



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

EFFECTOS CUÁNTICOS GRAVITACIONALES SOBRE LA ESTABILIDAD DE ACRECIÓN HACIA UN AGUJERO NEGRO DE SCHWARZSCHILD

León David Sosapanta Salas

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Física
Medellín, Colombia
2018

EFFECTOS CUÁNTICOS GRAVITACIONALES SOBRE LA ESTABILIDAD DE ACRECIÓN HACIA UN AGUJERO NEGRO DE SCHWARZSCHILD

León David Sosapanta Salas

Tesis presentada como requisito parcial para optar por el título de:
Magister en Ciencias - Física

Director:
Luis Alberto Sánchez Duque, Ph.D

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Física
Medellín, Colombia
2018

A mis hermanos

Agradecimiento

En primer lugar me gustaría agradecer a la Universidad Nacional de Colombia – Sede Medellín, mis estudios de maestría no hubieran sido posible sin el apoyo brindado a través de la beca de posgrado por grado de honor. La realización de esta tesis es la culminación a nueve años de grandes enseñanzas, que me han permitido crecer a nivel académico y personal.

En especial, expreso mi gratitud a mi director Luis Alberto Sánchez Duque, cuyas clases y asesoría en pregrado y posgrado intensificaron mi motivación por la física teórica. Agradezco el día en que me propuso investigar en el área de gravedad cuántica.

Adicionalmente agradezco a los profesores Herman J. Mosquera Cuesta y Juan Carlos Muñoz Cuartas, por sus valiosas correcciones y aportes que realizaron como jurados de mi tesis de maestría.

Por último, doy las gracias a mi familia, por darme el ejemplo del sacrificio y por enseñarme que con esfuerzo se pueden alcanzar las metas más importantes.

Contenido

Resumen	vii
Abstract	viii
Proyecto de Tesis de Maestría	1
1.1 Planteamiento del Problema	1
1.2 Marco Teórico y Estado del Arte.....	2
1.3 Objetivos	1
1.4 Metodología	6
Marco Teórico.....	9
2.1 Solución de Schwarzschild en Relatividad General.....	9
2.2 Escenario de Seguridad Asintótica en Gravedad Cuántica	10
2.3 Espacio-Tiempo de Schwarzschild Mejorado.....	31
2.4 Temperatura de Hawking	39
Solución del Problema.....	43
3.1 Acreción Esféricamente Simétrica hacia un Agujero Negro.....	43
3.2 Análisis de Estabilidad en Acreción	48
3.3 Soluciones Estacionarias	53
3.4 Estabilidad: Ondas Estacionarias.....	55
3.5 Estabilidad: Ondas Viajeras.....	59
Análisis de Resultados	65
4.1 Solución en Relatividad General	65
4.2 Solución en el Escenario de Seguridad Asintótica.....	75
4.3 Soluciones Cambiando los Parámetros de Simulación	84
4.4 Interpretación de los Efectos Cuánticos.....	93
Conclusiones.....	99
Bibliografía	101

Resumen

En este trabajo investigativo de tesis de maestría se realizó el estudio de los efectos cuánticos gravitacionales, en el contexto del escenario de seguridad asintótica, sobre la estabilidad de la acreción estacionaria y radialmente simétrica de un fluido ideal producida por un agujero negro de Schwarzschild estático. La estabilidad se analizó considerando perturbaciones linealizadas basadas en la ecuación de continuidad, modeladas mediante onda estacionaria y onda viajera de alta frecuencia. Al considerar la métrica de Schwarzschild clásica se encontró que la amplitud de la perturbación, modelada como onda estacionaria, decaía en el tiempo, debido a que el acople entre el flujo y la geometría del espacio-tiempo actúa como un efecto disipador.

En el análisis de los efectos de gravedad cuántica, al considerar la métrica mejorada de Schwarzschild en el esquema de truncación de Einstein-Hilbert, se obtuvo que la estabilidad se preserva, sin embargo a medida que la masa del agujero negro disminuye hasta llegar a la masa crítica (del orden de la masa de Planck), los cálculos numéricos cuantitativos muestran que en el escenario de seguridad asintótica se logra una mayor estabilidad con respecto al caso de relatividad general, tanto para onda estacionaria como para onda viajera. Pero, cuando la masa del agujero negro es menor que la masa crítica, la estabilidad del fluido disminuye en el escenario de seguridad asintótica con respecto a relatividad general, tanto en el análisis de onda estacionaria y viajera. Estos resultados se explican a partir de la estructura de los horizontes de eventos de la métrica mejorada, que determina su curvatura y el acople entre la geometría y el fluido.

El problema se resolvió mediante simulación computación en un código desarrollado en MatLab, donde se utilizaron métodos numéricos de integración y de diferencias finitas.

Abstract

In this research work of master's thesis it was carried out the study of gravitational quantum effects, in the context of asymptotic safety scenario, on the stability of stationary and radially symmetric accretion of an ideal fluid produced by a static Schwarzschild black hole. Stability was analysed considering linearized perturbations based on the continuity equation, modelled by standing wave and high frequency traveling wave. Considering the classical Schwarzschild metric it was found that the amplitude of the perturbation, modelled as a standing wave, decayed in time because the coupling between the flow and the geometry of space-time acts as a dissipating effect.

In the analysis of the effects of quantum gravity, when considering the improved Schwarzschild metric in the truncation scheme of Einstein-Hilbert, it was obtained that stability is preserved, however as the mass of the black hole decreases to reach the critical mass (of the order of the Planck mass), the quantitative numerical calculations shows that in the asymptotic safety scenario greater stability is achieved with respect to the case of general relativity, both in the analysis of the standing and traveling wave. But, when the mass of the black hole is less than the critical mass, the stability of the fluid decreases in the asymptotic safety scenario with respect to case of general relativity, both in the analysis of the standing and traveling wave. These results are explained from the structure of the event horizons of the improved metric, which determine its curvature and the coupling between the geometry and the fluid.

The problem was solved by computer simulation in a code developed in MatLab, where integration and finite difference numerical methods were used.

Capítulo 1

Proyecto de Tesis de Maestría

1.1 Planteamiento del Problema

La Gravedad Cuántica es la búsqueda para armonizar en una teoría consistente los dos pilares fundamentales de la física moderna: la Mecánica Cuántica y la Teoría General de la Relatividad. Esta búsqueda presenta grandes dificultades tanto técnicas como conceptuales entre las cuales cabe mencionar el hecho de que la Teoría Cuántica de Campos: la unión de la mecánica cuántica y la relatividad especial, da lugar a modelos (teorías) que describen correctamente las interacciones fuerte, débil y electromagnética cuyo éxito depende crucialmente de ser teorías perturbativamente renormalizables¹, mientras que el campo gravitacional, considerado como campo cuántico, no lo es. Como se discutirá más adelante varias aproximaciones han sido exploradas en la búsqueda de una teoría cuántica de la gravedad (TCG).

Una de ellas es la llamada “Gravedad Cuántica de Einstein” (GCE) o “Escenario de Seguridad Asintótica” (para revisiones detalladas ver [1]), en la cual se conjetura a la gravitación cuántica como una teoría cuántica de campos que puede ser bien definida a todas las escalas de energía sin ser perturbativamente renormalizable bajo la condición de que un conjunto finito de “trayectorias” relevantes, determinadas por soluciones a la ecuación del grupo de renormalización funcional [2], confluyan a un punto fijo ultravioleta no trivial (PFUNT), es decir, distinto de cero, el cual controla el comportamiento de las constantes de acople adimensionales (que son las que determinan la intensidad de las distintas interacciones), en el régimen ultravioleta, es decir, a muy altas energías. El control se da en el sentido de que todas las combinaciones lineales de las constantes de acople adimensionalizadas permanecen finitas en el ultravioleta. Esto es suficiente para que las cantidades físicas de interés sean seguras de divergencias (no divergentes) a altas energías. Siendo así, la teoría es tan predictiva como la teoría cuántica perturbativamente renormalizable estándar. Esto abre la posibilidad de establecer la GCE como una teoría fundamental de la gravedad sin la introducción de supersimetría o dimensiones extras y basada solamente en técnicas de cuantización conocidas.

De otro lado, la Relatividad General predice la existencia de agujeros negros los cuales, por definición, son una región del espacio-tiempo en la que la gravedad es tan intensa que ninguna materia o radiación puede escapar del horizonte de eventos. En la solución de agujero negro de

¹ Para describir sistemas cuánticos complicados se utiliza la *teoría de perturbaciones*, cuya idea es partir desde un sistema simple para el cual se conoce su solución matemática, y agregarle términos adicionales que representan una desviación del sistema.

Una teoría se dice que es *renormalizable*, si da lugar a predicciones físicas consistentes. Es decir, las variables dinámicas observables no son divergentes a ninguna escala de energía. Los infinitos se pueden eliminar de forma perturbativa o no perturbativa.

Una teoría es *perturbativamente renormalizable* si los infinitos que surgen en las integrales de las series perturbativas pueden eliminarse sistemáticamente, dejando un número finito de parámetros a cualquier orden en teoría de perturbaciones. Esto se da cuando las constantes de acople no tienen dimensiones de masa inversa.

Schwarzschild, existe un horizonte de eventos que oculta una singularidad gravitacional donde invariantes de curvatura como el cuadrado del tensor de Riemann divergen. La ocurrencia de estas singularidades en Relatividad General es a menudo interpretada como una señal de que la teoría es incompleta y de que una descripción consistente de la física de agujeros negros requiere de una TCG, como fuertemente lo sugiere el problema de pérdida de información en agujeros negros. La creciente evidencia observacional en favor de la existencia de agujeros negros (por ejemplo, con la reciente detección directa de ondas gravitacionales provenientes de la coalescencia de dos agujeros negros), pone entonces a estos objetos astrofísicos² como primeros candidatos a brindar información sobre efectos cuánticos predichos por la GCE y otras teorías de gravitación cuántica. Una sutil evidencia observacional que indicaría la desviación de la física estándar, sería la medición de los ecos de ondas gravitacionales producidas por agujeros negros [7].

Un fenómeno astrofísico que se observa en la vecindad de objetos muy masivos es la presencia de discos de acreción, en el caso de ser un agujero negro rotante (agujero negro de Kerr) este disco está formado por material que cae en espiral hacia el objeto central y que, debido a la enorme aceleración a la que son sometidas las partículas, están acompañados de la emisión de jets de plasma a velocidades cercanas a la velocidad de la luz y de potentes rayos x. La completa descripción física y matemática de este tipo de acreción (o al considerar las soluciones de Reissner-Nordström, y Kerr-Newman) ha mostrado ser excesivamente difícil debido a la gran cantidad de procesos físicos involucrados.

Sin embargo, cuando se considera que el objeto masivo central es un agujero negro de Schwarzschild (ANS), la acreción es esféricamente simétrica. Esto simplifica grandemente la descripción del fenómeno tanto por la simetría como por el hecho de que el ANS es la más simple (y la única) solución a las ecuaciones de campo de Einstein en el espacio-tiempo vacío cuando se asume simetría esférica.

El estudio de la acreción esféricamente simétrica de un fluido ideal hacia un ANS ha sido hecho en [8] y su estabilidad ante la presencia de perturbaciones lineales ha sido investigada en [9,10]. Correcciones cuánticas a este tipo de acreción en el contexto de la GCE han sido calculadas en [11], pero el estudio de los efectos cuánticos gravitacionales sobre su estabilidad no han sido investigados aún en el marco de la GCE y es este el cálculo que se propone en este proyecto de tesis de Maestría.

Se espera que para escalas comparables con la longitud de Planck, los efectos cuánticos tengan gran relevancia, ya que en este caso las fluctuaciones del espacio-tiempo se volverían importantes. Por lo tanto, existirían diferencias con la teoría clásica, sin tener que pasar el horizonte de eventos y analizar el interior del agujero negro.

1.2 Marco Teórico y Estado del Arte

Varias son las dificultades que enfrenta el intento de construir una TCG, es decir, la unificación de la mecánica cuántica y la teoría general de la relatividad (TGR).

Por un lado, la idea de base en la TGR es que la gravedad no es una fuerza sino que surge como efecto geométrico en un espacio-tiempo cuya curvatura está determinada por la distribución de

² Hasta el momento ningún agujero negro ha sido observado directamente, por lo tanto, siendo rigurosos no se puede hablar de ellos como objetos astrofísicos sino únicamente como *soluciones teóricas* de la relatividad general. Para una discusión más amplia de su posible no existencia física ver los trabajos de Hawking [3], Polchinsky [4], Afshordi [5] y Mosquera [6].

masa-energía, es decir, la geometría del espacio-tiempo es dinámica y, por lo tanto, no hay un espacio-tiempo de fondo fijo como ocurre en la teoría cuántica de campos (TCC) la cual describe la dinámica de campos cuánticos inmersos en el espacio-tiempo plano y fijo de la relatividad especial. Esto tiene como una de sus consecuencias que varias de las asunciones fundamentales de la TCC no puedan extenderse de manera directa a la TGR.

Por otro lado, el problema de la no renormalizabilidad de la TGR (y de casi todas las teorías de gravedad) da lugar a la falla de los métodos perturbativos que han sido tan efectivos en la teoría cuántica de campos estándar. A pesar de esto, los desarrollos en teoría cuántica de campos en espacio-tiempo curvo han permitido, en el marco de la teoría de perturbaciones, la solución de las ecuaciones de Einstein en forma aproximada y la comprensión de la interacción entre partículas elementales en espacios-tiempos curvados siempre que se desprece la reacción de la materia sobre la geometría y que las constantes de acoplamiento asociadas a las interacciones no-gravitatorias sean pequeñas. Este formalismo, sin embargo, deja de funcionar si el campo gravitatorio (y por lo tanto el espacio-tiempo) se vuelve dinámico, como en Relatividad General, y no existe una métrica de fondo fija³ (fixed background metric).

Las reacciones frente a estas y otras dificultades han dado lugar a una vasta área de investigación con muchas diferentes aproximaciones tanto perturbativas como no perturbativas. Esas incluyen: teoría de cuerdas, supergravedad, geometría no conmutativa, triangulación dinámica, teoría de twistores, seguridad asintótica, etc. (para revisiones detalladas y referencias de estas y otras aproximaciones ver [12]).

El escenario de seguridad asintótica en gravitación, propuesto por primera vez en [13] y desarrollado en [2] con la introducción de métodos del grupo de renormalización funcional, propone que la gravedad es una teoría cuántica de campos renormalizable no perturbativamente. Sus dos ingredientes básicos son un PFUNT el cual controla la evolución con la escala de energía de las constantes de acople en el ultravioleta, y el funcional de acción efectivo promedio gravitacional Γ_k el cual, por construcción, contiene vértices (representados gráficamente por diagramas de Feynman) que incluyen el efecto de fluctuaciones cuánticas con momentum $p^2 > k^2$. En este sentido, Γ_k proporciona una descripción efectiva de la física a escalas de momentum $p^2 \approx k^2$, una característica que ha sido esencial en la evaluación de las consecuencias fenomenológicas a bajas energías de este escenario.

La evolución de Γ_k con la escala de energía está gobernada por la ecuación del grupo de renormalización funcional (EGRF)

$$\begin{aligned} k\partial_k\Gamma_k[\bar{f}, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}] &= \frac{1}{2}\text{Tr}\left[(\Gamma_k^{(2)} + \hat{\mathcal{R}}_k)_{\bar{f}\bar{f}}^{-1}(k\partial_k\hat{\mathcal{R}}_k)_{\bar{f}\bar{f}}\right] \\ &\quad - \frac{1}{2}\text{Tr}\left[\left\{(\Gamma_k^{(2)} + \hat{\mathcal{R}}_k)_{\bar{\sigma}\sigma}^{-1} - (\Gamma_k^{(2)} + \hat{\mathcal{R}}_k)_{\sigma\bar{\sigma}}^{-1}\right\}(k\partial_k\hat{\mathcal{R}}_k)_{\bar{\sigma}\sigma}\right] \end{aligned} \quad (1.1)$$

Aquí $\Gamma_k^{(2)}$ denota el Hessiano de Γ_k con respecto a los campos dinámicos \bar{f} , σ , $\bar{\sigma}$ con la métrica de fondo \bar{g} fija, y $\hat{\mathcal{R}}_k$, el “regulador”, es un operador que suprime modos con momentum menor que k y se anula para $p^2 \gg k^2$. Su aparición en el numerador y denominador hace a la traza (Tr) finita

³ La métrica influencia el comportamiento del sistema cuántico. Pero por auto consistencia de la teoría, es necesario considerar la reacción de las fluctuaciones cuánticas sobre la métrica (backreaction). En este sentido es que el espacio-tiempo se vuelve dinámico.

tanto en el infrarrojo (bajas energías) como en el ultravioleta. Dadas unas condiciones iniciales, cada posible Γ_k queda determinado unívocamente para todas las escalas de energía.

Las condiciones iniciales que deben proveerse son el contenido de campos cuánticos de la teoría y la imposición de las simetrías adecuadas (como invariancia bajo difeomorfismos si los campos incluyen la métrica del espacio-tiempo). Estos datos determinan el llamado “espacio de la teoría” el cual consiste de todos los posibles funcionales de acción Γ_k dependientes de los campos y que respetan las simetrías impuestas. Cada punto en este espacio representa entonces una posible acción cuya dependencia con la escala k está codificada en las constantes de acople $g_\alpha \equiv g_\alpha(k)$ que la parametrizan. La trayectoria que sigue cada punto en el espacio de la teoría, el llamado flujo del grupo de renormalización (RG), describe la evolución del correspondiente funcional de acción.

Por definición, un punto fijo del flujo RG es un punto g_α^* en el espacio de la teoría en el que la evolución de todas las constantes de acople, es decir, el flujo RG, se detiene. El requerimiento fundamental en seguridad asintótica es la existencia de un PFUNT al que confluyen todas las trayectorias del flujo RG para un número finito de acoples relevantes. Esto es suficiente para que las cantidades físicas de interés sean seguras de divergencias (no divergentes) a altas energías. Bajo estas condiciones el formalismo da lugar a una teoría cuántica de campos que es tan predictiva como la teoría cuántica perturbativamente renormalizable estándar.

Aunque la obtención de soluciones exactas de la EGRF es notoriamente difícil, existen varios esquemas de aproximación que no invocan una expansión en términos de parámetros pequeños como en teoría de perturbaciones. Esos esquemas conservan la característica principal de la EGRF que consiste en la obtención de soluciones, denominadas “mejoradas RG” (MRG), que permiten extraer información no perturbativa de una manera sistemática. En particular, aunque no existe una prueba general de la existencia de un PFUNT, a lo largo de los años estas técnicas han proporcionado un fuerte soporte a su existencia y, por lo tanto, a la viabilidad del escenario de seguridad asintótica. Además, se ha demostrado que el flujo RG que emana de este PFUNT puede ser conectado de manera continua a un régimen clásico en el que la Relatividad General proporciona una buena aproximación [14].

En términos generales, la GCE establece que las correcciones cuánticas en la vecindad de un punto fijo ultravioleta no trivial dan lugar a modificaciones a cortas distancias de la descripción clásica de Einstein de la gravitación, mientras que a grandes distancias (bajas energías) se recupera la Relatividad General como una teoría efectiva.

Para un ANS la solución MRG para la métrica, en un esquema de aproximación llamado “truncación de Einstein-Hilbert”, está dada por [15]

$$ds^2 = - \left[1 - \frac{2MG(r)}{r} \right] dt^2 + \left[1 - \frac{2MG(r)}{r} \right]^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (1.2)$$

cuando se trabaja con la signatura Lorentziana $(-, +, +, +)$. Donde

$$G(r) = \frac{G_0 r^3}{r^3 + \bar{\omega}(r + \gamma G_0 M)} \quad (1.3)$$

es la solución MRG para la constante de Newton (la constante de acople gravitacional). Aquí G_0 es el valor conocido de esta constante (bajas energías), M es la masa del agujero negro medida por un observador en el infinito, y $\bar{\omega} = \tilde{\omega} G_0$ ($= \tilde{\omega} G_0 \hbar / c^3$), donde γ and $\tilde{\omega}$ son constantes que provienen

de una apropiada identificación del PFUNT y del régimen infrarrojo. Comparando con una función de interpolación para valores de r grandes y pequeños, se obtiene el valor $\gamma = 9/2$ [15]. Por otra parte, de la cuantización perturbativa estándar de la gravedad de Einstein realizada por Donoghue [16], la cual da lugar a correcciones cuánticas a grandes distancias, permite hacer una comparación a esta escala con la predicción en el escenario de seguridad asintótica, por lo cual se identifica $\tilde{\omega} = 167/30\pi$.

Como se mencionó en el apartado anterior, en [11] se han estudiado las correcciones cuánticas a la acreción esféricamente simétrica de un fluido ideal hacia un ANS asumiendo que las correcciones cuánticas a la métrica de Schwarzschild están dadas por (1.2) y (1.3). En este trabajo se discuten las contribuciones cuánticas gravitacionales a las condiciones generales para la ubicación de los llamados puntos sónicos o críticos (radios en los que la velocidad del fluido iguala a la velocidad local del sonido); se obtienen expresiones explícitas para la modificación de los perfiles de temperatura y de compresión en la densidad de materia tanto por debajo del radio crítico y en el horizonte de eventos, y para materia politrópica se determinan la temperatura y el flujo integrado que resultan de efectos cuánticos de la gravedad en el horizonte de eventos.

El análisis de la acreción esféricamente simétrica de un fluido ideal hacia un ANS ha sido hecho en [8] y su estabilidad ante la presencia de perturbaciones lineales ha sido investigada en [9, 10]. Tanto el estudio hecho en [9], basado en la perturbación linealizada del potencial escalar cuyo gradiente se identifica con la velocidad del fluido ideal, como el llevado a cabo en [10], basado en la perturbación linealizada de la solución estacionaria a la ecuación de continuidad, han encontrado que los efectos relativistas dan lugar a un incremento de la estabilidad en comparación con el comportamiento en el régimen Newtoniano. El análisis fue llevado a cabo tanto para una perturbación estacionaria como para una en forma de onda viajera de alta frecuencia. El hecho curioso es que, contrario a la situación que se da en el caso Newtoniano, en el cual la amplitud de una perturbación estacionaria permanece constante, en el caso relativista la mayor estabilidad se da a costa de un amortiguamiento de la perturbación aunque el fluido sea no viscoso y a pesar de que el sistema total es conservativo. En [10] se muestra que, la explicación puede darse en términos del acople del flujo de acreción con la geometría del espacio-tiempo el cual actúa a la manera de una disipación efectiva. Es interesante entonces explorar la posibilidad de que para los dos tipos de perturbación esa disipación efectiva reciba contribuciones de efectos cuánticos gravitacionales.

1.3 Objetivos

General

Estudio de los efectos cuánticos gravitacionales, en el contexto del escenario de seguridad asintótica, sobre la estabilidad de la acreción estacionaria y radialmente simétrica de un fluido ideal producida por un agujero negro de Schwarzschild estático.

Específicos

- i. Cálculo de los efectos de gravitación cuántica sobre la estabilidad cuando la perturbación se modela como una onda estacionaria.
- ii. Cálculo de esos mismos efectos cuando la perturbación se modela como una onda viajera.

1.4 Metodología

Como en [11] se asumirá que las correcciones cuánticas a la métrica de Schwarzschild están dadas por las ecuaciones (1.2) y (1.3).

El fluido ideal será descrito, como es usual, por el tensor momento-energía [17]. Cuando se trabaja con la signatura $(-, +, +, +)$ está dado por

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu + pg^{\mu\nu} \quad (1.4)$$

donde p es la presión, ρ es la densidad de energía y U^μ es la 4-velocidad del fluido, la cual obedece la relación de normalización $U^\mu U_\mu = -1$. De esta manera, la ecuación de conservación del tensor momento-energía es⁴ [17]:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = (\rho + p)(U^\mu{}_{;\nu}U^\nu + U^\mu U^\nu{}_{;\nu}) + (\rho + p)_{;\nu}U^\mu U^\nu + p_{;\nu}g^{\mu\nu} \quad (1.5)$$

Donde ρ se define a través de la relación termodinámica [18]

$$\frac{d\rho}{dn} = \frac{(\rho + p)}{n} + nT \frac{ds}{dn} \quad (1.6)$$

En la cual T es la temperatura, s es la entropía específica y n es la densidad de número de partículas.

La ecuación de continuidad está dada por [18]

$$(nU^\mu)_{;\mu} = 0 \quad (1.7)$$

Asumiendo condiciones isentrópicas, la velocidad del sonido está dada por [18]

$$a^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s \quad (1.8)$$

Las ecuaciones (1.6) y (1.8) junto con la ecuación de estado politrópica $p = Kn^\gamma$ permiten establecer la relación entre a y n [18]

$$a^2 = \frac{\gamma Kn^{\gamma-1}}{\bar{\mu}c^2 + \gamma/(\gamma - 1)Kn^{\gamma-1}} \quad (1.9)$$

donde K es una constante y $\bar{\mu}$ es la masa promedio de las partículas. De las ecuaciones de conservación (1.5) y (1.7) se obtienen las soluciones estacionarias de la forma [18]

$$4\pi\bar{\mu}n_0u_0r^2 = -\dot{m}/c \quad (1.10)$$

⁴ En esta notación, el punto y coma representa la derivada covariante con respecto al índice que aparece inmediatamente después. Mientras que la coma se utiliza similarmente, pero indicando derivada parcial. Es importante aclarar que una derivada covariante de funciones escalares se vuelve simplemente una derivada parcial.

$$\frac{1}{f + u_0^2} \frac{d}{dr} (f + u_0^2) = -\frac{2a_0^2}{n_0} \frac{dn_0}{dr} \quad (1.11)$$

donde la constante de integración \dot{m} es el flujo de masa.

El esquema de perturbación a usar es el que se propone en [10], el cual es una perturbación linealizada de la solución estacionaria de la ecuación de continuidad.

$$u(r, t) = u_0(r) + u'(r, t) \quad (1.12)$$

$$n(r, t) = n_0(r) + n'(r, t) \quad (1.13)$$

Es conveniente introducir la nueva variable, $\psi = nur^2$, y al trabajar con perturbaciones a primer orden [10]

$$\psi' = (u_0 n' + n_0 u') r^2 \quad (1.14)$$

En términos de esta nueva variable, se obtiene una ecuación linealizada de movimiento [10]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(n_0 h^{tt} \frac{\partial \psi'}{\partial t} + n_0 h^{tr} \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(n_0 h^{rt} \frac{\partial \psi'}{\partial t} + n_0 h^{rr} \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right) \\ = (1 - 2a_0^2) \frac{dn_0}{dr} \left(h^{rt} \frac{\partial \psi'}{\partial t} + h^{rr} \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (1.15)$$

con los coeficientes, $h^{\alpha\beta}$, dados por

$$h^{tt} = u_0 \frac{\sqrt{f + u_0^2}}{f^2} (f + u_0^2 - u_0^2 a_0^2) \quad (1.16)$$

$$h^{tr} = h^{rt} = \frac{u_0^2 (f + u_0^2)}{f} (1 - a_0^2) \quad (1.17)$$

$$h^{rr} = u_0 \sqrt{f + u_0^2} (u_0^2 - (f + u_0^2) a_0^2) \quad (1.18)$$

La perturbación de onda estacionaria se modela por

$$\psi'(r, t) = \xi(r) e^{-i\omega t} \quad (1.19)$$

Mientras que la perturbación de onda viajera se formula mediante una serie de potencias para la parte espacial:

$$\psi'(r, t) = \xi_\omega(r) e^{-i\omega t} \quad (1.20)$$

$$\xi_\omega(r) = \exp \left[\sum_{l=-1}^{\infty} \omega^{-l} k_l(r) \right] \quad (1.21)$$

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1 Solución de Schwarzschild en Relatividad General

En relatividad general en $d = 4$ dimensiones, la única solución de las ecuaciones de Einstein en espacio-tiempo vacío $R_{\mu\nu} = 0$, (ver las ecuaciones de campo genéricas (2.10)) con simetría esférica, es la métrica de Schwarzschild [17]

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.1)$$

donde la función

$$f(r) = \left(1 - \frac{2MG_0}{r}\right) \quad (2.2)$$

depende de la constante de Newton $G_0 = 6.673 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2$, y es continua en la masa del agujero negro M ; al cuantizar los campos cuánticos en este espacio-tiempo, se predice la temperatura de Bekenstein-Hawking que es inversamente proporcional a la masa del agujero negro. Para grandes distancias radiales respecto del horizonte $r \rightarrow \infty$, la función $f(r) \rightarrow 1$, lo que indica que la geometría del espacio-tiempo de Schwarzschild es asintóticamente plana [17, 19].

El radio clásico de Schwarzschild es $R_S = 2MG_0$ y representa una singularidad de coordenadas en $r = R_S$ donde $f(r)$ es igual a cero, este punto define el horizonte de eventos del agujero negro [17].

En el límite de distancias pequeñas $r \rightarrow 0$, se presenta una singularidad de la variedad, la cual se analiza correctamente mediante escalares (que no dependen de las coordenadas), como los puntos en los que alguno de ellos tienda a infinito. Analizando el caso genérico para funciones de la forma $f(r) = 1 - cr^v$, donde c y v son constantes, la correspondiente métrica tendrá los invariantes de curvatura exactos: el escalar de curvatura, el invariante de Kretschmann (cuadrado del tensor de Riemann) y el cuadrado del tensor de Weyl, respectivamente [15]

$$R = c(v+1)(v+2)r^{v-2} \quad (2.3)$$

$$R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma} = c^2(v^4 - 2v^3 + 5v^2 + 4)r^{2v-4} \quad (2.4)$$

$$C^{\mu\nu\rho\sigma}C_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{c^2}{144}(v-1)^2(v-2)^2r^{2v-4} \quad (2.5)$$

Para una $f(r)$ dada por (2.2), el origen $r \rightarrow 0$ representa una singularidad de curvatura, ya que

$$R = 0 \quad (2.6)$$

$$R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma} \propto 1/r^6 \quad (2.7)$$

$$C^{\mu\nu\rho\sigma}C_{\mu\nu\rho\sigma} \propto 1/r^6 \quad (2.8)$$

A partir de las constantes universales G_0 , \hbar y c se puede construir un conjunto completo de cantidades dimensionales, llamadas las unidades de Planck [17]

$$\begin{aligned} m_p &= \sqrt{\hbar c/G_0} = 2.18 \times 10^{-5} \text{ g} \\ l_p &= \sqrt{\hbar G_0/c^3} = 1.62 \times 10^{-33} \text{ cm} \\ t_p &= \sqrt{\hbar G_0/c^5} = 5.39 \times 10^{-44} \text{ s} \\ E_p &= \sqrt{\hbar c^5/G_0} = 1.22 \times 10^{19} \text{ GeV} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Los efectos de la gravedad cuántica se vuelven importantes cuando $m > m_p$ o $E > E_p$ o $l < l_p$ o $t < t_p$, por lo tanto la solución (2.1) es una solución aproximada para el régimen cuando r es grande. La existencia de la singularidad en el origen representa un problema para la teoría de la relatividad general, sin embargo, se espera que una teoría consistente de gravedad cuántica solucione dicho inconveniente [1, 12, 13, 15, 17].

2.2 Escenario de Seguridad Asintótica en Gravedad Cuántica

Introducción

Clásicamente la interacción gravitacional se expresa por las ecuaciones de campo de Einstein [17, 19]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G_0}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.10)$$

Según la relatividad general se predice la existencia de agujeros negros cuando un cuerpo de masa M se concentra dentro del radio de Schwarzschild $2MG_0$. El estado de un agujero negro estacionario observado desde el exterior se parametriza por tres cantidades: la masa, la carga y el momentum angular. Como se mencionó en la sección anterior, se necesita una teoría completa de gravedad cuántica en donde no aparezcan divergencias; sin embargo, para un observador por fuera del agujero negro, la teoría clásica sigue siendo válida y predictiva debido a la existencia del horizonte de eventos.

El problema principal en la construcción de una teoría de gravedad cuántica es que la relatividad general no se puede incluir en el modelo estándar debido a que es perturbativamente no renormalizable⁵ [12]. Más allá de la relatividad general, existe una teoría semiclásica en donde se

⁵ Analizando la acción de Einstein-Hilbert

$$S = \int \sqrt{|g|} d^4x \frac{1}{16\pi G_0} R$$

considera a la gravedad como una teoría clásica, mientras se cuantizan las demás interacciones. En este enfoque empiezan a aparecer problemas conceptuales, ya que se pierde la noción de escogencia única del estado de vacío, y el concepto de partículas se vuelve dependiente del observador [17].

Otro avance se logra tratando la gravedad cuántica como una teoría efectiva, en donde se hacen correcciones a la gravedad clásica a bajas energías, que son independientes de la inclusión del ultravioleta (UV). Si la escala de energía es mucho menor que la energía de Planck E_p es necesario tratar solo con un número finito de parámetros, determinados (en principio) experimentalmente. La teoría efectiva implica considerar interacciones más allá de la acción de Einstein-Hilbert (que contiene únicamente la constante de Newton y la constante cosmológica)

$$S = \int \sqrt{|g|} d^4x \left[\Lambda - \frac{1}{16\pi G_0} R + g_2 R^2 + g_{2b} R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \dots \right] \quad (2.11)$$

Si la escala de energía es del orden, o mayor que E_p , la teoría efectiva deja de ser válida [20, 21].

Los enfoques para construir una teoría cuántica de la gravedad, en donde se pueda acceder al comportamiento Planckiano de gravedad, son

- i. Teoría de Cuerdas [22]
- ii. Gravedad Cuántica de Lazos [23]
- iii. Enfoques discretos de gravedad no perturbativa [24, 25]
- iv. Gravedad Cuántica de Einstein (GCE) [1, 2, 26]

La GCE es un marco teórico que utiliza el grupo de renormalización de Wilson (RG) [27, 28], y se basa en la existencia de un punto fijo UV en el flujo del RG. Si este punto tiene las propiedades adecuadas implica que la gravedad es segura asintóticamente⁶. Esta teoría es predictiva en escalas de energía arbitrariamente altas.

Los parámetros de la teoría, $g_\alpha \equiv g_\alpha(k)$, se vuelven acoples dependientes de la escala de energía k , que es la escala de corte del grupo de renormalización. Con este método del RG se provee una conexión entre el comportamiento de la gravedad a pequeñas distancias y la física macroscópica, siempre y cuando la gravedad sea segura asintóticamente [19].

La dimensión de masa del escalar de curvatura es $[m^2]$ y la de d^4x (medida de la integral) es $[m^{-4}]$, entonces, para que toda la expresión sea adimensional, la dimensión de masa de la constante de Newton es $[m^{-2}]$. Si se realiza una expansión perturbativa (expansión en el número de lazos en los diagramas de Feynman), en cada paso se necesitan dos potencias de momentum (k^2) y al final las expresiones de las amplitudes de transición se vuelven más divergentes a medida que aumenta el orden de la perturbación, es decir no se puede garantizar que las amplitudes sean finitas cuando el límite ultravioleta tienda a infinito ($\Lambda \rightarrow \infty$). Con el fin de cancelar estas divergencias, es necesario introducir un número infinito de contratérminos, lo cual no tiene sentido, por lo tanto la teoría es perturbativamente no renormalizable.

⁶ Una teoría se dice que es segura asintóticamente si los parámetros de acople relevantes, tienden a un punto fijo cuando la escala de momentum tiene a infinito. Cabe aclarar que un acople esencial es aquel que es útil para la absorción de la dependencia con la escala de corte UV. Más adelante se explicará con mayor detalle este aspecto.

Grupo de Renormalización

El grupo de renormalización fue introducido por Wilson [27, 28], en este formalismo se introduce el límite de corte ajustable en la escala de momentum k y el límite de corte ultravioleta Λ (que a priori se puede definir como proporcional al inverso del espaciamiento de la red microscópica). El campo fluctuante se separa en dos $\varphi(x) = \varphi_h(x) + \varphi_l(x)$ donde

$$\varphi_h(x) = \begin{cases} \varphi(x) & k^2 < p^2 < \Lambda^2 \\ 0 & p^2 < k^2 \end{cases}$$

$$\varphi_l(x) = \begin{cases} 0 & k^2 < p^2 < \Lambda^2 \\ \varphi(x) & p^2 < k^2 \end{cases}$$

La integral funcional Euclidiana se separa

$$Z = \int_{p^2 < \Lambda^2} \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi]} = \int_{p^2 < k^2} \mathcal{D}\varphi_l \int_{k^2 < p^2 < \Lambda^2} \mathcal{D}\varphi_h e^{-S[\varphi_h + \varphi_l]} = \int_{p^2 < k^2} \mathcal{D}\varphi e^{-S_k[\varphi]} \quad (2.12)$$

donde en el último paso, se hizo con cambio de notación de φ_l a φ . Luego, se define la acción efectiva Wilsoniana S_k a partir de

$$e^{-S_k[\varphi]} \equiv \int_{k^2 < p^2 < \Lambda^2} \mathcal{D}\varphi_h e^{-S[\varphi_h + \varphi]} \quad (2.13)$$

y se parametriza S_k en términos de las constantes de acople g_i

$$S_k[\varphi] = \sum g_i \mathcal{O}_i[\varphi] \quad (2.14)$$

donde $\{\mathcal{O}_i[\varphi]\}$ es la base de operadores, cada uno con dimensión de masa d_i . Antes de continuar, es importante aclarar que la notación de corchetes $S_k[\varphi]$ indica que S_k es un funcional del campo $\varphi(x)$.

Ahora se introducen las siguientes definiciones y conceptos.

Espacio de la teoría: espacio parametrizado por el conjunto de las constantes de acople adimensionales ($g_i \rightarrow k^{d_i} g_i$) esenciales.

Flujo del grupo de renormalización: campo vectorial tangencial a la dirección de decrecimiento del tiempo del grupo de renormalización $t = \ln k / \Lambda$

$$-\partial_t = - \sum \frac{\partial g_i}{\partial t} \frac{\partial}{\partial g_i} = - \sum \beta_i \frac{\partial}{\partial g_i} \quad (2.15)$$

Puntos fijos: son puntos g_i^* en el espacio de la teoría donde $\beta_i(g_j^*) = 0$.

A primer orden en la pequeña perturbación $\delta g_i = g_i - g_i^*$

$$\beta_i = \sum_j \left. \frac{\partial \beta_i}{\partial g_j} \right|_{g=g^*} \delta g_j = \sum_j M_{ij} \delta g_j \quad (2.16)$$

donde M_{ij} es la matriz de estabilidad. La perturbación δg_i obedece la ecuación de flujo linealizada alrededor de g_i^*

$$\begin{aligned} \partial_t \delta g_i &= \partial_t (g_i - g_i^*) = \partial_t g_i - \partial_t g_i^* = \partial_t g_i = \beta_i \\ \partial_t \delta g_i &= \sum_j M_{ij} \delta g_j \end{aligned} \quad (2.17)$$

La solución general a esta ecuación es

$$\delta g_i = \sum_A C_A V_A^i e^{-t\theta_A} \quad (2.18)$$

$$\partial_t \delta g_i = \partial_t \sum_A C_A V_A^i e^{-t\theta_A} = \sum_A C_A (-\theta_A V_A^i) e^{-t\theta_A} = \sum_A C_A \left(\sum_j M_{ij} V_A^j \right) e^{-t\theta_A} = \sum_j M_{ij} \delta g_j$$

dado que la matriz de estabilidad satisface la ecuación de valores propios $\sum_j M_{ij} V_A^j = -\theta_A V_A^i$, donde θ_A se llaman los exponentes críticos y se clasifican en

- i. $\text{Re}\{\theta_A\} > 0$ la dirección es relevante ya que δg_i crece cuando k disminuye.
- ii. $\text{Re}\{\theta_A\} < 0$ la dirección es irrelevante ya que δg_i disminuye cuando k disminuye.
- iii. $\text{Re}\{\theta_A\} = 0$ la dirección es marginal.

Trayectoria renormalizable: Una trayectoria que emana desde un punto fijo a lo largo de una dirección relevante. Se puede eliminar el límite de corte UV de la teoría ya que se comporta seguramente cuando $k \rightarrow \infty$.

Superficie crítica UV: superficie de todas las trayectorias renormalizables.

Seguridad Asintótica

La existencia de un punto fijo asegura que la teoría sea libre de divergencias en el UV. Mientras que un número finito de direcciones relevantes implica que la teoría permanece predictiva a altas energías, ya que es necesario realizar un número finito de experimentos para localizar la posición en la superficie crítica. Además se debe recuperar la relatividad general en bajas energías.

Punto fijo Gaussiano: $g_i^* = 0$. En estos puntos con un número finito de direcciones relevantes, la teoría es libre asintóticamente (a altas energías el acople es débil y aplica la teoría de perturbaciones).

Punto fijo no Gaussiano: $g_i^* \neq 0$. En gravedad la constante de acople de las interacciones es la constante de Newton adimensional $g = k^2 G(k)$. Por lo tanto en el infrarrojo (IR) la gravedad es débilmente acoplada y en UV la gravedad es fuertemente acoplada.

Acción Efectiva Promedio

Con el fin de introducir el método funcional se considera por simplicidad la teoría de campos escalares en espacio-tiempo plano (Euclidiano) [29, 30].

La función de correlación es

$$\langle \varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n) \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\varphi \varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n)e^{-S[\varphi]}}{\int \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi]}} \quad (2.19)$$

donde $S[\varphi]$ es la acción esencial de la teoría y $\int \mathcal{D}\varphi$ es la medida que debe estar regularizada. El generador funcional es

$$Z[J] \equiv e^{W[J]} = \int \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi]+J\cdot\varphi} \quad (2.20)$$

con $J\cdot\varphi \equiv \int d^4x J(x)\varphi(x)$, siendo $J(x)$ la fuente externa. La acción efectiva se obtiene a través de una transformación de Legendre de $W[J]$

$$\Gamma[\phi] = \sup_J \left(\int d^4x J(x)\phi(x) - W[J] \right) \quad (2.21)$$

donde

$$\phi(x) = \langle \varphi(x) \rangle_J = \frac{1}{e^{W[J]}} \int \mathcal{D}\varphi \varphi(x) e^{-S[\varphi]+J\cdot\varphi} = \frac{1}{e^{W[J]}} \frac{\delta}{\delta J(x)} \int \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi]+J\cdot\varphi} = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} \quad (2.22)$$

$$J(x) = \frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi(x)} \quad (2.23)$$

Tomando el exponencial al negativo de (2.21), y realizando un cambio de variable $\chi = \varphi - \phi$, resulta

$$e^{-\Gamma[\phi]} = e^{W[J]} e^{-J\cdot\phi} = \int \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi]+J\cdot\varphi-J\cdot\phi} = \int \mathcal{D}\chi e^{-S[\chi+\phi]+J\cdot\chi} \quad (2.23)$$

La acción efectiva $\Gamma[\phi]$ describe la física macroscópica donde las fluctuaciones cuánticas se han incorporado en la integral funcional.

El grupo de renormalización funcional se centra en la acción efectiva promedio $\Gamma_k[\phi]$ que debe cumplir

$$\begin{array}{ll} \Gamma_{k \rightarrow \infty}[\phi] = S & \text{Física microscópica} \\ \Gamma_{k \rightarrow 0}[\phi] = \Gamma & \text{Física macroscópica} \end{array}$$

Las anteriores definiciones cambian a

$$Z_k[J] \equiv e^{W_k[J]} = \int \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi]+J\cdot\varphi-\frac{1}{2}\varphi\cdot\mathcal{R}_k(-\partial^2)\cdot\varphi} \quad (2.24)$$

con \mathcal{R}_k siendo el regulador IR. Hay libertad para escoger el regulador siempre y cuando cumpla con

$$\mathcal{R}_k(p^2) = \begin{cases} k^2 & p^2 \ll k^2 \\ 0 & p^2 \gg k^2 \end{cases} \quad (2.25)$$

De igual forma

$$\tilde{\Gamma}_k[\phi] = \sup_J \left(\int d^4x J(x) \phi(x) - W_k[J] \right) \quad (2.26)$$

$$\Gamma_k[\phi] = \tilde{\Gamma}_k[\phi] - \frac{1}{2} \phi \cdot \mathcal{R}_k(-\partial^2) \cdot \phi \quad (2.27)$$

Tomando la derivada funcional a (2.27) con respecto a $\phi(x)$

$$\frac{\delta \Gamma_k[\phi]}{\delta \phi(x)} = \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \left(\tilde{\Gamma}_k[\phi] - \frac{1}{2} \phi \cdot \mathcal{R}_k(-\partial^2) \cdot \phi \right) = J(x) - (\mathcal{R}_k \cdot \phi)(x) \quad (2.28)$$

Desplazando $\chi = \phi - \phi$

$$\begin{aligned} e^{-\Gamma_k[\phi]} &= e^{W_k[J]} e^{-J \cdot \phi} e^{\frac{1}{2} \phi \cdot \mathcal{R}_k(-\partial^2) \cdot \phi} \\ &= e^{-J \cdot \phi} e^{\frac{1}{2} \phi \cdot \mathcal{R}_k(-\partial^2) \cdot \phi} \int \mathcal{D}\chi e^{-S[\chi+\phi] + J \cdot \chi + J \cdot \phi - \frac{1}{2} (\chi+\phi) \cdot \mathcal{R}_k(-\partial^2) \cdot (\chi+\phi)} \\ &= \int \mathcal{D}\chi e^{-S[\chi+\phi] + J \cdot \chi - \phi \cdot \mathcal{R}_k \cdot \chi - \frac{1}{2} \chi \cdot \mathcal{R}_k \cdot \chi} \\ &= \int \mathcal{D}\chi e^{-S[\chi+\phi] + \frac{\delta \Gamma_k[\phi]}{\delta \phi} \cdot \chi - \frac{1}{2} \chi \cdot \mathcal{R}_k \cdot \chi} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Una vez se ha introducido la acción efectiva promedio, se plantea la ecuación de Wetterich, que es útil para calcular $\Gamma_k[\phi]$ de forma aproximada.

