice sus características, representaciones y la función dado los ángulos recorridos en la circunferencia. Al igual que la sección anterior se diseñaron y aplicaron 3 actividades que le dieran a los discentes las herramientas para encontrar modelos que le permitan dar solución al problema inicial de la distancia horizontal en la rueda de Chicago. A continuación se describen las actividades.

- **Actividad 1: La función coseno y el Análisis de la distancia horizontal respecto al eje vertical que pasa por el centro de la rueda**

Esta actividad parte de la rueda de Chicago armada en una clase anterior. Se diseñó para que los jóvenes tomen medidas sobre la distancia horizontal entre la silla y el eje vertical mientras la silla se mueve alrededor de la rueda, formando varios ángulos. Tomando como referencia el eje vertical que pasa por el centro de la rueda, se pidió al estudiante tomar la medida de la semirrecta perpendicular al eje y, terminando en el punto donde se ubica la silla en la rueda. Los valores a la derecha del eje y serán tomados como positivos y los de la izquierda al eje como negativos.

En la Figura 3-4 se observa a algunos estudiantes llevando a cabo sus estrategias para tomar dichas medidas (Ver actividad en el Anexo F).

Figura 3-4 Estudiantes tomando datos sobre la distancia horizontal de una silla de la rueda

La toma de datos fue más rápida que cuando se analizaba la altura, ya que había conocimientos de sistemas de referencia y la medición de ángulos adquiridos en la modelación de la función Seno. Algunos grupos tomaban la medida de los dos ángulos donde sabían que la distancia debía dar la misma o repetían una medición si veían que no concordaba con la encontrada en el ángulo familiar; los estudiantes lograron formar su propia definición de la función coseno, la cual coincidía con el cociente entre la distancia hallada y el radio, además, encontraron regularidades de la función formada y familia de ángulos.

- **Actividad 2: Representación gráfica del movimiento de un sujeto en la rueda (Función coseno)**

Se preparó esta actividad para acercar a los estudiantes a la función que permitía modelar los datos recolectados; para ello, se les llevó a la sala de sistemas, para que ingresaran estos datos al programa Geogebra. Los jóvenes debían formar una tabla donde para cada ángulo corresponde la distancia de la silla al eje vertical. Se pidió a los estudiantes graficar los puntos formados, unirlos e identificar regularidades y diferencias entre la función coseno y las distancias horizontales de las ruedas de diferentes radios (Ver actividad en el Anexo G).

Las figuras Figura 3-5 y Figura 3-6 muestran las gráficas obtenidas por estudiantes para las ruedas de 15cm y 11cm respectivamente.

Figura 3-5 Gráfica realizada por estudiantes en Geogebra para una rueda de 15 cm

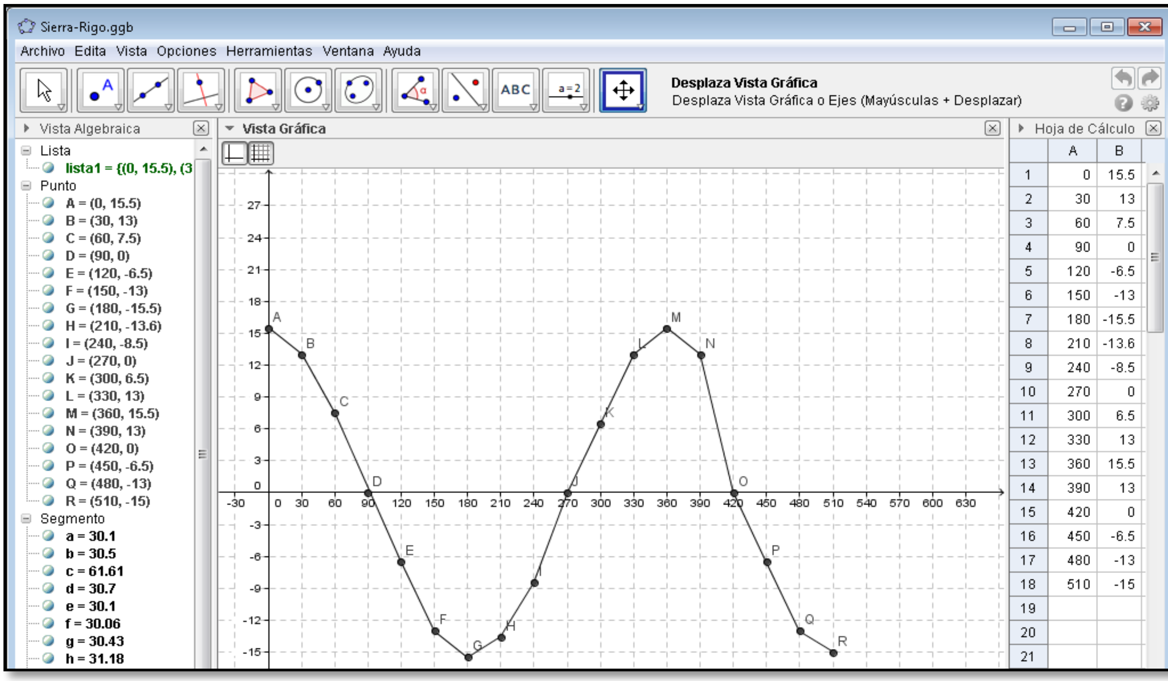
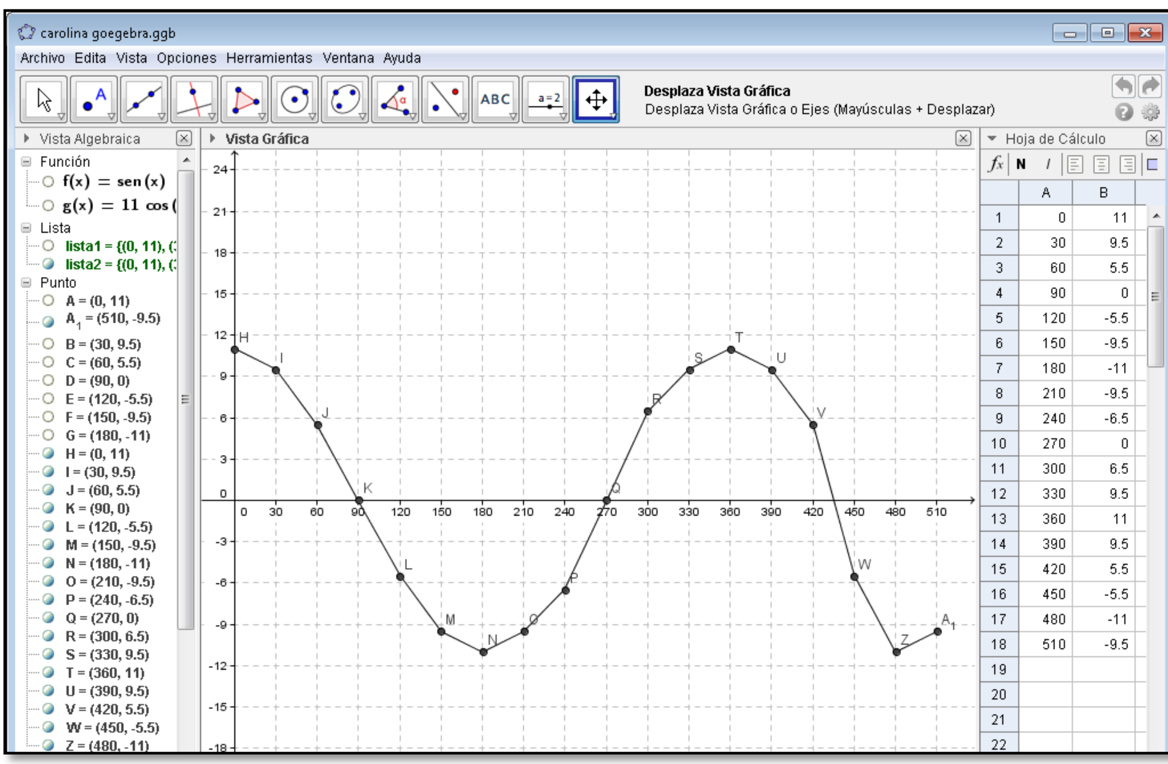


Figura 3-6 Gráfica realizada por estudiantes en Geogebra para una rueda de 11 cm



Para cada rueda, los estudiantes debían realizar las gráficas y, a partir de ellas se les pidió que escribieran las características y las compararan con la función $f(\theta) = sen(\theta)$ para encontrar similitudes.

Además, utilizando la calculadora el joven debía realizar una valoración entre los datos que él tomó y los teóricos, dados por la función $f(\theta) = rsen(\theta)$, donde r es el radio de la rueda instalada. Siendo r=1, se pide al estudiante escribir y ejemplificar las características de la función coseno en la circunferencia unitaria.

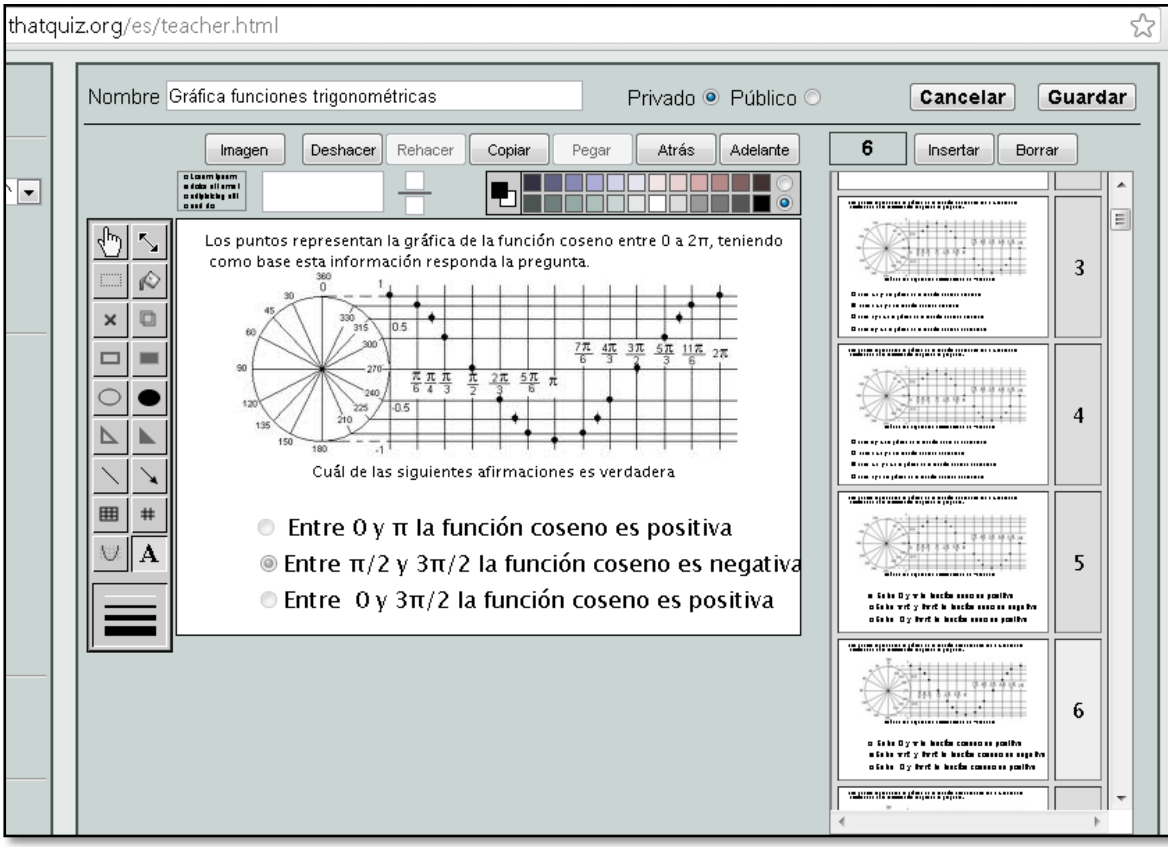
El trabajo realizado por los estudiantes permitió considerar los contenidos referentes a las características de la función coseno en el plano cartesiano, su relación con la función circular y su comportamiento en cada cuadrante. Esta actividad también fue de validación de los datos experimentales medidos al compararlos con los de la función Coseno para cada ángulo dado.

- **Actividad 3: Función coseno: de la circunferencia al plano cartesiano (tarea práctica)**

Esta actividad fue diseñada como componente evaluativo del proceso de aprendizaje llevado hasta el momento. La actividad fue desarrollada en el portal web Thatquiz, donde el estudiante encontró un cuestionario de 15 preguntas sobre las características de las funciones seno y coseno, tales como dominio, rango, intervalos ascendentes, descendentes y relación entre la función desde la circunferencia y el plano cartesiano.

La Figura 3-7 muestra la construcción de una de las preguntas del cuestionario en la página de www.thatquiz.org.

Figura 3-7 Diseño de una pregunta en la página de Thatquiz



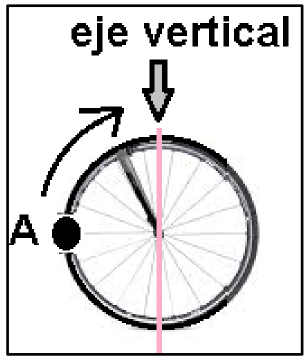
Los estudiantes reconocieron las diferentes características en las dos formas de representación de la función coseno. Identificaron los cuadrantes para los cuales la función asciende ó desciende y la mayoría relacionó con facilidad los ángulos cuando son dados en radianes con los dados en grados.

3.4.4 Presentación de ejemplos análogos

- **Actividad 4: Ejemplos análogos Pon a prueba tus conocimientos**

La actividad fue planeada para exponer al estudiante a una situación del entorno donde ponga a prueba sus conocimientos sobre la función coseno, a la vez que permita al docente evaluar el desempeño de los estudiantes para llevar los modelos encontrados en la resolución del problema de la rueda de Chicago a un problema sobre el movimiento de la rueda de una bicicleta. (ver Figura 3-2.) La actividad puede observarse en el Anexo H

Figura 3-2 Ilustración del movimiento de un punto sobre el eje de la rueda delantera de la bicicleta (Tomada de la actividad: Ejemplos análogos Pon a prueba tus conocimientos)



La aplicación se realizó pidiendo a los estudiantes realizar el gráfico -en el plano cartesiano- y escribir el modelo de la función para el movimiento de un punto sobre la rueda delantera que se mueve alrededor de su eje. Un procedimiento similar fue realizado con la rueda trasera.

Los estudiantes realizaron la actividad sin mayor dificultad e infirieron los tiempos en que el punto sobre la rueda realizaba cada cuarto del recorrido. Se evidenció que el radio de la rueda se entendió como la amplitud de la función graficada, en este caso de 30 cm.

De esta manera, los estudiantes estuvieron preparados para enfrentar el problema de la rueda de Chicago el cual fue planteado al inicio del estudio de la función coseno.

3.4.5 Resolución del problema para validar modelo

- **Actividad 5: Solución del problema de la Rueda de Chicago**

Esta última etapa de la modelación matemática se considera pertinente para resolver el problema inicial (planteado en la sección Delimitación y formulación del problema3.3.2) y verificar si el proceso propuesto por las etapas anteriores tuvo su incidencia en el aprendizaje de la función coseno.

Para tal efecto, se retomó el problema de la rueda de Chicago, se leyeron las preguntas que en su momento no se le dieron solución y se entregó a cada pareja la actividad para resolverla. La actividad puede ser observada en el Anexo I.

La actividad se diseñó de tal manera que el estudiante recordara las preguntas en torno al problema inicial e inmediatamente tuviera la oportunidad de responderlas en la medida en que iba respondiendo cada punto. En la Figura 3-8 se observa a una estudiante del grupo mientras explicaba cómo había desarrollado la actividad.

Figura 3-8 Estudiante muestra sus gráficas de altura y distancia horizontal para ruedas de diferentes radios

La aplicación de la actividad indagó diferentes procesos matemáticos para dar solución al problema de la rueda de Chicago reflejando un buen desempeño de los estudiantes para graficar, modelar funciones para cualquier radio de la rueda, escribir coordenadas a partir de la funciones y determinar el ángulo a partir de coordenadas. Se observaron niveles de abstracción pues para la realización de la gráfica no contaban con una tabla de valores y aún así realizaron las gráficas de las funciones que determinaban la altura y la distancia horizontal de una persona que se movía alrededor de la rueda.

3.5 Modelación de ondas sonoras: ¿Se pueden modelar situaciones del entorno con funciones trigonométricas?

3.5.1 Exposición del tema

El objetivo de esta etapa es mostrar a los estudiantes que las funciones Seno y Coseno tienen variadas aplicaciones a diferentes situaciones del entorno. Por tal razón, se presentaron las ondas sonoras como parte de la física que se vale de la matemática para modelar el comportamiento del sonido una vez es producido; se mencionó además, que se pueden analizar otras funciones de tipo periódico desde las funciones trigonométricas para reconocer los posibles cambios de una función dada su gráfica o desde el estudio de su ecuación.

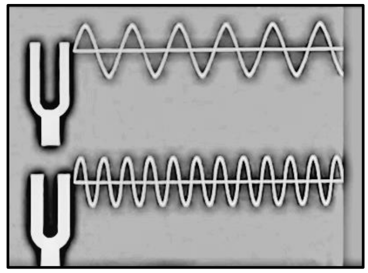
3.5.2 Delimitación y formulación del problema

Para incentivar el deseo de aprender este tema se llevó a la clase el siguiente problema:

> *El diapasón es un instrumento que al vibrar produce sonido que, cuando es golpeado y se le hace vibrar, genera una onda sinusoidal casi inaudible dependiendo de la frecuencia (para poder escucharlo se debe acercar al oído, nunca apoyarlo en el cráneo, o amplificar apoyándolo sobre una caja de resonancia de madera, como la caja de un instrumento de cuerda, por ejemplo[1])*
>
> *Al golpear un diapasón, este vibra emitiendo ondas sonoras con una determinada frecuencia y emite un sonido persistente que es amplificado por la caja de resonancia. También sucede así cuando se producen sonidos vocálicos a una frecuencia pura determinada. En el sonoscopio del programa PhysicsSensor se puede visualizar diferentes sonidos producidos por diferentes fuentes de emisión sonora.* Ver Figura 3-3.

[1] Información tomada de "Laboratorio Experimental: El Diapasón" y puede ser consultada en http://labeldiapason.blogspot.com/

Figura 3-3 Ilustración de la onda producida por el sonido de un diapasón



A partir de este se plantearon las siguientes preguntas al grupo:

- *¿Por qué se dice que la representación de las ondas producidas por una fuente sonora tiene forma sinusoidal?*
- *¿Se podrían determinar cuáles son los elementos que caracterizan la función modelada a partir de su gráfica?*
- *¿Cuál es el período de la función?*
- *¿Cómo puede expresarse la función matemáticamente como una función del tiempo?*

Una vez dadas las preguntas se permitió que estudiantes realizaran algunos sonidos y estos se visualizaron en el sonoscopio de PhysicsSensor. En las figuras Figura 3-9 y Figura 3-10 se muestran algunas de las gráficas producidas por los sonidos emitidos. También se realizó el experimento con un diapasón que hay en la Institución Educativa.

Figura 3-9 Gráfica generada a partir de un grito sostenido

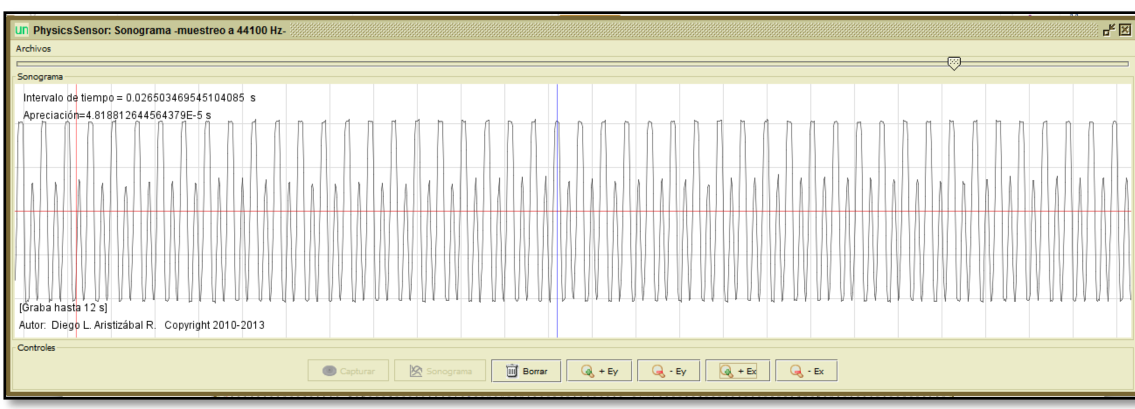
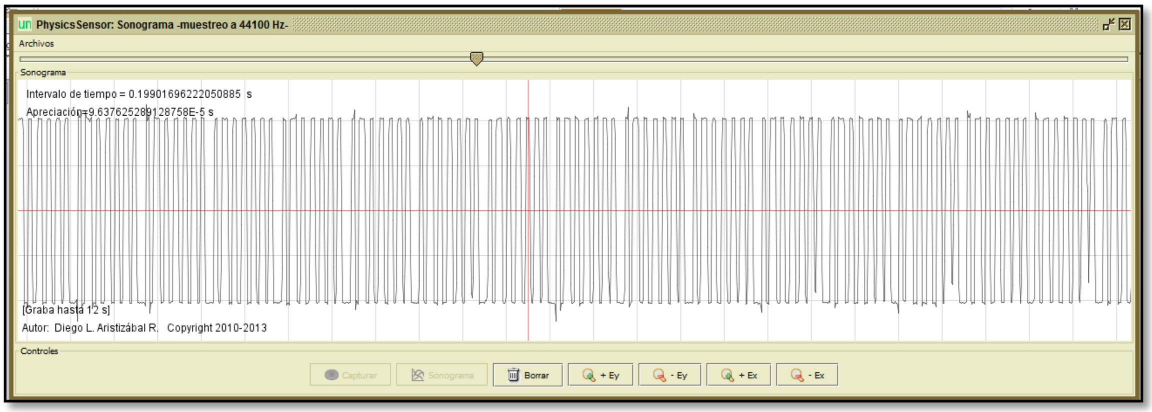


Figura 3-10 Gráfica generada a partir del sonido sostenido de la letra "a"



La actividad sirvió para despertar el interés de los estudiantes por la aplicación de las funciones trigonométricas a las ondas sonoras. Al momento de realizar la experiencia de graficar sonidos se destacó que los jóvenes coincidieron en relacionar las gráficas vistas con las funciones Seno y Coseno y concluyeron que la amplitud se determinaba por el volumen del compañero que producía el sonido. La presentación de problema ofreció la oportunidad para comenzar a desarrollar el tema el cual al final permitiría que los estudiantes tuvieran la habilidad para determinar las funciones que veían en el programa PhysicsSensor.

3.5.3 Desarrollo del contenido programático

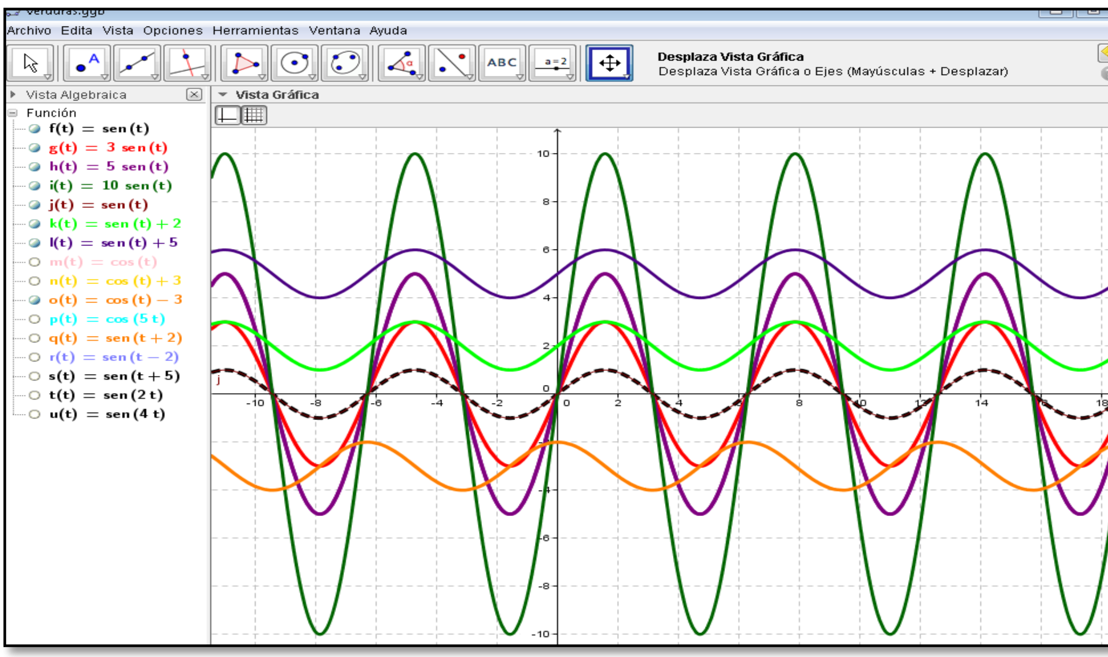
Este último grupo de actividades se diseñaron en torno a la Generación de las funciones Seno y Coseno, donde se prepararon actividades de análisis de funciones mediadas por los programas Geogebra y PhysicsSensor; este último, a través de sus aplicaciones, permite visualizar sonidos producidos en una gráfica, la cual es susceptible de ser analizada en el sonoscopio.

