Boletín de Matemáticas
Volumen VIII, No. 211-310

FUNDAMENTOS DE LA TEORIA DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE COMPLEJA : III

JAIRO CHARRIS C.

CAPITULO IV

FUNCIONES DE UNA VARIABLE COMPLEJA

1. Funciones complejas de una variable compleja.

Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$. Una aplicación $f:\Omega \to \mathbb{C}$ se denomina una función compleja de una variable compleja. Si para todo $z \in \Omega$ definimos

$$Re(f)(z) = Re(f(z))$$

$$Img(f)(z) = Img(f(z))$$

donde $Re(f(z))$ es la parte real de $f(z)$, $Img(f(z))$ la parte imaginaria de $f(z)$, obtenemos dos funciones

$$Re(f) = f_1 : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$Img(f) = f_2 : \Omega \to \mathbb{R}$$

de dos variables reales, y es claro que

$$f = f_1 + i f_2$$

Si $f:\Omega \to \mathbb{C}$, f puede considerarse como una aplicación de Ω en $\mathbb{R}_2$. En tal caso,

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} ,$$

en el sentido de que

$$f(z) = \begin{bmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \end{bmatrix}$$

para todo $z \in \Omega$. Esta identificación proviene del hecho de que $z \in C$ se identifica al elemento

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

de $\mathbb{R}_2$, donde $x = Re(z)$, $y = Img(z)$.

2. *La derivada de Jacobi.*

Sea $f : \Omega \to C$ y supóngase que

$$f = f_1 + i f_2$$

donde f_1 es la parte real de f y f_2 su parte imaginaria. Si

$$\frac{\partial f_i}{\partial x}(a), \quad \frac{\partial f_i}{\partial y}(a), \qquad a \in \Omega$$

existen para $i = 1, 2$, la matriz

$$J_f(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(a) \end{bmatrix}$$

es, como recordamos, *la derivada a priori (de Jacobi) de f en el punto a*. Si $b \in C$, $b = b_1 + i b_2$, $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$,

$$J_f(a)h = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(a) \,, & \frac{\partial f_1}{\partial y}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(a) \,, & \frac{\partial f_2}{\partial y}(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(a)\,h_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y}(a)\,h_2 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(a)\,h_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y}(a)\,h_2 \end{bmatrix}$$

Es decir,

$$J_f(a)\,h = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(a)h_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y}(a)\,h_2\right) + i\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(a)\,h_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y}(a)\,h_2\right) .$$

Esto puede escribirse en la forma

$$J_f(a)\,h = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(a)\,h_1 + i\,\frac{\partial f_2}{\partial x}(a)\,h_1\right) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}(a)\,h_2 + i\,\frac{\partial f_2}{\partial y}(a)\,h_2\right) .$$

Si definimos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(a) + i\,\frac{\partial f_2}{\partial x}(a)\right), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}(a) + i\,\frac{\partial f_2}{\partial y}(a)\right) ;$$

se tiene entonces

$$J_f(a)\,h = \frac{\partial f}{\partial x}(a)\,h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\,h_2 \;,$$

o en forma matricial

$$J_f(a)\,h = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(a) \,, \; \frac{\partial f}{\partial y}(a)\right] \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} ,$$

donde es importante notar que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) \,, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a)$$

son números complejos, los cuales se denominan las *derivadas parciales a priori* (de Jacobi) *de* f, *con respecto a* x, y, respectivamente, *en el punto* a. Definamos ahora

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a) = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial f}{\partial x}(a) - i\,\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right\}\ ;\ \frac{\partial f}{\partial \bar z}(a) = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial f}{\partial x}(a) + i\,\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right\}.$$

Los números complejos $\frac{\partial f}{\partial z}(a)$, $\frac{\partial f}{\partial \bar z}(a)$ se denominan, respectivamente, las *derivadas a priori (de Jacobi) de* f *con respecto a* z *y a* $\bar z$ *en el punto* a. Evidentemente

$$J_f(a)\,b = \frac{\partial f}{\partial z}(a)\,b + \frac{\partial f}{\partial \bar z}(a)\,b$$

Además :

Teorema 2.1. *Sea* $f:\Omega \to C$ *y supongamos que*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x}(a),\ \frac{\partial f_i}{\partial y}(a) \quad , \quad i = 1, 2$$

existen en el punto $a \in \Omega$. *Sea*

$$L_a : \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}_2$$

la aplicación $\mathbb{R}$*-lineal definida por* $L_a(b) = J_f(a)\,b$. *Para que* L_a *sea una aplicación* $\mathbb{C}$*-lineal de* $\mathbb{C}$ *en* $\mathbb{C}$ *es necesario y suficiente que*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z}(a) = 0 .$$

En tal caso, $L_a(b) = \frac{\partial f}{\partial z}(a)\,b$ *para todo* $b \in \mathbb{C}$.

Demostración. Supongamos primero

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z}(a) = 0$$

Para demostrar que $L_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es $\mathbb{C}$ - lineal basta demostrar que existe un número complejo h tal que $L_a(b) = hb$ para todo $b \in \mathbb{C}$. Sea $h = \frac{\partial f}{\partial z}(a)$. Como

$$L_a(b) = J_f(a)\,b = \frac{\partial f}{\partial z}(a)\,b + \frac{\partial f}{\partial \bar z}(a)\,b = \frac{\partial f}{\partial z}(a)\,b\ ,$$

se tiene

$$L_a(h) = bh\,,$$

y la afirmación queda demostrada. Supongamos recíprocamente que L_a es $\mathbb{C}$-lineal. Entonces,

$$L_a(ih) = i\,L_a(h)\,.$$

Si $h = 1$,

$$L_a(h) = \frac{\partial f}{\partial z}(a) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(a)$$

Si $h = i$,

$$L_a(h) = \frac{\partial f}{\partial z}(a)\; i - \frac{\partial f}{\partial z}(a)\, i\,.$$

Como $L_a(i) = i\,L_a(1)$, por ser L_a $\mathbb{C}$-lineal,

$$i\frac{\partial f}{\partial z}(a) + i\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(a) = \frac{\partial f}{\partial z}(a)\,i - \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(a)\;i\,,$$

de lo cual se sigue que $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}(a) = 0$ y que

$$L_a(h) = \frac{\partial f}{\partial z}(a)\;h$$

para todo $h \in \mathbb{C}$. Esto demuestra el teorema.

Denotaremos por $J(\Omega, \mathbb{C})$ al conjunto de las funciones que son Jacobi-derivables en todo punto $a \in \Omega$. Es claro que $J(\Omega, \mathbb{C})$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial para las leyes

$$(f+g)\,(x) = f(x) + g(x)\,, \qquad x \in \Omega$$

$$(\lambda f)\,(x) = \lambda\, f(x) \quad ; \qquad x \in \Omega\;,\;\; \lambda \in \mathbb{C}\,.$$

Si $f \in J(\Omega, \mathbb{C})$, $f = f_1 + i f_2$, $f_1 = Re(f)$, $f_2 = Img(f)$, entonces se tienen funciones

$$\frac{\partial f_i}{\partial x}\;,\;\; \frac{\partial f_i}{\partial y} \;:\; \Omega \to \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x},\; \frac{\partial f}{\partial y},\; \frac{\partial f}{\partial z},\; \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \;:\; \Omega \to \mathbb{C}\;,$$

definidas de la manera obvia.

Nótese también que $J(\Omega, \mathbb{C})$ es un anillo conmutativo unitario si se considera la multiplicación $(fg)(x) = f(x)\, g(x)$. Más aún, $J(\Omega, \mathbb{C})$ es una $\mathbb{C}$-álgebra.

3. La $\mathbb{C}$ - derivada.

Definición 3.1. Una función $f: \Omega \to \mathbb{C}$ se dice $\mathbb{C}$ - derivable en el punto $a \in \Omega$, si el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

donde $h \to 0$ en $\mathbb{C}$, existe y es un número complejo. Tal número se denota por $f'(a)$, y se denomina la *$\mathbb{C}$ - derivada de f en el punto a*.

Por ejemplo, si $f: \Omega \to \mathbb{C}$ está definida por

$$f(z) = bz^n, \qquad b \in \mathbb{C},$$

$f'(a)$ existe en todo punto $a \in \Omega$, y

$$f'(a) = nba^{n-1}.$$

En efecto,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{b}{h} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} h^{k} = bna^{n-1} + bh \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} h^{k-2}$$

de lo cual

$$\lim \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = nba^{n-1},$$

no importa como $h \to 0$ en $\mathbb{C}$. En particular, si $f: \Omega \to \mathbb{C}$ está dada por $f(z) = b$, $b \in \mathbb{C}$, se tiene inmediatamente $f'(a) = 0$ para todo punto $a \in \Omega$. Si $f(z) = bz$, $f'(a) = b$, para todo $a \in \Omega$.

Sea $f: \Omega \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \bar{z}$. Entonces $f'(a)$ no existe en ningún punto $a \in \Omega$. En efecto,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\bar{h}}{h} .$$

Ahora, si $h \to 0$ permaneciendo en $\mathbb{R}$, es decir, si $h \in \mathbb{R}$ y $h \to 0$,

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 1$$

Pero si $h \to 0$ permaneciendo en $I = i\,\mathbb{R}$,

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{I}}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = -1$$

Por lo tanto;

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

no existe cuando $h \to 0$ en $\mathbb{C}$.

Teorema 3.1. *Sea $f: \Omega \to \mathbb{C}$ y supóngase que $f'(a)$ existe en el punto $a \in \Omega$. Sean f_1, f_2 la parte real y la parte imaginaria de f, respectivamente. Entonces*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x}(a), \ \frac{\partial f_i}{\partial y}(a)$$

existen para $i = 1, 2$. Por otra parte, para todo $h \in \mathbb{C}$,

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = 0 \qquad (3.1)$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a) = f'(s) \qquad (3.2)$$

Además, la aplicación $\mathbb{R}$-lineal $L_a : \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}_2$ definida por

$$L_a(h) = J_f(a)\, h$$

es $\mathbb{C}$-lineal de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ y está dada por $L_a(h) = f'(a)\, h$. (3.3)

Demostración. Para ver que $\frac{\partial f_i}{\partial x}(a)$, $\frac{\partial f_i}{\partial y}(a)$ existen para $i = 1, 2$, nótese que si $h \in \mathbb{R}$ y escribimos

$$f(a,h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

entonces

$$\frac{1}{2}\{ f(a,h) + \overline{f(a,h)} \} = \frac{f_1(a+h)-f_1(a)}{h}$$

$$\frac{1}{2i}\{ f(a,h) - \overline{f(a,h)} \} = \frac{f_2(a+h)-f_2(a)}{h},$$

de lo cual

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(a) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in \mathbb{R}}} \frac{f_1(a+h)-f_1(a)}{h} = \frac{1}{2}\{ f'(a) + \overline{f'(a)} \},$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(a) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in \mathbb{R}}} \frac{f_2(a+h)-f_2(a)}{h} = \frac{1}{2i}\{ f'(a) - \overline{f'(a)} \}$$

Por otra parte, si $h = ih'$, $h' \in \mathbb{R}$ y si escribimos

$$f(a, ih') = \frac{f(a+ih')-f(a)}{ih'}$$

entonces

$$\frac{1}{2}\{ f(a, ih') + \overline{f(a, ih')} \} = \frac{f_2(a+ih')-f_2(a)}{h'},$$

$$\frac{i}{2}\{ f(a, ih') - \overline{f(a, ih')} \} = \frac{f_1(a+ih')-f_1(a)}{h'},$$

de lo cual

$$\frac{\partial f_2}{\partial y}(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f_2(a+ih')-f_2(a)}{h'} = \frac{1}{2}\{ f'(a) + \overline{f'(a)} \},$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(a) = \lim_{h'\to 0} \frac{f_1(a+ih')-f_1(a)}{h'} = \frac{i}{2}\{ f'(a) - \overline{f'(a)} \}.$$

Nótese además que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(a) + i\,\frac{\partial f_2}{\partial x}(a) = f'(a) \;,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \frac{\partial f_1}{\partial y}(a) + i\,\frac{\partial f_2}{\partial y}(a) = i f'(a) \;,$$

de lo cual

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(a) - i\,\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right] = f'(a) \;,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(a) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(a) + i\,\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right] = 0 \;.$$

En virtud del teorema 2.1 se sigue finalmente la $\mathbb{C}$ - linealidad de L_a, así como la relación (3.3). Esto completa la demostración.

Nota : En el curso de la demostración del teorema anterior hemos visto que si $f'(a)$ existe,

$$f'(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a) \;, \tag{3.4}$$

$$f'(a) = \frac{1}{i}\,\frac{\partial f}{\partial y}(a) \;. \tag{3.5}$$

Como en el caso de las funciones de una variable real, tenemos :

Teorema 3.2. *Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Si f es $\mathbb{C}$ - derivable en el punto $a \in \Omega$, entonces f es continua en a .*

Demostración . Basta demostrar que

$$\lim_{h \to o} f(a+h) = f(a) \;.$$

Pero

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \;.\; h \;,$$

de lo cual

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a) + \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} h = f(a)+f'(a)\,.\,0 = f(a)\,.$$

Esto demuestra el teorema.

El siguiente teorema se demuestra como en el caso de las funciones de una variable real. Dejamos la demostración al lector.

***Teorema* 3.3.** *Sean $f, g: \Omega \to \mathbb{C}$ y supóngase que $f'(a)$, $g'(a)$ existen en el punto $a \in \Omega$. Entonces $(f+g)'(a)$, $(fg)'(a)$ existen en el punto a, y*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)\,, \tag{3.6}$$

$$(f.g)'(a) = f(a)\,g'(a) + g(a)\,f'(a)\,. \tag{3.7}$$

Supóngase además que $g(a) \neq 0$. Entonces, la función $f/g: \Omega' \to \mathbb{C}$, donde $\Omega' = \{z \mid g(z) \neq 0\}$, es $\mathbb{C}$-derivable en a y

$$(f/g)'(a) = \frac{g(a)\,f'(a) - f(a)\,g'(a)}{g(a)^2} \tag{3.8}$$

Además:

***Teorema* 3.4.** *Sean $f: \Omega \to \mathbb{C}$, $g: \Omega' \to \mathbb{C}$. Supóngase que f es $\mathbb{C}$-derivable en $a \in \Omega$, que $f(\Omega) \subseteq \Omega'$, y que g es $\mathbb{C}$-derivable en $f(a)$. Entonces $g \circ f$ es $\mathbb{C}$-derivable en a y*

$$(g\circ f)'(a) = g'(f(a))\,f'(a) \tag{3.10}$$

***Demostración*.** Nótese en primer lugar que si $u(h) \to 0$ cuando $h \to 0$, dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$|\,g(f(a)+u(h)) - g(f(a)) - u(h)\,g'(f(a))\,| \leq \varepsilon\,|u(h)| \tag{3.11}$$

si $|h| \leq \delta$. En efecto, como

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(f(a)+h')-g(f(a))}{h'} - g'(f(a)) = 0 ,$$

dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta' > 0$ tal que

$$\left| \frac{g(f(a)+h')-g(f(a))}{h'} - g'(f(a)) \right| \leq \varepsilon$$

si $|h'| \leq \delta'$, de lo cual

$$|g(f(a)+h')-g(f(a))-h'\,g'(f(a))| \leq \varepsilon\,|h'| \tag{3.12}$$

si $|h'| \leq \delta'$. Sea entonces $\delta > 0$ tal que $|u(h)| \leq \delta'$ si $|h| \leq \delta$. De (3.12) se obtiene inmediatamente (3.11).

Sea ahora

$$u(h) = f(a+h) - f(a)$$

Entonces,

$$\lim_{h\to 0} u(h) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{h\to 0} \frac{u(h)}{h} = f'(a)$$

Sea además

$$t(h) = g \circ f(a+h) - g \circ f(a) .$$

Se tiene

$$t(h) = g(f(a) + u(h)) - g(f(a)) .$$

Definamos entonces

$$\overline{t}(h) = g(f(a) + u(h)) - g(f(a)) - u(h)\,g'(f(a)) .$$

Se tiene

$$t(h) = \overline{t}(h) + u(h)\,g'(f(a)) .$$

Demostraremos además que

$$\lim \frac{\bar{t}(h)}{h} = 0 .$$

Sea $\varepsilon > 0$, y escójase $\delta > 0$ tal que

$$| g(f(a) + u(h)) - g(f(a)) - u(h)\, g'(f(a)) | \leq \varepsilon \, | u(h) |$$

y que

$$| u(h) | \leq \{ | h | + | f'(a)\, h | \}$$

si $|h| \leq \delta$. Se tiene

$$| \bar{t}(h) | \leq \varepsilon \, (| h | + | f'(a) | \, | h |)$$

y de ésto

$$\left| \frac{\bar{t}(h)}{h} \right| \leq \varepsilon \, (1 + | f'(a) |) .$$

Como ε puede tomarse tan pequeño como se quiera ,

$$\lim_{h \to 0} \frac{\bar{t}(h)}{h} = 0 .$$

Pero

$$\frac{t(h)}{h} = \frac{g \circ f(a+h) - g \circ f(a)}{h} = \frac{\bar{t}(h)}{h} + \frac{u(h)}{h} \, g'(f(a)) .$$

Por lo tanto,

$$(g \circ f)'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{t(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{u(h)}{h} \, g'(f(a)) = f'(a)\, g'(f(a)) .$$

Esto demuestra el teorema.

Corolario. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Supóngase que f es $\mathbb{C}$-derivable en $a \in \Omega$ y sea

$$F(z) = (f(z))^n .$$

Entonces,

$$F'(a) = n(f(a))^{n-1} f'(a). \tag{3.13}$$

Demostración . En efecto, $F = g \circ f$ donde $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es la aplicación

$$g(z) = z^n .$$

Nota. Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$, es $\mathbb{C}$-derivable en a, y si $n \in Z$, entonces

$$F'(a) = n(f(a))^{n-1} f'(a), \tag{3.14}$$

donde $F(z) = (f(z))^n$. Esto resulta inmediatamente del hecho de que $F = g \circ f$, donde $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es la aplicación $g(z) = z^n$, y de que $g'(z) = n z^{n-1}$ como se deduce de la fórmula (3.8) y del hecho de que si $n < 0$ entonces $g(z) = \frac{1}{z^m}$ donde $m = -n \in \mathbb{N}$.

4. Funciones $\mathbb{C}$-derivables y funciones holomorfas .

Definición 4.1. Sea Ω abierto en $\mathbb{C}$. Una aplicación $f : \Omega \to \mathbb{C}$ se dice $\mathbb{C}$-derivable en Ω, o simplemente $\mathbb{C}$-derivable, si $f'(a)$ existe en todo punto $a \in \Omega$. La aplicación $f' : \Omega \to \mathbb{C}$, que al punto $a \in \Omega$ hace corresponder el número complejo $f'(a)$, se denomina entonces la $\mathbb{C}$-derivada de f.

Denotaremos por $\tilde{D}(\Omega, \mathbb{C})$ al conjunto de todas las aplicaciones $\mathbb{C}$-derivables de Ω en $\mathbb{C}$. En virtud del teorema (3.3) y del hecho de que una función constante es $\mathbb{C}$-derivable se sigue que $\tilde{D}(\Omega, \mathbb{C})$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial . Es decir, si $f, g \in \tilde{D}(\Omega, \mathbb{C})$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, $f + g \in \tilde{D}(\Omega, \mathbb{C})$ y $\lambda f \in \tilde{D}(\Omega, \mathbb{C})$. Más aún, en virtud del mismo teorema, $\tilde{D}(\Omega, \mathbb{C})$ es un anillo conmutativo (con elemento unidad la función $\mathbb{1}(z) = 1$ para todo $z \in \Omega$) , pues fg también es $\mathbb{C}$-derivable. Se tiene entonces que $\tilde{D}(\Omega, \mathbb{C})$ es una $\mathbb{C}$-álgebra. Si

$$\tilde{D}^*(\Omega, \mathbb{C}) = \{ f \in \tilde{D}(\Omega, \mathbb{C}) \mid f(z) \neq 0 \text{ , para todo } z \in \Omega \} \text{ ,}$$

$\tilde{D}^*(\Omega, \mathbb{C})$ es un cuerpo conmutativo. Más adelante veremos que si Ω es conexo, $\tilde{D}(\Omega, \mathbb{C})$ es un dominio de integridad.

Nota. Es claro, en virtud del teorema 3.2, que toda función $\mathbb{C}$-derivable es contínua en Ω. Es decir,

$$\tilde{D}(\Omega, \mathbb{C}) \subseteq C(\Omega, \mathbb{C})$$

Más aún,

Teorema 4.1. *Sea $f \in \tilde{D}(\Omega, \mathbb{C})$. Entonces $f \in J(\Omega, \mathbb{C})$. Además*

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a) = f'(a) \quad , \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = 0 \tag{4.2}$$

para todo $a \in \Omega$. También se tienen las relaciones

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = f'(a) \tag{4.3}$$

$$\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(a) = f'(a) \tag{4.4}$$

Demostración. La demostración resulta inmediatamente del teorema 3.1.

Nota. Nótese que si f es $\mathbb{C}$-derivable en Ω

$$J_f(a)h = f'(a)\,h \tag{4.5}$$

para todo $a \in \Omega$ y todo $h \in \mathbb{C}$. La aplicación lineal $L_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $L_a(h) = J_f(a)\,h$ es entonces $\mathbb{C}$-lineal para todo $a \in \Omega$.