Ecuación de Wetterich

El objetivo es calcular la acción efectiva (2.21), lo cual se puede hacer con dos alternativas:

- i. Integrar todas las fluctuaciones cuánticas a la vez.
- ii. Utilizar la idea de Wilson de integrar las fluctuaciones cuánticas en el cascarón de momentum δk por vez.

La acción efectiva promedio Γ_k obedece la ecuación del grupo de renormalización funcional (EGRF) exacta [19, 31]

$$k \partial_k \Gamma_k[\phi] = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[k \partial_k \mathcal{R}_k \frac{1}{\Gamma_k^{(2)} + \mathcal{R}_k} \right] \quad (2.30)$$

Donde $\Gamma_k^{(2)}$ es el Hessiano (segunda derivada funcional) de Γ_k

$$\Gamma_k^{(2)} = \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \phi \delta \phi} \quad (2.31)$$

Y la acción microscópica $\Gamma_{k \rightarrow \infty}[\phi] = S$ representa una condición inicial para la ecuación de flujo del grupo de renormalización desde el UV hasta el IR.

A continuación se obtiene la ecuación (2.30), para lo cual es necesario introducir el propagador que se puede calcular como

$$G_k(x, y) = \frac{\delta^2 W_k}{\delta J(x) \delta J(y)} = \langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle - \langle \varphi(x) \rangle \langle \varphi(y) \rangle \quad (2.32)$$

$$\frac{\delta^2 W_k}{\delta J(x) \delta J(y)} = \frac{\delta}{\delta J(x)} \frac{\delta W_k}{\delta J(y)}$$

La derivada funcional de W_k con respecto a $J(y)$ es

$$\begin{aligned} \frac{\delta W_k}{\delta J(y)} &= \frac{1}{e^{W_k}} \frac{\delta e^{W_k}}{\delta J(y)} = \frac{1}{e^{W_k}} \frac{\delta}{\delta J(y)} \int \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi] + J \cdot \varphi - \frac{1}{2} \varphi \cdot \mathcal{R}_k \cdot \varphi} \\ &= \frac{1}{e^{W_k}} \int \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi] + J \cdot \varphi - \frac{1}{2} \varphi \cdot \mathcal{R}_k \cdot \varphi} \varphi(y) \equiv \phi(y) \end{aligned}$$

Derivando funcionalmente la anterior expresión con respecto a $J(x)$

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta J(x)} \frac{\delta W_k}{\delta J(y)} &= \frac{\delta}{\delta J(x)} \left(\frac{1}{e^{W_k}} \int \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi] + J \cdot \varphi - \frac{1}{2} \varphi \cdot \mathcal{R}_k \cdot \varphi} \varphi(y) \right) \\ &= \frac{\delta}{\delta J(x)} \left(\frac{1}{e^{W_k}} \right) \int \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi] + J \cdot \varphi - \frac{1}{2} \varphi \cdot \mathcal{R}_k \cdot \varphi} \varphi(y) + \frac{1}{e^{W_k}} \frac{\delta}{\delta J(x)} \left(\int \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi] + J \cdot \varphi - \frac{1}{2} \varphi \cdot \mathcal{R}_k \cdot \varphi} \varphi(y) \right) \\ &= -e^{-W_k} \frac{\delta W_k}{\delta J(x)} \int \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi] + J \cdot \varphi - \frac{1}{2} \varphi \cdot \mathcal{R}_k \cdot \varphi} \varphi(y) + \frac{1}{e^{W_k}} \int \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi] + J \cdot \varphi - \frac{1}{2} \varphi \cdot \mathcal{R}_k \cdot \varphi} \varphi(x) \varphi(y) \\ &= -\langle \varphi(x) \rangle \langle \varphi(y) \rangle + \langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle \end{aligned}$$

De (2.32), una forma equivalente de escribir el propagador es

$$G_k(x, y) = \frac{\delta \phi(x)}{\delta J(y)} \quad (2.33)$$

Por lo tanto se cumple

$$\int d^4 y G_k(x, y) \frac{\delta J(y)}{\delta \phi(z)} = \delta(x - z) \quad (2.34)$$

Ahora, tomando la derivada funcional de (2.28) con respecto a $\phi(x)$

$$\frac{\delta}{\delta\phi(x)} \frac{\delta\Gamma_k[\phi]}{\delta\phi(y)} = \frac{\delta}{\delta\phi(x)} [J(y) - (\mathcal{R}_k \cdot \phi)(y)] = \frac{\delta J(y)}{\delta\phi(x)} - \mathcal{R}_k \quad (2.35)$$

Entonces

$$\frac{\delta J(y)}{\delta\phi(x)} = \frac{\delta^2\Gamma_k[\phi]}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} + \mathcal{R}_k \quad (2.36)$$

Por ende, se obtiene el propagador (2.33) al aplicar la inversa a (2.36), que sigue siendo función de x y y

$$G_k(x, y) = \frac{\delta\phi(x)}{\delta J(y)} = \left(\frac{\delta^2\Gamma_k}{\delta\phi\delta\phi} + \mathcal{R}_k \right)^{-1} (x, y)$$

Finalmente se puede obtener la ecuación de flujo (2.30), derivando (2.27) con respecto a la escala k

$$\begin{aligned} k\partial_k\Gamma_k &= k\partial_k \left[\sup_J \left(\int d^4x J(x)\phi(x) - W_k[J] \right) - \frac{1}{2} \phi \cdot \mathcal{R}_k(-\partial^2) \cdot \phi \right] \\ &= -k\partial_k W_k - \frac{1}{2} \phi \cdot k\partial_k \mathcal{R}_k \cdot \phi = -\frac{1}{e^{W_k}} k\partial_k e^{W_k} - \frac{1}{2} \langle \varphi \rangle \cdot k\partial_k \mathcal{R}_k \cdot \langle \varphi \rangle \\ &= -\frac{1}{e^{W_k}} k\partial_k \int \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi] + J \cdot \varphi - \frac{1}{2} \varphi \cdot \mathcal{R}_k \cdot \varphi} - \frac{1}{2} \langle \varphi \rangle \cdot k\partial_k \mathcal{R}_k \cdot \langle \varphi \rangle \\ &= -\frac{1}{e^{W_k}} \int \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi] + J \cdot \varphi - \frac{1}{2} \varphi \cdot \mathcal{R}_k \cdot \varphi} \left(-\frac{1}{2} \varphi \cdot k\partial_k \mathcal{R}_k \cdot \varphi \right) - \frac{1}{2} \langle \varphi \rangle \cdot k\partial_k \mathcal{R}_k \cdot \langle \varphi \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle \varphi \cdot k\partial_k \mathcal{R}_k \cdot \varphi \rangle - \frac{1}{2} \langle \varphi \rangle \cdot k\partial_k \mathcal{R}_k \cdot \langle \varphi \rangle \\ & \quad k\partial_k\Gamma_k = \frac{1}{2} \text{Tr} \langle k\partial_k \mathcal{R}_k G_k \rangle = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[k\partial_k \mathcal{R}_k \frac{1}{\Gamma_k^{(2)} + \mathcal{R}_k} \right] \end{aligned}$$

El espacio de la teoría es el espacio de todos los posibles funcionales $\Gamma_k[\phi]$ consistentes con las simetrías. La dimensión del espacio-tiempo, el campo ϕ y las simetrías, junto con la ecuación de Wetterich, dan lugar al flujo de grupo de renormalización en el espacio de la teoría correspondiente.

La acción efectiva promedio se parametriza por un conjunto infinito-dimensional de parámetros $g_i(k)$ asociados a un funcional de la base $\mathcal{O}_i[\phi]$

$$\Gamma_k[\phi] = \sum g_i(k) \mathcal{O}_i[\phi] \quad (2.36)$$

La ecuación (2.30) es muy difícil de resolver exactamente, por lo que se hace necesario utilizar un esquema de aproximación como: la expansión perturbativa, la expansión de vértices y/o la expansión de operadores [19]. En el caso de la gravedad, donde las simetrías restringen la forma de los posibles operadores, la expansión de operadores corresponde a una expansión en orden creciente de la dimensión de masa de los invariantes de curvatura.

Existe una relación entre la escogencia del regulador y el esquema de aproximación utilizado. Debido a la libertad para fijar el regulador \mathcal{R}_k , se puede optimizar la convergencia de la solución a la ecuación del grupo de renormalización funcional exacta [32].

Acción Efectiva Promedio para la Gravedad

Con el fin de construir la acción efectiva promedio para la gravedad, la métrica se descompone en una métrica de fondo $\bar{g}_{\alpha\beta}$ y una métrica fluctuante $f_{\alpha\beta}$ [1, 2]

$$g_{\alpha\beta} = \bar{g}_{\alpha\beta} + f_{\alpha\beta} \quad (2.37)$$

La métrica fluctuante es tomada como la variable dinámica y en ningún momento se asume que es pequeña. La variación simétrica, con la derivada de Lie \mathcal{L}_v con respecto al campo vectorial $v^\gamma \partial_\gamma$

$$g_{\alpha\beta} \rightarrow g_{\alpha\beta} + \mathcal{L}_v g_{\alpha\beta} \rightarrow \bar{g}_{\alpha\beta} + f_{\alpha\beta} + \mathcal{L}_v(\bar{g}_{\alpha\beta} + f_{\alpha\beta}) \rightarrow \bar{g}_{\alpha\beta} + f_{\alpha\beta} + \mathcal{L}_v \bar{g}_{\alpha\beta} + \mathcal{L}_v f_{\alpha\beta}$$

se puede agrupar de dos formas

$$f_{\alpha\beta} \rightarrow f_{\alpha\beta} + \mathcal{L}_v \bar{g}_{\alpha\beta} + \mathcal{L}_v f_{\alpha\beta} \quad ; \quad \bar{g}_{\alpha\beta} \rightarrow \bar{g}_{\alpha\beta} \quad (2.38)$$

$$f_{\alpha\beta} \rightarrow f_{\alpha\beta} + \mathcal{L}_v f_{\alpha\beta} \quad ; \quad \bar{g}_{\alpha\beta} \rightarrow \bar{g}_{\alpha\beta} + \mathcal{L}_v \bar{g}_{\alpha\beta} \quad (2.39)$$

Las transformaciones (2.38) son transformaciones de gauge genuinas (donde la métrica de fondo $\bar{g}_{\alpha\beta}$ no se transforma) y las (2.39) son transformaciones de gauge de fondo.

La acción efectiva de fondo $\Gamma[\langle f_{\alpha\beta} \rangle, \sigma^\alpha, \bar{\sigma}_\alpha; \bar{g}_{\alpha\beta}]$ es un funcional de $\bar{f}_{\alpha\beta} = \langle f_{\alpha\beta} \rangle$ (que es el valor esperado de $f_{\alpha\beta}$), de la métrica de fondo $\bar{g}_{\alpha\beta}$ y de los valores esperados de campos fantasmas $\sigma^\alpha = \langle C^\alpha \rangle$ y $\bar{\sigma}_\alpha = \langle \bar{C}_\alpha \rangle$, y cumple que es invariante bajo las transformaciones de gauge de fondo (2.39).

Es conveniente dejar a Γ como un funcional de $\bar{g}_{\alpha\beta}$ y $g_{\alpha\beta} \equiv \bar{g}_{\alpha\beta} + \bar{f}_{\alpha\beta}$, estableciendo

$$\Gamma[g_{\alpha\beta}, \bar{g}_{\alpha\beta}, \sigma^\alpha, \bar{\sigma}_\alpha] \equiv \Gamma[g_{\alpha\beta} - \bar{g}_{\alpha\beta}, \sigma^\alpha, \bar{\sigma}_\alpha; \bar{g}_{\alpha\beta}] \quad (2.40)$$

El valor de la métrica de fondo $\bar{g}_{\alpha\beta}$ es preestablecido, pero tiene una forma genérica. Sin embargo, por consistencia se impone la condición libre de fuentes

$$\frac{\delta}{\delta g_{\alpha\beta}} \Gamma[g, \bar{g}, 0, 0] = 0 \quad \text{si y solo si } \bar{g}_{\alpha\beta} = \bar{g}_*[g]_{\alpha\beta} \quad (2.41)$$

Esto ajusta el fondo $\bar{g}_{\alpha\beta}$ usado como una referencia en la integral funcional a la variable dinámica $g_{\alpha\beta}$, que es el valor esperado $\langle g_{\alpha\beta} \rangle$ de la métrica cuántica.

Para construir la acción efectiva promedio $\Gamma_k[\langle g_{\alpha\beta} \rangle - \bar{g}_{\alpha\beta}, \sigma^\alpha, \bar{\sigma}_\alpha; \bar{g}_{\alpha\beta}]$, se define el generador funcional

$$e^{W_k[J, \bar{g}; \bar{g}]} = \int \mathcal{D}\mu_{j, \bar{g}, k}[f] e^{-S[\bar{g}+f] - c_k^{grav}[f, \bar{g}] + \int dx \sqrt{\bar{g}}^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}} \quad (2.42)$$

La medida⁷ en este caso es

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}\mu_{j,\bar{j},k}[f] \\ &= \mathcal{D}f_{\alpha\beta} \int \mathcal{D}C^\alpha \mathcal{D}\bar{C}_\alpha e^{-\frac{1}{2\bar{\alpha}} \int dx \sqrt{\bar{g}} \bar{g}^{\alpha\beta} Q_\alpha Q_\beta + \frac{1}{\bar{\kappa}} \int dx \bar{c}_\alpha \bar{g}^{\alpha\beta} \frac{\partial Q_\beta}{\partial f_{\gamma\delta}} \mathcal{L}_C(\bar{g}+f)_{\gamma\delta} - C_k^{gh} [C, \bar{C}; \bar{g}] + \int dx \sqrt{\bar{g}} (\bar{j}_\alpha C^\alpha + j^\alpha \bar{c}_\alpha)} \end{aligned} \quad (2.43)$$

El primer término en el exponente es el término de fijación del gauge $-S_{gf}$, el segundo término es la acción de Faddeev-Popov para los fantasmas $-S_{gh}$. Los términos C_k^{grav} y C_k^{gh} implementan el corte de modos en los sectores de gravedad y fantasma, respectivamente. En el último término aparece el acople con las fuentes fantasma \bar{j}_α y j^α .

Realizando la transformación de Legendre de W_k con $\bar{g}_{\alpha\beta}$ fijo, se obtiene

$$\tilde{\Gamma}_k[\bar{f}, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}] = \sup_{J, \bar{j}, \bar{j}} \left(\int dx \sqrt{\bar{g}} (\bar{f}_{\alpha\beta} J^{\alpha\beta} + \sigma^\alpha \bar{j}_\alpha + \bar{\sigma}_\alpha j^\alpha) - W_k[J, \bar{j}, \bar{j}; \bar{g}] \right) \quad (2.44)$$

Si W_k es diferenciable con respecto a las fuentes, y luego, al evaluar en las configuraciones extremales $J_*^{\alpha\beta}$, $\bar{j}_{*,\alpha}$, j_*^α , se obtienen los valores esperados de los campos cuánticos

$$\begin{aligned} \bar{f}_{\alpha\beta} &= \langle f_{\alpha\beta} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \frac{\delta W_k}{\delta J_*^{\alpha\beta}} \\ \sigma^\alpha &= \langle C^\alpha \rangle = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \frac{\delta W_k}{\delta \bar{j}_{*,\alpha}} \\ \bar{\sigma}_\alpha &= \langle \bar{C}_\alpha \rangle = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \frac{\delta W_k}{\delta j_*^\alpha} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Comprobando para la primera expresión

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \frac{\delta W_k}{\delta J_*^{\alpha\beta}} &= \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \frac{\delta W_k}{\delta J^{\alpha\beta}} \Big|_{J_*^{\alpha\beta}} = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \frac{1}{e^{W_k}} \frac{\delta e^{W_k}}{\delta J^{\alpha\beta}} \Big|_{J_*^{\alpha\beta}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \frac{1}{e^{W_k}} \frac{\delta}{\delta J^{\alpha\beta}} \int \mathcal{D}\mu_{j,\bar{j},k}[f] e^{-S[\bar{g}+f] - C_k^{grav}[f, \bar{g}] + \int dx \sqrt{\bar{g}} J^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}} \Big|_{J_*^{\alpha\beta}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \frac{1}{e^{W_k}} \sqrt{\bar{g}} \int \mathcal{D}\mu_{j,\bar{j},k}[f] e^{-S[\bar{g}+f] - C_k^{grav}[f, \bar{g}] + \int dx \sqrt{\bar{g}} J^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}} \Big|_{J_*^{\alpha\beta}} = \langle f_{\alpha\beta} \rangle \end{aligned}$$

La acción efectiva promedio se define como

$$\Gamma_k[\bar{f}, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}] \equiv \tilde{\Gamma}_k[\bar{f}, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}] - C_k^{grav}[\bar{f}; \bar{g}] - C_k^{gh}[\sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}] \quad (2.46)$$

⁷ $\mathcal{D}f_{\alpha\beta}$ es una medida funcional que considera todos los posibles valores de la métrica fluctuante $f_{\alpha\beta}$. Entonces $\mathcal{D}\mu_{j,\bar{j},k}[f]$ difiere de la primera, al considerar los términos de fijación del gauge y de una integración (modificada por el corte de modos) sobre los campos fantasmas C^α y \bar{C}_α .

Al igual que antes, es conveniente dejar a Γ_k como un funcional de $\bar{g}_{\alpha\beta}$ y $\langle g_{\alpha\beta} \rangle \equiv \bar{g}_{\alpha\beta} + \bar{f}_{\alpha\beta}$, imponiendo la definición

$$\Gamma_k[\langle g_{\alpha\beta} \rangle, \bar{g}_{\alpha\beta}, \sigma^\alpha, \bar{\sigma}_\alpha] \equiv \Gamma_k[\langle g_{\alpha\beta} \rangle - \bar{g}_{\alpha\beta}, \sigma^\alpha, \bar{\sigma}_\alpha; \bar{g}_{\alpha\beta}] \quad (2.47)$$

La forma precisa de la condición gauge $Q_\alpha[\bar{g}; f]$ no es esencial, únicamente es importante su invariancia bajo las transformaciones de gauge de fondo (2.39).

Los términos C_k^{grav} y C_k^{gh} implementan el corte de modos en los sectores de gravedad y fantasma. Su forma es arbitraria, pero se toman de forma cuadrática en los campos con kernel covariante bajo (2.39)

$$C_k^{grav}[f, \bar{g}] = \frac{\kappa^2}{2} \int dx \sqrt{\bar{g}} f_{\alpha\beta} \mathcal{R}_k[\bar{g}]^{\alpha\beta\gamma\delta} f_{\gamma\delta} \quad (2.48)$$

$$C_k^{gh}[C, \bar{C}, \bar{g}] = \sqrt{2} \int dx \sqrt{\bar{g}} \bar{C}_\alpha \mathcal{R}_k^{gh}[\bar{g}] C^\alpha \quad (2.49)$$

con $\kappa = (32\pi G_0)^{-1/2}$. Para la supresión de modos se utiliza el Laplaciano

$$\Delta_{\bar{g}} \equiv \bar{g}^{\alpha\beta} \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}_\beta \quad (2.50)$$

donde $\bar{\nabla}_\alpha$ son derivadas covariantes con respecto a la métrica de fondo \bar{g} . Esto con el fin de definir una escala covariante $\lambda[\bar{g}]$ de los valores propios de $-\Delta_{\bar{g}}$. Los kernel se toman como

$$\mathcal{R}_k[\bar{g}]^{\alpha\beta\gamma\delta} = Z_k^{\alpha\beta\gamma\delta}[\bar{g}] k^2 \mathcal{R}^{(0)}(-\Delta_{\bar{g}}/k^2) \quad (2.51)$$

$$\mathcal{R}_k^{gh}[\bar{g}] = Z_k^{gh} k^2 \mathcal{R}^{(0)}(-\Delta_{\bar{g}}/k^2) \quad (2.52)$$

Con los prefactores

$$Z_k^{\alpha\beta\gamma\delta} = \bar{g}^{\alpha\gamma} \bar{g}^{\beta\delta} Z_k^{grav} \quad (2.53)$$

$$Z_k^{gh} = Z_k^{gh} \quad (2.54)$$

Para que solo los modos con $\lambda[\bar{g}] \gg k^2$ entren en la integral funcional de $f_{\alpha\beta}$ no suprimida, se debe escoger una función $\mathcal{R}^{(0)}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ que interpole suavemente entre $\mathcal{R}^{(0)}(0) = 1$ y $\mathcal{R}^{(0)}(\infty) = 0$

$$\mathcal{R}^{(0)}(u) = u[e^u - 1]^{-1} \quad (2.55)$$

Propiedades de la Acción Efectiva Promedio para la Gravedad

1. La acción efectiva promedio es invariante bajo difeomorfismos de campo de fondo (2.39)
 $\Phi = \{\langle g_{\alpha\beta} \rangle, \bar{g}_{\alpha\beta}, \sigma^\alpha, \bar{\sigma}_\alpha\}$

$$\Gamma_k[\Phi + \mathcal{L}_\nu \Phi] = \Gamma_k[\Phi] \quad (2.56)$$

Se asume que la medida $\mathcal{D}f_{\alpha\beta}$ es un difeomorfismo. Esta propiedad es consecuencia de que

$$W_k[\mathcal{J} + \mathcal{L}_v \mathcal{J}] = W_k[\mathcal{J}] \quad (2.57)$$

Con $\mathcal{J} = \{J^{\alpha\sigma}, j^\alpha, \bar{f}_\alpha; \bar{g}_{\alpha\beta}\}$

2. Se satisface la ecuación funcional integro-diferencial

$$\begin{aligned} & \exp\{-\Gamma_k[\bar{f}, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}]\} \\ &= \int \mathcal{D}f \mathcal{D}C \mathcal{D}\bar{C} \exp\left\{-S_{tot}[f, C, \bar{C}; \bar{g}] - C_k[f - \bar{f}, C - \sigma, \bar{C} - \bar{\sigma}] \right. \\ & \left. + \int dx \sqrt{\bar{g}} \left[(f_{\alpha\beta} - \bar{f}_{\alpha\beta}) \frac{\delta \tilde{\Gamma}_k}{\delta \bar{f}_{\alpha\beta}} + (C^\alpha - \sigma^\alpha) \frac{\delta \tilde{\Gamma}_k}{\delta \sigma^\alpha} + (\bar{C}_\alpha - \bar{\sigma}_\alpha) \frac{\delta \tilde{\Gamma}_k}{\delta \bar{\sigma}_\alpha} \right] \right\} \quad (2.58) \end{aligned}$$

donde

$$S_{tot}[f, C, \bar{C}; \bar{g}] = S[\bar{g} + f] + S_{gf}[\bar{g}, f] + S_{gh}[\bar{g}, f, C, \bar{C}]$$

$$C_k[f - \bar{f}, C - \sigma, \bar{C} - \bar{\sigma}] = C_k^{grav}[\bar{f}; \bar{g}] - C_k^{grav}[f, \bar{g}] + C_k^{gh}[\sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}] - C_k^{gh}[C, \bar{C}; \bar{g}]$$

Prueba

Partiendo de (2.46) y sacando el exponente

$$e^{-\Gamma_k[\bar{f}, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}]} = e^{-\tilde{\Gamma}_k[\bar{f}, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}]} e^{C_k^{grav}[\bar{f}; \bar{g}]} e^{C_k^{gh}[\sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}]}$$

Aplicando la definición (2.44) de $\tilde{\Gamma}_k$

$$\begin{aligned} e^{\Gamma_k} &= \exp\left\{\sup_{J, j, \bar{f}} \left(\int dx \sqrt{\bar{g}} (-\bar{f}_{\alpha\beta} J^{\alpha\beta} - \sigma^\alpha \bar{f}_\alpha - \bar{\sigma}_\alpha j^\alpha) + W_k[J, j, \bar{f}; \bar{g}] \right)\right\} e^{C_k^{grav}[\bar{f}; \bar{g}]} e^{C_k^{gh}[\sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}]} \\ &= \exp\left\{\sup_{J, j, \bar{f}} \left(\int dx \sqrt{\bar{g}} (-\bar{f}_{\alpha\beta} J^{\alpha\beta} - \sigma^\alpha \bar{f}_\alpha \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \bar{\sigma}_\alpha j^\alpha) \right)\right\} e^{C_k^{grav}[\bar{f}; \bar{g}]} e^{C_k^{gh}[\sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}]} \exp\left\{\sup_{J, j, \bar{f}} (W_k[J, j, \bar{f}; \bar{g}])\right\} \\ &= \exp\left\{\sup_{J, j, \bar{f}} \left(\int dx \sqrt{\bar{g}} (-\bar{f}_{\alpha\beta} J^{\alpha\beta} - \sigma^\alpha \bar{f}_\alpha \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \bar{\sigma}_\alpha j^\alpha) \right)\right\} e^{C_k^{grav}[\bar{f}; \bar{g}]} e^{C_k^{gh}[\sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}]} \int \mathcal{D}f_{\alpha\beta} \mathcal{D}C^\alpha \mathcal{D}\bar{C}_\alpha e^{-S[\bar{g}+f] - S_{gf} - S_{gh} - C_k^{grav} - C_k^{gh} + \int dx \sqrt{\bar{g}} J^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} + \int dx \sqrt{\bar{g}} (\bar{f}_\alpha C^\alpha + j^\alpha \bar{C}_\alpha)} \\ &= \int \mathcal{D}f_{\alpha\beta} \mathcal{D}C^\alpha \mathcal{D}\bar{C}_\alpha \exp\left\{\left(-S[\bar{g} + f] - S_{gf}[\bar{g}, f] - S_{gh}[\bar{g}, f, C, \bar{C}] + C_k^{grav}[\bar{f}; \bar{g}] - C_k^{grav}[f, \bar{g}] \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + C_k^{gh}[\sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}] - C_k^{gh}[C, \bar{C}; \bar{g}] \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \int dx \sqrt{\bar{g}} \left[(f_{\alpha\beta} - \bar{f}_{\alpha\beta}) J^{\alpha\beta} + (C^\alpha - \sigma^\alpha) \bar{f}_{*,\alpha} + (\bar{C}_\alpha - \bar{\sigma}_\alpha) j^{*\alpha} \right] \right)\right\} \end{aligned}$$

De la expresión (2.44) se pueden obtener las derivadas funcionales

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta \tilde{\Gamma}_k[\bar{f}, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}]}{\delta \bar{f}_{\alpha\beta}} &= J_*^{\alpha\beta}[\bar{f}, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}] \\
 \frac{\delta \tilde{\Gamma}_k[\bar{f}, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}]}{\delta \sigma^\alpha} &= \bar{j}_{*,\alpha}[\bar{f}, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}] \quad (2.59) \\
 \frac{\delta \tilde{\Gamma}_k[\bar{f}, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}]}{\delta \bar{\sigma}_\alpha} &= \bar{j}_*^\alpha[\bar{f}, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}]
 \end{aligned}$$

3. La dependencia con la escala de energía k de la acción efectiva promedio es gobernada por la ecuación exacta funcional del grupo de renormalización

$$\begin{aligned}
 k\partial_k \Gamma_k[\bar{f}, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}] &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[(\Gamma_k^{(2)} + \hat{\mathcal{R}}_k)^{-1}_{\bar{f}\bar{f}} (k\partial_k \hat{\mathcal{R}}_k)_{\bar{f}\bar{f}} \right] \\
 &\quad - \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\left\{ (\Gamma_k^{(2)} + \hat{\mathcal{R}}_k)^{-1}_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}} - (\Gamma_k^{(2)} + \hat{\mathcal{R}}_k)^{-1}_{\sigma\sigma} \right\} (k\partial_k \hat{\mathcal{R}}_k)_{\bar{\sigma}\sigma} \right] \quad (2.60)
 \end{aligned}$$

En primer lugar es necesario calcular los propagadores en el sector de gravedad y fantasma, para luego obtener la ecuación de flujo.

Propagador en el sector de gravedad

Similarmente a como se hizo en las secciones anteriores para campos escalares, se define el propagador

$$\begin{aligned}
 G_k^{grav}{}_{\alpha\beta\gamma\delta}(x, y) &= \frac{\delta^2 W_k}{\delta J_*^{\alpha\beta}(x) \delta J_*^{\gamma\delta}(y)} \quad (2.61) \\
 &= \frac{\delta}{\delta J_*^{\gamma\delta}(y)} \frac{\delta W_k}{\delta J_*^{\alpha\beta}(x)} = \frac{\delta}{\delta J_*^{\gamma\delta}(y)} \frac{\delta}{\delta J_*^{\alpha\beta}(x)} \ln e^{W_k} = \frac{\delta}{\delta J_*^{\gamma\delta}(y)} \frac{1}{e^{W_k}} \frac{\delta}{\delta J_*^{\alpha\beta}(x)} e^{W_k} \\
 &= \frac{\delta}{\delta J_*^{\gamma\delta}(y)} \frac{1}{e^{W_k}} \frac{\delta}{\delta J_*^{\alpha\beta}(x)} \int \mathcal{D}\mu_{j, \bar{j}, k}[f] e^{-S[\bar{g}+f] - c_k^{grav}[f, \bar{g}] + \int dx \sqrt{\bar{g}} J^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}} \\
 &= \frac{\delta}{\delta J_*^{\gamma\delta}(y)} \frac{1}{e^{W_k}} \int \mathcal{D}\mu_{j, \bar{j}, k}[f] e^{-S[\bar{g}+f] - c_k^{grav}[f, \bar{g}] + \int dx \sqrt{\bar{g}} J^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}} \sqrt{\bar{g}(x)} f_{\alpha\beta}(x) \\
 &= \left(\frac{\delta}{\delta J_*^{\gamma\delta}(y)} \frac{1}{e^{W_k}} \right) \int \mathcal{D}\mu_{j, \bar{j}, k}[f] e^{-S[\bar{g}+f] - c_k^{grav}[f, \bar{g}] + \int dx \sqrt{\bar{g}} J^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}} \sqrt{\bar{g}(x)} f_{\alpha\beta}(x) \\
 &\quad + \frac{1}{e^{W_k}} \frac{\delta}{\delta J_*^{\gamma\delta}(y)} \int \mathcal{D}\mu_{j, \bar{j}, k}[f] e^{-S[\bar{g}+f] - c_k^{grav}[f, \bar{g}] + \int dx \sqrt{\bar{g}} J^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}} \sqrt{\bar{g}(x)} f_{\alpha\beta}(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{e^{W_k}} \left(\frac{\delta e^{W_k}}{\delta J_*^{\gamma\delta}(y)} \right) \frac{1}{e^{W_k}} \int \mathcal{D}\mu_{j,\bar{j},k}[f] e^{-S[\bar{g}+f]-C_k^{grav}[f,\bar{g}]+f \int dx \sqrt{\bar{g}} J^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}} \sqrt{\bar{g}(x)} f_{\alpha\beta}(x) \\
 &\quad + \frac{1}{e^{W_k}} \int \mathcal{D}\mu_{j,\bar{j},k}[f] e^{-S[\bar{g}+f]-C_k^{grav}[f,\bar{g}]+f \int dx \sqrt{\bar{g}} J^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}} \sqrt{\bar{g}(x)} f_{\alpha\beta}(x) \sqrt{\bar{g}(y)} f_{\gamma\delta}(y) \\
 &= -\frac{1}{e^{W_k}} \left(\frac{\delta e^{W_k}}{\delta J_*^{\gamma\delta}(y)} \right) \sqrt{\bar{g}(x)} \langle f_{\alpha\beta}(x) \rangle_{f,c,\bar{c}} + \langle f_{\alpha\beta}(x) f_{\gamma\delta}(y) \rangle_{f,c,\bar{c}} \sqrt{\bar{g}(x)} \sqrt{\bar{g}(y)} \\
 G_k^{grav}{}_{\alpha\beta\gamma\delta}(x,y) &= \{ \langle f_{\alpha\beta}(x) f_{\gamma\delta}(y) \rangle_{f,c,\bar{c}} - \langle f_{\alpha\beta}(x) \rangle_{f,c,\bar{c}} \langle f_{\gamma\delta}(y) \rangle_{f,c,\bar{c}} \} \sqrt{\bar{g}(x)} \sqrt{\bar{g}(y)} \quad (2.62)
 \end{aligned}$$

De (2.61) y (2.45), una forma equivalente de escribir el propagador es

$$G_k^{grav}{}_{\alpha\beta\gamma\delta}(x,y) = \frac{\delta}{\delta J_*^{\gamma\delta}(y)} \frac{\delta W_k}{\delta J_*^{\alpha\beta}(x)} = \sqrt{\bar{g}(x)} \frac{\delta \bar{f}_{\alpha\beta}}{\delta J_*^{\gamma\delta}(y)} \quad (2.63)$$

Se cumple que

$$\int dy \sqrt{\bar{g}(y)} \frac{G_k^{grav}{}_{\alpha\beta\gamma\delta}(x,y)}{\sqrt{\bar{g}(x)}} \frac{\delta J_*^{\alpha\beta}(y)}{\delta \bar{f}_{\gamma\delta}(x)} = \delta(x,z) \quad (2.64)$$

Tomando la derivada funcional de la acción efectiva promedio $\Gamma_k[\bar{f}, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}]$ con respecto a $\bar{f}_{\rho\sigma}(y)$, de la definición (2.46)

$$\frac{\delta}{\delta \bar{f}_{\gamma\delta}(y)} \Gamma_k[\bar{f}, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}] = \frac{\delta}{\delta \bar{f}_{\gamma\delta}(y)} \tilde{\Gamma}_k[\bar{f}, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}] - \frac{\delta}{\delta \bar{f}_{\gamma\delta}(y)} C_k^{grav}[\bar{f}; \bar{g}]$$

Aplicando (2.48) y (2.59)

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta}{\delta \bar{f}_{\gamma\delta}(y)} \Gamma_k[\bar{f}, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}] &= J_*^{\gamma\delta}(y) - \frac{\delta}{\delta \bar{f}_{\gamma\delta}(y)} \kappa^2 \int dz dy \sqrt{\bar{g}(z) \bar{g}(y)} \bar{f}_{\alpha\beta}(z) \mathcal{R}_k[\bar{g}]^{\alpha\beta\gamma\delta}(z,y) \bar{f}_{\gamma\delta}(y) \\
 &= J_*^{\gamma\delta}(y) - \kappa^2 \int dz \sqrt{\bar{g}(z)} \bar{f}_{\alpha\beta}(z) \mathcal{R}_k[\bar{g}]^{\alpha\beta\gamma\delta}(z,y) \sqrt{\bar{g}(y)}
 \end{aligned}$$

Derivando nuevamente con respecto a $\bar{f}_{\alpha\beta}(z)$

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta}{\delta \bar{f}_{\alpha\beta}(z)} \frac{\delta}{\delta \bar{f}_{\gamma\delta}(y)} \Gamma_k[\bar{f}, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}] &= \frac{\delta J_*^{\gamma\delta}(y)}{\delta \bar{f}_{\alpha\beta}(z)} - \kappa^2 \frac{\delta}{\delta \bar{f}_{\alpha\beta}(z)} \int dz \sqrt{\bar{g}(z)} \bar{f}_{\alpha\beta}(z) \mathcal{R}_k[\bar{g}]^{\alpha\beta\gamma\delta}(z,y) \sqrt{\bar{g}(y)} \\
 &= \frac{\delta J_*^{\gamma\delta}(y)}{\delta \bar{f}_{\alpha\beta}(z)} - \kappa^2 \mathcal{R}_k[\bar{g}]^{\alpha\beta\gamma\delta}(z,y) \sqrt{\bar{g}(z) \bar{g}(y)}
 \end{aligned}$$

Despejando

$$\frac{\delta J_*^{\gamma\delta}(y)}{\delta \bar{f}_{\alpha\beta}(z)} = \frac{\delta^2 \Gamma_k[\bar{f}, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}]}{\delta \bar{f}_{\alpha\beta}(z) \delta \bar{f}_{\gamma\delta}(y)} + \kappa^2 \mathcal{R}_k[\bar{g}]^{\alpha\beta\gamma\delta}(z,y) \sqrt{\bar{g}(z) \bar{g}(y)}$$

$$= \sqrt{\bar{g}(z)\bar{g}(y)} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\bar{g}(z)\bar{g}(y)}} \frac{\delta^2 \Gamma_k[\bar{f}, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}]}{\delta \bar{f}_{\alpha\beta}(z) \delta \bar{f}_{\gamma\delta}(y)} + \hat{\mathcal{R}}_k[\bar{g}]^{\alpha\beta\gamma\delta}(z, y) \right\}$$

donde se ha definido $\hat{\mathcal{R}}_k[\bar{g}]^{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv \kappa^2 \mathcal{R}_k[\bar{g}]^{\alpha\beta\gamma\delta}$. Invirtiendo la anterior expresión

$$\frac{\delta \bar{f}_{\alpha\beta}(x)}{\delta J_*^{\gamma\delta}(y)} = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}(x)\bar{g}(y)}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\bar{g}\bar{g}}} \frac{\delta^2 \Gamma_k[\bar{f}, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}]}{\delta \bar{f}_{\alpha\beta} \delta \bar{f}_{\gamma\delta}} + \hat{\mathcal{R}}_k[\bar{g}]^{\alpha\beta\gamma\delta} \right\}^{-1} (x, y)$$

Reemplazando en (2.63)

$$G_k^{grav}{}_{\alpha\beta\gamma\delta}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}(y)}} (\Gamma_k^{(2)} + \hat{\mathcal{R}}_k)_{\bar{f}\bar{f}}^{-1}(x, y) \quad (2.64)$$

donde, $(\Gamma_k^{(2)})_{\bar{f}\bar{f}}$ denota el Hessiano de Γ_k con respecto al campo dinámico \bar{f}

$$(\Gamma_k^{(2)})_{\bar{f}\bar{f}}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}(x)\bar{g}(y)}} \frac{\delta^2 \Gamma_k[\bar{f}, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}]}{\delta \bar{f}_{\alpha\beta}(x) \delta \bar{f}_{\gamma\delta}(y)} \quad (2.65)$$

Propagador en el sector de fantasma $\bar{f}_\alpha, \bar{f}^\alpha$

Similarmente, se define el propagador en el sector fantasma $\bar{f}_\alpha, \bar{f}^\alpha$ como

$$\begin{aligned} G_k^{gh, \bar{f}}(x, y) &= \frac{\delta^2 W_k}{\delta \bar{f}_{\alpha,*}(x) \delta \bar{f}_*^\alpha(y)} \quad (2.66) \\ &= \frac{\delta}{\delta \bar{f}_*^\alpha(y)} \frac{\delta W_k}{\delta \bar{f}_{\alpha,*}(x)} = \frac{\delta}{\delta \bar{f}_*^\alpha(y)} \frac{\delta}{\delta \bar{f}_{\alpha,*}(x)} \ln e^{W_k} = \frac{\delta}{\delta \bar{f}_*^\alpha(y)} \frac{1}{e^{W_k}} \frac{\delta}{\delta \bar{f}_{\alpha,*}(x)} e^{W_k} \\ &= \frac{\delta}{\delta \bar{f}_*^\alpha(y)} \frac{1}{e^{W_k}} \frac{\delta}{\delta \bar{f}_{\alpha,*}(x)} \int \mathcal{D}\mu_{\bar{f}, \bar{f}, k}[f] e^{-S[\bar{g}+f] - c_k^{grav}[f, \bar{g}] + \int dx \sqrt{\bar{g}} J^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}} \\ &= \frac{\delta}{\delta \bar{f}_*^\alpha(y)} \frac{1}{e^{W_k}} \int \mathcal{D}\mu_{\bar{f}, \bar{f}, k}[f] e^{-S[\bar{g}+f] - c_k^{grav}[f, \bar{g}] + \int dx \sqrt{\bar{g}} J^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}} \sqrt{\bar{g}(x)} C^\alpha(x) \\ &= \left(\frac{\delta}{\delta \bar{f}_*^\alpha(y)} \frac{1}{e^{W_k}} \right) \int \mathcal{D}\mu_{\bar{f}, \bar{f}, k}[f] e^{-S[\bar{g}+f] - c_k^{grav}[f, \bar{g}] + \int dx \sqrt{\bar{g}} J^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}} \sqrt{\bar{g}(x)} C^\alpha(x) \\ &\quad + \frac{1}{e^{W_k}} \frac{\delta}{\delta \bar{f}_*^\alpha(y)} \int \mathcal{D}\mu_{\bar{f}, \bar{f}, k}[f] e^{-S[\bar{g}+f] - c_k^{grav}[f, \bar{g}] + \int dx \sqrt{\bar{g}} J^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}} \sqrt{\bar{g}(x)} C^\alpha(x) \\ &= -\frac{1}{e^{W_k}} \left(\frac{\delta e^{W_k}}{\delta \bar{f}_*^\alpha(y)} \right) \frac{1}{e^{W_k}} \int \mathcal{D}\mu_{\bar{f}, \bar{f}, k}[f] e^{-S[\bar{g}+f] - c_k^{grav}[f, \bar{g}] + \int dx \sqrt{\bar{g}} J^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}} \sqrt{\bar{g}(x)} C^\alpha(x) \\ &\quad + \frac{1}{e^{W_k}} \int \mathcal{D}\mu_{\bar{f}, \bar{f}, k}[f] e^{-S[\bar{g}+f] - c_k^{grav}[f, \bar{g}] + \int dx \sqrt{\bar{g}} J^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}} \sqrt{\bar{g}(x)} C^\alpha(x) \sqrt{\bar{g}(y)} \bar{C}_\alpha(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{e^{W_k}} \left(\frac{\delta e^{W_k}}{\delta j_*^\alpha(y)} \right) \sqrt{\bar{g}(x)} \langle C^\alpha(x) \rangle_{f,c,\bar{c}} + \langle C^\alpha(x) \bar{C}_\alpha(y) \rangle_{f,c,\bar{c}} \sqrt{\bar{g}(x)} \sqrt{\bar{g}(y)} \\
 G_k^{gh,\bar{f}}(x,y) &= \{ \langle C^\alpha(x) \bar{C}_\alpha(y) \rangle_{f,c,\bar{c}} - \langle C^\alpha(x) \rangle_{f,c,\bar{c}} \langle \bar{C}_\alpha(y) \rangle_{f,c,\bar{c}} \} \sqrt{\bar{g}(x)} \sqrt{\bar{g}(y)} \quad (2.67)
 \end{aligned}$$

De (2.66) y (2.45), una forma equivalente de escribir el propagador es

$$G_k^{gh,\bar{f}}(x,y) = \frac{\delta}{\delta j_*^\alpha(y)} \frac{\delta W_k}{\delta \bar{f}_{\alpha,*}(x)} = \sqrt{\bar{g}(x)} \frac{\delta \sigma^\alpha(x)}{\delta j_*^\alpha(y)} \quad (2.68)$$

Se cumple que

$$\int dy \sqrt{\bar{g}(y)} \frac{G_k^{gh,\bar{f}}(x,y)}{\sqrt{\bar{g}(x)}} \frac{\delta j_*^\alpha(y)}{\delta \sigma^\alpha(z)} = \delta(x,z) \quad (2.69)$$

Tomando la derivada funcional de la acción efectiva promedio $\Gamma_k[\bar{f}, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}]$ con respecto a $\bar{\sigma}_\alpha(x)$, de la definición (2.46)

$$\frac{\delta}{\delta \bar{\sigma}_\alpha(x)} \Gamma_k[\bar{f}, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}] = \frac{\delta}{\delta \bar{\sigma}_\alpha(x)} \bar{\Gamma}_k[\bar{f}, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}] - \frac{\delta}{\delta \bar{\sigma}_\alpha(x)} C_k^{gh}[\sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}]$$

Aplicando (2.49) y (2.59)

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta}{\delta \bar{\sigma}_\alpha(x)} \Gamma_k[\bar{f}, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}] &= j_*^\alpha(x) - \frac{\delta}{\delta \bar{\sigma}_\alpha(x)} \sqrt{2} \int dx dy \sqrt{\bar{g}(x)} \sqrt{\bar{g}(y)} \bar{\sigma}_\alpha(x) \mathcal{R}_k^{gh}[\bar{g}](x,y) \sigma^\alpha(y) \\
 &= j_*^\alpha(x) - \sqrt{2} \int dy \sqrt{\bar{g}(y)} \mathcal{R}_k^{gh}[\bar{g}](x,y) \sigma^\alpha(y) \sqrt{\bar{g}(x)}
 \end{aligned}$$

