



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

**ENSEÑANZA DE SUCESIONES NUMÉRICAS PARA
POTENCIAR EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO
VARIACIONAL EN ESTUDIANTES DE GRADO CUARTO
DE BÁSICA PRIMARIA**

Lina Janet Velásquez Naranjo

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Medellín, Colombia
2012

**ENSEÑANZA DE SUCESIONES NUMÉRICAS PARA
POTENCIAR EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO
VARIACIONAL EN ESTUDIANTES DE GRADO CUARTO
DE BÁSICA PRIMARIA**

Lina Janet Velásquez Naranjo

Modalidad trabajo final, requisito parcial para optar al grado de Magíster en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales.

Director (a):
Fernando Puerta Ortiz
Profesor Asociado, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia, Sede
Medellín.

Línea de Investigación:
Ciencias Exactas

Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín
Facultad de Ciencias
Medellín, Colombia
2012

A mi familia, en especial a mi hija Laura, que con su apoyo, comprensión y aliento permitieron iluminar cada tramo del camino emprendido en otro proyecto de mi vida.

Resumen

Esta propuesta de enseñanza para el aula se basa en el reconocimiento de los procesos de variación subyacentes en las sucesiones. Aquí se emplea una estrategia metodológica basada en la lúdica, el uso de la observación, el registro de datos y análisis de las regularidades para descubrir patrones, esto con el fin de que un grupo de estudiantes de grado cuarto de básica primaria utilice sus preconceptos y sin definiciones predeterminadas puedan hacer un acercamiento al concepto de sucesión y patrón.

Palabras clave: sucesión, patrón, regularidad, variación, registros, pensamiento variacional, fenómeno de cambio.

Contenido

1. Marco teórico.....	10
1.1. Las sucesiones en nivel superior.....	10
1.2. Las sucesiones en los primeros años escolares.....	13
1.3. Pensamiento variacional.....	16
2. Planteamiento del problema.....	17
3. Objetivos.....	19
3.1. Objetivo general.....	19
3.2. Objetivos específicos.....	19
4. Metodología.....	19
4.1. Descripción del método de investigación.....	19
4.2. Cronograma de actividades.....	21
4.3. Población.....	22
5. Intervención.....	22
5.1. Etapa inicial – Diagnóstico.....	24
5.2. Etapa intermedia – Intervención.....	27
5.3. Etapa final - Evaluación y análisis de resultados.....	27
6. Resultados.....	28
6.1. Análisis de las actividades implementadas.....	28
6.1.1. En la gráfica correspondiente a la actividad de Pirámide de vasos.....	29
6.1.2. En la gráfica correspondiente a la actividad Descubriendo las regularidades.....	30
6.1.3. En la gráfica correspondiente a la actividad Tarjetas y bonos.....	31
6.1.4. En las gráficas correspondientes a la actividad Inicial - final.....	32
6.1.5. En la gráfica correspondiente a la entrevista escrita.....	34
6.2. Análisis de las observaciones, entrevistas orales y escritas realizadas durante la ejecución de las actividades.....	35
6.2.1. Actividad Pirámide de vasos.....	35
6.2.2. Actividad Descubriendo las regularidades.....	36
6.2.3. Actividad Tarjetas y bonos.....	38
6.2.4. Actividad inicial - final.....	39
6.3. Entrevista escrita.....	41
6.4. Análisis estadístico.....	44
7. Conclusiones.....	45
8. Bibliografía.....	57

Lista de figuras

Figura 1: Página 70. “Una secuencia didáctica para generar los conceptos de sucesión y series en el nivel superior. (Gutiérrez 2009).	12
Figura 2: Diagrama de barras actividad pirámide de vasos.	29
Figura 3: Diagrama de barras descubriendo las regularidades.....	30
Figura 4: Diagrama de barras actividad tarjetas y bonos.....	31
Figura 5: Diagrama de barras actividad inicial.....	32
Figura 6: Diagrama de barras actividad final.	33
Figura 7: Diagrama de barras entrevista.	34
Figura 8: Respuesta 1,2 actividad pirámide de vasos.	36
Figura 9: Tablas actividad descubriendo las regularidades, base 2, 3.....	36
Figura 10: Tablas actividad descubriendo las regularidades, factores 2, 3.	37
Figura 11: Tabla actividad tarjetas y bonos.....	38
Figura 12: Actividad tarjetas y bonos, respuestas 2,3.....	39
Figura 13: Actividad inicial, sucesiones con interpretación de forma y cantidad.	39
Figura 14: Actividad final, sucesiones con interpretación de forma y cantidad.....	40
Figura 15: Actividad final sucesiones numéricas pregunta 3.....	40
Figura 16: Resultados competición de tablas actividad final máquina traga números.	41
Figura 17: Entrevista escrita de conceptos Juliana Zapata.	42
Figura 18: Entrevista escrita de conceptos Brayan Marín Oquendo.	42
Figura 19: Entrevista escrita de conceptos Geiner Alexis Rojas.	43
Figura 20: Entrevista escrita de conceptos Verónica Zuluaga Cardona.	43
Figura 21: Diagrama caja de bigotes para AF correcto y AI correcto.	44
Figura 22: Diagrama caja de bigotes para AF incorrecto y AI incorrecto.....	45