Nota. La relación

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \tag{4.6}$$

se denomina la *condición necesaria de* $\mathbb{C}$*- derivabilidad de Cauchy - Riemann* . Si $f \in J(\Omega, \mathbb{C})$ y $\partial f / \partial \bar{z} = 0$, no se tiene necesariamente que $f \in D(\Omega, \mathbb{C})$ (ver ejercicios). Veremos en un próximo teorema que esto es cierto si $f \in \mathbb{C}$ $f \in C^1(\Omega, \mathbb{C})$. La condición

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

es equivalente a la condición

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial y}\right) + i \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x}\right) = 0 .$$

Como $\frac{\partial f_1}{\partial x}$, $\frac{\partial f_2}{\partial y}$, son reales, ésto es equivalente a

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y} \ , \ \frac{\partial f_1}{\partial y} = - \frac{\partial f_2}{\partial x} \quad \text{(Ecuaciones de Cauchy-Riemann)} \tag{4.7}$$

Teorema 4.2. *Sea* $f : \Omega \to \mathbb{C}$, Ω *es conexo. Si* f *es* $\mathbb{C}$*-derivable y* $f'(a) = 0$ *para todo* $z \in \Omega$, f *es constante en* Ω .

Demostración . En efecto, se tiene en Ω :

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

Pero

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 2 \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 2i \frac{\partial f}{\partial y} \ .$$

Se deduce que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + i \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f_1}{\partial y} + i\,\frac{\partial f_2}{\partial y} = 0 \, ,$$

donde $f_1 = Re(f)$, $f_2 = Img(f)$. Se tiene entonces

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0$$

lo cual implica el teorema.

Teorema 4.3. *Sea $f:\Omega \to \mathbb{C}$. Si $f(z) \in \mathbb{R}$ para todo $z \in \Omega$, y si f es $\mathbb{C}$-derivable, f es constante en cada componente conexa de Ω.*

Demostración. En efecto, si $f_1 = Re(f)$ y $f_2 = Img(f)$, $f_2(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$. Como

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y} \, , \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x} \, ,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(z) = 0 = \frac{\partial f_1}{\partial y}(z)$$

para todo $z \in \Omega$. Por lo tanto, f_1 es constante en toda componente conexa de Ω.

Definición 4.2. Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$, $f:\Omega \to \mathbb{C}$. f se dice holomorfa en Ω si cumple las dos condiciones siguientes :

1) $f \in C^1(\Omega, \mathbb{C})$. Esto quiere decir, recordamos, que si $f_1 = Re(f)$, $f_2 = Img(f)$,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial y} : \Omega \to \mathbb{C}$$

existen y son continuas en Ω.

2) $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ (condición de Cauchy-Riemann).

Denotaremos por $\mathcal{O}(\Omega)$ al conjunto de las funciones holomorfas en Ω :

Es claro que $\mathcal{O}(\Omega)$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Más aún, es un anillo y una $\mathbb{C}$-álgebra, y $\mathcal{O}^*(\Omega) = \{ f \in \mathcal{O}(\Omega) \mid f(z) \neq 0$ para toda $z \in \Omega \}$ es un cuerpo.

Denotemos ahora $\tilde{C}^1(\Omega, \mathbb{C})$ al $\mathbb{C}$-subespacio (sub-anillo y sub-álgebra) de $\tilde{D}(\Omega, \mathbb{C})$ formado por las aplicaciones $\mathbb{C}$-derivables sobre Ω tales que la $\mathbb{C}$-derivada $f': \Omega \to \mathbb{C}$ es continua en Ω. Se tiene que

$$\tilde{C}^1(\Omega, \mathbb{C}) \subseteq \mathcal{O}(\Omega) .$$

En efecto, si f' es continua, también lo es $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, pues

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f' .$$

Pero

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + i\,\frac{\partial f_2}{\partial x} , \qquad f_1 = Re(f) , \qquad f_2 = Img(f) .$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} , \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

son ambas continuas. Por otra parte,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = i f'$$

Se deduce que $\partial f / \partial y$ es continua, y de ésto que $\dfrac{\partial f_1}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f_2}{\partial y}$ son ambas continuas. Por lo tanto, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{C})$. Como además

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 ,$$

es claro que $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Recíprocamente , *Teorema 4.4.* (Cauchy-Riemann). *Toda función holomorfa en* Ω *es* $\mathbb{C}$*-derivable con* $\mathbb{C}$*-derivada continua.* Es decir $\mathcal{O}(\Omega) \subseteq \tilde{C}^1(\Omega, \mathbb{C})$, *y por lo tanto*

$$\mathcal{O}(\Omega) = \tilde{C}^1(\Omega, \mathbb{C}).$$

Demostración. Para demostrar que f es $\mathbb{C}$-derivable, demostraremos que

$$f'(a) = \frac{\partial f}{\partial z}(a)$$

para todo $a \in \Omega$. Como obviamente $\frac{\partial f}{\partial z}$ es continua, se tendrá también la continuidad de f'. Pero esto es obvio. En efecto, sabemos que si $f \in C^1(\Omega, \mathbb{C})$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - J_f(a)\,h}{h} = 0$$

(Véase el capítulo I, teorema 1.1).

Por otra parte,

$$J_f(a)\,h = \frac{\partial f}{\partial z}(a)\,h + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a)\,h .$$

Por lo tanto,

$$J_f(a)\,h = \frac{\partial f}{\partial z}(a)\,h ,$$

de lo cual

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\partial f}{\partial z}(a) .$$

Esto demuestra el teorema.

Nota. Nótese que, en particular, $\mathcal{O}(\Omega) \subseteq \tilde{D}(\Omega, \mathbb{C})$. Más adelante demostraremos que $\mathcal{O}(\Omega) = \tilde{D}(\Omega, \mathbb{C})$, pero este resultado, debido a Goursat, está lejos de ser trivial.

Ejercicios

1) Sea $L : \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}_2$ una aplicación $\mathbb{R}$-lineal, y sea $M = \begin{bmatrix} a, b \\ c, d \end{bmatrix}$ su $\mathbb{R}$-ma-

triz. Demuestre que L es $\mathbb{C}$-lineal si, y sólo si, $a = d$ y $b = -c$.

2) Recordamos que una función $f: \Omega \to \mathbb{R}_2$, Ω abierto en $\mathbb{C}$, se dice $\mathbb{R}$-derivable en un punto $a \in \Omega$, si existe una aplicación $\mathbb{R}$-lineal $L_a: \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}_2$ tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L_a(h)}{\|h\|} = 0$$

i) Demuestre que L_a es, entonces, única.

ii) Demuestre que si f es $\mathbb{R}$-derivable en a, entonces f es J-derivable en a y que

$$f'(a) = J_a f$$

donde $f'(a)$ es la $\mathbb{R}$-matriz de L_a.

iii) Demuestre que las proposiciones siguientes son equivalentes :

(a) f es $\mathbb{C}$-derivable en el punto a

(b) L_a es $\mathbb{C}$-lineal

(c) f es $\mathbb{R}$-derivable en a y $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = 0$.

3) Sea $D(\Omega, \mathbb{R}_2)$ el conjunto de todas las aplicaciones $f: \Omega \to \mathbb{R}_2$ que son $\mathbb{R}$-derivables en todo punto $a \in \Omega$ (Ω abierto en $\mathbb{C}$). Demuestre que las proposiciones siguientes son equivalentes :

(a) $f \in \tilde{D}(\Omega, \mathbb{C})$

(b) $f \in D(\Omega, \mathbb{R}_2)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

Nota. El resultado de este ejercicio es curioso. Como veremos en el capítulo VI, la condición (b) implicará, automáticamente, que $f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{C})$. Si en (b) quitamos la condición $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, ésto es absolutamente falso.

4) Sea $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(x,y) = (x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, 0)$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = (0,0)$. Demuestre que f es $\mathbb{R}$-derivable, pero que $f \notin C^1(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

5) ¿Es cierto que $C^1(\Omega, \mathbb{C}) \subseteq D(\Omega, \mathbb{R}_2)$?

6) ¿Es cierto que $\mathcal{O}(\Omega) \subseteq D(\Omega, \mathbb{R}_2)$?

7) Sea $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida de la siguiente manera : si $z = (x, y)$,

$$f(z) = f(x, y) = e^x e^{iy} = e^z$$

donde $e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$. Demuestre :

(a) $f \in \tilde{D}(\Omega, \mathbb{C})$ y $f'(z) = e^z$.

(b) $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

(c) $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$.

(d) La restricción de f a $\mathbb{R}$ es la función exponencial en $\mathbb{R}$.

(e) $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C} - \{0\}$.

8) Sean $f, g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definidas por

$$f(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$$

$$g(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i}$$

Demuestre

(a) $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$

(b) $f'(z) = g(z)$, $g'(z) = -f(z)$.

(c) $(f(z))^2 + (g(z))^2 = 1$.

(d) $f(z+z') = f(z)\, g(z') + f(z')\, g(z)$.

(e) $g(z+z') = g(z)\, g(z') - f(z)\, f(z')$.

Escribiremos :

$$f(z) = \operatorname{sen} z, \quad g(z) = \cos z.$$

9) Sea Ω un abierto conexo de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Demuestre que si $Re(f)$ ó $Img(f)$ es constante, entonces f es constante.

10) Sea $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Demuestre que si Ω es conexo y existen $a, b, c \in \mathbb{C}$, no todos ceros, tales que $a f_1 + b f_2 = c$ en Ω, entonces f es constante en Ω (aquí $f_1 = Re(f)$, $f_2 = Img(f)$).

11) Demuestre que la función $f(z) = |z|$ no puede ser $\mathbb{C}$-diferenciable en ningún punto de $\mathbb{C}$.

12) Para cada $z \in C$ sea $f(z) = arg(z)$ definida por $arg(0) = 0$, $arg(z) =$ único $0 \leq \theta < 2\pi$ tal que $z = |z| e^{i\theta}$, si $z \neq 0$. Demuestre que f es continua en el complemento en $\mathbb{C}$ de $\mathbb{R}_+ = \{x \geq 0\}$, pero que f no es $\mathbb{C}$-diferenciable en ningún punto de $\mathbb{C}$.

13) Encuentre una función $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f \in J(\Omega, \mathbb{C})$, $f \notin D(\Omega, \mathbb{R}_2)$, $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

*14) Una función $f \in C^2(\Omega, \mathbb{C})$ se dice armónica si $\Delta f = 0$, donde

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

(a) Demuestre que si f es armónica $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ es holomorfa.

(b) Sea $f \in C^2(\Omega, \mathbb{C})$. Demuestre que $Re(f)$, $Img(f)$ son armónicas.

(c) Sea $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$, armónica, donde Ω es simplemente conexo. Demuestre que existe entonces $g \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ tal que $h = f + ig \in \mathcal{O}(\Omega)$ (Indicación: demuestre que $\int_\rho \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0$ para todo $\rho \in S_1(\Omega)$, cerrada).

(d) Bajo las hipótesis de (c) demuestre que existe $g \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ tal que $g + if \in \mathcal{O}(\Omega)$.

(e) Bajo las hipótesis de (c) demuestre que si $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ es tal que $f + iu \in \mathcal{O}(\Omega)$ entonces $g-u$ es constante.

(f) Bajo las hipótesis de (c) demuestre que si $v \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ es tal que

$v+if \in \mathcal{O}(\Omega)$ entonces $g-v$ es constante.

(g) Bajo las hipótesis de (c) o (d) demuestre que $v \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ y es armónica (se denomina una conjugada armónica de f).

15) Para cada una de las funciones siguientes, encuentre g tal que $f+ig \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$:

a) $f(x,y) = x^2 - y^2 + 2x$

b) $f(x,y) = e^x \cos y$

c) $f(x,y) = \operatorname{sen} x \cosh y$.

d) Demuestre que

$$g(x,y) = \int_0^x -\frac{\partial f}{\partial y}(t,0)\,dt + \int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$$

es siempre una conjugada armónica de f. Demuestre que la relación anterior da una conjugada armónica de $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$, armónica, en todo conjunto abierto convexo Ω.

16) Sea $f \in \tilde{C}^2(\Omega, \mathbb{C})$. Demuestre que $\log|f|$ es armónica en Ω.

17) Sea $f \in \tilde{C}^2(\Omega, \mathbb{C})$, Ω conexo. Demuestre que $|f(z)|^2$ es armónica si y sólo si f es constante en Ω.

18) Sean $f, g \in J(\Omega, \mathbb{C})$. Demuestre que

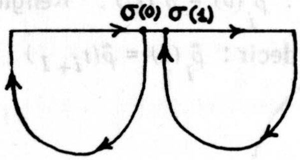
$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(fg) = f\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} + g\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} .$$

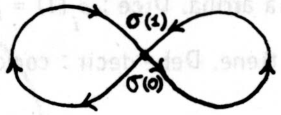
19) Sea $g \in C^2(\Omega, \mathbb{C})$ y supóngase que g y zg son armónicas en Ω. Demuestre que $g \in \mathcal{O}(\Omega)$.

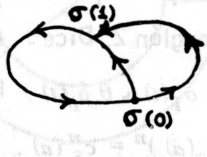
Nota. Los ejercicios marcados con (*) dependen de la teoría del capítulo V.

Correcciones a la primera parte de esta serie de artículos.

Hemos notado un error conceptual en el Capítulo II (Boletín de Matemáticas, Vol. VII, Número 5). Allí se ha definido una curva simple como una aplicación continua $\sigma : I \to \Omega$ la cual es inyectiva sobre $(0,1)$. Esta definición es incorrecta para muchos propósitos, pues curvas como







resultarían simples. La definición debe modificarse como sigue: σ *es simple* si las restricciones de σ a $(0,1]$ y $[0,1)$ son ambas inyectivas.

Otras erratas son las siguientes, también correspondientes al Capítulo II (Bol. de Mat. Vol. VII, No. 5).

Página 281 renglón 2 de abajo hacia arriba. Dice:

$$Supp\, F = \{ x \mid F(x) \neq 0 \} = \{ x \mid |x| \leq 1 \}$$

Debe decir:

$$Supp\, F = \overline{\{ x \mid F(x) \neq 0 \}} = \{ x \mid |x| \leq 1 \}$$

Página 299, renglón 5. Dice: Cuando Ω es un espacio topológico arco conexo Ω denotaremos por $\tilde{\pi}_1(\Omega)$. Debe decir: Cuando Ω es un espacio topológico arco conexo denotaremos por $\tilde{\pi}_1(\Omega)$

Página 304. El lema 5.2 debe decir: Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}_p$, $p \geq 0$, y sea

$\rho \in S_1(\Omega, a)$, $a \in \Omega$, tal que $\rho \approx e_a$. Entonces $\rho \equiv e_a$. Es decir, si existe una homotopía $F : \rho \to e_a$, existe también una homotopía suave $H : \rho \to e_a$.

Página 311, renglón 7 de abajo hacia arriba. Dice : $|\rho(t) - \rho(t')| < \varepsilon/4$. Debe decir $|\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t')| < \varepsilon/4$. Renglón 4 de abajo hacia arriba. Dice $\rho_i(t) = \rho((t_{i+1} - t_i)t + t_i)$. Debe decir : $\hat{\rho}_i(t) = \hat{\rho}(t_{i+1} - t_i)t + t_i)$. Renglón 3 de abajo hacia arriba. Dice : $\rho_i(0) = \rho(t_i)$. Debe decir : $\hat{\rho}_i(0) = \hat{\rho}(t_i)$. Renglón 2 de abajo hacia arriba. Dice : $\rho_i(1) = \rho(t_{i+1})$. Debe decir : $\hat{\rho}_i(1) = \hat{\rho}(t_{i+1})$. Dice: como ρ_i tiene. Debe decir : como $\hat{\rho}_i$ tiene.

Página 312, renglón 1. Dice : $[\sigma_i(t), \rho_i(t)] \subseteq U - \{a\}$. Debe decir : $[\sigma_i(t), \hat{\rho}_i(t)] \subseteq U - \{a\}$. Renglón 2. Dice : $F_i(\theta, t) = (1-\theta)\sigma_i(t) + \theta\rho_i(t)$. Debe decir : $F_i(\vartheta, t) = (1-\theta)\sigma_i(t) + \theta\hat{\rho}_i(t)$. Renglón 3. Dice ρ_i. Debe decir: $\hat{\rho}_i$. Renglón 10. Dice : $\rho \approx (c_\varepsilon(a))^n = c_\varepsilon^n(a)$. Debe decir : $\hat{\rho} \approx (c_\varepsilon(a))^n = c_\varepsilon^n(a)$. Renglón 12. Dice : $\pi_2(\Omega)$ está generado por $c_\varepsilon(a)$ cuando $B_\varepsilon(a) \subseteq \Omega$. Debe decir : $\pi_1(\Omega)$ está generado por $\{c_\varepsilon(a)\}$ cuando $\overline{B}_\varepsilon(a) \subseteq \Omega$.

Página 313. Renglón 4. Dice $[c_\varepsilon(a)]$ es una base de $\pi_1(\Omega)$. Debe decir : $[c_\varepsilon(a)]$ es una base de $\tilde{\pi}_1(\Omega)$.

Página 310. El teorema 7.2 debe decir : Si U es un abierto de C estrellado con respecto a $a \in U$, $\pi_1(U - \{a\})$ está generado por $\{c_\varepsilon(a)\}$ donde $\overline{B}_\varepsilon(a) \subseteq U$.

Página 300. Renglón 5 de abajo hacia arriba. Dice : $F : \sigma \to \rho$. Debe decir : $\sigma \equiv \rho$.

Página 308. Renglón 10. Dice $\psi \circ \sigma \circ \rho$. Debe decir : $\psi \circ \sigma \dot{\rho}$.

Página 314. Renglón 15. Dice $\pi_1(X, a) \approx \{1_a\}$. Debe decir : $\tilde{\pi}_1(X, a) = \{1_a\}$

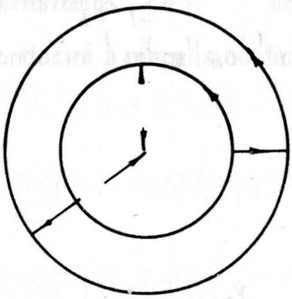
Página 315. Renglón 3. Dice : $\pi_1(X) \approx \pi_1(Y)$. Debe decir : $\tilde{\pi}_1(X) \approx \tilde{\pi}_1(Y)$.

Página 315. Renglón 2 de abajo hacia arriba. Dice: $F(z, 1) = b$. Debe decir: $F(z, 1) = a$.

(Boletín, Vol. VII, Nº 6)

En el Capítulo III hemos notado las siguientes erratas:

La figura 1.2 es:



Página 336. Renglón 7. Dice: $\partial \rho = \sum_{j=o}^{n} (-1)^i \rho_{ij}$ Debe decir: $\partial \rho = \sum_{j=o}^{1} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \rho_{ij}$.

Página 339. Renglón 8. Dice $\gamma(\theta, t) = \gamma(t)$. Debe decir: $\rho(\theta, t) = \gamma(\theta)$.

Renglón 14. Dice: $\tilde{B}_n(X)$. Debe decir: $\tilde{\bar{B}}_n(X)$.

Página 340. Renglón 2 de abajo hacia arriba. Dice: $\tilde{B}_o(X) = \tilde{B}_o(X)$. Debe decir: $\tilde{\bar{B}}_o(X) = \tilde{B}_o(X)$.

Página 345. Renglón 13. Dice: $\rho_{k1}(0) = \rho_k(1) = \rho_{\tau(k)0}(0) = \rho_{\tau(k)}(0)$. Debe decir: $\rho_{k1}(0) = \rho_k(1) = \rho_{\tau(k)0}(1) = \rho_{\tau(k)}(0)$.

Página 346. Renglón 1. Dice: el abelianizado. Debe decir: el abelianizado de.

Página 346. Renglón 14. Dice: $\tilde{B}_1(X)$. Debe decir: $\bar{\bar{B}}_1(X)$.

Página 346. Renglón 2 de abajo hacia arriba. Dice : $\gamma_{ijbk} = \gamma^{k}_{\rho_{ij}}(b)$. Debe decir : $\gamma_{ijbk} = \gamma^{k}_{\rho_{ij}(b)}$ escogido como antes.

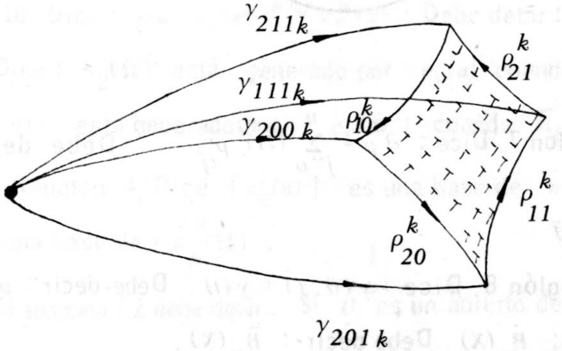
Página 347. Renglón 1. Dice :

$$\tilde{\rho} = \prod_{k=1}^{s} (\gamma_{0k}\, \sigma_k\, \gamma_{2k}^{-1})^{\mu_k}$$

Debe decir :

$$\tilde{\rho} = \prod_{k=1}^{s} (\gamma_{0k}\, \sigma_k\, \gamma_{1k}^{-1})^{\mu_k}$$

La figura 3.1 es :



Página 350. Renglón 7. Dice : $B_n(\Omega)$. Debe decir : $\bar{B}_n(\Omega)$.

Página 356. Renglón 10. Dice : $H_n(\Omega) = \coprod_{i \in I} H_n(X_i)$. Debe decir : $\tilde{H}_n(X) = \coprod_{i \in I} \tilde{H}_n(X_i)$. Renglón 13. H_n debe reemplazarse siempre por $\tilde{H}_n$. Lo mismo en el renglón 15.

Página 356. El ejercicio 2 debe decir : Demuestre que para todo $n \in Z$, $\mathbb{K} = Z, Q, \mathbb{R}, C$,

$$\tilde{H}_n(\Omega, \mathbb{K}) \approx \tilde{H}_n(\Omega, Z) \otimes_Z \mathbb{K},$$

y concluya que $\tilde{H}_o(\Omega, \mathbb{K}) \approx \mathbb{K}$ si Ω es arco conexo, $\tilde{H}_1(\Omega, \mathbb{K}) = \{0\}$, si Ω es simplemente conexo, y que $\tilde{H}_1(\Omega, \mathbb{K})$ está generado por $< c_\varepsilon(a) >$ si $\Omega = \Omega^{\bullet} = \Omega' - \{a\}$ con Ω' simplemente conexo en C y $\overline{B}_\varepsilon(a) \subseteq \Omega'$.