Derivando nuevamente con respecto a $\sigma^\alpha(y)$

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta}{\delta \sigma^\alpha(y)} \frac{\delta}{\delta \bar{\sigma}_\alpha(x)} \Gamma_k[\bar{f}, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}] &= \frac{\delta j_*^\alpha(x)}{\delta \sigma^\alpha(y)} - \sqrt{2} \frac{\delta}{\delta \sigma^\alpha(y)} \int dy \sqrt{\bar{g}(y)} \mathcal{R}_k^{gh}[\bar{g}](x,y) \sigma^\alpha(y) \sqrt{\bar{g}(x)} \\
 &= \frac{\delta j_*^\alpha(x)}{\delta \sigma^\alpha(y)} - \sqrt{2} \mathcal{R}_k^{gh}[\bar{g}](x,y) \sqrt{\bar{g}(x) \bar{g}(y)}
 \end{aligned}$$

Despejando

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta j_*^\alpha(x)}{\delta \sigma^\alpha(y)} &= \frac{\delta^2 \Gamma_k[\bar{f}, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}]}{\delta \sigma^\alpha(y) \delta \bar{\sigma}_\alpha(x)} + \sqrt{2} \mathcal{R}_k^{gh}[\bar{g}](x,y) \sqrt{\bar{g}(x) \bar{g}(y)} \\
 &= \sqrt{\bar{g}(x) \bar{g}(y)} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\bar{g}(x) \bar{g}(y)}} \frac{\delta^2 \Gamma_k[\bar{f}, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}]}{\delta \sigma^\alpha(y) \delta \bar{\sigma}_\alpha(x)} + \hat{\mathcal{R}}_k[\bar{g}](x,y) \right\}
 \end{aligned}$$

donde se ha definido $\hat{\mathcal{R}}_k[\bar{g}] \equiv \sqrt{2} \mathcal{R}_k[\bar{g}]$. Inviertiendo la anterior expresión

$$\frac{\delta\sigma^\alpha(x)}{\delta j_*^\alpha(y)} = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}(x)\bar{g}(y)}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\bar{g}\bar{g}}} \frac{\delta^2\Gamma_k[\bar{f}, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}]}{\delta\sigma^\alpha(x)\delta\bar{\sigma}_\alpha(y)} + \hat{\mathcal{R}}_k[\bar{g}] \right\}^{-1} (x, y)$$

Reemplazando en (2.68)

$$G_k^{gh, \bar{j}}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}(y)}} (\Gamma_k^{(2)} + \hat{\mathcal{R}}_k)_{\sigma\bar{\sigma}}^{-1}(x, y) \quad (2.70)$$

donde, $(\Gamma_k^{(2)})_{\sigma\bar{\sigma}}$ denota el Hessiano de Γ_k con respecto a los campos dinámico $\sigma, \bar{\sigma}$

$$(\Gamma_k^{(2)})_{\sigma\bar{\sigma}}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}(x)\bar{g}(y)}} \frac{\delta^2\Gamma_k[\bar{f}, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}]}{\delta\sigma^\alpha(x)\delta\bar{\sigma}_\alpha(y)} \quad (2.71)$$

Propagador en el sector de fantasma j^α, \bar{j}_α

Similarmente, se define el propagador en el sector fantasma j^α, \bar{j}_α como

$$\begin{aligned} G_k^{gh, j}(x, y) &= -\frac{\delta^2 W_k}{\delta j_*^\alpha(x)\delta \bar{j}_{\alpha,*}(y)} \quad (2.72) \\ &= -\frac{\delta}{\delta \bar{j}_{\alpha,*}(y)} \frac{\delta W_k}{\delta j_*^\alpha(x)} = -\frac{\delta}{\delta \bar{j}_{\alpha,*}(y)} \frac{\delta}{\delta j_*^\alpha(x)} \ln e^{W_k} = -\frac{\delta}{\delta \bar{j}_{\alpha,*}(y)} \frac{1}{e^{W_k}} \frac{\delta}{\delta j_*^\alpha(x)} e^{W_k} \\ &= -\frac{\delta}{\delta \bar{j}_{\alpha,*}(y)} \frac{1}{e^{W_k}} \frac{\delta}{\delta j_*^\alpha(x)} \int \mathcal{D}\mu_{j, \bar{j}, k}[f] e^{-S[\bar{g}+f] - C_k^{grav}[f, \bar{g}] + \int dx \sqrt{\bar{g}} J^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}} \\ &= -\frac{\delta}{\delta \bar{j}_{\alpha,*}(y)} \frac{1}{e^{W_k}} \int \mathcal{D}\mu_{j, \bar{j}, k}[f] e^{-S[\bar{g}+f] - C_k^{grav}[f, \bar{g}] + \int dx \sqrt{\bar{g}} J^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}} \sqrt{\bar{g}(x)} \bar{C}_\alpha(x) \\ &= -\left(\frac{\delta}{\delta \bar{j}_{\alpha,*}(y)} \frac{1}{e^{W_k}} \right) \int \mathcal{D}\mu_{j, \bar{j}, k}[f] e^{-S[\bar{g}+f] - C_k^{grav}[f, \bar{g}] + \int dx \sqrt{\bar{g}} J^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}} \sqrt{\bar{g}(x)} \bar{C}_\alpha(x) \\ &\quad - \frac{1}{e^{W_k}} \frac{\delta}{\delta \bar{j}_{\alpha,*}(y)} \int \mathcal{D}\mu_{j, \bar{j}, k}[f] e^{-S[\bar{g}+f] - C_k^{grav}[f, \bar{g}] + \int dx \sqrt{\bar{g}} J^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}} \sqrt{\bar{g}(x)} \bar{C}_\alpha(x) \\ &= +\frac{1}{e^{W_k}} \left(\frac{\delta e^{W_k}}{\delta \bar{j}_{\alpha,*}(y)} \right) \frac{1}{e^{W_k}} \int \mathcal{D}\mu_{j, \bar{j}, k}[f] e^{-S[\bar{g}+f] - C_k^{grav}[f, \bar{g}] + \int dx \sqrt{\bar{g}} J^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}} \sqrt{\bar{g}(x)} \bar{C}_\alpha(x) \\ &\quad - \frac{1}{e^{W_k}} \int \mathcal{D}\mu_{j, \bar{j}, k}[f] e^{-S[\bar{g}+f] - C_k^{grav}[f, \bar{g}] + \int dx \sqrt{\bar{g}} J^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}} \sqrt{\bar{g}(x)} \bar{C}_\alpha(x) \sqrt{\bar{g}(y)} C^\alpha(y) \\ &= +\frac{1}{e^{W_k}} \left(\frac{\delta e^{W_k}}{\delta \bar{j}_{\alpha,*}(y)} \right) \sqrt{\bar{g}(x)} \langle \bar{C}_\alpha(x) \rangle_{f, C, \bar{c}} - \langle \bar{C}_\alpha(x) C^\alpha(y) \rangle_{f, C, \bar{c}} \sqrt{\bar{g}(x)} \sqrt{\bar{g}(y)} \\ G_k^{gh, j}(x, y) &= -\{ \langle \bar{C}_\alpha(x) C^\alpha(y) \rangle_{f, C, \bar{c}} - \langle \bar{C}_\alpha(x) \rangle_{f, C, \bar{c}} \langle C^\alpha(y) \rangle_{f, C, \bar{c}} \} \sqrt{\bar{g}(x)} \sqrt{\bar{g}(y)} \quad (2.73) \end{aligned}$$

De (2.72) y (2.45), una forma equivalente de escribir el propagador es

$$G_k^{gh,j}(x, y) = -\frac{\delta}{\delta \bar{f}_{\alpha,*}(y)} \frac{\delta W_k}{\delta j_*^\alpha(x)} = -\sqrt{\bar{g}(x)} \frac{\delta \bar{\sigma}_\alpha(x)}{\delta \bar{f}_{\alpha,*}(y)} \quad (2.74)$$

Se cumple que

$$\int dy \sqrt{\bar{g}(y)} \frac{G_k^{gh,j}(x, y) \delta \bar{f}_{\alpha,*}(y)}{\sqrt{\bar{g}(x)} \delta \bar{\sigma}_\alpha(z)} = -\delta(x, z) \quad (2.75)$$

Tomando la derivada funcional de la acción efectiva promedio $\Gamma_k[\bar{f}, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}]$ con respecto a $\sigma^\alpha(y)$, de la definición (2.46)

$$\frac{\delta}{\delta \sigma^\alpha(y)} \Gamma_k[\bar{f}, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}] = \frac{\delta}{\delta \sigma^\alpha(y)} \tilde{\Gamma}_k[\bar{f}, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}] - \frac{\delta}{\delta \sigma^\alpha(y)} C_k^{gh}[\sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}]$$

Aplicando (2.49) y (2.59)

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \sigma^\alpha(y)} \Gamma_k[\bar{f}, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}] &= \bar{f}_{\alpha,*}(y) - \frac{\delta}{\delta \sigma^\alpha(y)} \sqrt{2} \int dx dy \sqrt{\bar{g}(x)} \sqrt{\bar{g}(y)} \bar{\sigma}_\alpha(x) \mathcal{R}_k^{gh}[\bar{g}](x, y) \sigma^\alpha(y) \\ &= \bar{f}_{\alpha,*}(y) - \sqrt{2} \int dx \sqrt{\bar{g}(x)} \bar{\sigma}_\alpha(x) \mathcal{R}_k^{gh}[\bar{g}](x, y) \sqrt{\bar{g}(y)} \end{aligned}$$

Derivando nuevamente con respecto a $\bar{\sigma}_\alpha(z)$

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \bar{\sigma}_\alpha(z)} \frac{\delta}{\delta \sigma^\alpha(y)} \Gamma_k[\bar{f}, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}] &= \frac{\delta \bar{f}_{\alpha,*}(y)}{\delta \bar{\sigma}_\alpha(z)} - \sqrt{2} \frac{\delta}{\delta \bar{\sigma}_\alpha(z)} \int dz \sqrt{\bar{g}(z)} \bar{\sigma}_\alpha(z) \mathcal{R}_k^{gh}[\bar{g}](z, y) \sqrt{\bar{g}(y)} \\ &= \frac{\delta \bar{f}_{\alpha,*}(y)}{\delta \bar{\sigma}_\alpha(z)} - \sqrt{2} \mathcal{R}_k^{gh}[\bar{g}](z, y) \sqrt{\bar{g}(z) \bar{g}(y)} \end{aligned}$$

Despejando

$$\begin{aligned} \frac{\delta \bar{f}_{\alpha,*}(y)}{\delta \bar{\sigma}_\alpha(z)} &= \frac{\delta^2 \Gamma_k[\bar{f}, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}]}{\delta \bar{\sigma}_\alpha(z) \delta \sigma^\alpha(y)} + \sqrt{2} \mathcal{R}_k^{gh}[\bar{g}](z, y) \sqrt{\bar{g}(z) \bar{g}(y)} \\ &= \sqrt{\bar{g}(z) \bar{g}(y)} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\bar{g}(z) \bar{g}(y)}} \frac{\delta^2 \Gamma_k[\bar{f}, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}]}{\delta \bar{\sigma}_\alpha(z) \delta \sigma^\alpha(y)} + \hat{\mathcal{R}}_k[\bar{g}](z, y) \right\} \end{aligned}$$

donde se ha definido $\hat{\mathcal{R}}_k[\bar{g}] \equiv \sqrt{2} \mathcal{R}_k[\bar{g}]$. Inviertiendo la anterior expresión

$$\frac{\delta \bar{\sigma}_\alpha(x)}{\delta \bar{f}_{\alpha,*}(y)} = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}(x) \bar{g}(y)}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\bar{g} \bar{g}}} \frac{\delta^2 \Gamma_k[\bar{f}, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}]}{\delta \bar{\sigma}_\alpha(x) \delta \sigma^\alpha(y)} + \hat{\mathcal{R}}_k[\bar{g}] \right\}^{-1} (x, y)$$

Reemplazando en (2.74)

$$G_k^{gh,j}(x, y) = -\frac{1}{\sqrt{\bar{g}(y)}} (\Gamma_k^{(2)} + \hat{\mathcal{R}}_k)_{\bar{\sigma}\sigma}^{-1}(x, y) \quad (2.76)$$

donde, $(\Gamma_k^{(2)})_{\bar{\sigma}\sigma}$ denota el Hessiano de Γ_k con respecto a los campos dinámico $\bar{\sigma}, \sigma$

$$(\Gamma_k^{(2)})_{\bar{\sigma}\sigma}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}(x)\bar{g}(y)}} \frac{\delta^2 \Gamma_k[\bar{f}, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}]}{\delta \bar{\sigma}_\alpha(x) \delta \sigma^\alpha(y)} \quad (2.77)$$

En general, los Hessianos de Γ_k con respecto a los campos $\varphi_i \equiv \{\bar{f}_{\alpha\beta}, \sigma^\alpha, \bar{\sigma}_\alpha\}$, se pueden escribir de la forma

$$(\Gamma_k^{(2)})_{ij}(x, y) \equiv \frac{1}{\sqrt{\bar{g}(x)\bar{g}(y)}} \frac{\delta^2 \Gamma_k[\bar{f}, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}]}{\delta \varphi_i(x) \delta \varphi_j(y)} \quad (2.78)$$

Una vez calculados los propagadores en los sectores gravedad $G_k^{grav}{}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ (2.64) y fantasma $G_k^{gh, \bar{f}}$ (2.70) y $G_k^{gh, j}$ (2.76), en términos de los Hessianos de Γ_k , ahora se procede a encontrar la dependencia con la escala de energía k de la acción efectiva promedio, a partir de (2.42), (2.43), (2.44) y (2.46)

$$\begin{aligned} k\partial_k \Gamma_k[\bar{f}, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}] &= k\partial_k(\tilde{\Gamma}_k[\bar{f}, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}] - C_k^{grav}[\bar{f}; \bar{g}] - C_k^{gh}[\sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}]) \\ k\partial_k \Gamma_k[\bar{f}, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}] &= -k\partial_k W_k[J_*, \bar{j}_*, \bar{j}_*; \bar{g}] - k\partial_k C_k^{grav}[\bar{f}; \bar{g}] - k\partial_k C_k^{gh}[\sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}] \end{aligned} \quad (2.79)$$

Trabajando sobre el primer término

$$\begin{aligned} -k\partial_k \ln e^{W_k[J_*, \bar{j}_*, \bar{j}_*; \bar{g}]} &= -k\partial_k \ln e^{W_k[J_*, \bar{j}_*, \bar{j}_*; \bar{g}]} = \frac{-k\partial_k e^{W_k[J_*, \bar{j}_*, \bar{j}_*; \bar{g}]}}{e^{W_k[J_*, \bar{j}_*, \bar{j}_*; \bar{g}]}} \\ &= -\frac{1}{e^{W_k[J_*, \bar{j}_*, \bar{j}_*; \bar{g}]}} k\partial_k \int \mathcal{D}\mu_{\bar{j}_*, \bar{j}_*, k}[f] e^{-S[\bar{g}+f] - C_k^{grav}[\bar{f}, \bar{g}] + \int dx \sqrt{\bar{g}} J_*^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}} \\ &= -\frac{1}{e^{W_k[J_*, \bar{j}_*, \bar{j}_*; \bar{g}]}} \int \mathcal{D}\mu_{\bar{j}_*, \bar{j}_*, k}[f] e^{-S[\bar{g}+f] - C_k^{grav}[\bar{f}, \bar{g}] + \int dx \sqrt{\bar{g}} J_*^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}} (-k\partial_k C_k^{grav}[\bar{f}, \bar{g}] \\ &\quad - k\partial_k C_k^{gh}[C, \bar{C}; \bar{g}]) \\ &= \frac{1}{e^{W_k[J_*, \bar{j}_*, \bar{j}_*; \bar{g}]}} \int \mathcal{D}\mu_{\bar{j}_*, \bar{j}_*, k}[f] e^{-S[\bar{g}+f] - C_k^{grav}[\bar{f}, \bar{g}] + \int dx \sqrt{\bar{g}} J_*^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}} (k\partial_k C_k^{grav}[\bar{f}, \bar{g}] \\ &\quad + k\partial_k C_k^{gh}[C, \bar{C}; \bar{g}]) \end{aligned}$$

Aplicando las definiciones (2.48) y (2.49)

$$\begin{aligned} &-k\partial_k \ln e^{W_k[J_*, \bar{j}_*, \bar{j}_*; \bar{g}]} \\ &= \frac{1}{e^{W_k[J_*, \bar{j}_*, \bar{j}_*; \bar{g}]}} \int \mathcal{D}\mu_{\bar{j}_*, \bar{j}_*, k}[f] e^{-S[\bar{g}+f] - C_k^{grav}[\bar{f}, \bar{g}] + \int dx \sqrt{\bar{g}} J_*^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}} \left(\frac{\kappa^2}{2} \int dx \sqrt{\bar{g}} f_{\alpha\beta} k\partial_k \mathcal{R}_k[\bar{g}]^{\alpha\beta\gamma\delta} f_{\gamma\delta} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{2} \int dx \sqrt{\bar{g}} \bar{C}_\alpha k\partial_k \mathcal{R}_k^{gh}[\bar{g}] C^\alpha \right) \end{aligned}$$

Retomando en (2.79)

$$\begin{aligned}
 & k\partial_k\Gamma_k[\bar{f}, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}] \\
 &= \frac{1}{e^{W_k[J_*, \bar{f}_*, \bar{f}_*; \bar{g}]}} \int \mathcal{D}\mu_{j_*, \bar{f}_*, k}[f] e^{-S[\bar{g}+f] - c_k^{grav}[f, \bar{g}] + \int dx \sqrt{\bar{g}} J_*^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}} \left(\frac{1}{2} \int dx \sqrt{\bar{g}} f_{\alpha\beta} k\partial_k \hat{\mathcal{R}}_k[\bar{g}]^{\alpha\beta\gamma\delta} f_{\gamma\delta} \right. \\
 &+ \left. \int dx \sqrt{\bar{g}} \bar{C}_\alpha k\partial_k \hat{\mathcal{R}}_k^{gh}[\bar{g}] C^\alpha \right) - \frac{1}{2} \int dx \sqrt{\bar{g}} \bar{f}_{\alpha\beta} k\partial_k \hat{\mathcal{R}}_k[\bar{g}]^{\alpha\beta\gamma\delta} \bar{f}_{\gamma\delta} - \int dx \sqrt{\bar{g}} \bar{\sigma}_\alpha k\partial_k \hat{\mathcal{R}}_k^{gh}[\bar{g}] \sigma^\alpha \\
 &= \frac{1}{e^{W_k[J_*, \bar{f}_*, \bar{f}_*; \bar{g}]}} \int \mathcal{D}\mu_{j_*, \bar{f}_*, k}[f] e^{-S[\bar{g}+f] - c_k^{grav}[f, \bar{g}] + \int dx \sqrt{\bar{g}} J_*^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}} \left(\frac{1}{2} \int dx \sqrt{\bar{g}} f_{\alpha\beta} k\partial_k \hat{\mathcal{R}}_k[\bar{g}]^{\alpha\beta\gamma\delta} f_{\gamma\delta} \right. \\
 &+ \left. \int dx \sqrt{\bar{g}} \bar{C}_\alpha k\partial_k \hat{\mathcal{R}}_k^{gh}[\bar{g}] C^\alpha \right) - \frac{1}{2} \int dx \sqrt{\bar{g}} \bar{f}_{\alpha\beta} k\partial_k \hat{\mathcal{R}}_k[\bar{g}]^{\alpha\beta\gamma\delta} \bar{f}_{\gamma\delta} \\
 &- \int dx \sqrt{\bar{g}} \bar{\sigma}_\alpha k\partial_k \hat{\mathcal{R}}_k^{gh}[\bar{g}] \sigma^\alpha \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{e^{W_k[J_*, \bar{f}_*, \bar{f}_*; \bar{g}]}} \int \mathcal{D}\mu_{j_*, \bar{f}_*, k}[f] e^{-S[\bar{g}+f] - c_k^{grav}[f, \bar{g}] + \int dx \sqrt{\bar{g}} J_*^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}} \int dx \sqrt{\bar{g}} f_{\alpha\beta} k\partial_k \hat{\mathcal{R}}_k[\bar{g}]^{\alpha\beta\gamma\delta} f_{\gamma\delta} \\
 &- \frac{1}{2} \int dx \sqrt{\bar{g}} \bar{f}_{\alpha\beta} k\partial_k \hat{\mathcal{R}}_k[\bar{g}]^{\alpha\beta\gamma\delta} \bar{f}_{\gamma\delta} \\
 &+ \frac{1}{2} \frac{1}{e^{W_k[J_*, \bar{f}_*, \bar{f}_*; \bar{g}]}} \int \mathcal{D}\mu_{j_*, \bar{f}_*, k}[f] e^{-S[\bar{g}+f] - c_k^{grav}[f, \bar{g}] + \int dx \sqrt{\bar{g}} J_*^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}} \int dx \sqrt{\bar{g}} \bar{C}_\alpha k\partial_k \hat{\mathcal{R}}_k^{gh}[\bar{g}] C^\alpha \\
 &- \frac{1}{2} \int dx \sqrt{\bar{g}} \bar{\sigma}_\alpha k\partial_k \hat{\mathcal{R}}_k^{gh}[\bar{g}] \sigma^\alpha \\
 &+ \frac{1}{2} \frac{1}{e^{W_k[J_*, \bar{f}_*, \bar{f}_*; \bar{g}]}} \int \mathcal{D}\mu_{j_*, \bar{f}_*, k}[f] e^{-S[\bar{g}+f] - c_k^{grav}[f, \bar{g}] + \int dx \sqrt{\bar{g}} J_*^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}} \int dx \sqrt{\bar{g}} C^\alpha k\partial_k \hat{\mathcal{R}}_k^{gh}[\bar{g}] \bar{C}_\alpha \\
 &- \frac{1}{2} \int dx \sqrt{\bar{g}} \sigma^\alpha k\partial_k \hat{\mathcal{R}}_k^{gh}[\bar{g}] \bar{\sigma}_\alpha \\
 &= \frac{1}{2} \int dx dy \sqrt{\bar{g}(x)\bar{g}(y)} [\langle f_{\alpha\beta}(x) k\partial_k \hat{\mathcal{R}}_k[\bar{g}]^{\alpha\beta\gamma\delta}(x, y) f_{\gamma\delta}(y) \rangle \\
 &\quad - \langle f_{\alpha\beta}(x) \rangle k\partial_k \hat{\mathcal{R}}_k[\bar{g}]^{\alpha\beta\gamma\delta}(x, y) \langle f_{\gamma\delta}(y) \rangle] \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int dx dy \sqrt{\bar{g}(x)\bar{g}(y)} [\langle \bar{C}_\alpha(x) k\partial_k \hat{\mathcal{R}}_k^{gh}[\bar{g}](x, y) C^\alpha(y) \rangle \\
 &\quad - \langle \bar{C}_\alpha(x) \rangle k\partial_k \hat{\mathcal{R}}_k^{gh}[\bar{g}](x, y) \langle C^\alpha(y) \rangle] \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int dx dy \sqrt{\bar{g}(x)\bar{g}(y)} [\langle C^\alpha(x) k\partial_k \hat{\mathcal{R}}_k^{gh}[\bar{g}](x, y) \bar{C}_\alpha(y) \rangle \\
 &\quad - \langle C^\alpha(x) \rangle k\partial_k \hat{\mathcal{R}}_k^{gh}[\bar{g}](x, y) \langle \bar{C}_\alpha(y) \rangle]
 \end{aligned}$$

Comparando la anterior expresión con los propagadores (2.62), (2.67) y (2.73) se obtiene

$$\begin{aligned}
 & k\partial_k\Gamma_k[\bar{f}, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}] \\
 &= \frac{1}{2} \int dx dy \sqrt{\bar{g}(x)\bar{g}(y)} [k\partial_k \hat{\mathcal{R}}_k[\bar{g}]^{\alpha\beta\gamma\delta}(x, y) G_k^{grav}_{\alpha\beta\gamma\delta}(x, y)] \\
 &- \frac{1}{2} \int dx dy \sqrt{\bar{g}(x)\bar{g}(y)} [k\partial_k \hat{\mathcal{R}}_k^{gh}[\bar{g}](x, y) G_k^{gh, \bar{f}}(x, y)] \\
 &+ \frac{1}{2} \int dx dy \sqrt{\bar{g}(x)\bar{g}(y)} [k\partial_k \hat{\mathcal{R}}_k^{gh}[\bar{g}](x, y) G_k^{gh, \bar{f}}(x, y)]
 \end{aligned}$$

Finalmente aplicando (2.64), (2.70) y (2.76)

$$\begin{aligned}
& k\partial_k \Gamma_k[\bar{f}, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}] \\
&= \frac{1}{2} \int dx dy \sqrt{\bar{g}(x)\bar{g}(y)} \left[k\partial_k \hat{\mathcal{R}}_k[\bar{g}]^{\alpha\beta\gamma\delta}(x, y) \frac{1}{\sqrt{\bar{g}(y)}} (\Gamma_k^{(2)} + \hat{\mathcal{R}}_k)_{\bar{f}\bar{f}}^{-1}(x, y) \right] \\
&- \frac{1}{2} \int dx dy \sqrt{\bar{g}(x)\bar{g}(y)} \left[k\partial_k \hat{\mathcal{R}}_k^{gh}[\bar{g}](x, y) \frac{1}{\sqrt{\bar{g}(y)}} (\Gamma_k^{(2)} + \hat{\mathcal{R}}_k)_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}}^{-1}(x, y) \right] \\
&+ \frac{1}{2} \int dx dy \sqrt{\bar{g}(x)\bar{g}(y)} \left[k\partial_k \hat{\mathcal{R}}_k^{gh}[\bar{g}](x, y) \frac{1}{\sqrt{\bar{g}(y)}} (\Gamma_k^{(2)} + \hat{\mathcal{R}}_k)_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}}^{-1}(x, y) \right]
\end{aligned}$$

Comprobando de esta manera la ecuación exacta funcional del grupo de renormalización (2.60)

$$\begin{aligned}
& k\partial_k \Gamma_k[\bar{f}, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}] \\
&= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[(\Gamma_k^{(2)} + \hat{\mathcal{R}}_k)_{\bar{f}\bar{f}}^{-1} (k\partial_k \hat{\mathcal{R}}_k)_{\bar{f}\bar{f}} \right] \\
&- \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\left\{ (\Gamma_k^{(2)} + \hat{\mathcal{R}}_k)_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}}^{-1} - (\Gamma_k^{(2)} + \hat{\mathcal{R}}_k)_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}}^{-1} \right\} (k\partial_k \hat{\mathcal{R}}_k)_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}} \right]
\end{aligned}$$

Llevar a cabo la traza en la representación de la posición incluye una integral $\int dx \sqrt{\bar{g}(x)}$ que involucra el elemento de volumen de fondo.

Una vez solucionada la ecuación (2.60), usualmente no interesan las funciones de correlación que involucran los fantasmas de Fadeev-Popov y es suficiente con conocer el funcional reducido

$$\bar{\Gamma}_k[g] \equiv \Gamma_k[0,0,0; g] \quad (2.80)$$

Como se indica, se escribe simplemente $g_{\alpha\beta}$ para el argumento $\langle g_{\alpha\beta} \rangle = \bar{g}_{\alpha\beta}$. Un aspecto muy importante de la acción efectiva promedio $\bar{\Gamma}_k[g]$ es que sirve para encontrar una familia de soluciones $\{\check{g}_k, 0 \leq k \leq \infty\}$ a la ecuación

$$\frac{\delta \bar{\Gamma}_k[\check{g}_k]}{\delta g_{\alpha\beta}} = 0 \quad (2.81)$$

Que describen los aspectos de un espacio-tiempo cuántico (variedad equipada con infinitas métricas). Por lo tanto \check{g}_{k_1} es la métrica promedio detectada por un experimento (hipotético) que prueba los aspectos del espacio-tiempo cuántico con momentum típico k_1 . Este argumento sirve para realizar la simulación que se plantea, ya que la coordenada radial del horizonte de eventos del agujero de negro determinará cuál métrica debe utilizarse.

Cabe recordar, que la idea principal del grupo de renormalización es implementar un procedimiento de granulado grueso, mediante el cual se promedia sobre porciones del sistema, empezando a escalas de distancia pequeñas, hasta obtener una descripción a grandes distancias directamente de las leyes microscópicas.

En el caso de gravedad cuántica, el poder de resolución del microscopio en el experimento es la distancia propia con la métrica \check{g}_k , es decir

$$\ell(k; x) = [(\check{g}(x)_k)_{\alpha\beta} \Delta_k x^\alpha \Delta_k x^\beta]^{1/2} \quad (2.82)$$

Donde $\Delta_k x^\alpha$ es la distancia típica de variación de los modos $\phi_n(\check{g}_k)$ del Laplaciano asociado a \check{g}_k

$$-\Delta_{\check{g}_k} \phi_n(\check{g}_k) = \xi_n(\check{g}_k) \phi_n(\check{g}_k)$$

Los modos de corte a la escala k son las funciones propias $\phi_n(\check{g}_k)$ con n tal que $\xi_n(\check{g}_k) \approx k^2$. Todo esto está relacionado con el sacrificio de la intuición del granulado grueso espacial, a favor de una separación de modos con invariancia gauge. Resulta que $\ell(k; x)$ da un estimado del poder de resolución real del experimento.

2.3 Espacio-Tiempo de Schwarzschild Mejorado

El espacio-tiempo cuántico efectivo que siente un masa de prueba puntual se construye mejorando la métrica de Schwarzschild a través del grupo de renormalización. La estructura del espacio-tiempo cuántico obtenido depende de la masa del agujero negro M y se asemeja al caso de la métrica de Reissner-Nordström (agujero negro cargado). Resulta que para M superior a un valor de masa crítica $M_{cr} \sim m_p$, el espacio-tiempo tendrá dos horizontes, si $M = M_{cr}$ tendrá un horizonte, y si $M < M_{cr}$ no existirán horizontes [1, 15]. La masa crítica se define exactamente en (2.119). Considerar la dinámica del espacio-tiempo cuando se consideran los efectos cuánticos, es relevante en las etapas tardías del colapso gravitacional, y en el proceso de evaporación de un agujero negro con masa del orden de la masa de Planck m_p (2.9).

A partir de la ecuación exacta funcional del grupo de renormalización (2.60) se obtiene una solución para la acción efectiva promedio $\Gamma_k[f, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}]$. Sucede que la gravedad de Einstein se puede considerar como una teoría efectiva, en donde se identifica a la acción estándar de Einstein-Hilbert con la acción efectiva promedio $\Gamma_{k_{obs}}$. El valor de k_{obs} es la escala observacional en donde se confirma la validez de la relatividad general. Para obtener una solución aproximada a (2.60) se considera que para $k > k_{obs}$ la acción Γ_k es de la forma de la acción de Einstein-Hilbert, pero ahora las constante de Newton $G(k)$ y cosmológica $\lambda(k)$ dependen de la escala de momentum k . En escalas cosmológicas se cumple que $k_{obs} \approx 0$, por lo tanto se pueden identificar los parámetros medidos con $G(k=0) = G_0$ y $\lambda(k=0) = \lambda_0 \approx 0$.

La idea es mejorar la métrica de Schwarzschild, al reemplazar la constante de Newton por su contraparte $G(k)$ con una apropiada identificación de escala que depende de la posición $k = k(r)$, siendo r la coordenada de Schwarzschild radial.

Según el cambio de variables que se introdujo en (2.47) (con $g_{\alpha\beta}$ siendo $\langle g_{\alpha\beta} \rangle$ por simplicidad de notación) se plantea la forma

$$\Gamma_k[g, \bar{g}, \sigma, \bar{\sigma}] = \bar{\Gamma}_k[g] + \hat{\Gamma}_k[g, \bar{g}] + S_{gf}[g - \bar{g}; \bar{g}] + S_{gh}[g - \bar{g}, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}] \quad (2.83)$$

Donde $\bar{\Gamma}_k[g]$ ya se ha definido en (2.80) y $\hat{\Gamma}_k[g, \bar{g}]$ sería la parte correspondiente a la desviación de $g = \bar{g}$. Introduciendo (2.83) en (2.60) se obtiene una ecuación exacta para el espacio truncado de $\Gamma_k[g, \bar{g}]$

$$\begin{aligned} k \partial_k \Gamma_k[g, \bar{g}] = & \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\left(\kappa^{-2} \Gamma_k^{(2)}[g, \bar{g}] + \mathcal{R}_k[\bar{g}] \right)^{-1} k \partial_k \mathcal{R}_k[\bar{g}] \right] \\ & - \text{Tr} \left[\left(-\mathcal{M}[g, \bar{g}] + \mathcal{R}_k^{gh}[\bar{g}] \right)^{-1} k \partial_k \mathcal{R}_k^{gh}[\bar{g}] \right] \end{aligned} \quad (2.84)$$

con $\kappa = (32\pi G_0)^{-1/2}$ y siendo por definición

$$\Gamma_k[g, \bar{g}] \equiv \bar{\Gamma}_k[g] + \hat{\Gamma}_k[g, \bar{g}] + S_{gf}[g - \bar{g}; \bar{g}] \quad (2.85)$$

y $\Gamma_k^{(2)}[g, \bar{g}]$ el Hessiano de $\Gamma_k[g, \bar{g}]$ con respecto a $g_{\alpha\beta}$ manteniendo $\bar{g}_{\alpha\beta}$ fijo.

Para simplificar los cálculos se aproxima aún más, proponiendo $\hat{\Gamma}_k[g, \bar{g}] = (Z_{Nk} - 1)S_{gf}$. Por lo tanto, de acuerdo a la expresión de la medida (2.43) en donde aparece la acción de fijación del gauge, resulta

$$\Gamma_k[g, \bar{g}] \equiv \bar{\Gamma}_k[g] + \frac{Z_{Nk}}{2\alpha} \int dx \sqrt{\bar{g}} \bar{g}^{\alpha\beta} Q_\alpha Q_\beta \quad (2.85)$$

Como se había mencionado anteriormente, la forma precisa de la condición gauge $Q_\alpha[\bar{g}, f]$ no es esencial, únicamente su invariancia bajo transformaciones de gauge de fondo (2.39). Si se utiliza la condición de gauge de fondo armónico

$$Q_\alpha[\bar{g}, f] \equiv \sqrt{2}\kappa\bar{\nabla}^\beta \left[f_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\alpha\beta}\bar{g}^{\gamma\gamma'}f_{\gamma\gamma'} \right] \quad (2.86)$$

Donde $\bar{\nabla}^\beta$ es la derivada covariante con respecto a la métrica \bar{g} . Entonces la acción de Faddeev-Popov para los fantasmas, definida en (2.43)

$$S_{gh}[g - \bar{g}, C, \bar{C}; \bar{g}] = -\frac{1}{\kappa} \int dx \bar{C}_\alpha \bar{g}^{\alpha\beta} \frac{\partial Q_\beta}{\partial f_{\gamma\delta}} \mathcal{L}_C(\bar{g} + f)_{\gamma\delta} \quad (2.87)$$

Aplicando la condición (2.86), resulta ser

$$S_{gh}[g - \bar{g}, C, \bar{C}; \bar{g}] = -\sqrt{2} \int dx \sqrt{\bar{g}} \bar{C}_\alpha \mathcal{M}[\bar{g} + f, \bar{g}]^\alpha{}_\beta C^\beta \quad (2.88)$$

En donde, el tensor \mathcal{M} es el operador fantasma de Faddeev-Popov, de la forma [1]

$$\mathcal{M}[g, \bar{g}]^\alpha{}_\beta = \bar{g}^{\alpha\rho} \bar{g}^{\sigma\lambda} \bar{\nabla}_\lambda (g_{\rho\beta} \nabla_\sigma + g_{\sigma\beta} \nabla_\rho) - \bar{g}^{\rho\sigma} \bar{g}^{\alpha\lambda} \bar{\nabla}_\lambda g_{\sigma\beta} \nabla_\rho \quad (2.89)$$

Ahora, el flujo del grupo de renormalización en un espacio infinito-dimensional de todas las acciones funcionales se proyecta en un subespacio de dos dimensiones mediante una expansión de los operadores base \sqrt{g} y $\sqrt{g}R$, lo que se conoce como la truncación de Einstein-Hilbert [1]

$$\bar{\Gamma}_k[g] = (16\pi G(k))^{-1} \int d^4x \sqrt{g} [-R(g) + 2\bar{\lambda}(k)] \quad (2.90)$$

Aplicando la definición de $\Gamma_k[g, \bar{g}]$ (2.85) con la aproximación (2.90), e insertando en la ecuación de flujo (2.84), se obtiene un sistema acoplado de ecuaciones diferenciales para la constante de Newton adimensional

$$g(k) \equiv k^2 G(k) \quad (2.91)$$

Y para la constante cosmológica adimensional

$$\lambda(k) \equiv \bar{\lambda}(k)/k^2 \quad (2.92)$$

Además, se asume que la constante cosmológica es despreciable para los objetivos de investigación del presente trabajo. Por lo tanto la evolución de la constante de Newton adimensional es

$$\frac{dg(t)}{dt} = [2 + \eta_N]g(t) = \beta(g(t)) \quad (2.93)$$

Donde se ha definido la variable auxiliar $t = \ln k$. El comportamiento a pequeñas distancias (momentum grande) del propagador está gobernado por la dimensión anómala, $\eta_N = \partial_t \ln G(t)$, de la forma $(p^2)^{-1+\eta_N/2}$. Si el flujo tiene un punto UV no trivial $\infty > g^* > 0$, la única forma de que el lado derecho de (2.93) se anule, se da cuando $\eta_N = -2$. En general, la dimensión anómala $\eta_N(g)$ está dada por [1]

$$\eta_N(g) = \frac{B_1 g}{1 - B_2 g} \quad (2.94)$$

Siendo las constante B_1 y B_2 , dadas por

$$B_1 = -\frac{1}{3\pi} \left(24 - \frac{\pi^2}{6} \right) \approx -2.37 \quad (2.95)$$

$$B_2 = \frac{2}{3\pi} \approx 0.21 \quad (2.96)$$

Reemplazando (2.94), (2.95) y (2.96) en (2.93), se obtiene la función beta

$$\beta(g) = 2g \frac{1 - \omega' g}{1 - B_2 g} \quad (2.97)$$

Con las definiciones $\omega \equiv -B_1/2 \approx 1.18$ y $\omega' \equiv \omega + B_2 \approx 1.39$. La ecuación de evolución (2.93) tiene dos puntos fijos g_* (cuando la función beta es igual a cero $\beta(g_*) = 0$), uno gaussiano infrarrojo $g_*^{IR} = 0$ y el otro no gaussiano ultravioleta

$$g_*^{UV} = \frac{1}{\omega'} \approx 0.72 \quad (2.98)$$

El punto fijo UV separa el régimen de acople débil ($g < g_*^{UV}$) del régimen de acople fuerte ($g > g_*^{UV}$). Las trayectorias del grupo de renormalización se clasifican en tres clases:

- i. Trayectorias con $g(k) < 0$ para todo k . Son atraídas hacia g_*^{IR} para $k \rightarrow 0$, ya que $\beta(g)$ en este caso es negativa.
- ii. Trayectorias con $g(k) > g_*^{UV}$ para todo k . Son atraídas hacia g_*^{UV} para $k \rightarrow \infty$, ya que $\beta(g)$ en este caso es negativa.
- iii. Trayectorias con $g(k) \in [0, g_*^{UV}]$ para todo k . Son atraídas hacia g_*^{IR} para $k \rightarrow 0$ y hacia g_*^{UV} para $k \rightarrow \infty$, ya que $\beta(g)$ en este caso es positiva.

Las trayectorias i. se descartan ya que no se permiten valores negativos de la constante de Newton. Las trayectorias ii. no son de utilidad debido a que no permiten establecer una conexión con el régimen perturbativo de grandes distantes ($k \rightarrow 0$). Por lo tanto, únicamente se considerarán las trayectorias del tipo iii.

Para obtener una solución analítica para $g(k)$ se debe integrar la ecuación (2.93) con (2.97), donde resulta una expresión imposible de resolver de forma cerrada [1]

$$\frac{g}{(1 - \omega'g)^{\omega/\omega'}} = \frac{g(k_0)}{[1 - \omega'g(k_0)]^{\omega/\omega'}} \left(\frac{k}{k_0}\right)^2 \quad (2.99)$$

Para simplificar el análisis se aproxima la relación $\omega'/\omega \approx 1.18$ al valor exacto $\omega'/\omega = 1$, que permite resolver (2.99) dando [1]

$$g(k) = \frac{g(k_0)k^2}{\omega g(k_0)k^2 + [1 - \omega g(k_0)]k_0^2} \quad (2.100)$$

En términos de la constante de Newton dimensional (2.91), e identificando a $G_0 \equiv G(k_0 = 0)$ con el valor observado experimentalmente de la constante de Newton

$$G(k) = \frac{G_0}{1 + \omega G_0 k^2} \quad (2.101)$$

Este tipo de comportamiento de $G(k)$ tiene la misma forma obtenida en [39] basados en la cuantización canónica de la gravedad y también en [24] basados en el escenario de seguridad asintótica con una expansión hasta del orden R^{34} en (2.90).

La dimensión anómala (2.94) haciendo una expansión perturbativa es dada por

$$\eta_N = -2\omega'g \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (B_2g)^n \right] \quad (2.102)$$

A primer orden es aproximadamente igual a -2.0016 , por lo cual el estudio original sobre gravedad en $(2 + \varepsilon)$ dimensiones de Weinberg [18] es un buen punto de partida para el escenario de seguridad asintótica, ya que en el régimen UV resulta ser válido trabajar en $4 - 2 = 2$ dimensiones. [1]

Identificación del límite de corte IR

En el caso de un agujero negro es necesario encontrar una dependencia de la escala de momentum $k(P)$ con la escala de distancia $d(P)$ cuando la partícula de prueba es localizada en un punto P del espacio-tiempo del agujero negro, de la forma

$$k(P) = \frac{\xi}{d(P)} \quad (2.103)$$

donde ξ es una constante numérica a determinar. Usando las coordenadas de Schwarzschild (t, r, θ, ϕ) , la simetría del problema implica que $d(P)$ depende únicamente de la coordenada r , es decir $d(P) = d(r)$. La función d se normaliza tal que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{d(r)}{r} = 1 \quad (2.104)$$

Como se mencionó la sección anterior, se sacrifica de la intuición del granulado grueso espacial⁸, a favor de una separación de modos con invariancia gauge, por lo tanto $d(P)$ no debe ser independiente de las coordenadas. Se define como la distancia propia desde el punto P hasta el centro del agujero negro a lo largo de alguna curva \mathcal{C} (todavía existe una ambigüedad en la correcta identificación de esta curva espacio-temporal)

$$d(P) = \int_{\mathcal{C}} \sqrt{|ds^2|} \quad (2.105)$$

Considerando la curva $\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}_{(1)}$ definida por $(t = t_0, r(\lambda) = \lambda, \theta = \theta_0, \phi = \phi_0)$ con $\lambda \in [0, r(P)]$, evaluando la integral (2.105) se obtienen los límites

$$\lim_{r \rightarrow \infty} d_{(1)}(r) = r + \mathcal{O}(\ln r) \quad (2.106)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} d_{(1)}(r) = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{2G_0M}} r^{3/2} + \mathcal{O}(r^{5/2}) \quad (2.107)$$

Por lo tanto (2.103) tiene la propiedad de variar según

$$\lim_{r \rightarrow \infty} k(r) \propto \frac{1}{r} \quad (2.108)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} k(r) \propto \frac{1}{r^{3/2}} \quad (2.109)$$

Las características cualitativas del espacio-tiempo del agujero negro con correcciones cuánticas son insensibles a la forma precisa de interpolación de $k(r)$ entre (2.108) y (2.109), entonces se propone la forma concreta

$$d(r) = \left(\frac{r^3}{r + \gamma G_0 M} \right)^{1/2} \quad (2.110)$$

Comparando con (2.107) se obtiene el valor $\gamma = 9/2$. Sin embargo, los resultados cualitativos son tan robustos que son los mismos para todo $\gamma > 0$, excepto para cuestiones relacionadas con la singularidad en $r = 0$.

Introduciendo (2.110) en (2.103) y luego en (2.101), se obtiene la constante de Newton dependiente de la posición

$$G(r) = \frac{G_0 r^3}{r^3 + \tilde{\omega} G_0 (r + \gamma G_0 M)} \quad (2.111)$$

donde $\tilde{\omega} \equiv \omega \xi^2$. A grandes distancias, la constante de Newton (2.111) está dada por

⁸ Que es un proceso en el cual se promedia sobre volúmenes locales del sistema, empezando a pequeñas escalas, hasta obtener una descripción a grandes distancias, directamente desde las leyes microscópicas.

$$G(r) = G_0 - \tilde{\omega} \frac{G_0^2}{r^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right) \quad (2.112)$$

Como $\tilde{\omega}$ no puede ser determinado por argumentos del grupo de renormalización únicamente (ya que ω depende de la forma $\mathcal{R}^{(0)}$ en (2.51) y (2.52) y ξ es indeterminado). Para fijar el valor numérico de $\tilde{\omega}$, se propone mejorar el potencial gravitacional clásico de Newton mediante el grupo de renormalización, al reemplazar la constante G_0 por $G(r)$

$$V_{imp}(r) = -G_0 \frac{m_1 m_2}{r} \left[1 - \tilde{\omega} \frac{G_0 \hbar}{r^2 c^3} + \dots \right] \quad (2.113)$$

Donde se han recuperado los factores de \hbar y c . La idea es comparar (2.113) con el resultado de la cuantización perturbativa estándar de la gravedad de Einstein llevada a cabo por Donoghue [16, 20]

$$V(r) = -G_0 \frac{m_1 m_2}{r} \left[1 - G_0 \frac{(m_1 + m_2)}{c^2 r} - \frac{167}{30\pi} \frac{G_0 \hbar}{r^2 c^3} + \dots \right] \quad (2.114)$$

Cabe aclarar que los términos donde aparece la constante \hbar , tienen origen cuántico. Por lo tanto

$$\tilde{\omega} = \frac{167}{30\pi} \quad (2.115)$$

La ambigüedad en los factores ω y ξ , debido a su dependencia con $\mathcal{R}^{(0)}$, se compensa en el producto $\omega \xi^2$, que tiene un valor único fijado por la identificación de la forma asintótica del potencial $V_{imp}(r)$.