- **Actividad 1: Análisis de modelos sencillos de transformación de funciones**

La realización de esta actividad fue mediada con el programa Geogebra. La actividad se pensó para ayudar al estudiante a identificar las posibles transformaciones que pueden ocurrir a las funciones Seno y Coseno. De esta manera el estudiante tendrá más elementos para modelar funciones senoidales.

En la aplicación de la actividad se pidió al estudiante escribir cada una de las funciones dadas en Geogebra y analizar el cambio o transformación respecto a las funciones $f(t) = sen(t)$ y $g(t) = cos\ (t)$. La Figura 3-11 muestra algunas transformaciones de la función seno que se pueden realizar en el laboratorio matemático; en la parte izquierda se observa la vista algebraica de las diferentes transformaciones de la función seno y en la parte derecha sus respectivas gráficas, discriminadas por colores. La actividad se puede observar en el Anexo J.

Figura 3-11 Transformaciones de la función f(t)=sen(t) en el software Geogebra



Para realizar la actividad, los estudiantes debían escribir cada función en el recuadro de entrada, que está situado en la parte de abajo de la página del software. En la Figura 3-12 se observa una estudiante del grupo 10° B realizando la actividad en la sala de sistemas de la Institución.

Figura 3-12 Estudiante del curso solucionando la actividad mientras grafica las funciones en Geogebra

La realización de la actividad permitió al estudiante identificar elementos como la amplitud, período, frecuencia angular, traslación horizontal y vertical de las funciones seno y coseno y, cómo estos inciden en la transformación de las funciones originales y en la escritura de éstas.

- **Actividad 2: Tarea práctica**

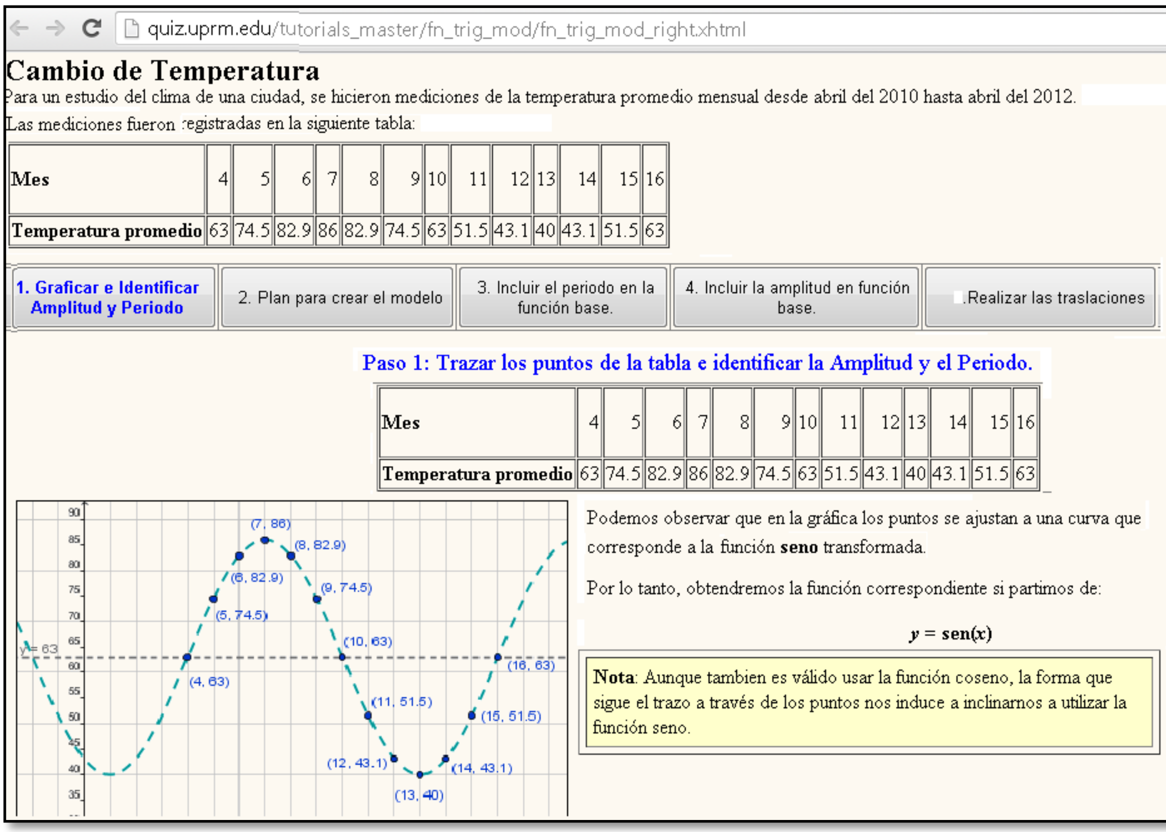
La tarea en medios virtuales se concibió para fortalecer el proceso de modelación a partir de la tabulación de valores susceptibles de ser medidos en situaciones concretas. Para esto se propuso que el estudiante analizara varios problemas cuya modelación permite la vinculación de las funciones Seno y Coseno. Para esto el estudiante debía entrar a la página virtual de la Universidad de Mayagüez[2] y contestar la actividad propuesta donde encontraría modelos matemáticos para

[2] Universidad de Puerto Rico recinto universitario de Mayagüez. Recuperada en http://quiz.uprm.edu/tutorials_master/fn_trig_mod/fn_trig_mod_right.xhtml.

situaciones como altura de la marea, cambio de temperatura, oscilación y población de especies depredadoras (ver Anexo K).

En la Figura 3-13 se observa la aplicación en el sitio web donde se permite el análisis de los pasos para modelar funciones trigonométricas.

Figura 3-13 Análisis de la función para resolver el problema del cambio de temperatura



La aplicación de la actividad permitió la interacción entre el estudiante y cada uno de los pasos para resolver problemas propuestos en la página; estos son:

1. Graficar los puntos para visualizar gráficamente la forma de la curva de la función correspondiente e identificar el periodo y la amplitud.
2. Trazar un plan para crear el modelo.
3. Definir una función base utilizando el periodo y la amplitud.
4. Trasladar la función para que corresponda a los datos del problema.

El análisis de las gráficas permitió que se evidenciaran las transformaciones de las funciones seno y coseno desde cada uno de sus elementos hasta formar el modelo deseado de acuerdo a la tabla sugerida.

3.5.4 Presentación de ejemplos análogos

- **Actividad 3: Ejemplos análogos de generalización de funciones**

La actividad se diseñó para verificar que la transformación de funciones sea aplicada por el estudiante para un abanico de problemas y no solamente como un modelo único para resolver problemas de ondas sonoras. A través de situaciones problema de fenómenos como la temperatura, la forma de una onda de corriente alterna, péndulo, resortes en vibración, estrellas variables y altura de la marea (Ver actividad en el Anexo L).

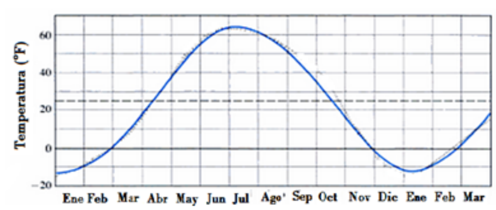
Figura 3-1 Ilustración sobre gráfica de funciones modeladas (Tomada de la actividad: Ejemplos análogos de generalización de funciones)

Actividad de ejemplos análogos- Generalización de funciones

1. La siguiente gráfica muestra el comportamiento de la temperatura ambiente diaria en una ciudad, según lo registra el servicio Nacional Meteorológico. Usando la función senoidal para ajustar los datos se modeló así:

$F(t) = 37sen\left[\frac{2\pi}{365}(t-101)\right]+25$, en donde f es la temperatura, t describe el número de días que han pasado desde el inicio del año

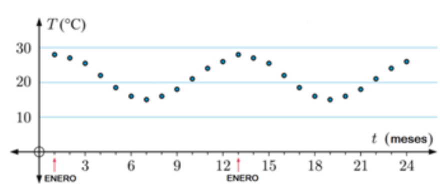
Su gráfica se muestra a continuación.



- ¿Qué indica la amplitud?
- ¿Cuál es el período de la función?
- Halle la temperatura promedio a los 2, 6 y 12 meses (recuerde reemplazar t en días)
- ¿Cuál es el desplazamiento horizontal y el vertical y qué indican?
- ¿En cuáles meses la temperatura promedio es máxima y en cuáles mínima?

2. La temperatura muestra una variación de un promedio de 28 º C en enero a través de una serie de valores a través de los meses. El ciclo se repite para el siguiente período de 12 meses.

- Halle amplitud, el período en meses y escriba la función que se ajusta alrededor de este conjunto de puntos como una función coseno y como una función seno.



Se percibieron algunas dificultades de los estudiantes para aplicar a otras situaciones lo ya visto en el estudio de las ondas sonoras. Esto llevó a una explicación de comparación de modelos donde se hizo énfasis en el significado de la amplitud, la frecuencia angular y el período para diferentes situaciones del entorno.

Una vez hecho lo anterior, se procedió a entregar la actividad a los estudiantes, los cuales mostraron capacidades para construir modelos de funciones a partir de los datos dados en los diferentes problemas como también desde los datos que abstraían de los gráficos dados.

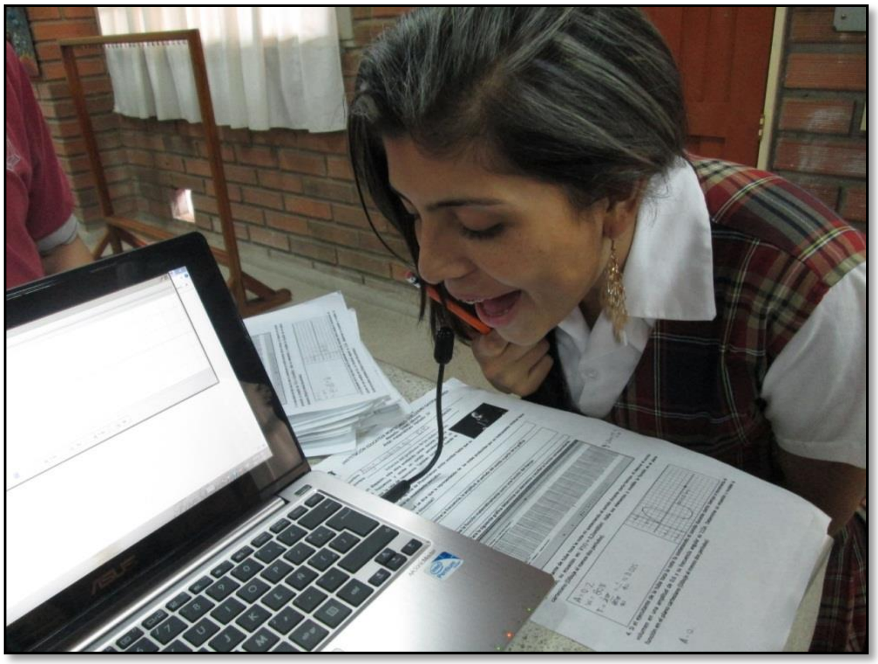
3.5.5 Resolución del problema para validar modelo

- **Actividad 4: Resolución del problema: representación de ondas sonoras**

La verificación de que los estudiantes fueran capaces de modelar las funciones de ondas sonoras y graficar funciones dadas fue lo que llevó a el diseño y aplicación de esta actividad (Véase Anexo M). Se retoma el problema inicial sobre la emisión de ondas sonoras dada la vibración que se produce cuando se realiza un sonido. Se pidió a los estudiantes que realizaran, una vez abierto el sonoscopio del programa PhysicsSensor, emitieran sonidos y al observar la representación gráfica de dicho sonido, escribir el modelo matemático que la representa. Se dieron también otras gráficas prediseñadas para realizar el mismo procedimiento. También se mostró la función de una nota ejecutada por un músico y se pidió que el estudiante identificara sus elementos (período, frecuencia angular, amplitud) y realizara un bosquejo de una posible gráfica. Por último, se dieron tablas de valores para un sonido producido por una persona que de manera regular producía un sonido y se pidió realizar la gráfica tipo sonoscopio y escribir el modelo del sonido emitido.

La Figura 3-14 muestra una estudiante que realiza un sonido que es recogido por un micrófono conectado al portátil para después ser graficado en el programa de PhysicsSensor en su aplicación, el sonoscopio.

Figura 3-14 Estudiante del curso realizando un sonido para producir una gráfica senoidal en el sonoscopio



La Figura 3-15 muestra a una estudiante que ajusta la gráfica generada en el sonoscopio para escribir el modelo de la función generada por el sonido producido por su voz.

Figura 3-15 Estudiante del curso analizando la gráfica generada en el sonoscopio de PhysicsSensor

La aplicación de la actividad permitió hacer una evaluación global de lo que era capaz de realizar el estudiante después de haber estudiado la generalización de las funciones Seno y Coseno. Al resolver las preguntas del problema, pudieron realizar el proceso de llevar una función a una gráfica y de una tabla de valores hasta su respectiva modelación matemática.

4 Validación de la Estrategia Didáctica

En este capítulo se analiza si el proceso de enseñanza de las funciones trigonométricas implementando como estrategia didáctica la modelación matemática y mediada por las TIC influyó favorablemente en el aprendizaje de los estudiantes del grado décimo de la Institución Educativa Montecarlo-Guillermo Gaviria Correa. Para tal efecto, primero se mostrarán los resultados de las pruebas de entrada o diagnóstica y la de salida, segundo, se realizará la interpretación de los resultados obtenidos realizando tres tipos de análisis: comparativo entre el grupo experimental y el grupo control en la prueba de entrada, comparativo en la prueba de salida y comparativo en el mismo grupo respecto a las pruebas de entrada y se salida.

4.1 Resultados

4.1.1 Prueba de entrada

La prueba diagnóstica o de entrada se realizó en los grupos experimental y control con dos objetivos: el primero fue el de analizar si los estudiantes estaban preparados para abordar los temas de las funciones trigonométricas en los reales y segundo, para determinar si los grupos eran académicamente similares y no existía ventaja del uno sobre el otro a la hora de realizar la intervención (Ver prueba en el Anexo N). Los resultados de los promedios de los grupos se muestran en la Tabla 4-1.

Tabla 4-1 Resultados prueba de entrada grupos experimental y control

Tipo de prueba	grupo experimental	grupo control
prueba entrada	3.00	3.02

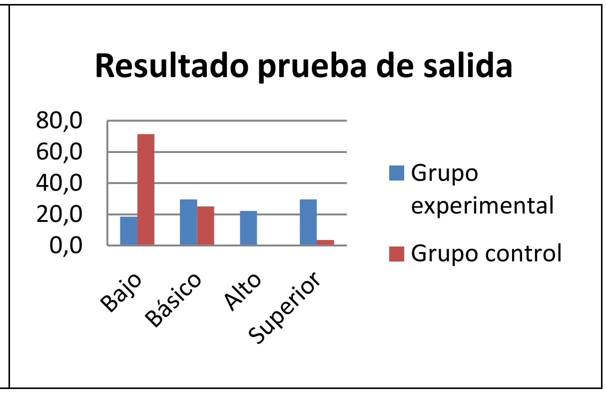
En el Anexo O se puede observar los resultados de la prueba discriminados por estudiante y nota individual.

4.1.2 Prueba de salida

La prueba de salida se realizó después de la intervención con la estrategia didáctica en el grupo experimental y aplicando la enseñanza de manera tradicional en el grupo control (Ver pruebas de salida en el Anexo P). Los resultados de los promedios de los grupos se pueden observar en la Tabla 4-2.

Tabla 4-2 Resultados prueba de salida grupos experimental y control

	Grupo experimental	Grupo control
Bajo	18.5	71.4
Básico	29.6	25.0
Alto	22.2	0.0
Superior	29.6	3.6



En el Anexo Q se puede observar los resultados de la prueba para ambos grupos discriminando la nota de cada estudiante.

Adicionalmente, la prueba de salida midió el resultado obtenido de los estudiantes por desempeños; en la Tabla 4-3 se puede observar los ítems de desempeño que se valoraba en la prueba de salida.

Tabla 4-3. Ítems de desempeño para la prueba de salida

ÍTEM	Desempeño	Pregunta donde se evalúa nivel del estudiante
1	Comprender el significado de una función periódica y a partir de él, reconocer sus características: amplitud, periodicidad, dominio y rango de la función.	3, 12, 13, 14
2	Determinar el período de las funciones seno y coseno e identificar las variaciones del mismo de acuerdo con la forma general de la función	4, 18, 19
3	Resolver problemas que se pueden representar matemáticamente haciendo uso de las funciones trigonométricas seno y coseno	5, 15, 16, 17
4	Determinar el modelo de una función periódica del mundo real a partir de su gráfica	1, 8, 20
5	Relacionar ángulos, lados y coordenadas de un triángulo inscrito en una circunferencia mediante el uso de las funciones trigonométricas	9, 10, 11

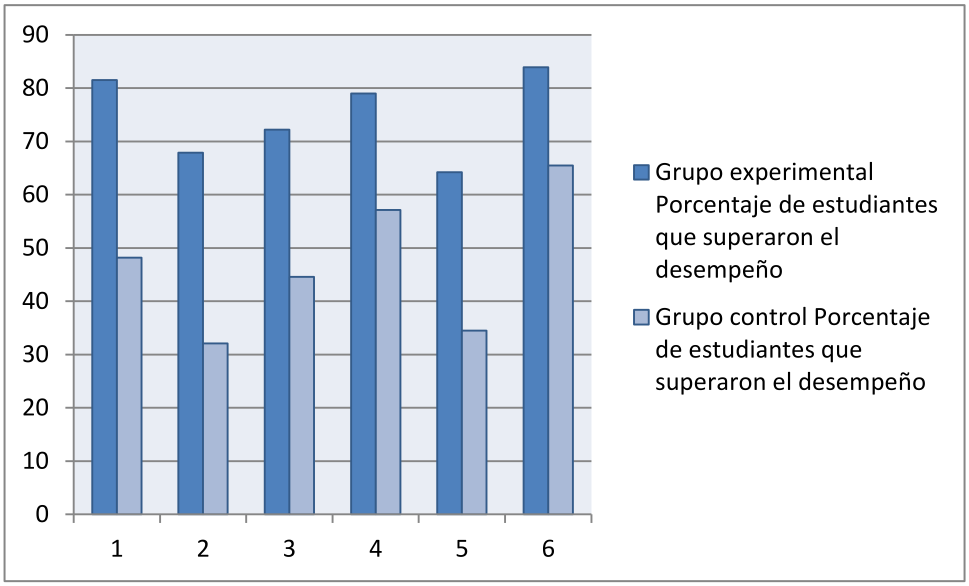
6	Representar e identificar gráficamente las funciones trigonométricas Seno y Coseno y sus variaciones.	2, 6, 7

Los resultados por desempeños se pueden observar en la Tabla 4-4, y para visualizarlos, estos se presentan en el Gráfico 4-1. En el Anexo R se puede observar los resultados por desempeño discriminado por estudiante en el grupo experimental y el Anexo S en el grupo control.

Tabla 4-4 Resultados por desempeños de Grupos Experimental y control

Ítem de desempeño	Grupo experimental **Porcentaje de estudiantes que superaron el desempeño**	Grupo control **Porcentaje de estudiantes que superaron el desempeño**
1	81.5	48.2
2	67.9	32.1
3	72.2	44.6
4	79	57.1
5	64.2	34.5
6	83.9	65.5

Gráfico 4-1 Gráfico de resultados por desempeños de Grupos Experimental y control



4.2 Análisis de resultados

Para realizar el análisis de los datos se buscaron métodos de análisis que garanticen que las unidades en estudio sean tan parecidas como sea posible de tal manera que las diferencias, en caso de encontrarse, sean atribuibles a la diferencia en los tratamientos. Por ejemplo, la estrategia basada en intervalos de confianza (utilizado para extraer información de un diseño para comparar dos medias poblacionales) y la distribución de t de Student (para evaluar diferencias en las medias poblacionales) requieren que previamente se realice la prueba F de Esnedecor para analizar que las varianzas de la medición en las poblaciones en estudio sean iguales.

La importancia de la estrategia de análisis que se tomó para interpretar los resultados radica en que se minimizan errores experimentales en la observación de los resultados, pues pudiera darse el caso de que una población sea mejor que otra en razón de pocos estudiantes brillantes y no por que el grupo como tal haya reportado diferencias respecto a otra población desde el punto de vista de lo que se pretende observar.

A continuación se muestran las comparaciones oportunas que permitan concluir sobre la pertinencia o no de la estrategia propuesta de la modelación matemática mediada por las Tic para fortalecer el aprendizaje significativo de las funciones trigonométricas en los reales.

4.2.1 Comparación 1: Análisis de resultados de los grupos experimental y control en la prueba de entrada

El objetivo de este análisis es responder respecto de los grupos experimental y control la pregunta ¿Existen diferencias entre las calificaciones de los estudiantes del grupo experimental y las del grupo control en la prueba de entrada?

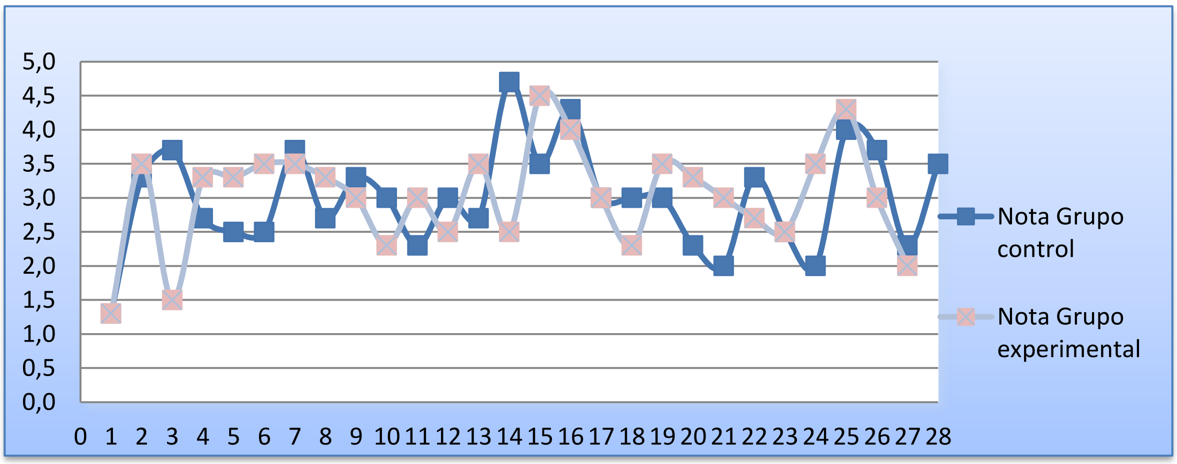
La prueba de entrada que se realizó en los grupos experimental y control permitió valorar desempeños académicos de los estudiantes antes del comienzo de la intervención de la estrategia. Los educandos debían demostrar su competencia para resolver las diferentes opciones planteadas con relación a los siguientes temas:

- *Números reales y propiedades*
- *Resolución de ecuaciones*
- *Distancias entre dos puntos en el plano cartesiano.*
- *Definición del ángulo trigonométrico y su relación con arcos de la circunferencia unitaria*
- *Sistemas de medidas angulares: sexagesimal y radial.*
- *Concepto de función*
- *Dominio y rango de una función*
- *Funciones constante, creciente y decreciente*

Como muestran los resultados en la Tabla 4-1, ambos grupos demostraron en sus respuestas un desempeño básico, lo que mostró en su momento que cumplieron los requisitos para comenzar a ver las funciones trigonométricas en los reales.

Respecto a la igualdad de los grupos para verificar que no existió favorabilidad académica de un grupo sobre otro, se asignó a cada estudiante de ambos grupos un número de lista para ver su desempeño comparado con su semejante en el otro grupo. En el Gráfico 4-2 se puede observar los resultados individuales de ambos grupos; en este se puede observar que la dispersión de las notas correspondiente a cada estudiante no refleja grandes diferencias de un grupo a otro.

Gráfico 4-2 Gráfico comparativo Grupo control vs Grupo experimental



Además, en la Tabla 4-5 se muestran las medidas de tendencia central de ambos grupos.

Tabla 4-5 Cuadro comparativo de medidas de tendencia central grupos experimental y control

	Grupo experimental	Grupo control
Nota Mayor	4.5	4.7
Nota menor	1.3	1.3
Promedio	3.02	3.0
Varianza	0.6	0.6
Desviación estándar	0.8	0.8
Coeficiente de variación	0.25	0.25

Como se puede notar, los grupos experimental y control presentan una desviación estándar de 0.8 respecto a la nota promedio, esto para ambos grupos. Lo anterior permite concluir que los grupos seleccionados para medir la eficacia de la intervención de la estrategia son semejantes en su rendimiento académico.