Nota : En lo que sigue escribiremos $<\sigma>$ en lugar de $\prec\sigma\succ$ cuando $\sigma \in C_1(\Omega)$. Esto no conducirá a ninguna confusión .

CAPITULO V

FORMAS DIFERENCIALES COMPLEJAS

1. **Formas Diferenciales Reales.** Sean Ω un abierto de C, $a \in \Omega$, Denotaremos por $T_a^*(\Omega)$ al conjunto

$$T_a^*(\Omega) = \{ (a,x) \mid x \in \mathbb{R}^2 \}$$

El conjunto $T_a^*(\Omega)$ tiene una estructura natural de $\mathbb{R}$ - espacio determinada por las leyes

$$(a,x) + (a,y) = (a, x+y),$$

$$\lambda (a,x) = (a, \lambda x)$$

El $\mathbb{R}$-espacio $T_a^*(\Omega)$ se denomina el *espacio cotangente de* Ω *en el punto* a. Denotaremos por $d_a x$ al elemento $(a, [1,0]) \in T_a^*(\Omega)$ y por $d_a y$ al elemento $(a, [0,1]) \in T_a^*(\Omega)$. Si $(a, [\alpha, \beta]) \in T_a^*(\Omega)$, es claro que

$$(a, [\alpha, \beta]) = \alpha\, d_a x + \beta\, d_a y ,$$

y por otra parte, si

$$\alpha\, d_a x + \beta\, d_a y = (a, [0,0]) ,$$

necesariamente $\alpha = \beta = 0$. Por lo tanto, $\{ d_a x, d_a y \}$ es una base del $\mathbb{R}$-espacio $T_a^*(\Omega)$. Sea ahora

$$T^*(\Omega) = \bigcup_{a \in \Omega} T_a^*(\Omega) .$$

El conjunto $T^*(\Omega)$ se denomina el *fibrado cotangente de* Ω .

Definición 1.1 : Una aplicación

$$w : \Omega \to T^*(\Omega)$$

tal que $w(a) \in T_a^*(\Omega)$ para todo $a \in \Omega$ se denomina una *1-forma diferencial sobre* Ω .

Ejemplo 1.1. Sea $dx : \Omega \to T^*(\Omega)$ definida por

$$dx(a) = d_a x \quad . \tag{1.1}$$

Es claro que dx es una *1*- forma diferencial sobre Ω . Lo mismo es cierto de $dy : \Omega \to T^*(\Omega)$ definida por

$$dy(a) = d_a y \quad , \tag{1.2}$$

y de $w : \Omega \to T^*(\Omega)$ definida por

$$w(a) = f(a)\, d_a x + g(a)\, d_a y \ , \quad f, g : \Omega \to \mathbb{R} .$$

Esta última se denota por

$$w = fdx + gdy \tag{1.3}$$

Recíprocamente :

Teorema 1.1 : *Si* $w : \Omega \to T^*(\Omega)$ *es una 1-forma diferencial sobre* Ω *, existen* $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ *tales que*

$$w = fdx + gdy \ .$$

Demostración : En efecto, como $w(a) \in T_a^*(\Omega)$ y $\{ d_a x , d_a y \}$ es una base de $T_a^*(\Omega)$,

$$w(a) = f_a\, d_a x + g_a\, d_a y \quad , \quad f_a , g_a \in I\!R$$

Basta entonces definir $f(a) = f_a$, $g(a) = g_a$.

Sean $M_2(I\!R)$ el $I\!R$ - espacio de las matrices de orden 2×2 sobre $I\!R$, $A_2(I\!R)$ el $I\!R$ -subespacio de $M_2(I\!R)$ formado las matrices antisimétricas de orden 2×2.

Para que una matriz A pertenezca a $A_2(I\!R)$ es necesario y suficiente que

$$A^t = - A$$

o lo que es lo mismo, que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{bmatrix} \qquad \lambda \in I\!R .$$

Si $x, y \in I\!R^2$, se define el *producto tensorial de* x *por* y , y se denota por $x \otimes y$, como la 2×2 matriz $x^t y$. Es decir ,

$$x \otimes y = x^t y . \tag{1.4}$$

Se define el *producto exterior de* x *por* y , y se denota por $x \wedge y$, como la 2×2 - matriz

$$x \wedge y = \frac{1}{2} (x \otimes y - y \otimes x) \tag{1.5}$$

Es claro que $x \otimes y \in M_2(I\!R)$. Además, $x \wedge y \in A_2(I\!R)$. En efecto,

$$(x \wedge y)^t = \frac{1}{2} (x^t y - y^t x)^t = \frac{1}{2} (y^t x - x^t y) = \frac{1}{2} (y \otimes x - x \otimes y)$$

$$= \frac{1}{2} \{ -(x \otimes y - y \otimes x) \} = - x \wedge y ,$$

Escribiremos ahora

$$\overset{2}{\bigotimes} T_a^*(\Omega) = \{ (a,A) \mid A \in M_2(\mathbb{R}) \} \ , \quad \overset{2}{\bigwedge} T_a^*(\Omega) = \{ (a,A) \mid A \in A_2(\mathbb{R}) \} \ .$$

Es claro que $\overset{2}{\bigotimes} T_a^*(\Omega)$ y $\overset{2}{\bigwedge} T_a^*(\Omega)$ tienen estructuras naturales de $\mathbb{R}$-espacios dadas por las leyes

$$(a,A) + (a,B) = (a, A+B) \ , \quad \lambda(a,A) = (a, \lambda A) , \quad \lambda \in \mathbb{R} \ .$$

Tales espacios se denominan respectivamente la *potencia tensorial segunda* de $T_a^*(\Omega)$ y la *potencia exterior segunda* de $T_a^*(\Omega)$.

Definamos ahora, para (a,x) , $(a,y) \in T_a^*(\Omega)$,

$$(a,x) \otimes (a,y) = (a, x \otimes y) \in \overset{2}{\bigotimes} T_a^*(\Omega) , \tag{1.6}$$

$$(a,x) \wedge (a,y) = (a, x \wedge y) \in \overset{2}{\bigwedge} T_a^*(\Omega) , \tag{1.7}$$

$(a,x) \otimes (a,y)$ se denomina *el producto tensorial de* (a,x) *por* (a,y) y $(a,x) \wedge (a,y)$ el *producto exterior de* (a,x) *por* (a,y).

Teorema 1.2 . *El conjunto*

$$\{ d_a x \otimes d_a x \, , \, d_a x \otimes d_a y \, , \, d_a y \otimes d_a x \, , \, d_a y \otimes d_a y \}$$

es una base de $\overset{2}{\bigotimes} T_a^*(\Omega)$. *Por lo tanto, todo elemento* t *de este espacio se escribe, de manera única, en la forma*

$$t = \alpha\, d_a x \otimes d_a x + \beta\, d_a x \otimes d_a y + \lambda\, d_a y \otimes d_a x + \mu\, d_a y \otimes d_a y$$

donde $\alpha, \beta, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Demostración : Como

$$d_a x \otimes d_a x = \left(a , \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) ,$$

$$d_a x \otimes d_a y = \left(a , \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) ,$$

$$d_a y \otimes d_a x = \left(a\ ,\ \begin{bmatrix} 0 & , & 0 \\ 1 & , & 0 \end{bmatrix}\right),$$

$$d_a y \otimes d_a y = \left(a\ ,\ \begin{bmatrix} 0 & , & 0 \\ 0 & , & 0 \end{bmatrix}\right),$$

la afirmación resulta inmediatamente del hecho de que

$$\begin{bmatrix} 1 & , & 0 \\ 0 & , & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & , & 1 \\ 0 & , & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & , & 0 \\ 1 & , & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & , & 0 \\ 0 & , & 1 \end{bmatrix}$$

es una base de $M_2(\mathbb{R})$.

Corolario . $\dim_{\mathbb{R}} \left(\overset{2}{\bigotimes} T_a^*(\Omega) \right) = 4$

Teorema 1.3 : *El espacio* $\overset{2}{\bigwedge} T_a^*(\Omega)$ *tiene dimensión* 1. *El conjunto* $\{ d_a x \wedge d_a y \}$ *es una base de este espacio reducida a un solo elemento .*

Demostración : Si $(a,A) \in \overset{2}{\bigwedge} T_a^*(\Omega)$, entonces

$$A = \begin{bmatrix} 0 & , & \lambda \\ -\lambda & , & 0 \end{bmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto,

$$A = \lambda \begin{bmatrix} 0 & , & 1 \\ -1 & , & 0 \end{bmatrix} = 2\lambda\,(\alpha \wedge \beta)\ ,\ \alpha = [1,0]\ ,\ \beta = [0,1]$$

Esto demuestra la afirmación .

Sea

$$\overset{2}{\wedge} T^*(\Omega) = \bigcup_{a\in\Omega} \overset{2}{\wedge} T_a^*(\Omega) \ .$$

El conjunto $\overset{2}{\wedge} T^*(\Omega)$ se denomina el *fibrado de las 2-formas sobre* Ω.

Definición 1.2. Una aplicación

$$w : \Omega \to \overset{2}{\wedge} T^*(\Omega) \ ,$$

tal que

$$w(a) \in \overset{2}{\wedge} T_a^*(\Omega)$$

para todo $a \in \Omega$, se denomina una *2-forma diferencial sobre* Ω.

Ejemplo 1.2 Sea $dx \wedge dy$ la aplicación de Ω en $\overset{2}{\wedge} T^*(\Omega)$ definida por

$$dx \wedge dy\,(a) = d_a x \wedge d_a y$$

Es claro que $dx \wedge dy$ es una 2-forma diferencial. Más generalmente, sean $f : \Omega \to \mathbb{R}$ y $w : \Omega \to \overset{2}{\wedge} T^*(\Omega)$ la aplicación definida por

$$w(a) = f(a)\, d_a x \wedge d_a y \ . \qquad (1.9)$$

Entonces, w es una 2-forma diferencial, la cual se denota por

$$w = f\, dx \wedge dy \ . \qquad (1.10)$$

Recíprocamente :

Teorema 1.3 : *Si* $w : \Omega \to \overset{2}{\wedge} T^*(\Omega)$ *es una 2-forma diferencial, existe* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$w = f\, dx \wedge dy$$

Demostración : En efecto, si w es una 2-forma diferencial,

$$w(a) \in \overset{2}{\wedge} T_a^*(\Omega)$$

para toda $a \in \Omega$. Por lo tanto, para un único $f_a \in \mathbb{R}$,

$$w(a) = f_a(d_a x \wedge d_a y).$$

Basta entonces definir $f(a) = f_a$.

Nota: Es costumbre tomar :

$$\overset{0}{\wedge} T_a^*(\Omega) = \mathbb{R} ,$$

$$\overset{1}{\wedge} T_a^*(\Omega) = T_a^*(\Omega) ,$$

$$\overset{p}{\wedge} T_a^*(\Omega) = \{ 0 \} \qquad \text{para} \qquad p > 2$$

Una *p- forma diferencial sobre* Ω es entonces una aplicación

$$w : \Omega \to \overset{p}{\wedge} T^*(\Omega) = \bigcup_{a \in \Omega} \overset{p}{\wedge} T_a^*(\Omega)$$

tal que $w(a) \in \overset{p}{\wedge} T_a^*(\Omega)$ para todo $a \in \Omega$. Denotaremos por $F_p(\Omega, \mathbb{R})$ al conjunto de las p-formas diferenciales sobre Ω. Es claro que $F_p(\Omega, \mathbb{R})$ es un $\mathbb{R}$-espacio para las leyes de composición

$$(w + w')(a) = w(a) + w'(a) ,$$

$$(\lambda w)(a) = \lambda w(a) , \qquad\qquad \lambda \in \mathbb{R} .$$

Además, $F_0(\Omega, \mathbb{R}) = F(\Omega, \mathbb{R})$ es el conjunto de todas las aplicaciones de Ω en $\mathbb{R}$, y $F_p(\Omega, \mathbb{R}) = \{ 0 \}$ para $p > 2$.

De la misma manera, definimos

$$J_0(\Omega, \mathbb{R}) = J(\Omega, \mathbb{R}) , \tag{1.11}$$

donde $J(\Omega, \mathbb{R})$ es el subespacio de $F(\Omega, \mathbb{R})$ formado por las aplicaciones:

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ tales que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) \ , \ \frac{\partial f}{\partial y}(a)$$

existen en todo punto $a \in \Omega$. También,

$$J_1(\Omega, \mathbb{R}) = \{ f\,dx + g\,dy \mid f, g \in J(\Omega, \mathbb{R}) \} , \tag{1.12}$$

$$J_2(\Omega, \mathbb{R}) = \{ f\,dx \wedge dy \mid f \in J(\Omega, \mathbb{R}) \} \tag{1.13}$$

$$J_p(\Omega, \mathbb{R}) = \{ 0 \} \quad , \qquad \text{si} \quad p > 2 . \tag{1.14}$$

$J_p(\Omega, \mathbb{R})$ se denomina el espacio de las *p-formas diferenciales, Jacobi-derivables, sobre* Ω. También, si $C(\Omega, \mathbb{R})$ es el conjunto de las aplicaciones continuas de Ω en $\mathbb{R}$,

$$C_o(\Omega, \mathbb{R}) = C(\Omega, \mathbb{R}) , \tag{1.15}$$

$$C_1(\Omega, \mathbb{R}) = \{ f\,dx + g\,dy \mid f, g \in C(\Omega, \mathbb{R}) \} \tag{1.16}$$

$$C_2(\Omega, \mathbb{R}) = \{ f\,dx \wedge dy \mid f \in C(\Omega, \mathbb{R}) \} , \tag{1.17}$$

$$C_p(\Omega, \mathbb{R}) = \{ 0 \} , \qquad \text{si} \quad p > 2 \tag{1.18}$$

Claramente $C_p(\Omega, \mathbb{R})$ es un subespacio de $F_p(\Omega, \mathbb{R})$, denominado espacio de las *p-formas diferenciales continuas* sobre Ω. Finalmente, si $C^q(\Omega, \mathbb{R})$ denota el $\mathbb{R}$-subespacio de $J(\Omega, \mathbb{R})$ formado por las aplicaciones $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tales que

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k} : \Omega \to \mathbb{R} \quad , \qquad a \to \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a)$$

$$\text{para } k \leq q \ \ (q \leq +\infty)$$

$$\frac{\partial^k f}{\partial y^k} : \Omega \to \mathbb{R} \quad , \qquad a \to \frac{\partial^k f}{\partial y^k}(a)$$

existen y son continuas, definimos

$$C_o^q(\Omega, \mathbb{R}) = C^q(\Omega, \mathbb{R}) \tag{1.19}$$

$$C_1^q(\Omega, \mathbb{R}) = \{ f\,dx + g\,dy \mid f, g \in C^q(\Omega, \mathbb{R}) \}, \tag{1.20}$$

$$C_2^q(\Omega, \mathbb{R}) = \{ f\,dx \wedge dy \mid f \in C^q(\Omega, \mathbb{R}) \} \tag{1.21}$$

$$C_p^q(\Omega, \mathbb{R}) = \{ 0 \} \quad , \quad p > 2 \tag{1.22}$$

Se tiene que $C_p^q(\Omega, \mathbb{R})$ es un subespacio de $J_p(\Omega, \mathbb{R})$ y de $C_p^{q-1}(\Omega, \mathbb{R})$. Nótese que $C_p^o(\Omega, \mathbb{R}) = C_p(\Omega, \mathbb{R})$.

2. ***La integral de una forma diferencial real continua.*** Sea $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$. Entonces, para toda $\rho \in S_o(\Omega)$, se define

$$\int_\rho f = f(\rho(o)). \tag{2.1}$$

Sea ahora $w \in C_1(\Omega, \mathbb{R})$, $w = f\,dx + g\,dy$. Para toda $\rho \in S_1(\Omega)$, $\rho(t) = \rho_1(t) + i\,\rho_2(t)$, $\rho_j(t) \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2$. Se define entonces

$$\int_\rho w = \int_\rho f\,dx + g\,dy = \int_o^1 f(\rho(t))\,\rho_1'(t)\,dt + \int_o^1 g(\rho(t))\,\rho_2'(t)\,dt, \tag{2.2}$$

donde $\rho_j'(t)$ es la $\mathbb{R}$-derivada corriente de la aplicación ρ_j en una vecindad U de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$. Nótese que $\rho_j'(t)$ existe en U salvo a lo más en un número finito de puntos de esta vecindad. Finalmente, si $w \in C_2(\Omega, \mathbb{R})$, se define, para toda $\rho \in S_2(\Omega)$,

$$\int_\rho w = \int_\rho f\,dx \wedge dy = \int_o^1 \int_o^1 f(s,t)\,.\,Det(J_\rho(s,t))\,ds\,dt \tag{2.3}$$

donde se ha supuesto que $w = f\,dx \wedge dy$. Recordamos que

$$J_f^o(s,t) = Det\,(J_f(s,t)) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(s,t)\,\frac{\partial f_2}{\partial y}(s,t) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(s,t)\,\frac{\partial f_2}{\partial x}(s,t)$$

Sea ahora $\rho \in C_p(\Omega)$, $p = 0, 1, 2$. Entonces

$$\rho = \sum_{r=1}^{n} \lambda_r \rho_r$$

con $\rho_r \in S_p(\Omega)$ y $\lambda_r \in Z$. Si $w \in C_p(\Omega, I\!R)$, definimos

$$\int_\rho w = \sum_{r=1}^{n} \lambda_r \int_{\rho_r} w . \tag{2.4}$$

Nótese, por ejemplo, que si $\rho \in C_{p+1}(\Omega)$,

$$\int_{\partial\rho} w = \sum_{i=1}^{p+1} \sum_{j=o}^{1} (-1)^{i+j} \int_{\rho_{ij}} w .$$

Si $w \in C_p(\Omega, I\!R)$, $p > 2$, es costumbre también definir, para $\rho \in C_p(\Omega)$,

$$\int_\rho w = 0 \tag{2.5}$$

Sea $\rho \in C_p(\Omega)$. Podemos entonces definir una aplicación

$$\int_\rho : C_p(\Omega, I\!R) \to I\!R$$

por

$$\int_\rho (w) = \int_\rho w . \tag{2.6}$$

Es claro que $\int_\rho \in Hom_{I\!R}(C_p(\Omega, I\!R), I\!R)$, donde $Hom_{I\!R}(C_p(\Omega, I\!R), I\!R)$ es el conjunto de las $I\!R$- formas de $C_p(\Omega, I\!R)$ en $I\!R$. En efecto, es evidente que

$$\int_\rho (w + w') = \int_\rho (w) + \int_\rho (w') ,$$

y que

$$\int_\rho (\lambda\, w) = \lambda \int_\rho (w)\,, \qquad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Por otra parte, si $w \in C_p(\Omega, \mathbb{R})$, podemos definir

$$\int_w : C_p(\Omega) \to \mathbb{R}$$

por la relación

$$\int_w (\rho) = \int_\rho w\,. \qquad (2.7)$$

Es evidente que $\int_w \in Hom_Z(C_p(\Omega), \mathbb{R})$, conjunto de las aplicaciones Z-lineales de $C_p(\Omega)$ en $\mathbb{R}$.

3. ***Diferencial de una forma real.*** Sea $f \in J(\Omega, \mathbb{R})$ una 0-forma. Definimos la diferencial de f, y la denotamos por df, como la 1-forma

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy\,. \qquad (3.1)$$

Por otra parte, una 1-forma $w \in J_1(\Omega, \mathbb{R})$ se escribe

$$w = f\, dx + g\, dy\,, \qquad f, g \in J(\Omega, \mathbb{R})\,.$$

Definimos entonces su diferencial, dw, como la 2-forma

$$dw = df \wedge dx + dg \wedge dy\,. \qquad (3.2)$$

Teniendo en cuenta (ver ejercicios) que $dx \wedge dy = -\, dy \wedge dx$, y que $dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0$, se tiene también

$$dw = \left\{\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right\} dx \wedge dy\,. \qquad (3.3)$$

Para $w \in J_p(\Omega, \mathbb{R})$ y $p \geq 2$, definimos, finalmente,

$$dw = 0 \tag{3.4}$$

Tenemos entonces un operador

$$d : J_p(\Omega, \mathbb{R}) \to F_{p+1}(\Omega, \mathbb{R}),$$

el cual es, evidentemente, $\mathbb{R}$ lineal. Además, es claro que

$$d(C_p^q(\Omega, \mathbb{R})) \subseteq C_{p+1}^{q-1}(\Omega, \mathbb{R}), \qquad q \geq 1.$$

En particular, si $w \in C_1^1(\Omega, \mathbb{R})$, dw es una 2-forma continua.

4. ***Los teoremas de Stokes y Poincaré***. Consideramos en esta sección dos teoremas fundamentales, los cuales tienen importantes aplicaciones a la teoría de funciones holomorfas. Tales teoremas, debidos a Stokes y Poincaré, son, a su vez, fundamentales en otras ramas de la matemática.