Métrica mejorada

La métrica de Schwarzschild está dada por

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.116)$$

donde la función clásica es

$$f(r) = f_{class}(r) \equiv \left(1 - \frac{2MG_0}{r} \right) \quad (2.117)$$

En relatividad general, la métrica (2.116) con (2.117) se interpreta como una propiedad de un agujero negro, y tiene significado físico inclusive en la ausencia de la partícula de prueba. En el enfoque del escenario de seguridad asintótica, la presencia de la partícula de prueba define en el sistema una escala de distancia relevante $d(r)$. Esta es la principal suposición, que los efectos cuánticos gravitacionales de mayor relevancia están dados de reemplazar en (2.117) G_0 por $G(r)$ dada por (2.111), entonces

$$f(r) = 1 - \frac{2G_0 M r^2}{r^3 + \tilde{\omega} G_0 (r + \gamma G_0 M)} \quad (2.118)$$

De (2.118) se puede analizar que para $r \rightarrow \infty$, se recupera el espacio-tiempo de Schwarzschild clásico. Además (2.118) no tiene ningún parámetro libre.

El espacio-tiempo de Schwarzschild mejorado mediante el grupo de renormalización es similar al agujero negro de Reissner-Nordström. Si la masa del agujero negro supera un valor crítico $M > M_{cr}$, la solución tendrá dos horizontes de eventos, si $M = M_{cr}$ solo habrá un horizonte y si $M < M_{cr}$ no existirán horizontes. Este valor de masa crítica es del orden de la masa de Planck

$$M_{cr}(\gamma) = \left[\frac{\tilde{\omega} \hbar c}{\Omega_{cr}(\gamma) G_0} \right]^{1/2} \quad (2.119)$$

donde

$$\Omega_{cr}(\gamma) = \frac{1}{8} (9\gamma + 2) \sqrt{\gamma + 2} \sqrt{9\gamma + 2} - \frac{27}{8} \gamma^2 - \frac{9}{2} \gamma + \frac{1}{2} \quad (2.120)$$

El valor de la masa crítica depende de los parámetros $\tilde{\omega}$ y γ , y como se verá en (4.4) $M_{cr} \cong 2.9465 m_p \cong 6.42 \times 10^{-5} g$. En la Fig. 2.1 se muestra la gráfica de $f(r)$ para varios valores de la masa M .

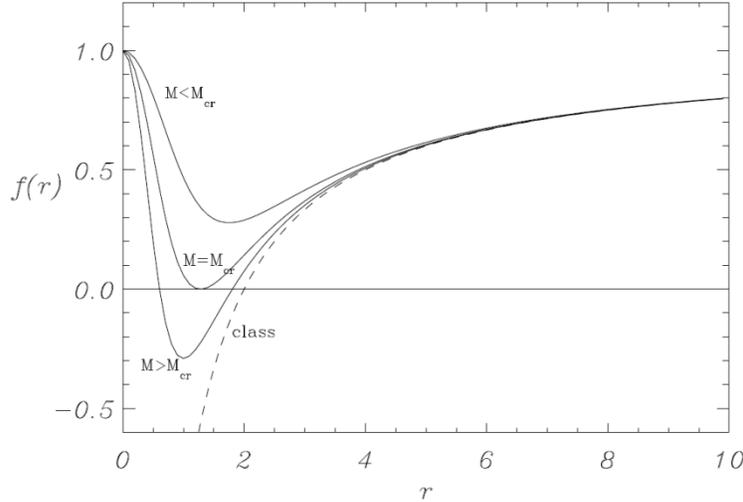


Fig. 2.1. Función $f(r)$ con M variable. La línea punteada es la solución clásica $f_{class}(r)$ [15].

Expandiendo a $f(r)$ alrededor de $r = 0$ se encuentra que

$$f(r) = 1 - 2(\gamma \tilde{\omega} G_0)^{-1} r^2 + \mathcal{O}(r^3) \quad (2.121)$$

Debido a que la métrica de de Sitter es (2.116) para $f_{dS}(r) = 1 - \Lambda r^2/3$. Entonces a pequeñas distancias, el espacio-tiempo de Schwarzschild mejorado es similar al espacio-tiempo de de Sitter con una constante cosmológica efectiva

$$\Lambda_{eff} = 6(\gamma \tilde{\omega} G_0)^{-1} \quad (2.122)$$

Este resultado concuerda con la especulación (basada en consideraciones fenomenológicas) en la literatura [35] sobre existencia de un núcleo de Sitter en agujeros negros realísticos.

La estructura global de este espacio-tiempo mejorado es similar al de Reissner-Nordström, con la diferencia de que ahora la hipersuperficie $r = 0$ es tipo-tiempo. El diagrama de Penrose se muestra en la Fig. 2.2 para $M > M_{cr}$

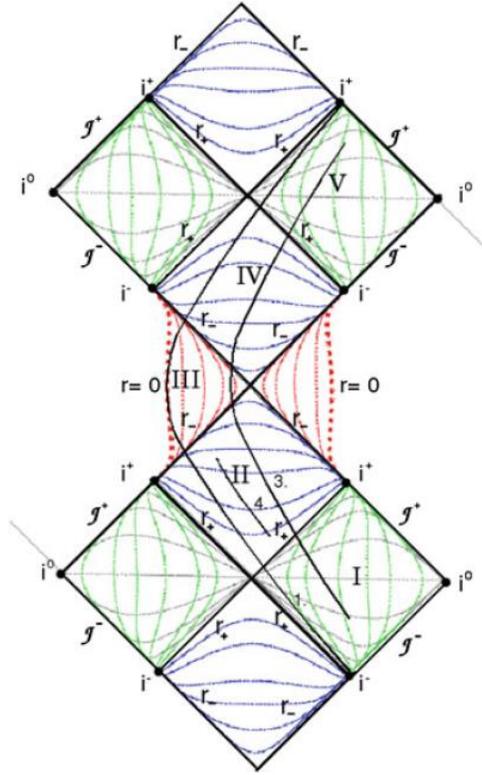


Fig. 2.2. Diagrama de Penrose de un agujero negro cuántico con $M > M_{cr}$ [15].

Donde los puntos i^0 , i^+ e i^- denotan el infinito espacial, futuro infinito y pasado infinito, respectivamente. J^- y J^+ denotan el pasado y futuro nulo infinito. Además r_+ y r_- son los horizontes de eventos exterior e interior, respectivamente.

Singularidad en $r = 0$

Si se considera que en el límite $r \rightarrow 0$ la función $f(r)$ es de la forma (2.121), entonces el agujero negro cuántico tiene un núcleo de Sitter de forma similar a los agujeros negros regulares [36]. Por lo tanto, se concluiría que la métrica mejorada está libre de singularidades de curvatura; esto se puede ver al calcular los invariantes (2.3), (2.4) y (2.5), con $\nu = 2$ la dependencia con r desaparece.

$$R = c(2 + 1)(2 + 2)r^{2-2} \quad (2.123)$$

$$R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma} = c^2(2^4 - 2(2^3) + 5(2^2) + 4)r^{2(2)-4} \quad (2.124)$$

$$C^{\mu\nu\rho\sigma}C_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{c^2}{144}(2 - 1)^2(2 - 2)^2r^{2(2)-4} \quad (2.125)$$

Sin embargo, las geometrías cuánticas y clásicas son muy diferentes para $r \rightarrow 0$. Entonces en el escenario de seguridad asintótica, existe una ambigüedad con el cálculo de la distancia propia $d(r)$ en (2.105), ya que éste fue hecho para la métrica de fondo de Schwarzschild, donde se obtuvo $d_{Sch} \propto r^{3/2}$.

Pero para $r \rightarrow 0$ la geometría cuántica en realidad es similar al espacio-tiempo de de Sitter (2.121), y si ahora se calcula la distancia propia, el comportamiento asintótico es diferente $d_{dS} \propto r$.

Por lo tanto no hay un criterio para decidir si se debe mejorar la constante de Newton con $d_{Sch} \propto r^{3/2}$ (con $v = 2$ no hay singularidad), $d_{dS} \propto r$ (con $v = 1$ sigue existiendo una singularidad) o una función $d(r)$ de alguna métrica desconocida interpolando entre Schwarzschild y de Sitter. Por ende, lo que sí se puede concluir con certeza es que la singularidad es mucho más débil que su contraparte clásica, ya que en un caso o en el otro, la dependencia de la constante de Newton con k , cerca del punto fijo UV sigue siendo $G(k) \propto 1/k^2$, lo que se traduce como si se apagara la interacción gravitacional a distancias pequeñas [15].

2.4 Temperatura de Hawking

En esta sección se discute uno de los posibles observables, la temperatura de Hawking, que permitiría encontrar evidencia observacional a favor del escenario de seguridad asintótica. Para el análisis que se va a desarrollar en esta sección, la forma de $f(r)$ no importa para $r < r_+$. Únicamente se asume que

$$f(r_+) = 0$$

$$f'(r_+) \neq 0$$

Y que $f(r)$ crece monótonicamente desde 0 hasta 1 cuando $r \rightarrow \infty$. Si se consideran métricas Lorentzianas de agujeros negros de la forma (2.116) con una función $f(r)$ arbitraria, al realizar una rotación de Wick ($t = -i\tau$) con τ un número real, se obtiene una métrica Euclidiana

$$ds_E^2 = f(r)d\tau^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.126)$$

Ahora, se realiza un cambio de coordenada de r por una nueva ρ definida como:

$$\rho \equiv \frac{1}{2\pi} \beta_{BH} \sqrt{f(r)} \quad (2.127)$$

con la constante

$$\beta_{BH} \equiv \frac{4\pi}{f'(r_+)} \quad (2.128)$$

De esta forma, el elemento de línea (2.126) se convierte en:

$$ds_E^2 = \rho^2 \left(\frac{2\pi}{\beta_{BH}} \right)^2 d\tau^2 + \left[\frac{f'(r_+)}{f'(r(\rho))} \right]^2 d\rho^2 + r(\rho)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.129)$$

Cerca del horizonte, la métrica se aproxima a:

$$ds_E^2 \approx \rho^2 d\hat{t}^2 + d\rho^2 + r_+^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.130)$$

donde, el tiempo Euclidiano escalado es:

$$\hat{t} \equiv \frac{2\pi}{\beta_{BH}} \tau \quad (2.131)$$

En la métrica (2.129), con el fin de evitar la singularidad en $\rho = 0$, se debe identificar el tiempo τ como una variable periódica $\tau \in [0, \beta_{BH}]$. De esta forma, (2.129) define una variedad Euclidiana de agujero negro, y tiene una topología de $R^2 \times S^2$.

Luego, si se cuantizan los campos de materia en el espacio-tiempo Euclidiano de agujero negro, sus funciones de Green heredan la periodicidad en el dirección temporal. Por lo tanto, parecen funciones de Green termales, con temperatura de Bekenstein-Hawking dada por:

$$T_{BH} = \beta_{BH}^{-1} = \frac{1}{4\pi} f'(r_+) \quad (2.132)$$

Aplicando este resultado para la métrica de Schwarzschild mejorada, con $f(r)$ dada por (2.118), se obtiene:

$$T_{BH}(M) = \frac{1}{8\pi G_0 M} \left[1 - \frac{\tilde{\omega} G_0}{r_+^2} - \frac{2\gamma \tilde{\omega} G_0^2 M}{r_+^3} \right] \quad (2.133)$$

Cuando no se consideran los efectos, es decir con $\tilde{\omega} = 0$, se recupera el resultado clásico (tratamiento semiclásico con campos de materia cuantizada en una geometría clásica):

$$T_{BH}^{class}(M) = \frac{1}{8\pi G_0 M} \quad (2.134)$$

Comparando (2.133) y (2.134), se concluye que $T_{BH} < T_{BH}^{class}$.

La temperatura de Bekenstein-Hawking para el agujero negro cuántico (2.133) y para el agujero negro clásico (2.134) se presenta en la Fig. 2.3. Cuando la masa del agujero negro es muy grande la relación clásica es aproximadamente válida $T_{BH} \propto 1/M$.

El agujero negro radia energía, y entonces su masa decrece y la temperatura aumenta. Esa tendencia es contrarrestada por los efectos cuánticos. La temperatura alcanza su máximo valor cuando la masa es \tilde{M}_{cr} , y para valores más pequeños de la masa decae rápidamente. La temperatura alcanza el cero cuando $M = M_{cr}$ que es del orden de la masa de Planck.

En el marco clásico, la temperatura aumenta continuamente durante el proceso de evaporación. En cambio, en el escenario de seguridad asintótica, el proceso de evaporación para cuando la masa alcanza un valor de M_{cr} . Esto sugiere que el estado final de la evaporación de agujero negro de Schwarzschild mejorado, es un agujero negro crítico con $M = M_{cr}$ (remanente a una escala de Planck).

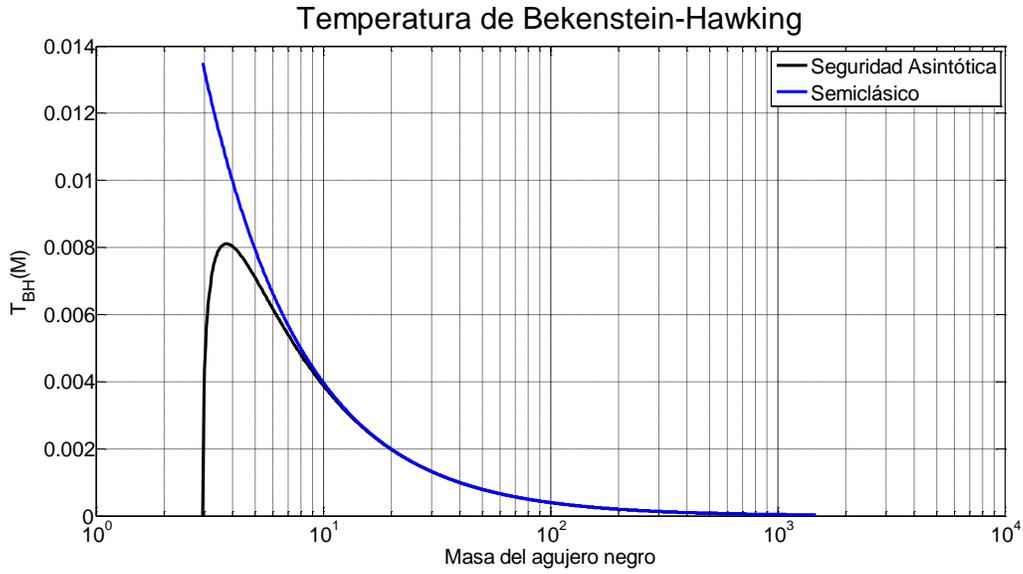


Fig. 2.3. Temperatura de Bekenstein-Hawking en función de la masa del agujero negro.

Adicionalmente, al considerar los efectos de gravedad cuántica en el horizonte de eventos, en [11] se han investigado los observables: la temperatura y el flujo integrado total ($F_v = L_v/4\pi d_L^2$ donde L_v es la luminosidad superficial medida en el infinito y d_L es la distancia que puede ser medida), para materia politrópica. Estos efectos podrían servir para probar el escenario de seguridad asintótica.

Capítulo 3

Solución del Problema

3.1 Acreción Esféricamente Simétrica hacia un Agujero Negro

El elemento de línea en el espacio-tiempo de Schwarzschild es (2.1)

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (3.1)$$

Escrito de otra forma

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)}dt^2 + e^{2\beta(r)}dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (3.2)$$

Si se usan las etiquetas (t, r, θ, ϕ) para $(0,1,2,3)$, los símbolos de Christoffel no nulos son

$$\begin{aligned} \Gamma_{tr}^t &= \partial_r \alpha & \Gamma_{tt}^r &= e^{2(\alpha-\beta)} \partial_r \alpha & \Gamma_{rr}^r &= \partial_r \beta \\ \Gamma_{r\theta}^\theta &= 1/r & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -re^{-2\beta} & \Gamma_{r\phi}^\phi &= 1/r \\ \Gamma_{\phi\phi}^r &= -re^{-2\beta} \sin^2 \theta & \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta & \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \cos \theta / \sin \theta \end{aligned}$$

Los demás símbolos están relacionados por simetrías.

El tensor momento-energía para un fluido perfecto es

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu + pg^{\mu\nu} \quad (3.3)$$

La ecuación de continuidad está dada por

$$(nU^\mu)_{;\mu} = 0 \quad (3.4)$$

Dado que la 4-velocidad en acreción esféricamente simétrica es $U^\mu = dx^\mu/d\tau = (U^0, u, 0, 0)$

$$\begin{aligned} (nU^\mu)_{;\mu} &= \nabla_\mu(nU^\mu) \equiv \partial_\mu(nU^\mu) + \Gamma_{\mu\sigma}^\mu(nU^\sigma) \\ &= \partial_0(nU^0) + \partial_r(nU^r) + \Gamma_{rr}^r(nU^r) + \Gamma_{tr}^t(nU^r) + \Gamma_{\theta r}^\theta(nU^r) + \Gamma_{\phi r}^\phi(nU^r) \\ &= \partial_0(nU^0) + \partial_r(nu) + \partial_r\beta(nu) + \partial_r\alpha(nu) + 2/r(nu) \\ &= \partial_0(nU^0) + 1/r^2 \partial_r(nur^2) \end{aligned}$$

De la condición de normalización de la 4-velocidad del fluido

$$U^\mu U_\mu = U^0 U_0 + U^r U_r = g_{00} U^0 U^0 + g_{rr} U^r U^r = -f(U^0)^2 + f^{-1} u^2 = -1$$

$$(U^0)^2 = f^{-1} + f^{-2} u^2 = \frac{1}{f^2} (f + u^2)$$

Entonces

$$U^0 = \frac{\sqrt{f + u^2}}{f} \quad (3.5)$$

Reemplazando en la ecuación de continuidad

$$(nU^\mu)_{;\mu} = \frac{\partial}{\partial t} \left(n \frac{\sqrt{f + u^2}}{f} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (nur^2) = 0 \quad (3.6)$$

La ecuación de conservación del tensor momento-energía es

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = (\rho + p)(U^\mu{}_{;\nu} U^\nu + U^\mu U^\nu{}_{;\nu}) + (\rho + p)_{;\nu} U^\mu U^\nu + p_{;\nu} g^{\mu\nu} = 0 \quad (3.7)$$

La relación termodinámica de equilibrio se obtiene de minimizar la energía libre de Gibbs por baryon

$$\frac{d\rho}{dn} = \frac{\rho + p}{n} + nT \frac{ds}{dn} \quad (3.8)$$

Es importante no confundir el ds de la anterior ecuación, que es un diferencial de entropía, con el elemento de línea del espacio-tiempo. Asumiendo condiciones isentrópicas, la velocidad del sonido está dada por

$$a^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s = \frac{\partial p}{\partial n} \frac{n}{\rho + p} \quad (3.9)$$

De la primera ley de la termodinámica en equilibrio

$$Tds = d\left(\frac{\rho}{n}\right) + pd\left(\frac{1}{n}\right) \quad (3.10)$$

Se tiene que, para procesos isentrópicos $ds = 0$ y utilizando la ecuación de estado politrópica $p = Kn^\gamma$

$$d\left(\frac{\rho}{n}\right) = Kn^\gamma \frac{1}{n^2} dn = Kn^{\gamma-2} dn$$

$$\frac{\rho}{n} = \bar{\mu}c^2 + K \frac{n^{\gamma-1}}{\gamma-1}$$

$$\rho = \bar{\mu}c^2 n + K \frac{n^\gamma}{\gamma-1} \quad (3.11)$$

Reemplazando (3.11) en (3.9) permite establecer la relación entre a y n

$$a^2 = \frac{\partial p}{\partial n} \frac{n}{\rho + p} = \gamma K n^{\gamma-1} \frac{1}{\bar{\mu}c^2 + K \frac{n^{\gamma-1}}{\gamma-1} + K n^{\gamma-1}}$$

$$a^2 = \frac{\gamma K n^{\gamma-1}}{\bar{\mu}c^2 + \gamma/(\gamma-1) K n^{\gamma-1}} \quad (3.12)$$

En la ecuación de estado para neutrones extremadamente relativistas (con densidades superiores a $6 \times 10^{18} \text{ kg/m}^3$) la constante es $K = 3^{1/3} \pi^{2/3} \hbar c / 4$ y el índice politrópico es $\gamma = 4/3$.

Trabajando sobre la ecuación de conservación del tensor momento-energía $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$

$$\begin{aligned} \nabla_\mu [(\rho + p)U^\mu U^\nu + p g^{\mu\nu}] &= \nabla_\mu [(\rho + p)U^\mu U^\nu] + \nabla_\mu (p g^{\mu\nu}) \\ &= \partial_\mu [(\rho + p)U^\mu U^\nu] + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu (\rho + p)U^\lambda U^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu (\rho + p)U^\mu U^\lambda + \partial_\mu (p g^{\mu\nu}) + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu p g^{\lambda\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu p g^{\mu\lambda} \\ &= (\rho + p) \partial_\mu (U^\mu U^\nu) + \partial_\mu (\rho + p) U^\mu U^\nu + (\rho + p) \left(\Gamma_{\mu\lambda}^\mu U^\lambda U^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu U^\mu U^\lambda \right) + (\partial_\mu p) g^{\mu\nu} \\ &\quad + p \left(\partial_\mu g^{\mu\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu g^{\lambda\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu g^{\mu\lambda} \right) \end{aligned}$$

Cuando se define una única conexión en relatividad general, se impone que exista compatibilidad con la métrica ($\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$), de esta forma, la conexión son los símbolos de Christoffel. Entonces $\delta_\mu^\rho \nabla_\rho g^{\mu\nu} = 0$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \nabla_\mu T^{\mu\nu} &= (\partial_\mu \rho + \partial_\mu p) U^\mu U^\nu + (\rho + p) \left[(\partial_\mu U^\mu) U^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu U^\lambda U^\nu + U^\mu (\partial_\mu U^\nu) + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu U^\mu U^\lambda \right] \\ &\quad + (\partial_\mu p) g^{\mu\nu} = 0 \end{aligned}$$

Analizando término a término para $\nu = 1$

$$\begin{aligned} (\partial_\mu \rho + \partial_\mu p) U^\mu U^1 &= (\partial_0 \rho + \partial_0 p) U^0 U^1 + (\partial_1 \rho + \partial_1 p) U^1 U^1 \\ &= u \frac{\sqrt{f+u^2}}{f} \left(\frac{\partial \rho}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial t} \right) + u^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial r} \right) \\ &= u \frac{\sqrt{f+u^2}}{f} \left(\frac{\rho+p}{n} + a^2 \frac{\rho+p}{n} \right) \frac{\partial n}{\partial t} + u^2 \left(\frac{\rho+p}{n} + a^2 \frac{\rho+p}{n} \right) \frac{\partial n}{\partial r} \\ &= \frac{\rho+p}{n} (1+a^2) \left(u \frac{\sqrt{f+u^2}}{f} \frac{\partial n}{\partial t} + u^2 \frac{\partial n}{\partial r} \right) \end{aligned}$$

El último término

$$(\partial_\mu p) g^{\mu 1} = (\partial_1 p) g^{11} = f \frac{\partial p}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial r} = f a^2 \frac{\rho+p}{n} \frac{\partial n}{\partial r}$$

El segundo término

$$\begin{aligned}
 & (\rho + p) \left[(\partial_\mu U^\mu) U^1 + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu U^\lambda U^1 + U^\mu (\partial_\mu U^1) + \Gamma_{\mu\lambda}^1 U^\mu U^\lambda \right] \\
 = & (\rho + p) \left[(\partial_0 U^0) U^1 + (\partial_1 U^1) U^1 + \Gamma_{0\lambda}^0 U^\lambda U^1 + \Gamma_{i\lambda}^i U^\lambda U^1 + U^0 (\partial_0 U^1) + U^1 (\partial_1 U^1) + \Gamma_{0\lambda}^1 U^0 U^\lambda \right. \\
 & \left. + \Gamma_{1\lambda}^1 U^1 U^\lambda \right] \\
 = & (\rho + p) \left[(\partial_0 U^0) u + (\partial_1 u) u + \Gamma_{01}^0 U^1 U^1 + \Gamma_{11}^1 U^1 U^1 + \Gamma_{21}^2 U^1 U^1 + \Gamma_{31}^3 U^1 U^1 + U^0 (\partial_0 U^1) \right. \\
 & \left. + U^1 (\partial_1 U^1) + \Gamma_{00}^1 U^0 U^0 + \Gamma_{11}^1 U^1 U^1 \right] \\
 = & (\rho + p) \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\sqrt{f+u^2}}{f} \right) u + \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) u + u^2 \partial_r \alpha + u^2 \partial_r \beta + \frac{1}{r} u^2 + \frac{1}{r} u^2 + \frac{\sqrt{f+u^2}}{f} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \right. \\
 & \left. + u \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) + e^{2(\alpha-\beta)} \partial_r \alpha \frac{f+u^2}{f^2} + u^2 \partial_r \beta \right] \\
 = & (\rho + p) \left[\frac{1}{2} \frac{1}{f\sqrt{f+u^2}} 2u^2 \frac{\partial u}{\partial t} + 2u \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{2u^2}{r} + \frac{\sqrt{f+u^2}}{f} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) + f^2 \frac{1}{2f} \frac{\partial f}{\partial r} \frac{f+u^2}{f^2} \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2} \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial r} u^2 \right] \\
 = & (\rho + p) \left[\frac{1}{f\sqrt{f+u^2}} u^2 \frac{\partial u}{\partial t} + 2u \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{2u^2}{r} + \frac{\sqrt{f+u^2}}{f} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial r} \right]
 \end{aligned}$$

Uniendo los términos

$$\begin{aligned}
 \nabla_\mu T^{\mu\nu} = & \frac{\rho + p}{n} (1 + a^2) \left(u \frac{\sqrt{f+u^2}}{f} \frac{\partial n}{\partial t} + u^2 \frac{\partial n}{\partial r} \right) + f a^2 \frac{\rho + p}{n} \frac{\partial n}{\partial r} \\
 & + (\rho + p) \left[\frac{1}{f\sqrt{f+u^2}} u^2 \frac{\partial u}{\partial t} + 2u \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{2u^2}{r} + \frac{\sqrt{f+u^2}}{f} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial r} \right] = 0 \\
 \frac{1}{n} (1 + a^2) \left(u \frac{\sqrt{f+u^2}}{f} \frac{\partial n}{\partial t} + u^2 \frac{\partial n}{\partial r} \right) + f a^2 \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial r} \\
 & + \left[\frac{1}{f\sqrt{f+u^2}} u^2 \frac{\partial u}{\partial t} + 2u \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{2u^2}{r} + \frac{\sqrt{f+u^2}}{f} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial r} \right] = 0 \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

Analizando la ecuación de continuidad

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \left(n \frac{\sqrt{f+u^2}}{f} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (n u r^2) = 0 \\
 & \frac{\sqrt{f+u^2}}{f} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{2} n \frac{1}{f\sqrt{f+u^2}} 2u \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{r^2} n u 2r + n \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial n}{\partial r} = 0
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{f\sqrt{f+u^2}}u^2\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{u\sqrt{f+u^2}}{n}\frac{\partial n}{f}\frac{\partial n}{\partial t} - \frac{2u^2}{r} - \frac{u^2}{n}\frac{\partial n}{\partial r} \quad (3.14)$$

Reemplazando (3.14) en (3.13)

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}(1+a^2)\left(u\frac{\sqrt{f+u^2}}{f}\frac{\partial n}{\partial t} + u^2\frac{\partial n}{\partial r}\right) + fa^2\frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial r} \\ + \left[-\frac{u\sqrt{f+u^2}}{n}\frac{\partial n}{f}\frac{\partial n}{\partial t} - \frac{2u^2}{r} - \frac{u^2}{n}\frac{\partial n}{\partial r} + u\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{2u^2}{r} + \frac{\sqrt{f+u^2}}{f}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial r}\right] = 0 \\ \frac{\sqrt{f+u^2}}{f}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + u\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{a^2}{n}\left(u\frac{\sqrt{f+u^2}}{f}\frac{\partial n}{\partial t} + (u^2+f)\frac{\partial n}{\partial r}\right) = 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

De las ecuaciones de conservación (3.6) y (3.15) se obtienen las soluciones estacionarias, para la ecuación de continuidad

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(n_0u_0r^2) = 0$$

$$4\pi\bar{\mu}n_0u_0r^2 = -\dot{m}/c \quad (3.16)$$

y para la ecuación de conservación del tensor momento-energía

$$u_0\left(\frac{du_0}{dr}\right) + \frac{1}{2}\frac{df}{dr} + \frac{a^2}{n_0}(f+u_0^2)\frac{dn_0}{dr} = 0$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{du_0^2}{dr}\right) + \frac{1}{2}\frac{df}{dr} = -\frac{a^2}{n_0}(f+u_0^2)\frac{dn_0}{dr}$$

$$\frac{1}{(f+u_0^2)}\frac{d}{dr}(f+u_0^2) = -\frac{2a_0^2}{n_0}\frac{dn_0}{dr} \quad (3.17)$$

En el presente trabajo de tesis de maestría se resolverán las ecuaciones (3.16) y (3.17) mediante el método de diferencias finitas, que se explicará en el siguiente capítulo.

Analizando el límite no relativista, donde $u^2 \ll 1$, $a^2 \ll 1$ y $r \gg 2G_0M$, la ecuación (3.17) a primer orden es

$$\frac{1}{2}\frac{du_0^2}{dr} + \frac{1}{2f}\frac{df}{dr} + \frac{a_0^2}{n_0}\frac{dn_0}{dr} = \frac{1}{2}\frac{du_0^2}{dr} + \phi' + \frac{a_0^2}{n_0}\frac{dn_0}{dr} = 0$$

Se puede definir un potencial efectivo debido a la curvatura del espacio-tiempo de acuerdo a $\phi' = f'/2f$, que representa una desviación del comportamiento Newtoniano. En este enfoque pseudo-Newtoniano se propone que los efectos de la relatividad general sean simulados por el potencial efectivo que cumple $d\phi = df/2f$. Integrando

$$\phi = \frac{1}{2} \ln f = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2MG_0}{r} \right) \quad (3.18)$$

Utilizando la serie de Taylor del logaritmo natural [33], válida para $-1 < x - 1 \leq 1$

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x-1)^n \quad (3.19)$$

$$\phi = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2MG_0}{r} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(-\frac{2MG_0}{r} \right)^n \approx -\frac{MG_0}{r} - \frac{1}{4} \left(\frac{2MG_0}{r} \right)^2 + \mathcal{O} \left(\frac{1}{r^3} \right)$$

3.2 Análisis de Estabilidad en Acreción

El esquema de perturbación a usar es el que se propone en [10], el cual es una perturbación linealizada de la solución estacionaria de la ecuación de continuidad.

$$u(r, t) = u_0(r) + u'(r, t) \quad (3.20)$$

$$n(r, t) = n_0(r) + n'(r, t) \quad (3.21)$$

Es conveniente trabajar con la nueva variable, $\psi = nur^2$. Trabajando con perturbaciones a primer orden [10]

$$\psi(r, t) = n(r, t)u(r, t)r^2 = (n_0 + n')(u_0 + u')r^2 = n_0u_0r^2 + (u_0n' + n_0u')r^2 = \psi_0 + \psi'$$

$$\psi' = (u_0n' + n_0u')r^2 \quad (3.22)$$

De la ecuación de continuidad (3.6), a primer orden en la perturbación

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(n \frac{\sqrt{f+u^2}}{f} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (nur^2) = 0 \\ & = \frac{n}{f} \frac{u}{\sqrt{f+u^2}} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sqrt{f+u^2}}{f} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (n_0u_0r^2) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi'}{\partial r} \\ & \frac{n_0u_0}{f\sqrt{f+u^2}} \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{\sqrt{f+u_0^2}}{f} \frac{\partial n'}{\partial t} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi'}{\partial r} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Además

$$\frac{\partial \psi'}{\partial t} = \frac{\partial (u_0n' + n_0u')}{\partial t} r^2 = u_0r^2 \frac{\partial n'}{\partial t} + n_0r^2 \frac{\partial u'}{\partial t} \quad (3.24)$$

Comparando (3.23) y (3.24), se obtienen las ecuaciones que relacionan la derivada temporal de las perturbaciones en la densidad de número de partículas y en la velocidad del fluido con las derivadas espacial y temporal de ψ'

$$\frac{\partial n'}{\partial t} = -\frac{1}{r^2} \left(\frac{u_0}{f} \frac{\partial \psi'}{\partial t} + \sqrt{f + u_0^2} \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right) \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = \frac{\sqrt{f + u_0^2}}{n_0 r^2} \left(\frac{\sqrt{f + u_0^2}}{f} \frac{\partial \psi'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right) \quad (3.26)$$

Comprobando, para (3.25)

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{r^2} \left(\frac{u_0}{f} \frac{\partial \psi'}{\partial t} + \sqrt{f + u_0^2} \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right) \\ &= -\frac{1}{r^2} \frac{u_0}{f} \left(u_0 r^2 \frac{\partial n'}{\partial t} + n_0 r^2 \frac{\partial u'}{\partial t} \right) + \sqrt{f + u_0^2} \left(\frac{n_0 u_0}{f \sqrt{f + u^2}} \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{\sqrt{f + u_0^2}}{f} \frac{\partial n'}{\partial t} \right) \\ &= -\frac{u_0^2}{f} \frac{\partial n'}{\partial t} - \frac{u_0 n_0}{f} \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{n_0 u_0}{f} \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{f + u_0^2}{f} \frac{\partial n'}{\partial t} = \frac{\partial n'}{\partial t} \end{aligned}$$

y para (3.26)

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{f + u_0^2}}{n_0 r^2} \left(\frac{\sqrt{f + u_0^2}}{f} \frac{\partial \psi'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right) \\ &= \frac{f + u_0^2}{f n_0 r^2} \left(u_0 r^2 \frac{\partial n'}{\partial t} + n_0 r^2 \frac{\partial u'}{\partial t} \right) - \frac{u_0 \sqrt{f + u_0^2}}{n_0} \left(\frac{n_0 u_0}{f \sqrt{f + u^2}} \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{\sqrt{f + u_0^2}}{f} \frac{\partial n'}{\partial t} \right) \\ &= \frac{f + u_0^2}{f n_0} u_0 \frac{\partial n'}{\partial t} + \frac{f + u_0^2}{f} \frac{\partial u'}{\partial t} - \frac{u_0^2}{f} \frac{\partial u'}{\partial t} - \frac{f + u_0^2}{f n_0} u_0 \frac{\partial n'}{\partial t} = \frac{\partial u'}{\partial t} \end{aligned}$$

Como la velocidad del sonido depende de la densidad de número de partículas, la perturbación en n afecta a a^2 , a primer orden

$$a^2 = a_0^2 + \frac{da_0^2}{dn_0} n'$$

Ahora, de la ecuación conservación del tensor momento-energía (3.15), a primer orden en la perturbación

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{f + u^2}}{f} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{a^2}{n} \left(u \frac{\sqrt{f + u^2}}{f} \frac{\partial n}{\partial t} + (f + u^2) \frac{\partial n}{\partial r} \right) = 0 \\ &= \frac{\sqrt{f + u_0^2}}{f} \frac{\partial u'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial r} + u_0 \frac{\partial u'}{\partial r} + u' \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{a_0^2}{n_0} u_0 \frac{\sqrt{f + u_0^2}}{f} \frac{\partial n'}{\partial t} \\ & \quad + \frac{a_0^2}{n_0} (f + u_0^2 + 2u_0 u') \frac{\partial n_0}{\partial r} + \frac{a_0^2}{n_0} (f + u_0^2) \frac{\partial n'}{\partial r} + \frac{da_0^2}{dn_0} \frac{n'}{n_0} (f + u_0^2) \frac{\partial n_0}{\partial r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sqrt{f+u_0^2}}{f} \frac{\partial u'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial r} + u_0 \frac{\partial u'}{\partial r} + u' \frac{\partial u_0}{\partial r} - \frac{a^2}{n_0} (f+u_0^2) \frac{dn_0}{dr} - \frac{1}{2} \left(\frac{du_0^2}{dr} \right) \\
 &\quad + \frac{a_0^2}{n_0} u_0 \frac{\sqrt{f+u_0^2}}{f} \frac{\partial n'}{\partial t} + \frac{a_0^2}{n_0} (f+u_0^2+2u_0u') \frac{\partial n_0}{\partial r} + \frac{a_0^2}{n_0} (f+u_0^2) \frac{\partial n'}{\partial r} \\
 &\quad + \frac{da_0^2}{dn_0} \frac{n'}{n_0} (f+u_0^2) \frac{\partial n_0}{\partial r} - \frac{n'}{n_0^2} a_0^2 (f+u_0^2) \frac{\partial n_0}{\partial r} \\
 &= \frac{\sqrt{f+u_0^2}}{f} \frac{\partial u'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u'}{\partial r} + u' \frac{\partial u_0}{\partial r} + u_0 \frac{\sqrt{f+u_0^2}}{f} \frac{a_0^2}{n_0} \frac{\partial n'}{\partial t} + \frac{a_0^2}{n_0} (2u_0u') \frac{\partial n_0}{\partial r} \\
 &\quad + \frac{a_0^2}{n_0} (f+u_0^2) \frac{\partial n'}{\partial r} + \frac{da_0^2}{dn_0} \frac{n'}{n_0} (f+u_0^2) \frac{\partial n_0}{\partial r} - \frac{n'}{n_0^2} a_0^2 (f+u_0^2) \frac{\partial n_0}{\partial r} \\
 &= \frac{\sqrt{f+u_0^2}}{f} \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{\partial(u_0u')}{\partial r} + u_0 \frac{\sqrt{f+u_0^2}}{f} \frac{a_0^2}{n_0} \frac{\partial n'}{\partial t} + 2u_0 \frac{\partial n_0}{\partial r} \frac{a_0^2}{n_0} u' \\
 &\quad + (f+u_0^2) \left[\frac{a_0^2}{n_0} \frac{\partial n'}{\partial r} + \frac{da_0^2}{dn_0} \frac{n'}{n_0} \frac{\partial n_0}{\partial r} - \frac{n'}{n_0^2} a_0^2 \frac{\partial n_0}{\partial r} \right] \\
 &\frac{\sqrt{f+u_0^2}}{f} \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{\partial(u_0u')}{\partial r} + u_0 \frac{\sqrt{f+u_0^2}}{f} \frac{a_0^2}{n_0} \frac{\partial n'}{\partial t} + 2u_0 \frac{\partial n_0}{\partial r} \frac{a_0^2}{n_0} u' + (f+u_0^2) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{a_0^2}{n_0} n' \right) = 0
 \end{aligned}$$

Diferenciando parcialmente la anterior expresión con respecto al tiempo y utilizando (3.16), (3.25) y (3.26)

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\sqrt{f+u_0^2}}{f} \frac{\partial u'}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(u_0 \frac{\partial u'}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(u_0 \frac{\sqrt{f+u_0^2}}{f} \frac{a_0^2}{n_0} \frac{\partial n'}{\partial t} \right) + 2u_0 \frac{\partial n_0}{\partial r} \frac{a_0^2}{n_0} \frac{\partial u'}{\partial t} \\
 &\quad + (f+u_0^2) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{a_0^2}{n_0} \frac{\partial n'}{\partial t} \right) = 0 \\
 &\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{f+u_0^2}{fn_0r^2} \left(\frac{\sqrt{f+u_0^2}}{f} \frac{\partial \psi'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[u_0 \frac{\sqrt{f+u_0^2}}{n_0r^2} \left(\frac{\sqrt{f+u_0^2}}{f} \frac{\partial \psi'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right) \right] \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial t} \left[-u_0 \frac{\sqrt{f+u_0^2}}{f} \frac{a_0^2}{n_0} \frac{1}{r^2} \left(\frac{u_0}{f} \frac{\partial \psi'}{\partial t} + \sqrt{f+u_0^2} \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right) \right] \\
 &\quad + 2u_0 \frac{\partial n_0}{\partial r} \frac{a_0^2}{n_0} \frac{\sqrt{f+u_0^2}}{n_0r^2} \left(\frac{\sqrt{f+u_0^2}}{f} \frac{\partial \psi'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right) \\
 &\quad + (f+u_0^2) \frac{\partial}{\partial r} \left[-\frac{a_0^2}{n_0} \frac{1}{r^2} \left(\frac{u_0}{f} \frac{\partial \psi'}{\partial t} + \sqrt{f+u_0^2} \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right) \right] = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{f + u_0^2}{fn_0r^2} \frac{\sqrt{f + u_0^2}}{f} \frac{\partial \psi'}{\partial t} + \frac{f + u_0^2}{fn_0r^2} u_0 \frac{\partial \psi'}{\partial r} - u_0 \frac{\sqrt{f + u_0^2}}{f} \frac{a_0^2}{n_0} \frac{1}{r^2} \frac{u_0}{f} \frac{\partial \psi'}{\partial t} \right. \\
& \quad \left. - u_0 \frac{\sqrt{f + u_0^2}}{f} \frac{a_0^2}{n_0} \frac{1}{r^2} \sqrt{f + u_0^2} \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right] \\
& \quad + \frac{\partial}{\partial r} \left[u_0 \frac{\sqrt{f + u_0^2}}{n_0r^2} \left(\frac{\sqrt{f + u_0^2}}{f} \frac{\partial \psi'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right) \right] \\
& \quad + \frac{\partial}{\partial r} \left[-(f + u_0^2) \frac{a_0^2}{n_0} \frac{1}{r^2} \left(\frac{u_0}{f} \frac{\partial \psi'}{\partial t} + \sqrt{f + u_0^2} \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right) \right] \\
& \quad = - \frac{\partial(f + u_0^2)}{\partial r} \left[\frac{a_0^2}{n_0} \frac{1}{r^2} \left(\frac{u_0}{f} \frac{\partial \psi'}{\partial t} + \sqrt{f + u_0^2} \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right) \right] \\
& \quad - 2u_0 \frac{\partial n_0}{\partial r} \frac{a_0^2}{n_0} \frac{\sqrt{f + u_0^2}}{n_0r^2} \left(\frac{\sqrt{f + u_0^2}}{f} \frac{\partial \psi'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\sqrt{f + u_0^2}}{f^2} \left(\frac{f + u_0^2}{n_0r^2} - \frac{u_0^2 a_0^2}{n_0r^2} \right) \frac{\partial \psi'}{\partial t} + \frac{f + u_0^2}{f} \left(\frac{u_0}{n_0r^2} - \frac{u_0 a_0^2}{n_0r^2} \right) \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right] \\
& \quad + \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{u_0}{n_0r^2} \frac{f + u_0^2}{f} (1 - a_0^2) \frac{\partial \psi'}{\partial t} + \frac{\sqrt{f + u_0^2}}{n_0r^2} (u_0^2 - (f + u_0^2) a_0^2) \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right] \\
& \quad = \frac{2a_0^2}{n_0} \frac{dn_0}{dr} (f + u_0^2) \left[\frac{a_0^2}{n_0} \frac{1}{r^2} \left(\frac{u_0}{f} \frac{\partial \psi'}{\partial t} + \sqrt{f + u_0^2} \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right) \right] \\
& \quad - 2u_0 \frac{\partial n_0}{\partial r} \frac{a_0^2}{n_0} \frac{\sqrt{f + u_0^2}}{n_0r^2} \left(\frac{\sqrt{f + u_0^2}}{f} \frac{\partial \psi'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right)
\end{aligned}$$

Multiplicando por $n_0r^2u_0n_0$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left[u_0n_0 \frac{\sqrt{f + u_0^2}}{f^2} (f + u_0^2 - u_0^2 a_0^2) \frac{\partial \psi'}{\partial t} + u_0^2 n_0 \frac{f + u_0^2}{f} (1 - a_0^2) \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right] \\
& \quad + \frac{\partial}{\partial r} \left[u_0^2 n_0 \frac{f + u_0^2}{f} (1 - a_0^2) \frac{\partial \psi'}{\partial t} + u_0 n_0 \sqrt{f + u_0^2} (u_0^2 - (f + u_0^2) a_0^2) \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right] \\
& \quad - \frac{\partial(n_0r^2u_0n_0)}{\partial r} \left[\frac{f + u_0^2}{f} \frac{u_0}{n_0r^2} (1 - a_0^2) \frac{\partial \psi'}{\partial t} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\sqrt{f + u_0^2}}{n_0r^2} (u_0^2 - (f + u_0^2) a_0^2) \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right] \\
& \quad = -2a_0^2 \frac{dn_0}{dr} \left[u_0^2 \frac{(f + u_0^2)}{f} (1 - a_0^2) \frac{\partial \psi'}{\partial t} \right. \\
& \quad \left. + u_0 \sqrt{f + u_0^2} (u_0^2 - (f + u_0^2) a_0^2) \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \left[u_0 n_0 \frac{\sqrt{f+u_0^2}}{f^2} (f+u_0^2 - u_0^2 a_0^2) \frac{\partial \psi'}{\partial t} + u_0^2 n_0 \frac{f+u_0^2}{f} (1-a_0^2) \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right] \\
 & + \frac{\partial}{\partial r} \left[u_0^2 n_0 \frac{f+u_0^2}{f} (1-a_0^2) \frac{\partial \psi'}{\partial t} + u_0 n_0 \sqrt{f+u_0^2} (u_0^2 - (f+u_0^2) a_0^2) \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right] \\
 & = \frac{dn_0}{dr} \left[u_0^2 \frac{f+u_0^2}{f} (1-a_0^2) \frac{\partial \psi'}{\partial t} + u_0 \sqrt{f+u_0^2} (u_0^2 - (f+u_0^2) a_0^2) \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right] \\
 & - 2a_0^2 \frac{dn_0}{dr} \left[u_0^2 \frac{(f+u_0^2)}{f} (1-a_0^2) \frac{\partial \psi'}{\partial t} \right. \\
 & \left. + u_0 \sqrt{f+u_0^2} (u_0^2 - (f+u_0^2) a_0^2) \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \left[u_0 n_0 \frac{\sqrt{f+u_0^2}}{f^2} (f+u_0^2 - u_0^2 a_0^2) \frac{\partial \psi'}{\partial t} + u_0^2 n_0 \frac{f+u_0^2}{f} (1-a_0^2) \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right] \\
 & + \frac{\partial}{\partial r} \left[u_0^2 n_0 \frac{f+u_0^2}{f} (1-a_0^2) \frac{\partial \psi'}{\partial t} + u_0 n_0 \sqrt{f+u_0^2} (u_0^2 - (f+u_0^2) a_0^2) \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right] \\
 & = (1-2a_0^2) \frac{dn_0}{dr} \left[u_0^2 \frac{(f+u_0^2)}{f} (1-a_0^2) \frac{\partial \psi'}{\partial t} \right. \\
 & \left. + u_0 \sqrt{f+u_0^2} (u_0^2 - (f+u_0^2) a_0^2) \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right]
 \end{aligned}$$

En términos de esta nueva variable, se obtiene una ecuación linealizada de movimiento

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \left(n_0 h^{tt} \frac{\partial \psi'}{\partial t} + n_0 h^{tr} \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(n_0 h^{rt} \frac{\partial \psi'}{\partial t} + n_0 h^{rr} \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right) \\
 & = (1-2a_0^2) \frac{dn_0}{dr} \left(h^{rt} \frac{\partial \psi'}{\partial t} + h^{rr} \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right) \quad (3.27)
 \end{aligned}$$

Con los coeficientes $h^{\alpha\beta}$ dados por:

$$h^{tt} = u_0 \frac{\sqrt{f+u_0^2}}{f^2} (f+u_0^2 - u_0^2 a_0^2) \quad (3.28)$$

$$h^{tr} = h^{rt} = \frac{u_0^2 (f+u_0^2)}{f} (1-a_0^2) \quad (3.29)$$

$$h^{rr} = u_0 \sqrt{f+u_0^2} [u_0^2 - (f+u_0^2) a_0^2] \quad (3.30)$$

Para poder comparar el análisis de estabilidad realizado en el presente trabajo (basado en perturbaciones a la ecuación de continuidad), con respecto al estudio hecho en [37] por Bilić (basado en perturbaciones al potencial escalar); es importante tomar el límite no relativista a la ecuación (3.27), donde tanto la velocidad del fluido y del sonido son mucho menores que la unidad $u_0^2 \ll 1$ y $a_0^2 \ll 1$ y además la función f se aproxima a la unidad

$$\begin{aligned}
 & n_0 \partial_t (h^{tt} \partial_t \psi' + h^{tr} \partial_r \psi') + (\partial_r n_0) (h^{rt} \partial_t \psi' + h^{rr} \partial_r \psi') + n_0 \partial_r (h^{rt} \partial_t \psi' + h^{rr} \partial_r \psi') \\
 & = (\partial_r n_0) (h^{rt} \partial_t \psi' + h^{rr} \partial_r \psi')
 \end{aligned}$$

$$\partial_t(h^{tt}\partial_t\psi' + h^{tr}\partial_r\psi') + \partial_r(h^{rt}\partial_t\psi' + h^{rr}\partial_r\psi') = 0$$

$$\partial_\alpha(h^{\alpha\beta}\partial_\beta\psi') = 0 \quad (3.31)$$

donde los índices α y β corren sobre t y r . Resulta que (3.31) tiene una similitud con el d'Alembertiano para un campo escalar en espacio-tiempo curvo [17, 38]

$$\Delta\varphi = \nabla^\mu\nabla_\mu\varphi = \nabla_\mu(g^{\mu\nu}\nabla_\nu\varphi) = \nabla_\mu(g^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi) = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\mu(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi) \quad (3.32)$$

La parte métrica $h^{\alpha\beta}$ de (3.31) incorpora la noción de un horizonte sónico de un agujero negro acústico cuando $u_0^2 = a_0^2$. Sin embargo, este análisis es válido únicamente en el límite no relativista. En general, con (3.27) no se puede establecer esta simetría acústica. Por lo tanto, ésta es una diferencia con respecto a las conclusiones dadas por Bilić en [37], donde siempre existía la simetría acústica; esta diferencia se entiende debido a que el estudio perturbativo se hizo con el enfoque del potencial escalar.