4.2.2 Comparación 2: Análisis de resultados de los grupos experimental y control en la prueba de salida

El objetivo de este análisis es responder respecto de los grupos experimental y control, la pregunta ¿Existen diferencias entre las calificaciones de los estudiantes del grupo experimental y las del grupo control en la prueba de salida?

Para comparar los resultados de los grupos experimental y control se usará el método de comparación de dos medias (o dos promedios) poblacionales, el cual propone comparar dos estrategias en términos de sus promedios. Para su implementación se usará la estrategia estadística basada en los llamados intervalos de confianza y se asumirá normalidad en las poblaciones.

La Tabla 4-6 muestra los datos registrados en ambos grupos que permitirá realizar el análisis comparativo.

Tabla 4-6 Registro de datos para hallar intervalo de confianza para prueba de salida Grupos Experimental y Control

Indicadores	Estrategia Modelación matemática Grupo Experimental	Estrategia tradicional Grupo Control
Número de estudiantes	$n_2 = 27$	$n_1 = 28$
Nota promedio prueba de salida	$\bar{X}_2 = 3.75$	$\bar{X}_1 = 2.35$
varianza	$S_2^2 = 0.822$	$S_1^2 = 0.616$

Como las muestras son pequeñas y normales, primero se halla un intervalo de confianza para el cociente de las varianzas, pues se debe garantizar si las varianzas de las notas promedio de ambos grupos son iguales.

Un intervalo de confianza para el cociente de varianzas está dado por:

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2 f_{\frac{\propto}{2}}(V_1 V_2)}, \frac{S_1^2}{S_2^2} f_{\frac{\propto}{2}}(V_2 V_1)\right)$$

de donde

$$V_1 = n_1 - 1$$

$$V_2 = n_2 - 1$$

El valor $f_{\frac{\propto}{2}}(V_2 V_1)$ proviene de una distribución de probabilidad llamada F de Esnedecor.

Aplicando a los datos registrados en la Tabla 4-6, se tiene

$$\left(\frac{0.616}{0.822 * 2.184}, \frac{0.616}{0.822} 2.171\right) = (0.34{,}1.63)$$

Como el intervalo hallado contiene el uno, es decir $1 \in (0.34{,}1.63)$, entonces se puede suponer que las varianzas son iguales.

Ahora, se calcula la varianza común (Sp^2), la cual está dada por:

$$Sp^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{27 * 0.616 + 26 * 0.822}{53} = 0.71$$

El valor de la distribución t de Student es:

$$t_{\frac{\propto}{2}}(n_1 + n_2 - 2) = t_{\frac{0.05}{2}}(53) = t_{0.025}(53) = 2.0057$$

Por lo tanto para calcular un intervalo de confianza del 95% para las diferencias de las calificaciones de las poblaciones de ambos grupos se debe usar,

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \pm t_{\frac{\propto}{2}} * Sp\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = 2.37 - 3.78 \pm 2.0057 * 0.85\sqrt{\frac{1}{28} + \frac{1}{27}} = (-1.87, -0.95)$$

Como el anterior intervalo no contiene el cero, las medias poblacionales μ_1 para el grupo control y μ_2 para el grupo experimental son diferentes, es más, puede afirmarse que $\mu_1 < \mu_2$.

Por lo tanto, el análisis realizado permite afirmar que el promedio del rendimiento académico del grupo donde se realizó la intervención fue mejor en la prueba de salida que el del grupo control; dicha superación en las notas obtenidas fue del orden entre 0.95 y 1.87 respecto al grupo control.

4.2.3 Comparación 3: Análisis de resultados del grupo experimental en las pruebas de entrada y de salida.

El objetivo de este análisis es responder respecto al grupo experimental, la pregunta ¿Existen diferencias entre las calificaciones de los estudiantes antes de iniciar la intervención de la estrategia y al finalizarla?

Para dar respuesta a la pregunta se usará el procedimiento de prueba que consiste en analizar las diferencias entre las notas inicial y final de cada estudiante. Si no existe ninguna diferencia entre las mediciones la media de las diferencias debe ser cero. Si por el contrario existe alguna diferencia, se procederá a concluir sobre la misma. Esta diferencia se evalúa con la distribución t de Student.

Para ello, se usará un intervalo de confianza del 95% para las diferencias entre las medias. En este caso $\propto = 0.05$ por lo que $\frac{\propto}{2} = 0.025$.

Usando la tabla de distribución de la t de Student se tiene que

$$t_{0.025,26} = 2.055$$

Tabla 4-7 Registro de datos para hallar intervalo de confianza para prueba de entrada y salida del Grupo Experimental

Indicador	Grupo Experimental
Media de la valoración prueba de entrada	$\bar{X}_1 = 3.022$
Media de la valoración prueba de salida	$\bar{X}_2 = 3.75$
Diferencia entre las medias de la prueba de entrada y la prueba de salida	$\bar{D} = \bar{X}_1 - \bar{X}_2 = -0.7$
Desviación estándar	$S_D = 1.2$

La Tabla 4-7 muestra los datos registrados en el grupo experimental en las pruebas de entrada y salida, lo que permitirá realizar el análisis comparativo. A partir de los datos se calcula el promedio $\bar{D}$ de las diferencias de los resultados entre las pruebas inicial y final aplicadas al grupo donde se realizó la intervención y la respectiva desviación estándar S_D.

De esta manera

$$\overline{D} \pm t_{\frac{\propto}{2}} \frac{S_D}{\sqrt{n}} = -0.7 \pm 2.055 \frac{1.2}{\sqrt{27}} = (-1.18, -0.23)$$

El cero no forma parte del intervalo, es decir $0 \notin (-1.18, -0.23)$. Esto lleva a concluir que hay una diferencia entre las notas promedio al inicio y al final de la intervención. De hecho, como el intervalo está a la izquierda del cero se puede decir que $\mu_1 < \mu_2$, la intervención de la propuesta influyó en el mejoramiento académico de los estudiantes del grupo experimental respecto al que presentaban antes de la intervención.

El incremento es importante, partiendo del hecho que el promedio del rendimiento del grupo experimental al inicio de la intervención era de 3.02 y aumentó entre 0.23 y 1.18 al final de la misma.

4.2.4 Comparación 4: Análisis de resultados por indicadores de desempeño de los grupos experimental y control en la prueba de salida

El objetivo de este análisis es responder respecto de los grupos experimental y control, la pregunta ¿Existen diferencias entre los desempeños superados de los estudiantes del grupo experimental y las del grupo control en la prueba de salida?

A continuación se realiza la comparación entre los grupos experimental y control, pero ya a nivel de desempeños superados respecto a las temáticas abordadas durante la intervención de la propuesta. Los resultados por desempeños se pueden observar en la Tabla 4-4, y para visualizarlos, estos se presentan en el Gráfico 4-1.

Para el desempeño 1, se puede notar que el 81.5% de los estudiantes del grupo experimental comprendieron el significado de una función periódica y a partir de él, reconocieron sus características, como son amplitud, periodicidad, dominio y rango de la función; en el grupo control dicho desempeño sólo lo alcanzaron el 48.2%.

Para el desempeño 2, el 67.9% de los estudiantes del grupo experimental lograron determinar el período de las funciones seno y coseno e identificaron las variaciones de este de acuerdo con la forma general de las funciones dadas, esto frente a un 32.1% de estudiantes de otro grupo.

En el desempeño 3, se encontró que el 72.2% de los estudiantes del grupo experimental demostraron buen desempeño cuando se fueron expuestos a problemas cuya resolución pedía representarlos matemáticamente haciendo uso de las funciones trigonométricas seno y coseno; este desempeño fue superado satisfactoriamente en un 44.6% por los estudiantes del grupo control.

Otra diferencia entre el rendimiento de los estudiantes del grupo experimental frente al de control se encontró en el desempeño 4, pues los primeros respondieron favorablemente en un 79% cuando se les pidió determinar el modelo de una función periódica del mundo real a partir de su gráfica, frente a 57.1% de éxito en los segundos.

En el desempeño 5, los estudiantes del grupo experimental con un 64.2% de aciertos, superaron casi en el doble que los del grupo control, siendo capaces de relacionar ángulos, lados y coordenadas de un triángulo inscrito en una circunferencia mediante el uso de las funciones trigonométricas.

Finalmente, los estudiantes del grupo experimental superaron en un 83.9% el desempeño 6, demostrando que representaban e identificaban gráficamente las funciones trigonométricas Seno y Coseno y sus variaciones. Los estudiantes del grupo control también obtuvieron un resultado favorable en un 65.5% de éxito en el mencionado desempeño.

Lo anterior permite afirmar que el grupo experimental donde se aplicó la estrategia didáctica de la modelación matemática mediada por el uso de la tecnología reportó mejores resultados académicos al finalizar la intervención frente al grupo control.

5 Conclusiones y trabajo futuro

La enseñanza a partir de situaciones problema crean expectativa en los estudiantes sobre contenidos matemáticos que se van a desarrollar, despiertan interés y le permiten tener en mente cuál es el logro a superar desde antes de analizar los temas.

El uso de mediadores pedagógicos -como es el caso de la Rueda de Chicago a escala-, les permite a los estudiantes disfrutar de un aprendizaje de inmediata aplicación, donde son partícipes de las etapas que llevan a la solución de un problema mientras arman, toman datos, analizan relaciones, proponen soluciones y modelan matemáticamente la situación a la que son expuestos. Esto permite cumplir con uno de los objetivos de los estándares, como es el de formar jóvenes competentes.

El uso de laboratorios matemáticos, como es el caso de Geogebra, fortalecen en el estudiante un trabajo más independiente del docente, desarrollando la autosuficiencia, tan necesaria en los procesos formativos. Aunque al principio se debe tener paciencia mientras los estudiantes se apropian de la herramienta, vale el tiempo dedicado pues el resultado es estudiantes más analíticos en vez de operativos.

El diseño y la implementación de la estrategia didáctica basada en la modelación matemática permitió que los estudiantes del grupo experimental obtuvieran un mejor desempeño frente al grupo control; esta validación de los resultados permite afirmar que la modelación matemática como estrategia didáctica fortalece el aprendizaje significativo de las funciones trigonométricas en los reales.

Las etapas de la modelación matemática en conjunto permiten aumentar los desempeños de los estudiantes frente al tema abordado. El estudiante comienza enfrentándose a una situación real, después participa en la construcción de un modelo simple, resuelve ejemplos de situaciones análogas que le permiten ser competente en diversos contextos y no solo en el problema, y finalmente, modela matemáticamente el problema propuesto resolviendo diferentes preguntas sobre el mismo.

Aunque la implementación de la modelación como estrategia didáctica mostró resultados significativos, se propone su implementación en grados anteriores al que se aplicó la estrategia, para obtener mejores resultados y la apropiación del estudiante a las etapas del proceso de la modelación.

Aunque la estrategia didáctica fue eficaz para fortalecer el aprendizaje significativo, se sugiere que se trabaje en equipos docentes interdisciplinarios para lograr transversalización del tema con otras áreas del conocimiento. Esta estrategia podría estar ligada a un proyecto institucional; de esta manera se puede mejorar los niveles de desempeño de los estudiantes y permitirá hablar de formación para la vida.

A pesar de que la estrategia implementada utilizó diversos mediadores y herramientas de tipo tecnológico, se propone la capacitación del docente en nuevas herramientas y explorar más aplicaciones de las mismas a la enseñanza de las matemáticas, ya que estos medios interactivos facilitan el análisis, promueven el autoaprendizaje y la investigación, beneficios propios de un buen proceso didáctico.

Bibliografía

Almeida, L.; y otros (2004.). *Modelagem Matemática Como Estratégia de Ensino e Aprendizagem nos Cursos Superiores de Tecnologia.* En: WorldCongressonEngineering and TecnologyEducation. Santos.

Álvarez del Valle, E. (2004). *La docencia como mediación pedagógica.* En Reflexión Académica en Diseño y Comunicación Nº V. Año V, Vol. 5, Febrero 2004, Argentina; (pp. 18-21).

Amar, V. (2006). *Las nuevas tecnologías aplicadas a la educación.* Servicio de publicaciones Universidad de Cadiz.

Aristizábal, D. (2014). *Ludifísica: recursos para la enseñanza de la física.* Recuperado el 10 de enero de 2014 desde http://ludifisica.medellin.unal.edu.co/.

Aristizabal, D., Restrepo R., Ramírez C., Montoya N., González E. & Muñoz T. (2013). *Uso de las NTIC para apoyar la enseñanza de la física básica para ingenieros: experiencia en la Universidad Nacional de Colombia sede Medellín.* Universidad Nacional de Colombia. Medellín, Colombia.

Arzarello, F. & Pezzi, G. (2007). *Modelling Body Motion: an approach to functions using measure instruments*. Dipartimento di MatematicaUniversità, di Torino.

Asamblea Departamental de Antioquia(2012). *Ordenanza N° 14 del 14 de Junio de 2012. Plan de desarrollo departamental 2012-2015: Antioquia la más educada.* Departamento de Antioquia. Antioquia, Colombia.

Bassanezi, R. Biembengut, S. (1997) *Modelación matemática: una antigua forma de investigación – un nuevo método de enseñanza*. En Revista de didáctica de las matemáticas. Nº 32. (pp. 13-25).

Biembengut, M. S., Hein N. (1997). *Modelo, modelación y modelaje. Métodos de enseñanza-aprendizaje de matemáticas.* Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales", Nº 38. (pp. 209-222)

Biembengut, M. S., Hein N. (2004). *Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática.* Educación matemática, agosto, año/vol. 16, Nº 002. Santillana. Distrito

Federal, México. Recuperado el 10 de marzo de 2013 desde http://redalyc.uaemex.mx/pdf/405/40516206.pdf.

Chapman, O. & Robutti, O. (2008). C*urrent problems and challenges in uppersecondary mathematics education.* En Reportes de Investigación: Las Calculadoras Graficadoras y el Software de Conectividad.

Cobo, J. C. (2010). *El proyecto facebook y la posuniversidad: sistemas operativos sociales y entornos abiertos de aprendizaje.* Artículo ¿y si las nuevas tecnologías no fueran la respuesta? (pp. 131-146)

Coll, C. (2010). *Formación del profesorado, Educación secundaria.* Serie: Fundamentos de la Educación/Formación y desarrollo profesional del profesorado. Editorial Graó de IRIF, (pp. 106-107) Barcelona.

Concejo de Medellín (2012). *Acuerdo N° 7 de 2012 por medio del cual se adopta el plan de desarrollo 2012-2015 Medellín: un hogar para la vida*. Alcaldía municipal de Medellín.

Congreso de la república de Colombia (1994). *Ley 115 DE 1994. Ley general de educación, de 8 de febrero, por la cual se expide la Ley General de Educación.* Recuperado el 23 de abril de 2013 desde http://www.banrepcultural.org/blaavirtual/educacion/leyedu/1a35.htm.

Diadenys A. J. (2010). *Estrategia didáctica para desarrollar la interdisciplinariedad en la carrera de psicología.* X Congreso EUMEDNET sobre Educación, Cultura y Desarrollo. Abreus, Cuba.

Diaz, F. & Hernández G. (2010). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista*. Tercera edición. Editorial McGRAW-HILL. México, D.F.

Diaz, J. (2005). *La evaluación formativa como instrumento de aprendizaje en educación física*. Inde publicaciones. Barcelona, España.

Espinosa, E. A. (2009). *Los mediadores pedagógicos en la enseñanza de las ciencias: la implementación de un programa educativo multimedia en la enseñanza del sistema circulatorio*. El Hombre y la Máquina, Enero-Junio, (pp.20-37).

Hein, N., Biembengut, M. (2006) *Modelaje matemático como método de investigación en clases de matemáticas.* Memorias de V festival internacional de matemática. Recuperado el 9 de marzo de 2013 desde http://www.cientec.or.cr/matematica/pdf/P-2-Hein.pdf

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Matemáticas. Lineamientos curriculares. MEN*. Bogotá, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional (2003a). L*a revolución educativa estándares básicos de matemáticas y lenguaje educación básica y media.* Talleres Departamentales de Calidad de la Educación. Bogotá, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional (2003b). *Uso de la tecnología y de los medios en el aula Una puerta abierta a la sociedad de la información y el conocimiento.* Al tablero. Revista N° 33. Febrero-marzo 2003. Recuperado el 5 de Octubre de 2012 desde http://www.mineducacion.gov.co/1621/propertyvalues-31326_tablero_pdf.pdf.

Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares básicos de competencias: en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas.* (pp. 46-95).

Ministerio de Educación Nacional (2006). *Plan nacional decenal de educación 2006-2016. Renovación pedagógica y uso de las TIC en la educación.* Recuperado el 12 de diciembre de 2013 desde http://www.plandecenal.edu.co/html/1726/articles-166057_cartilla.pdf

Ministerio de Educación Nacional (2009). *Decreto 1290 del 16 de abril de 2009 por el cual se reglamenta la evaluación del aprendizaje y promoción de los estudiantes de los niveles de educación básica y media.* Recuperado el 24 de Noviembre de 2013 desde http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-187765_archivo_pdf_decreto_1290.pdf.

Niss. M. (1992). *"O papel da aplicação e da modelaçãona matemática escolar"*, Revista Educação e Matemática, nº 23, terceiro trimestre de 1992. (pp. 1-2). Lisboa, Pt. En: modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem nos cursos superiores de tecnología.

Perkins, D. (1992). *La escuela inteligente. Del adiestramiento de la memoria de la memoria a la educación.* Editorial Gedisa. Capítulo 2.

Piscitelli, A. (compilador) (2010). *El proyecto de Facebook y la posuniversidad: sistemas operativos sociales y entornos abiertos de aprendizaje*. Artículo: ¿Y si las nuevas tecnologías no fueran la respuesta? Capítulo 9. Quinta edición. Buenos Aires, Argentina.

Pons, J. de P. y otros (2010). *Políticas educativas y buenas prácticas con TIC.* Serie didáctica: Tecnologías de la información y de la comunicación. Editorial Graó de IRIF, Barcelona, España.

Rosser, T. Boix (1995). *Estrategias y recursos didácticos en la escuela rural*. Colección Materiales para la innovación educativa. Editorial GRAÓ. Barcelona, España.

Stewart, J. (2001). *PRECÁLCULO. Matemáticas para el cálculo*. International Thomson Editores. Tercera edición. México.

Sullivan, M. (1997). *Trigonometría y geometría analítica.* Traducción José de la Cera. 4^{ta} edición. Editorial PEARSON educación. México.

Villa J. A. y otros (2010). *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C*. Capítulo 4. El pensamiento del docente, sus prácticas y elementos para su formación profesional. Recuperado el 12 de abril de 2013 desde http://funes.uniandes.edu.co/905/1/alme23.pdf

VILLA, J. A. & Ruiz, M. (2009). *Modelación en Educación Matemática. Una mirada desde los Lineamientos y Estándares Curriculares Colombianos*. Revista Virtual-Universidad Católica del Norte No. 27. Medellín, Colombia.

Anexos

Anexo A. Actividad 1: ¿Y a qué altura está el sujeto que va en la rueda?

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MONTECARLO-GUILLERMO GAVIRIA CORREA
Medellín- Grado décimo
Área: matemáticas- Período: III

Tema 1. ¿Y a qué altura está el sujeto que va en la rueda?

En esta unidad verás la importancia de las funciones periódicas para resolver problemas que surgen del diario vivir. Reconocerás la importancia de las funciones seno en la circunferencia unitaria, pero a la vez, de manera extensiva a otras circunferencias que se pueden hallar en figuras circulares que encontramos a nuestro alrededor. Esta guía consta de las actividades que se relacionan a continuación, 2 tareas virtuales y la evaluación final de verificación de apropiación del modelo matemático.

Pautas para elaborar tu plan de trabajo	√
Lee la introducción al tema La función seno como Función circular	
Lee el problema e intenta dar respuesta a las preguntas	
Realiza la actividad guiada La función seno y el Análisis de la altura	
Realiza la actividad guiada La función coseno como función circular	
Sintetiza, interpreta y presenta una conclusión general	
Resuelve el modelo matemático para la altura de un persona en la rueda de Chicago	

(ET) <u>La función seno como Función circular</u>

Las funciones que observamos en la naturaleza y las que resultan como producto de la mano del hombre pueden llegar a ser estudiadas matemáticamente. Por ejemplo, el costo de elaborar pares de zapatos aumenta en la medida en que la cantidad de zapatos es mayor. Sin embargo, algunas funciones presentan un comportamiento diferente. Este es el caso de las funciones periódicas.

Las funciones periódicas son aquellas cuyo comportamiento variable se repite en el tiempo. La repetición puede ser llamado periódica, oscilatorio, o cíclico en diferentes situaciones. Comencemos con el estudio de las funciones circulares.

1. (DP) Descripción del problema

Una rueda de Chicago realiza giros a velocidad constante.

Una rueda de la fortuna gira a una velocidad constante. La rueda de radio es de 10 m y la distancia entre la rueda y el suelo es de 2 m. Desde un punto delante de la rueda, Camilo está viendo a una persona que está en uno de las sillas de la rueda. Camilo da cuenta de que la persona se mueve en un círculo. Él estima qué tan alto la persona está por encima del nivel del suelo, a las dos segundos intervalos y dibuja un diagrama de dispersión de su resultados.

2. (FP) Resuelve las siguientes preguntas

- ¿Cómo es su gráfico del recorrido?
- ¿Podría una función conocida utilizarse para modelar los datos?
- ¿Cómo podría esta función utilizarse para encontrar la posición de la persona en cualquier punto en el tiempo o de acuerdo a su ángulo?
- ¿Cómo podría esta función utilizarse para encontrar cuál es la posición máxima de la persona y en cuál la mínima?
- ¿Qué característica de la función indicará el intervalo de tiempo durante el cual se produce un ciclo completo?

3. <u>La función seno y el Análisis de la altura</u>

Para esto primero vamos a utilizar la rueda de Chicago construida a escala, de varios radios.

Para esto necesitarás:

- ✓ Rueda de Chicago a escala.
- ✓ Cinta métrica
- ✓ Ruedas de radios diferentes
- ✓ Transportador
- ✓ Computador –geogebra

Procedimiento

Toma cada rueda y escoge una silla como punto de referencia. Escribe la altura a la que está la rueda que escogió respecto al suelo y respecto al punto central, para cada ángulo.

	Complete la tabla de Medición de alturas					
	Circunferencia de radio ___ cm		Circunferencia de radio ___ cm		Circunferencia de radio ___ cm	
ángulo	respecto al suelo	respecto al centro de la rueda	respecto al suelo	respecto al centro de la rueda	respecto al suelo	respecto al centro de la rueda
$0°$						
$30°$						
$45°$						
$60°$						
$90°$						

$120°$						
$135°$						
$150°$						
$180°$						
$210°$						
$225°$						
$240°$						
$270°$						
$300°$						
$315°$						
$330°$						
$360°$						
$390°$						
$405°$						

4. La función circular:

¿Podrías predecir la altura de la silla respecto al origen si el radio tuviera un valor diferente?

En la función circular representada por el movimiento de una persona en la rueda de Chicago existe una relación entre la altura de la silla respecto al centro de la rueda y su radio.

Para esto toma un ángulo dado y los valores obtenidos de la altura respecto al centro de la rueda, como se muestra en la siguiente tabla

ángulo	$\frac{altura}{radio\ \_\_cm}$	$\frac{altura}{radio\ \_\_cm}$	$\frac{altura}{radio\ \_\_cm}$	*promedio*	
0°					

Resuelve las siguientes preguntas

1. Realiza una conclusión sobre los datos obtenidos para cada ángulo
____
____
____

2. Ahora toma tu calculadora y encuentra el seno de cada ángulo dado y escríbelo en la última columna.

¿Cómo definirías la función seno?

____
____
____

3. Completa la siguiente tabla

Sen 30º	Sen 150º	Sen 210º	Sen 330º

¿Qué regularidad encuentras y a qué creas que se deba?

____
____
____

Escribe otros 6 grupos de ángulos para los cuales se cumple esta regularidad

____
____
____

4. En el método de medir las alturas en la rueda de Chicago ¿Por qué no es necesario seguir tomando las medidas cuando los ángulos son mayores a 360°?

____
____
____

¿Qué indica esa regularidad sobre la función?

____
____
____

Anexo B. Actividad 2: Representación gráfica del movimiento del sujeto que va en la rueda (Función seno)

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MONTECARLO-GUILLERMO GAVIRIA CORREA
Medellín- Grado décimo
Área: matemáticas- Período: III

Función seno

La función seno es una función periódica que en la circunferencia indica la posición de un cuerpo en cuanto a su altura respecto al origen. º

En la circunferencia unitaria
Dado que la posición P del cuerpo en cualquier instante está dado por P (θ) = (x , y) con entro en el origen y $x^2 + y^2 = 1$. Al valor de v, de la ordenada de P (θ), se llama seno de θ y se denota por sen(θ), es decir, sen(θ) = y.
En la circunferencia de radio r
El valor de y, de la ordenada de P (θ), se halla con $sen(\theta) = \frac{y}{r}$

En la función circular la altura de un cuerpo que se mueve sobre la circunferencia se puede hallar si se halla el seno del ángulo ($\sin\theta$)

Ahora bien, el modelo que permite ubicar esta altura teniendo en cuenta el radio es:

Altura y	=	Radio r	$\sin\theta$

1. Escribamos los valores que señalan la altura para un radio con respecto al centro de la rueda dada con la ayuda de la calculadora y comparemos con los encontrados por el método manual.