Teorema 4.1. (Stokes) *Sea* $w \in C_1^1(\Omega, \mathbb{R})$. *Entonces, para toda* $\rho \in C_2(\Omega)$,

$$\int_\rho dw = \int_{\partial\rho} w.$$

En otros términos, si $w = f\,dx + g\,dy$,

$$\int_{\partial\rho} f\,dx + g\,dy = \int_\rho df \wedge dx + \int_\rho dg \wedge dy = \int_\rho \left\{ \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right\} dx \wedge dy \tag{4.2}$$

Demostración: Supongamos primero que $\rho : I^2 \to \Omega$ es de clase C^∞ en una vecindad de I^2. Sean α la parte real de ρ, β su parte imaginaria. Definamos

$$u(s,t) = f(\rho(s,t)) = f(\alpha(s,t), \beta(s,t)).$$

Entonces,

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial \alpha}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\partial \beta}{\partial s} \quad ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\partial \beta}{\partial t}$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial u}{\partial s}\ \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial \alpha}{\partial s}\ \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\partial \beta}{\partial s}\ \frac{\partial \alpha}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\ \frac{\partial \alpha}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial \alpha}{\partial t}\ \frac{\partial \alpha}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\partial \beta}{\partial t}\ \frac{\partial \alpha}{\partial s} \ .$$

Se sigue que

$$\frac{\partial u}{\partial s}\ \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}\ \frac{\partial \alpha}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial y}\left\{ \frac{\partial \beta}{\partial s}\ \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \frac{\partial \alpha}{\partial s}\ \frac{\partial \beta}{\partial t} \right\} \ ;$$

$$= -\frac{\partial f}{\partial y}\ J_{\rho}^{o}(s,t) \ .$$

Por lo tanto,

$$\int_o^1 \int_o^1 \left\{ \frac{\partial u}{\partial s}\ \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}\ \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right\} ds\ dt = -\int_o^1 \int_o^1 \frac{\partial f}{\partial y}\ J_{\rho}(s,t)\ ds\ dt = -\int_{\rho} \frac{\partial f}{\partial y}\ dx \wedge dy.$$

Por otro lado, integrando por partes con respecto a s .

$$\int_o^1 \int_o^1 \frac{\partial u}{\partial s}\ \frac{\partial \alpha}{\partial t}\ ds\ dt = \int_o^1 \left\{ u(1,t)\frac{\partial \alpha}{\partial t}(1,t) - u(0,t)\frac{\partial \alpha}{\partial t}(0,t) \right\} dt - \int_o^1 \int_o^1 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial s\, \partial t}\ u(s,t)\, ds\, dt,$$

e integrando por partes con respecto a t ,

$$\int_o^1 \int_o^1 \frac{\partial u}{\partial t}\ \frac{\partial \alpha}{\partial s}\ ds\, dt = \int_o^1 \left\{ u(s,1)\ \frac{\partial \alpha}{\partial s}(s,1) - u(s,0)\ \frac{\partial \alpha}{\partial s}(s,0) \right\} ds - \int_o^1 \int_o^1 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial s\, \partial t}\ u(s,t)\, ds\, dt.$$

Se deduce que

$$\int_0^1 \int_0^1 \left\{ \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s} \right\} ds\, dt = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=o}^{1} \int_{\rho_{ij}} f(\rho_{ij}(u))\, \alpha'_{ij}(u)\, du = \int_{\partial\rho} f\, dx ,$$

es decir,

$$- \int_{\rho} \frac{\partial f}{\partial y} dx \wedge dy = \int_{\partial\rho} f\, dx$$

Escribiendo

$$v(s,t) = g(\rho(s,t)) = g(\alpha(s,t), \beta(s,t))$$

se deduce también que

$$\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial \beta}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial \beta}{\partial s} = \frac{\partial g}{\partial x}\left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial s}\frac{\partial \beta}{\partial t} - \frac{\partial \alpha}{\partial t}\frac{\partial \beta}{\partial s} \right\} = \frac{\partial g}{\partial x} J_{\rho}^{o}(s,t)$$

de donde

$$\int_0^1 \int_0^1 \left\{ \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial \beta}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial \beta}{\partial s} \right\} ds\ dt = \int_{\rho} \frac{\partial g}{\partial x} dx \wedge dy$$

y que

$$\int_0^1 \int_0^1 \left\{ \frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial \beta}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial \alpha}{\partial s} \right\} ds\, dt = \int_{\partial\rho} g\, dy .$$

Esto demuestra que

$$\int_{\partial\rho} g\, dy = \int_{\rho} \frac{\partial g}{\partial x} dx \wedge dy ,$$

y completa la demostración del teorema cuando ρ es de clase C^{∞}. Supongamos ahora que $\rho \in S_2(\Omega)$. En tal caso, (ver ejercicio 17), dado $\varepsilon > 0$ existe σ de clase C^{∞} en una vecindad de I^2, tal que

$$\left| \int_{\rho} dw - \int_{\sigma} dw \right| < \varepsilon/2$$

$$\left| \int_{\partial\rho} w - \int_{\partial\sigma} w \right| < \varepsilon/2$$

De esto,

$$\left| \int_\rho dw - \int_{\partial\rho} w \right| \leq \left| \int_\rho dw - \int_\sigma dw \right| + \left| \int_\sigma dw - \int_{\partial\sigma} w \right| + \left| \int_{\partial\sigma} w - \int_{\partial\rho} w \right| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2$$

pues el segundo término de la derecha es nulo. Esto demuestra el teorema.

Nota. Sean $\rho \in C_1(\Omega)$, $f \in C_o^1(\Omega, \mathbb{R})$. Entonces

$$\int_{\partial\rho} f = \int_\rho df .$$

En efecto,

$$\int_{\partial\rho} f = f(\rho(1)) - f(\rho(0)) .$$

Por otra parte, si $\rho = \rho_1 + i\rho_2$

$$\int_\rho df = \int_\rho \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \int_o^1 \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(\rho(t))\rho_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\rho(t))\rho_2'(t) \right\} dt .$$

Si escribimos

$$g(t) = f(\rho(t)) ,$$

se tiene

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\rho(t))\rho_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\rho(t))\rho_2'(t),$$

de lo cual

$$\int_\rho df = \int_o^1 g'(t)\, dt = g(1) - g(0) = f(\rho(1)) - f(\rho(0)) .$$

Además, si $w \in C_{p-1}^1(\Omega, \mathbb{R})$ y $\rho \in C_p(\Omega)$, también

$$\int_{\partial\rho} w = \int_\rho dw$$

cuando $p > 3$, pues en tal caso, tanto w como dw son nulos. Finalmente, si

$\rho \in C_3(\Omega)$ y $w \in C^1_2(\Omega, \mathbb{R})$,

$$\int_\rho dw = 0 .$$

Dejamos como ejercicio al lector demostrar que también

$$\int_{\partial \rho} w = 0$$

y enunciamos entonces el teorema de Stokes en la forma general :

Teorema (Stokes) *Si* $p \geq 1$, $\rho \in C_p(\Omega)$ *y* $w \in C^1_{p-1}(\Omega, \mathbb{R})$, *entonces*

$$\int_{\partial\rho} w = \int_\rho dw .$$

Para cada $p > 0$, sea $Z_p(\Omega, \mathbb{R})$ el subespacio de $C^\infty_p(\Omega, \mathbb{R})$ de las p-formas diferenciales w tales que $dw = 0$. Una tal forma se dice *cerrada* y $Z_p(\Omega, \mathbb{R})$ se denomina el $\mathbb{R}$-espacio de las p-*formas diferenciales cerradas*.

Es claro que

$$Z_p(\Omega, \mathbb{R}) = \{ 0 \} \quad \text{si} \quad p > 2 ,$$
$$Z_2(\Omega, \mathbb{R}) = C^\infty_2(\Omega, \mathbb{R}) .$$

Nota. Para más detalles sobre el teorema de Stokes, el lector puede consultar [4] en la bibliografía. Nosotros no haremos uso de la forma general del teorema .

Por otra parte, si Ω es conexo, lo cual constituye el caso importante, $Z_o(\Omega, \mathbb{R})$ puede identificarse a $\mathbb{R}$. En efecto,

$$Z_o(\Omega , \mathbb{R}) = \{ f_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$

donde

$$f_\lambda(z) = \lambda$$

para todo $z \in \Omega$, Para ver esto, nótese que $df = 0$ es equivalente a

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ y por lo tanto, que f es constante. Ahora, es claro que $\{ f_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$ puede identificarse a $\mathbb{R}$, identificando a λ con f_λ. Para $p \geq 0$ defínase

$$B_o(\Omega, \mathbb{R}) = \{ 0 \}$$

$$B_p(\Omega, \mathbb{R}) = d(C^\infty_{p-1}(\Omega, \mathbb{R})) \quad \text{si} \quad p > 1.$$

Es claro que

$$B_p(\Omega, \mathbb{R}) = \{0\}, \qquad \text{si} \quad p > 2.$$

Una forma $w \in B_p(\Omega, \mathbb{R})$ se dice una *p-forma diferencial exacta*. La única 0-forma exacta es $w = 0$. Esto es también cierto para una p-forma exacta, si $p > 2$. Para $p = 1,2$, w es exacta si y sólo si existe $w' \in C^\infty_{p-1}(\Omega, \mathbb{R})$ tal que $w = dw'$. Una 1-forma exacta se escribe entonces en la forma

$$w = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy \quad , \quad f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}),$$

y una 2-forma exacta se escribe

$$w = (\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x})\, dx \wedge dy .$$

Tenemos ahora :

***Teorema* 4.2** . *Para todo* $p \geq 0$, $B_p(\Omega, \mathbb{R}) \subseteq Z_p(\Omega, \mathbb{R})$. *Es decir, toda forma diferencial exacta es cerrada*.

***Demostración* :** Tenemos que demostrar que si $w \in C^2_{p-1}(\Omega)$, $p \geq 1$,

$$d(dw) = 0.$$

Ahora, si $p \geq 2$, ésto es trivial. Queda por considerar el caso $p = 1$. Para $p = 1$, $w = f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$. Pero,

$$dw = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy .$$

Entonces,

$$d(dw) = \{\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\}\; dx \wedge dy$$

Como $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} .$$

Entonces $d(dw) = 0$. Esto demuestra el teorema.

Definición : Sea $p \geq 0$. El $\mathbb{R}$-espacio cociente

$$H^p_R(\Omega, \mathbb{R}) = \frac{Z_p(\Omega, \mathbb{R})}{B_p(\Omega, \mathbb{R})}$$

se denomina el p-ésimo grupo de cohomología de De Rahm de Ω , con coeficientes en $\mathbb{R}$.

Si Ω es conexo, $H^0_R(\Omega, \mathbb{R}) = Z_o(\Omega, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Además, para $p > 2$ se tiene $H^p_R(\Omega, \mathbb{R}) = \{0\}$, no importa como sea Ω .

Más adelante demostraremos que $H^2_R(\Omega, \mathbb{R}) = \{0\}$ *cuando* Ω *es conexo* . Por el momento demostraremos que $H^1_R(\Omega, \mathbb{R}) = 0$ si Ω es simplemente conexo . Este constituye el resultado de Poincaré antes mencionado. Para la demostración necesitaremos del siguiente lema, también debido a Poincaré. Nótese entonces que si Ω es simplemente conexo, $H^p_R(\Omega, \mathbb{R}) = 0$ para todo p . El lector habrá notado ya la semejanza existente, en este caso, entre la cohomología de De Rahm y la cohomología usual.

Lema 4.1 (Poincaré) . Sean Ω un abierto conexo de $\mathbb{C}$, $f\, g \in C(\Omega, \mathbb{R})$,

$w = f\,dx + g\,dy$. Supóngase que

$$\int_\rho f\,dx + g\,dy = 0 ,$$

para toda curva cerrada $\rho \in S_1(\Omega)$. Entonces existe $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = g ,$$

de lo cual $w = dF$.

Demostración : Sea $a \in \Omega$ fijo y sean $\sigma, \rho \in S_1(\Omega)$ tales que $\rho(0) = a$, $\rho(1) = z$, $\sigma(0) = a$, $\sigma(1) = z$. Es claro que $\sigma\rho^{-1} \sim 0$ por ser Ω simplemente conexo. Por lo tanto,

$$\int_{\sigma\rho^{-1}} f\,dx + g\,dy = \int_\sigma f\,dx + g\,dy - \int_\rho f\,dx + g\,dy = 0$$

Se deduce que las integrales

$$\int_\rho f\,dx + g\,dy , \qquad \rho \in S_1(\Omega;\ a,z) ,$$

dependen solamente de a, z, y no de ρ. Escribiremos

$$\int_a^z f\,dx + g\,dy = \int_\rho f\,dx + g\,dy ,$$

si $\rho \in S_1(\Omega, a,z)$. Sea $F : \Omega \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(z) = \int_a^z f\,dx + g\,dy .$$

Es claro que

$$F(z) - F(z') = \int_{z'}^{z} f\,dx + g\,dy , \qquad z' \in \Omega .$$

Supongamos que $z = (x,y)$, $z' = (x+h, y)$. Se tiene

$$F(z') - F(z) = \int_{\rho} f\,dx + g\,dy$$

donde $\rho = (tx + (1-t)(x+h),\ y)$. De esto

$$\frac{F(x+h,\ y) - F(x,y)}{h} - f(x,y) = \int_0^1 (f(tx + (1-t)(x+h),\ y) - f(x,y))\,dt\ ,$$

y por lo tanto

$$\left| \frac{F(x+h,\ y) - f(x,y)}{h} - f(x,y) \right| \leq \int_0^1 |\ f(tx + (1-t)(x+h),y) - f(x,y)\ |\,dt\,.$$

Sean $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, tales que $|z - z'| < \delta$ implique $|f(z) - f(z')| < \varepsilon$. Sea $|h| < \delta$; $|tx + (1-t)(x+h) - x| = |(1-t)h| \leq |h|$, de lo cual

$$|tx + (1-t)(x+h) - x| < \delta \quad \text{y} \quad |f(tx + (1-t)(x+h),\ y) - f(x,y)| < \varepsilon\ .$$

Se deduce que

$$\left| \frac{F(x+h,\ y) - F(x,\ y)}{h} - f(x,\ y) \right| < \varepsilon$$

y de ésto que $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = f(x,y)$. Como un argumento similar demuestra que

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = g(x,y)\ ,$$

el lema queda demostrado.

Nota. Nótese que el lema de Poincaré es *localmente* válido bajo las siguientes hipótesis: $w = f\,dx + g\,dy \in \overset{o}{C_1}(\Omega,\ \mathbb{R})$, Ω arbitrario y

$$\int_{\rho} w = 0$$

para toda $\rho \in S_1(\Omega)$, cerrada y homóloga a 0.

Teorema 4.4 (Poincaré). *Sea* Ω *un abierto simplemente conexo de* $\mathbb{C}$, $w \in Z_1(\Omega, \mathbb{R})$. *Entonces existe* $w' \in C_o^{\infty}(\Omega, \mathbb{R})$ tal que $dw' = w$. *Es decir, toda forma diferencial cerrada sobre* Ω *es exacta: o lo que es lo mismo,* $H_R^1(\Omega, \mathbb{R}) = 0$.

Demostración. Sea $\rho \in S_1(\Omega)$, $\partial\rho = 0$. Como Ω es simplemente conexo, existen $\sigma \in S_2(\Omega)$, $\sigma_k \in S_1(\Omega)$, $k = 1,2,\ldots,m$, los σ_k degenerados, tales que

$$\rho = \partial\sigma + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \sigma_k \,, \qquad \lambda_k \in \mathbb{Z}.$$

Se deduce que

$$\int_{\rho} w = \int_{\partial\sigma} w,$$

y de ésto que

$$\int_{\rho} w = \int_{\sigma} dw = 0.$$

En virtud del lema de Poincaré existe entonces $f \in C_o^1(\Omega, \mathbb{R})$ tal que $df = w$. Como $w \in C_1^{\infty}(\Omega, \mathbb{R})$, es claro que $f \in C^{\infty}(\Omega, \mathbb{R})$. Esto demuestra el teorema.

5. ***Formas diferenciales complejas:*** Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$, $a \in \Omega$. Definiremos

$$\tau_a^*(\Omega) = \{(a,x) \mid x \in \mathbb{C}^2\}.$$

El conjunto $\tau_a^*(\Omega)$ tiene una estructura natural de $\mathbb{C}$-espacio vectorial, dada por las leyes

$$(a,x) + (a,y) = (a, x+y),$$

$$\lambda\,(a,x) = (a, \lambda x), \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Es claro que $T_a^*(\Omega) \subseteq \tau_a^*(\Omega)$ y es un $\mathbb{R}$-subespacio de $\tau_a^*(\Omega)$ (aunque no un $\mathbb{C}$-subespacio). Si $t \in \tau_a^*(\Omega)$,

$$t = (a\,,\,[\,\lambda\,,\,\mu\,]) \quad , \qquad\qquad \lambda\,,\,\mu \in \mathbb{C}\,.$$

Supongamos $\lambda = \alpha + \beta i\,,\ \ \alpha\,,\beta \in \mathbb{R}\ ;\ \ \mu = \rho + \sigma i\ \ ,\ \rho\,,\sigma \in \mathbb{R}$. Entonces

$$t = (a, [\,\alpha\,,\rho\,]) + (a, [\,i\beta,\, i\sigma]) = (a, [\alpha,\,\beta\,]) + i\,(a, [\,\beta\,,\,\sigma\,]\,)\,.$$

Por lo tanto, todo elemento $t \in \tau_a^*(\Omega)$ se escribe, de manera evidentemente única, en la forma

$$t = t_1 + i\,t_2$$

donde $t_1, t_2 \in T_a^*(\Omega)$. Pero

$$t_1 = \alpha_1\, d_a x + \alpha_2\, d_a y \qquad\qquad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

$$t_2 = \beta_1\, d_a x + \beta_2\, d_a y \qquad\qquad \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}\ .$$

De ésto,

$$t = (\,\alpha_1 + \ i\,\beta_1)\, d_a x + (\,\alpha_2 + i\beta_2\,)\, d_a y\,.$$

Esto demuestra que $\{\, d_a x\,,\, d_a y\,\}$ es un sistema de generadores (sobre $\mathbb{C}$) de $\tau_a^*(\Omega)$. Es, además, evidentemente, un sistema libre sobre $\mathbb{C}$. Por lo tanto una base de $\tau_a^*(\Omega)$ sobre $\mathbb{C}$, y

$$dim_{\mathbb{C}}\,(\,\tau_a^*(\Omega)\,) = 2\,.$$

Si definimos

$$d_a z = d_a x + i\,d_a y\,,$$

$$d_a \bar{z} = d_a x - i\,d_a y\,,$$

se tiene

$$d_a x = \frac{1}{2}\,(d_a z + d_a \bar{z}\,)\,,$$

$$d_a y = \frac{1}{2}\,(d_a z - d_a \bar{z}\,)\,.$$

Por lo tanto, $\{ d_a z\,,\ d_a \bar{z} \}$ es también un sistema de generadores (sobre $\mathbb{C}$) de $\tau_a^*(\Omega)$, de lo cual, una base (sobre $\mathbb{C}$) de este espacio. Si $t \in \tau_a^*(\Omega)$, t se escribe entonces, de manera única, en la forma

$$t = \alpha\, d_a z + \beta\, d_a \bar{z} \qquad\qquad \alpha\,,\ \beta\ \in\ \mathbb{C}\,.$$

El $\mathbb{C}$-espacio $\tau_a^*(\Omega)$ se denomina el *espacio cotangente complejo de* Ω *en el punto* a. El conjunto

$$\tau^*(\Omega) \;=\; \bigcup_{a\in\Omega} \tau_a^*(\Omega)$$

se denomina el *fibrado cotangente complejo de* Ω.

Definición 5.1. Una aplicación $w : \Omega \to \tau^*(\Omega)$ tal que $w(a) \in \tau_a^*(\Omega)$ para todo $a \in \Omega$ se denomina una 1-forma diferencial compleja.

Ejemplo : Sea $dz : \Omega \to \tau^*(\Omega)$ definida por

$$dz\,(a) = d_a z\,.$$

Evidentemente dz es una 1-forma diferencial compleja sobre Ω. Lo mismo es cierto de la aplicación $d\bar{z} : \Omega \to \tau^*(\Omega)$ definida por

$$d\bar{z}(a) = d_a \bar{z}\,.$$

Más generalmente, si $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$, la aplicación $w : \Omega \to \tau_a^*(\Omega)$ definida por

$$w\,(a) = f(a)\, d_a z + g\,(a)\, d_a \bar{z}$$

es una 1-forma diferencial compleja sobre Ω, la cual se nota $w = f\,dz + g\,d\bar{z}$.

Recíprocamente :

Teorema 5.1 : *Si $w : \Omega \to r_a^*(\Omega)$ es una 1-forma diferencial compleja, existen $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ tales que*

$$w = f\,dz + g\,d\bar{z} .$$

Demostración : Como $w(a) \in r_a^*(\Omega)$,

$$w(a) = f_a d_a z + g_a d_a \bar{z} , \qquad f_a, g_a \in \mathbb{C} .$$

Basta entonces definir $f(a) = f_a$, $g(a) = g_a$. Esto demuestra el teorema.

Sea ahora $M_2(\mathbb{C})$ el $\mathbb{C}$ - espacio de las matrices de orden 2×2 sobre $\mathbb{C}$, $A_2(\mathbb{C})$ el conjunto de las matrices antisimétricas de orden 2×2 sobre $\mathbb{C}$. Se tiene

$$A_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{bmatrix} 0, & \lambda \\ -\lambda , & 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{C} \right\} .$$

Si $x, y \in \mathbb{C}^2$, definimos

$$x \otimes y = x^T y \in M_2(\mathbb{C}) ,$$

$$x \wedge y = \frac{1}{2}(x \otimes y - y \otimes x) \in A_2(\mathbb{C}) .$$

Como en el caso real, definimos

$$\bigotimes^2 r_a^*(\Omega) = \{ (a,x) \mid x \in M_2(\mathbb{C}) \} ,$$

$$\bigwedge^2 r_a^*(\Omega) = \{ (a,x) \mid x \in A_2(\mathbb{C}) \} ,$$

$$(a,x) \otimes (a,y) = (a, x \otimes y) , \qquad x, y \in \mathbb{C}^2$$

$$(a,x) \wedge (a,y) = (a, x \wedge y) , \qquad x , y \in \mathbb{C}^2$$

Se tiene que $(a,x) \otimes (a,y) \in \bigotimes^2 \tau_a^*(\Omega)$, $(a,x) \wedge (a,y) \in \bigwedge^2 \tau_a^*(\Omega)$. Además, el sistema $\{ d_a z \otimes d_a z ,\ d_a \bar{z} \otimes d_a z ,\ d_a z \otimes d_a \bar{z} ,\ d_a \bar{z} \otimes d_a \bar{z} \}$ es una base de $\bigotimes^2 \tau_a^*(\Omega)$, y el sistema $\{ d_a z \wedge d_a \bar{z} \}$ una base de $\bigwedge^2 \tau_a^*(\Omega)$. El $\mathbb{C}$ - espacio $\bigwedge^2 \tau_a^*(\Omega)$ se denomina el espacio de las 2-formas complejas, y

$$\bigwedge^2 \tau^*(\Omega) = \bigcup_{a \in \Omega} \bigwedge^2 \tau_a^*(\Omega)$$

el fibrado de las 2-formas complejas.