A pesar de que en este enfoque de la ecuación de continuidad no se permite construir un modelo de agujero negro acústico para el flujo en relatividad general, este hecho es de vital importancia en cuanto a la estabilidad de las soluciones estacionarias (1.142) y (1.143).

De acuerdo a [39], donde se estudia el flujo de una capa superficial de fluido perfecto (sin viscosidad), se argumenta que es posible establecer un modelo de agujero negro o blanco análogo. Sin embargo, cuando se incluye la disipación viscosa en el flujo, se pierde la invariancia que hace posible este modelo análogo [40, 41].

Debido a la similitud de (3.31) y (3.32) en el límite no relativista, se puede concluir que en el marco de la relatividad general, el acople entre la geometría del espacio-tiempo y el flujo perturbado actúa como un efecto disipador, mejorando la estabilidad.

3.3 Soluciones Estacionarias

Para estudiar la estabilidad, en primer lugar es necesario encontrar las soluciones estacionarias de la densidad de número de bariones $n_0(r)$ y de la velocidad radial del flujo $u_0(r)$ a las ecuaciones de continuidad

$$4\pi\bar{\mu}n_0u_0r^2 = -\dot{m}/c \quad (3.33)$$

$$\frac{1}{(f + u_0^2)}\frac{d}{dr}(f + u_0^2) = -\frac{2a_0^2}{n_0}\frac{dn_0}{dr} \quad (3.34)$$

Donde la velocidad del sonido estacionaria es

$$a_0^2 = \frac{\gamma Kn_0^{\gamma-1}}{\bar{\mu}c^2 + \gamma/(\gamma-1)Kn_0^{\gamma-1}} \quad (3.35)$$

con la constante $K = 3^{1/3}\pi^{2/3}\hbar c/4$ y el índice politrópico $\gamma = 4/3$. El valor de la masa promedio de bariones $\bar{\mu}$ es [42]

$$\bar{\mu} = \frac{m_p + m_n}{2} = \frac{938.27203 + 939.56536}{2} \text{ MeV} \quad (3.36)$$

La luminosidad de un agujero negro no rotante, con un disco de acreción, es proporcional al flujo de masa \dot{m} [43]

$$L \approx \frac{1}{12} \dot{m} c^2 \quad (3.37)$$

El factor 1/12 viene del cálculo de la cantidad de energía potencial gravitacional del fluido mientras se mueve desde una gran distancia hasta la órbita en $3R_S$, después de la cual deja de radiar más energía. Típicamente L es igual a $1.2 \times 10^5 L_\odot$, siendo $L_\odot = 382.8 \times 10^{24} \text{ J/s}$ la luminosidad del Sol. Para la simulación se considera un flujo de masa $\dot{m} = 10^{-7} M_\odot \text{ yr}^{-1}$ [43].

Para resolver el sistema de ecuaciones (3.33) y (3.34), se despeja la velocidad radial del fluido de (3.33)

$$u_0 = \frac{-\dot{m}/c}{4\pi\bar{\mu}n_0r^2} = -\sqrt{b} \frac{1}{n_0r^2} \quad (3.38)$$

Donde se ha introducido la constante $b \equiv \left(\frac{\dot{m}/c}{4\pi\bar{\mu}}\right)^2$. Reemplazando en (3.34)

$$\begin{aligned} \frac{1}{(f + u_0^2)} \frac{d}{dr} (f + u_0^2) &= -\frac{2a_0^2}{n_0} \frac{dn_0}{dr} \\ \frac{1}{\left(f + b \frac{1}{n_0^2 r^4}\right)} \left[\frac{df}{dr} + b \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{n_0^2 r^4} \right) \right] &= -\frac{2a_0^2}{n_0} \frac{dn_0}{dr} \\ \frac{n_0^3 r^5}{(fn_0^2 r^4 + b)} \frac{1}{n_0^3} \left[n_0^3 \frac{df}{dr} - 2b \frac{1}{r^4} \frac{dn_0}{dr} - 4b \frac{n_0}{r^5} \right] &= -2a_0^2 r \frac{dn_0}{dr} \\ \frac{1}{(fn_0^2 r^4 + b)} \left[r^5 n_0^3 \frac{df}{dr} - 2br \frac{dn_0}{dr} - 4bn_0 \right] &= -2a_0^2 r \frac{dn_0}{dr} \\ \frac{1}{(fn_0^2 r^4 + b)} \left[r^5 n_0^3 \frac{df}{dr} - 4bn_0 \right] &= \frac{2br}{(fn_0^2 r^4 + b)} \frac{dn_0}{dr} - 2a_0^2 r \frac{dn_0}{dr} \\ 2r \frac{dn_0}{dr} \left[\frac{b - a_0^2 (fn_0^2 r^4 + b)}{fn_0^2 r^4 + b} \right] &= \frac{1}{fn_0^2 r^4 + b} \left[r^5 n_0^3 \frac{df}{dr} - 4bn_0 \right] \\ \frac{dn_0}{dr} &= \frac{1}{2r} \frac{1}{b - a_0^2 (fn_0^2 r^4 + b)} \left[r^5 n_0^3 \frac{df}{dr} - 4bn_0 \right] \quad (3.39) \end{aligned}$$

Para resolver (3.39) se utiliza el método numérico de diferencias finitas, para lo cual se propone la expresión aproximada para la derivada del número de bariones con respecto a la coordenada radial [33]

$$\frac{dn_0(r_n)}{dr} \approx \frac{n_0(r_n + \Delta r) - n_0(r_n)}{\Delta r} \quad (3.40)$$

Con $n = 1, 2, \dots, N$, siendo r_1 la coordenada radial que representa el horizonte de eventos, en donde se establece la condición de frontera de acuerdo a (3.33) y (3.35)

$$n_0(r_1) = \frac{-\dot{m}/c}{4\pi\bar{\mu}u_0(r_1)r_1^2} \quad (3.41)$$

$$a_0^2(r_1) = \frac{\gamma K n_0^{\gamma-1}(r_1)}{\bar{\mu}c^2 + \gamma/(\gamma-1)K n_0^{\gamma-1}(r_1)} \quad (3.42)$$

La velocidad en el horizonte de eventos $u_0(r_1)$ se fija para obtener diferentes soluciones subsónicas. Reemplazando (3.40) en (3.39)

$$\begin{aligned} \frac{n_0(r_n + \Delta r) - n_0(r_n)}{\Delta r} &= \frac{1}{2r_n b - a_0^2(r_n)[f(r_n)n_0^2(r_n)r_n^4 + b]} \left[r_n^5 n_0^3(r_n) \frac{df}{dr}(r_n) - 4bn_0(r_n) \right] \\ n_0(r_n + \Delta r) &= n_0(r_n) \\ &+ \frac{1}{2r_n b - a_0^2(r_n)[f(r_n)n_0^2(r_n)r_n^4 + b]} \Delta r \left[r_n^5 n_0^3(r_n) \frac{df}{dr}(r_n) - 4bn_0(r_n) \right] \end{aligned} \quad (3.11)$$

El valor obtenido en (3.43) para $n_0(r_n + \Delta r)$, permite establecer la velocidad del sonido en el punto $r_n + \Delta r$

$$a_0^2(r_n + \Delta r) = \frac{\gamma K n_0^{\gamma-1}(r_n + \Delta r)}{\bar{\mu}c^2 + \gamma/(\gamma-1)K n_0^{\gamma-1}(r_n + \Delta r)} \quad (3.44)$$

Y finalmente se puede calcular la velocidad del fluido según

$$u_0(r_n) = -\sqrt{b} \frac{1}{n_0(r_n)r_n^2} \quad (3.45)$$

Una vez obtenidas las soluciones estacionarias para $n_0(r)$, $u_0(r)$ y $a_0^2(r)$, se puede proceder a hacer los análisis de estabilidad para ondas estacionarias y ondas viajeras.

3.4 Estabilidad: Ondas Estacionarias

Para analizar la estabilidad cuando la perturbación se modela por una onda estacionaria de la forma

$$\psi'(r, t) = \xi(r)e^{-i\omega t} \quad (3.46)$$

Es importante establecer las condiciones de frontera para la amplitud $\xi(r)$ con el fin restringir la onda $\psi'(r, t)$. Una condición de frontera se fija en la superficie exterior, en r_N , del flujo estacionario, donde se establece que la perturbación decae a medida que r se aproxima a r_N . Si el objeto alrededor del cual se forma el disco de acreción es un agujero negro, la materia en acreción

debe cruzar el horizonte de eventos a la máxima velocidad posible [44]; por lo tanto, la solución será transónica, la cual pasa a través de un punto singular en el flujo [45].

Con el fin de resolver la ecuación linealizada de movimiento para la perturbación $\psi'(r, t)$ (3.27), se requiere que la solución sea continua en todas partes y globalmente bien comportada. Además, como se verá más adelante, la amplitud $\xi(r)$ debe anularse en las fronteras interior y exterior.

Reemplazando (3.46) en (3.27) se obtiene

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(n_0 h^{tt} \frac{\partial \xi(r) e^{-i\omega t}}{\partial t} + n_0 h^{tr} \frac{\partial \xi(r) e^{-i\omega t}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(n_0 h^{rt} \frac{\partial \xi(r) e^{-i\omega t}}{\partial t} + n_0 h^{rr} \frac{\partial \xi(r) e^{-i\omega t}}{\partial r} \right) \\ & = (1 - 2a_0^2) \frac{dn_0}{dr} \left(h^{rt} \frac{\partial \xi(r) e^{-i\omega t}}{\partial t} + h^{rr} \frac{\partial \xi(r) e^{-i\omega t}}{\partial r} \right) \\ & \frac{\partial}{\partial t} \left(-n_0 h^{tt} \xi(r) i\omega e^{-i\omega t} + n_0 h^{tr} e^{-i\omega t} \frac{d\xi(r)}{dr} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(-n_0 h^{rt} \xi(r) i\omega e^{-i\omega t} + n_0 h^{rr} e^{-i\omega t} \frac{d\xi(r)}{dr} \right) \\ & = (1 - 2a_0^2) \frac{dn_0}{dr} \left(-h^{rt} \xi(r) i\omega e^{-i\omega t} + h^{rr} e^{-i\omega t} \frac{d\xi(r)}{dr} \right) \\ & n_0 h^{tt} \xi(r) i\omega i\omega - n_0 h^{tr} i\omega \frac{d\xi(r)}{dr} - i\omega \frac{d}{dr} (n_0 h^{rt} \xi(r)) + \frac{d}{dr} (n_0 h^{rr}) \frac{d\xi(r)}{dr} + n_0 h^{rr} \frac{d^2 \xi(r)}{dr^2} \\ & - (1 - 2a_0^2) \frac{dn_0}{dr} \left(-h^{rt} \xi(r) i\omega + h^{rr} \frac{d\xi(r)}{dr} \right) = 0 \end{aligned}$$

Multiplicando por $\xi(r)$ y obviando la dependencia con r (por facilidad en la escritura)

$$\begin{aligned} & n_0 h^{tt} \xi^2 \omega^2 + i\omega \left[n_0 h^{tr} \xi \frac{d\xi}{dr} + \xi^2 n_0 \frac{dh^{tr}}{dr} + \xi n_0 h^{rt} \frac{d\xi}{dr} + \xi^2 h^{rt} \frac{dn_0}{dr} - h^{rt} \xi^2 \frac{dn_0}{dr} \right. \\ & \left. + 2a_0^2 h^{tr} \xi^2 \frac{dn_0}{dr} \right] - \xi \frac{dn_0}{dr} h^{rr} \frac{d\xi}{dr} - \xi n_0 \frac{dh^{rr}}{dr} \frac{d\xi}{dr} - \xi n_0 h^{rr} \frac{d^2 \xi}{dr^2} + \xi h^{rr} \frac{d\xi}{dr} \frac{dn_0}{dr} \\ & - 2a_0^2 h^{rr} \xi \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{dn_0}{dr} = 0 \end{aligned}$$

Como $h^{tr} = h^{rt}$ de (3.29), y además utilizando la ecuación de conservación del tensor momento-energía (3.17) y dividiendo por n_0 ; es posible simplificar la expresión anterior de la forma

$$\begin{aligned} & h^{tt} \xi^2 \omega^2 + i\omega \left[\frac{d(h^{tr} \xi^2)}{dr} - h^{tr} \xi^2 \frac{1}{(f + u_0^2)} \frac{d}{dr} (f + u_0^2) \right] - \xi \frac{dh^{rr}}{dr} \frac{d\xi}{dr} - \xi h^{rr} \frac{d^2 \xi}{dr^2} - h^{rr} \frac{d\xi}{dr} \frac{d\xi}{dr} \\ & + h^{rr} \frac{d\xi}{dr} \frac{d\xi}{dr} + \frac{1}{(f + u_0^2)} \frac{d}{dr} (f + u_0^2) h^{rr} \xi \frac{\partial \xi}{\partial r} = 0 \\ & h^{tt} \xi^2 \omega^2 + i\omega \left[\frac{d(h^{tr} \xi^2)}{dr} - h^{tr} \xi^2 \frac{d}{dr} \ln(f + u_0^2) \right] - \frac{d}{dr} \left(h^{rr} \xi \frac{d\xi}{dr} \right) \\ & + \frac{h^{rr}}{(f + u_0^2)} \frac{d\xi}{dr} \left[(f + u_0^2) \frac{d\xi}{dr} + \xi \frac{d}{dr} (f + u_0^2) \right] = 0 \end{aligned}$$

$$h^{tt}\xi^2\omega^2 + i\omega \left[\frac{d(h^{tr}\xi^2)}{dr} - h^{rt}\xi^2 \frac{d}{dr} \ln(f + u_0^2) \right] - \frac{d}{dr} \left(h^{rr}\xi \frac{d\xi}{dr} \right) + \frac{h^{rr}}{(f + u_0^2)} \frac{d\xi}{dr} \frac{d}{dr} [\xi(f + u_0^2)] = 0 \quad (3.47)$$

Ahora, integrando (3.47) sobre todo el rango espacial en el cual la onda estacionaria es continua.

$$\omega^2 \int h^{tt}\xi^2 dr + i\omega \left[\int \frac{d(h^{tr}\xi^2)}{dr} dr - \int h^{rt}\xi^2 \frac{d}{dr} \ln(f + u_0^2) dr \right] - \int \frac{d}{dr} \left(h^{rr}\xi \frac{d\xi}{dr} \right) dr + \int \frac{h^{rr}}{(f + u_0^2)} \frac{d\xi}{dr} \frac{d}{dr} [\xi(f + u_0^2)] dr = 0$$

Como la amplitud de la perturbación debe cumplir las condiciones de frontera

$$\xi(r_1) = \xi(r_N) = 0 \quad (3.48)$$

Entonces, los términos evaluados en la superficie también se anulan

$$\omega^2 \int h^{tt}\xi^2 dr - 2i\omega \int \frac{h^{rt}\xi^2}{2} \frac{d}{dr} \ln(f + u_0^2) dr + \int \frac{h^{rr}}{(f + u_0^2)} \frac{d\xi}{dr} \frac{d}{dr} [\xi(f + u_0^2)] dr = 0$$

Si se definen los coeficientes

$$A = \int h^{tt}\xi^2 dr \quad (3.49)$$

$$B = \int \frac{h^{rt}\xi^2}{2} \frac{d}{dr} \ln(f + u_0^2) dr \quad (3.50)$$

$$C = \int \frac{h^{rr}}{(f + u_0^2)} \frac{d\xi}{dr} \frac{d}{dr} [\xi(f + u_0^2)] dr \quad (3.51)$$

se obtiene una ecuación residual cuadrática para la frecuencia ω (relación de dispersión)

$$A\omega^2 - 2iB\omega + C = 0 \quad (3.52)$$

Para concluir si la perturbación $\xi(r)e^{-i\omega t}$ se amortigua en el tiempo t , es necesario modelar su amplitud $\xi(r)$ mediante una distribución que cumpla las condiciones de frontera (3.48). Se propone utilizar la fórmula para la función de densidad de probabilidad de una distribución Weibull genérica [46]

$$\xi(r) = \frac{k}{\lambda} \left[\frac{(r - r_1)}{\lambda} \right]^{k-1} e^{-[(r-r_1)/\lambda]^k} \quad (3.53)$$

donde k es un parámetro de forma y λ es un parámetro de escala. Las soluciones que se pretenden obtener cumplen que la coordenada radial es mayor o igual al radio del horizonte de eventos ($r \geq r_1$). La función de densidad de la distribución de Weibull cambia sustancialmente cuando k cambia, este hecho permite analizar la dependencia de las soluciones obtenidas con respecto a la

variación en la forma de la amplitud de la perturbación. Las raíces de una ecuación polinomial como (3.52) se encuentran mediante un código desarrollado en MatLab. Si la parte imaginaria de ambas soluciones es negativa, entonces la solución propuesta $\xi(r)e^{-i\omega t}$ será estable.

Analizando las posibles soluciones de (3.52), en términos de los coeficientes A , B y C se encuentra

$$\omega = \frac{2iB \pm \sqrt{-4B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{iB}{A} \pm i \sqrt{\frac{B^2}{A^2} + \frac{C}{A}} \quad (3.54)$$

El primer término, de acuerdo a (3.49) y (3.50), es

$$\frac{B}{A} = \frac{\int \frac{h^{rt}\xi^2}{2} \frac{d}{dr} \ln(f + u_0^2) dr}{\int h^{tt}\xi^2 dr} \quad (3.55)$$

Organizando el coeficiente h^{tt} según (3.28)

$$h^{tt} = u_0 \frac{\sqrt{f + u_0^2}}{f^2} (f + u_0^2 - u_0^2 a_0^2) = u_0 \frac{\sqrt{f + u_0^2}}{f^2} (f - f a_0^2 + u_0^2 - u_0^2 a_0^2 + f a_0^2)$$

$$h^{tt} = u_0 \frac{\sqrt{f + u_0^2}}{f^2} [f(1 - a_0^2) + u_0^2(1 - a_0^2) + f a_0^2]$$

$$h^{tt} = u_0 \frac{\sqrt{f + u_0^2}}{f^2} ((f + u_0^2)(1 - a_0^2) + f a_0^2)$$

Bajo la condición de flujo hacia el agujero negro, es decir $u_0 < 0$ y $(dn_0/dr) < 0$, se concluye que h^{tt} es negativo. Además, como $a_0^2 < 1$ el coeficiente $h^{tr} = h^{rt}$ es positivo según (3.29)

$$h^{tr} = h^{rt} = \frac{u_0^2(f + u_0^2)}{f} (1 - a_0^2) > 0$$

Por otra parte, según (3.34)

$$\frac{d}{dr} \ln(f + u_0^2) = -\frac{2a_0^2}{n_0} \frac{dn_0}{dr} > 0$$

Por lo tanto la relación (3.55) es negativa $B/A < 0$, entonces la estabilidad dependerá del signo del discriminante que aparece en (3.54).

Según se argumenta en [10], el término

$$\frac{C}{A} = \frac{\int \frac{h^{rr}}{(f + u_0^2)} \frac{d\xi}{dr} \frac{d}{dr} [\xi(f + u_0^2)] dr}{\int h^{tt}\xi^2 dr} \quad (3.56)$$

es negativo para soluciones subsónicas, por ende no importa el valor relativo entre $|C/A|$ y $(B/A)^2$, la amplitud de la onda estacionaria siempre será atenuada. Para comparar entre el régimen clásico y cuántico, se calculan las soluciones a la relación de dispersión (3.52) utilizando la métrica de Schwarzschild con $f_{class}(r)$ según (2.117) y con $f(r)$ según (2.118), respectivamente (ver Fig. 2.1).

3.5 Estabilidad: Ondas Viajeras

La estabilidad del flujo que es influenciada por su acople con el espacio-tiempo, también se puede analizar mediante una perturbación de onda viajera de alta frecuencia, que se define tal que su longitud de onda sea mucho menor que el radio de Schwarzschild del agujero negro.

Entonces la perturbación de onda viajera se formula mediante una serie de potencias para la parte espacial:

$$\psi'(r, t) = \xi_\omega(r) e^{-i\omega t} \quad (3.57)$$

$$\xi_\omega(r) = \exp \left[\sum_{l=-1}^{\infty} \omega^{-l} k_l(r) \right] \quad (3.58)$$

Esta serie de potencia converge rápidamente con incrementos en l , es decir los términos sucesivos en la serie obedecen una relación de consistencia que requiere que

$$\omega^{-l} |k_l(r)| \geq \omega^{-(l+1)} |k_{l+1}(r)| \quad (3.59)$$

Debido a que la frecuencia ω es grande, entonces la serie puede ser truncada después de los tres primeros términos, que involucran k_{-1} , k_0 y k_1 . Según (3.59) se puede ver que $k_{-1} \sim r$, $k_0 \sim \ln r$ y $k_1 \sim r^{-1}$. Por lo tanto, (3.58) se reduce a

$$\xi_\omega(r) \approx e^{\omega^1 k_{-1}(r) + \omega^0 k_0(r) + \omega^{-1} k_1(r)} \quad (3.60)$$

Para poder analizar la estabilidad de onda viajera es necesario organizar (3.47) de otra forma

$$\begin{aligned} & h^{tt} \xi_\omega^2 \omega^2 + i\omega \left[\frac{d(h^{tr} \xi_\omega^2)}{dr} - h^{rt} \xi_\omega^2 \frac{d}{dr} \ln(f + u_0^2) \right] - \frac{d}{dr} \left(h^{rr} \xi_\omega \frac{d\xi_\omega}{dr} \right) \\ & + \frac{h^{rr}}{(f + u_0^2)} \frac{d\xi_\omega}{dr} \frac{d}{dr} [\xi_\omega (f + u_0^2)] = 0 \\ & h^{tt} \xi_\omega^2 \omega^2 + i\omega \xi_\omega^2 \frac{dh^{tr}}{dr} + 2i\omega h^{tr} \xi_\omega \frac{d\xi_\omega}{dr} - i\omega h^{rt} \xi_\omega^2 \frac{d}{dr} \ln(f + u_0^2) - h^{rr} \xi_\omega \frac{d^2 \xi_\omega}{dr^2} \\ & - \xi_\omega \frac{d\xi_\omega}{dr} \frac{dh^{rr}}{dr} - h^{rr} \frac{d\xi_\omega}{dr} \frac{d\xi_\omega}{dr} + \frac{h^{rr}}{(f + u_0^2)} \frac{d\xi_\omega}{dr} \xi_\omega \frac{d}{dr} (f + u_0^2) \\ & + \frac{h^{rr}}{(f + u_0^2)} \frac{d\xi_\omega}{dr} (f + u_0^2) \frac{d\xi_\omega}{dr} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h^{tt}\omega^2\xi_\omega + i\omega\frac{dh^{tr}}{dr}\xi_\omega + 2i\omega h^{tr}\frac{d\xi_\omega}{dr} - i\omega h^{rt}\frac{d}{dr}\ln(f+u_0^2)\xi_\omega - h^{rr}\frac{d^2\xi_\omega}{dr^2} - \frac{dh^{rr}}{dr}\frac{d\xi_\omega}{dr} \\
 + h^{rr}\frac{d}{dr}\ln(f+u_0^2)\frac{d\xi_\omega}{dr} = 0 \\
 h^{rr}\frac{d^2\xi_\omega}{dr^2} + \left[\frac{dh^{rr}}{dr} - 2i\omega h^{tr} - h^{rr}\frac{d}{dr}\ln(f+u_0^2)\right]\frac{d\xi_\omega}{dr} \\
 - \left[h^{tt}\omega^2 + i\omega\frac{dh^{tr}}{dr} - i\omega h^{rt}\frac{d}{dr}\ln(f+u_0^2)\right]\xi_\omega = 0 \quad (3.61)
 \end{aligned}$$

Aplicando (3.60) en (3.61) se pueden agrupar coeficientes para ω^2 , ω^1 y ω^0 . En primer lugar, para ω^2 se agrupan y se imponen iguales a cero, en el primer término se obtiene un ω^2 al derivar dos veces con respecto a r

$$h^{rr}\frac{d^2\xi_\omega}{dr^2} > h^{rr}e^{\omega^0k_0+\omega^{-1}k_1}\frac{d^2}{dr^2}e^{\omega^1k_{-1}} > h^{rr}\xi_\omega\omega\frac{dk_{-1}}{dr}\omega\frac{dk_{-1}}{dr} \quad (3.62)$$

El tercer término también aporta de la forma

$$-2i\omega h^{tr}\frac{d\xi_\omega}{dr} > -2i\omega h^{tr}e^{\omega^0k_0+\omega^{-1}k_1}\frac{d}{dr}e^{\omega^1k_{-1}} = -2i\omega h^{tr}\xi_\omega\omega\frac{dk_{-1}}{dr} \quad (3.63)$$

Agrupando a (3.62) y (3.63) con el quinto término de (3.61) e igualando a cero

$$\begin{aligned}
 h^{rr}\xi_\omega\omega\frac{dk_{-1}}{dr}\omega\frac{dk_{-1}}{dr} - 2i\omega h^{tr}\xi_\omega\omega\frac{dk_{-1}}{dr} - h^{tt}\omega^2\xi_\omega = 0 \\
 h^{rr}\left(\frac{dk_{-1}}{dr}\right)^2 - 2ih^{tr}\frac{dk_{-1}}{dr} - h^{tt} = 0 \quad (3.64)
 \end{aligned}$$

La solución a (3.64) es

$$\frac{dk_{-1}}{dr} = \frac{2ih^{tr} \pm \sqrt{-4h^{tr2} + 4h^{rr}h^{tt}}}{2h^{rr}} = i(h^{rr})^{-1} \left[h^{tr} \pm \sqrt{h^{tr2} - h^{rr}h^{tt}} \right] \quad (3.65)$$

Integrando (3.65), se obtiene la solución para k_{-1}

$$k_{-1} = i \int (h^{rr})^{-1} \left[h^{tr} \pm \sqrt{h^{tr2} - h^{rr}h^{tt}} \right] dr \quad (3.66)$$

Similarmente se agrupan los coeficientes de ω^1 . El primer término de (3.61) aporta varios coeficientes

$$\begin{aligned}
 h^{rr}\frac{d^2\xi_\omega}{dr^2} > h^{rr}\frac{d^2}{dr^2}e^{\omega^1k_{-1}+\omega^0k_0+\omega^{-1}k_1} > h^{rr}\frac{d}{dr}\left(\xi_\omega\omega\frac{dk_{-1}}{dr}\right) + h^{rr}\frac{d}{dr}\left(\xi_\omega\omega^0\frac{dk_0}{dr}\right) \\
 h^{rr}\frac{d^2\xi_\omega}{dr^2} > h^{rr}\xi_\omega\omega\frac{d^2k_{-1}}{dr^2} + h^{rr}\xi_\omega\omega\frac{dk_{-1}}{dr}\omega^0\frac{dk_0}{dr} + h^{rr}\omega^0\frac{dk_0}{dr}\xi_\omega\omega\frac{dk_{-1}}{dr}
 \end{aligned}$$

$$h^{rr} \frac{d^2 \xi_\omega}{dr^2} > h^{rr} \xi_\omega \omega \frac{d^2 k_{-1}}{dr^2} + 2h^{rr} \xi_\omega \omega \frac{dk_{-1}}{dr} \frac{dk_0}{dr} \quad (3.67)$$

El segundo y cuarto término de (3.61) aportan los coeficientes

$$\left[\frac{dh^{rr}}{dr} - h^{rr} \frac{d}{dr} \ln(f + u_0^2) \right] \frac{d\xi_\omega}{dr} > \left[\frac{dh^{rr}}{dr} - h^{rr} \frac{d}{dr} \ln(f + u_0^2) \right] \xi_\omega \omega \frac{dk_{-1}}{dr} \quad (3.68)$$

Y el tercer término de (3.61) contribuye con

$$-2i\omega h^{tr} \frac{d\xi_\omega}{dr} > -2i\omega h^{tr} \xi_\omega \omega^0 \frac{dk_0}{dr} \quad (3.69)$$

Agrupando (3.67), (3.68) y (3.69) con el sexto y séptimo término de (3.61) e igualando a cero

$$\begin{aligned} & h^{rr} \xi_\omega \omega \frac{d^2 k_{-1}}{dr^2} + 2h^{rr} \xi_\omega \omega \frac{dk_{-1}}{dr} \frac{dk_0}{dr} + \left[\frac{dh^{rr}}{dr} - h^{rr} \frac{d}{dr} \ln(f + u_0^2) \right] \xi_\omega \omega \frac{dk_{-1}}{dr} \\ & - 2i\omega h^{tr} \xi_\omega \omega^0 \frac{dk_0}{dr} - i\omega \frac{dh^{tr}}{dr} + i\omega h^{rt} \frac{d}{dr} \ln(f + u_0^2) \xi_\omega = 0 \\ & \left[2h^{rr} \frac{dk_0}{dr} + \frac{dh^{rr}}{dr} - h^{rr} \frac{d}{dr} \ln(f + u_0^2) \right] \frac{dk_{-1}}{dr} - 2ih^{tr} \frac{dk_0}{dr} - i \frac{dh^{tr}}{dr} + ih^{rt} \frac{d}{dr} \ln(f + u_0^2) \\ & + h^{rr} \frac{d^2 k_{-1}}{dr^2} = 0 \quad (3.70) \end{aligned}$$

Reemplazando (3.65) en (3.70)

$$\begin{aligned} & \left[2h^{rr} \frac{dk_0}{dr} + \frac{dh^{rr}}{dr} - h^{rr} \frac{d}{dr} \ln(f + u_0^2) \right] i(h^{rr})^{-1} \left[h^{tr} \pm \sqrt{h^{tr^2} - h^{rr} h^{tt}} \right] - 2ih^{tr} \frac{dk_0}{dr} - i \frac{dh^{tr}}{dr} \\ & + ih^{rt} \frac{d}{dr} \ln(f + u_0^2) + h^{rr} \frac{d^2 k_{-1}}{dr^2} = 0 \\ & 2i \frac{dk_0}{dr} \left[h^{tr} \pm \sqrt{h^{tr^2} - h^{rr} h^{tt}} \right] + i \frac{d \ln h^{rr}}{dr} \left[h^{tr} \pm \sqrt{h^{tr^2} - h^{rr} h^{tt}} \right] \\ & - i \frac{d}{dr} \ln(f + u_0^2) \left[h^{tr} \pm \sqrt{h^{tr^2} - h^{rr} h^{tt}} \right] - 2ih^{tr} \frac{dk_0}{dr} - i \frac{dh^{tr}}{dr} \\ & + ih^{rt} \frac{d}{dr} \ln(f + u_0^2) + h^{rr} \frac{d^2 k_{-1}}{dr^2} = 0 \\ & 2i \frac{dk_0}{dr} \left[\pm \sqrt{h^{tr^2} - h^{rr} h^{tt}} \right] + i \frac{d \ln h^{rr}}{dr} \left[h^{tr} \pm \sqrt{h^{tr^2} - h^{rr} h^{tt}} \right] \\ & - i \frac{d}{dr} \ln(f + u_0^2) \left[\pm \sqrt{h^{tr^2} - h^{rr} h^{tt}} \right] - i \frac{dh^{tr}}{dr} + h^{rr} \frac{d^2 k_{-1}}{dr^2} = 0 \quad (3.71) \end{aligned}$$

Para continuar, antes es necesario calcular la derivada de (3.65) con respecto a r

$$h^{rr} \frac{d^2 k_{-1}}{dr^2} = h^{rr} \frac{d}{dr} \frac{dk_{-1}}{dr} = ih^{rr} \frac{d}{dr} \left\{ (h^{rr})^{-1} \left[h^{tr} \pm \sqrt{h^{tr^2} - h^{rr} h^{tt}} \right] \right\}$$

$$h^{rr} \frac{d^2 k_{-1}}{dr^2} = i \frac{d}{dr} \left[h^{tr} \pm \sqrt{h^{tr^2} - h^{rr} h^{tt}} \right] - i (h^{rr})^{-1} \frac{dh^{rr}}{dr} \left[h^{tr} \pm \sqrt{h^{tr^2} - h^{rr} h^{tt}} \right] \quad (3.72)$$

Reemplazando (3.72) en (3.71)

$$\begin{aligned} 2i \frac{dk_0}{dr} \left[\pm \sqrt{h^{tr^2} - h^{rr} h^{tt}} \right] + i \frac{d \ln h^{rr}}{dr} \left[h^{tr} \pm \sqrt{h^{tr^2} - h^{rr} h^{tt}} \right] \\ - i \frac{d}{dr} \ln(f + u_0^2) \left[\pm \sqrt{h^{tr^2} - h^{rr} h^{tt}} \right] - i \frac{dh^{tr}}{dr} + i \frac{d}{dr} \left[h^{tr} \pm \sqrt{h^{tr^2} - h^{rr} h^{tt}} \right] \\ - i (h^{rr})^{-1} \frac{dh^{rr}}{dr} \left[h^{tr} \pm \sqrt{h^{tr^2} - h^{rr} h^{tt}} \right] = 0 \end{aligned}$$

$$2 \frac{dk_0}{dr} \left[\pm \sqrt{h^{tr^2} - h^{rr} h^{tt}} \right] = \frac{d}{dr} \ln(f + u_0^2) \left[\pm \sqrt{h^{tr^2} - h^{rr} h^{tt}} \right] - \frac{d}{dr} \left[\pm \sqrt{h^{tr^2} - h^{rr} h^{tt}} \right]$$

$$\frac{dk_0}{dr} = \frac{1}{2} \frac{d}{dr} \ln(f + u_0^2) - \frac{d}{dr} \ln \left[\sqrt{h^{tr^2} - h^{rr} h^{tt}} \right]$$

$$\frac{dk_0}{dr} = \frac{d}{dr} \ln \left[\frac{(f + u_0^2)}{\sqrt{h^{tr^2} - h^{rr} h^{tt}}} \right]^{1/2} \quad (3.73)$$

Integrando (3.73), se obtiene la solución para k_0

$$k_0 = \ln \left[\frac{(f + u_0^2)}{\sqrt{h^{tr^2} - h^{rr} h^{tt}}} \right]^{1/2} \quad (3.74)$$

La solución para k_1 se encuentra agrupando los coeficientes de ω^0 . El primer término de (3.61) aporta varios coeficientes

$$\begin{aligned} h^{rr} \frac{d^2 \xi_\omega}{dr^2} &> h^{rr} \frac{d^2}{dr^2} e^{\omega^1 k_{-1} + \omega^0 k_0 + \omega^{-1} k_1} \\ &> h^{rr} \frac{d}{dr} \left(\xi_\omega \omega \frac{dk_{-1}}{dr} \right) + h^{rr} \frac{d}{dr} \left(\xi_\omega \omega^0 \frac{dk_0}{dr} \right) + h^{rr} \frac{d}{dr} \left(\xi_\omega \omega^{-1} \frac{dk_1}{dr} \right) \\ h^{rr} \frac{d^2 \xi_\omega}{dr^2} &> h^{rr} \xi_\omega \omega^{-1} \frac{dk_1}{dr} \omega \frac{dk_{-1}}{dr} + h^{rr} \xi_\omega \omega^0 \frac{dk_0}{dr} \omega^0 \frac{dk_0}{dr} + h^{rr} \xi_\omega \omega^0 \frac{d^2 k_0}{dr^2} \\ &\quad + h^{rr} \xi_\omega \omega \frac{dk_{-1}}{dr} \omega^{-1} \frac{dk_1}{dr} \\ h^{rr} \frac{d^2 \xi_\omega}{dr^2} &> 2h^{rr} \xi_\omega \frac{dk_1}{dr} \frac{dk_{-1}}{dr} + h^{rr} \xi_\omega \left(\frac{dk_0}{dr} \right)^2 + h^{rr} \xi_\omega \frac{d^2 k_0}{dr^2} \end{aligned} \quad (3.75)$$

El segundo y cuarto término de (3.61) aportan los coeficientes

$$\left[\frac{dh^{rr}}{dr} - h^{rr} \frac{d}{dr} \ln(f + u_0^2) \right] \frac{d\xi_\omega}{dr} > \left[\frac{dh^{rr}}{dr} - h^{rr} \frac{d}{dr} \ln(f + u_0^2) \right] \xi_\omega \omega^0 \frac{dk_0}{dr} \quad (3.76)$$

Y el tercer término de (3.61) contribuye con

$$-2i\omega h^{tr} \frac{d\xi_\omega}{dr} > -2i\omega h^{tr} \xi_\omega \omega^{-1} \frac{dk_1}{dr} \quad (3.77)$$

Agrupando (3.75), (3.76) y (3.77) e igualando a cero

$$\begin{aligned} & 2h^{rr} \xi_\omega \frac{dk_1}{dr} \frac{dk_{-1}}{dr} + h^{rr} \xi_\omega \left(\frac{dk_0}{dr} \right)^2 + h^{rr} \xi_\omega \frac{d^2 k_0}{dr^2} + \left[\frac{dh^{rr}}{dr} - h^{rr} \frac{d}{dr} \ln(f + u_0^2) \right] \xi_\omega \omega^0 \frac{dk_0}{dr} \\ & \quad - 2i\omega h^{tr} \xi_\omega \omega^{-1} \frac{dk_1}{dr} = 0 \\ & 2h^{rr} \frac{dk_1}{dr} \frac{dk_{-1}}{dr} - 2ih^{tr} \frac{dk_1}{dr} + h^{rr} \frac{d^2 k_0}{dr^2} + \frac{dh^{rr}}{dr} \frac{dk_0}{dr} + h^{rr} \frac{dk_0}{dr} \frac{dk_0}{dr} - h^{rr} \frac{d}{dr} \ln(f + u_0^2) \frac{dk_0}{dr} = 0 \\ & 2 \left(h^{rr} \frac{dk_{-1}}{dr} - ih^{tr} \right) \frac{dk_1}{dr} + \frac{d}{dr} \left(h^{rr} \frac{dk_0}{dr} \right) + h^{rr} \frac{dk_0}{dr} \frac{d}{dr} [k_0 - \ln(f + u_0^2)] = 0 \quad (3.78) \end{aligned}$$

Ahora, como se mencionó anteriormente, debido a que la frecuencia ω es grande, únicamente es necesario encontrar las soluciones que involucran a k_{-1} , k_0 y k_1 , dadas por (3.66), (3.74) y (3.78) respectivamente.

En la solución de flujo estacionario, mediante (3.28), (3.29) y (3.30), ya se han encontrado los valores de los coeficientes $h^{\alpha\beta}$. Por lo tanto, la solución para k_0 se obtiene directamente y mediante integración numérica es posible calcular el valor de k_{-1} .

Para encontrar la solución para k_1 , se utiliza el método numérico de diferencias finitas, para lo cual se propone la expresión aproximada para la derivada de k_1 con respecto a la coordenada radial [33]

$$\frac{dk_1(r_n)}{dr} \approx \frac{k_1(r_n + \Delta r) - k_1(r_n)}{\Delta r} \quad (3.79)$$

Despejando dk_1/dr en (3.78)

$$\frac{dk_1}{dr} = -\frac{1}{2} \left(h^{rr} \frac{dk_{-1}}{dr} - ih^{tr} \right)^{-1} \left\{ \frac{d}{dr} \left(h^{rr} \frac{dk_0}{dr} \right) + h^{rr} \frac{dk_0}{dr} \frac{d}{dr} [k_0 - \ln(f + u_0^2)] \right\} \quad (3.80)$$

Reemplazando (3.79) en (3.80) y despejando para $k_1(r_n + \Delta r)$

$$\begin{aligned} & \frac{k_1(r_n + \Delta r) - k_1(r_n)}{\Delta r} \\ & = -\frac{1}{2} \left(h^{rr} \frac{dk_{-1}}{dr} - ih^{tr} \right)^{-1} \left\{ \frac{d}{dr} \left(h^{rr} \frac{dk_0}{dr} \right) + h^{rr} \frac{dk_0}{dr} \frac{d}{dr} [k_0 - \ln(f + u_0^2)] \right\} \\ & k_1(r_n + \Delta r) = k_1(r_n) \\ & \quad - \frac{\Delta r}{2} \left(h^{rr} \frac{dk_{-1}}{dr} - ih^{tr} \right)^{-1} \left\{ \frac{d}{dr} \left(h^{rr} \frac{dk_0}{dr} \right) \right. \\ & \quad \left. + h^{rr} \frac{dk_0}{dr} \frac{d}{dr} [k_0 - \ln(f + u_0^2)] \right\} \quad (3.81) \end{aligned}$$

La condición inicial para k_1 se establece de acuerdo a su comportamiento asintótico

$$k_1(r_1) = r_1^{-1} \quad (3.82)$$

Donde r_1 es el radio en el horizonte de eventos.