ángulo	0º	30º	45º	60º	90º	120º	135º	150º	180º	225º	240º
Altura radio de ______											
ángulo	270º	300º	315º	330º	360º	390º	405º	420º	450º	480º	510º
Altura radio de ______											

- ¿Cómo son los valores encontrados en la calculadora respecto a los valores del método manual?

- Si el radio de la rueda es de 1, ¿cuál es la atura del cuerpo que se desplaza sobre la circunferencia? Realiza el procedimiento para varios ángulos

- ¿En qué ángulo el cuerpo está a la mitad de la máxima altura por encima del centro?

- ¿En qué ángulo el cuerpo está a la mitad de la mínima altura por debajo del centro?

- ¿Para qué ángulos la altura es la misma?

Graficación de la función $sen(\theta)$en el plano cartesiano

Volviendo a los datos de la tabla anterior, resuelve:

¿Qué gráfica se genera si en el eje x se ubican los ángulos y en el eje y los valores obtenidos?

¿Cada cuánto se repite la función?

2. Utilizando el programa geogebra grafica los valores que tienes en la tabla anterior para un radio de _______ y responde:

El dominio de la función graficada es: _______________________________

El rango de la función graficada es: ________________________________

La función crece en los intervalos: _________________________________

La función decrece en los intervalos: _______________________________

3. Utilizando el programa geogebra grafica los valores que tienes en la tabla de datos recolectados en la rueda de Chicago para un radio de _______ y responde:

El dominio de la función graficada es:_______________________________

El rango de la función graficada es: ________________________________

La función crece en los intervalos: _________________________________

La función decrece en los intervalos: _______________________________

4. Grafica la función $f(x) = sen(\theta)$ en geogebra y responde=

El dominio de la función graficada es:_______________________________

El rango de la función graficada es: ________________________________

La función crece en los intervalos: _________________________________

La función decrece en los intervalos: _______________________________

Anexo C. *Tutorial Geogebra*

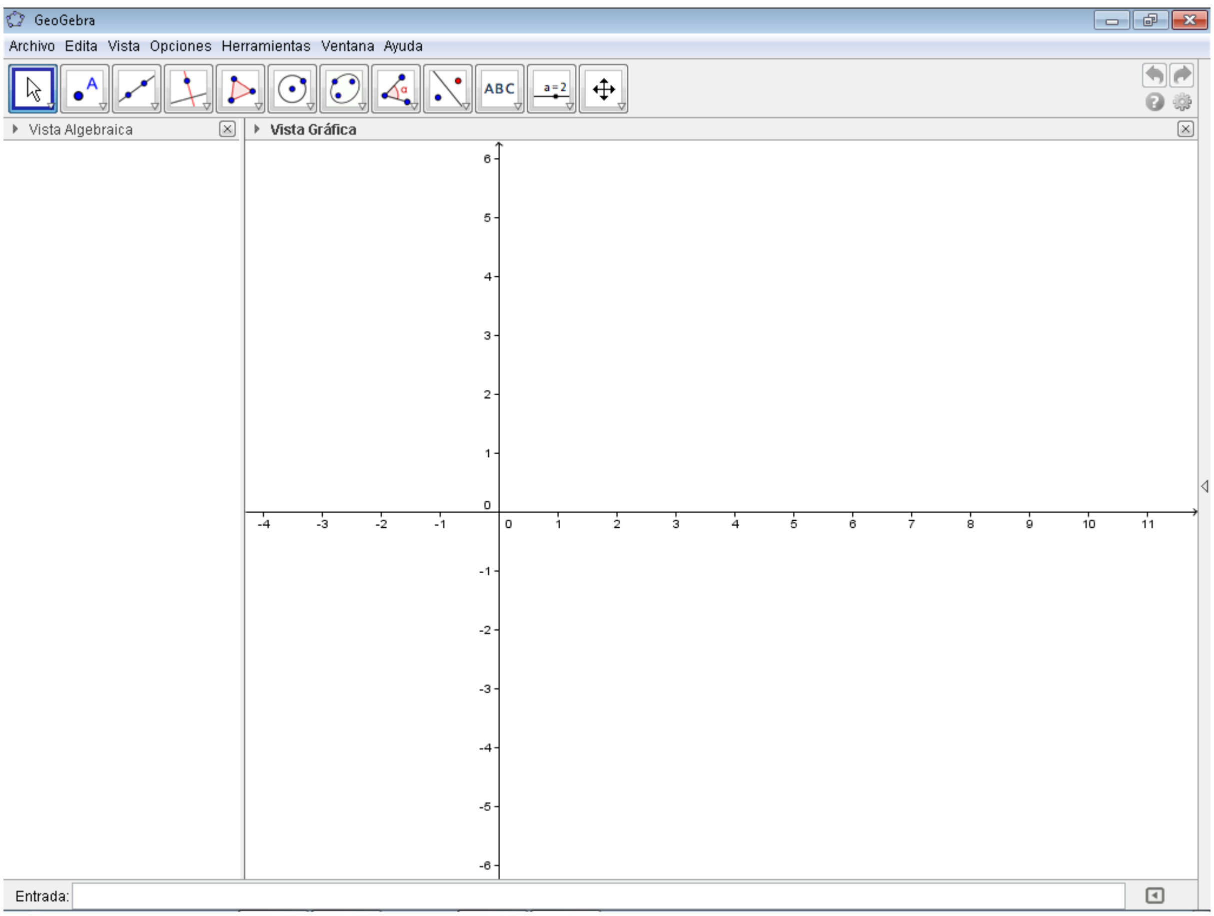
INSTITUCIÓN EDUCATIVA MONTECARLO-GUILLERMO GAVIRIA CORREA
Medellín- Grado décimo
Área: matemáticas- Período: III

TUTORIAL GEOGEBRA

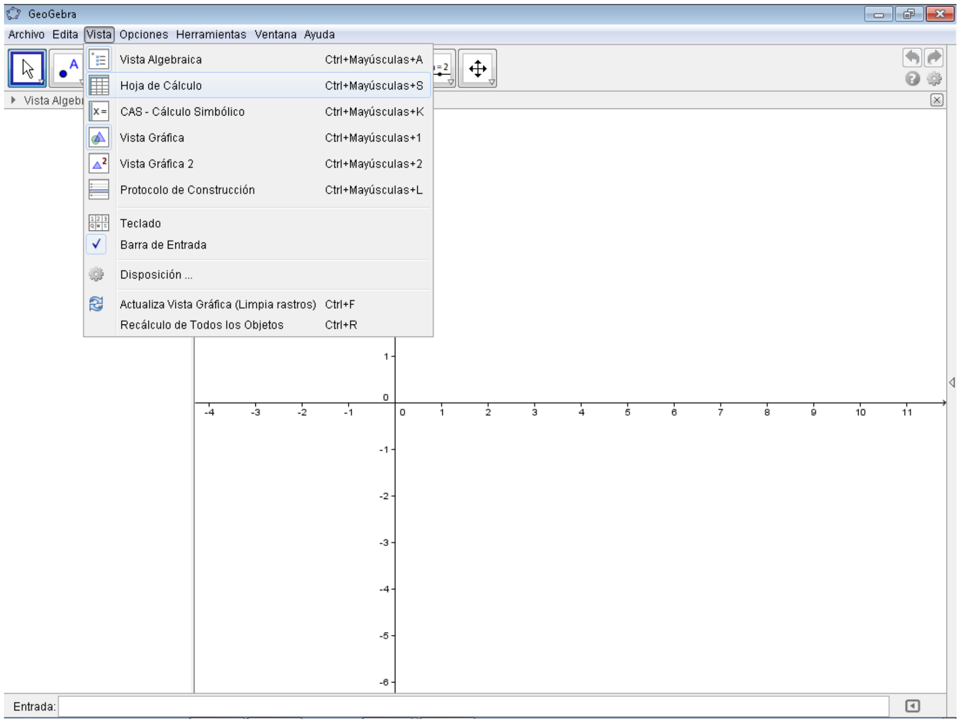
Este tutorial te permitirá realizar la graficación de los valores encontrados en la rueda de Chicago para las alturas que tienes tabuladas y también para la función $\sin\theta$

Lo primero que debes saber es que cuando hagas algo que no debías puedes eliminarlo con las teclas CONTROL + Z

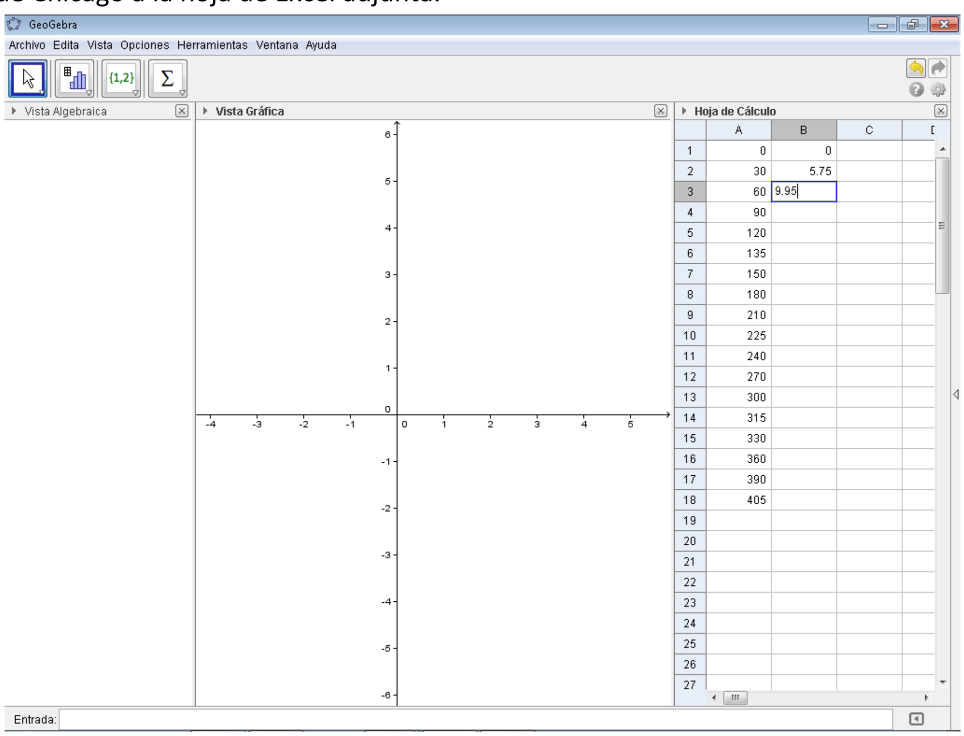
- Abre la página de geogebra on line o el programa directamente desde tu computador



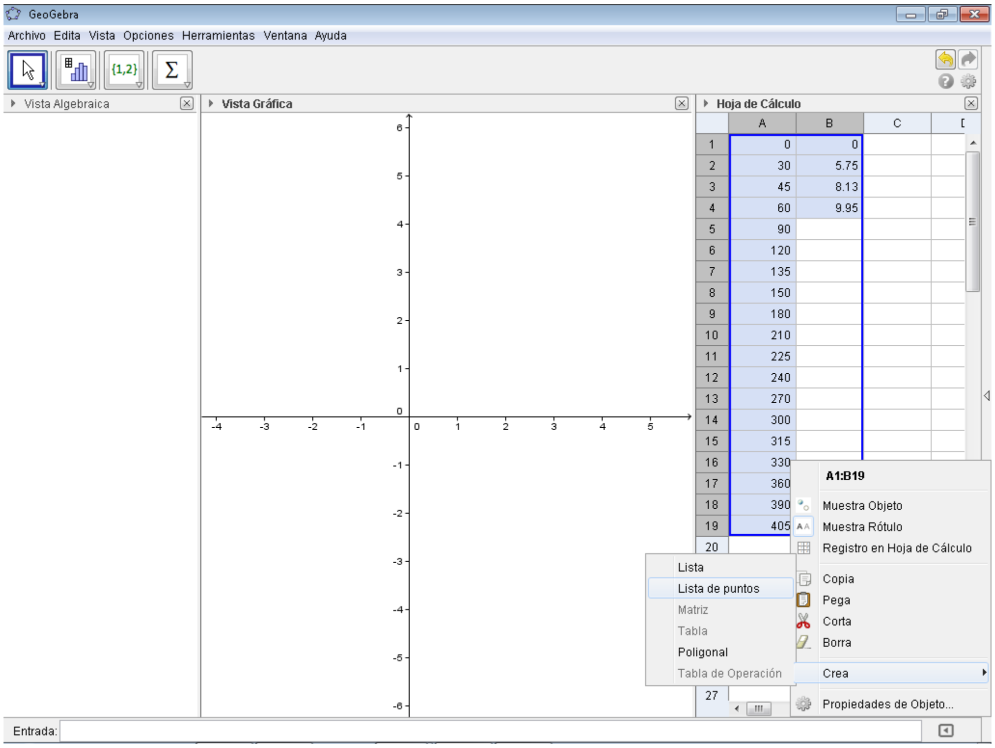
- De clic en la pestaña vista en la opción hoja de cálculo



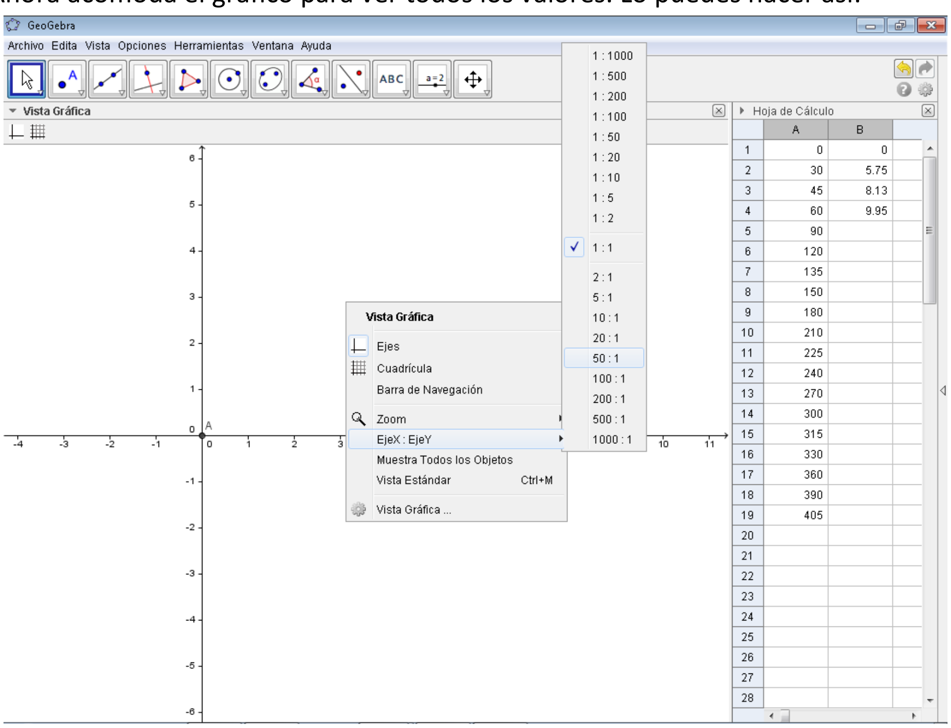
- Una vez abierta la hoja de cálculo, lleve los valores encontrados de las alturas en la rueda de Chicago a la hoja de Excel adjunta.



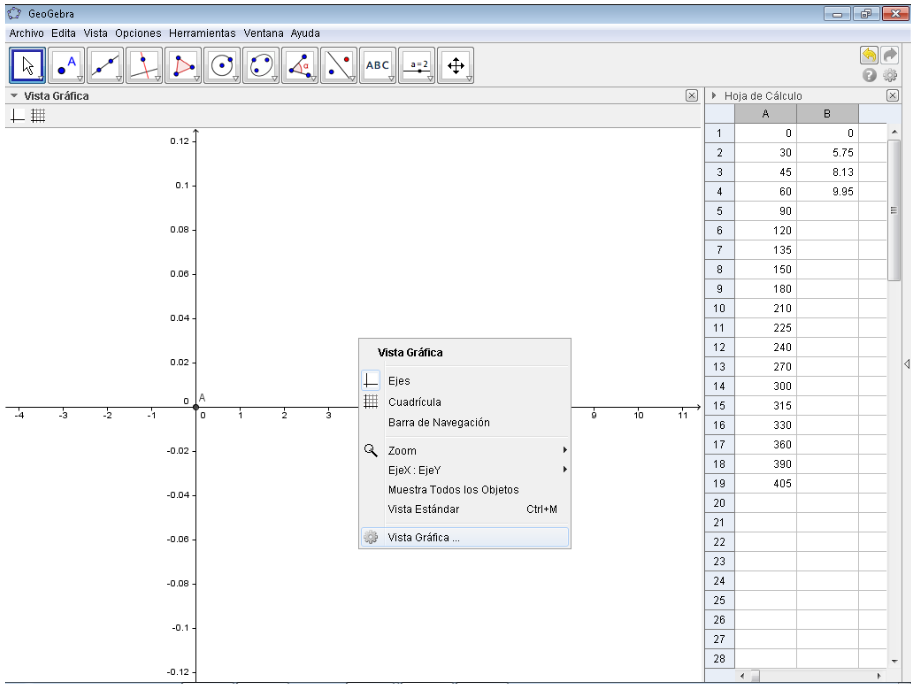
- Paso seguido se selecciona los datos y dando clic contrario se elige la opción lista de puntos



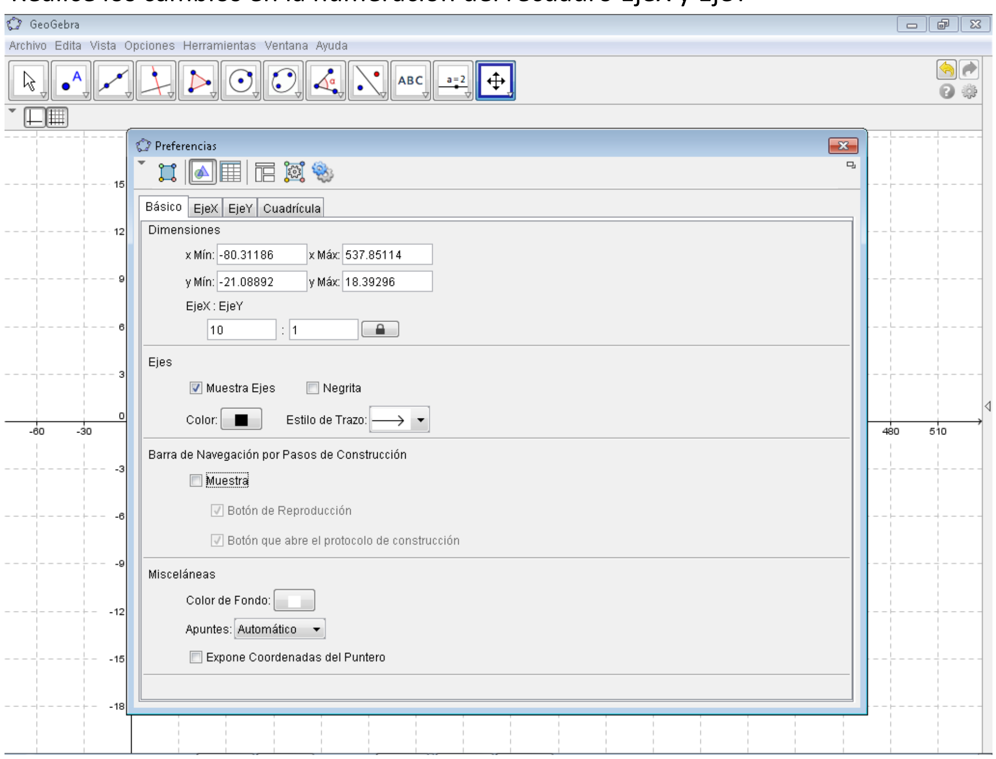
- Ahora acomoda el gráfico para ver todos los valores. Lo puedes hacer así:



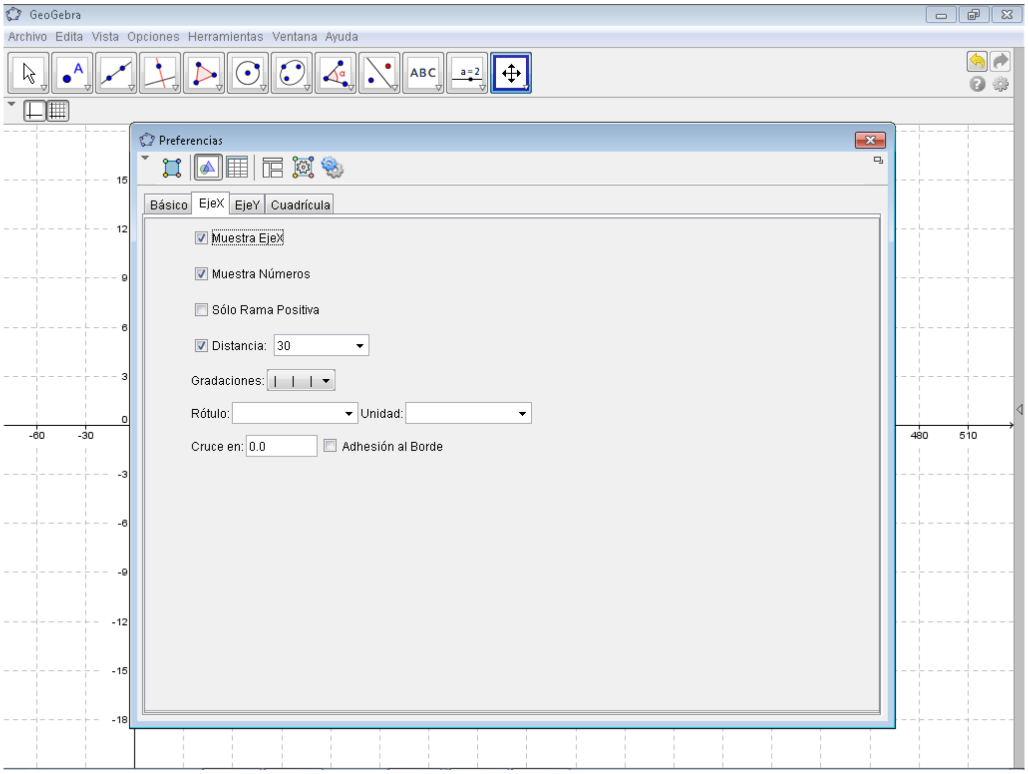
- Clic contrario y elige la opción vista gráfica



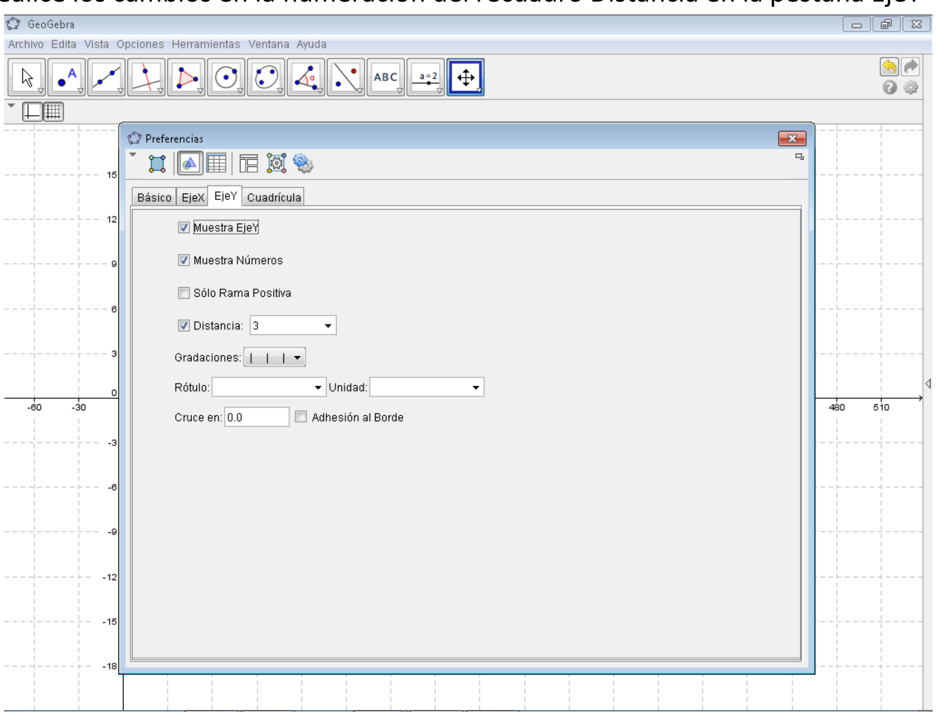
- Realice los cambios en la numeración del recuadro EjeX y EjeY