***Definición* 5.2** . Una 2-forma diferencial compleja sobre Ω es una aplicación

$$w : \Omega \to \bigwedge^2 \tau^*(\Omega)$$

tal que $w(a) \in \bigwedge^2 \tau_a^*(\Omega)$ para todo $a \in \Omega$.

Sea $dz \wedge d\bar{z} : \Omega \to \bigwedge^2 \tau^*(\Omega)$ definida por

$$(dz \wedge d\bar{z})(a) = d_a z \wedge d_a \bar{z} .$$

Es claro que $dz \wedge d\bar{z}$ es una 2-forma diferencial sobre Ω . Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$, también lo es la aplicación $w : \Omega \to \bigwedge^2 \tau^*(\Omega)$ definida por

$$w(a) = f(a)\ d_a z \wedge d_a \bar{z} .$$

Tal 2-forma diferencial se nota $w = f\ dz \wedge d\bar{z}$. Recíprocamente :

***Teorema* 5.2** . *Si* $w : \Omega \to \bigwedge^2 \tau^*(\Omega)$ *es una 2-forma diferencial compleja sobre* Ω , *existe* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *tal que*

$$w = f\, dz \wedge d\bar{z} ,$$

para todo $a \in \Omega$.

***Demostración* :** Como $w(a) \in \bigwedge^2 \tau_a^*(\Omega)$,

$$w(a) = f_a \, d_a z \wedge d_a \bar{z} \, , \qquad f_a \in \mathbb{C} \, .$$

Basta entonces tomar $f : \Omega \to \mathbb{C}$ definida por $f(a) = f_a$.

Escribiremos también

$$\overset{0}{\bigwedge} \tau_a^*(\Omega) = \mathbb{C} \, , \qquad \overset{1}{\bigwedge} \tau_a^*(\Omega) = \tau_a^*(\Omega)$$

$$\overset{p}{\bigwedge} \tau_a^*(\Omega) = \{ 0 \} \, , \qquad p > 2 \, .$$

$$\overset{p}{\bigwedge} \tau^*(\Omega) = \bigcup_{a \in \Omega} \overset{p}{\bigwedge} \tau_a^*(\Omega) \, , \qquad p = 0, 1, 2, \ldots$$

Una *p-forma diferencial compleja* es, entonces, una aplicación

$$w : \Omega \to \overset{p}{\bigwedge} \tau^*(\Omega)$$

tal que $w(a) \in \overset{p}{\bigwedge} \tau_a^*(\Omega)$ para todo $a \in \Omega$. Denotaremos por $F_p(\Omega, \mathbb{C})$ al $\mathbb{C}$ - espacio de las p-formas diferenciales complejas. Entonces

$$F_o(\Omega, \mathbb{C}) = F(\Omega, \mathbb{C}) \, ,$$

$$F_1(\Omega, \mathbb{C}) = \{ f \, dz + g \, d\bar{z} \mid f, g \in F(\Omega, \mathbb{C}) \} \quad ,$$

$$F_2(\Omega, \mathbb{C}) = \{ f \, dz \wedge d\bar{z} \mid f \in F(\Omega, \mathbb{C}) \}$$

$$F_p(\Omega, \mathbb{C}) = \{ 0 \} \, , \qquad p > 2 \, .$$

Sustituyendo $F(\Omega, \mathbb{C})$ por $\tilde{D}(\Omega, \mathbb{C})$, $C^q(\Omega, \mathbb{C})$, $\tilde{C}^1(\Omega, \mathbb{C}) = \mathcal{O}(\Omega)$, $\mathcal{J}(\Omega, \mathbb{C})$, se obtienen respectivamente los $\mathbb{C}$-espacios $\tilde{D}_p(\Omega, \mathbb{C})$, $C_p^q(\Omega, \mathbb{C})$, $\tilde{C}_p^1(\Omega, \mathbb{C}) = \mathcal{O}_p(\Omega)$, $J_p(\Omega, \mathbb{C})$.

Claramente se tienen las siguientes inclusiones :

$$\mathcal{O}_p(\Omega) \subsetneq C_p^1(\Omega, \mathbb{C}) \subsetneq J_p(\Omega, \mathbb{C}) \subsetneq F_p(\Omega, \mathbb{C}) \, ,$$

$$\mathcal{O}_p(\Omega) \subsetneq \tilde{D}(\Omega, \mathbb{C}) \subsetneq \mathcal{J}_p(\Omega, \mathbb{C}) \subsetneq F_p(\Omega, \mathbb{C}) \, ,$$

$$C_p^q(\Omega, \mathbb{C}) \subseteq C_p^{q-1}(\Omega, \mathbb{C}).$$

En el capítulo VIII veremos que (Teorema de Goursat)

$$\mathcal{O}_p(\Omega) = \tilde{D}_p(\Omega, \mathbb{C}).$$

Esto reducirá el número de espacios por considerar.

Sea $\mathcal{A}_p = F_p(\Omega, \mathbb{C}), \tilde{D}_p(\Omega, \mathbb{C}), C_p^1(\Omega, \mathbb{C}), J_p(\Omega, \mathbb{C}), \mathcal{O}_p(\Omega)$, y escribamos $\mathcal{A}_o = \mathcal{A}$. El espacio $\mathcal{A}_1$ tiene dos subespacios importantes

$$\mathcal{A}_{(1,0)} = \{ f\,dz \mid f \in \mathcal{A} \},$$

$$\mathcal{A}_{(0,1)} = \{ f\,d\bar{z} \mid f \in \mathcal{A} \}.$$

En el caso especial $\mathcal{A} = \mathcal{O}(\Omega)$,

$$\mathcal{A}_{(1,0)} = \mathcal{O}_{(1,0)}(\Omega) = \{ f\,dz \mid f \in \mathcal{O}(\Omega) \}$$

juega un papel fundamental en análisis complejo. Se denomina el *$\mathbb{C}$-espacio de las diferenciales abelianas.*

Extendamos ahora el operador d de $J_p(\Omega, \mathbb{R})$ a $J_p(\Omega, \mathbb{C})$. Para ello escribamos primero, para $f \in J(\Omega, \mathbb{C})$,

$$\bar{d}f = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}.$$

Si $f \in J(\Omega, \mathbb{R})$,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \{ \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \},$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \{ \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \},$$

entonces

$$\bar{d}f = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right\}\{dx + i\,dy\} + \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right\}\{dx - i\,dy\} = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Esto demuestra que $\bar{d} \mid J(\Omega, \mathbb{R}) = d$. En lugar de $\bar{d}$ escribiremos simplemente d. Es evidente que $d = \bar{d}$ es $\mathbb{C}$-lineal. Para $p = 1$ definamos entonces

$$\bar{d} : J_1(\Omega, \mathbb{C}) \to F_2(\Omega, \mathbb{C})$$

por

$$\bar{d}(f\,dz + g\,d\bar{z}) = df \wedge dz + dg \wedge d\bar{z}.$$

Si $f, g \in J(\Omega, \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\bar{d}(f\,dx + g\,dy) &= \frac{1}{2}\,\bar{d}(f(dz + d\bar{z}) - i\,g(dz - d\bar{z})) = \frac{1}{2}\{d(f - ig) \wedge dz + d(f + ig) \wedge d\bar{z}\}\\ &= Re\{d(f - ig) \wedge dz\} = Re\{(df - i\,dg) \wedge (dx + i\,dy)\}\\ &= df \wedge dx + dg \wedge dy = d(f\,dx + g\,dy).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\bar{d}$ es una extensión de d. Escribiremos $\bar{d} = d$, y es claro que d es $\mathbb{C}$-lineal. Finalmente, para $p \geq 2$, $\bar{d} = 0$. Se ha definido entonces, para todo $p = 0, 1, 2, \ldots$, un operador $\mathbb{C}$-lineal

$$\begin{aligned} d : J_p(\Omega, \mathbb{C}) &\to F_{p+1}(\Omega, \mathbb{C})\\ w &\to dw \end{aligned}$$

tal que

$$d(w_1 + i\,w_2) = dw_1 + i\,dw_2$$

cuando $w_1, w_2 \in J_p(\Omega, \mathbb{R})$.

***Teorema* 5.3**. Si $w = f\,dz + g\,d\bar{z}$, $f, g \in J_1(\Omega, \mathbb{C})$,

$$dw = \left\{\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right\} dz \wedge d\bar{z}.$$

En particular,

$$d(f\,dz) = \frac{\partial f}{\partial \bar z}\, d\bar z \wedge dz\,,$$

y si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$,

$$d(f\,dz) = 0\,.$$

Este último hecho expresa simplemente que $f\,dz$ *es, cuando* $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, *una forma diferencial cerrada.*

Demostración: Como

$$dw = df \wedge dz + dg \wedge dz\,,$$

se tiene

$$dw = \left\{\frac{\partial f}{\partial z}\, dz + \frac{\partial f}{\partial \bar z}\, d\bar z\right\} \wedge dz + \left\{\frac{\partial g}{\partial z}\, dz + \frac{\partial g}{\partial \bar z}\, d\bar z\right\} \wedge d\bar z = \frac{\partial f}{\partial \bar z}\, d\bar z \wedge dz + \frac{\partial g}{\partial z}\, dz \wedge d\bar z$$

pues $dz \wedge dz = d\bar z \wedge d\bar z = 0$, como se comprueba inmediatamente.

Como $d\bar z \wedge dz = -\, dz \wedge d\bar z$,

$$dw = \left\{\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar z}\right\} dz \wedge d\bar z\,.$$

Esto demuestra la primera afirmación. Las otras dos son consecuencias obvias, de ésta, la última teniendo en cuenta que $\frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0$ si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Extendamos ahora el operador de integración a $C_p(\Omega, \mathbb{C})$. Si $f \in C(\Omega, \mathbb{C})$, $\rho \in C_o(\Omega)$, definimos

$$\int_\rho f = f(\rho(0))\,.$$

Si $w \in C_p(w, \mathbb{C})$, $p \geq 1$, entonces $w = w_1 + i\, w_2$ donde $w_1, w_2 \in C_p(\Omega, \mathbb{R})$

Definimos entonces, para $\rho \in C_p(\Omega)$,

$$\int_\rho w = \int_\rho w_1 + i \int_\rho w_2\,.$$

Se comprueba inmediatamente que si $\rho \in C_1(\Omega)$,

$$\int_\rho f\,dz = \int_0^1 f(\rho(t))\,\rho'(t)\,dt,$$

donde suponemos $\rho(t) = \rho_1(t) + i\rho_2(t)$, $\rho_i(t) \in \mathbb{R}$, y donde $\rho'(t) = \rho_1'(t) + i\rho_2'(t)$.

En efecto, si $f = f_1 + i f_2$ con $f_1, f_2 \in C(\Omega, \mathbb{R})$,

$$\int_\rho f\,dz = \int_\rho f_1\,dx - \int_\rho f_2\,dy + i\int_\rho f_1\,dy + i\int_\rho f_2\,dx$$

$$= \int_0^1 f_1(\rho(t))\rho_1'(t)dt - \int_0^1 f_2(\rho(t))\rho_2'(t)\,dt + i\int_0^1 f_1(\rho(t))\,\rho_2'(t)\,dt$$

$$+ i\int_0^1 f_2(\rho(t))\,\rho_1'(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 (f_1(\rho(t)) + i f_2(\rho(t)))\,(\rho_1'(t) + i\,\rho_2'(t))\,dt$$

$$= \int_0^1 f(\rho(t))\,\rho'(t)\,dt.$$

También, si $\rho \in C_2(\Omega)$, es inmediato ver que

$$\int_\rho f\,dz \wedge d\bar{z} = \int_0^1\int_0^1 f(\rho(s,t))\ \mathrm{Det}\ J_\rho\ (s,t)\,ds\,dt.$$

***Teorema* 5.4** (Stokes) *Sean* $w \in C_1^1(\Omega, C)$, $\rho \in C_2(\Omega)$. *entonces*

$$\int_{\partial\rho} w = \int_\rho dw.$$

***Demostración*:** Descomponiendo w en partes real e imaginaria, la afirmación es consecuencia inmediata del teorema de Stokes en el caso real.

Nota: Si $\sigma \in C_p(\Omega)$, $\int_\sigma : C_p^o(\Omega, C) \to C$, dada por $\int_\sigma (w) = \int_\sigma w$, es evidentemente C - lineal. Lo mismo, si $w \in C_p^o(\Omega, C)$, $\int_w : C_p(\Omega) \to C$, definida por $\int_w (\sigma) = \int_\sigma w$, es Z - lineal.

EJERCICIOS

1. Sean $t, t'' \in T_a^*(\Omega)$. Demuestre que

   a) $t \wedge t = 0$ c) $(t+t') \wedge t'' = t\wedge t'' + t'\wedge t''$.

   b) $t \wedge t' = - t' \wedge t$. d) $t \wedge (t' + t'') = t \wedge t' + t \wedge t''$.

2. Sea $S = F(\Omega, \mathbb{R})$, $C(\Omega, \mathbb{R})$, $J(\Omega, \mathbb{R})$, $C^k(\Omega, \mathbb{R})$, $1 \leq k \leq \infty$ y sea S_p el conjunto de las p-formas diferenciales con coeficientes en p. Si $f \in S$, $w \in S_p$, defínase fw por

$$(f\, w)\,(a) = f(a)\; w(a)\,, \qquad a \in \Omega\,.$$

   Demuestre que S_p es un S-módulo libre y que : $dim_S (S_1) = 2$, $dim_S S_2 = 1$, $dim_S (S_o) = 1$, $dim_S (S_p) = 0$ para $p \neq 0, 1, 2$.

3. Sean Ω, Ω' abiertos de C, $\psi : \Omega \to \Omega'$ una aplicación de clase C^∞. Sea $\psi_* : C^\infty(\Omega', \mathbb{R}) \to C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ definida por $\psi_*(f) = f \circ \psi$. Demuestre que ψ es una aplicación $\mathbb{R}$- lineal y que si $\phi : \Omega' \to \Omega''$ entonces $(\phi \circ \psi)_* = \psi_* \circ \phi_*$. Concluya que si ψ es un difeomorfismo, entonces ψ_* es un isomorfismo.

4. Sean ψ, Ω, Ω' como en el ejercicio (3). Para cada $a \in \Omega$ sea $\overset{1}{\bigwedge}\psi_{a*} : T^*_{\psi(a)}(\Omega') \to T_a^*(\Omega)$ definida por

$$\overset{1}{\bigwedge}\psi_{a*}((\psi(a), [\alpha, \beta])) = (a, [\alpha, \beta]\, J_a^T(\psi))\,.$$

Demuestre que $\overset{1}{\bigwedge}\psi_{a*}$ es $\mathbb{R}$ - lineal, y que si $\phi : \Omega' \to \Omega''$ entonces $\overset{1}{\bigwedge}(\phi \circ \psi)_{a*} = \overset{1}{\bigwedge}\psi_{a*} \circ \overset{1}{\bigwedge}\phi_{a*}$. Demuestre que si ψ es un difeomorfismo entonces $\overset{1}{\bigwedge}\psi_{a*}$ es un isomorfismo.

5. Sean ψ, Ω, Ω' como en el ejercicio anterior y sea

$$\overset{1}{\bigwedge}\psi_{*} : C_1^{\infty}(\Omega', \mathbb{R}) \to C_1^{\infty}(\Omega, \mathbb{R})$$

definida por

$$(\overset{1}{\bigwedge}\psi_{*})(w)(a) = \overset{1}{\bigwedge}\psi_{a,*}(w(a)).$$

Demuestre que $\overset{1}{\bigwedge}\psi_{*}$ es $\mathbb{R}$ - lineal y que

$$(\overset{1}{\bigwedge}\psi_{*})(fw) = \psi_{*}(f)(\overset{1}{\bigwedge}\psi_{*}(w)).$$

Demuestre que $\overset{1}{\bigwedge}(\phi \circ \psi)_{*} = \overset{1}{\bigwedge}\psi_{*} \circ \overset{1}{\bigwedge}\phi_{*}$ y que si ψ es un difeomorfismo, $\overset{1}{\bigwedge}\psi_{*}$ es un isomorfismo.

6. Sean ψ, Ω, Ω' como en el ejercicio anterior y sea

$$\overset{2}{\bigwedge}\psi_{a*} : \overset{2}{\bigwedge}T_a^*(\Omega') \to \overset{2}{\bigwedge}T_a^*(\Omega)$$

definida por

$$(\overset{2}{\bigwedge}\psi_{a*})(t \wedge t') = (\overset{1}{\bigwedge}\psi_{a*}(t)) \wedge (\overset{1}{\bigwedge}\psi_{a*}(t')).$$

Demuestre que $\overset{2}{\bigwedge}\psi_{a*}$ es $\mathbb{R}$ - lineal y que si $\phi : \Omega' \to \Omega''$, entonces $\overset{2}{\bigwedge}(\phi \circ \psi)_{a*} = \overset{2}{\bigwedge}\psi_{a*} \circ \overset{2}{\bigwedge}\phi_{a*}$. Concluya que si ψ es un difeomorfismo entonces $\overset{2}{\bigwedge}\psi_{a*}$ es un isomorfismo.

7. Sean ψ, Ω, Ω' como en el ejercicio anterior. Defínase

$$\overset{2}{\bigwedge}\psi_{*} : C_2^{\infty}(\Omega', \mathbb{R}) \to C_2^{\infty}(\Omega, \mathbb{R})$$

por

$$(\overset{2}{\wedge}\psi_*)(w)(a) = (\overset{2}{\wedge}\psi_{a*})(w(a)).$$

Demuestre que $\overset{2}{\wedge}\psi_*$ es $\mathbb{R}$ - lineal y que

$$(\overset{2}{\wedge}\psi_*)(fw) = \psi_*(f) \,.\, \overset{2}{\wedge}\psi_*(w).$$

Demuestre que

$$\overset{2}{\wedge}(\phi \circ \psi)_* = \overset{2}{\wedge}\psi_* \circ \overset{2}{\wedge}\phi_*$$

y que si ψ es un difeomorfismo entonces $\overset{2}{\wedge}\psi_*$ es un isomorfismo.

8. Sean ψ, Ω, Ω' como en el ejercicio anterior. Defínase $\overset{o}{\wedge}\psi_* = \psi_*$, $\overset{p}{\wedge}\psi_* = 0$ si $p \neq 0,1,2$. Demuestre que

$$\overset{p}{\wedge}\psi_* : C_p^\infty(\Omega', \mathbb{R}) \to C_p^\infty(\Omega, \mathbb{R})$$

es un $\mathbb{R}$ - homomorfismo, el cual induce un $\mathbb{R}$ - homomorfismo

$$\overset{p}{\wedge}\psi_{**} : H_R^1(\Omega', \mathbb{R}) \to H_R^1(\Omega, \mathbb{R}),$$

y que si ψ es un difeomorfismo, $\overset{p}{\wedge}\psi_{**}$ es un isomorfismo.

9. Sea Ω un abierto de C , el cual es estrellado con respecto al punto $0 \in \Omega$. Demuestre que $H_R^2(\Omega, \mathbb{R}) = 0$. (Indicación : Sea $w = f\,dx \wedge dy$ y sea

$$g(x,y) = \int_o^1 t\, f(tx, ty)\, dt .$$

Demuestre que

$$g(sx, sy) = \int_o^s t\, f(tx, ty)\, dt \qquad 0 \leq s \leq 1 .$$

Demuestre entonces que

$$x \frac{\partial g}{\partial x}(sx,sy) + y \frac{\partial g}{\partial y}(sx, sy) = s\, f(sx,sy)$$

y concluya que si

$$w'(x,y) = -y\,g(x,y)\,dx + x\,g(x,y)\,dy\,,$$

entonces $dw' = w$).

10. Demuestre que si Ω es un abierto simplemente conexo de C, $H^p_R(\Omega, \mathbb{R}) = 0$ para todo $p \in Z$ (Indicación: use el lema de conformidad).

11. Sea Ω un abierto de C, $f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. Demuestre que

$$\int_\rho df = 0$$

para todo $\rho \in S_1(\Omega)$.

12. Sea Ω un abierto de C, $w \in \overset{o}{C}_1(\Omega, \mathbb{R})$. Demuestre que si $\int_\rho w = 0$ para toda $\rho \in S_1(\Omega)$, ρ cerrada y homóloga a 0, entonces, para todo punto $a \in \Omega$, existen una vecindad U de a en Ω y una función $f \in C^1(U, \mathbb{R})$, tales que $w = df$ en U.

13. Demuestre que la sucesión

$$0 \to \mathcal{O}(\Omega) \overset{i}{\to} C^1(\Omega, C) \overset{\partial/\partial\bar{z}}{\to} C^o(\Omega, C),$$

donde i es la inyección natural, es exacta.

14. Sean $\partial : C^\infty(\Omega, C) \to C^\infty_{(1,0)}(\Omega, C)$ definido por $\partial f = (\partial f/\partial z)\,dz$, $\bar{\partial} : C^\infty(\Omega, C) \to C^\infty_{(0,1)}(\Omega, C)$ definido por $\bar{\partial} f = (\partial f/\partial \bar{z})\,d\bar{z}$. Demuestre que la sucesión

$$0 \to \tilde{C}^\infty(\Omega, C) \overset{i}{\to} C^\infty(\Omega, C) \overset{\bar{\partial}}{\to} C^\infty_{(0,1)}(\Omega, C),$$

donde i es la inyección natural, es exacta. Demuestre que la sucesión

$$0 \to C \to \tilde{C}^{\infty}(\Omega, C) \xrightarrow{\partial} \tilde{C}^{\infty}_{(1,0)}(\Omega, C)$$

es exacta.