Al igual que en el caso de estabilidad por onda estacionaria, para comparar entre el régimen clásico y cuántico, se calculan las soluciones para k_{-1} , k_0 y k_1 utilizando la métrica de Schwarzschild con $f_{class}(r)$ según (2.117) y con $f(r)$ según (2.118), respectivamente (ver Fig. 2.1).

Capítulo 4

Análisis de Resultados

4.1 Solución en Relatividad General

Antes de resolver el problema es necesario aclarar que por facilidad de convergencia del método numérico, se trabaja con las constantes universales G_0 , \hbar y c iguales a la unidad, por lo tanto el conjunto completo de cantidades dimensionales (2.9) también están normalizadas a la unidad

$$\begin{aligned}m_p &= \sqrt{\hbar c/G_0} = 1 \\l_p &= \sqrt{\hbar G_0/c^3} = 1 \\t_p &= \sqrt{\hbar G_0/c^5} = 1 \\E_p &= \sqrt{\hbar c^5/G_0} = 1\end{aligned}\tag{4.1}$$

Como se mencionó en el anterior capítulo, las soluciones a las ecuaciones de estabilidad se analizarán en el marco de relatividad general y en el escenario de seguridad asintótica, al utilizar la función clásica y cuántica mejorada, respectivamente

$$f_{class}(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\tag{4.2}$$

$$f(r) = 1 - \frac{2Mr^2}{r^3 + \tilde{\omega}(r + \gamma M)}\tag{4.3}$$

con $\tilde{\omega} = 167/30\pi$ y $\gamma = 9/2$.

La primera y mayor diferencia que se encontrará entre el régimen clásico y cuántico es considerando variaciones en la masa del agujero negro M . En el espacio-tiempo de Schwarzschild mejorado (4.3), si la masa del agujero negro supera un valor crítico $M > M_{cr}$, la solución tendrá dos horizontes de eventos, si $M = M_{cr}$ solo habrá un horizonte y si $M < M_{cr}$ no existirá horizonte. Este valor de masa crítica con $\tilde{\omega} = 167/30\pi$ y $\gamma = 9/2$ es

$$M_{cr}(\gamma = 9/2) = \left[\frac{\tilde{\omega}}{\Omega_{cr}(\gamma = 9/2)}\right]^{1/2} \cong 2.9465\tag{4.4}$$

donde

$$\Omega_{cr}(\gamma = 9/2) = \frac{1}{8}(9\gamma + 2)\sqrt{\gamma + 2}\sqrt{9\gamma + 2} - \frac{27}{8}\gamma^2 - \frac{9}{2}\gamma + \frac{1}{2} \cong 0.2041 \quad (4.5)$$

Con el fin de comparar fácilmente entre las soluciones con (4.2) y (4.3), se plantea la masa del agujero negro de forma proporcional a la masa crítica

$$M = V_M M_{cr} \quad (4.6)$$

donde la constante adimensional V_M es el parámetro de masa.

Las soluciones estacionarias de la densidad de número de bariones $n_0(r)$ y de la velocidad radial del flujo $u_0(r)$ a las ecuaciones de continuidad, son

$$4\pi\bar{\mu}n_0u_0r^2 = -\dot{m} \quad (4.7)$$

$$\frac{1}{(f + u_0^2)} \frac{d}{dr} (f + u_0^2) = -\frac{2a_0^2}{n_0} \frac{dn_0}{dr} \quad (4.8)$$

donde la velocidad del sonido estacionaria (3.12), con la constante $K = 3^{1/3}\pi^{2/3}/4$ y el índice politrópico $\gamma = 4/3$, es

$$a_0^2 = \frac{\gamma K n_0^{\gamma-1}}{\bar{\mu} + \gamma/(\gamma - 1)K n_0^{\gamma-1}} \quad (4.9)$$

Soluciones Estacionarias

La primera simulación se realiza para el parámetro de masa y la velocidad del flujo en el horizonte de eventos, como

$$V_M = 1 \times 10^{25} \quad (4.10)$$

$$u_0(r_1) = -0.001$$

Las gráficas de la constante de Newton y la función $f_{class}(r)$ y su derivada se presentan en las Fig. 4.1 y 4.2, respectivamente. Mientras que las soluciones estacionarias para la densidad de número de bariones (3.43), la velocidad radial del flujo (3.45) y la velocidad del sonido (3.44), se muestran en las Fig. 4.3, 4.4 y 4.5, respectivamente.

Comparando la Fig. 4.4 con la Fig. 4.5, se concluye que la solución obtenida es subsónica. Lo cual es de vital importancia, ya que se evita que la solución pase a través de un punto singular en el flujo [45].

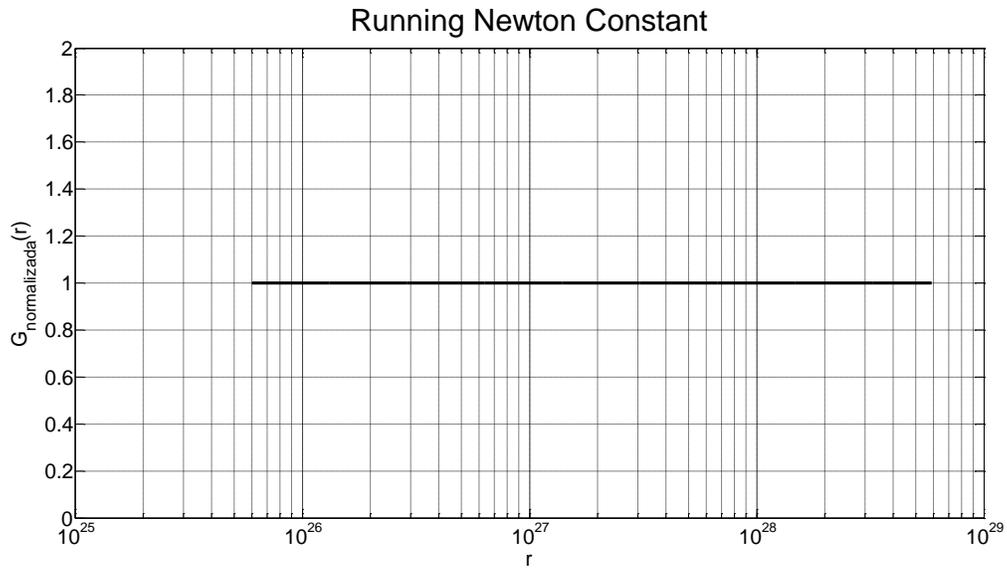


Fig. 4.1. Constante de Newton en Relatividad General, con $V_M = 1 \times 10^{25}$, $u_0(r_1) = -0.001$ y $k = 2$.

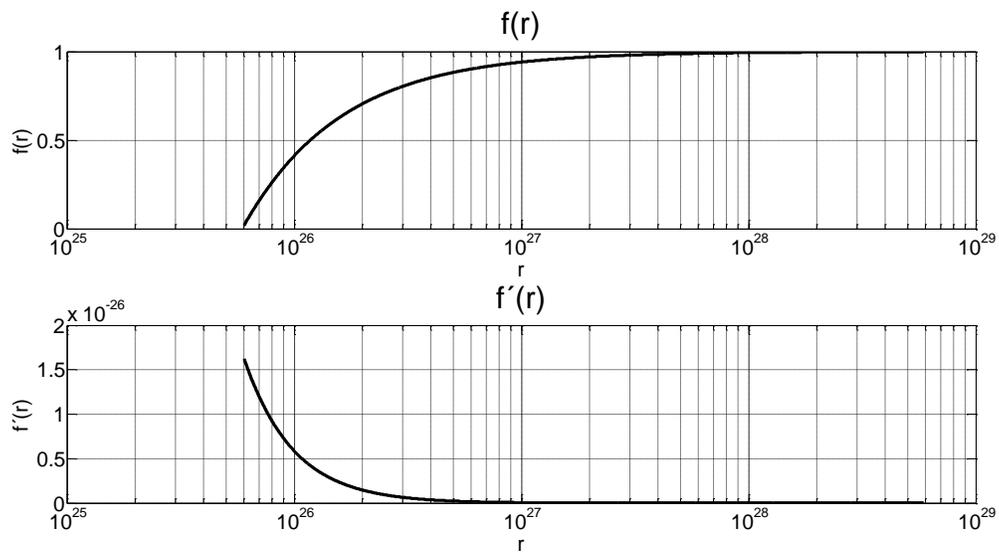


Fig. 4.2. Función $f_{\text{class}}(r)$ y su derivada en Relatividad General, con $V_M = 1 \times 10^{25}$, $u_0(r_1) = -0.001$ y $k = 2$.



Fig. 4.3. Densidad de número de bariones $n_0(r)$ en Relatividad General, con $V_M = 1 \times 10^{25}$, $u_0(r_1) = -0.001$ y $k = 2$.

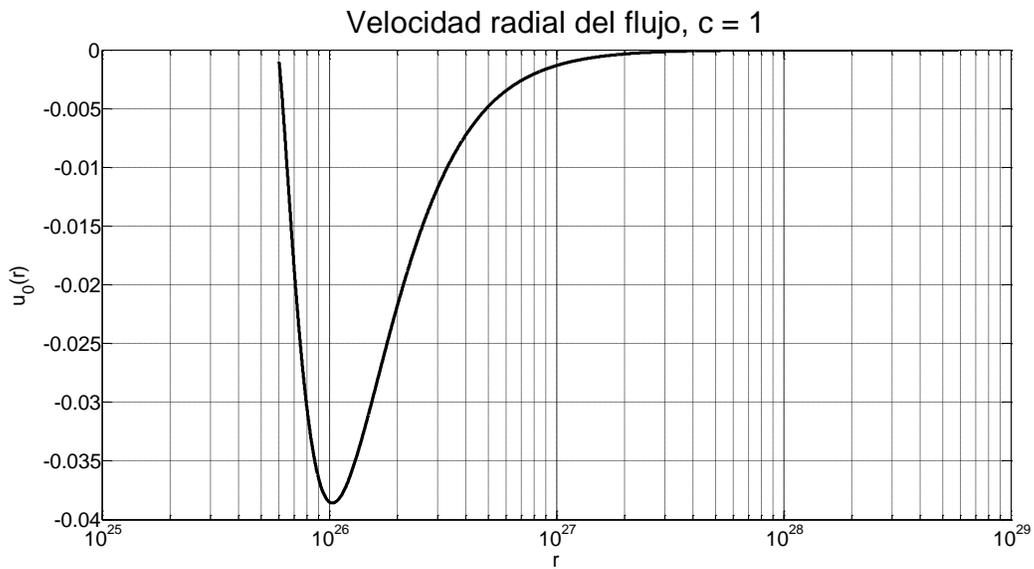


Fig. 4.4. Velocidad radial del flujo $u_0(r)$ en Relatividad General, con $V_M = 1 \times 10^{25}$, $u_0(r_1) = -0.001$ y $k = 2$.

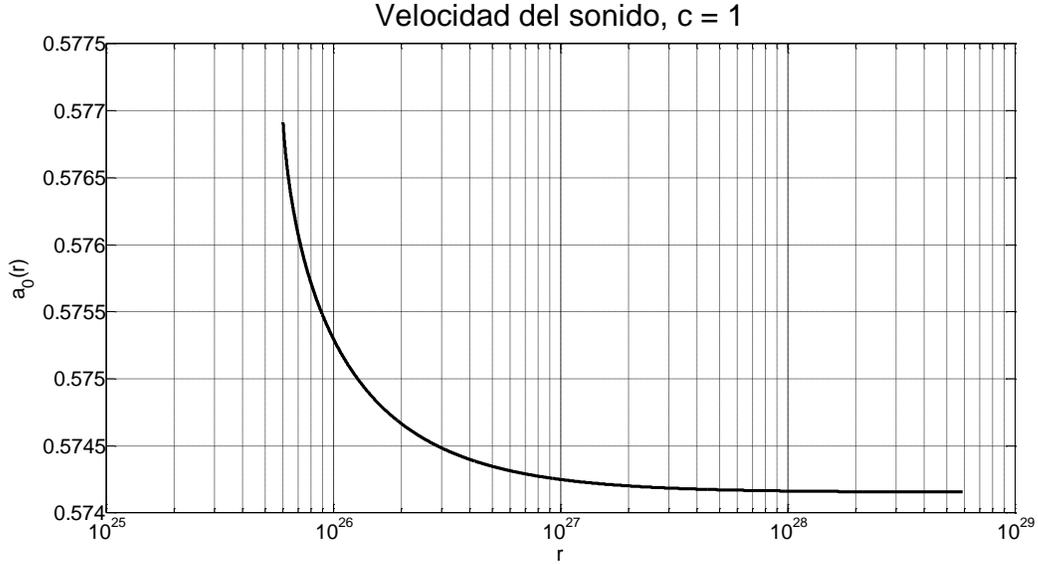


Fig. 4.5. Velocidad del sonido $a_0(r)$ en Relatividad General, con $V_M = 1 \times 10^{25}$, $u_0(r_1) = -0.001$ y $k = 2$.

Estabilidad: Ondas Estacionarias

La onda estacionaria es de la forma $\psi'(r, t) = \xi(r)e^{-i\omega t}$. Entonces, en esta primera simulación se modela la amplitud $\xi(r)$ mediante una distribución (3.53), con el parámetro de forma $k = 2$ y el parámetro de escala $\lambda = 1$

$$\xi(r) = 2(r - r_1)e^{-(r-r_1)^2} \quad (4.11)$$

En la Fig. 4.6 se muestra la amplitud en función de radio, y se observa que se cumplen las condiciones de frontera (3.48) $\xi(r_1) = \xi(r_N) = 0$.

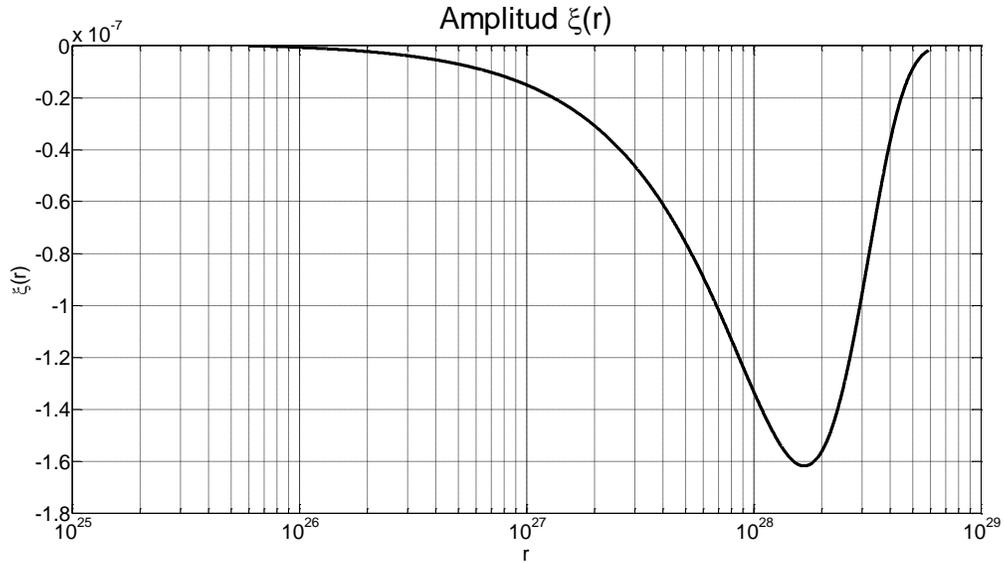


Fig. 4.6. Amplitud de la perturbación $\xi(r)$, con $V_M = 1 \times 10^{25}$, $u_0(r_1) = -0.001$ y $k = 2$.

Una vez se han calculado las soluciones estacionarias para $n_0(r)$, $u_0(r)$ y $a_0^2(r)$, junto con $f_{class}(r)$; los coeficientes $h^{\alpha\beta}$ se pueden obtener directamente de

$$h^{tt} = u_0 \frac{\sqrt{f + u_0^2}}{f^2} (f + u_0^2 - u_0^2 a_0^2) \quad (4.12)$$

$$h^{tr} = h^{rt} = \frac{u_0^2 (f + u_0^2)}{f} (1 - a_0^2) \quad (4.13)$$

$$h^{rr} = u_0 \sqrt{f + u_0^2} [u_0^2 - (f + u_0^2) a_0^2] \quad (4.14)$$

Éstos se presentan en la Fig. 4.7.

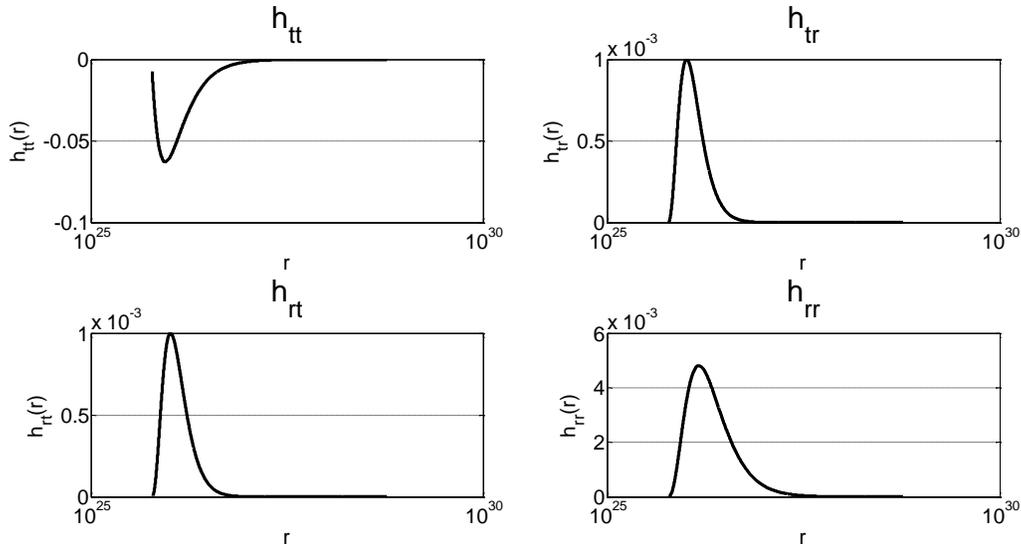


Fig. 4.7. Coeficientes $h^{\alpha\beta}(r)$ en Relatividad General, con $V_M = 1 \times 10^{25}$, $u_0(r_1) = -0.001$ y $k = 2$.

Ahora, con la amplitud de la perturbación (4.11) junto con los coeficientes (4.12), (4.13) y (4.14), mediante integración numérica se calculan los coeficientes

$$A = \int h^{tt} \xi^2 dr \quad (4.15)$$

$$B = \int \frac{h^{rt} \xi^2}{2} \frac{d}{dr} \ln(f + u_0^2) dr \quad (4.16)$$

$$C = \int \frac{h^{rr}}{(f + u_0^2)} \frac{d\xi}{dr} \frac{d}{dr} [\xi(f + u_0^2)] dr \quad (4.17)$$

Los integrandos de A , B y C se presentan en la Fig. 4.8.

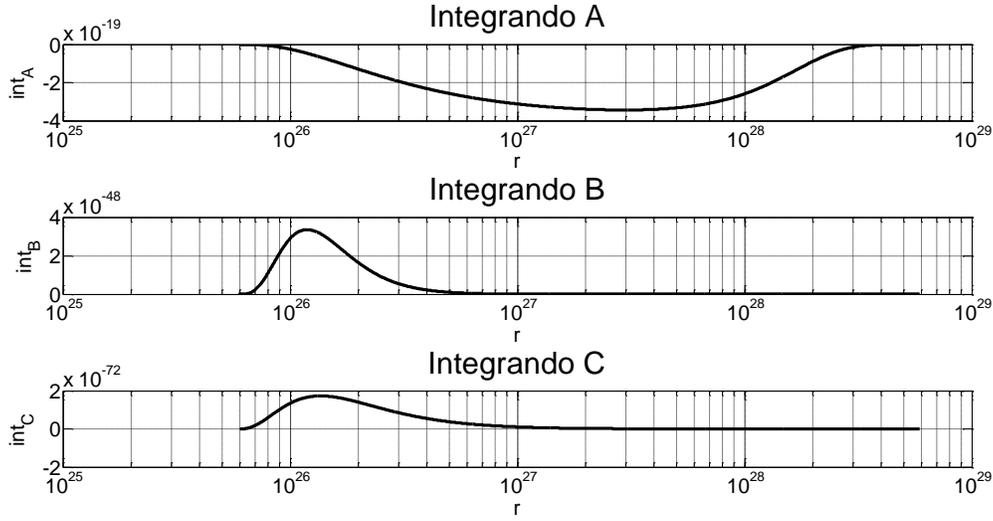


Fig. 4.8. Integrandos de los coeficientes A , B y C en Relatividad General, con $V_M = 1 \times 10^{25}$, $u_0(r_1) = -0.001$ y $k = 2$.

Los resultados obtenidos para (4.15), (4.16) y (4.17) son

$$\begin{aligned} A &\cong -5.2630 \times 10^9 \\ B &\cong 4.8765 \times 10^{-22} \\ C &\cong 6.0690 \times 10^{-46} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Finalmente, se obtienen las dos soluciones de la ecuación residual cuadrática para la frecuencia ω

$$A\omega^2 - 2iB\omega + C = 0 \quad (4.19)$$

Las raíces de la ecuación polinomial (4.19) son

$$\begin{aligned} \omega_1 &\cong 3.396 \times 10^{-28} - i9.266 \times 10^{-32} \\ \omega_2 &\cong -3.396 \times 10^{-28} - i9.266 \times 10^{-32} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Como la parte imaginaria de ambas soluciones es negativa, entonces la solución propuesta $\xi(r)e^{-i\omega t}$ es estable. La gráfica de la perturbación $\psi'(r, t)$, con ω_1 , se muestra en la Fig. 4.9.

El tiempo de amortiguamiento de la solución es

$$5\tau = \frac{5}{\text{Im}[\omega]} \cong \frac{5}{9.266 \times 10^{-32}} \cong 5.396 \times 10^{31} \quad (4.21)$$

Es necesario aclarar que los resultados de (4.20) y (4.21), se obtuvieron para las constantes universales G_0 , \hbar y c normalizadas a la unidad. Pero para el análisis comparativo de la estabilidad, únicamente es importante saber cuál tiempo de amortiguamiento es mayor, entre los resultados de relatividad general y del escenario de seguridad asintótica.

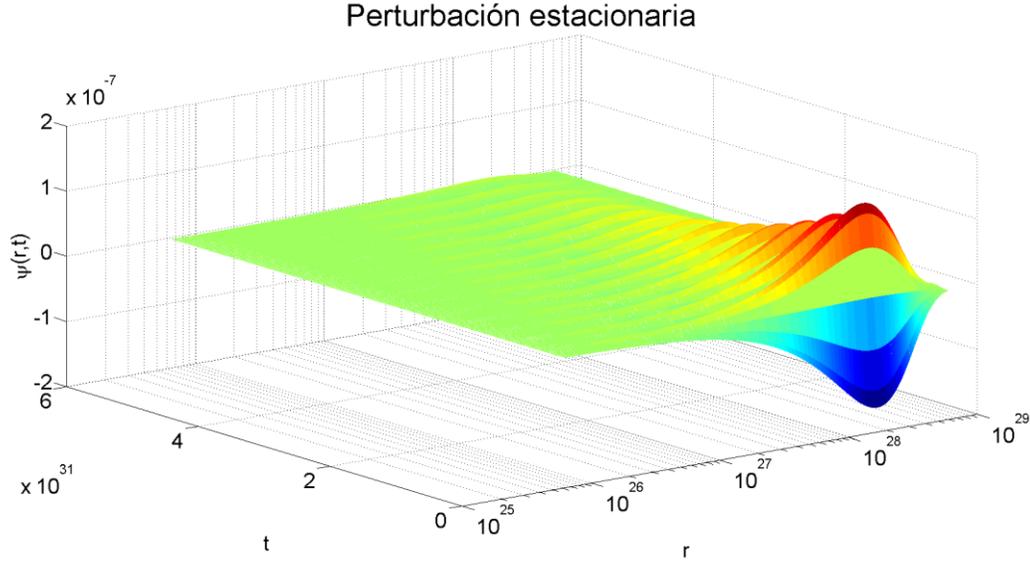


Fig. 4.9. Perturbación estacionaria $\psi'(r, t)$ en Relatividad General, con $V_M = 1 \times 10^{25}$, $u_0(r_1) = -0.001$ y $k = 2$.

Bajo las condiciones de acreción hacia el agujero negro: $u_0 < 0$ y $(dn_0/dr) < 0$ y para flujos subsónicos, en [10] se argumenta que la solución debe ser estable, ya que

$$\begin{aligned} B/A &< 0 \\ C/A &< 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

De (4.18) se puede afirmar que las relaciones (4.22) se cumplen. Por lo tanto, la solución obtenida coincide con el resultado de Naskar et al. [10].

El flujo en el régimen Newtoniano fue analizado por Petterson et al. [47], donde se llegó a la conclusión de que la perturbación no era amortiguada, es decir, su amplitud era constante en el tiempo. La única forma de obtener una solución estable en el régimen Newtoniano es considerar la viscosidad del fluido [48].

Entonces, en el marco de la Relatividad General, el hecho de que la solución obtenida sea estable, se debe a un acople entre el fluido y la curvatura del espacio-tiempo que actúa como una disipación efectiva [10]. Por ende, se esperaría que el tiempo de amortiguamiento, sea menor (solución más estable) para espacio-tiempos con mayor curvatura. Como se analizara en las siguientes secciones, esta idea es clave a la hora de comparar las soluciones en Relatividad General con las obtenidas en el Escenario de Seguridad Asintótica (sección 4.2).

Estabilidad: Ondas Viajeras

La perturbación de onda viajera se formula mediante una serie de potencias para la parte espacial:

$$\psi'(r, t) = \xi_\omega(r)e^{-i\omega t} \quad (4.23)$$

Como se mencionó anteriormente, debido a que la frecuencia ω es grande, únicamente es necesario encontrar las soluciones que involucran a k_{-1} , $k_0(r)$ y k_1 , dadas por (3.66), (3.74) y (3.78) respectivamente.

$$\xi_\omega(r) \approx e^{\omega^1 k_{-1} + \omega^0 k_0(r) + \omega^{-1} k_1} \quad (4.24)$$

En primer lugar, la solución para k_{-1} se obtiene a partir del cálculo de los coeficientes $h^{\alpha\beta}$ (4.12), (4.13) y (4.14), mediante integración numérica de

$$k_{-1} = i \int (h^{rr})^{-1} \left[h^{tr} \pm \sqrt{h^{tr^2} - h^{rr} h^{tt}} \right] dr \quad (4.25)$$

donde el signo positivo corresponde a una onda viajera saliente (outgoing) y el signo negativo a una onda viajera entrante (incoming). El integrando de (4.25) se muestra en la Fig. 4.10, y los resultados de la integración son

$$\begin{aligned} k_{-1,in} &\cong -i1.037 \times 10^{29} \\ k_{-1,out} &\cong +i1.038 \times 10^{29} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Entonces, k_{-1} únicamente contribuye a la fase de la onda viajera (4.23), y por lo tanto no afecta al análisis de estabilidad.

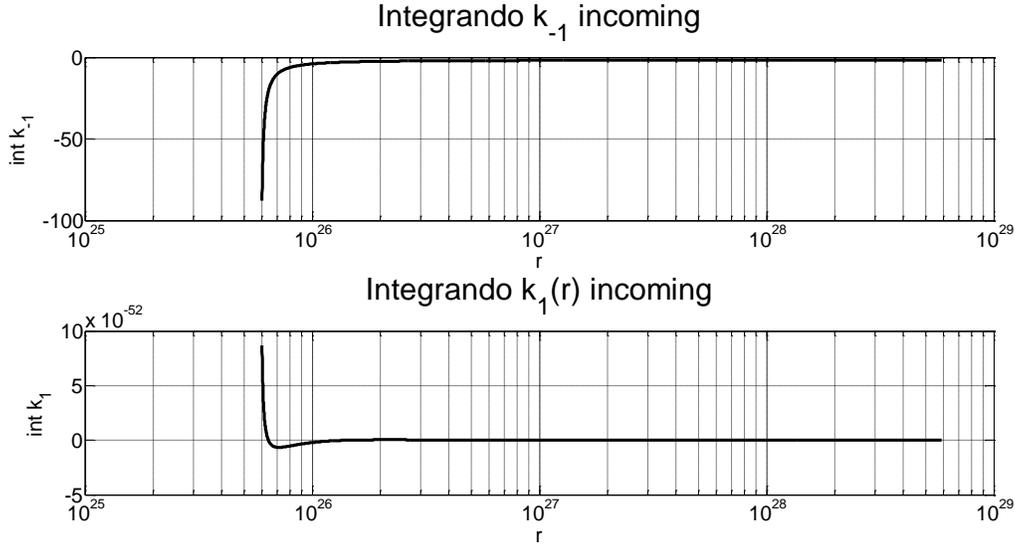


Fig. 4.10. Integrandos de k_{-1} y k_1 , para la onda viajera entrante, en Relatividad General, con $V_M = 1 \times 10^{25}$, $u_0(r_1) = -0.001$ y $k = 2$.

En segundo lugar, la solución para k_0 se obtiene directamente reemplazando los coeficientes $h^{\alpha\beta}$ y la función $f_{class}(r)$

$$k_0(r) = \ln \left[\frac{(f + u_0^2)}{\sqrt{h^{tr^2} - h^{rr} h^{tt}}} \right]^{1/2} \quad (4.27)$$

Para comparar con el régimen Newtoniano, donde la función $f(r)$ es

$$f_{class,N}(r) = 1 \quad (4.28)$$

se deben recalculan los coeficientes $h^{\alpha\beta}$ (4.12), (4.13) y (4.14) con la nueva función (4.28). Aquí es necesario aclarar que las soluciones del flujo estacionario $n_0(r)$, $u_0(r)$ y $a_0^2(r)$ siguen estando dadas por (4.7), (4.8) y (4.9).

Las soluciones para $k_0(r)$, en los regímenes de Newton y Einstein, se presentan en la Fig. 4.11. Además, para efectos comparativos, se presenta una gráfica de la diferencia entre dichas soluciones.

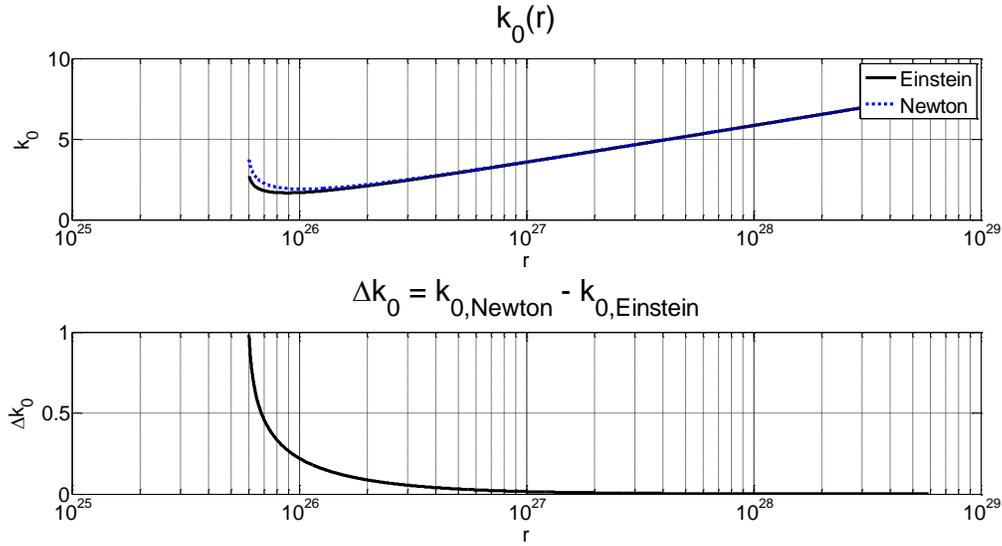


Fig. 4.11. Solución para $k_0(r)$, en el régimen de Newton y Einstein, con $V_M = 1 \times 10^{25}$, $u_0(r_1) = -0.001$ y $k = 2$.

La máxima diferencia de k_0 es

$$\Delta k_{0,m\acute{a}x} = k_{0,N} - k_{0,E} \cong 0.983$$

Finalmente, en tercer lugar, para calcular k_1 se debe solucionar la ecuación diferencial

$$2 \left(h^{rr} \frac{dk_{-1}}{dr} - i h^{tr} \right) \frac{dk_1}{dr} + \frac{d}{dr} \left(h^{rr} \frac{dk_0}{dr} \right) + h^{rr} \frac{dk_0}{dr} \frac{d}{dr} [k_0 - \ln(f + u_0^2)] = 0 \quad (4.29)$$

utilizando el método numérico de diferencias finitas, se reduce a resolver iterativamente (3.81). Utilizando los cálculos anteriores para dk_{-1}/dr y $k_0(r)$, se obtienen las soluciones para k_1

$$\begin{aligned} k_{1,in} &\cong i9.225 \times 10^{-28} \\ k_{1,out} &\cong -i9.225 \times 10^{-28} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Entonces, al igual que k_{-1} , las soluciones de k_1 únicamente contribuyen a la fase de la onda viajera (4.23), y por lo tanto no afectan al análisis de estabilidad.

Según (4.26), (4.30) y la Fig. 4.11 se puede ver que el comportamiento asintótico es $k_{-1} \sim r$, $k_0 \sim \ln r$ y $k_1 \sim r^{-1}$. Lo cual concuerda con el punto de partida para realizar el análisis de estabilidad por onda viajera [10].

Ahora, estudiando el comportamiento de la parte espacial (4.24) de la onda viajera

$$\xi_\omega(r) \approx e^{\omega^1 k_{-1} + \omega^0 k_0(r) + \omega^{-1} k_1}$$

Se concluye que en los casos de k_{-1} y k_1 , su contribución es a la fase de la onda viajera, debido a que (4.26) y (4.30) únicamente tienen componente imaginaria. Entonces la estabilidad del flujo se analiza con respecto al aporte a la amplitud de la onda de $k_0(r)$ en (4.24).

En el caso Newtoniano ($f_{class,N}(r) = 1$) es de esperar que el valor de $k_0(r)$ sea mayor con respecto al caso de Relatividad General ($f_{class,E}(r) < 1$), ya que la función $f(r)$ aparece en el numerador de (4.27) y el logaritmo natural es una función creciente [10]. Esto concuerda con los resultados obtenidos en la Fig. 4.11.

Por lo tanto, se concluye que si se toman en cuenta los efectos relativistas, la amplitud de la onda viajera se reduce. Nuevamente, este resultado se explica como consecuencia del acople entre el fluido y la curvatura del espacio-tiempo que actúa como una disipación efectiva.

4.2 Solución en el Escenario de Seguridad Asintótica

Para realizar el análisis de estabilidad en el escenario de seguridad asintótica se considera la métrica de Schwarzschild mejorada con la función $f(r)$ según aparece en (4.3); y luego se procede a comparar con el régimen clásico, utilizando la métrica con $f_{class}(r)$ según (4.2).

Soluciones Estacionarias

Se espera encontrar una diferencia significativa, entre las soluciones clásicas y cuánticas, si se considera la masa del agujero negro con un valor cercano a la masa crítica (4.4) $M \gtrsim M_{cr}$, ya que para estos valores de la masa, la función mejorada $f(r)$ difiere de su contraparte clásica (según se observa en las Fig. 2.1 y 4.13). Entonces se plantea realizar la simulación para un valor de la constante adimensional y la velocidad del flujo en el horizonte de eventos, iguales a

$$\begin{aligned} V_M &= 1.001 \\ u_0(r_1) &= -0.001 \end{aligned} \quad (4.31)$$

Con la condición de frontera para la velocidad (4.31) se asegura que la solución sea subsónica, con lo cual se evita que la solución pase a través de un punto singular en el flujo [45].

El hecho de que ambas soluciones sean diferentes, se explica ya que la constante de Newton en el escenario de seguridad asintótica (2.111) ahora es una función de la coordenada radial

$$G(r) = \frac{r^3}{r^3 + \tilde{\omega}(r + \gamma M)} \quad (4.32)$$

Las gráficas de la constante de Newton y la función $f(r)$ y su derivada se presentan en las Fig. 4.12 y 4.13, respectivamente. Mientras que las soluciones estacionarias para la densidad de número de bariones (3.43), la velocidad radial del flujo (3.45) y la velocidad del sonido (3.44), se muestran en las Fig. 4.14, 4.15 y 4.16, respectivamente.

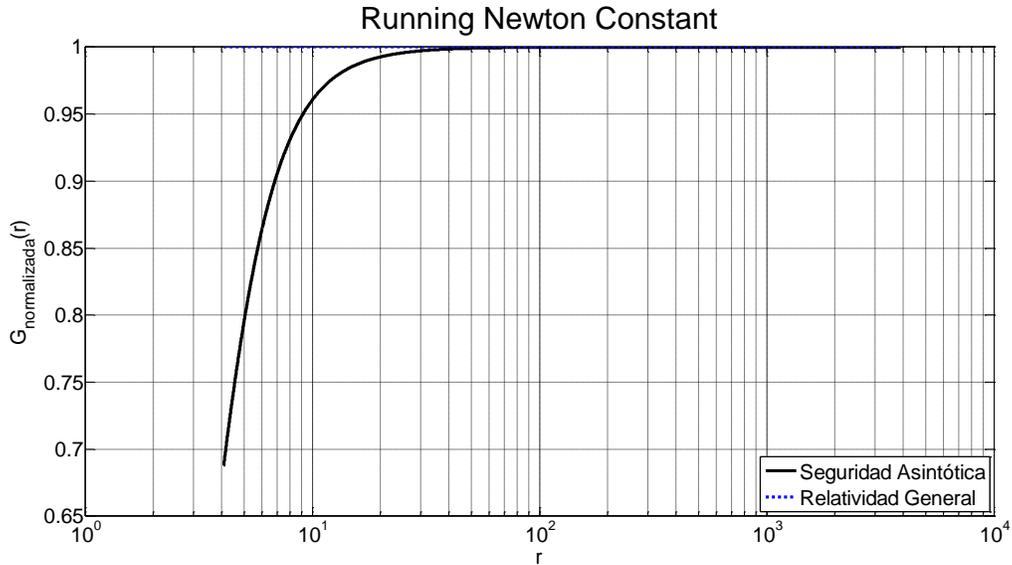


Fig. 4.12. Constante de Newton en Relatividad General y en el Escenario de Seguridad Asintótica, con $V_M = 1.001$, $u_0(r_1) = -0.001$ y $k = 2.5$.

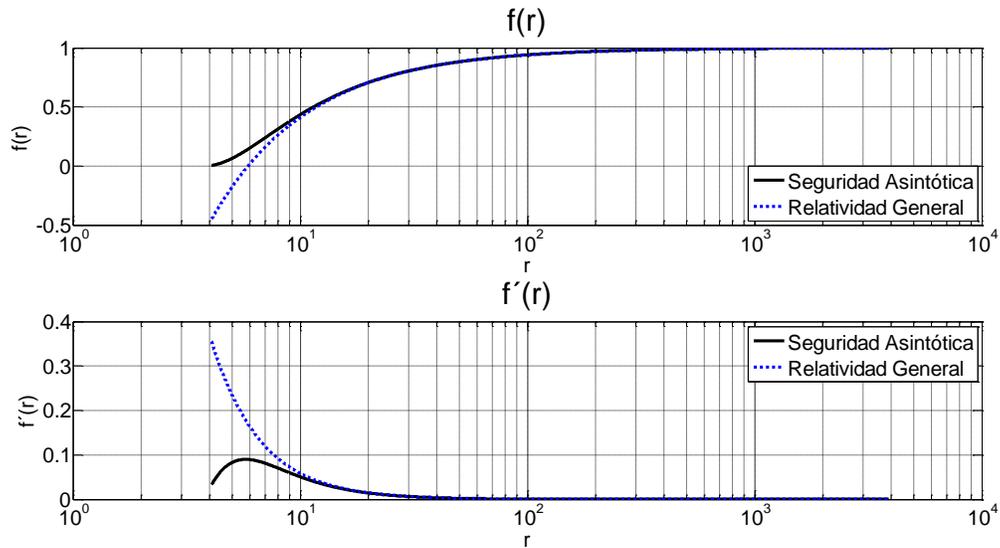


Fig. 4.13. Función $f_{class}(r)$ y su derivada en Relatividad General y en el Escenario de Seguridad Asintótica, con $V_M = 1.001$, $u_0(r_1) = -0.001$ y $k = 2.5$.

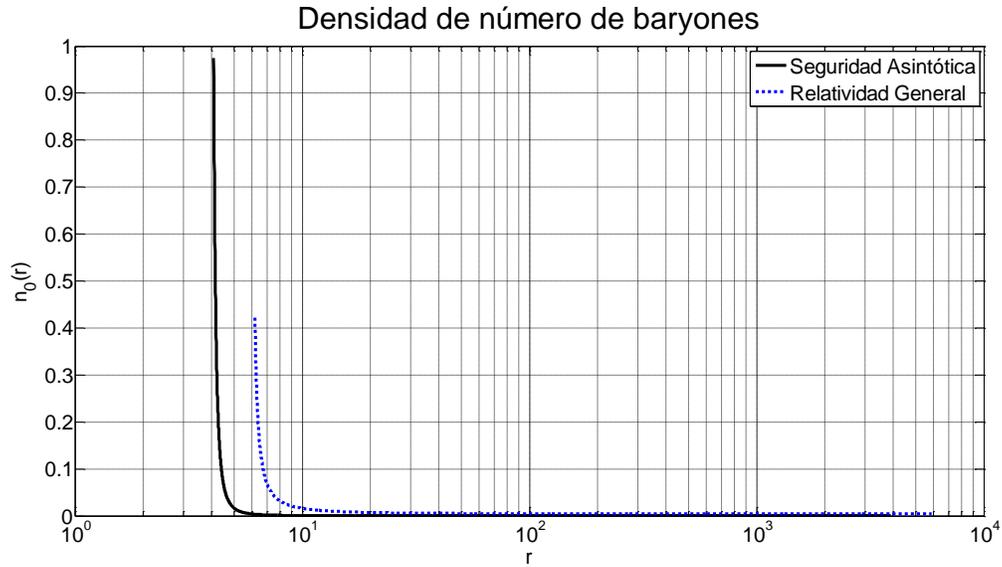


Fig. 4.14. Densidad de número de baryones $n_0(r)$ en Relatividad General y en el Escenario de Seguridad Asintótica, con $V_M = 1.001$, $u_0(r_1) = -0.001$ y $k = 2.5$.

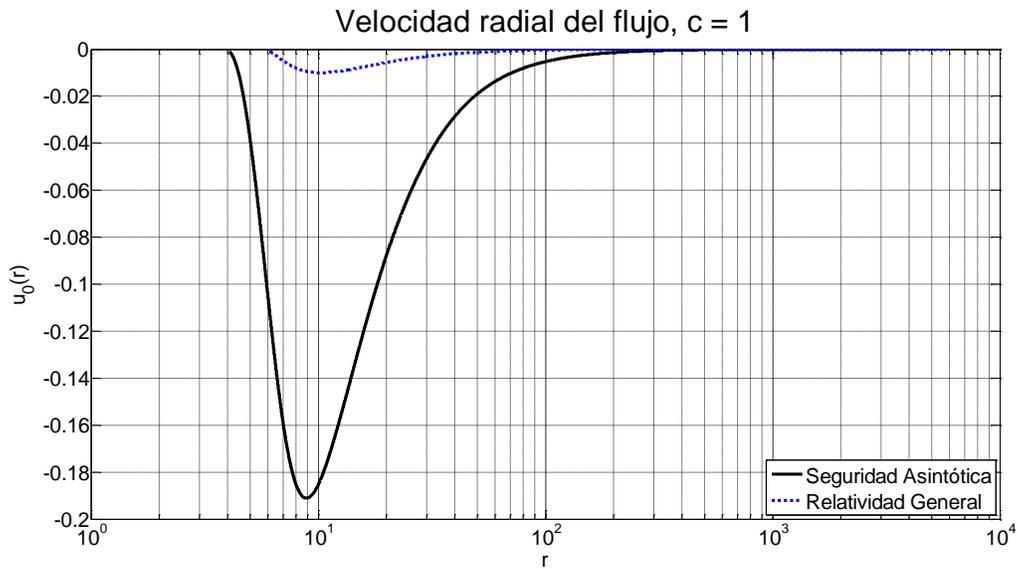


Fig. 4.15. Velocidad radial del flujo $u_0(r)$ en Relatividad General y en el Escenario de Seguridad Asintótica, con $V_M = 1.001$, $u_0(r_1) = -0.001$ y $k = 2.5$.