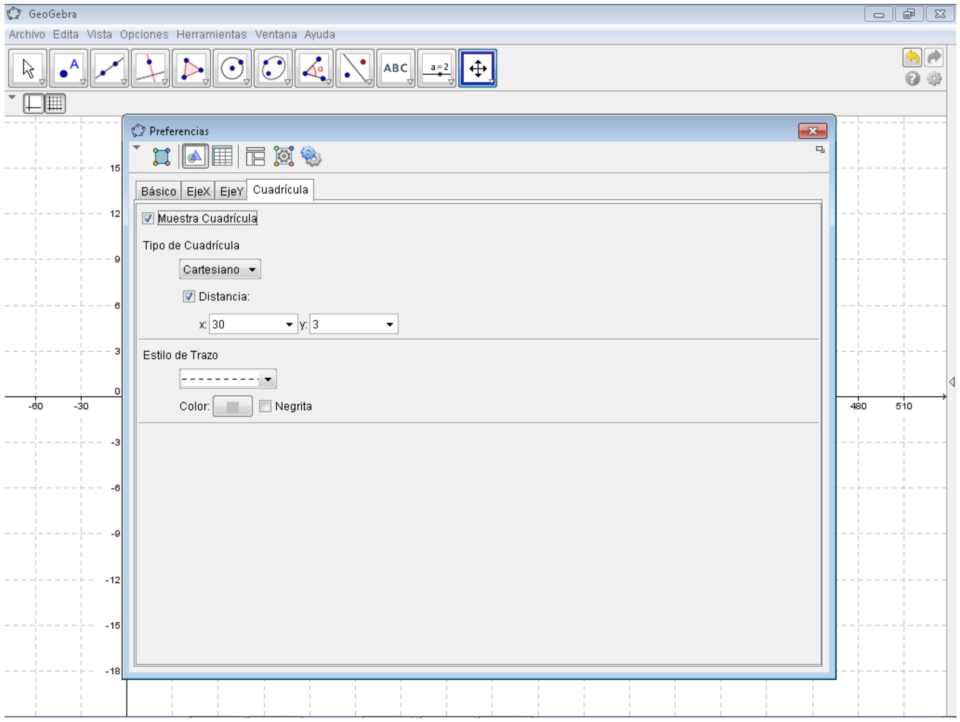
- Realice los cambios en la numeración del recuadro Distancia en la pestaña EjeX



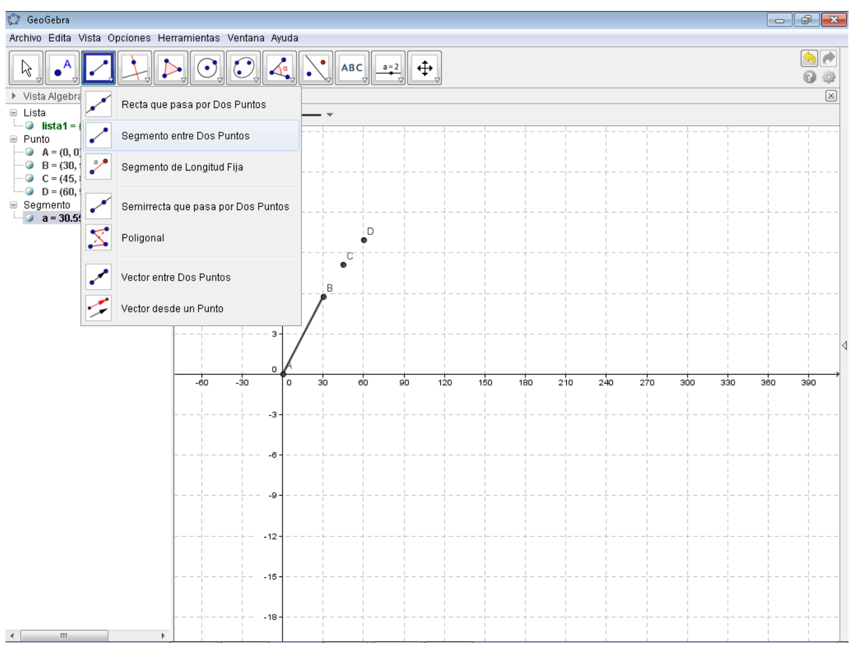
- Realice los cambios en la numeración del recuadro Distancia en la pestaña EjeY



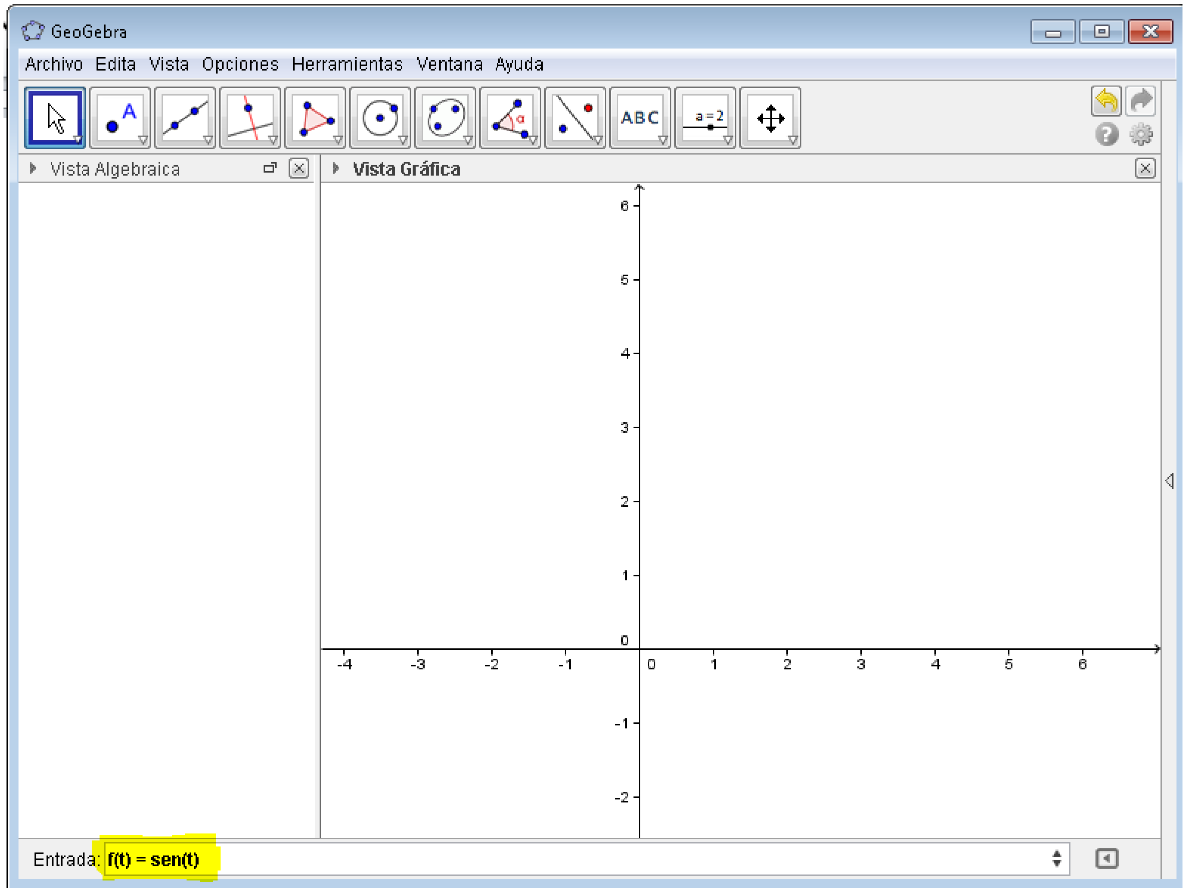
- Realice los cambios en la numeración del recuadro Distancia eh la pestaña Cuadricula y cierre la aplicación



- Ahora una los puntos con la opción segmento entre dos puntos. Una vez activada la herramienta se da clic en el primer punto, luego en el segundo punto y tienes un segmento.



- Para realizar la gráfica de la función y=sint, escriba la función abajo en la bandeja Entrada


GeoGebra
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
ABC
a = 2
Vista Algebraica
Vista Gráfica
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6
Entrada: f(t) = sen(t)

Anexo D. Actividad 4: Ejemplos análogos: pon a prueba tus conocimientos

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MONTECARLO-GUILLERMO GAVIRIA CORREA
Medellín- Grado décimo
Área: matemáticas- Período: III

Apellidos y Nombre: ____ VALORACIÓN:

Apellidos y Nombre: ____ ____________

Actividad de ejemplos análogos

Resuelve las siguientes situaciones basándote en tus conocimientos sobre la función seno.

1. Leandro se montó en una rueda de Chicago de radio de 25 m y forma con respecto al centro de la rueda y la horizontal imaginaria que pasa por el centro un ángulo de 60º.

✓ ¿Cuál es su altura respecto al centro de la rueda?	✓ ¿En qué ángulo volverá a ser igual su altura?

B. Si a los 10 segundos, ya lleva un ángulo de 300º,

✓ ¿Cuál es su altura respecto al centro de la rueda?	✓ ¿En qué ángulo tuvo una altura igual?

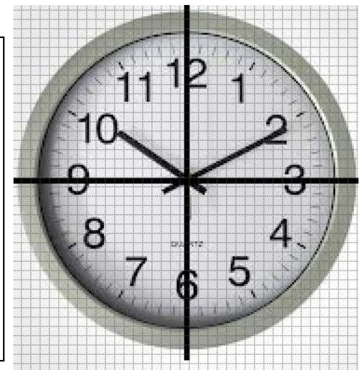
C. Si Leandro bajó de esa rueda y se montó en otra de radio 10 m, y forma con respecto al centro de la rueda y la horizontal imaginaria que pasa por el centro un ángulo de 60º.

✓ ¿Cuál es su altura respecto al centro de la rueda?	✓ ¿En qué ángulo volverá a ser igual su altura?

2. Camilo, para prepararse para su examen de matemáticas le toma una foto al reloj a tamaño real y lo pone en un plano cartesiano. Ahora se pregunta,

A. Si las coordenadas de la aguja horario son (7, 4),

✓ ¿Cuánto es la longitud de la aguja?	✓ ¿Qué ángulo forma la aguja en ese momento? ¿Qué hora es?



B. Si las coordenadas de la aguja horario son (7, -4),

- ✓ ¿Qué ángulo forma la aguja en ese momento? ¿Qué hora es?

C. Si la aguja del minutero mide 12 cm

✓ y las coordenadas son (5, y) ¿Cuánto vale y?	✓ y las coordenadas son (-5, y) ¿Cuánto vale y?

D. Si el ángulo que se forma es:

✓ 150º, ¿En qué posición en **y** está la aguja del minutero?	
✓ 180º, ¿En qué posición en **y** está la aguja del minutero?	
✓ 270º, ¿En qué posición en **y** está la aguja del minutero?	

E. Diga cuál es el seno del ángulo y el ángulo si la aguja del segundero (que mide 14 cm) está en las coordenadas:

✓ (7, 12.1)	✓ (10,10)
✓ (12.1, 7)	✓ (-12.1, -7)

Quien quiere hacer algo encuentra siempre un medio,

Quien no quiere hacer algo siempre encuentra una ***excusa***

(Proverbio hindú)

Anexo E. Actividad 5: Solución del problema de la altura en la Rueda de Chicago

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MONTECARLO-GUILLERMO GAVIRIA CORREA
Medellín- Grado décimo
Área: matemáticas- Período: III

Solución del problema de la altura en la Rueda de Chicago.

Cuando se trató el tema de las atracciones mecánicas, se planteó el problema relacionado con la posición de una persona que va sentado en una silla de la rueda de Chicago de 10 m mientras realiza su recorrido. Analicemos las preguntas que se hicieron en su momento y evalúa si ya puedes resolverlas.

Resuelve las siguientes preguntas

- *¿Cuál es el modelo de la altura en función del ángulo recorrido por la persona que va en la silla girando alrededor de la rueda?* Para responder a esta pregunta, modela una posible gráfica del recorrido de una persona en la rueda de Chicago de radio de 10 m, si este realiza 2 vueltas. (Sugerencia: utiliza como referencia 0°, 90°, 180°, 270°,…)

a. Tomando el centro de la rueda como referencia	b. Teniendo en cuenta que el centro de la rueda está a 3,5 m arriba del suelo.

- *¿Podría escribirse una función que se ajuste a los datos modelados en el plano cartesiano y que esta sirva para hallar más alturas en cualesquier ángulos?* Para verificar si puedes responder al interrogante del problema, escribe la función correspondiente para determinar la altura de la persona en función del ángulo

a. Tomando el centro de la rueda como referencia	b. Teniendo en cuenta que el centro de la rueda está a 3,5 m arriba del suelo.

- *¿Cómo podría esta función utilizarse para encontrar la posición de la persona en cualquier punto en el tiempo o de acuerdo a su ángulo?*

Utilizando la función escrita en el punto anterior y sabiendo que el radio de la rueda es de 10m, halle:

a. Altura máxima y mínima de la persona en la silla respecto al centro de la rueda.

b. Altura de la persona cuando el ángulo recorrido es de 70°, 110°, 250°, 290°

f(70°)=	f(110°)=	f(250°)=	f(290°)=
¿Qué regularidad encuentras en tus respuestas? ¿Cómo podrías explicarlo?			

- *¿Cuál es el modelo de la altura la persona que va en la silla girando alrededor de la rueda en función del tiempo? ¿Cómo puede determinarse la velocidad?* Para ello resuelve el siguiente planteamiento.

Sobre una rueda de Chicago Juan, quien va montado en la una silla, realiza el recorrido en la rueda a una velocidad constante. Camilo, quien está al frente de la rueda, toma un cronómetro y estima la altura de Juan respecto al suelo en diferentes tiempos.

Sus resultados son los siguientes:

Tiempo (segundos)	3	6	9	15	21	24	30	36
Altura estimada (metros)	19,4	23	23	13,5	4	4	13,5	23

¿Cuál es el radio de la rueda en la que va montado Juan?

Modela los datos en el plano cartesiano y escribe la ecuación de la altura en función del tiempo que más se adapte a la curva de puntos obtenidos por Camilo.

¿En qué momento Juan habrá realizado 5 vueltas en la rueda de Chicago?

Si la velocidad lineal de una persona que se mueve en la rueda en función del tiempo está dada por la ecuación $v(t) = \frac{2\pi}{t}$, donde t es el tiempo en segundos en que realiza una vuelta, ¿Cuál es la velocidad lineal de Juan mientras realiza el recorrido en la rueda?

Anexo F. Actividad 1: La función coseno y el Análisis de la distancia horizontal respecto al eje vertical que pasa por el centro de la rueda

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MONTECARLO-GUILLERMO GAVIRIA CORREA
Medellín- Grado décimo
Área: matemáticas- Período: III

Tema ¿Y qué tan alejado del centro está el está el sujeto que va en la rueda?

Indicador de desempeño: Establece relaciones entre las funciones trigonométricas a partir de su definición como puntos de la circunferencia unitaria, de cualquier radio y su graficación

Esta serie de actividades te permitirán analizar la importancia de las funciones periódicas para resolver problemas que surgen del diario vivir. Reconocerás la importancia de las funciones coseno en la circunferencia unitaria, pero a la vez, de manera extensiva a otras circunferencias que se pueden hallar en figuras circulares que encontramos a nuestro alrededor. Esta guía consta de las actividades que te permitirán resolver el problema propuesto, a través de la construcción de un modelo matemático, la presentación de ejemplos análogos y actividades interactivas a través de la página de internet y el software Geogebra.

Pautas para elaborar tu plan de trabajo	√
Lee la introducción al tema La función coseno como Función circular	
Lee el problema e intenta dar respuesta a las preguntas	
Realiza la actividad guiada La función coseno y el Análisis de la distancia horizontal	
Realiza la actividad guiada La función coseno como función circular	
Realiza la actividad guiada de graficación de la función coseno y sus características	
Realiza la actividad guiada de graficación de las función tangente	
Sintetiza, interpreta y presenta una conclusión general	
Resuelve el modelo matemático para la altura de un persona en la rueda de Chicago	

(ET) La función coseno como Función circular

Como ya hemos analizado en el estudio de fenómenos naturales y aquellos que son producto de la invención e intervención del hombre, se pueden llegar a modelar matemáticamente. En las anteriores actividades analizamos cómo la función seno relaciona la altura y el radio de una rueda de Chicago y, al comprenderla, este conocimiento se pudo aplicar al movimiento de las manecillas de un reloj, a la vez que se pudo graficar para analizar su crecimiento, decrecimiento y periodicidad.

Ahora, continuaremos analizando las funciones de tipo periódico o cíclico en diferentes situaciones. Para tal efecto, continuaremos analizando el problema de la Rueda de Chicago planteado en las actividades anteriores y construiremos el modelo que nos permita saber cuáles son las coordenadas de un punto que se mueve alrededor de un centro.

1. (DP) Descripción del problema

Una rueda de Chicago realiza giros a velocidad constante.

Una rueda de Chicago gira a una velocidad constante. La rueda de radio es de 10 m y la distancia entre la rueda y el suelo es de 2 m. Desde un punto delante de la rueda, Camilo está viendo a una persona que está en uno de las sillas de la rueda. Camilo da cuenta de que la persona se mueve en un círculo. Él estima qué tan alto y qué tan distante del centro está la persona si sistema de referencia es el centro de la rueda, en cada intervalo que pasa, a su vez, dibuja un diagrama de dispersión de su resultado en el plano cartesiano.

2. (FP) Resuelve las siguientes preguntas

- ¿Cómo es su gráfico del recorrido cuando se analiza su distancia horizontal respecto al centro?
- ¿Podría una función conocida utilizarse para modelar los datos?
- ¿Cómo podría esta función utilizarse para encontrar la posición de la persona en cualquier punto en el tiempo o de acuerdo a su ángulo?
- ¿Cómo podría esta función utilizarse para encontrar cuál es la distancia máxima horizontal de la persona y en cuál la mínima?
- ¿Qué característica de la función indicará el intervalo de tiempo durante el cual se produce un ciclo completo?

3. La función coseno y el Análisis de la distancia horizontal respecto al eje vertical que pasa por el centro de la rueda

Para esto primero vamos a utilizar la rueda de Chicago construida a escala, de varios radios.

Procedimiento

Toma cada rueda y escoge una silla como punto de referencia. Escribe la distancia horizontal a la que está la rueda que escogió respecto al punto central, para cada ángulo.

NOTA: Para esta actividad, tenga como punto de referencia el centro de la rueda como si estuviera en un plano cartesiano, donde a su derecha están los valores de positivos de x y a su izquierda los negativos. Por tal razón ponga estos valores teniendo en cuenta el signo dado.

Ángulo	DISTANCIA HORIZONTAL RESPECTO AL EJE VERTICAL QUE PASA POR EL CENTRO DE LA RUEDA			
	Circunferencia de radio ___ cm	Circunferencia de radio ___ cm	Circunferencia de radio ___ cm	Circunferencia de radio ___ cm
0º				
30º				
60º				
90º				
120º				
150º				
180º				
210º				
240º				
270º				
300º				
330º				
360º				
390º				
420º				
450º				
480º				
510º				

4. La función circular:

¿Podrías predecir la distancia horizontal de la silla respecto al origen si el radio tuviera un valor diferente?

De manera similar a la función seno, la función coseno es una función periódica. Para el caso de la rueda de Chicago, permite decir a qué distancia se encuentra una persona horizontalmente respecto al centro de la misma.

En la función circular representada por el movimiento de una persona en la rueda de Chicago existe una relación entre la distancia horizontal de la silla respecto al centro de la rueda y su radio.

Para esto toma un ángulo dado y los valores obtenidos de la altura respecto al centro de la rueda, como se muestra en la siguiente tabla

ángulo	$\frac{distancia\ horizontal}{radio\ \_\_cm}$	$\frac{distancia\ horizontal}{radio\ \_\_cm}$	$\frac{distancia\ horizontal}{radio\ \_\_cm}$	promedio	
0					

Resuelve las siguientes preguntas

1. Realiza una conclusión sobre los datos obtenidos para cada ángulo

____

____

____

2. Ahora toma tu calculadora y encuentra el coseno de cada ángulo dado y escríbelo en la última columna.

¿Cómo definirías la función coseno?

____

____

3. Completa la siguiente tabla

Cos 60º	Cos 120º	Cos240º	Cos 300º

¿Qué regularidad encuentras y a qué creas que se deba?

____

____

____

____

____

Escribe otros 6 grupos de ángulos para los cuales se cumple esta regularidad

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
Grupo 4	Grupo 5	Grupo 6

4. En el método de medir las alturas en la rueda de Chicago ¿Por qué no es necesario seguir tomando las medidas cuando los ángulos son mayores a 360°?

¿Qué indica esa regularidad sobre la función?

5. ¿En qué se parece y en qué se diferencia la función coseno que se está analizando y la función seno?

5. Si la rueda de Chicago se pusiera sobre un plano cartesiano con centro en el origen, ¿En qué cuadrantes su distancia horizontal sería positiva y en cuáles sería negativa?

6. Dé 3 ejemplos de ángulos donde la distancia horizontal sea positiva y tres donde sea negativa

Ejemplo ángulo	Cuadrante	Valor	Ejemplo ángulo positivo	Cuadrante	Valor
		positivo			
Ejemplo ángulo	Cuadrante	Valor	Ejemplo ángulo	Cuadrante	Valor
Ejemplo ángulo	Cuadrante	Valor	Ejemplo ángulo	Cuadrante	Valor

Anexo G. Actividad 2: Representación gráfica del movimiento de un sujeto en la rueda (Función coseno)

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MONTECARLO-GUILLERMO GAVIRIA CORREA
Medellín- Grado décimo
Área: matemáticas- Período: III

Representación gráfica del movimiento del sujeto en la rueda (Función coseno)

La función seno es una función periódica que en la circunferencia indica la posición de un cuerpo en cuanto a su altura respecto al origen. º

En la circunferencia unitaria
Dado que la posición P del cuerpo en cualquier instante está dado por P (θ) = (x , y) con entro en el origen y $x^2 + y^2 = 1$. Al valor de v, de la ordenada de P (θ), se llama coseno de θ y se denota por cos(θ), es decir, cos(θ) = x.
En la circunferencia de radio r
El valor de y, de la ordenada de P (θ), se halla con $cos(\theta) = \frac{x}{r}$

En la función circular la altura de un cuerpo que se mueve sobre la circunferencia se puede hallar si se halla el coseno del ángulo ($\cos\theta$)

Ahora bien, el modelo que permite ubicar esta altura teniendo en cuenta el radio es:

Altura x	=	Radio r	$\cos\theta$

Escribamos los valores que señalan la altura para un radio con respecto al centro de la rueda dada con la ayuda de la calculadora y comparemos con los encontrados por el método manual.

ángulo	0º	30º	45º	60º	90º	120º	135º	150º	180º	225º	240º
Distancia horizontal radio de ______											
ángulo	270º	300º	315º	330º	360º	390º	405º	420º	450º	480º	510º
Distancia horizontal ______											

1. ¿Cómo son los valores encontrados en la calculadora respecto a los valores del método manual?

2. **Si el radio de la rueda es de 1**, con respecto al eje x, responde:

   a. ¿En qué ángulos el cuerpo está a la mitad de la máxima distancia horizontal en el eje positivo de la x?

   b. ¿En qué ángulos el cuerpo está a la mitad de la mínima distancia horizontal en el eje negativo de la x?

   c. ¿Para qué ángulos la distancia horizontal es la misma? Escriba 4 grupos donde se discrimine si la posición en el eje es positiva o negativa

   d. ¿cuál es la distancia horizontal del cuerpo que se desplaza sobre la circunferencia? Realiza el procedimiento para varios ángulos con el modelo encontrado x=r*$\cos(\theta)$

Graficación de la función $\cos(\boldsymbol{\theta})$en el plano cartesiano

3. Utilizando el programa geogebra grafica los valores que tienes en la tabla anterior para un radio de _______ y responde:

Para la rueda de Chicago de radio _____ cm	
El dominio de la función graficada es:	El rango de la función graficada es:
La función crece en los intervalos:	La función decrece en los intervalos:
El periodo de la función es	Valor mínimo valor máximo

4. Utilizando el programa geogebra grafica los valores que tienes en la tabla de datos recolectados en la rueda de Chicago para un radio de _______ y responde:

Para la rueda de Chicago de radio ______ cm	
El dominio de la función graficada es:	El rango de la función graficada es:
La función crece en los intervalos:	La función decrece en los intervalos:
El periodo de la función es	Valor mínimo valor máximo

5. Grafica la función $f(x) = cos(\theta)$ en geogebra y responde:

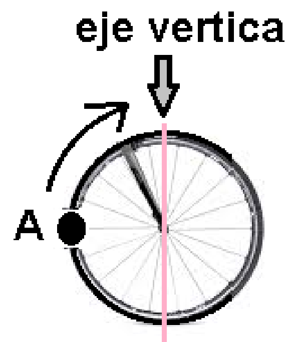
Para la rueda de Chicago de radio ______ cm	
El dominio de la función graficada es:	El rango de la función graficada es:
La función crece en los intervalos:	La función decrece en los intervalos:
El periodo de la función es:	Valor mínimo valor máximo:

5. Escribe las similitudes en las 3 gráficas que realizaste de las ruedas de Chicago en geogebra y las diferencias en cuanto a dominio, rango, crecimiento, decrecimiento, período.