15. Sean Ω, Ω' abiertos tales que $a \in \Omega \cap \Omega'$. Qué relación existe entre $T^*_a(\Omega)$ y $T^*_a(\Omega')$?

16. Sea Ω abierto en $\mathbb{R}_p$, $f: \Omega \to \mathbb{R}$ una aplicación continua. Suponga que $f \in C^{\infty}(\Omega - F, \mathbb{R})$ donde F es una subvariedad propia de $\mathbb{R}_p$. Sea

$$\hat{f}_k(x) = \int f(t)\, \delta_k(x-t)\, dt\,.$$

Demuestre que si K es un compacto de Ω, $\hat{f}_k \in C^{\infty}(U, \mathbb{R})$ donde U es una vecindad de K en Ω y que

$$(-1)^{<\alpha>} \frac{\partial^{<\alpha>} \hat{f}_k}{\partial x^{\alpha}} = \int \frac{\partial^{<\alpha>} f}{\partial x^{\alpha}}\, \delta_k(x-t)\, dt\,, \quad x \in U$$

(Indicación : Use integración por partes para demostrar que

$$-\frac{\partial \hat{f}_k}{\partial x_j} = \int \frac{\partial f}{\partial x_j}\, \delta_k(x-t)\, dt\,)\,.$$

17. Sean $\rho \in S_2(\Omega)$, $\sigma = \partial\rho$, $w \in C_1^1(\Omega, \mathbb{R})$. Demuestre que dado $\varepsilon > 0$ existe $k_o \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq k_o$ y

$$\hat{\rho}(s) = \int \rho(t)\, \delta_k(s-t)\, dt$$

entonces

$$\left| \int_{\hat{\rho}} dw - \int_{\rho} dw \right| < \varepsilon$$

$$\left| \int_{\partial\hat{\rho}} w - \int_{\partial\rho} w \right| < \varepsilon.$$

CAPITULO VI

EL TEOREMA DE CAUCHY Y SUS CONSECUENCIAS

El siguiente teorema, debido a Cauchy, es el teorema fundamental de la teoría.

Teorema 1.1. (Cauchy). *Sea* $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. *Entonces, para todo* $\rho \in C_2(\Omega)$,

$$\int_{\partial\rho} f\,dz = 0 .$$

Demostración : En efecto ,

$$\int_{\partial\rho} f\,dz = \int_{\rho} d(f\,dz) = 0 ,$$

pues $d(f\,dz) = 0$. Esto demuestra el teorema.

Corolario 1. (Teorema de Cauchy homológico) . Sea $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Entonces, para todo $\rho \in C_1(\Omega)$, $\rho \sim 0$,

$$\int_{\rho} f\,dz = 0$$

Demostración : En efecto, si $\rho \sim 0$,

$$\rho = \partial\sigma + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \rho_k$$

donde $\sigma \in C_2(\Omega)$ y $\rho_k \in S_1(\Omega)$ es degenerado para todo $k=1,2,\ldots,n$. Como $\rho_k'(t) = 0$ para todo $t \in I$,

$$\int_{\rho_k} f\, dz = 0$$

para $k = 1, 2, \ldots, n$. Entonces

$$\int_{\rho} f\, dz = \int_{\partial\sigma} f\, dz + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \int_{\rho_k} f\, dz = \int_{\partial\sigma} f\, dz = 0$$

en virtud del teorema de Cauchy.

***Corolario* 2.** Sea $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $\rho, \sigma \in C_1(\Omega)$. Si $\rho \sim \sigma$,

$$\int_{\rho} f\, dz = \int_{\sigma} f\, dz .$$

Demostración : En efecto, $\rho - \sigma \sim 0$ y

$$\int_{\rho - \sigma} f\, dz = \int_{\rho} f\, dz - \int_{\sigma} f\, dz .$$

***Corolario* 3.** (Teorema de Cauchy homotópico). Sean $\rho, \sigma \in S_1(\Omega, a)$. Si $\rho \approx \sigma$,

$$\int_{\rho} f\, dz = \int_{\sigma} f\, dz .$$

Si $\rho \approx e_a$,

$$\int_{\rho} f\, dz = 0 .$$

Demostración : En el primer caso, $\rho \sim \sigma$. En el segundo, $\rho \sim 0$.

***Corolario* 4.** Sea Ω un abierto simplemente conexo de C. Entonces

$$\int_\rho f\,dz = 0$$

para toda $\rho \in Z^1(\Omega)$ En particular,

$$\int_\rho f\,dz = 0$$

para toda $\rho \in S_1(\Omega)$ cerrada.

Demostración : En efecto, como Ω es simplemente conexo, $\rho \sim 0$.

Corolario 5 . Sea Ω un abierto de C, $\rho \in C_1(\Omega)$, $\rho \sim 0$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_\rho z^n dz = 0 .$$

Más generalmente, si $p(z)$ es un polinomio,

$$\int_\rho p(z)\,dz = 0 .$$

Demostración : En efecto, z^n, $p(z)$ son holomorfas en Ω.

Definición 1.1. Sea Ω un abierto de C, $a \in C$, $a \notin Im\,\rho$, donde $\rho \in Z_1(\Omega)$. Definimos el índice de ρ con respecto al punto a por medio de la fórmula :

$$Ind_a\,\rho = \frac{1}{2\pi i}\int_\rho \frac{dz}{z-a}$$

Se tiene

Teorema 1.2 . Para todo punto $a \notin \Omega$, $Ind_a\,\rho \in Z$. Si

$$Ind_a : Z_1(\Omega) \to Z$$

es la aplicación $\rho \to Ind_a\rho$,

$$B_1(\Omega) \subseteq Ker\,(Ind_a)$$

y se obtiene entonces, por paso al cociente, una aplicación Z-lineal

$$\tilde{I}nd_a : H_1(\Omega) \to Z$$

dada por $\tilde{I}nd_a(<\rho>) = Ind_a \rho$.

Demostración : Como $a \notin \Omega$, la función

$$f(z) = \frac{1}{z-a}$$

es holomorfa en Ω . Por lo tanto, si $\rho \in B_1(\Omega)$, en cuyo caso $\rho \sim 0$,

$$\int_\rho \frac{dz}{z-a} = 0$$

Esto demuestra que $Ind_a \rho = 0$ y que $B_1(\Omega) \subseteq Ker\,(Ind_a)$. Veamos ahora que $Ind_a \rho \in Z$. Nótese en primer lugar que, en $C - \{a\}$, $\rho \sim c_1^n(a)$ para algún $n \in Z$. Además

$$f(z) = \frac{1}{z-a}$$

es holomorfa en $C - \{a\}$. Por lo tanto

$$\int_\rho \frac{dz}{z-a} = \int_{c_1^n(a)} \frac{dz}{z-a} = n \int_{c_1(a)} \frac{dz}{z-a} ,$$

ya que $c_1^n(a) \sim n\, c_1(a)$. Por otra parte,

$$\int_{c_1(a)} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i \int_0^1 e^{-2\pi i}\, d\theta = 2\pi i .$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\rho \frac{dz}{z-a} = n \in Z ,$$

e $Ind_a \rho \in Z$. Esto demuestra el teorema.

Nota. Sean $\varepsilon, \delta > 0$. Nótese que $c_\delta^n(a) \sim c_\varepsilon^m(a)$ en $\Omega - \{a\}$ si y sólo si $m = n$. En efecto, si $c_\delta^n(a) \sim c_\varepsilon^m(a)$ en $\Omega - \{a\}$,

$$m = Ind_a(c_\delta^n(a)) = Ind_a(c_\varepsilon^m(a)) = n .$$

Recíprocamente, si, por ejemplo, $\delta \leq \varepsilon$,

$$c_\delta^n(a) - c_\varepsilon^n(a) = \partial c_{\delta,\varepsilon}^n(a).$$

Podemos ahora demostrar un resultado que dejamos pendiente en el capítulo II : El teorema 6.4 .

Teorema 1.3. *Sea Ω' un abierto simplemente conexo, $\Omega = \Omega' - \{a\}$.* Entonces, *para todo $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{B}_\varepsilon(a) \subseteq \Omega'$, $\{c_\varepsilon(a)\}$ es una base de $\pi_1(\Omega)$. Además*

$$Ind_a : \pi_1(\Omega) \to Z$$

es un isomorfismo de $\pi_1(\Omega)$ sobre Z.

Demostración : En efecto, $\{c_\varepsilon(a)\}$ genera a $\pi_1(\Omega)$. Por otra parte, si $c_\varepsilon^n(a) \approx 1$, necesariamente

$$n = Ind_a(c_\varepsilon^n(a)) = 0,$$

lo cual demuestra que $\{c_\varepsilon(a)\}$ es un sistema libre. Sea ahora $\rho \in S_1(\Omega)$ y supongamos que

$$\widehat{Ind}_a(\{\rho\}) = Ind_a \rho = 0$$

Se tiene que $\rho \approx c_\varepsilon^n(a)$ para algún $n \in Z$. Por lo tanto,

$$Ind_a \rho = n .$$

De esto $n=0$ y entonces $\rho \approx 1$. Esto demuestra el teorema.

Corolario : Si Ω es simplemente conexo, $a \in \Omega'$, y $\Omega = \Omega' - \{a\}$, entonces $< c_\varepsilon(a) >$ es una base de $H_1(\Omega)$. La aplicación

$$\tilde{Ind}_a : H_1(\Omega) \to Z$$

dada por $\tilde{Ind}_a(<\rho>) = Ind_a \rho$ es un isomorfismo de $H_1(\Omega)$ sobre Z. Además, $\tilde{H}_1(\Omega) \approx \tilde{\pi}_1(\Omega) \approx \pi_1(\Omega) \approx H_1(\Omega)$.

El siguiente resultado, también debido a Cauchy, es de fundamental importancia en análisis complejo.

Teorema 1.4 (Fórmula de Cauchy en un abierto simplemente conexo). *Sea Ω un abierto simplemente conexo de C, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Sea $\rho \in S_1(\Omega)$, ρ cerrada. Entonces, si $a \in \Omega$, $a \notin Im\, \rho$ y*

$$Ind_a \rho = \frac{1}{2\pi i} \int_\rho \frac{dz}{z-a},$$

se tiene

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\rho \frac{f(z)}{z-a}\, dz = f(a)\ Ind_a \rho$$

Demostración : Claramente

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\rho \frac{f(z)}{z-a}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\rho \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\, dz + \frac{1}{2\pi i} \int_\rho \frac{f(a)}{z-a}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\rho \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\, dz +$$

$$+ Ind_a \rho \,.\, f(a)$$

Sea $g(z) = (f(z) - f(a))\,(z-a)^{-1}$. Entonces $g \in \mathcal{O}(\Omega - \{a\})$. Por otra parte, sea $r > 0$ tal que $B_r(a) \subseteq \Omega$. Como $H_1(\Omega - \{a\})$ está generado por $c_\delta(a)$ para todo $\delta > 0$, $\delta < r$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\rho \sim c_\delta^n(a)$$

en $\Omega - \{a\}$. De ésto

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\rho} g(z)\,dz = \frac{n}{2\pi i}\int_{c_{\delta}(a)} g(z)\,dz$$

para todo $\delta > 0$. Sea $\varepsilon > 0$ y escójase $\delta > 0$, $\delta < \varepsilon$, tal que

$$|\, g(z) - f'(a)\,| = |\, \frac{f(z) - f(a)}{z-a} - f'(a)\,| < \varepsilon$$

si $|\, z-a \,| \leq \delta$.

Entonces, para $|z-a| < \delta$,

$$|\, g(z)\,| < |\, f'(a)\,| + \varepsilon \,.$$

Como

$$|\,(\delta\, e^{i\theta} + a) - a\,| = |\,\delta\, e^{i\theta}\,| = \delta \,, \text{ se tiene}$$

$$|\, g\,(\delta\, e^{i\theta} + a)\,| < |\, f'(a)\,| + \varepsilon \,.$$

Ahora,

$$|\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\rho} g(z)\,dz\,| = |\,\frac{n}{2\pi i}\int_{c_{\delta}(a)} g(z)\,dz\,| = \frac{n}{2\pi}\,|\int_{o}^{2\pi} g(\delta\, e^{i\theta} + a) e^{-i\theta}\,\delta\, d\theta|$$

$$\leq \frac{n\delta}{2\pi}\int_{o}^{2\pi} |g(\delta\, e^{i\theta} + a)\,|\, d\theta \leq \frac{n\delta}{2\pi}\,|f'(a) + \varepsilon| \cdot 2\pi$$

$$\leq n\,\varepsilon\{|\, f'(a)\,| + \varepsilon\}.$$

De esto, dado que ε es arbitrario y n es fijo,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\rho} g(z)\,dz = 0 \,.$$

El teorema está demostrado.

Corolario (Fórmula de Cauchy local). Sea Ω un abierto de C, $a \in \Omega$, $r > 0$ tal que $B_r(a) \subseteq \Omega$. Sea $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Entonces, para toda $\rho \in S_1(\Omega)$, cerrada, tal que $Im\, \rho = \{ \rho(t) \mid t \in I \} \subseteq B_r(a)$,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\rho \frac{f(z)}{z-a}\, dz = Ind_a \rho\ f(a).$$

Demostración: En efecto, $f \in \mathcal{O}(B_r(a))$ y $\rho \in S_1(B_r(a))$. El corolario resulta entonces del teorema 1.4, teniendo en cuenta que $B_r(a)$ es simplemente conexo.

Nota: Sea $\rho \in S_1(\Omega)$. Es corriente escribir

$$\int_\rho | dz | = \int_0^1 | \rho'(t) |\, dt, \quad \int_\rho f(z)\, |dz| = \int_\rho f(\rho(t))\, |\rho'(t)|\, dt$$

donde $\rho'(t) = \rho_1'(t) + i\, \rho_2'(t)$, supuesto que $\rho(t) = \rho_1(t) + i\, \rho_2(t)$, $\rho_1(t) \in \mathbb{R}$, $\rho_2(t) \in \mathbb{R}$. La integral $\int_\rho |dz|$ se denomina la **longitud** de ρ y se denota por $L(\rho)$. Es claro que $L(\rho) < +\infty$. Además, si f es continua en Ω,

$$\left| \int_\rho f(z)\, dz \right| \leq \sup_{z \in Im\,\rho} |f(z)| \int_\rho |dz| = \sup_{z \in Im\,\rho} |f(z)|\, L(\rho),$$

como se comprueba inmediatamente.

Teorema 1.5. *Sea* $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, y sean $w = f\,dz$, y

$$I_w : Z_1(\Omega) \to C$$

la aplicación Z - lineal

$$I_w(\rho) = \int_\rho w.$$

Entonces $\overline{B}_1(\Omega) \subseteq Ker(I_w)$ y por lo tanto I_w define, por paso al cociente, una aplicación Z - lineal

$$\tilde{I}_w : \dot{H}_1(\Omega) \to C ,$$

dada por

$$\tilde{I}_w(<\rho>) = \int_\rho w .$$

Demostración : Si $\rho \in \overline{B}_1(\Omega)$,

$$\rho = \partial\sigma + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \rho_k , \qquad \lambda_k \in Z ,$$

donde $\sigma \in C_2(\Omega)$ y ρ_k es un 1 - cubo degenerado. Entonces

$$\int_\rho w = 0 ,$$

y por lo tanto $\rho \in Ker\,(I_w)$.

Teorema 1.6 . *Sea $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, y sean $w = f\,dz$, y $J_w : S_1(\Omega, a) \to C$ la aplicación definida por*

$$J_w(\rho) = \int_\rho w .$$

Entonces J_w es compatible con la relación de equivalencia de homotopía sobre $S_1(\Omega, a)$ y por lo tanto define por paso al cociente una aplicación

$$\tilde{J}_w : \pi_1(\Omega, a) \to C$$

dada por

$$\tilde{J}_w(\{\rho\}) = \int_\rho w .$$

Demostración . En efecto, $\rho \approx \rho'$ implica $J_w(\rho) = J_w(\rho')$.

2. *Integración de funciones holomorfas sobre curvas continuas.*

Sea $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Para todo $\rho \in S_1(\Omega)$ la integral

$$\int_\rho f\,dz$$

está perfectamente definida. Por otra parte, tal como hicimos en el Teorema 4.1 del capítulo II, podemos demostrar que si $\rho \in \tilde{S}_1(\Omega)$, existe $\sigma \in S_1(\Omega)$ tal que $\sigma \approx \rho$. Además, si $\sigma' \in S_1(\Omega)$ es también homótopa a ρ, $\sigma \approx \sigma'$ y entonces

$$\int_\sigma f\,dz = \int_{\sigma'} f\,dz.$$

Podemos definir entonces, para $\rho \in \tilde{S}_1(\Omega)$,

$$\int_\rho f\,dz = \int_\sigma f\,dz,$$

donde σ es cualquier curva en $S_1(\Omega)$, homótopa a ρ. Queda entonces definida la integral de una 1-forma holomorfa sobre cualquier curva continua, y es claro que a partir de ella podemos definir

$$\int_\rho f\,dz$$

cuando $\rho \in \tilde{C}_1(\Omega)$, así como operadores

$$\tilde{I}_f : \tilde{H}_1(\Omega) \to C$$

$$\langle\rho\rangle \to \int_\rho f\,dz$$

$$\tilde{J}_f : \pi_1(\Omega) \to C$$

$$[\rho] \to \int_\rho f\,dz.$$

También, si $\Omega = \Omega' - \{a\}$ con Ω' simplemente conexo, podemos definir isomorfismos

$$\widehat{Ind}_a : \tilde{\pi}_1(\Omega) \to Z$$

$$\hat{Ind}_a : \tilde{H}_1(\Omega) \to Z$$

por

$$\hat{Ind}_a(<\rho>) = \hat{Ind}_a([\rho]) = \frac{1}{2\pi i} \int_\rho \frac{dz}{z-a} .$$

Sinembargo, por ciertas razones, preferiremos seguir integrando sobre curvas suaves.

Ejercicios

1. Por un arco abierto simple de $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ se entiende un subconjunto S de Ω para el cual existen $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$ y $\rho : I(a,b) \to \Omega$, suave tales que $\rho(I(a,b)) = S$ (aquí $I(a,b)$ es cualquiera de los intervalos de origen a y extremo b). Se dice que ρ es una parametrización de S. Si $I(a,b) = [a,b]$, ρ es una parametrización de S, y si ρ es inyectiva en $[a,b)$ y en $(a,b]$, se dice que S es un arco cerrado simple.

   (a) Demuestre que si $\rho \in S_1(\Omega)$ es una curva simple, ρ es una parametrización de $S = Im\,\rho$.

   (b) Sea $w \in C_1(\Omega, \mathbb{R})$, S un arco de Ω, $\rho : I(a,b) \to \Omega$ una parametrización de S. Se define

$$\int_{S,\rho} w = \int_a^b w(\rho(t))\,\rho'(t)\,dt \;,\; \rho'(t) = J_\rho(t) .$$

   Demuestre que si $\sigma : I(c,d) \to \Omega$ es otra parametrización de S, también

$$\int_{S,\rho} w = \int_{S,\sigma} w$$

   (c) Defínase entonces

$$\oint_S w = \int_{S,\rho} w .$$

Demuestre que si $\rho \in S_1(\Omega)$ y $S = Im\,\rho$,

$$\oint_S w = \int_\rho w .$$

(d) Si $-\infty < a < b < +\infty$ y si $\rho : [a,b] \to \Omega$ es una parametrización de S, existe $\sigma \in S_1(\Omega)$ tal que $S = Im\,\sigma$.

(e) Sea

$$L(S) = \oint_S ds = \int_a^b || \rho'(t) || \, dt ,$$

donde ρ es una parametrización de S. Demuestre que $L(S)$ es independiente de ρ. $L(S)$ se denomina la longitud de S. Para $x \in I(a,b)$ defínase $L : I(a,b) \to \Omega$ por

$$L(x) = \int_a^x || \rho'(t) || \, dt .$$

Demuestre que $L \in C^\infty(I(a,b), \Omega)$ y que L es inyectiva. Defínase entonces $s : [0, L(b)] \to \Omega$ por $s = \rho \circ L^{-1}$. Demuestre que s es una parametrización suave de S y que $|| s'(t) || = 1$ para todo $t \in [0, L(S)]$. s se denomina la parametrización de S por longitud de arco. Dé una parametrización por longitud de arco del 1-rectángulo $\{ (x,y) \mid |x| + |y| = 1 \}$. Dé una parametrización por longitud de arco de $Im\, c_1(0)$. Sea ρ una parametrización de S de clase C^∞ tal que $|| \rho'(t) || = 1$. Demuestre que ρ es una parametrización de S de clase C^∞ tal que $|| \rho'(t) || = 1$. Demuestre que ρ es una parametrización de S por longitud de arco.