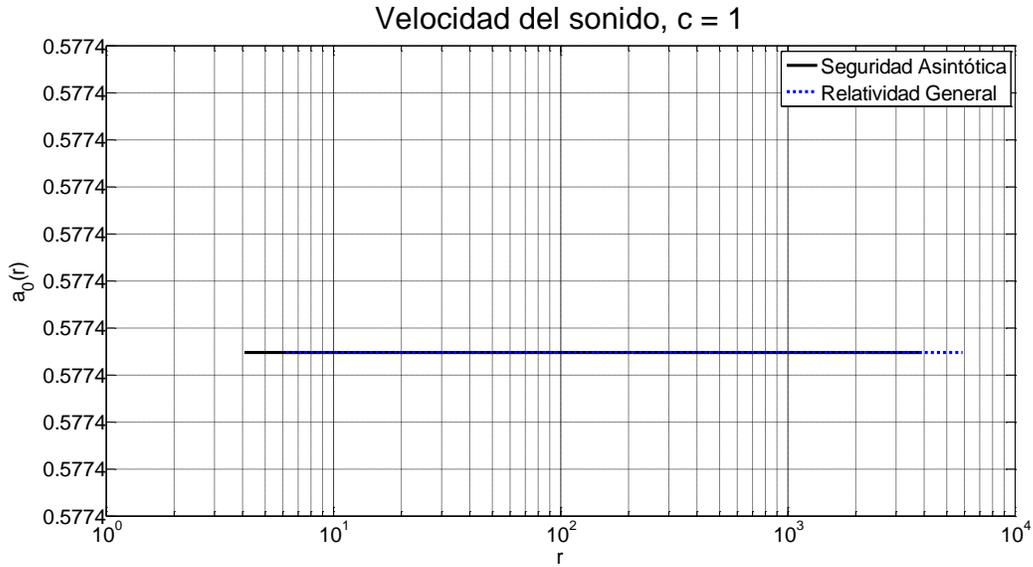


Fig. 4.16. Velocidad del sonido $a_0(r)$ en Relatividad General y en el Escenario de Seguridad Asintótica, con $V_M = 1.001$, $u_0(r_1) = -0.001$ y $k = 2.5$.

Estabilidad: Ondas Estacionarias

En esta segunda simulación se modela la amplitud $\xi(r)$ mediante una distribución (3.53), con el parámetro de forma $k = 2.5$ y el parámetro de escala $\lambda = 1$

$$\xi(r) = 2.5(r - r_1)^{1.5} e^{-(r-r_1)^{2.5}} \quad (4.33)$$

En la Fig. 4.17 se muestra la amplitud en función de radio, y se observa que se cumplen las condiciones de frontera (3.48) $\xi(r_1) = \xi(r_N) = 0$.

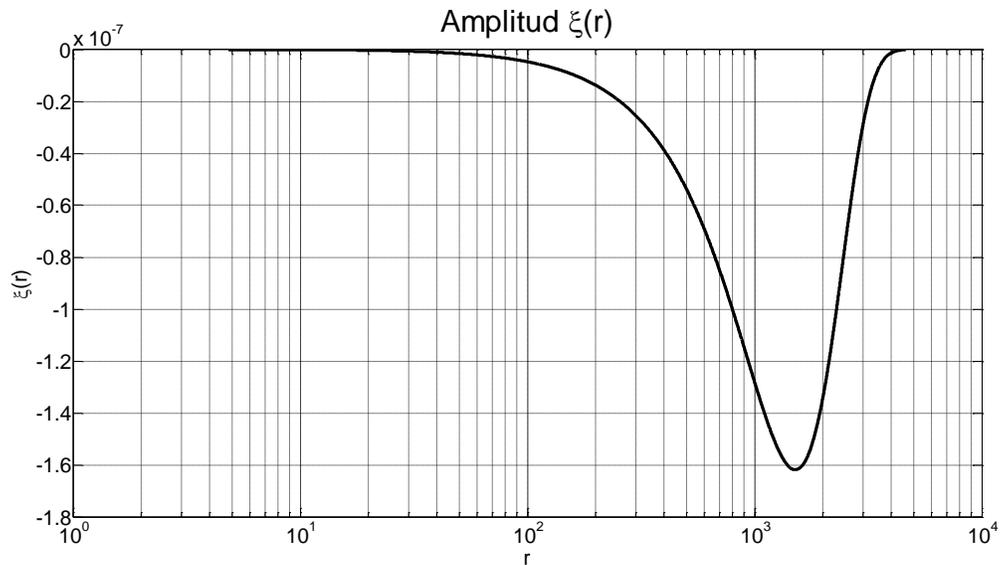


Fig. 4.17. Amplitud de la perturbación $\xi(r)$, con $V_M = 1.001$, $u_0(r_1) = -0.001$ y $k = 2.5$.

Una vez se han calculado las soluciones estacionarias para $n_0(r)$, $u_0(r)$ y $a_0^2(r)$, junto con $f(r)$; los coeficientes $h^{\alpha\beta}$ se pueden obtener directamente de (4.12), (4.13) y (4.14). Éstos se presentan en la Fig. 4.18, en escala logarítmica para ambos ejes.

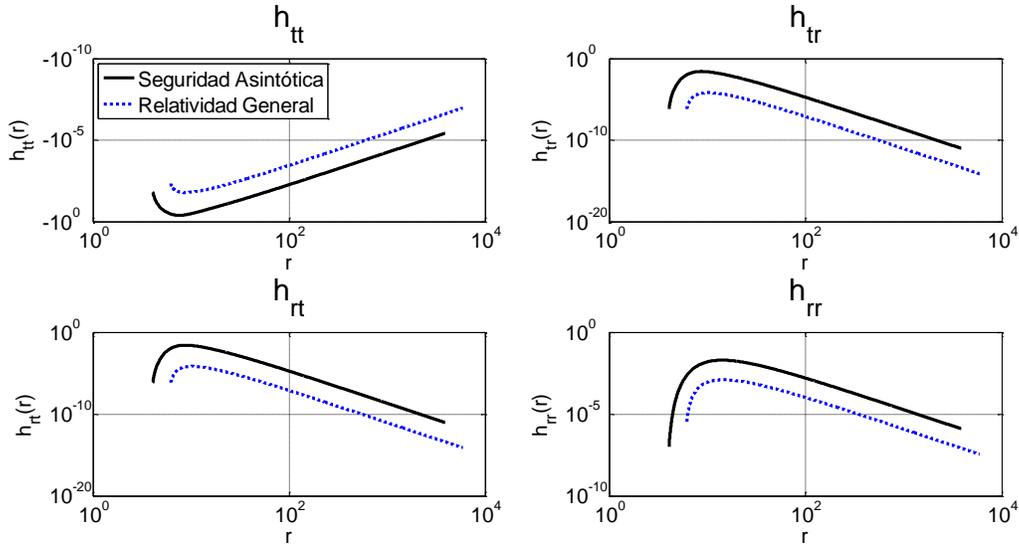


Fig. 4.18. Coeficientes $h^{\alpha\beta}(r)$ en Relatividad General y en el Escenario de Seguridad Asintótica, con $V_M = 1.001$, $u_0(r_1) = -0.001$ y $k = 2.5$.

Ahora, con la amplitud de la perturbación (4.33) junto con los coeficientes (4.12), (4.13) y (4.14), mediante integración numérica se calculan los coeficientes (4.15), (4.16) y (4.17). Los integrandos de A , B y C se presentan en la Fig. 4.19, en escala logarítmica para ambos ejes.

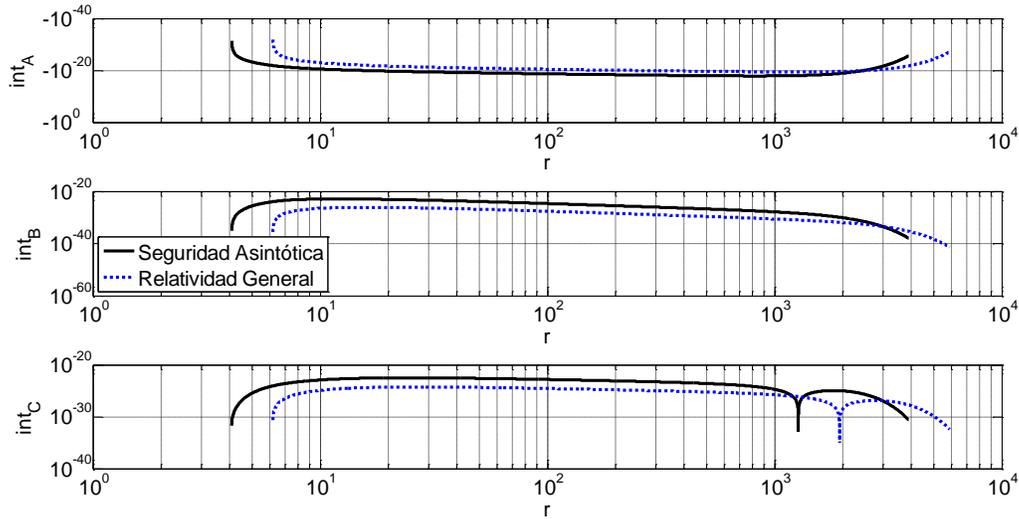


Fig. 4.19. Integrandos de los coeficientes A , B y C en Relatividad General y en el Escenario de Seguridad Asintótica, con $V_M = 1.001$, $u_0(r_1) = -0.001$ y $k = 2.5$.

Aparentemente en el integrando de C , se obtiene un comportamiento diferente al obtenido anteriormente en la Fig. 4.8. Sin embargo, simplemente es una cuestión de visualización, ya que en la Fig. 4.19 se utilizan escalas logarítmicas en ambos ejes.

En relatividad general, los resultados obtenidos para (4.15), (4.16) y (4.17), son

$$\begin{aligned} A_{class} &\cong -6.7741 \times 10^{-17} \\ B_{class} &\cong 2.2243 \times 10^{-25} \\ C_{class} &\cong 1.0972 \times 10^{-22} \end{aligned} \quad (4.34)$$

Mientras que en el escenario de seguridad asintótica, son

$$\begin{aligned} A_q &\cong -1.5664 \times 10^{-15} \\ B_q &\cong 2.8335 \times 10^{-22} \\ C_q &\cong 5.3313 \times 10^{-21} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Finalmente, se obtienen las dos soluciones de la ecuación residual cuadrática para la frecuencia ω . En relatividad general, las raíces de la ecuación polinomial (4.19), son

$$\begin{aligned} \omega_{1,class} &\cong 1.273 \times 10^{-3} - i3.283 \times 10^{-9} \\ \omega_{2,class} &\cong -1.273 \times 10^{-3} - i3.283 \times 10^{-9} \end{aligned} \quad (4.36)$$

Mientras que en el escenario de seguridad asintótica, son

$$\begin{aligned} \omega_{1,q} &\cong 1.845 \times 10^{-3} - i1.809 \times 10^{-7} \\ \omega_{2,q} &\cong -1.845 \times 10^{-3} - i1.809 \times 10^{-7} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Tanto en el caso clásico y el cuántico, la parte imaginaria de ambas soluciones es negativa, entonces la solución propuesta $\xi(r)e^{-i\omega t}$ es estable en los dos casos. La gráfica de la perturbación en el escenario de seguridad asintótica $\psi_q'(r, t)$, con ω_1 , se muestra en la Fig. 4.20.

Nuevamente, la solución clásica obtenida coincide con el resultado de Naskar et al. [10], ya que de los resultados (4.34) se cumplen las relaciones

$$\begin{aligned} B/A &< 0 \\ C/A &< 0 \end{aligned} \quad (4.38)$$

Como era de esperar, a pesar de que las soluciones son estables, los tiempos de amortiguamiento en ambos regímenes son diferentes

$$\begin{aligned} 5\tau_{class} &= \frac{5}{\Im[\omega_{class}]} \cong \frac{5}{3.283 \times 10^{-9}} \cong 1.523 \times 10^9 \\ 5\tau_q &= \frac{5}{\Im[\omega_q]} \cong \frac{5}{1.809 \times 10^{-7}} \cong 2.764 \times 10^7 \end{aligned} \quad (4.38)$$

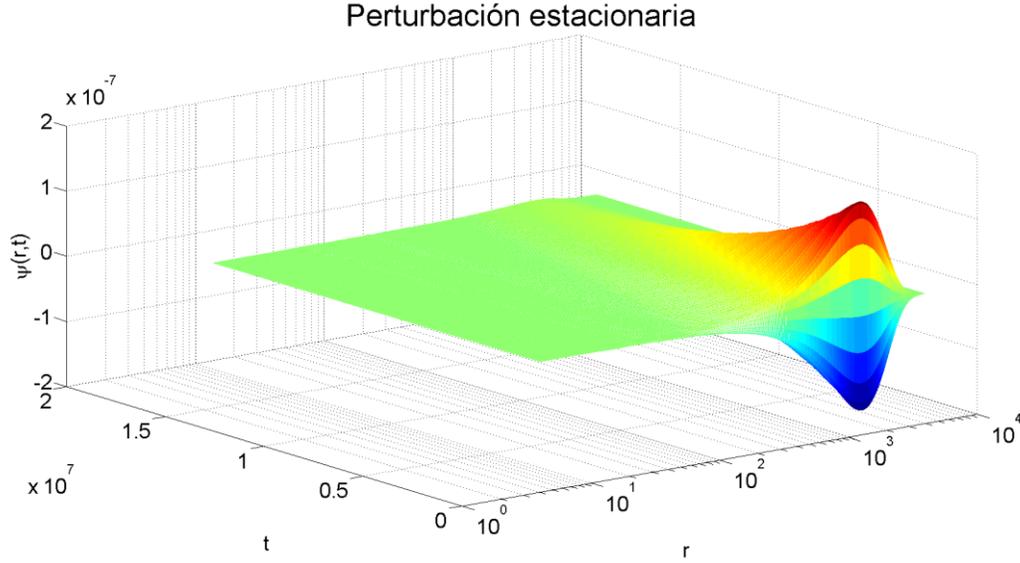


Fig. 4.20. Perturbación estacionaria $\psi'(r, t)$ en el Escenario de Seguridad Asintótica, con $V_M = 1.001$, $u_0(r_1) = -0.001$ y $k = 2.5$.

Por lo tanto, en el escenario de seguridad asintótica, se requiere un tiempo menor para amortiguar la perturbación; es decir en este escenario se exhibe una mayor estabilidad en comparación con la solución en relatividad general.

Anteriormente se había argumentado que el hecho de que la solución obtenida sea estable, se debe a la existencia de un acople entre el fluido y la curvatura del espacio-tiempo que actúa como una disipación efectiva [10]. De las soluciones encontradas para la densidad de número de bariones (Fig. 4.14) y la velocidad radial del flujo (Fig. 4.15), se concluye que el acople entre el fluido y la curvatura del espacio-tiempo es mayor para la métrica de Schwarzschild mejorada. Por ende el efecto disipador en seguridad asintótica, con $M \gtrsim M_{cr}$, es mayor que en relatividad general, lo cual concuerda con el resultado obtenido.

Estabilidad: Ondas Viajeras

En primer lugar, la solución para k_{-1} se obtiene a partir del cálculo de los coeficientes $h^{\alpha\beta}$ (4.12), (4.13) y (4.14), mediante integración numérica de (4.25). Los integrandos de (4.25) se muestran en la Fig. 4.21. En relatividad general, los resultados de la integración, son

$$\begin{aligned} k_{-1,in}^{(class)} &\cong -i1.032 \times 10^4 \\ k_{-1,out}^{(class)} &\cong +i1.032 \times 10^4 \end{aligned} \quad (4.39)$$

Mientras que en el escenario de seguridad asintótica, son

$$\begin{aligned} k_{-1,in}^{(q)} &\cong -i6.888 \times 10^3 \\ k_{-1,out}^{(q)} &\cong +i6.957 \times 10^3 \end{aligned} \quad (4.40)$$

Entonces, k_{-1} únicamente contribuye a la fase de la onda viajera (4.23), y por lo tanto no afecta al análisis de estabilidad.

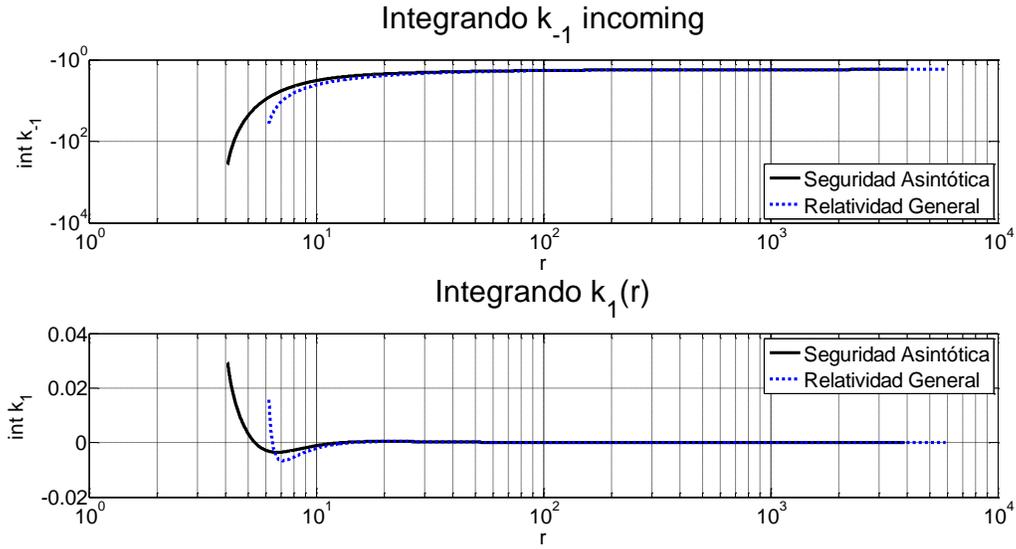


Fig. 4.21. Integrandos de k_{-1} y k_1 , para la onda viajera entrante, en Relatividad General y en el Escenario de Seguridad Asintótica, con $V_M = 1.001$, $u_0(r_1) = -0.001$ y $k = 2.5$.

En segundo lugar, la solución para k_0 se obtiene directamente reemplazando los coeficientes $h^{\alpha\beta}$ y las funciones $f_{class,N}(r)$, $f_{class}(r)$ y $f(r)$ en (4.27). Las soluciones para $k_0(r)$, en los regímenes de Newton, Relatividad General y Seguridad Asintótica, se presentan en la Fig. 4.22. Además, para efectos comparativos, se presentan dos gráficas de la diferencia entre las soluciones en Relatividad General y Seguridad Asintótica con respecto a las soluciones en el caso Newtoniano.

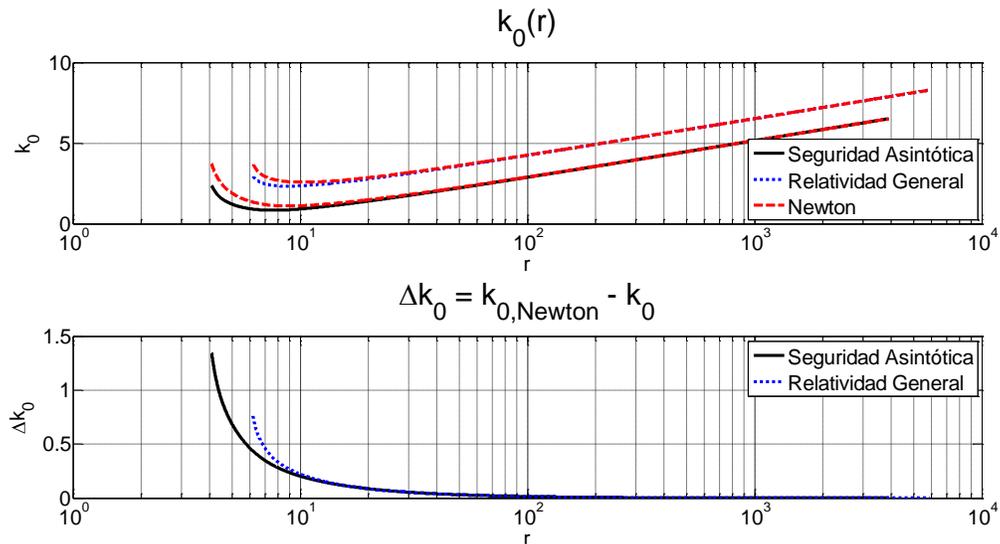


Fig. 4.22. Solución para $k_0(r)$, en el régimen de Newton, Einstein y en Seguridad Asintótica, con $V_M = 1.001$, $u_0(r_1) = -0.001$ y $k = 2.5$.

Tanto para la solución en relatividad general y en seguridad asintótica, las soluciones de $k_0(r)$ están por debajo de las soluciones en el caso newtoniano, es decir las diferencias $\Delta k_0^{(class)}$ y $\Delta k_0^{(q)}$ son

siempre positivas. Esto se interpreta como un mejoramiento es la estabilidad al incluir la curvatura del espacio-tiempo y los efectos cuánticos, debido a que $e^{\omega^0 k_0(r)}$ se reduce en ambos casos.

Para k_0 la máxima diferencia entre Newton y relatividad general, es

$$\Delta k_{0,m\acute{a}x}^{(class)} = k_{0,N} - k_{0,E} \cong 0.7661 \quad (4.41)$$

Mientras que la máxima diferencia entre Newton y seguridad asintótica, es

$$\Delta k_{0,m\acute{a}x}^{(q)} = k_{0,N} - k_{0,q} \cong 1.347 \quad (4.42)$$

Finalmente, en tercer lugar, para calcular k_1 se debe solucionar la ecuación diferencial (4.29). Utilizando los cálculos anteriores para dk_{-1}/dr y $k_0(r)$, en relatividad general se obtienen las soluciones para k_1

$$\begin{aligned} k_{1,in}^{(class)} &\cong +i2.081 \times 10^{-3} \\ k_{1,out}^{(class)} &\cong -i2.081 \times 10^{-3} \end{aligned} \quad (4.43)$$

Mientras que en el escenario de seguridad asintótica

$$\begin{aligned} k_{1,in}^{(q)} &\cong +i2.045 \times 10^{-2} \\ k_{1,out}^{(q)} &\cong -i2.045 \times 10^{-2} \end{aligned} \quad (4.44)$$

Entonces, al igual que k_{-1} , las soluciones de k_1 únicamente contribuyen a la fase de la onda viajera (4.23), y por lo tanto no afectan al análisis de estabilidad.

Según (4.39), (4.40), (4.43), (4.44) y la Fig. 4.22 se puede ver que el comportamiento asintótico es $k_{-1} \sim r$, $k_0 \sim \ln r$ y $k_1 \sim r^{-1}$. Lo cual concuerda con el punto de partida para realizar el análisis de estabilidad por onda viajera [10].

Ahora, estudiando el comportamiento de la parte espacial (4.24) de la onda viajera

$$\xi_\omega(r) \approx e^{\omega^1 k_{-1} + \omega^0 k_0(r) + \omega^{-1} k_1}$$

Se concluye que en los casos de k_{-1} y k_1 , su contribución es a la fase de la onda viajera, debido a que (4.39), (4.40), (4.43), (4.44) únicamente tienen componente imaginaria. Entonces la estabilidad del flujo se analiza con respecto a la aportación a la amplitud de la onda de $k_0(r)$ en (4.24).

Observando la Fig. 4.22, en el caso Newtoniano $k_0(r)$ es mayor en todo momento tanto a las soluciones en relatividad general y en seguridad asintótica. Por lo tanto, se concluye que si se toman en cuenta los efectos relativistas, la amplitud de la onda viajera se reduce, con respecto al caso Newtoniano; esto nuevamente concuerda con los resultados de [10].

Pero el resultado más importante es que en el escenario de seguridad asintótica se obtiene que $k_0(r)$ es menor en todo momento al caso de relatividad general (según se observa en la Fig. 4.22) De nuevo, este resultado se explica como consecuencia de un mayor acople entre el fluido y la

curvatura del espacio-tiempo de Schwarzschild mejorado, que actúa como una mayor disipación efectiva, y por lo tanto en el escenario de seguridad asintótica se mejora la estabilidad.

4.3 Soluciones Cambiando los Parámetros de Simulación

En esta sección se pretende analizar el comportamiento de la estabilidad del fluido, tanto para onda estacionaria como para onda viajera, realizando varias simulaciones cambiando la masa del agujero negro, la velocidad radial del fluido en el horizonte de eventos (condición de frontera) y la forma de la amplitud de la perturbación estacionaria.

Dependencia con la Masa del Agujero Negro

El objetivo es encontrar la dependencia de las soluciones con respecto a variaciones en la masa del agujero negro $M = V_M M_{cr}$, para valores

- i. $M \gg M_{cr}$, donde el espacio-tiempo de Schwarzschild mejorado tiene dos horizontes de eventos y se aproxima asintóticamente al espacio-tiempo de Schwarzschild en relatividad general.
- ii. $M \gtrsim M_{cr}$, donde el espacio-tiempo de Schwarzschild mejorado tiene dos horizontes de eventos y se presentan grandes diferencias con respecto a la solución en relatividad general.
- iii. $M = M_{cr}$, donde el espacio-tiempo de Schwarzschild mejorado tiene un horizonte de eventos.
- iv. $M < M_{cr}$, donde el espacio-tiempo de Schwarzschild mejorado no tiene horizontes de evento y se aproxima asintóticamente al espacio-tiempo de de Sitter.

dejando fijas la velocidad radial del fluido en el horizonte de eventos y la forma de la amplitud de la perturbación

$$\begin{aligned} u_0(r_1) &= -0.001 \\ k &= 2.5 \end{aligned}$$

Los valores considerados de V_M están entre 4×10^{-3} y 1×10^{25} . En primer lugar, para las soluciones de onda estacionaria, en las tablas 4.1 y 4.2 se presentan las dos soluciones de la ecuación residual cuadrática (4.19) para la frecuencia ω y el tiempo de amortiguamiento de la perturbación 5τ ; en relatividad general y en el escenario de seguridad asintótica, respectivamente.

Tanto en el caso clásico y el cuántico, la parte imaginaria de ambas soluciones es negativa, entonces la solución propuesta $\xi(r)e^{-i\omega t}$ es estable para todos los valores considerados de la masa del agujero negro (ver las tablas 4.1 y 4.2).

A pesar de que todas las soluciones son estables, los tiempos de amortiguamiento en ambos regímenes son diferentes y estos también dependen de la masa del agujero negro. Se espera que a medida que el acople entre el fluido y la curvatura del espacio-tiempo sea mayor, se incremente la disipación efectiva y consecuentemente se mejore la estabilidad del fluido, es decir, el tiempo de amortiguamiento de la perturbación debe disminuir. En la Fig. 4.23 se presenta esta tendencia.

Tabla 4.1. Solución de onda estacionaria en Relatividad General, variando la masa del agujero negro, con $u_0(r_1) = -0.001$ y $k = 2.5$.

V_M	Solución Onda Estacionaria en Relatividad General		
	$\omega_{1,class}$	$\omega_{2,class}$	$5\tau_{class}$
1e+25	1.269e-28 -3.334e-34i	-1.269e-28 -3.334e-34i	1.500e+34
1e+15	1.274e-18 -3.287e-24i	-1.274e-18 -3.287e-24i	1.521e+24
1e+10	1.274e-13 -3.287e-19i	-1.274e-13 -3.287e-19i	1.521e+19
1e+05	1.274e-08 -3.287e-14i	-1.274e-08 -3.287e-14i	1.521e+14
1e+01	1.274e-04 -3.287e-10i	-1.274e-04 -3.287e-10i	1.521e+10
5e+00	2.548e-04 -6.574e-10i	-2.548e-04 -6.574e-10i	7.606e+09
4e+00	3.185e-04 -8.217e-10i	-3.185e-04 -8.217e-10i	6.085e+09
3e+00	4.246e-04 -1.096e-09i	-4.246e-04 -1.096e-09i	4.564e+09
2e+00	6.370e-04 -1.643e-09i	-6.370e-04 -1.643e-09i	3.042e+09
1.5E+00	8.493e-04 -2.191e-09i	-8.493e-04 -2.191e-09i	2.282e+09
1.2E+00	1.062e-03 -2.739e-09i	-1.062e-03 -2.739e-09i	1.825e+09
1.001E+00	1.273e-03 -3.283e-09i	-1.273e-03 -3.283e-09i	1.523e+09
9E-01	1.415e-03 -3.652e-09i	-1.415e-03 -3.652e-09i	1.369e+09
8e-01	1.592e-03 -4.108e-09i	-1.592e-03 -4.108e-09i	1.217e+09
6e-01	2.123e-03 -5.478e-09i	-2.123e-03 -5.478e-09i	9.127e+08
4e-01	3.185e-03 -8.217e-09i	-3.185e-03 -8.217e-09i	6.085e+08
2e-01	6.370e-03 -1.643e-08i	-6.370e-03 -1.643e-08i	3.042e+08
8e-03	1.592e-01 -4.108e-07i	-1.592e-01 -4.108e-07i	1.217e+07
4e-03	3.185e-01 -8.217e-07i	-3.185e-01 -8.217e-07i	6.085e+06

Tabla 4.2. Solución de onda estacionaria en Seguridad Asintótica, variando la masa del agujero negro, con $u_0(r_1) = -0.001$ y $k = 2.5$.

V_M	Solución Onda Estacionaria en Seguridad Asintótica		
	$\omega_{1,q}$	$\omega_{2,q}$	$5\tau_q$
1e+25	1.269e-28 -3.334e-34i	-1.269e-28 -3.334e-34i	1.500e+34
1e+15	1.274e-18 -3.287e-24i	-1.274e-18 -3.287e-24i	1.521e+24
1e+10	1.274e-13 -3.287e-19i	-1.274e-13 -3.287e-19i	1.521e+19
1e+05	1.274e-08 -3.287e-14i	-1.274e-08 -3.287e-14i	1.521e+14
1e+01	1.276e-04 -3.314e-10i	-1.276e-04 -3.314e-10i	1.509e+10
5e+00	2.563e-04 -6.794e-10i	-2.563e-04 -6.794e-10i	7.360e+09
4e+00	3.216e-04 -8.656e-10i	-3.216e-04 -8.656e-10i	5.776e+09
3e+00	4.321e-04 -1.205e-09i	-4.321e-04 -1.205e-09i	4.150e+09
2e+00	6.639e-04 -2.070e-09i	-6.639e-04 -2.070e-09i	2.416e+09
1.5E+00	9.208e-04 -3.497e-09i	-9.208e-04 -3.497e-09i	1.430e+09
1.2E+00	1.232e-03 -6.921e-09i	-1.232e-03 -6.921e-09i	7.224e+08
1.001E+00	1.845e-03 -1.809e-07i	-1.845e-03 -1.809e-07i	2.764e+07
9E-01	2.068e-03 -2.902e-09i	-2.068e-03 -2.902e-09i	1.723e+09
8e-01	2.280e-03 -1.056e-09i	-2.280e-03 -1.056e-09i	4.733e+09
6e-01	2.878e-03 -3.923e-10i	-2.878e-03 -3.923e-10i	1.274e+10
4e-01	3.954e-03 -2.293e-10i	-3.954e-03 -2.293e-10i	2.181e+10
2e-01	6.669e-03 -1.535e-10i	-6.669e-03 -1.535e-10i	3.257e+10
8e-03	1.100e-01 + 1.119e-10i	-1.100e-01 + 1.119e-10i	4.470e+10
4e-03	2.205e-01 + 1.092e-10i	-2.205e-01 + 1.092e-10i	4.579e+10

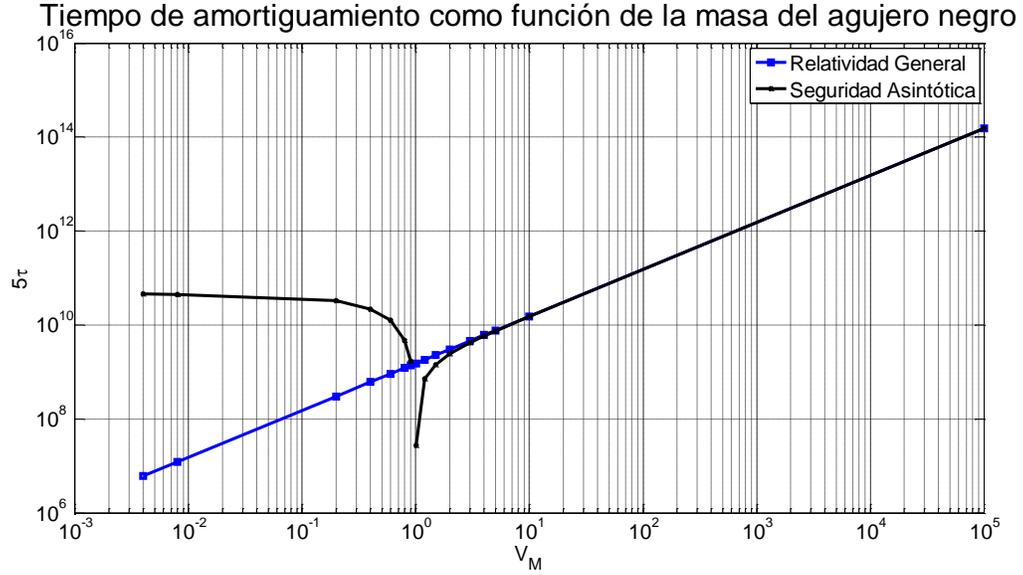


Fig. 4.23. Tiempo de amortiguamiento en Relatividad General y en Seguridad Asintótica, variando la masa del agujero negro, con $u_0(r_1) = -0.001$ y $k = 2.5$.

Según se observa en la Fig. 4.23,

- Cuando $M \gtrsim M_{cr}$ para la solución en seguridad asintótica, la perturbación por onda estacionaria se demora menos tiempo en amortiguarse (mayor estabilidad).
- Mientras, cuando $M < M_{cr}$ para la solución en relatividad general, la perturbación por onda estacionaria se demora menos tiempo en amortiguarse (mayor estabilidad).

Entre esos dos intervalos de la masa del agujero negro, hay una transición de pasar de dos horizontes de eventos a no tener ninguno. Este comportamiento en el tiempo de amortiguamiento se explica más adelante, junto con el análisis de onda viajera.

En segundo lugar, para las soluciones de onda viajera, en las tablas 4.3 y 4.4 se presentan las soluciones para $k_{-1,in}$ (4.25), $k_{1,in}$ (4.29) y la máxima diferencia de $k_0(r)$ con respecto a la solución Newtoniana $\Delta k_{0,máx}$ (4.27); en relatividad general y en el escenario de seguridad asintótica, respectivamente.

Tabla 4.3. Solución de onda viajera en Relatividad General, variando la masa del agujero negro, con $u_0(r_1) = -0.001$ y $k = 2.5$.

V_M	Solución Onda Viajera en Relatividad General		
	$k_{-1,in}^{(class)}$	$k_{1,in}^{(class)}$	$\Delta k_{0,máx}^{(class)}$
1E+25	-1.034e+29i	+ 2.033e-28i	7.611e-01
1E+15	-1.031e+19i	+ 2.083e-18i	7.611e-01
1E+10	-1.031e+14i	+ 2.083e-13i	7.611e-01
1E+05	-1.031e+09i	+ 2.083e-08i	7.611e-01
1E+01	-1.031e+05i	+ 2.083e-04i	7.611e-01
5E+00	-5.153e+04i	+ 4.165e-04i	7.611e-01
4E+00	-4.123e+04i	+ 5.207e-04i	7.611e-01
3E+00	-3.092e+04i	+ 6.942e-04i	7.611e-01
2E+00	-2.061e+04i	+ 1.041e-03i	7.611e-01
1.5E+00	-1.546e+04i	+ 1.388e-03i	7.611e-01
1.2E+00	-1.237e+04i	+ 1.736e-03i	7.611e-01
1.001E+00	-1.032e+04i	+ 2.081e-03i	7.611e-01
9E-01	-9.276e+03i	+ 2.314e-03i	7.611e-01
8E-01	-8.246e+03i	+ 2.603e-03i	7.611e-01
6E-01	-6.184e+03i	+ 3.471e-03i	7.611e-01
4E-01	-4.123e+03i	+ 5.207e-03i	7.611e-01
2E-01	-2.061e+03i	+ 1.041e-02i	7.611e-01
8E-03	-8.246e+01i	+ 2.603e-01i	7.611e-01
4E-03	-4.123e+01i	+ 5.207e-01i	7.611e-01

Tabla 4.4. Solución de onda viajera en Seguridad Asintótica, variando la masa del agujero negro, con $u_0(r_1) = -0.001$ y $k = 2.5$.

V_M	Solución Onda Viajera en Seguridad Asintótica		
	$k_{-1,in}^{(q)}$	$k_{1,in}^{(q)}$	$\Delta k_{0,máx}^{(q)}$
1E+25	-1.034e+29i	+ 2.033e-28i	7.611e-01
1E+15	-1.031e+19i	+ 2.083e-18i	7.611e-01
1E+10	-1.031e+14i	+ 2.083e-13i	7.611e-01
1E+05	-1.031e+09i	+ 2.083e-08i	7.611e-01
1E+01	-1.029e+05i	+ 2.129e-04i	7.622e-01
5E+00	-5.119e+04i	+ 4.541e-04i	7.653e-01
4E+00	-4.080e+04i	+ 5.949e-04i	7.677e-01
3E+00	-3.034e+04i	+ 8.746e-04i	7.732e-01
2E+00	-1.970e+04i	+ 1.698e-03i	7.906e-01
1.5E+00	-1.415e+04i	+ 3.153e-03i	8.216e-01
1.2E+00	-1.051e+04i	+ 6.038e-03i	8.838e-01
1.001E+00	-6.888e+03i	+ 2.045e-02i	1.347e+00
9E-01	-6.102e+03i	+ 2.227e-02i	6.537e-01
8E-01	-5.541e+03i	+ 3.760e-02i	4.758e-01
6E-01	-4.418e+03i	+ 9.066e-02i	2.922e-01
4E-01	-3.257e+03i	+ 1.900e-01i	1.780e-01
2E-01	-1.986e+03i	+ 4.154e-01i	8.848e-02
8E-03	-1.322e+02i	+ 7.202e+00i	4.306e-03
4E-03	-6.638e+01i	+ 1.434e+01i	2.181e-03

En la Fig. 4.24 se presenta la dependencia con la masa (V_M), de la máxima diferencia de $k_0(r)$ con respecto a la solución Newtoniana $\Delta k_{0,m\acute{a}x}$, tanto para la soluciones en relatividad general y en el escenario de seguridad asintótica.

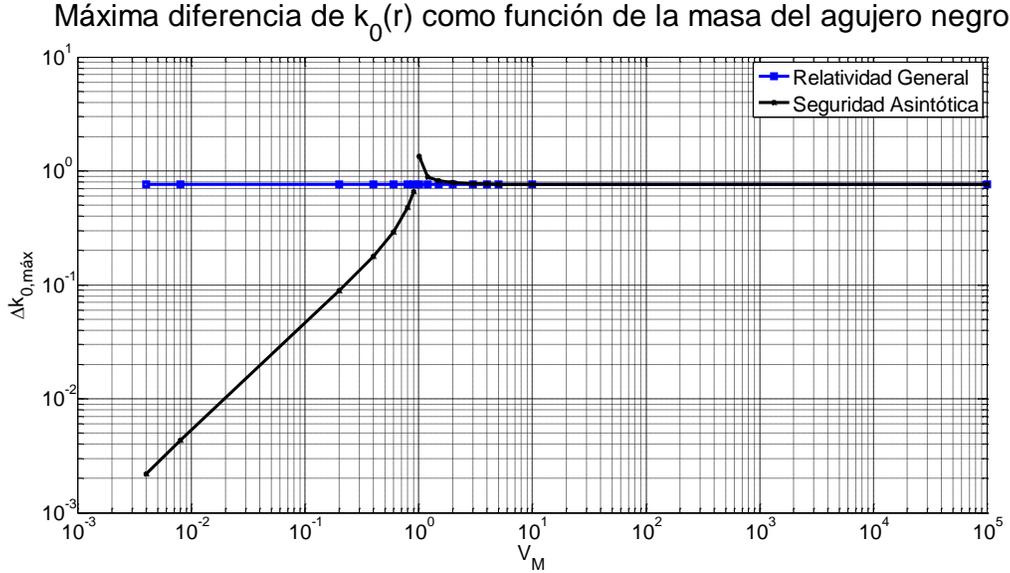


Fig. 4.24. Máxima diferencia de $k_0(r)$ en Relatividad General y en Seguridad Asintótica, variando la masa del agujero negro, con $u_0(r_1) = -0.001$ y $k = 2.5$.

De las Fig. 4.23 y 4.24 se concluye que las soluciones en los marcos clásico y cuántico se aproximan entre sí a medida que la masa del agujero negro es mucho mayor que la masa crítica $M \gg M_{cr}$, equivalentemente, cuando la coordenada radial es muy grande. Esto se explica analizando la expresión de la constante de Newton (2.111) a grandes distancias, que está dada por (2.112)

$$G(r) = G_0 - \tilde{\omega} \frac{G_0^2}{r^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

Por lo tanto para $M \gg M_{cr}$ el espacio-tiempo clásico y cuántico son aproximadamente el mismo.

Además de la Fig. 4.23, a medida que la masa del agujero negro disminuye, en relatividad general, el tiempo de amortiguamiento siempre disminuye. Esto se explica analizando los invariantes de curvatura (2.3), (2.4) y (2.5) con la función $f(r)$ clásica

$$R = 0 \quad (4.45)$$

$$R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48M^2}{r^6} \quad (4.46)$$

$$C^{\mu\nu\rho\sigma} C_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{M^2}{r^6} \quad (4.47)$$

Si la coordenada radial disminuye (o V_M disminuye), entonces la curvatura del espacio-tiempo de Schwarzschild aumenta y por ende el acople con el fluido y el efecto disipador aumentan, mejorando la estabilidad.

Sin embargo, esta tendencia no siempre se cumple en el escenario de seguridad asintótica. Cuando la masa del agujero negro se aproxima a la masa crítica $M \gtrsim M_{cr}$, el horizonte de eventos exterior r_+ es cada vez menor que el radio de Schwarzschild y de (4.46) y (4.47) se obtiene una curvatura cada vez mayor para el caso cuántico y por lo tanto se mejora la estabilidad

$$5\tau_q < 5\tau_{class}$$

$$\Delta k_{0,m\acute{a}x}^{(q)} > \Delta k_{0,m\acute{a}x}^{(class)}$$

Pero, cuando $M < M_{cr}$ (pequeñas distancias) el espacio-tiempo de Schwarzschild mejorado se aproxima al de de Sitter (2.121)

$$f(r) = 1 - 2(\gamma\tilde{\omega})^{-1}r^2 + \mathcal{O}(r^3) \quad (4.48)$$

Anteriormente en (2.123), (2.124) y (2.125) se habían calculado los invariantes de curvatura con la función $f(r)$ (4.48)

$$R = 12c \quad (4.49)$$

$$R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma} = 24c^2 \quad (4.50)$$

$$C^{\mu\nu\rho\sigma}C_{\mu\nu\rho\sigma} = 0 \quad (4.51)$$

donde $c = 2(\gamma\tilde{\omega})^{-1}$ es una constante. Entonces la curvatura del espacio-tiempo de de Sitter es menor, y por lo tanto la estabilidad del fluido disminuye

$$5\tau_q > 5\tau_{class}$$

$$\Delta k_{0,m\acute{a}x}^{(q)} < \Delta k_{0,m\acute{a}x}^{(class)}$$

Dependencia con la Forma de la Amplitud de la Perturbación Estacionaria

Ahora el objetivo es encontrar la dependencia de las soluciones con respecto a variaciones en la forma de la amplitud (3.53) de la perturbación estacionaria $\xi(r)e^{-i\omega t}$ con el parámetro de escala fijo, $\lambda = 1$,

$$\xi(r) = k(r - r_1)^{k-1}e^{-(r-r_1)^k} \quad (4.52)$$

donde k es un parámetro de forma. Es importante recordar que la distribución (4.52) se eligió para garantizar que se cumplan las condiciones de frontera $\xi(r_1) = \xi(r_N) = 0$. En esta parte se dejan fijas la masa del agujero negro y la velocidad radial del fluido en el horizonte de eventos

$$\begin{aligned} V_M &= 1.001 \\ u_0(r_1) &= -0.001 \end{aligned}$$

En la Fig. 25 se muestra la amplitud de la perturbación (4.52) para varios valores del parámetro de forma k . Para valores grandes de k , la perturbación tiene mayor relevancia lejos del horizonte de eventos y a medida que k disminuye, la física cerca del horizonte de eventos se vuelve más

importante. Cabe aclarar que todas las amplitudes $\xi(r)$ están normalizadas a un valor mínimo de aproximadamente -1.6184×10^{-1} , esto con el fin de que las soluciones únicamente dependan de la forma dada por k .