Anexo H. Actividad 4: Ejemplos análogos- Pon a prueba tus conocimientos

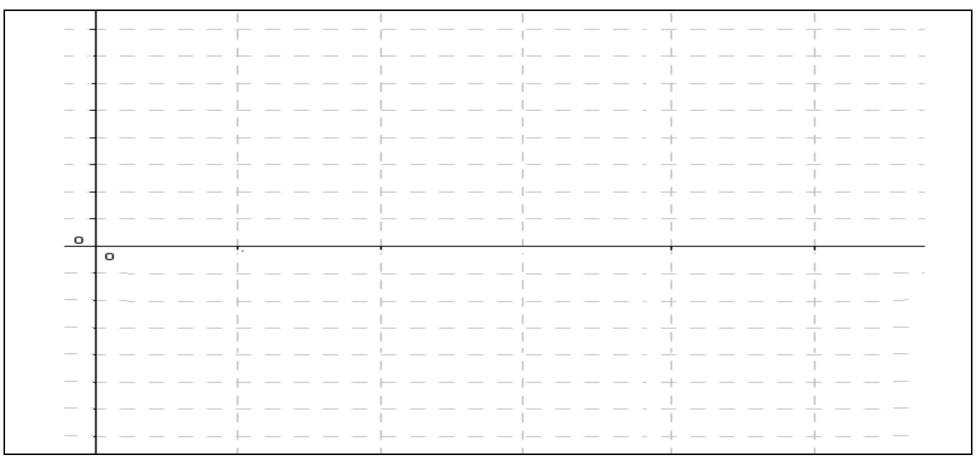
INSTITUCIÓN EDUCATIVA MONTECARLO-GUILLERMO GAVIRIA CORREA
Medellín- Grado décimo
Área: matemáticas- Período: III

Ejemplos análogos- Pon a prueba tus conocimientos



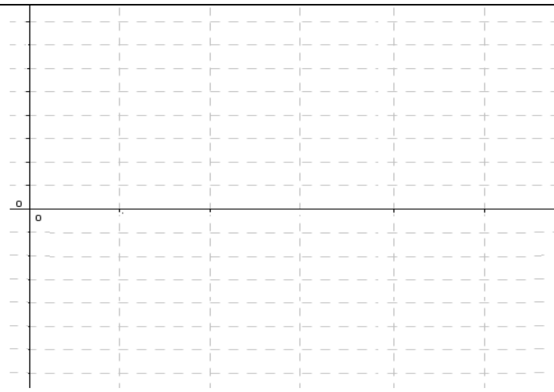
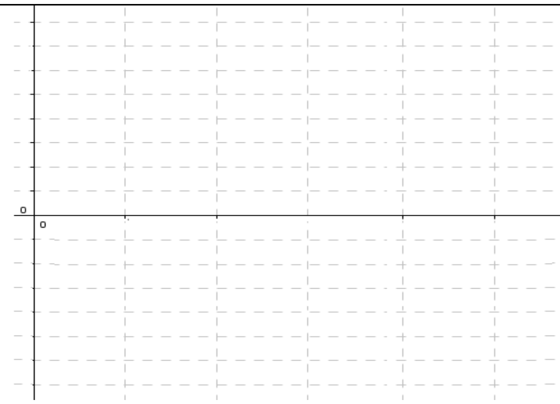
Carlos participa en la ciclovía esta mañana como muchas otras. La rueda delantera tiene un sensor que mide el tiempo en que la rueda tarda en realiza una vuelta. Si Carlos realiza su recorrido en línea recta sobre una carretera plana a velocidad constante, el sensor registra una vuelta cada 8 segundos.

1. Realiza la gráfica del recorrido que realiza el punto **A** respecto a la vertical que pasa por el origen si el diámetro de la rueda es de 60 cm. (En el eje x coloca el tiempo transcurrido)



Conteste la siguiente pregunta teniendo en cuenta el gráfico de la bicicleta.

2. Realice la gráfica para un punto B con respecto al eje vertical, pero tomando como eje de referencia el que pasa por el centro de la rueda trasera. (En el eje x coloca el tiempo transcurrido)

Gráfica tomando como referencia rueda trasera	Gráfica tomando como referencia rueda delantera
	

3. Escriba la ecuación del recorrido del punto **A** en la rueda delantera en función del tiempo transcurrido.

4. Escriba la ecuación del recorrido del punto **B** en la rueda trasera en función del ángulo formado por el punto B si el eje de referencia es el eje vertical <u>que pasa por el centro de la rueda</u>.

5. Escriba la ecuación del recorrido del punto **B** en la rueda trasera en función del ángulo formado por el punto B si el eje de referencia es el eje vertical <u>que pasa por el centro de la rueda delantera.</u>

"Las Matemáticas no son un recorrido prudente por una autopista despejada, sino un viaje a un terreno salvaje y extraño, en el cual los exploradores se pierden a menudo"

(W.S. ANGLIN)

Anexo I. Actividad 5: Solución del problema de la Rueda de Chicago

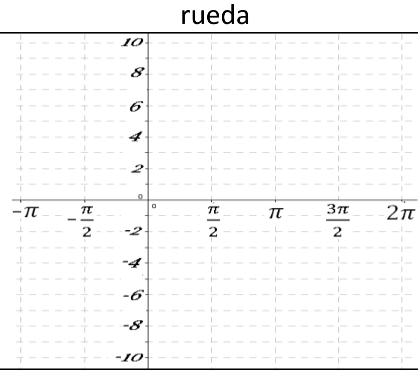
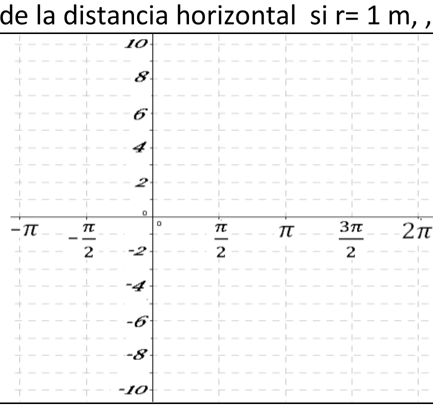
INSTITUCIÓN EDUCATIVA MONTECARLO-GUILLERMO GAVIRIA CORREA
Medellín- Grado décimo
Área: matemáticas- Período: IV

Solución del problema de la Rueda de Chicago.

Se había preguntado al inicio de las funciones seno y coseno el problema de una persona que se mueve en una silla sobre una rueda de Chicago de 10 m. Analicemos las preguntas que se hicieron en su momento para determinar si ya puedes resolver a las preguntas.

Resuelve las siguientes preguntas

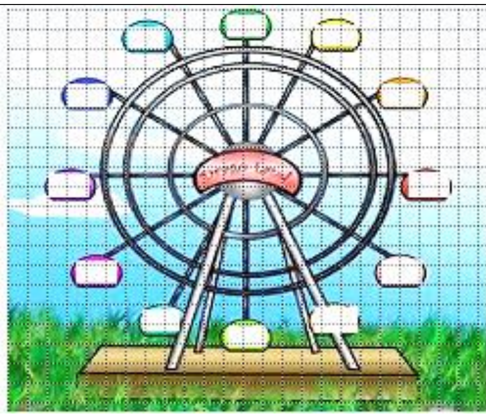
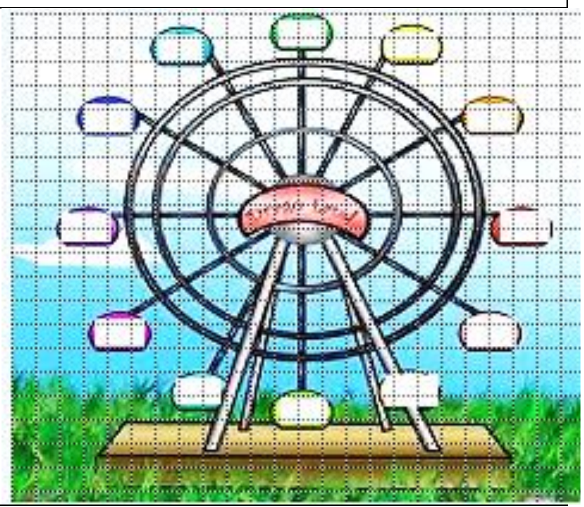
- *¿Cómo es su gráfico del recorrido cuando se analiza su distancia horizontal respecto al centro? ¿Podría una función conocida utilizarse para modelar los datos?* Para esto, realice el gráfico en el intervalo $[-\pi, 2\pi]$ para la altura si la rueda es de 1 m, de 5 m y de 10 m. Repita el procedimiento para graficar el recorrido que determina la distancia horizontal. Escribe las características de cada una.

Recorrido de la altura si r= 1 m, 5 m y 10 m respecto al centro de la rueda	Características
	
Recorrido de la distancia horizontal si r= 1 m, , 5 m y 10 m	Características
	

- *¿Podrían escribirse funciones que modelen los puntos coordenados en el plano cartesiano y que a la vez sirvan para encontrar más posiciones de la persona en cualesquier ángulos?*

Función para modelar la altura	Función para modelar la distancia horizontal

Para responder as esta pregunta te sugerimos varias ruedas puestas sobre el plano cartesiano; usando las funciones que permiten modelar las distancias horizontal y vertical (respecto al centro) de una persona que se mueve en una silla de la rueda. Encuentre las coordenadas de la posición de la persona para cada ángulo dado.

Para r=1 m	Para r=5 m
	

En el problema de la rueda de Chicago, el radio era de 10 m, ¿Cuáles son las posiciones?

Si la persona está en una rueda cuyas coordenadas se muestran a continuación, determine el radio de la rueda y el ángulo formado con respecto al eje x que pasa por el centro de la rueda

P= (10, 10)	P= (-3, 4)	P= $(\sqrt{6}, \sqrt{10})$

- *¿Cómo podría una función matemática utilizarse para encontrar la distancia horizontal respecto al centro de la persona en cualquier punto de acuerdo a su ángulo?*
  Para responder esta pregunta es necesario volver a la ecuación que modela la distancia horizontal en función del ángulo recorrido; usando dicha ecuación, halle la distancia horizontal de la persona cuando el ángulo recorrido es de 15°, 165°, 195°, 345°. Recuerda que el radio de la rueda es de 10 m.

f(15°)=	f(165°)=	f(195°)=	f(345°)=
¿Qué regularidad encuentras en tus respuestas? ¿Cómo podrías explicarlo?			

- *¿Cómo podría esta función utilizarse para encontrar cuál es la distancia máxima horizontal de la persona y en cuál la mínima?*

Para verificar que tienes la habilidad de responder a este interrogante, halla la máxima distancia a ambos lados del eje vertical que pasa por el centro de la rueda de una persona que se mueve alrededor de la silla. Recuerda que el radio de la rueda es de 10 m.

Anexo J. Actividad 1: Análisis de modelos sencillos de transformación de funciones

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MONTECARLO-GUILLERMO GAVIRIA CORREA
Medellín- Grado décimo
Área: matemáticas- Período: IV

Transformación de funciones

Las funciones trigonométricas presentan variaciones cuando a la variable o la función se le suma o se le multiplica por algún número real. Estas variaciones tienen repercusiones en sus gráficas y se manifiestan en traslaciones, reflexiones, alargamientos y compresiones a las gráficas originales.

Para el estudio de las funciones aplicadas al movimiento ondulatorio es conveniente precisar lo siguiente

Función como modelo matemático	Función como Movimiento ondulatorio
Amplitud: En la circunferencia era el radio de la rueda de Chicago y en la gráfica bien podía representar el máximo valor en las funciones seno y coseno dado su radio.	Amplitud: elongación máxima que realiza un cuerpo o las partículas en un movimiento periódico
Período: ángulo en que se completa un ciclo	Período: tiempo en el que se completa un ciclo.
Corte eje y: La función seno corta el eje y en 0 y la función coseno en 1.	Corte eje y: En algunas ocasiones las funciones senoidales sufren traslaciones verticales lo que hace que corte el eje y en diferentes valores a los originales
Frecuencia angular: permite determinar la frecuencia del movimiento senoidal, expresada en proporción del cambio de ángulo	Frecuencia angular: Sirve para determinar la velocidad con la que se desplaza una onda. Entre menor sea el valor de su período mayor será su frecuencia.

Actividad

Para realizar este análisis nos valdremos del software geogebra. Abre la aplicación escribe cada una de las siguientes funciones y completa la siguiente tabla.

1. Escribe el cambio ocurrido al observar la gráfica dada con respecto a las funciones originales f(t)= sen(t) y f(t)= cos(t)

Función	Amplitud	Período	Frecuencia angular	Traslación horizontal	Traslación vertical
f(t)=sen (t)					

g(t)=3sen(t)					
h(t)=5sen (t)					
i(t)= 10sen (t)					
j(t)=sen (t)					
k(t)=sen (t)+2					
l(t)=sen (t)+5					
m(t)=cos (t)					
n(t)=cos (t) + 3					
o(t)= cos (t) - 3					
p(t)=cos (5t)					
q(t)=sen (t+2)					
r(t)=sen (t-2)					
w(t)=sen (t+5)					
t(t)=sen (2t)					
u(t)=sen (4t)					
v(t)=sen (0.5t)					
w(t)=4sen (0.5t)					
a(t)=sen (t-6)-3					
y(t)=6cos (0.5t)+ 5					
z(t)=5sen (3t) - 4					

2. Para cada una de los siguientes elementos de la función escribe cuando identificas una transformación desde su gráfica y desde la ecuación.

Amplitud	Se evidencia su cambio en la gráfica cuando	Se evidencia un cambio cuando en la ecuación:

Período	Se evidencia su cambio en la gráfica cuando	Se evidencia un cambio cuando en la ecuación:

Frecuencia angular	Se evidencia su cambio en la gráfica cuando	Se evidencia un cambio cuando en la ecuación:

Corte eje y	Se evidencia su cambio en la gráfica cuando	Se evidencia un cambio cuando en la ecuación:

3. Escribe una función general y con una flecha señala sus elementos

Anexo K. Actividad 2: Tarea práctica

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MONTECARLO-GUILLERMO GAVIRIA CORREA
Medellín- Grado décimo
Área: matemáticas- Período: IV

Apellidos y Nombre: ____ VALORACIÓN:
Apellidos y Nombre: ____ _____________

Tarea práctica

A la página http://quiz.uprm.edu/tutorials_master/fn_trig_mod/fn_trig_mod_right.xhtml y realice la siguiente tarea.

1. ¿Cuáles son los pasos para modelar situaciones del mundo real?

2. Sobre la situación planteada sobre la altura de una marea:

- ¿Por qué se escoge la función coseno?
- ¿Qué significan los puntos coordenados?

Explique el proceso de transformación de la función inicial sugerido en la página.

3. Sobre la situación planteada sobre el cambio de temperatura:

- ¿Podría usarse la función coseno para la curva descrita en la gráfica? Sustente su respuesta.
- ¿Cuánto valen la amplitud y el período y qué significan?

4. Observe los modelos representados de las 4 situaciones planteadas; escoja uno de ellos y:

- Proponga una tabla de valores
- Modele la situación que usted planteó (Use Geogebra para tabular puntos; tome la foto de la pantalla con la tecla **Imp Pant**)
- Escriba la función que representan los datos que usted sugirió.

NOTA: Realizar la actividad en parejas, en Word y subir a la página de Modle o enviar al correo electrónico del docente.

Anexo L. Actividad 3: Ejemplos análogos de generalización de funciones

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MONTECARLO-GUILLERMO GAVIRIA CORREA
Medellín- Grado décimo
Área: matemáticas- Período: IV

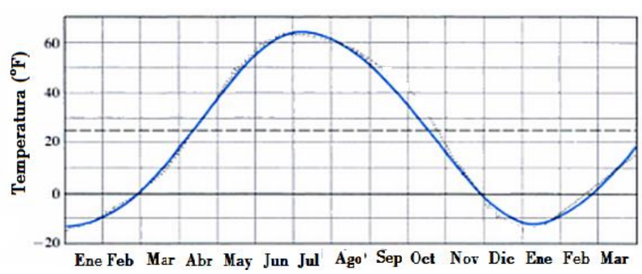
Apellidos y Nombre: ____ VALORACIÓN:

Apellidos y Nombre: ____ ______________

Actividad de ejemplos análogos- Generalización de funciones

1. La siguiente gráfica muestra el comportamiento de la temperatura ambiente diaria en una ciudad, según lo registra el servicio Nacional Meteorológico. Usando la función senoidal para ajustar los datos se modeló así:

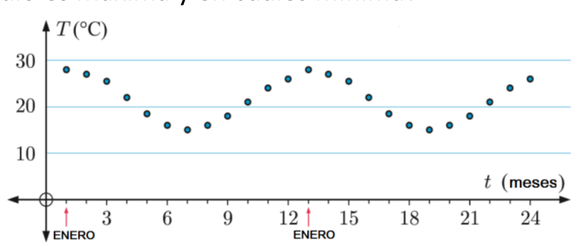
$F(t) = 37sen\left[\frac{2\pi}{365}(t-101)\right]+25$, en donde f es la temperatura, t describe el número de días que han pasado desde el inicio del año



Su gráfica se muestra a continuación.

- ¿Qué indica la amplitud?
- ¿Cuál es el período de la función?
- Halle la temperatura promedio a los 2, 6 y 12 meses (recuerde remplazar t en días)
- ¿Cuál es el desplazamiento horizontal y el vertical y qué indican?
- ¿En cuáles meses la temperatura promedio es máxima y en cuáles mínima?

2. La temperatura muestra una variación de un promedio de 28 º C en enero a través de una serie de valores a través de los meses. El ciclo se repite para el siguiente período de 12 meses.



- Halle amplitud, el período en meses y escriba la función que se ajusta alrededor de este conjunto de puntos como una función coseno y como una función seno.

3. La corriente eléctrica, que es la forma como la electricidad llega empresas y hogares, al igual a las señales de radio transmitidas por cables eléctricos, son ejemplos de corriente alterna. La forma de onda de la corriente alterna más común es de tipo sinusoidal, lo que permite un modelo para representarla en función del tiempo, por medio de la ecuación:

$V = V_{max} sen 2f\pi t$, de donde V_{max}es la amplitud en voltios, f la frecuencia y en Hertz y t el tiempo en segundos.

a. En algunos lugares, la corriente alterna llega las residencias con una frecuencia de 40 Hertz, a 220 voltios.

- ¿Qué indica la amplitud y el periodo?
- Modele el voltaje en función del tiempo y bosqueje una posible gráfica.

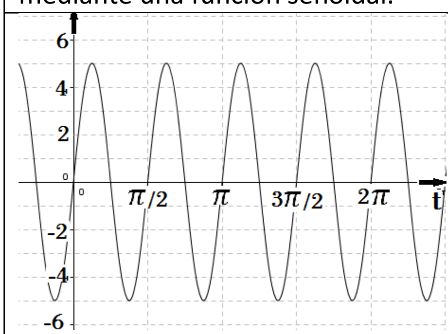
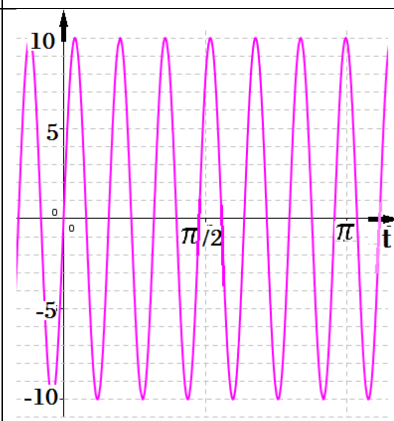
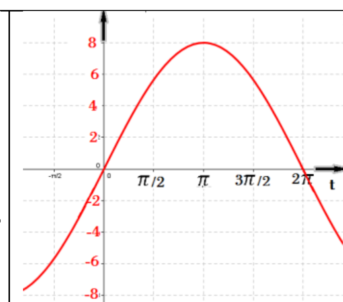
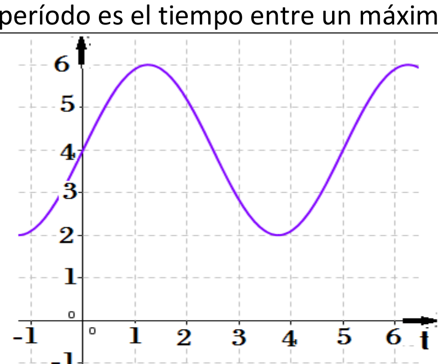
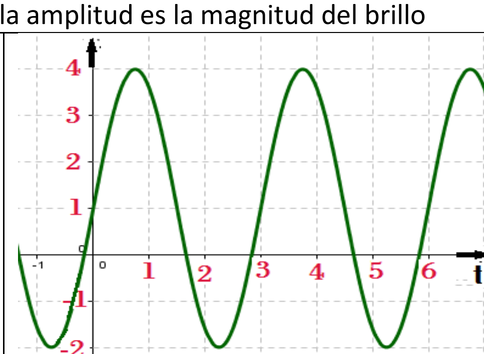
b. Si la corriente eléctrica es con el voltaje de 120, que usualmente se usa en nuestros hogares, con una frecuencia de 60 Hertz,

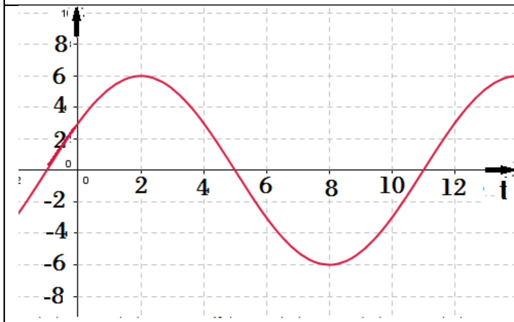
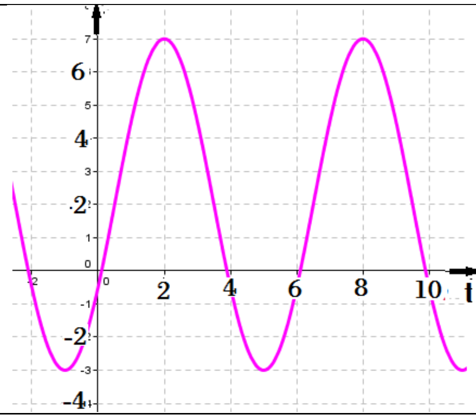
- Modele el voltaje en función del tiempo y bosqueje una posible gráfica.

c. Un generador provee corriente alterna de 80 voltios con un período de $\frac{1}{75}$.

- Halle frecuencia, frecuencia angular, amplitud y escriba la función dada.

4. Dadas las siguientes gráficas identifica sus elementos y escribe la función correspondiente.

<table>
<tr><td>a. Péndulo. El movimiento de un péndulo en el tiempo puede representarse gráficamente mediante una función senoidal.</td><td colspan="2">b y c . Resorte en vibración. El desplazamiento de la masa de un resorte, siendo un movimiento armónico simple, donde la amplitud es el desplazamiento máximo de la masa.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="3">d. y e. Estrellas variables. La gráfica muestra el brillo de una estrella en función del tiempo. El período es el tiempo entre un máximo brillo y otro y la amplitud es la magnitud del brillo</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="3">f. y g. Altura de la marea. Las siguientes gráficas muestran la variación del nivel del agua en una</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">bahía, en un periodo de t horas. Encontrar un modelo que describa la variación del nivel del agua en función del número de horas.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

La riqueza de un hombre no se encuentra en la cantidad de dinero que posee, sino en la calidad de su conocimiento y educación.

Javier Herrera

Anexo M. Actividad 4: Resolución del problema: representación de ondas sonoras

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MONTECARLO-GUILLERMO GAVIRIA CORREA
Medellín- Grado décimo
Área: matemáticas- Período: IV

Apellidos y Nombre: ____ VALORACIÓN:
Apellidos y Nombre: ____ _____________

Solución del problema de las ondas sonoras.

Al golpear un diapasón, este vibra emitiendo ondas sonoras con una determinada frecuencia y emite un sonido persistente que es amplificado por la caja de resonancia. También sucede así cuando se producen sonidos vocálicos.

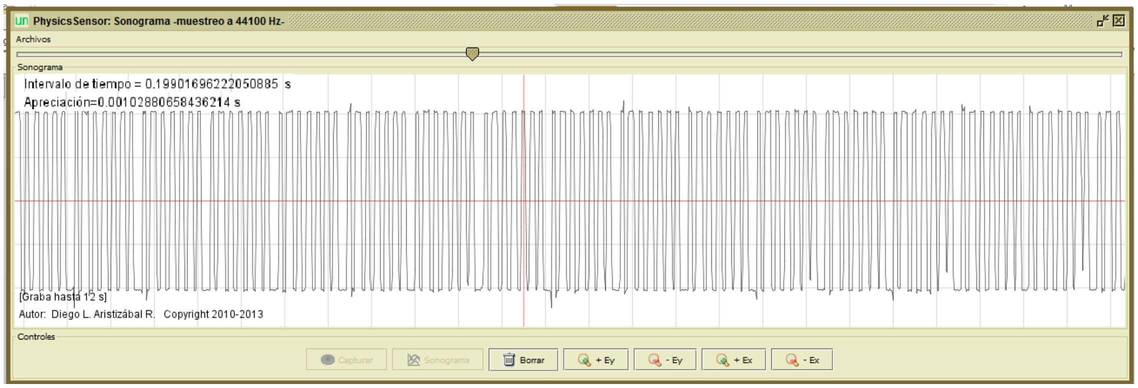
1. Utilizando el programa de PhysicsSensor emite sonidos hasta que su gráfica produzca un movimiento periódico.