2. Generalice la noción de índice, el teorema de Cauchy y la fórmula de Cauchy a los arcos cerrados.

3. Calcule las siguientes integrales usando la fórmula de Cauchy para los ar-

cos :

a) $\oint_C \frac{dz}{z}$, C la circunferencia unidad Resp. : $2\pi i$

b) $\oint_C z^2 dz$, C la circunferencia unidad. Resp. : 0

c) $\oint_C z\,dz$, C el cuadrado de vértices $1+i$, $-1+i$,$+1$,$-i$, $1-i$. Resp. : 0

d) $\oint_C z^2 \operatorname{sen} z\,dz$, $C = \{ (x,y) \mid x^2 + 2y^2 = 1 \}$ Resp. : 0

e) $\oint_C \frac{z^2}{z+1}\,dz$, $C = \{ z \mid |z-2| = 1 \}$. Resp. : 0

f) $\oint_C \frac{z}{z-3}\,dz$, $C = \{ z \mid |z| = 5 \}$. Resp. : $6\pi i$

g) $\oint_C \frac{e^z}{z^2-3z}\,dz$, $C = \{ z \mid |z| = 1 \}$. Resp. : $-\frac{2\pi i}{3}$

h) $\oint_C \frac{z-2}{z^2-1}\,dz$, $C = \{ z \mid |z| = 2 \}$. Resp. : $2\pi i$

i) $\oint_C \frac{\operatorname{sen} z}{z^2+1}\,dz$, $C = \{ z \mid |z| = 2 \}$. Resp. : $2\pi i \frac{e^i - e^{-i}}{2}$

CAPITULO VII

EL TEOREMA DE GOUSART

El teorema de Gousart representa uno de los resultados más sorprendentes de la matemática : *El hecho de que la C-derivada de una función C-diferenciable es automáticamente continua y, más aún, también C-diferenciable.* Se tiene entonces

$$\tilde{D}(\Omega, C) = \tilde{C}^1(\Omega, C)$$

y puesto que

$$\tilde{C}^{1}(\Omega, C) \subseteq \mathcal{O}(\Omega) \subseteq \tilde{C}^{1}(\Omega, C),$$

también

$$\tilde{C}^{1}(\Omega, C) = \tilde{D}(\Omega, C) = \mathcal{O}(\Omega).$$

Más aún, puesto que si $f \in \tilde{D}(\Omega, C)$ también $f' \in \tilde{D}(\Omega, C)$, Se deduce que $f' \in \tilde{C}^{1}(\Omega, C)$, o sea, que

$$\tilde{D}(\Omega, C) \subseteq \tilde{C}^{2}(\Omega, C)$$

donde $\tilde{C}^{2}(\Omega, C)$ es el C-espacio de las funciones $f: \Omega \to C$ tales que f' y $f^{(2)} = (f')'$ existen y son continuas. Como a su vez, $f^{(2)} \in \tilde{D}(\Omega, C)$, podemos continuar hasta demostrar que para cualquier $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, $f \in \tilde{C}^{k}(\Omega, C)$, donde $\tilde{C}^{k}(\Omega, C)$ es el C-espacio de las funciones $f: \Omega \to C$ tales que f', $f^{(2)} = (f')'$, $f^{(3)} = (f^{(2)})'$, ..., $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$ existen y son continuas. Como claramente $\tilde{C}^{k}(\Omega, C) \subseteq \tilde{C}^{1}(\Omega, C)$, se tendrá entonces

$$\mathcal{O}(\Omega) = \tilde{D}(\Omega, C) = \tilde{C}^{k}(\Omega, C) = \bigcap_{j=0}^{\infty} \tilde{C}^{j}(\Omega, C) = \tilde{C}^{\infty}(\Omega, C)$$

para todo k. Nótese que $\tilde{C}^{\infty}(\Omega, C)$ definido por la anterior igualdad es el C-espacio de las funciones $f: \Omega \to C$ tales que $f^{(j)}$ existe para todo $j = 0, 1, 2, \ldots$, y es además continua. La situación es enteramente diferente en el caso de funciones $f: \Omega \to \mathbb{R}$, Ω abierto en $\mathbb{R}$. Por ejemplo, si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la aplicación

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

entonces f es $\mathbb{R}$-derivable en todo punto $a \in \mathbb{R}$. Además, $f'(0) = 0$, mientras que

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f'(x) \neq 0$$

De hecho, este último límite no existe,

La demostración del teorema de Gousart tiene como punto clave la demostración de una forma elemental del teorema de Cauchy para funciones C-diferenciables, y luego de una versión elemental de la fórmula de Cauchy para estas funciones. Para ello necesitaremos de algunos conceptos preliminares : Por un *Rectángulo de* Ω se entiende un 2-cubo de la forma

$$R(\theta\, , t) = (a,b) + (r_1\theta\, , r_2 t)$$

donde $(a,b) \in \Omega$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1, r_2 \geq 0$ son fijos. El punto (a,b) se dice el vértice principal de R.

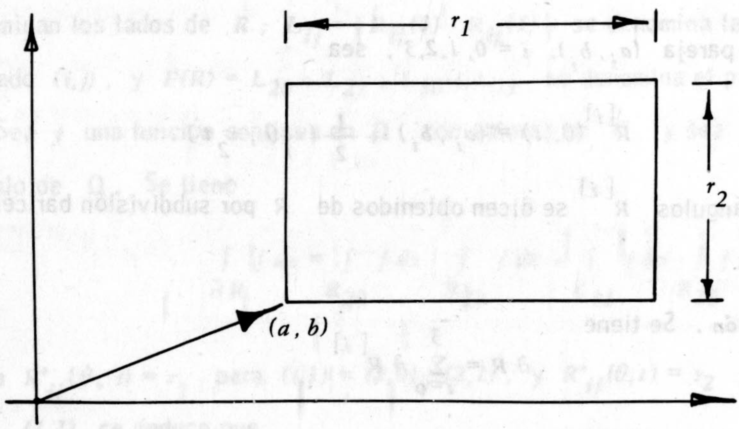


Fig.1.1. Un Rectángulo en Ω de vértice principal (a,b)

Si $r_1 = r_2$, R se dice un *cuadrado*. Sea

$$R(\theta, t) = (a,b) + (r_1\theta', r_2 t)$$

un Rectángulo en Ω . Sean $(a_o, b_o) = (a,b)$, (a_1, b_1) el punto medio del segmento $[R_{10}(0), R_{10}(1)]$, (a_2, b_2) el punto medio del segmento $[R_{20}(0), R_{20}(1)]$, $(a_3, b_3) = [R_{10}(0), R_{11}(1)] \cap [R_{20}(0), R_{21}(1)]$, Ver (Fig. 1.2)

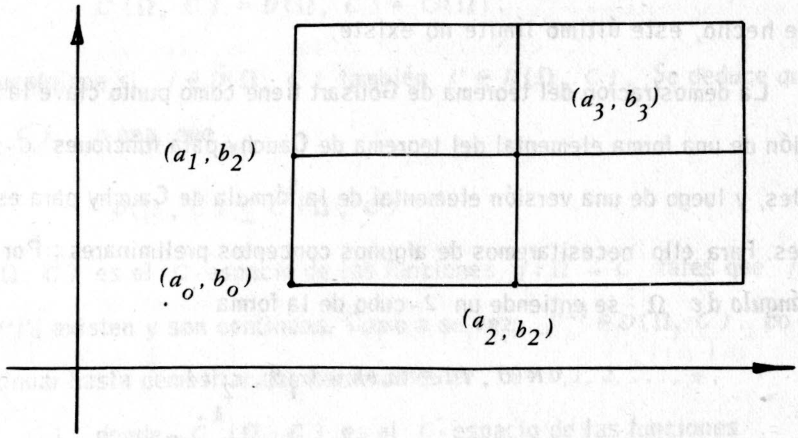


Fig. 1.2

Para cada pareja (a_i, b_i), $i = 0, 1,2,3$, sea

$$R^{[i]}(\theta, t) = (a_i, b_i) + \frac{1}{2}(r_1\theta, r_2 t).$$

Los Rectángulos $R^{[i]}$ se dicen obtenidos de R por subdivisión baricéntrica de R .

Proposición . Se tiene

$$\partial R = \sum_{i=o}^{3} \partial R^{[i]} \tag{1.1}$$

Demostración . Inmediata

Más generalmente, de la proposición anterior se deduce que si $R^{[i,j]}$ se obtiene de $R^{[i]}$ por subdivisión baricéntrica,

$$\partial R = \sum_{i=o}^{3} \sum_{j=o}^{3} \partial R^{[i,\, j]} \, , \tag{1.2}$$

de lo cual, sucesivamente,

$$\partial R = \sum_{i_1=o}^{3} \sum_{i_2=o}^{3} \dots \sum_{i_n=o}^{3} \partial R^{[i_1, \dots, i_n]} \tag{1.3}$$

donde $R^{[i_1, \dots, i_n]}$ se obtiene de $R^{[i_1, \dots, i_{n-1}]}$ por subdivisión baricéntrica.

Es claro además que $R \sim R^{[i_1, \dots, i_n]}$.

Un punto $(x,y) \in \Omega$ se dice de R si $(x,y) = R(\theta, t)$ para algún $(\theta, t) \in I^2$. Si $(x,y) = R(\theta, t)$ y $0 < \theta < 1$, $0 < t < 1$, (x,y) se dice un punto interior de R. Es fácil ver que (x,y) es interior a R si y sólo si $(x,y) \in (Im\ R)^o$ en el sentido topológico. Los segmentos $[\, R_{ij}(0) \, , \, R_{ij}(1) \,]$, $i = 1, 2,$ $j = 0, 1,$ se denominan los lados de R ; $L_{ij} = |\, R_{ij}(0) - R_{ij}(1) \,|$ se denomina la longitud del lado (i,j) , y $P(R) = L_{20} + L_{21} + L_{10} + L_{11}$ se denomina el perímetro de R . Sea f una función continua en Ω , con valores en C , y sea R un Rectángulo de Ω . Se tiene

$$\int_{\partial R} f\, dz = \int_{R_{20}} f\, dz - \int_{R_{21}} f\, dz + \int_{R_{11}} f\, dz - \int_{R_{10}} f\, dz \, . \tag{1.4}$$

Como $R'_{ij}(\theta, t) = r_1$ para $(i,j) = (2,0)$, $(2,1)$, y $R'_{ij}(\theta, t) = r_2$ para $(i,j) = (1,0)$, $(1,1)$, se deduce que

$$|\int_{\partial R} f\, dz \,| \leq \sup_{z \in R} |\, f(z) \,| \, |\, P(R) \,| \tag{1.5}$$

donde $R = Im\ R$. La relación (1.5) nos será de utilidad inmediata. Por otra parte, si $R^{[i_1,\ldots,i_n]}$ es la n-ésima subdivisión baricéntrica de R, se sigue de (1.3) que

$$\int_{\partial R} f\,dz = \sum_{i_1\ldots i_n=0}^{3} \int_{\partial R^{[i_1,\ldots,i_n]}} f\,dz \tag{1.6}$$

Es un ejercicio fácil para el lector comprobar que la relación anterior vale igualmente para cualquier subdivisión de R en rectángulos cobordantes y mutuamente disyuntos entre sí. Se tiene además

$$P(R^{[i_1\ldots i_n]}) = \frac{1}{2^n} P(R) \tag{1.7}$$

como se comprueba inmediatamente de la definición de subdivisión baricéntrica. Tenemos ahora :

Lema 1.1 (Goursat). Sea R un rectángulo de Ω. Entonces

$$\int_{\partial R} f\,dz = 0 \tag{1.8}$$

para toda función $f:\Omega \to C$, continua en Ω y C-diferenciable en $\Omega - \{a\}$, $a \in \Omega$.

Demostración: Supongamos primero que $a \notin Im\,R$. Sea $R^{[i]}$ la primera subdivisión baricéntrica de R. Se tiene

$$\int_{\partial R} f\,dz = \sum_{i=0}^{3} \int_{\partial R^{[i]}} f\,dz\,.$$

Por lo tanto

$$\left|\int_{\partial R} f\,dz\right| \leq \sum_{i=0}^{3} \left|\int_{\partial R^{i}} f\,dz\right|.$$

Esto implica que debe existir $j \in \{0, 1, 2, 3\}$ tal que

$$\left| \int_{\partial R^{[j]}} f\,dz \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial R} f\,dz \right| .$$

Sea $R_1 = R^{[j]}$. Si $R_1^{[i]}$ es la primera subdivisión baricéntrica de R_1, debe existir de nuevo j tal que

$$\frac{1}{4} \left| \int_{\partial R_1} f\,dz \right| \geq \left| \int_{\partial R_1^{[j]}} f\,dz \right| .$$

Sea $R_2 = R_1^{[j]}$. Se obtiene así una sucesión $R = R_o, R_1, \ldots, R_n, \ldots$ de Rectángulos, tal que $Im\, R_n \subseteq Im\, R_m$ si $n \geq m$, y tal que

$$\frac{1}{2^{n+1}} \left| \int_{\partial R} f\,dz \right| \geq \left| \int_{\partial R_n} f\,dz \right|$$

Si $\overline{R}_n = Im\, R_n$, $\{ \overline{R}_n \mid n \geq 0 \}$ es una sucesión decreciente de conjuntos compactos, y existe por lc tanto $b \in \bigcap_{n=o}^{\infty} \overline{R}_n \subset \overline{R}$. Como $b \neq a$, f es C- diferenciable en una vecindad de b. Sean $\varepsilon, \delta > 0$ tales que f sea C-diferenciable en $|z-b| < \delta$, que $\overline{R}_n \subseteq B_\delta(b)$ para $n \geq m_o$, que $\delta \leq \varepsilon$ y que

$$\left| \frac{f(z) - f(b)}{z-b} - f'(b) \right| \leq \varepsilon$$

para todo $z \in B_\delta(b)$. Se tiene entonces, para $z \in B_\delta(b)$,

$$| f(z) - f(b) - f'(b)(z-b) | \leq | z-b | .$$

Por otra parte,

$$\int_{\partial R'} z^n\,dz = 0$$

cuaiquiera que sea el rectángulo R' de Ω y cualquiera que sea $n \geq 0$. Esto es un corolario del teorema de Cauchy. Por lo tanto,

$$\int_{\partial R_n} f\,dz = \int_{\partial R_n} (f(z) - f(b) - (z-b) f'(b))\,dz ,$$

de lo cual, para $n \geq 2$,

$$\left| \int_{\partial R_n} f\,dz \right| \leq \sup_{z \in \overline{R}_n} | f(z) - f(b) - (z-b) f'(b) | \, P(R_n) \leq 4\,\varepsilon |z-a|\, P(R_n) \leq 4\,\varepsilon^2 \frac{1}{2n} P(R)$$

$$= \frac{1}{2^{n-2}}\, \varepsilon^2 (P(R)) .$$

Entonces

$$\left| \int_{\partial R} f\,dz \right| \leq \frac{2^{n+1}}{2^{n-2}}\, \varepsilon^2 P(R) = 8\,\varepsilon^2 P(R) .$$

Como ε es arbitrario, esto implica

$$\int_{\partial R} f\,dz = 0 .$$

Supongamos ahora $a \in Im\,R$. Sea $R_1, \ldots, R_m$ una subdivisión baricéntrica lo suficientemente fina para que

$$4\,P(R_k) < \varepsilon , \quad k = 1, 2, \ldots, m ,$$

donde $\varepsilon > 0$ está arbitrariamente dado. El punto a pertenece a lo más a cuatro de los Rectángulos R_k: digamos, $R_{k_1}, R_{k_2}, R_{k_3}, R_{k_4}$. Como

$$\int_{\partial R} f\,dz = \sum_{k=1}^{m} \int_{\partial R_k} f\,dz$$

y $a \notin Im\,R_k$ si $k \neq k_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, $\int_{R_k} f\,dz = 0$. Por lo tanto,

$$\int_{\partial R} f\,dz = \sum_{i=1}^{4} \int_{\partial R_{k_i}} f\,dz .$$

Se deduce inmediatamente que

$$\left| \int_{\partial R} f\,dz \right| \leq \varepsilon \sup_{z \in \overline{R}} |f(z)| , \qquad \overline{R} = Im\, R ,$$

de lo cual, también

$$\int_{\partial R} f\,dz = 0 .$$

Sea ahora $f : \Omega \to C$, C-diferenciable, y sea $a \in \Omega$.

Sea

$$g(z) = \frac{f(z) - f(z)}{z - a} , \qquad z \in \Omega - \{a\} .$$

Es claro que g es C-diferenciable en $\Omega - \{a\}$, y puesto que

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = f'(a) ,$$

si escribimos $g(a) = f'(a)$, g es continua en Ω . Sea R un rectángulo de Ω tal que a es un punto interior de R . Entonces

$$\int_{\partial R} g\,dz = 0 ,$$

De ésto

$$\int_{\partial R} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = f(a) \int_{\partial R} \frac{dz}{z-a} .$$

Calculemos la integral del segundo término. Como $a \in (Im\, R)^o$, sea $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{B}_\varepsilon(a) \subseteq (Im\, R)^o$. Nos proponemos demostrar que

$$c_\varepsilon(a) \sim \rho$$

en $\Omega - \{a\}$, donde $\rho = R_{20} \cdot R_{11} \cdot R_{21}^{-1} R_{10}^{-1}$. Claramente no hay pérdida de generalidad en suponer que $a = (0,0)$. Sea

$$\hat{\rho}(t) = \frac{\varepsilon}{|\rho(t)|}\rho(t).$$

Entonces, $Im\,\hat{\rho} \subseteq Im\,c_{\varepsilon}(a)$, y $\hat{\rho}$ es una curva cerrada. Si γ es el arco de $c_{\varepsilon}(a)$ que va desde $c_{\varepsilon}(a)(0)$ hasta $\hat{\rho}(0)$, entonces $c_{\varepsilon}(a) \approx \gamma\,\hat{\rho}\,\gamma^{-1}$ en $\Omega - \{a\}$, y por lo tanto

$$c_r(a) \sim \hat{\rho}, \quad \text{en} \quad \Omega - \{a\}.$$

Por otra parte, si

$$\sigma(\theta, t) = (1-\theta)\,\rho(t) + \theta\,\hat{\rho}(t),$$

$\sigma \in S_2(\Omega - \{a\})$, y $\partial\rho = \hat{\rho} - \rho$, de modo que también $\hat{\rho} \sim \rho$ en $\Omega - \{a\}$. Se deduce $\rho \sim c_{\varepsilon}(a)$ en $\Omega - \{a\}$. Teniendo en cuenta que $1/z-a$ es holomorfa en $\Omega - \{a\}$, se sigue del teorema de Cauchy que

$$\int_{\rho} \frac{dz}{z-a} = \int_{c_{\varepsilon}(a)} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i,$$

o sea que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\rho} \frac{dz}{z-a} = 1.$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = f(a) \tag{1.9}$$

La relación (1.9) es una fórmula del tipo de Cauchy para las funciones C-diferenciales. Ahora bien, si h es pequeño, también

$$f(a+h) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R} \frac{f(z)}{z-a-h}\,dz$$

pues $a+h \in (Im\,R)^o$. Pero entonces

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R} \frac{f(z)}{(z-a-h)(z-a)}\, dz .$$

Veamos ahora que

$$\lim_{h\to o} \int_{\partial R} \frac{f(z)}{(z-a-h)\,(z-a)}\, dz = \int_{\partial R} \frac{f(z)}{(z-a)^2}\, dz .$$

Se tiene,

$$\left| \int_{\partial R} \left(\frac{f(z)}{(z-a-h)\,(z-a)} - \frac{f(z)}{(z-a)^2} \right) dz \right| = \left| \int_{\partial R} \frac{h\, f(z)}{(z-a-h)\,(z-a)^2}\, dz \right|$$

$$= | h | \left| \int_{\partial R} \frac{f(z)}{(z-a-h)\,(z-a)^2}\, dz \right| .$$

Pero, para todo h convenientemente pequeño y $z \in \partial R$, $| z-a-h |$ se mantiene mayor que una constante $r > 0$. Si

$$S = \sup_{z\in\partial R} | f(z) | ,$$

$$\left| \int_{\partial R} \frac{f(z)\;dz}{(z-a-h)\,(z-a)} - \int_{\partial R} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2} \right| \leq |h| \left| \int_{\partial R} \frac{S}{r^3}\, dz \right| \leq | h |\, P(R)\,.\frac{S}{r^3}$$

y es claro que el último miembro a la derecha tiende a cero cuando $h \to 0$. Por lo tanto,

$$f'(a) = \lim_{h\to o} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R} \frac{f(z)}{(z-a)^2}\, dz ,$$

y para h pequeño, también

$$f'(a+h) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R} \frac{f(z)}{(z-a-h)^2}\, dz .$$

Un raciocinio idéntico al anterior muestra que

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(z)}{(z-a-h)^2}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(z)}{(z-a)^2}\, dz ,$$

o sea,

$$\lim_{h\to 0} f'(a+h) = f'(a)$$

Esto demuestra que f' es continua en a. Entonces :

Teorema 1.1 (Goursat) *Sea Ω un abierto de C. Para que una aplicación $f:\Omega \to C$ sea C-diferenciable es necesario y suficiente que f sea holomorfa. Es decir,*

$$\mathcal{O}(\Omega) = \tilde{D}(\Omega, C) = \tilde{C}^1(\Omega, C).$$

Teorema 1.2 (Goursat) *Sea $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Entonces $f^{(k)}$ existe para todo $k = 0,1,2,\ldots, n, \ldots$ y es continua en Ω. Se tiene entonces*

$$\mathcal{O}(\Omega) = \tilde{D}(\Omega, C) = \tilde{C}^1(\Omega, C) = \tilde{C}^k(\Omega, C) = \tilde{C}^\infty(\Omega, C)$$

para todo k, donde

$$\tilde{C}^\infty(\Omega, C) = \bigcap_{j=0}^{\infty} \tilde{C}^j(\Omega, C).$$

También ,

$$\mathcal{O}_p(\Omega) = \tilde{D}_p(\Omega, C) = \tilde{C}_p^1(\Omega, C) = \tilde{C}_p^k(\Omega, C) = \tilde{C}_p^\infty(\Omega, C),$$

para todo $p = 0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$

Demostración : Claramente todo se reduce a demostrar que si $f \in \tilde{D}(\Omega, C)$, también $f' \in \tilde{D}(\Omega, C)$. Sea R un rectángulo de Ω, $a \in \Omega$, el cual es interior a R. Como demostramos anteriormente, si $f \in \tilde{D}(\Omega, C)$,

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(z)}{(z-a)^2}\, dz .$$

Para h pequeño se tiene también

$$f'(a+h) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(z)}{(z-a-h)^2} dz .$$

Entonces

$$\frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{(2(z-a)-h) f(z)}{(z-a-h)^2 (z-a)^2} dz ,$$

y es fácil ver que

$$\lim_{h \to 0} \int_{\partial R} \frac{(2(z-a)-h) f(z)}{(z-a-h)^2 (z-a)^2} dz = 2 \int_{\partial R} \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz .$$

Por lo tanto

$$f''(a) = \frac{1}{\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz .$$

Esto demuestra el teorema.