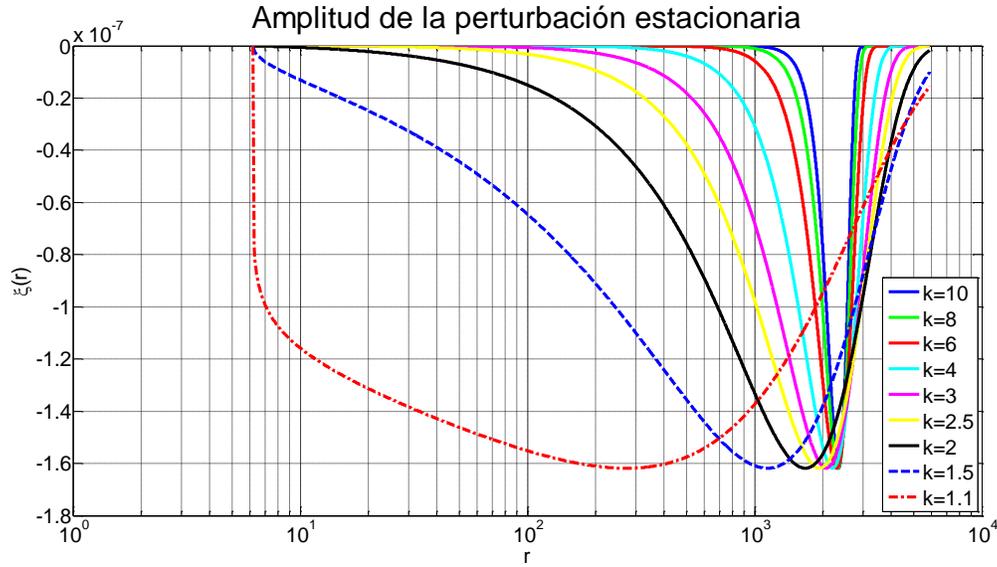


Fig. 4.25. Amplitud de la perturbación estacionaria $\xi(r)$ para varios valores del parámetro de forma k .

En las tablas 4.5 y 4.6 se presentan las dos soluciones de la ecuación residual cuadrática (4.19) para la frecuencia ω y el tiempo de amortiguamiento de la perturbación 5τ ; en relatividad general y en el escenario de seguridad asintótica, respectivamente. Además, en la Fig. 4.26 se presenta la gráfica del tiempo de amortiguamiento como función del parámetro de forma k .

Tabla 4.5. Solución de onda estacionaria en Relatividad General, variando la forma de la perturbación estacionaria, con $V_M = 1.001$ y $u_0(r_1) = -0.001$.

k	Solución Onda Estacionaria en Relatividad General		
	$\omega_{1,class}$	$\omega_{2,class}$	$5\tau_{class}$
10,0	1.627e-03 -3.081e-13i	-1.627e-03 -3.081e-13i	1.623e+13
8,0	1.303e-03 -3.508e-13i	-1.303e-03 -3.508e-13i	1.425e+13
6,0	9.991e-04 -4.759e-13i	-9.991e-04 -4.759e-13i	1.051e+13
4,0	7.694e-04 -1.731e-12i	-7.694e-04 -1.731e-12i	2.888e+12
3,0	8.393e-04 -7.828e-11i	-8.393e-04 -7.828e-11i	6.387e+10
2,5	1.273e-03 -3.283e-09i	-1.273e-03 -3.283e-09i	1.523e+09
2,0	3.412e-03 -2.297e-07i	-3.412e-03 -2.297e-07i	2.177e+07
1,5	1.006e-02 -1.125e-05i	-1.006e-02 -1.125e-05i	4.446e+05
1,1	1.721e-02 -8.619e-05i	-1.721e-02 -8.619e-05i	5.801e+04

Tabla 4.6. Solución de onda estacionaria en Seguridad Asintótica, variando la forma de la perturbación estacionaria, con $V_M = 1.001$ y $u_0(r_1) = -0.001$.

k	Solución Onda Estacionaria en Seguridad Asintótica		
	$\omega_{1,q}$	$\omega_{2,q}$	$5\tau_q$
10,0	2.470e-03 -2.507e-11i	-2.470e-03 -2.507e-11i	1.995e+11
8,0	1.979e-03 -2.854e-11i	-1.979e-03 -2.854e-11i	1.752e+11
6,0	1.516e-03 -3.869e-11i	-1.516e-03 -3.869e-11i	1.292e+11
4,0	1.167e-03 -1.396e-10i	-1.167e-03 -1.396e-10i	3.583e+10
3,0	1.264e-03 -5.316e-09i	-1.264e-03 -5.316e-09i	9.406e+08
2,5	1.845e-03 -1.809e-07i	-1.845e-03 -1.809e-07i	2.764e+07
2,0	4.283e-03 -9.873e-06i	-4.283e-03 -9.873e-06i	5.064e+05
1,5	9.774e-03 -3.547e-04i	-9.774e-03 -3.547e-04i	1.410e+04
1,1	6.920e-03 -2.007e-03i	-6.920e-03 -2.007e-03i	2.492e+03

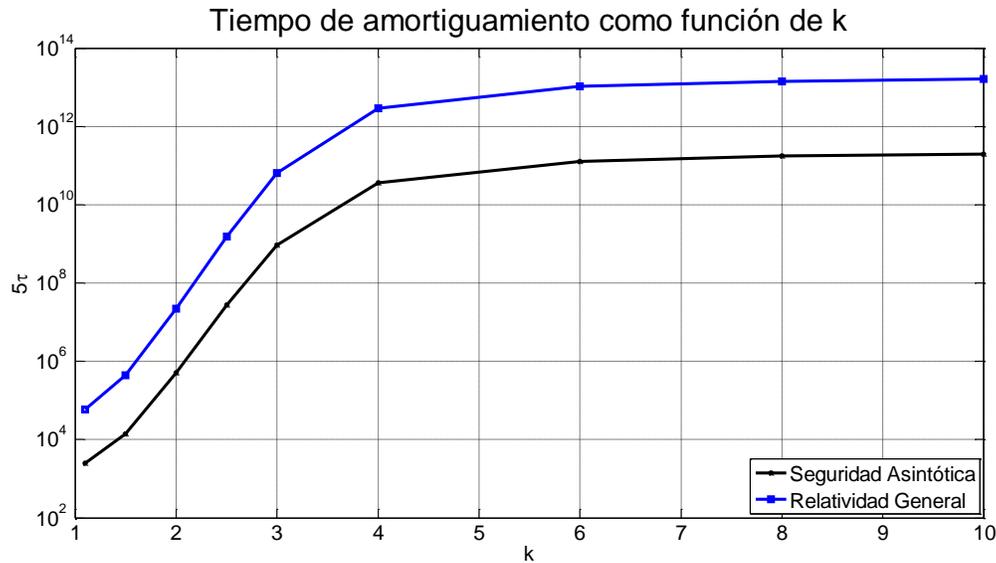


Fig. 4.26. Tiempo de amortiguamiento en Relatividad General y en Seguridad Asintótica, variando la forma de la perturbación estacionaria, con $V_M = 1.001$ y $u_0(r_1) = -0.001$.

Tanto en el caso clásico y el cuántico, la parte imaginaria de ambas soluciones es negativa, entonces la solución propuesta es estable para todos los valores considerados del parámetro de forma k .

Pero, las soluciones en relatividad general y en seguridad asintótica mostradas en la Fig. 4.26 permiten concluir en ambos casos que el tiempo de amortiguamiento de la perturbación estacionaria es menor a medida que k disminuye. Esto se explica de acuerdo al argumento siguiente.

En la Fig. 4.25 se observa que a medida que disminuye el parámetro de forma k , la amplitud de la perturbación estacionaria tiene mayor relevancia cada vez más cerca del horizonte de eventos, donde los invariantes de curvatura (4.46) y (4.47) son más grandes con respecto a su valor en $r \rightarrow \infty$. Por lo tanto se espera que, para k pequeños, el acople entre el fluido y la curvatura del espacio-tiempo sea mayor, haciendo que la solución sea más estable.

Dependencia con la Velocidad Radial del Fluido

Finalmente, el objetivo es encontrar la dependencia de las soluciones con respecto a variaciones en la condición de frontera para la velocidad radial del fluido en el horizonte de eventos $u_0(r_1)$. En esta parte se dejan fijas la masa del agujero negro $V_M = 1.001$ y el parámetro de forma $k = 2.5$.

En las tablas 4.7 y 4.8 se presentan las dos soluciones de la ecuación residual cuadrática (4.19) para la frecuencia ω y el tiempo de amortiguamiento de la perturbación 5τ ; en relatividad general y en el escenario de seguridad asintótica, respectivamente. Además, en la Fig. 4.27 se presenta la gráfica del tiempo de amortiguamiento como función de la velocidad radial del fluido.

Tabla 4.7. Solución de onda estacionaria en Relatividad General, variando la velocidad radial del fluido en el horizonte de eventos, con $V_M = 1.001$ y $k = 2.5$.

$u_0(r_1)$	Solución Onda Estacionaria en Relatividad General		
	$\omega_{1,class}$	$\omega_{2,class}$	$5\tau_{class}$
0,000001	1.273e-03 -3.284e-12i	-1.273e-03 -3.284e-12i	1.523e+12
0,000005	1.273e-03 -1.642e-11i	-1.273e-03 -1.642e-11i	3.045e+11
0,000010	1.273e-03 -3.284e-11i	-1.273e-03 -3.284e-11i	1.523e+11
0,000050	1.273e-03 -1.642e-10i	-1.273e-03 -1.642e-10i	3.045e+10
0,000100	1.273e-03 -3.284e-10i	-1.273e-03 -3.284e-10i	1.523e+10
0,000500	1.273e-03 -1.642e-09i	-1.273e-03 -1.642e-09i	3.045e+09
0,001000	1.273e-03 -3.283e-09i	-1.273e-03 -3.283e-09i	1.523e+09

Tabla 4.8. Solución de onda estacionaria en Seguridad Asintótica, variando la velocidad radial del fluido en el horizonte de eventos, con $V_M = 1.001$ y $k = 2.5$.

$u_0(r_1)$	Solución Onda Estacionaria en Seguridad Asintótica		
	$\omega_{1,q}$	$\omega_{2,q}$	$5\tau_q$
0,000001	1.847e-03 -1.792e-10i	-1.847e-03 -1.792e-10i	2.790e+10
0,000005	1.847e-03 -8.961e-10i	-1.847e-03 -8.961e-10i	5.580e+09
0,000010	1.847e-03 -1.792e-09i	-1.847e-03 -1.792e-09i	2.790e+09
0,000050	1.847e-03 -8.961e-09i	-1.847e-03 -8.961e-09i	5.580e+08
0,000100	1.847e-03 -1.792e-08i	-1.847e-03 -1.792e-08i	2.790e+08
0,000500	1.847e-03 -8.981e-08i	-1.847e-03 -8.981e-08i	5.567e+07
0,001000	1.845e-03 -1.809e-07i	-1.845e-03 -1.809e-07i	2.764e+07

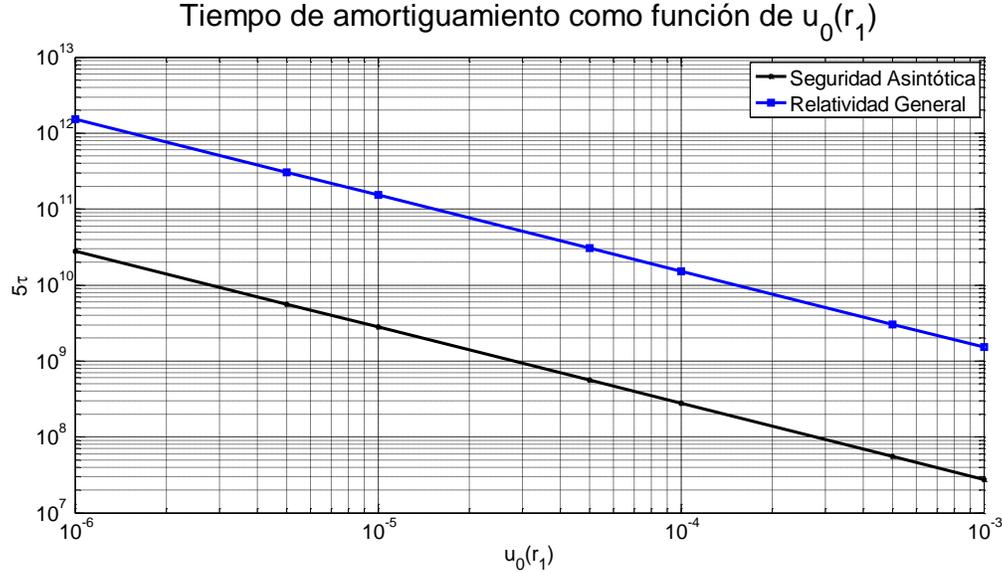


Fig. 4.27. Tiempo de amortiguamiento en Relatividad General y en Seguridad Asintótica, variando la velocidad radial del fluido en el horizonte de eventos, con $V_M = 1.001$ y $k = 2.5$.

Nuevamente, tanto en el caso clásico y el cuántico, la parte imaginaria de ambas soluciones es negativa. Entonces la solución propuesta $\xi(r)e^{-i\omega t}$ es estable para todos los valores considerados de la velocidad radial del fluido en el horizonte de eventos $u_0(r_1)$.

Como se observa en la Fig. 4.27, el tiempo de amortiguamiento es menor a medida que aumenta la la velocidad en el horizonte de eventos $u_0(r_1)$. Lo cual concuerda con lo esperado, ya que si $u_0(r_1)$ aumenta, esto implica que el tensor momento-energía (3.3) para el fluido perfecto ($T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu + pg^{\mu\nu}$) crece y por lo tanto la disipación efectiva en el fluido es mayor, logrando consiguientemente una mayor estabilidad.

4.4 Interpretación de los Efectos Cuánticos

Para que el escenario de seguridad asintótica sea una teoría viable más allá de una teoría de campos efectiva, se deben cumplir las siguientes condiciones:

1. Hipótesis de “anti-apantallamiento” de la interacción de los grados de libertad en el ultravioleta.
2. Disminución efectiva de los grados de libertad relevantes en el ultravioleta, que se interpreta como universalidad, en el sentido de la física estadística, en la vecindad del PFUNT (Punto Fijo Ultravioleta No Trivial).

En este escenario, el campo gravitacional es tomado como el primer portador de los grados de libertad clásicos y cuánticos relevantes. Y las macro- y micro-física están relacionadas a través de un flujo de renormalización.

3. La geometría microscópica es de tipo fractal con una dimensión local de dos.

Cuando se adopta la visión de renormalización de Kadanoff-Wilson en gravedad, significa que la acción de Einstein-Hilbert no debería ser considerada como la acción microscópica (altas energías).

En lugar de eso, el flujo de renormalización definirá cuál acción microscópica se debe utilizar, y si resulta ser una descripción útil en el ultravioleta en términos de grados de libertad fundamentales.

El efecto de los procesos a altas energías se puede propagar computacionalmente a través de varios órdenes de magnitud, hasta energías accesibles, en este contexto, la naturaleza de los grados de libertad fundamentales tienen una importancia secundaria. Lo que verdaderamente importa es la universalidad y no la escogencia de las variables dinámicas.

Entonces aclarado esto, con el fin de dar una interpretación cuántica a los resultados, es importante analizar dos tratamientos perturbativos de Gravedad Cuántica:

- i. Teorías con derivadas de orden superior que utilizan un propagador de la forma $1/p^4$, son estrictamente renormalizables, y los acoples son seguros asintóticamente. Sin embargo, están presentes modos de propagación sin sentido físico.
- ii. Teorías con derivadas de orden superior que utilizan un propagador de la forma $1/p^2$, tienen la ventaja de que los modos de propagación tienen sentido físico. Pero se necesitan infinitos acoples esenciales, y un conjunto de estos no son seguros asintóticamente.

En el escenario de seguridad asintótica, ambas descripciones están relacionadas mediante una reducción de los infinitos acoples en la formulación $1/p^2$, a través de dependencias ocultas, tal que un conjunto no redundante corresponda a los acoples finitos en la formulación $1/p^4$. Esto hace que se presenten las siguientes características cualitativas:

1. Anti-apantallamiento.

Mecanismo responsable del adecuado comportamiento en el ultravioleta, que permite tener un límite continuo, en la formulación de las integrales funcionales gravitacionales. Esto se opone a lo esperado por la dimensión de masa de la constante de Newton $[G_0] = M^{-2}$.

Debido a que es improbable que un estado de vacío preferencial exista en gravedad cuántica, se tiene la ventaja de seleccionar apropiadamente la clase de estados (términos de frontera en la acción microscópica). Actualmente no se tiene claridad sobre la relación de la clase de estados, las geometrías dominantes y las propiedades en el ultravioleta. Sin embargo, es claro que la anterior ambigüedad facilita la construcción del límite continuo.

2. Reducción dimensional de las interacciones en el UV.

Como se mencionó en la sección 2.3, si el flujo tiene un punto UV no trivial $\infty > g^* > 0$, la única forma de que el lado derecho de (2.93) se anule, se da cuando la dimensión anómala es $\eta_N = -2$, sin importar el comportamiento detallado de los otros acoples (siempre y cuando no ocurran divergencias). Esta es una dimensión anómala enorme.

Para el propagador, la propiedad clave de la dimensión anómala es que a gran energía (momentum), da lugar a un comportamiento de la forma $(p^2)^{-1+\eta_N/2}$. Entonces un propagador de la forma $1/p^4$ va de la mano con un punto fijo no gaussiano.

La universalidad del PFUNT justifica que se atribuyan las modificaciones en el comportamiento a pequeñas distancias de los campos, con una modificación de la geometría aleatoria subyacente. La gravedad actúa como un regulador a pequeñas distancias.

3. La dimensión reducida de dos, se interpreta como una “dimensión de interacción” que especifica aproximadamente el número de grados de libertad independientes que interactúan con uno elegido aleatoriamente.

Queda pendiente tener un entendimiento más detallado de la microestructura de las geometrías aleatorias que ocurren en la integral funcional segura asintóticamente.

Actualmente, todavía no existe un entendimiento matemático o físico del por qué existe el punto fijo UV no trivial, que permite que el escenario de seguridad asintótica sea renormalizable de forma no perturbativa. Nink y Reuter [49] fueron los primeros en estudiar de forma intuitiva las características de la acción funcional truncada, al plantear que el anti-apantallamiento se entiende como el predominio de “efectos paramagnéticos”, codificados en los términos de curvatura, sobre “efectos diamagnéticos” del Laplaciano.

La idea clave es considerar la analogía con sistemas físicos, donde las fluctuaciones cuánticas φ están gobernadas por el inverso de propagadores de la forma:

$$-\nabla_{\mathcal{A}}^2 + U(F_{\mathcal{A}}) \quad (4.53)$$

con $\nabla_{\mathcal{A}}$ la derivada covariante con respecto a la conexión \mathcal{A} , y U un potencial que depende de su curvatura $F_{\mathcal{A}}$. Considerando el Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \varphi (-\nabla_{\mathcal{A}}^2 + U(F_{\mathcal{A}})) \varphi \quad (4.54)$$

El primer y segundo término de (4.54) dan lugar a interacciones de φ con el fondo (\mathcal{A}), que son de tipo diamagnético y paramagnético, respectivamente.

Por ejemplo, los electrones no relativistas en un campo magnético externo, se describen por el Hamiltoniano de Pauli

$$H_P = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 - \mu_B \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (4.55)$$

El primer término de (4.55) da lugar al diamagnetismo de Landau de un gas de electrones libres, que se debe al movimiento orbital de los electrones. Mientras que el segundo término es el origen del paramagnetismo de Pauli (“curvatura” \mathbf{B} y “conexión” \mathbf{A}), que se debe al alineamiento de los espines. La relación de las susceptibilidades magnéticas de estos dos efectos, es:

$$\chi_{Landau-dia} = -\frac{1}{3} \chi_{Pauli-para} \quad (4.56)$$

De tal forma que la componente paramagnética gana:

$$\chi_{mag} \equiv \chi_{Landau-dia} + \chi_{Pauli-para} > 0 \quad (4.56)$$

Dominio Paramagnético en el Escenario de Seguridad Asintótica

Recordando de (2.37), la métrica dinámica $g_{\alpha\beta}$ se separó en una métrica fija pero arbitraria $\bar{g}_{\alpha\beta}$ y una métrica fluctuante $f_{\alpha\beta}$. Su valor esperado es $\langle g_{\alpha\beta} \rangle = \bar{g}_{\alpha\beta} + \bar{f}_{\alpha\beta}$ con $\bar{f}_{\alpha\beta} = \langle f_{\alpha\beta} \rangle$. La acción efectiva promedio (2.46) es $\Gamma_k[\bar{f}_{\alpha\beta}; \bar{g}_{\alpha\beta}]$, o equivalentemente (2.47) es $\Gamma_k[\langle g_{\alpha\beta} \rangle; \bar{g}_{\alpha\beta}]$, entonces depende de dos argumentos independientes.

Después de expandir Γ_k en términos de $\bar{f}_{\alpha\beta}$ se encuentran términos de interacción de la métrica fluctuante con métrica de fondo $\bar{g}_{\alpha\beta}$. Haciendo una analogía magnética, la geometría de fondo representa el “campo magnético externo” que polariza el vacío cuántico de “partículas $f_{\alpha\beta}$ ”, y da lugar a una susceptibilidad.

En el esquema de truncación de Hilbert-Einstein, la acción que describe la dependencia con la escala es (2.85)

$$\Gamma_k[g, \bar{g}] \equiv (16\pi G(k))^{-1} \int d^4x \sqrt{g} [-R(g) + 2\bar{\lambda}(k)] + \frac{Z_{Nk}}{2\alpha} \int dx \sqrt{\bar{g}} \bar{g}^{\alpha\beta} Q_\alpha Q_\beta \quad (4.57)$$

La EGRF (2.84) se descompone en una traza para gravitones y otra para fantasmas:

$$k\partial_k \Gamma_k[g, \bar{g}] = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[(\kappa^{-2} \Gamma_k^{(2)}[g, \bar{g}] + \mathcal{R}_k[\bar{g}])^{-1} k\partial_k \mathcal{R}_k[\bar{g}] \right] - \text{Tr} \left[(-\mathcal{M}[g, \bar{g}] + \mathcal{R}_k^{gh}[\bar{g}])^{-1} k\partial_k \mathcal{R}_k^{gh}[\bar{g}] \right] \quad (4.58)$$

Después de determinar el Hessiano $\kappa^{-2} \Gamma_k^{(2)}[g, \bar{g}]$ se establece $\langle g_{\alpha\beta} \rangle = \bar{g}_{\alpha\beta}$. De esta forma se obtiene el operador [15]

$$(\kappa^{-2} \Gamma_k^{(2)}[g, \bar{g}])^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} \Big|_{\langle g_{\alpha\beta} \rangle = \bar{g}_{\alpha\beta}} = \frac{1}{32\pi G(k)} (-\bar{K}^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} \bar{\nabla}^2 + \bar{U}^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}) \quad (4.59)$$

Con:

$$\bar{K}^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} = \frac{1}{4} [\delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu + \delta_\sigma^\mu \delta_\rho^\nu - \bar{g}^{\mu\nu} \bar{g}_{\rho\sigma}] \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned} \bar{U}^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} = & \frac{1}{4} [\delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu + \delta_\sigma^\mu \delta_\rho^\nu - \bar{g}^{\mu\nu} \bar{g}_{\rho\sigma}] (\bar{R} - 2\bar{\lambda}(k)) + \frac{1}{2} [\bar{g}^{\mu\nu} \bar{R}_{\rho\sigma} + \bar{g}_{\rho\sigma} \bar{R}^{\mu\nu}] \\ & - \frac{1}{4} [\delta_\rho^\mu \bar{R}^\nu{}_\sigma + \delta_\sigma^\mu \bar{R}^\nu{}_\rho + \delta_\rho^\nu \bar{R}^\mu{}_\sigma + \delta_\sigma^\nu \bar{R}^\mu{}_\rho] - \frac{1}{2} [\bar{R}^\nu{}_\rho{}^\mu{}_\sigma + \bar{R}^\nu{}_\sigma{}^\mu{}_\rho] \end{aligned} \quad (4.61)$$

El primer término de (4.59) da lugar a interacciones diamagnéticas, mientras que el segundo induce efectos paramagnéticos.

La evaluación de las trazas de (4.58) se realizó en [15], donde se obtiene la ecuación de flujo para constante de Newton adimensional (2.93), en general para d dimensiones:

$$\frac{dg(t)}{dt} = [d - 2 + \eta_N]g(t) = \beta(g(t)) \quad (4.62)$$

En general, la dimensión anómala (2.94), es:

$$\eta_N(g) = \frac{B_1 g}{1 - B_2 g} \quad (4.63)$$

El numerador es de vital importancia, ya que determina el signo de la dimensión anómala, mientras que el denominador $1 - B_2 g$ únicamente tiene un rol de término de corrección. Con la constante cosmológica $\lambda = 0$, la expansión de (4.63) reteniendo términos lineales en g , es:

$$\eta_N(g) = \frac{(4\pi)^{1-d/2}}{3\Gamma(d/2)} [\{d(d-3)\}_{total\ dia} - \{12(d-1) + 48/d\}_{total\ para}]g + \mathcal{O}(g^2) \quad (4.64)$$

Donde se han combinado las contribuciones de los términos por gravitones y fantasmas, que inducen los efectos diamagnéticos y paramagnéticos, respectivamente. En la Fig. 4.28 se presenta el tamaño relativo de las contribuciones “magnéticas”, donde $f = g(4\pi)^{1-d/2}/3\Gamma(d/2)$.

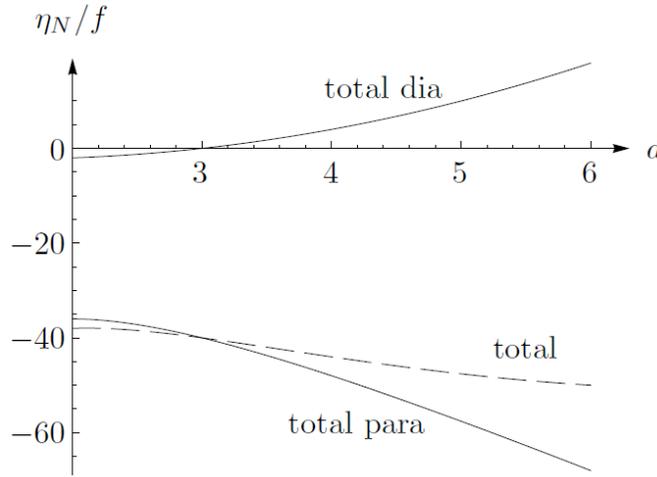


Fig. 4.28. Combinación gravitón-día y fantasma-día y combinación gravitón-para y fantasma-para [49].

Según se observa en la Fig. 4.28, el término paramagnético total predomina sobre el diamagnético, lo que da lugar a que la dimensión anómala $\eta_N = \eta_N^{total\ dia} + \eta_N^{total\ para}$ sea negativa.

De la definición de la dimensión anómala $\eta_N \equiv k \partial_k \ln G(k)$, como $\eta_N < 0$, entonces $G(k)$ aumenta a medida que la escala k disminuye. Esta es la condición de *anti-apantallamiento* que se debe cumplir para que el escenario de seguridad asintótica sea una teoría viable más allá de una teoría de campos efectiva.

Además, el dominio de los efectos paramagnéticos sobre los diamagnéticos, permite encontrar un punto fijo no gaussiano, que es una de las características principales del escenario de seguridad asintótica. Según (4.62), la ocurrencia de un punto fijo UV no trivial ($g_*^{UV} \neq 0$) requiere que $\eta_N(g_*^{UV}) = 2 - d$. Por lo tanto, para una dimensión $d > 2$, la única forma posible es que la dimensión anómala sea negativa.

Capítulo 5

Conclusiones

El uso de las herramientas del grupo de renormalización en el escenario de seguridad asintótica, hace posible estudiar sistemáticamente la influencia de los efectos cuánticos gravitacionales sobre los conocidos problemas que tiene la teoría de la relatividad general, en particular, sobre los problemas asociados a sus singularidades. La física de agujeros negros ofrece una base importante para evaluar los resultados teóricos de cualquier teoría de gravedad cuántica y, posiblemente, para contrastar sus predicciones.

En el escenario de seguridad asintótica, la estructura del agujero negro de Schwarzschild cambia al considerar las correcciones de gravedad cuántica; por lo tanto, este espacio-tiempo mejorado afecta la descripción de la física del agujero negro, especialmente para masas del orden de la masa crítica. En el método de truncación de Einstein-Hilbert, a pesar de que no se puede concluir exactamente que la singularidad en $r = 0$ desaparece, si es posible argumentar que ésta es mucho más débil que su contraparte clásica.

En el presente trabajo, se investigaron los efectos de gravedad cuántica sobre la estabilidad de acreción estacionaria y radialmente simétrica de un fluido ideal producida por un agujero negro de Schwarzschild estático, en el contexto del escenario de seguridad asintótica. La forma en la que se analizó la estabilidad fue a partir de perturbaciones a la ecuación de continuidad, donde se obtuvieron ecuaciones diferenciales que fueron resueltas numéricamente a partir de un código desarrollado en MatLab, en el cual el principal ingrediente fue el método de diferencias finitas. En primer lugar, se analizó el caso clásico (con Relatividad General) y se encontró que la amplitud de la onda estacionaria decae en el tiempo, por lo tanto la solución es estable, a diferencia del comportamiento Newtoniano, donde la amplitud permanece constante. Además, se concluyó que si se toman en cuenta los efectos relativistas, la amplitud de la onda viajera se reduce, con respecto al caso Newtoniano. Por ende, los resultados obtenidos, para las soluciones en relatividad general, concuerdan con los estudios realizados por Naskar et al. [10] y sus predecesores [8, 9, 50-52] y esto conduce a reforzar la idea de que la mayor estabilidad se logra a partir de un acople del flujo con la geometría del espacio-tiempo que simula el efecto de un mecanismo de disipación en la acreción clásica de Bondi, definida en la construcción Newtoniana.

En segundo lugar, se estudiaron los mismos problemas de estabilidad para el caso cuántico. Como era de esperar, se encontró que las soluciones en relatividad general y en el escenario de seguridad asintótica concuerdan para masas del agujero negro mucho mayores que la masa crítica (en la cual la estructura del espacio-tiempo de Schwarzschild mejorado tiene únicamente un horizonte de eventos), ya que los efectos cuánticos son despreciables para grandes distancias.

Sin embargo a medida que la masa del agujero negro disminuye hasta llegar a la masa crítica, los cálculos cuantitativos llevados a cabo en esta tesis muestran, por primera vez en la literatura a nuestro conocimiento, que en el escenario de seguridad asintótica se logra una mayor estabilidad del flujo (hasta 2 órdenes de magnitud en el tiempo de amortiguamiento) con respecto al caso de relatividad general, tanto para perturbaciones de onda estacionaria y onda viajera. Estos

resultados se explican a partir de la estructura de los horizontes de eventos, ya que la solución mejorada tiene un horizonte exterior el cual es siempre menor que el radio de Schwarzschild; entonces, hasta el horizonte de eventos la curvatura del espacio-tiempo mejorado aumenta, ver ecuación (1.3). Por lo tanto, si se considera válido el argumento de la disipación efectiva (debida al acople entre el espacio-tiempo y el fluido), en el caso cuántico el tiempo de amortiguamiento de la perturbación estacionaria sería menor con respecto al correspondiente valor en el caso clásico, debido a que existe un mayor acople entre el fluido y la curvatura del espacio-tiempo mejorado. Pero, cuando la masa del agujero negro es menor que la masa crítica, la estabilidad del fluido disminuye (el tiempo de amortiguamiento de perturbación aumenta, hasta 4 órdenes de magnitud) en el escenario de seguridad asintótica con respecto a relatividad general, tanto en el análisis de onda estacionaria y de onda viajera. Nuevamente, estos resultados cuantitativos tienen sentido si se considera la estructura del espacio-tiempo, debido a que en este caso la solución mejorada no tiene horizontes de eventos, y se aproxima asintóticamente al espacio-tiempo de de Sitter, entonces su curvatura y el acople entre la geometría y el fluido son menores con respecto al caso clásico.

Adicionalmente, se estudió la dependencia de las soluciones con respecto a variaciones en la condición de frontera para la velocidad radial del fluido en el horizonte de eventos y a variaciones en la forma de la amplitud de la onda estacionaria. Los cálculos numéricos de esta parte conducen a dar un mayor soporte al argumento de que una mayor estabilidad se logra a partir de una mayor disipación efectiva que simula la viscosidad del fluido en la acreción clásica de Bondi, según se propone en [10].

Ahora, construir una teoría de gravedad cuántica que sea segura asintóticamente, sigue siendo uno de los grandes retos de este siglo. El siguiente paso en el estudio de sus implicaciones sobre la estabilidad de la acreción hacia agujeros negros sería considerar las soluciones de Reissner-Nordström, Kerr, Kerr-Newman y Schwarzschild-(anti-)de Sitter, de agujeros negros cosmológicos o las soluciones considerando la backreaction (iniciadas en [8, 53, 54], [55, 56], [57-59], [60-63] y [64-67] respectivamente), con el fin de entender cualitativamente y cuantitativamente los efectos cuánticos sobre la física de agujeros negros, que se originan a partir de tener constantes de acople de varían con la escala de energía. Además, otras posibles aplicaciones en cosmología podrían ser en el universo primordial, ya que el escenario de seguridad asintótica también tiene relevancia en el desarrollo de modelos cosmológicos efectivos y en la posible resolución de singularidades cosmológicas.

Por otra parte, para un trabajo futuro, queda por investigar el extenso espacio de la teoría, al incluir términos de curvatura de orden superior y términos no locales; con el objetivo de encontrar mayor evidencia en favor de la conjetura de seguridad asintótica.

Bibliografía

- [1] M. Niedermaier y M. Reuter. The Asymptotic Safety Scenario in Quantum Gravity. *Living Rev. Rel.* **9**, (2006), 5; R. Percacci, en *Approaches to Quantum Gravity: Towards a New Understanding of Space, Time and Matter*. D. Oriti (Ed.), Cambridge Univ. Press, Cambridge (2009); M. Reuter y F. Saueressig. Quantum Einstein Gravity. *New J. Phys.* **14**, 055022 (2012).
- [2] M. Reuter. Nonperturbative Evolution Equation for Quantum Gravity, *Phys. Rev. D* **57**, 971 (1998).
- [3] S. Hawking. Information Preservation and Weather Forecasting for Black Holes. *DAMTP, University of Cambridge* (2014), 1401.5761.
- [4] J. Polchinski. String Theory to the Rescue. *University of California* (2015), 1512.02477.
- [5] C. Prescod-Weinstein, N. Afshordi y M. Balogh. Stellar Black Holes and the Origin of Cosmic Acceleration. *Phys. Rev. D* **80**, 043513 (2009).
- [6] H. Mosquera y C. Corda. Irreversible gravitational collapse: black stars or black holes? *Hadronic Journal* **34**, 149-159 (2011).
- [7] V. Cardoso, S. Hopper, C. Macedo, C. Palenzuela y P. Pani. Echoes of ECOs: Gravitational-Wave Signatures of Exotic Compact Objects and of Quantum Corrections at the Horizon Scale. *Phys. Rev. D* **94**, 084031 (2016).
- [8] F. C. Michel. Accretion of Matter by Condensed Objects. *Astrophys. Space Sci.* **15**, 153 (1972).
- [9] V. Moncrief. Stability of Stationary, Spherical Accretion Onto a Schwarzschild Black Hole. *Astrophys. J.* **235**, 1038 (1980).
- [10] T. Naskar, N. Chakravarty, J. K. Bhattacharjee, y A. K. Ray. Acoustic Perturbations on Steady Spherical Accretion in Schwarzschild Geometry. *Phys. Rev. D* **76**, 123002 (2007).
- [11] R. Yang. Quantum Gravity Corrections to Accretion Onto a Schwarzschild Black Hole. *Phys. Rev. D* **92**, 084011 (2015).
- [12] C. Rovelli, en *Gravitation and Relativity at the Turn of the Millenium*, Inter-University Centre for Astronomy and Astrophysics, Pune, India (1998); S. Carlip. Quantum Gravity: A Progress Report. *Rept. Prog. Phys.* **64**, 885, (2001); R. P. Woodard. How Far Are We From The Quantum Theory of Gravity? *Rept. Prog. Phys.* **72**, 126002 (2009); C. Kiefer, en *Quantum Gravity*. Oxford University Press, Oxford (2012).

- [13] S. Weinberg, en *General Relativity, an Einstein Centenary Survey*, S.W. Hawking and W. Israel (Eds.), Cambridge Univ. Press (1979).
- [14] A. Codello, R. Percacci y C. Rahmede. Ultraviolet Properties of f(R)-Gravity. *Int. J. Mod. Phys. A* **23**, 143 (2008).
- [15] A. Bonanno y M. Reuter. Renormalization Group Improved Black Hole Spacetimes. *Phys. Rev. D* **62**, 043008 (2000).
- [16] N. Bjerrum-Bohr, J. F. Donoghue, y B. R. Holstein. Quantum Gravitational Corrections to the Nonrelativistic Scattering Potential of Two Masses. *Phys. Rev. D* **67**, 084033 (2003).
- [17] S. Carroll, en *Spacetime and Geometry an Introduction to General Relativity*, Person Education, Inc., San Francisco (2004).
- [18] S. L. Shapiro y S.A. Teukolsky, en *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars*, Wiley, New York (1983).
- [19] K. Falls, en *Asymptotic Safety and Black Holes*, Springer, Brighton (2013).
- [20] J. F. Donoghue. Leading Quantum Correction to the Newtonian Potential. *Phys. Rev. Letters* **72**, 2996-2999 (1994).
- [21] C. Burgess. Quantum Gravity in Everyday Life: General Relativity as an Effective Field Theory. *Living Rev. Rel.* **9**, (2004), 5.
- [22] J. Polchinski, en *String Theory. Cambridge Monographs on Mathematical Physics* (Vol. 1, 2), Cambridge University Press, Cambridge (2005).
- [23] C. Rovelli, en *Quantum Gravity. Cambridge Monographs on Mathematical Physics*. Cambridge University Press, Cambridge (2004).
- [24] J.C. Baez. An Introduction to Spin Foam Models of Quantum Gravity and BF Theory. *Lecture Notes in Physics* **543**, 25-94 (2000).
- [25] J. Ambjorn, A. Goerlich, J. Jurkiewicz y R. Loll. Nonperturbative Lorentzian Path Integral for Gravity. *Phys. Reports* **519(4-5)**, 127-210 (2012).
- [26] M. Niedermaier. The Asymptotic Safety Scenario in Quantum Gravity - An Introduction. *Classical and Quantum Gravity* **24**, R171-R230 (2007).
- [27] K. G. Wilson y J.B. Kogut. The Renormalization Group and the ϵ Expansion. *Phys. Report* **12**, 75-200 (1974).
- [28] K. G. Wilson. The Renormalization Group: Critical Phenomena and the Kondo Problem. *Rev. of Modern Phys.* **47(4)**, 773-840 (1975).
- [29] J. Berges, N. Tetradis y C. Wetterich. Non-Perturbative Renormalization Flow in Quantum Field Theory and Statistical Physics. *Phys. Report* **363**, 223-386 (2002).

- [30] V. Mukhanov y S. Winitzki, en *Introduction to Quantum Effects in Gravity*, Cambridge University Press, Cambridge (2007).
- [31] C. Wetterich. Exact evolution equation for the effective potential. *Phys. Letters* **B301**, 90-94 (1993).
- [32] D. F. Litim. Optimization Of The Exact Renormalization Group. *Phys. Letters* **B486**, 92-99 (2000).
- [33] G. Arfken, H. Weber y F. Harris, en *Mathematical Methods for Physicists, A comprehensive Guide* (Seventh Edition), Elsevier Inc., Oxford (2013).
- [34] A. Polyakov, en *Gravitation and Quantization*, Proceedings of the Les Houches Summer School, Les Houches (1992)
- [35] V. P. Frolov, M.A. Markov, V.F. Mukhanov. Black Holes as Possible Sources of Closed and Semiclosed Worlds. *Phys. Rev. D* **41**, 383 (1990).
- [36] I. Dymnikova. Vacuum Nonsingular Black Hole. *Gen. Rel. Grav.* **24**, 235 (1992).
- [37] N. Bilić. Relativistic Acoustic Geometry. *Class. Quantum Grav.* **16**, 3953 (1999).
- [38] M. Peskin y D. Schroeder, en *An Introduction to Quantum Field Theory*, Westview Press, Boulder (1995).
- [39] R. Schützhold y W. Unruh. Gravity Wave Analogs of Black Holes. *Phys. Rev. D* **66**, 044019 (2002).
- [40] S. B. Singha, J. K. Bhattacharjee y A.K. Ray. Hydraulic Jump in One-Dimensional Flow. *Eur. Phys. J. B* **48**, 417 (2005).
- [41] A.K. Ray y J.K. Bhattacharjee . Standing and Travelling Waves in the Shallow-Water Circular Hydraulic Jump. *Phys. Lett. A* **371**, 241 (2007).
- [42] Particle Data Group, *Phys. Lett.* **592** (2004).
- [43] K. S. Thorne, en *Supermassive Black Holes*, Department of Astronomy, The Ohio State University (2012).
- [44] I. D. Novikov y K. S. Thorne, en *Black Holes*, Gordon and Breach, New York (1973).
- [45] S. K. Chakrabarti, en *Theory of Transonic Astrophysical Flows*, World Scientific, Singapur (1990).
- [46] N. Johnson, S. Kotz y N. Balakrishnan, en *Continuous Univariable Distributions*, Vol. 2, 2nd ed. Wiley, New York (1995).
- [47] J. A. Petterson, J. Silk y J. P. Ostriker. Variations on a Spherically Symmetrical Accretion Flow. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **191**, 571 (1980).
- [48] A. K. Ray. Viscosity in Spherically Symmetric Accretion. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **344**, 1085 (2003).

- [49] A. Nink y M. Reuter. On Quantum Gravity, Asymptotic Safety, and Paramagnetic Dominance. *Int. J. Mod. Phys. D* **22** (2013) 1330008.
- [50] H. Bondi. On Spherically Symmetrical Accretion. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **112**, 195 (1952).
- [51] F. Hoyle y R. A. Lyttleton, en *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Cambridge University Press, vol. 35, Cambridge (1939).
- [52] H. Bondi y F. Hoyle. On the Mechanism of Accretion by Stars. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **104**, 273 (1944).
- [53] C. González y B. Koch. Improved Reissner–Nordström–(A)dS Black Hole In Asymptotic Safety. *Int. J. Mod. Phys. A* **31**, 1650141 (2016).
- [54] M. Jamil, M. A. Rashid y A. Qadir. Charged Black Holes in Phantom Cosmology. *Eur. Phys. J. C* **58**, 325 (2008), 0808.1152.
- [55] M. Reuter y E. Tuirán. Quantum Gravity Effects in the Kerr Spacetime. *Phys. Rev. D* **83**, 044041 (2011).
- [56] L. I. Petrich, S. L. Shapiro y S. A. Teukolsky. Accretion Onto A Black Hole: An. Exact Solution. *Phys. Rev. Letters* **60**, 1781 (1988).
- [57] E. Babichev, S. Chernov, V. Dokuchaev, y Y. Eroshenko. Perfect Fluid and Scalar Field in the Reissner-Nordstrom Metric. *Phys. Rev. D* **78**, 104027 (2008), 0807.0449.
- [58] J. A. Jimenez y P. F. Gonzalez. Evolution of a Kerr-Newman Black Hole in a Dark Energy Universe. *Grav. Cosmol.* **14**, 213 (2008).
- [59] J. Bhadra y U. Debnath. Accretion of New Variable Modified Chaplygin Gas and Generalized Cosmic Chaplygin Gas Onto Schwarzschild and Kerr-Newman Black Holes. *Eur. Phys. J. C* **72**, 1912 (2012), 1112.6154.
- [60] P. Mach y E. Malec. Stability of Relativistic Bondi Accretion in Schwarzschild-(anti-)de Sitter Spacetimes. *Phys. Rev. D* **88**, 084055 (2013), 1309.1546.
- [61] P. Mach, E. Malec, y J. Karkowski. Spherical Steady Accretion Flows: Dependence on the Cosmological Constant, Exact Isothermal Solutions, and Applications to Cosmology. *Phys. Rev. D* **88**, 084056 (2013), 1309.1252.
- [62] J. Karkowski y E. Malec. Bondi Accretion Onto Cosmological Black Holes. *Phys. Rev. D* **87**, 044007 (2013), 1211.3618.
- [63] E. Malec. Fluid Accretion Onto a Spherical Black Hole: Relativistic Description Versus the Bondi Model. *Phys. Rev. D* **60**, 104043 (1999).
- [64] J. Karkowski, B. Kinasiwicz, P. Mach, E. Malec y Z. Swierczynski. Universality and Backreaction in a General-Relativistic Accretion of Steady Fluids. *Phys. Rev. D* **73**, 021503 (2006).
- [65] P. Mach y E. Malec. On the Stability of Self-Gravitating Accreting Flows. *Phys. Rev. D* **78**, 124016 (2008), 0812.1762.

- [66] V. I. Dokuchaev y Y. N. Eroshenko. Accretion with Back Reaction. *Phys. Rev. D* **84**, 124022 (2011), 1107.3322.
- [67] E. Babichev, V. Dokuchaev y Y. Eroshenko. Backreaction of Accreting Matter Onto a Black Hole in the Eddington-Finkelstein Coordinates. *Class. Quant. Grav.* **29**, 115002 (2012), 1202.2836.