- *¿Por qué se dice que la representación de las ondas producidas por una fuente sonora tiene forma sinusoidal?*

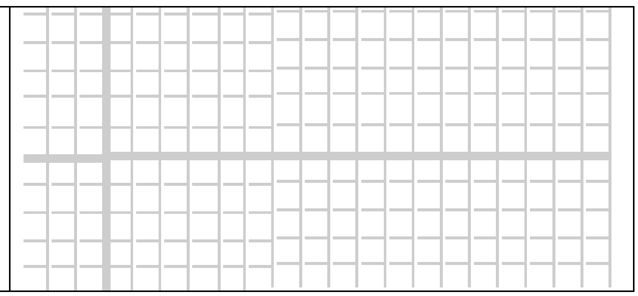
- *¿Se podrían determinar son los elementos que caracterizan la función modelada a partir de su gráfica? ¿Cuál es el período de la función?* Para responder a este interrogante, en la gráfica del sonoscopio determine la frecuencia, la amplitud, el período del sonido a partir de su gráfica

- *¿Cómo puede expresarse la función matemáticamente como una función del tiempo? Para ello, e*scribe la función matemática que modela el volumen del sonido que generaste en función del tiempo

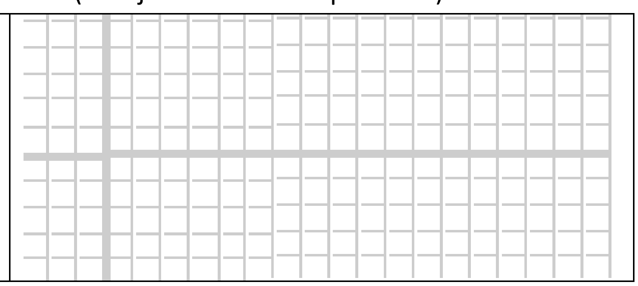
2. Para la siguiente gráfica determina sus elementos y escribe la función correspondiente.

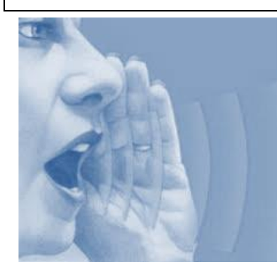


3. Un ejecutante de tuba toca la nota mi sosteniendo el sonido durante cierto tiempo. Al depurar el sonido producido, su ecuación es:$V(t) = 0{,}2sen80\pi t$. Halla sus elementos y modele la función en el plano cartesiano (Dibuje al menos dos períodos).



4. Si el ejecutante de la tuba toca la nota fa sosteniendo el sonido durante cierto tiempo e incrementa el volumen en una amplitud de 0.6 y su frecuencia angular es 112π. Determine su ecuación y modele la función en el plano cartesiano (Dibuje al menos dos períodos)





5. Durante algún tiempo se registraron los sonidos producidos por una persona cuando intentaba sostener una nota que fuera posible su graficación.

Los resultados hallados se ubican en la siguiente tabla.

Tiempo (segundos)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
Volumen	9	10	9	6	3	2	3	6	9	10

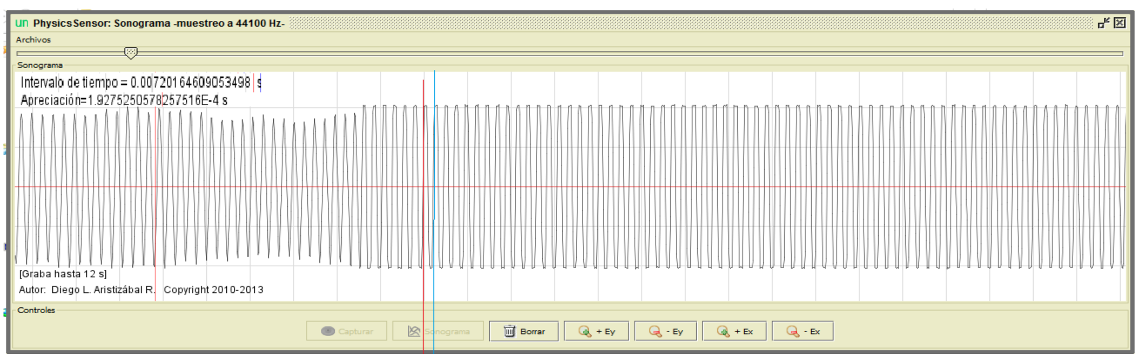
Lleve los datos en el plano cartesiano y escriba la función que modela el volumen del sonido en función del tiempo.

6. (Punto bonificación) Durante 2 años fue medida la temperatura promedio mensual en la ciudad. Los resultados hallados se ubican en la siguiente tabla.

Mes	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC
Tiempo (°C)	28	27,5	25,5	22	18,5	15,5	15	15,5	18	21,5	24	27,5

Modele los datos en una tabla y escriba la función que determina la temperatura en función del tiempo.

7. (Punto bonificación) Para la siguiente gráfica determina sus elementos y escribe la función correspondiente.



Nunca consideres el estudio como un deber, sino como una oportunidad para penetrar en el maravilloso mundo del saber.

Albert Einstein

Anexo N. Prueba de entrada

	INSTITUCIÓN EDUCATIVA MONTECARLO-GUILLERMO GAVIRIA CORREA ***(Antes I. E. República De Barbados), Medellín*** ***Aprobación de estudios según Resolución Departamental No. 044 de enero 20 de 1970, Acuerdo Municipal No. 0016 de mayo de 1995 y Resolución No.07026 de mayo 31 de 2012 por medio de la cual se cambia el nombre a la Institución; núcleo 916; Dane: 105001001236*** ***PRUEBA ENTRADA, 2013***	**VALORACIÓN:**

Docente: *Alexis Gil Suárez* ***Área:*** *Matemáticas* ***Tiempo:*** *55 minutos*
Apellidos y Nombre del Estudiante: ____
Grado y grupo: *10°* ***Periodo:*** *III* ***Fecha:*** *Agosto / 2013*

Instrucciones:

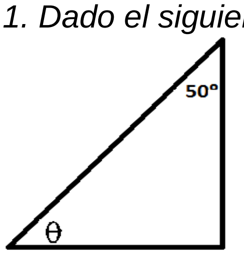
- Para esta prueba está prohibido el uso de cualquier recurso y herramienta, sacarlo y usarlo lleva a la anulación de ella.

REQUISITOS PARA FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Antes de comenzar el estudio de funciones trigonométricas, resuelve la siguiente prueba que nos permite analizar tus conocimientos previos, los cuales son necesarios para desarrollar el tema.

Desarrollo de la prueba:

1. Dado el siguiente triángulo

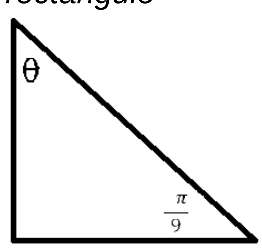


El ángulo θ en radianes mide:

A. $\frac{2\pi}{9}$ B. $\frac{\pi}{2}$

C. $\frac{2\pi}{5}$ D. $\frac{\pi}{5}$

2. Dado el siguiente triángulo rectángulo

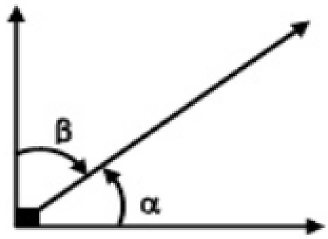


El ángulo θ en grados mide:

A. -10º B. 10º

C. 20º D. 70º

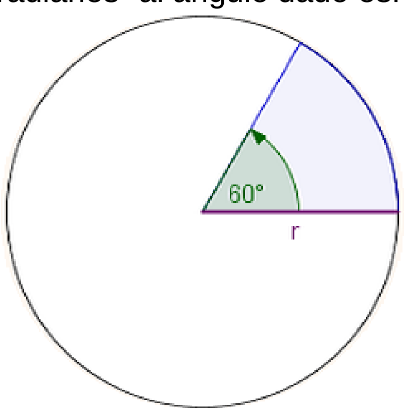
3. Señale la relación entre $\propto$ y β.



A. $\propto +\beta = 90º$ B. $\propto -\beta = 90º$
C. $\propto -\beta = 0º$ D. $\propto +\beta = 0º$

4. Al invertir el sentido de rotación de un ángulo; la magnitud cambiará de............
A. sentido B. signo
C. tamaño D. posición.

5. La longitud de arco asociado -en radianes- al ángulo dado es:



A. $\frac{\pi}{3}$ B. 20π

C. 3π D. $\frac{2\pi}{3}$

6. Si un punto A tiene coordenadas (1,2) y un punto B tiene coordenadas (9,8), ¿Cuál es la distancia aproximada entre los dos puntos?

A. 10 B. 9

C. 8 D. 7

7. La distancia entre los puntos A (-5,4) y B (7,-1) es:

A. 5 B. 13

C. 17 D. 18

8. Si $a=6$ y $d=8$, el valor de la expresión $\frac{(a+d)(a-d)}{2}$ es:

A. 16 B. -16

C. 14 D. -14

9. En la función **Y = - 2X^3** Cuando la X toma el valor de - 3 el valor de la Y es igual a:
A. 18 B. -18

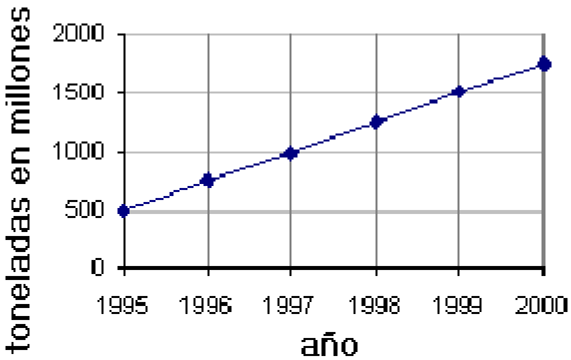
C. 54 D. -54

10. Se ha calculado que para llegar a una isla se debe navegar cierta cantidad de millas, para conocerlas esta dado por la ecuación 2X + 3 = 6 - 2 + X ¿cuál es el valor de X?

A. X = 12
B. X= -2
C. X= 2
D. X = 1

11. Entre dos bibliotecas tienen 575 libros, si en la segunda hay 273 libros y si desea conocer cuantos libros hay en la primera, se representa así:
A. y -273 = 575
B. y – 575 = 273
C. y + 273 = 575
D. y + 575 = 273

Responde la pregunta 12 de acuerdo con la siguiente información.

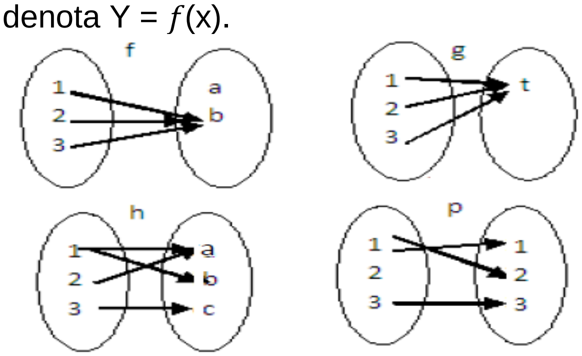


12. Con base en la gráfica anterior, se puede afirmar que la producción de café, a nivel nacional fue de:

   A. 350 millones de toneladas en el año 1996
   B. 750 millones de toneladas en el año 1995
   C. 1.250 millones de toneladas en el año 1998
   D. 1.600 millones de toneladas en el año 1999

Funciones

Una función f de un conjunto A en un conjunto B es una regla que hace corresponder a cada elemento x perteneciente al conjunto A, uno y solamente un elemento y del conjunto B, llamado imagen de x por f, que se denota Y = f(x).



13. De los diagramas anteriores no garantiza una función.
A. los diagramas f y p
B. los diagramas g y p
C. El diagrama h solamente.
D. los diagramas f y g.

14. Supóngase que (t) mide la concentración del oxígeno en un estanque, donde (t) = 1 es la concentración normal, midiéndose el tiempo t, en semanas. A t = 0 se vierte algún desecho orgánico en el estanque, y conforme se oxida, la concentración del oxígeno viene dada por

$$f\ (\boldsymbol{t})\ =\ \frac{\boldsymbol{t^2+1-1}}{\boldsymbol{t^2+1}}$$

Al sustituir t = 1 se obtiene el porcentaje de la concentración del oxígeno f(t) en una semana el cual es de
A. 50%
B. 60%
C. 150%
D. 90%

15. Dadas las relaciones:

I) $R_1 = \{(3,3),(4,4),(5,4)\}$
II) $R_2 = \{(3,3),(4,4),(5,5)\}$
III) $R_3 = \{(3,4),(4,4),(5,3)\}$

entonces, la o las que tienen por **Dominio = {3,4,5}** y **Rango= {3,4}** es son:

A. Sólo I
B. Sólo II
C. I y II
D. I y III

16. El dominio de la función real dada por la fórmula $f(x) = \sqrt{3x-6}$ es:

A. $Domf = \{x \in \mathbb{R}/\ x \geq 3\}$

B. $Domf = \{x \in \mathbb{R}/\ x \geq 2\}$

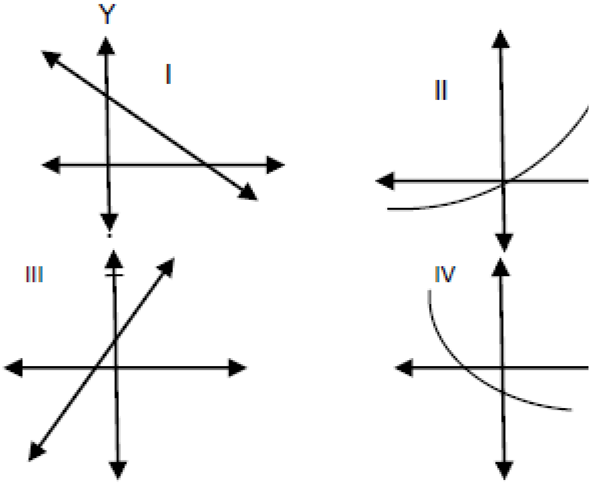
C. $Domf = \{x \in \mathbb{R}/\ x \leq 2\}$

D. $Domf = \{x \in \mathbb{R}/ x \geq -2\}$

17. Sea $f: R \rightarrow R$ tal que $f(x) = \dfrac{x-2}{3x+12}$, el dominio de f es:

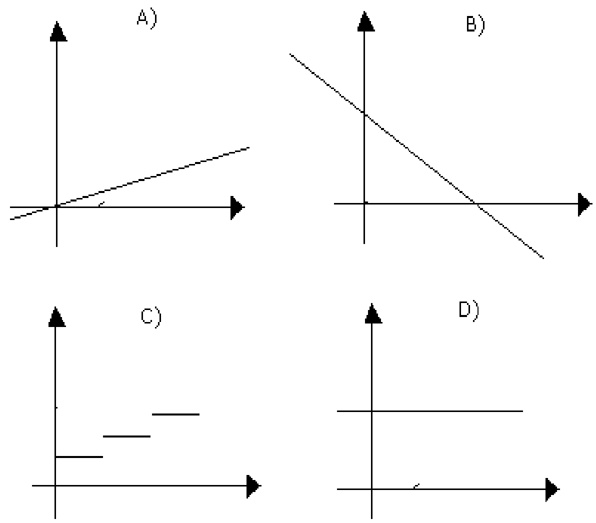
A. $\mathbb{R}$
B. $\mathbb{R} - \{4\}$
C. $\mathbb{R} - \{-4\}$
D. $\mathbb{R} - \{12\}$

Observe las gráficas de las siguientes funciones para responder la pregunta 18

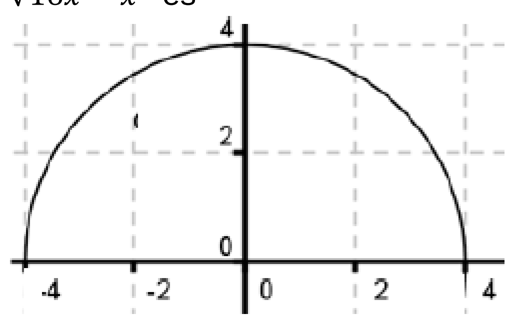


18. Las gráficas que representan funciones decrecientes son:
A. I y II
B. II y III
C. I y IV
D. III y IV

19. ¿Cual de los siguientes gráficos representa una función constante?



20. La gráfica de la función $f(x) = \sqrt{16x - x^2}$ es



En esta función
A. Es creciente en el intervalo [-4, 0] y creciente en el intervalo [0, 4].
B. Es decreciente en el intervalo [-4, 0] y decreciente en el intervalo [0, 4]
C. Es creciente en el intervalo [-4, 0] y decreciente en el intervalo [0, 4]
D. Es decreciente en el intervalo

Anexo O. Resultados prueba de entrada grupos control y experimental discriminados por estudiante.

Nro	Apellidos y Nombres	Nota Grupo control	Nro	Apellidos y Nombres	nota Grupo experimental
1	ACEVEDO CARVAJAL, DIEGO ARMANDO	1.3	1	AGUDELO MAZO, JULIAN DARIO	1.3
2	AGUDELO MUÑOZ, JEFERSON ARLEY	3.3	2	ARREDONDO BURGOS, CRISTIAN CAMILO	3.5
3	BELLO MAYA, EVELYN DAHYANA	3.7	3	BARRERA SILVA, CAMILO ANDRES	1.5
4	CAMPIÑO SUAREZ, DANIELA	2.7	4	CARDENAS ARIAS, YESIKA ALEXANDRA	3.3
5	COLORADO HENAO, DANIELA	2.5	5	CARRASQUILLA SEPULVEDA, WENDY LORAINE	3.3
6	ECHEVERRI BORJA, SERGIO ANDRES	2.5	6	CHAVERRA DAZA, WHINSLETH DAHYANA	3.5
7	GALLEGO RUIZ, ELKIN ESNEIDER	3.7	7	GARCIA PIEDRAHITA, JENIFER	3.5
8	GARCIA PIEDRAHITA, DUBAN ALBERTO	2.7	8	GIL PORRAS, ANGIE CAROLINA	3.3
9	GOEZ GOEZ, ARELIS TATIANA	3.3	9	GIRALDO SALAZAR, ANGEL ESTIBEN	3.0
10	HENAO HENAO, CINDY YAZMIN	3.0	10	GONZALEZ IDARRAGA, KATERIN DAHIANA	2.3
11	HIGUITA FERRARO, ISABEL CRISTINA	2.3	11	IBARRA LAVERDE, DAIRON ESTEBAN	3.0
12	HIGUITA SALAS, KELLY CAROLINA	3.0	12	IDARRAGA LOPEZ, ERIKA JINETH	2.5
13	HOLGUIN MONSALVE, DANIELA MARIA	2.7	13	JURADO MONTOYA, MARIANA	3.5
14	MEJIA GOMEZ, DANIEL ESTEBAN	4.7	14	MARTINEZ SEPULVEDA, ELIANA PATRICIA	2.5
15	MONTOYA VASQUEZ, DANIEL	3.5	15	MEJIA GOMEZ, SANTIAGO	4.5
16	MUÑOZ PINEDA, MARLLI FAINERY	4.3	16	MONCADA CARDONA, CRISTTIAN ANDREY	4.0
17	OQUENDO, ELIANA MARIA	3.0	17	NAGLES PALACIOS, DEVINSON	3.0
18	PRESIGA GIRALDO, ANA MILENA	3.0	18	PALACIO VELASQUEZ, ANGIE PAOLA	2.3
19	RAMOS PORRAS, ESTEFANIA	3.0	19	PATIÑO MONTOYA, HANNER JORLEY	3.5
20	RIVERA BEDOYA, CATALINA	2.3	20	RESTREPO ROJAS, MARIANA	3.3
21	RODRIGUEZ REYES, DIANA MARCELA	2.0	21	SALAZAR GUERRA, BRAYAN DAVID	3.0
22	SANCHEZ COLORADO, GIRLESA	3.3	22	SIERRA SALDARRIAGA, BRYAN	2.7
23	SANCHEZ TILANO, DUKFENDER	2.5	23	SIERRA VILARO, SULEIMA	2.5
24	SILVA GONZALEZ, GLORIA PAOLA	2.0	24	SOSSA AGUIRRE, JUAN MIGUEL	3.5
25	SUAREZ PEREZ, ASHLY	4.0	25	URANGO FLOREZ, ALEX	4.3
26	VALENCIA PIEDRAHITA, DIANA PATRICIA	3.7	26	VALENCIA SALAZAR, RODRIGO ESTIVEN	3.0
27	VELASQUEZ LANS, JOHANA CAROLINA	2.3	27	ZAPATA VELEZ, LEIDY YULIANA	2.0
28	VIANA CAMPIÑO, NEIDER ALEXANDER	3.5			
	Nota Mayor	4.7		Nota Mayor	4.5
	Nota menor	1.3		Nota menor	1.3
	Promedio	3.0		Promedio	3.02
	Varianza	0.6		Varianza	0.6
	Desviación estándar	0.8		Desviación estándar	0.8
	Coeficiente de variación	0.25		Coeficiente de variación	0.25

Anexo P. Prueba de salida aplicada a los grupos experimental y control

	INSTITUCIÓN EDUCATIVA MONTECARLO-GUILLERMO GAVIRIA CORREA ***(Antes I. E. República De Barbados), Medellín*** ***Aprobación de estudios según Resolución Departamental No. 044 de enero 20 de 1970, Acuerdo Municipal No. 0016 de mayo de 1995 y Resolución No.07026 de mayo 31 de 2012 por medio de la cual se cambia el nombre a la Institución; núcleo 916; Dane: 105001001236*** ***PRUEBA BIMESTRAL, 2013***	**VALORACIÓN:**

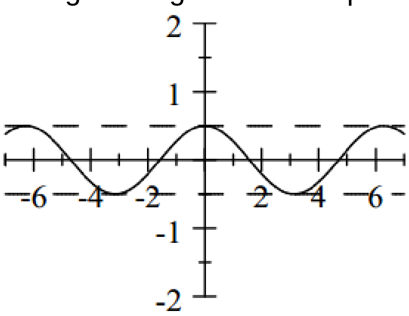
Docente: *Alexis Gil Suárez* ***Área:*** *Matemáticas* ***Tiempo:*** *55 minutos*
Apellidos y Nombre del Estudiante: ____
Grado y grupo: *10°* ***Periodo:*** *IV* ***Fecha:*** *_________ / 2013*

Instrucciones:

- Para esta prueba está prohibido el uso de cualquier recurso y herramienta, sacarlo y usarlo lleva a la anulación de ella.

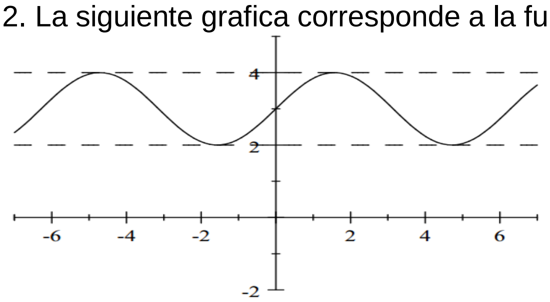
Desarrollo de la prueba:

1. La siguiente grafica corresponde a la función:



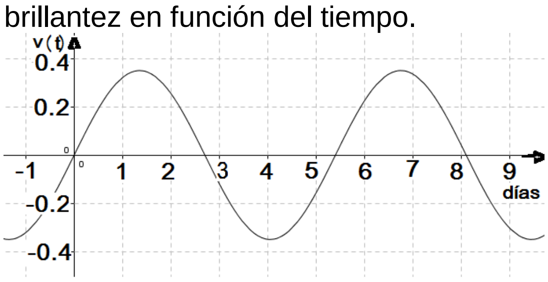
A. $f(x) = \frac{1}{2}\cos x$
B. $f(x) = 4\cos x$
C. $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x$
D. $f(x) = 4\operatorname{sen} x$

2. La siguiente grafica corresponde a la función:



A. $f(x) = 4\operatorname{sen} x$
B. $f(x) = \cos x + 3$
C. $f(x) = \operatorname{sen} x + 3$
D. $f(x) = 4\cos x$

3. Una estrella variable es una estrella cuya brillantez aumenta y disminuye alternadamente. Deltha Cephei es una de ellas; su tiempo entre períodos de máxima brillantez es 5,4 días. La brillantez promedio de la estrella es 4 y varía en 0.35 de magnitud. La siguiente gráfica expresa la brillantez en función del tiempo.