Nota : Si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ y $a \in \Omega$, es fácil ver, por un argumento basado en el principio de inducción, que

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{c_\varepsilon(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz ,$$

donde $\varepsilon > 0$ es lo suficientemente pequeño para que $\overline{B_\varepsilon(a)} \subseteq \Omega$. Dejamos al lector la demostración de este hecho. Más adelante volveremos sobre esto.

Ejercicios

1. Sea $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ y sea $a \in \Omega$. Demuestre por inducción sobre n que

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{c_\varepsilon(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz , \quad \overline{B_\varepsilon(a)} \subseteq \Omega .$$

2. Sea R un rectángulo de Ω. Demuestre que

$$\partial R = \sum_{i_1=o}^{3} \cdots \sum_{i_n=o}^{3} \partial R^{[i_1, \ldots, i_n]}$$

y que $R \sim R^{[i_1, \ldots, i_n]}$

3. Demuestre (Ver el ejercicio 14 del capítulo V) que la sucesión

$$0 \to \mathcal{O}(\Omega) \xrightarrow{i} C^{\infty}(\Omega, C) \xrightarrow{\bar{\partial}} C^{\infty}_{(0,1)}(\Omega, C)$$

es exacta (i es la inyección natural).

4. Demuestre que la sucesión

$$0 \to C \xrightarrow{i} \mathcal{O}(\Omega) \xrightarrow{d} \mathcal{O}_{(1,0)}(\Omega)$$

es exacta.

5. ¿Qué es $\displaystyle\int_{C_1(0)} \frac{e^z - e^{-z}}{z^4}\, dz$?

CAPITULO VIII

PROPIEDADES ADICIONALES DEL INDICE

Sean Ω un abierto de C, $\rho \in S_1(\Omega)$ una curva cerrada. Denotaremos por C_ρ al conjunto de los puntos de C que no están sobre ρ. Es decir,

$$C_\rho = C - Im\,\rho\ .$$

A su vez, denotaremos por Ind_ρ a la aplicación

$$Ind_\rho : C_\rho \to Z$$

dada por

$$Ind_{\rho}(a) = Ind_a \rho = \frac{1}{2\pi i} \int_{\rho} \frac{dz}{z-a}$$

Nos proponemos estudiar en este capítulo algunas propiedades de Ind_{ρ}. En primer lugar, ρ se dice *no trivial* si existe $a \in C_{\rho}$ tal que $Ind_{\rho}(a) \neq 0$, y *trivial* en el caso contrario. También, ρ se dice *no trivial con respecto a* Ω si $\rho \in S_1(\Omega)$ y existe $a \notin \Omega$ tal que $Ind_a \rho \neq 0$. Por ejemplo, si R es un rectángulo con interior no vacío, $\hat{R} = R_{20}\, R_{11}\, R_{20}^{-1}\, R_{10}^{-1}$ es no trivial, pues si a es interior a R, es claro que $a \in C_R$ y

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{R}} \frac{dz}{z-a} = 1.$$

Lo mismo, si $\varepsilon > 0$, $c_{\varepsilon}^{n}(a)$ es trivial si y sólo si $n = 0$. Si $c_{\varepsilon}^{n}(a) \in S_1(\Omega)$ y $a \notin \Omega$, $c_{\varepsilon}^{n}(a)$ es no trivial con respecto a Ω.

Teorema 1.1. *Sea* Ω *un abierto* 1*-conexo de* C, $\Omega = \Omega' - \{a\}$ *con* Ω' *simplemente conexo y* $a \in \Omega'$. *Las proposiciones siguientes son equivalentes para* $\rho \in S_1(\Omega)$, ρ *cerrada*:

a) ρ *es trivial con respecto a* Ω *: es decir,* $Ind_{\rho}(b) = 0$ *para todo* $b \notin \Omega$.

b) $\rho \sim 0$ *en* Ω.

Demostración : Demostremos primero que $(a) \Rightarrow (b)$. Si suponemos (a),

$$Ind_a \rho = 0 .$$

Pero si $\varepsilon > 0$ es lo suficientemente pequeño para que $\overline{B}_{\varepsilon}(a) \subseteq \Omega'$, $\langle c_{\varepsilon}(a) \rangle$ es una base de $H_1(\Omega)$ y se tiene

$$\rho \sim (Ind_a \rho)\, c_{\varepsilon}(a)$$

Esto implica $\rho \sim 0$. Demostremos ahora que $(b) \Rightarrow (a)$. Si $\rho \sim 0$ en Ω y $b \notin \Omega$, también $\rho \sim 0$ en $C - \{a\}$, pues $\Omega \subseteq C - \{b\}$. Como

$$h(z) = \frac{1}{z-b}$$

es holomorfa en $C - \{b\}$,

$$Ind_b \rho = \frac{1}{2\pi i} \int_\rho h(z)\, dz = 0$$

según el teorema de Cauchy. Esto demuestra el teorema.

Nota - Nótese que $(b) \Rightarrow (a)$ sin ninguna hipótesis sobre Ω (excepto la de ser abierto).

Corolario. Sean Ω un abierto de conexión $n = 1$, $\sigma, \rho \in S_1(\Omega)$ dos curvas cerradas. Las proposiciones siguientes son equivalentes :

(a) $\rho \sim \rho'$ en Ω.

(b) $Ind_a \rho = Ind_a \rho'$ para todo $a \notin \Omega$.

Teorema 1.2. *Sea $\rho \in S_1(\Omega)$ cerrada. La aplicación*

$$Ind_\rho : C_\rho \to Z$$

es continua y por lo tanto constante sobre toda componente conexa de C_ρ (Z tiene la topología discreta).

Demostración. Sean $a \in C_\rho$ y $r > 0$ tales que $B_r(a) \subseteq C_\rho$. Entonces

$$\left| \int_\rho \frac{dz}{z-a} - \int_\rho \frac{dz}{z-(a+h)} \right| \leq \left| \int_\rho \frac{h\, dz}{(z-a)(z-a-h)} \right| \leq \frac{2|h|}{r^2} \cdot \int_\rho |dz|$$

si $|h| < r/2$, pues $|z-a| > r$ y $|z-a-h| > r/2$. Esto implica que

$$\lim_{h \to 0} Ind_\rho(a+h) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_\rho \frac{dz}{z-a-h} = \frac{1}{2\pi i} \int_\rho \frac{dz}{z-a} = Ind_\rho(a)$$

y por lo tanto, que Ind_ρ es continua. Con respecto a la segunda afirmación, sea U una componente conexa de C_ρ, y sea $z \in U$. Si $n = Ind_\rho(z)$, el conjunto

$$V = Ind_\rho^{-1}(n)$$

es, a la vez, abierto y cerrado en C_ρ. Se deduce que $V \cap U$ es abierto y cerrado en U. Como $V \cap U \neq \phi$, necesariamente $V \cap U = U$, o sea, $U \subseteq V$. Por lo tanto, $Ind_\rho(z) = n$ para todo $z \in U$.

El siguiente teorema muestra que si ρ es una curva cerrada, el conjunto de los puntos a tales que $Ind_\rho(a) \neq 0$ es relativamente cercano a $Im\,\rho$.

Teorema 1.3. *Sea ρ una curva cerrada, $\rho \in S_1(C)$. Si B es un conjunto compacto tal que $Im\,\rho \subseteq \overset{\circ}{B}$ y que $C\text{-}B$ es conexo (es decir, si $\check{B} = \phi$), entonces $Ind_\rho(a) = 0$ para todo $a \in C - B$.*

Demostración : En efecto, Ind_ρ es constante sobre $C - B$, por ser $C\text{-}B$ conexo. Pero, si $b \in C - B$,

$$Ind_\rho(b) = \frac{1}{2\pi i}\int_\rho \frac{dz}{z-b} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\rho'(t)\,dt}{\rho(t) - b},$$

de lo cual, teniendo en cuenta que $\rho(t) \neq b$ para todo t,

$$|Ind_\rho(b)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \sup_{t\in[0,1]} \frac{1}{|\rho(t) - b|} \int_0^1 |\rho'(t)|\,dt.$$

Como existe $M > 0$ tal que $|\rho(t)| \leq M$ para todo $t \in [0,1]$, se deduce que

$$\lim_{b\to\infty} \sup_{t\in[0,1]} \frac{1}{|\rho(t) - b|} = 0,$$

de lo cual .

$$\lim_{b \to \infty} | Ind_{\rho}(b) | = 0 ,$$

y de ésto, $Ind_{\rho}(b) = 0$ para todo $b \in C\text{-}B$. Esto demuestra el teorema.

Corolario : Sea $\rho \in S_1(\Omega)$, cerrada, $Im\, \rho \subseteq \overset{\circ}{B}$ donde B es un compacto tal que $C\text{-}B$ es conexo. Entonces $Ind_{\rho}(a) = 0$ para todo $a \in \Omega\text{-}B$. En particular, $Ind_{\rho}(a) = 0$ para todo a en una componente conexa no acotada de Ω .

Si $\rho \in S_1(C)$ es cerrada, una y sólo una de las componentes conexas de C_{ρ} puede contener al conjunto $\{ z \mid |z| > r \}$, donde

$$r = máx \{ \mid \rho(t) \mid t \subset [0,1] \} .$$

La *componente conexa no acotada* de C_{ρ} se denomina *el exterior de* ρ , y se denota por $E(\rho)$. Si $\rho \in S_1(\Omega)$, $E(\rho,\Omega) = E(\rho) \cap \Omega$ se denomina el *exterior de* ρ *en* Ω . Es claro que $Ind_{\rho}(a) = 0$ para todo $a \in E(\rho)$. En general C_{ρ} tiene varias componentes conexas (a veces, sólo dos). Un caso especial muy importante es el de las *curvas cerradas simples*. Recordamos que una curva cerrada ρ se dice simple si las restricciones de ρ a $[0,1)$ y $(0,1]$ son inyectivas, y si $\rho(1) = \rho(0)$. En tal caso C_{ρ} tiene dos y sólo dos componentes conexas. Esta es una de las afirmaciones del célebre *Teorema de Jordan*, el cual enunciaremos a continuación. Nosotros no demostraremos aquí tal teorema , pues sólo podríamos transcribir la demostración elemental, muy elegante, de: R.N. Pederson : *The Jordan Curve Theorem for piecewise smooth curves* ; The American Mathematical Monthly : Vol. 76 : Number 6 : June-July 1969 .

2. El Teorema de Jordan.

Teorema 2.1 (Jordan) . *Sea* $\rho \in S_1(C)$ *una curva cerrada simple. Entonces*

C_ρ *tiene exactamente dos componentes conexas,* $E(\rho)$ *e* $I(\rho)$, *ésta última denominada el interior de* ρ. *Además,* $F(E(\rho)) = F(I(\rho)) = Im\,\rho$.

Por otra parte, $|Ind_\rho(a)| = 1$ *para todo* $a \in I(\rho)$, $Ind_\rho(a) = 0$ *para todo* $a \in E(\rho)$.

Recordamos que si $A \subseteq C$, $F(A) = \overline{A} \cap \overline{C\,A}$ es la frontera de A. Aquí $\overline{A}$ es la clausura topológica de A.

Si $Ind_\rho(a) = 1$ para algún $a \in I(\rho)$, donde $\rho \in S_1(\Omega)$ es una curva cerrada simple, entonces $Ind_\rho(z) = 1$ para todo $z \in I(\rho)$, pues $I(\rho)$ es conexo. Lo mismo, si $Ind_\rho(a) = -1$ para algún $a \in I(\rho)$, $Ind_\rho(z) = -1$ para todo $z \in I(\rho)$. Si $Ind_\rho(z) = 1$ para $z \in I(\rho)$, ρ se dice *positivamente orientada*. Si $Ind_\rho(z) = -1$ para $z \in I(\rho)$, ρ se dice *negativamente orientada*. Una curva cerrada simple no es trivial. Para que $\rho \in S_1(\Omega)$, cerrada y simple, sea trivial con respecto a Ω, es necesario y suficiente que $I(\rho) \subseteq \Omega$. Es posible demostrar en base al teorema de Jordan, que el interior $I(\rho)$ de una curva cerrada simple, así como $\overline{I(\rho)} = Im\,\rho \cup I(\rho)$, son conjuntos simplemente conexos. Véase a este respecto el capítulo XII.

Nota: Intuitivamente, recorrer una curva cerrada simple en el sentido positivo significa que, al caminar sobre ella, el interior de la curva queda siempre a nuestra izquierda.

Ejercicios

1) Demuestre que si R es un rectángulo, $\hat{R}$ está positivamente orientado.

2) Demuestre que $c_\varepsilon^n(a)$ está positivamente orientado si y sólo si $n = 1$ y negativamente si y sólo si $n = -1$.

CAPITULO IX

EL TEOREMA DE MORERA Y LA COHOMOLOGIA COMPLEJA

Así como $C^1(\Omega, C)$ tiene a $\mathcal{O}(\Omega)$ como un subespacio importante, también $C_1^1(\Omega, C)$ contiene dos subespacios notables. El primero es

$$\mathcal{O}_{(1,0)}(\Omega) = \{ f\, dz \mid f \in \mathcal{O}(\Omega) \} ,$$

y el segundo

$$\mathcal{O}_{(0,1)}(\Omega) = \{ f\, d\bar{z} \mid f \in \mathcal{O}(\Omega) \} .$$

Las formas en $\mathcal{O}_{(1,0)}(\Omega)$ se denominan de tipo *(1,0)* y las de $\mathcal{O}_{(0,1)}(\Omega)$, de tipo *(0,1)*. Es claro que

$$\mathcal{O}_1(\Omega) = \mathcal{O}_{(1,0)}(\Omega) \oplus \mathcal{O}_{(0,1)}(\Omega) ,$$

en el sentido de que toda forma $w \in \mathcal{O}_1(\Omega)$ se escribe, de manera única, como $w = w_1 + w_2$ con $w_1 \in \mathcal{O}_{(1,0)}(\Omega)$, $w_2 \in \mathcal{O}_{(0,1)}(\Omega)$.

Por otra parte, si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$,

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}\, dz ,$$

de lo cual, teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial f}{\partial z} \in \mathcal{O}(\Omega) ,$$

$df \in \mathcal{O}_{(1,0)}(\Omega)$. Como además $d(f\,dz) = 0$ si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, se tiene la sucesión

$$0 \to C \xrightarrow{i} \mathcal{O}(\Omega) \xrightarrow{d} \mathcal{O}_{(1,0)}(\Omega) \xrightarrow{d} 0$$

donde $i : C \to \mathcal{O}(\Omega)$ está dada por

$$i(\alpha)(z) = \alpha$$

para todo $z \in \Omega$. Nos proponemos demostrar que si Ω es simplemente conexo, la anterior sucesión es exacta. Para ello necesitaremos del siguiente lema :

Lema 1.1 (Morera). Sea Ω un abierto conexo de $\mathbb{C}$, $f \in C(\Omega, \mathbb{C})$. Si para toda $\rho \in S_1(\Omega)$, cerrada,

$$\int_\rho f\,dz = 0,$$

entonces existe $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ tal que

$$g'(z) = f(z)$$

para todo $z \in \Omega$.

Demostración : Sea $f_1 = Re(f)$, $f_2 = Img(f)$. Se tiene

$$0 = \int_\rho f\,dz = \int_\rho (f_1 + i f_2)(dx + i\,dy) = \int_\rho f_1\,dx - f_2\,dy + i \int_\rho f_1\,dy + f_2\,dx$$

para toda $\rho \in S_1(\Omega)$ con $\partial\rho = 0$. Por lo tanto,

$$\int_\rho f_1\,dx - f_2\,dy = 0, \quad \int_\rho f_2 dx + f_1\,dy = 0 .$$

Sean entonces $g_1, g_2 \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ tales que (lema de Poincaré)

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} = f_1, \quad \frac{\partial g_1}{\partial y} = -f_2,$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x} = f_2, \quad \frac{\partial g_2}{\partial y} = f_1,$$

y sea $g = g_1 + i g_2$. Entonces $g \in C^1(\Omega, \mathbb{C})$. Además,

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial g}{\partial x} + i\,\frac{\partial g}{\partial y}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial g_1}{\partial x} + i\,\frac{\partial g_2}{\partial x} + i\,\frac{\partial g_1}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial y}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ f_1 + i f_2 - i f_2 - f_1 \right\} = 0\,,$$

de lo cual $g \in \mathcal{O}(\Omega)$. Finalmente,

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial g}{\partial x} - i\,\frac{\partial g}{\partial y}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial g_1}{\partial x} + i\,\frac{\partial g_2}{\partial x} - i\,\frac{\partial g_1}{\partial y} + \frac{\partial g_2}{\partial y}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ f_1 + i f_2 + i f_2 + f_1 \right\} = f_1 + i\, f_2 = f\,.$$

Esto demuestra el lema.

Corolario **:** Bajo las hipótesis del lema, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Demostración **:** En efecto, $f = g'$ y $g' \in \mathcal{O}(\Omega)$ en virtud del teorema de Goursat.

Tenemos entonces :

Teorema 1.1 (Morera). *Si Ω es un abierto simplemente conexo, la sucesión*

$$0 \to C \overset{i}{\to} \mathcal{O}(\Omega) \overset{d}{\to} \mathcal{O}_{(1,0)}(\Omega) \to 0$$

es exacta.

Demostración **:** Todo lo que hay que ver es que $Ker\, d = i(C)$ y que d es sobre. Ahora, si $df = 0$, necesariamente

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0\,.$$

Por lo tanto, $f = i(\alpha)$ para algún $\alpha \in C$. Como $\dfrac{\partial i(\alpha)}{\partial z} = 0$ para todo $\alpha \in C$, la primera afirmación es clara. Para ver la segunda, nótese que si

$w \in \mathcal{O}_{(1,0)}(\Omega)$, $w = f\,dz$ con $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Pero si $\rho \in S_1(\Omega)$ es cerrada, $\rho \sim 0$. En virtud del teorema de Cauchy,

$$\int_\rho f\,dz = 0 .$$

Por el lema de Morera se tiene entonces que $f\,dz = dg$ para $g \in \mathcal{O}(\Omega)$, lo cual completa la demostración.

El teorema de Morera asegura, entre otras cosas, que toda forma diferencial $w \in \mathcal{O}_{(1,0)}(\Omega)$, la cual es cerrada por ser $dw = 0$, es también exacta, pues es la diferencial de una 0-forma.

Nota: Si Ω es un abierto arbitrario de C y $g \in \mathcal{O}(\Omega)$, g se dice un *gradiente complejo* si existe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial z} = g .$$

Es claro que si g es un gradiente complejo

$$\int_\rho g\,dz = 0$$

para toda $\rho \in S_1(\Omega)$ cerrada. Recíprocamente, el lema de Morera demuestra que si $g \in C(\Omega, C)$ es tal que

$$\int_\rho g\,dz = 0$$

para toda $\rho \in S_1(\Omega)$ cerrada, entonces g es un gradiente complejo. Si g es un gradiente complejo y

$$\frac{\partial f}{\partial z} = g ,$$

f se dice un *potencial complejo* de g.

Teorema 1.2. *Si Ω es un abierto simplemente conexo de C, toda $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ es un gradiente. Más precisamente, la sucesión*

$$0 \to C \overset{i}{\to} \mathcal{O}(\Omega) \overset{\partial/\partial z}{\to} \mathcal{O}(\Omega) \to 0$$

es exacta.

***Demostración*:** Sigue inmediatamente del lema de Morera.

***Nota*:** Más adelante veremos que la anterior sucesión es exacta si y sólo si Ω es simplemente conexo. Esto equivale a decir que la ecuación diferencial

$$\frac{\partial f}{\partial z} = g \quad , \quad g \in \mathcal{O}(\Omega)$$

tiene siempre solución holomorfa en el abierto Ω si y sólo si Ω es simplemente conexo.

2. *Cohomología de De Rahm compleja.* Sea Ω un abierto conexo de C. Escribiremos

$$H^0_R(\Omega, C) = C \; .$$

$$H^1_R(\Omega, C) = \mathcal{O}_{(1,0)}(\Omega) \, / \, d(\mathcal{O}(\Omega))$$

$H^2_R(\Omega, C) = \{0\}$ (Véase nota al final del Cap. XIII

$$H^p_R(\Omega, C) = \{0\}, \qquad p > 2 \; .$$

El C-espacio $H^p_R(\Omega, C)$ se denomina el *p-ésimo grupo de cohomología de De Rahm de Ω con coeficientes en C*. Si Ω es simplemente conexo,

$$H^1_R(\Omega, C) = \{0\},$$

como se deduce inmediatamente del teorema de Morera.

Ejercicios

1. Sea Ω un abierto de C. Demuestre que las proposiciones siguientes son equivalentes :

   a) f es holomorfa en Ω .

   b) Para toda curva cerrada ρ en Ω, homóloga a 0,

   $$\int_{\rho} f(x)\, dz = 0 .$$

   c) En todo punto a de Ω existen una vecindad U y una función holomorfa g, tales que $g' = f$ en U .

2. Sea Ω un abierto de C. Demuestre que las proposiciones siguientes son equivalentes para $f \in C(\Omega, C)$

   1) $f \in \mathcal{O}(\Omega)$

   2) Para todo rectángulo R de Ω $\int_{\hat{R}} f\, dz = 0$, donde

   $$\hat{R} = R_{20}\, R_{11}\, R_{21}^{-1}\, R_{10}^{-1}$$

   es la curva que describe el borde de R .