El período de la función es:

A. $\frac{2\pi}{5,4}$
B. 0,35
C. 5,4
D. 4

4. La intensidad de la luz diurna I en cierto lugar está dada por la expresión $I = 490sen\left(\frac{\pi}{13}t\right)$, con I en candelas por centímetro cuadrado y t en horas. Al respecto cabe señalar:

I. El período de la función es 26
II. La máxima intensidad de la luz es 490 candelas
III. En su gráfica, corta al eje y en 0

Son ciertas:

A. Sólo I
B. Sólo II
C. Sólo I y II
D. I, II y III

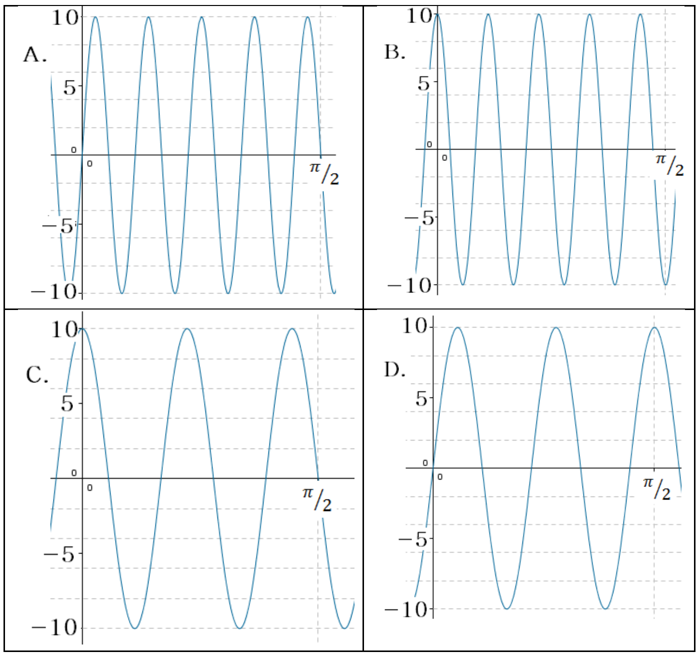
Responde preguntas 5 y 6 teniendo en cuenta la siguiente información

Un osciloscopio es un instrumento de medición electrónico usado para representar gráficamente señales eléctricas variables con el tiempo. Estas señales se pueden modelar mediante funciones sinusoidales. El valor instantáneo del voltaje e (en voltios) está dado por la expresión $e = Esen\alpha$ en donde α varía con el tiempo y E representa el máximo voltaje.

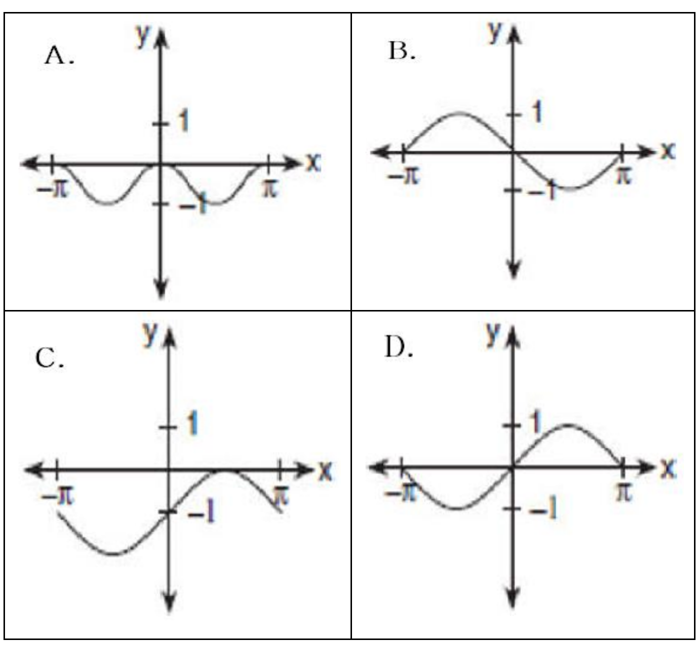
5. Si $e = 10sen18t$, dos valores de t que hacen que la intensidad sea 0 son:

A. 0 y 180
B. 0 y $\frac{\pi}{9}$
C. 5 y 15
D. 90 y 270

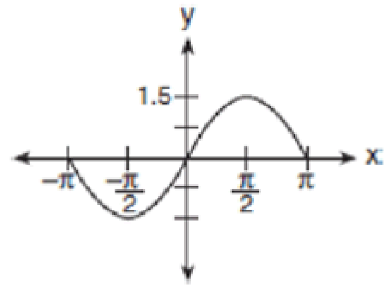
6. La gráfica de la función $e = 10sen18t$ es:



7. ¿Cuál gráfica representa la función $f(x) = sen\ (x - \pi)$ en el intervalo -$\pi \leq x \leq \pi$?



8. Un transmisor de radio envía una onda de radio de la parte superior de una torre de 50 pies. La ola está representada por la gráfica que se muestra a la derecha. ¿Cuál es la ecuación de esta onda de radio?



A. $y = \ sen\ x$
B. $y = \ 1{,}5\ sen2x$
C. $y = 2sen1{,}5x$
D. $y = 1{,}5\ senx$

Responde las preguntas 9 y 10, teniendo en cuenta la siguiente información
Una persona gira en una silla sobre una rueda de Chicago de 15 metros de radio, realizando 6 revoluciones por minuto.

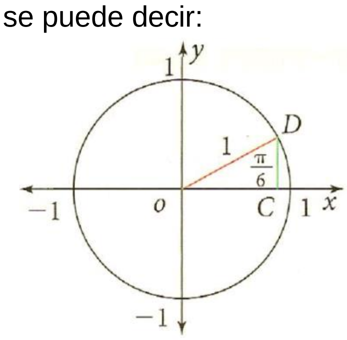
9. Las coordenadas para cualquier ángulo dado se halla:

A. $(15cos\theta, 15sen\theta)$
B. $(sen\theta, cos\theta)$
C. $(15sen\theta, 15cos\theta)$
D. $(cos\theta, sen\theta)$

10. Para un ángulo de 45º las coordenadas de la persona tomando el centro de la rueda como el origen, son:

A. (7.5, 7.5)
B. (10.6, 10.6)
C. (7.5, 10.6)
D. (10.6, 7.5)

11. En la circunferencia unitaria se ha trazado el ángulo $\frac{\pi}{6}$ $(30°)$, como se muestra en la gráfica. Sobre ésta se puede decir:



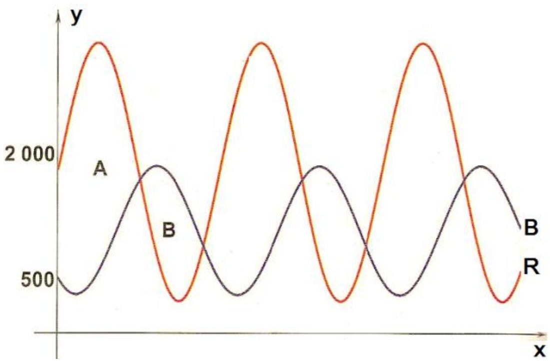
I. El seno tendrá el mismo valor en $150°$
II. El valor de la ordenada es la mitad del radio
III. Las coordenadas del punto D son (0.86, 0.5)

Son ciertas:

A. Sólo I
B. Sólo II
C. Sólo I y II
D. I, II y III

12. La cantidad de algunas especies que interactúan entre sí en un ecosistema dado, se

puede modelar mediante funciones trigonométricas. Uno de estos casos es el modelo depredador-presa, en el cual la población de una especie depende de otra. En el siguiente gráfico se muestra un ejemplo de ello, como lo son búhos (B) y ratones (R) y donde se representa la cantidad de cada especie.



De acuerdo al gráfico,

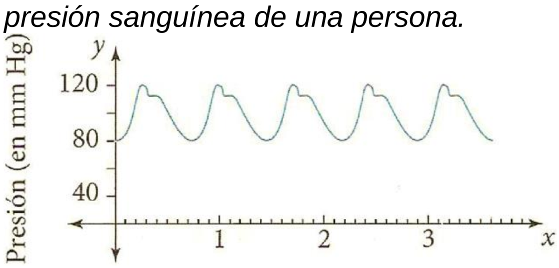
I. La cantidad de ratones que hay inicialmente es 2 000
II. Cuando la cantidad de ratones disminuye aumenta la de búhos
III. En dos períodos de la función de los búhos se presentaron 4 veces un igual número de población de ambas especies

Son ciertas:

A. Sólo I
B. Sólo II
C. Sólo I y II
D. I, II y III

Responde las preguntas 13 y 14, teniendo en cuenta la siguiente información

En la siguiente gráfica se observa cómo varía la presión sanguínea de una persona.



13. El período de la gráfica es:

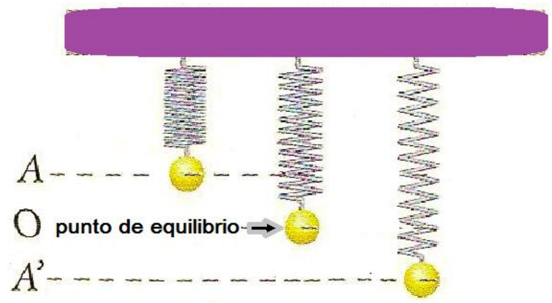
A. 0,8 B. 5 C. 80 D. 120

14. La amplitud es:

A. 0,8 B. 5 C. 80 D. 120

Responde las preguntas 15 y 16, teniendo en cuenta la siguiente información

Una masa de 1 kg se suspende de un resorte y empieza a cambiar su posición, subiendo y bajando respecto al punto de equilibrio. El movimiento de la masa está dado por la expresión f(t)=5cos(t), donde el tiempo t está expresado en segundos y la posición y en centímetros.



15. Cuando el reloj está en 0 segundos el resorte está comprimido en A. Respecto al punto de equilibrio la posición de la masa es (en cm):

A. -5 B. 0 C. 1 D. 5

16. La posición de la masa en 2π $segundos$ es (en cm):

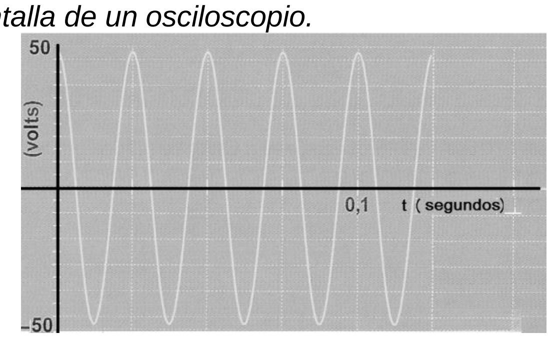
A. -5 B. 0 C. 1 D. 5

17. Si en un momento dado la masa colgada del resorte pasa por el punto de equilibrio, volverá a pasar a los:

A. $\frac{\pi}{2}$ $segundos$
B. π $segundos$
C. $\frac{3}{2}\pi$ $segundos$
D. 2π $segundos$

Responde las preguntas 18 a 20, teniendo en cuenta la siguiente información

Un generador produce corriente alterna con un voltaje variable, tal como muestra la siguiente pantalla de un osciloscopio.



18. El período de la función es (en segundos):

A. 0,025 B. 0,1 C. 5 D. 50

19. ¿Cuántos ciclos por segundo produce el generador?

A. 4 B. 8 C. 20 D. 40

20. La fórmula que modela la variación del voltaje en función del tiempo es:

A. $Y = 50sen(\frac{2\pi}{4}t)$
B. $Y = 50sen\left(\frac{2\pi}{0.025}t\right)$
C. $Y = 50cos(0{,}1t)$
D. $Y = 50cos\left(\frac{2\pi}{0.025}t\right)$

Anexo Q. Resultados prueba de salida grupos control y experimental discriminados por estudiante.

Grupo Control		Grupo experimental	
Estudiante	**Nota**	**Estudiante**	**Nota**
Estudiante 1	3.0	**Estudiante 1**	4.3
Estudiante 2	4.5	**Estudiante 2**	3.3
Estudiante 3	2.0	**Estudiante 3**	4.5
Estudiante 4	2.5	**Estudiante 4**	4.3
Estudiante 5	3.0	**Estudiante 5**	4.0
Estudiante 6	3.8	**Estudiante 6**	3.3
Estudiante 7	2.3	**Estudiante 7**	2.8
Estudiante 8	2.0	**Estudiante 8**	2.8
Estudiante 9	2.3	**Estudiante 9**	2.8
Estudiante 10	1.5	**Estudiante 10**	3.3
Estudiante 11	1.8	**Estudiante 11**	4.5
Estudiante 12	2.0	**Estudiante 12**	4.0
Estudiante 13	1.8	**Estudiante 13**	5.0
Estudiante 14	1.8	**Estudiante 14**	3.0
Estudiante 15	2.0	**Estudiante 15**	5.0
Estudiante 16	2.3	**Estudiante 16**	2.8
Estudiante 17	2.5	**Estudiante 17**	4.3
Estudiante 18	1.8	**Estudiante 18**	3.0
Estudiante 19	3.0	**Estudiante 19**	5.0
Estudiante 20	3.0	**Estudiante 20**	3.3
Estudiante 21	1.3	**Estudiante 21**	1.8
Estudiante 22	1.8	**Estudiante 22**	3.0
Estudiante 23	3.3	**Estudiante 23**	4.8
Estudiante 24	1.5	**Estudiante 24**	3.0
Estudiante 25	3.5	**Estudiante 25**	4.3
Estudiante 26	2.0	**Estudiante 26**	5.0
Estudiante 27	1.3	**Estudiante 27**	4.8
Estudiante 28	2.8		
Nota Mayor	4.5	Nota Mayor	5.0
Nota menor	1.3	Nota menor	1.8
Promedio	2.35	Promedio	3.75
Varianza	0.63	Varianza	0.84
Desviación estándar	0.79	Desviación estándar	0.91
Coeficiente de variación	0.34	Coeficiente de variación	0.24

Anexo R. Resultados por desempeños del grupo experimental discriminado por estudiante

Estudiantes	Preguntas Ítem 1						Preguntas Ítem 2					Preguntas Ítem 3						Preguntas Ítem 4					Preguntas Ítem 5					Preguntas Ítem 6					Nota
	3	12	13	14	nota	promedio	4	18	19	nota	promedio	5	15	16	17	nota	promedio	1	8	20	nota	promedio	9	10	11	nota	promedio	2	6	7	nota	promedio	
Estudiante 1	1	1	1	1	1	100	1	1	1	0.8	100	1	1	1	1	1	100	1	1	1	1	100	1	0	1	0.5	66.6	1	0	0	0	33.3	4.2
Estudiante 2	1	0	1	1	0.8	75	1	0	1	0.5	66.6	1	0	1	1	1	75	1	0	1	1	66.6	0	0	0	0	0	1	1	1	1	100	3.2
Estudiante 3	1	1	0	1	0.8	75	1	1	1	0.8	100	1	1	1	1	1	100	1	1	1	1	100	1	1	1	0.8	100	1	1	0	1	66.7	4.5
Estudiante 4	1	1	1	1	1	100	1	1	1	0.8	100	1	1	0	1	1	75	1	0	1	1	66.6	1	0	1	0.5	66.6	1	1	1	1	100	4.2
Estudiante 5	1	1	1	1	1	100	1	1	0	0.5	66.6	1	1	0	1	1	75	1	1	1	1	100	0	0	1	0.3	33.3	1	1	1	1	100	4

Estudiante 6	1	0	1	1	0.8	75	0	1	1	0.5	66.6	0	0	1	0	0	25	1	1	1	1	100	0	0	1	0.3	33.3	1	1	1	1	100	3.2
Estudiante 7	1	1	1	1	1	100	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	50	1	0	0	0	33.3	1	0	0	0.3	33.3	1	1	1	1	100	2.7
Estudiante 8	1	0	1	1	0.8	75	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	50	1	0	0	0	33.3	1	1	0	0.5	66.6	1	1	1	1	100	2.7
Estudiante 9	1	0	1	1	0.8	75	1	0	0	0.3	33.3	1	1	0	0	1	50	1	0	1	1	66.6	0	0	0	0	0	1	1	1	1	100	2.7
Estudiante 10	1	0	1	1	0.8	75	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	75	1	1	1	1	100	1	1	1	0.8	100	0	1	0	0	33.3	3.2
Estudiante 11	1	1	1	1	1	100	1	1	1	0.8	100	1	0	1	1	1	75	1	0	1	1	66.6	1	1	1	0.8	100	1	1	1	1	100	4.5
Estudiante 12	0	0	0	1	0.3	25	1	1	1	0.8	100	1	1	0	1	1	75	1	1	1	1	100	1	1	1	0.8	100	1	1	1	1	100	4

Estudiante 13	1	1	1	1	1	100	1	1	1	0.8	100	1	1	1	1	1	100	1	1	1	1	100	1	1	1	0.8	100	1	1	1	1	100	5
Estudiante 14	1	0	1	1	0.8	75	1	1	0	0.5	66.6	1	1	0	1	1	75	1	1	0	1	66.6	0	1	0	0.3	33.3	0	1	0	0	33.3	3
Estudiante 15	1	1	1	1	1	100	1	1	1	0.8	100	1	1	1	1	1	100	1	1	1	1	100	1	1	1	0.8	100	1	1	1	1	100	5
Estudiante 16	1	0	1	1	0.8	75	0	1	1	0.5	66.6	1	1	0	0	1	50	1	0	0	0	33.3	0	1	0	0.3	33.3	0	1	1	1	66.7	2.7
Estudiante 17	1	1	1	1	1	100	1	1	0	0.5	66.6	1	1	1	0	1	75	1	1	0	1	66.6	1	1	1	0.8	100	1	1	1	1	100	4.2
Estudiante 18	1	0	1	1	0.8	75	0	0	1	0.3	33.3	1	1	1	0	1	75	1	1	1	1	100	0	0	0	0	0	0	1	1	1	66.7	3
Estudiante 19	1	1	1	1	1	100	1	1	1	0.8	100	1	1	1	1	1	100	1	1	1	1	100	1	1	1	0.8	100	1	1	1	1	100	5

Estudiante 20	0	1	1	1	0.8	75	0	1	1	0.5	66.6	1	1	0	0	1	50	1	0	1	1	66.6	0	1	0	0.3	33.3	1	1	1	1	100	3.2
Estudiante 21	0	0	1	1	0.5	50	1	0	0	0.3	33.3	0	0	1	0	0	25	1	0	0	0	33.3	0	1	0	0.3	33.3	0	1	0	0	33.3	1.7
Estudiante 22	1	0	0	1	0.5	50	1	0	0	0.3	33.33	1	0	0	1	1	50	1	1	0	1	66.67	1	1	0	0.5	66.67	1	1	1	1	100	3
Estudiante 23	1	1	1	1	1	100	1	1	1	0.8	100	1	1	1	1	1	100	1	1	1	1	100	1	1	1	0.8	100	1	0	1	1	66.7	4.7
Estudiante 24	0	0	1	1	0.5	50	0	1	1	0.5	66.67	1	1	0	0	1	50	1	1	0	1	66.67	1	1	0	0.5	66.67	1	0	1	1	66.7	3
Estudiante 25	1	0	1	1	0.8	75	1	1	1	0.8	100	0	1	1	1	1	75	1	1	1	1	100	1	1	0	0.5	66.67	1	1	1	1	100	4.2
Estudiante 26	1	1	1	1	1	100	1	1	1	0.8	100	1	1	1	1	1	100	1	1	1	1	100	1	1	1	0.8	100	1	1	1	1	100	5

Estudiante 27	1	1	1	1	1	100	1	0	1	0.5	66.67	1	1	1	1	1	100	1	1	1	1	100	1	1	1	0.8	100	1	1	1	1	100	4.7
Total promedios						81.4					67.9						72.2					79					64.2					83.9	3.75

Anexo S. Resultados por desempeños del grupo control discriminado por estudiante

Estudiantes	Preguntas Ítem 1						Preguntas Ítem 2					Preguntas Ítem 3						Preguntas Ítem 4					Preguntas Ítem 5					Preguntas Ítem 6					Nota
	3	12	13	14	nota	promedio	4	18	19	nota	promedio	5	15	16	17	nota	promedio	1	8	20	nota	promedio	9	10	11	nota	promedio	2	6	7	nota	promedio	
Estudiante 1	1	0	0	1	0.5	50	0	0	1	0.25	33.3	0	0	1	1	0.5	50	1	1	1	0.8	100	1	0	0	0.3	33.33	1	1	1	0.8	100	3
Estudiante 2	0	1	1	1	0.75	75	1	1	1	0.75	100	1	1	1	1	1	100	1	1	1	0.8	100	1	1	1	0.8	100	0	1	1	0.5	66.67	4.5
Estudiante 3	0	1	1	0	0.5	50	1	0	0	0.25	33.3	0	1	1	0	0.5	50	1	0	0	0.3	33.33	0	1	0	0.3	33.33	0	1	0	0.3	33.33	2
Estudiante 4	0	0	0	1	0.25	25	0	0	1	0.25	33.3	0	1	1	0	0.5	50	1	1	1	0.8	100	1		1	0.5	66.67	0	1	0	0.3	33.33	2.5

Estudiante 5	0	1	1	0	0.5	50	1	0	1	0.5	66.6	1	0	0	0	0.3	25	1	1	0	0.5	66.67	1	1	1	0.8	100	0	1	1	0.5	66.67	3
Estudiante 6	1	1	1	1	1	100	1	1	0	0.5	66.6	0	1	1	1	0.8	75	1	0	0	0.3	33.33	1	1	0	0.5	66.67	1	1	1	0.8	100	3.75
Estudiante 7	0	1	1	0	0.5	50	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0.3	25	0	1	0	0.3	33.33	0	1	1	0.5	66.67	1	1	1	0.8	100	2.25
Estudiante 8	1	1	1	0	0.75	75	0	1	0	0.25	33.3	1	1	0	0	0.5	50	1	0	1	0.5	66.67	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
Estudiante 9	1	0	1	0	0.5	50	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0.5	50	1	1	0	0.5	66.67	0	1	0	0.3	33.33	1		1	0.5	66.67	2.25
Estudiante 10	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0.75	100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0.3	33.33	0	1	1	0.5	66.67	1.5
Estudiante 11	0	0	1	1	0.5	50	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0.5	50	1	1	0	0.5	66.67	0	1	0	0.3	33.33	0	0	0	0	0	1.75

Estudiante 12	0	1	1	0	0.5	50	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0.5	50	1	1	0	0.5	66.67	0	1	0	0.3	33.33	0	0	1	0.3	33.33	2
Estudiante 13	1	0	1	0	0.5	50	0	1	0	0.25	33.3	0	1	0	0	0.3	25	1	0	0	0.3	33.33	0	1	0	0.3	33.33	1	0	0	0.3	33.33	1.75
Estudiante 14	0	0	1	1	0.5	50	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0.3	25	1	1	0	0.5	66.67	0	0	0	0	0	1	0	1	0.5	66.67	1.75
Estudiante 15	1	1	0	0	0.5	50	0	1	0	0.25	33.3	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0.3	33.33	1	0	0	0.3	33.33	1	1	1	0.8	100	2
Estudiante 16	1	0	0	0	0.25	25	1	0	0	0.25	33.3	1	0	0	1	0.5	50	0	1	0	0.3	33.33	0	1	0	0.3	33.33	1	1	1	0.8	100	2.25
Estudiante 17	1	0	0	0	0.25	25	1	1	0	0.5	66.67	1	0	0	0	0.3	25	1	0	1	0.5	66.67	0	0	1	0.3	33.33	1	1	1	0.8	100	2.5
Estudiante 18	1	0	1	0	0.5	50	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0.5	50	1	0	0	0.3	33.33	1	0	0	0.3	33.33	0	1	0	0.3	33.33	1.75

Estudiante 19	1	0	1	0	0.5	50	0	1	1	0.5	66.67	1	0	1	1	0.8	75	1	0	1	0.5	66.67	0	1	0	0.3	33.33	1	1	0	0.5	66.67	3
Estudiante 20	1	0	1	1	0.75	75	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0.8	75	1	1	1	0.8	100	1	0	0	0.3	33.33	1	0	1	0.5	66.67	3
Estudiante 21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0.3	25	1	0	0	0.3	33.33	0	0	0	0	0	1	1	1	0.8	100	1.25
Estudiante 22	1	0	1	0	0.5	50	0	1	0	0.25	33.33	1	0	0	0	0.3	25	1	0	0	0.3	33.33	1	0	0	0.3	33.33	1	0	0	0.3	33.33	1.75
Estudiante 23	1	1	1	1	1	100	0	1	0	0.25	33.33	0	1	1	0	0.5	50	1	1	0	0.5	66.67	1	0	0	0.3	33.33	1	1	1	0.8	100	3.25
Estudiante 24	0	0	1	0	0.25	25	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0.3	25	1	0	0	0.3	33.33	0	1	0	0.3	33.33	1	0	1	0.5	66.67	1.5
Estudiante 25	1	0	0	0	0.25	25	0	1	1	0.5	66.67	1	1	1	1	1	100	1	1	1	0.8	100	0	0	1	0.3	33.33	1	1	1	0.8	100	3.5

Estudiante 26	1	0	1	0	0.5	50	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0.5	50	1	0	0	0.3	33.33	0	0	0	0	0	1	1	1	0.8	100	2
Estudiante 27	1	0	0	0	0.25	25	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0.5	50	1	0	0	0.3	33.33	0	0	0	0	0	1	0	0	0.3	33.33	1.25
Estudiante 28	1		1	1	0.75	75	1	1	0	0.5	66.67	0	0	1	0	0.3	25	1	1	1	0.8	100	0	0	0	0	0	1	1	0	0.5	66.67	2.75
Total promedios						48.21					32.14						44.64					57.14	0	0			34.52					65.48	2.348