Lista de tablas

Tabla 1: Cronograma de actividades.....	21
Tabla 2: Actividad máquina tragamonedas, pagina 25. Módulo para el desarrollo de competencias en matemáticas 5°.	25
Tabla 3: Demostración respuesta a, máquina tragamonedas.....	25
Tabla 4: Demostración respuesta b, máquina tragamonedas.....	26
Tabla 5: Demostración respuesta c, máquina tragamonedas.....	26
Tabla 6: Demostración respuesta d, maquina tragamonedas.....	26
Tabla 7: Tabla medias y varianza actividad final e inicial.	44

Lista de símbolos y abreviaturas

Abreviaturas

Abreviatura	Término
<i>N</i>	Cualquier número natural
<i>P</i>	Pregunta
<i>AI</i>	Actividad inicial
<i>AF</i>	Actividad final
<i>MEN</i>	Ministerio de Educación Nacional

Introducción

Los lineamientos curriculares de 1998 y los estándares de 2003, son el punto de partida para cualquier docente que desee implementar nuevas estrategias metodológicas en el proceso de enseñanza y aprendizaje, tanto dentro como fuera del aula. Al hacer una revisión de ellos resulta evidente que el currículo de matemática no se debe centrar únicamente en el desarrollo de contenidos presentados en forma aislada entre un grado escolar y otro; por el contrario ellos sustentan la importancia de desarrollar en los estudiantes competencias a lo largo de toda su vida escolar. Con esta propuesta del MEN se pretende entonces que los estudiantes no solo adquieran conocimientos sino que puedan aplicarlos a contextos escolares, sociales y laborales dando significado a lo que se aprende.

Los lineamientos curriculares de matemáticas dentro de su estructuración plantean además que “para ser matemáticamente competente se debe desarrollar tanto el pensamiento lógico como el matemático”, de allí que propone desarrollar en los estudiantes cinco tipos de pensamiento: el numérico, el espacial, el métrico o de medida, el aleatorio o probabilístico y el variacional. Dado que estos cinco tipos de pensamiento se deben trabajar desde los primeros grados de escolaridad, esta propuesta de trabajo de grado se centra en desarrollar en forma conjunta los pensamientos numérico y variacional enmarcados en el tema específico de la construcción del concepto de secuencia numérica, aplicado a la solución de problemas, contribuyendo a su vez al desarrollo de competencias básicas de interpretar, argumentar y proponer, con el fin de generar aprendizaje significativo para dar respuesta a una de las necesidades educativas en el área de las matemáticas al interior de la institución educativa Arzobispo Tulio Botero Salazar en el grado cuarto.

1. Marco teórico

En el currículo Colombiano de básica primaria no se dedica, en ningún grado, un tema o capítulo independiente para el tratamiento de las sucesiones numéricas, esto a pesar de la contribución que brinda al desarrollo del pensamiento lógico reflexivo de los alumnos. Los ejercicios de este tema en particular se incluyen en las clases como una variedad para tratar los contenidos relacionados con la numeración; de allí, que el concepto de sucesión no se define, aunque si logren caracterizarlo y describirlo de manera intuitiva a través del trabajo con los números naturales.

Para poder contextualizar este trabajo y explicar cómo dar un tratamiento metodológico que permita la aplicación consecuente de los ejercicios con sucesiones numéricas aquí desarrollados, se hace necesario introducir una definición acerca de lo que es una sucesión numérica.

Aunque han sido muchos los matemáticos e investigadores que han incursionado en el tratamiento de este tema, en el presente trabajo se asume la referencia citada por Rodríguez y Guibert, en la revista Dusol (pág.2-3) "Una sucesión numérica es un conjunto cuyos elementos están numerados, esto es, puestos en correspondencia biunívoca o coordinación con los números naturales, de modo que en el conjunto hay un primer elemento, un segundo elemento, etc. Los elementos que la forman se llaman términos y suelen indicarse con una misma letra afectada por un subíndice que indica el número de orden de cada término"¹

$$a_1, a_2, a_3, a_4 \dots a_n \dots$$

"Una sucesión es definida o establecida si y sólo si existe una regla dada que determina el término n- simo correspondiente a un n entero positivo; esta regla puede estar dada por la fórmula del término n-ésimo."²

Por tanto resulta claro que el elemento n- simo establece la ley de formación de la sucesión, la cual permite calcular un término cualquiera de ella. De allí, se deriva que: las sucesiones constituyen una herramienta muy poderosa para la construcción de conceptos posteriores como el de función o límite los cuales son abordados en secundaria y a nivel universitario.

En este orden de ideas, la revisión de algunos trabajos alrededor de las sucesiones permite asegurar que este aspecto es preocupación de varios investigadores en el ámbito de la educación matemática, no obstante y a pesar de que este concepto subyace a los primeros años escolares, la mayoría de las investigaciones se orientan en el currículo de básica secundaria. Dado lo anterior resulta importante describir investigaciones en ambos ámbitos con el fin de observar el tratamiento que se les da de acuerdo con el nivel de escolaridad en que se presentan.

1.1. Las sucesiones en nivel superior

A cerca de una secuencia didáctica para generar los conceptos de sucesión y serie en el nivel medio superior (Gutiérrez 2009).

Tesis que fue presentada para obtener el título de maestría en ciencias en la especialidad de matemática educativa. El estudio se lleva a cabo en el Instituto Politécnico Nacional Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, en la ciudad de México en el año 2009; partiendo de antecedentes históricos de las sucesiones y series infinitas, allí se hace una breve revisión de los desarrollos alcanzados por civilizaciones previas a la aparición del cálculo en Europa; lo cual permite que la investigadora llegue a la siguiente conclusión “las sucesiones y series infinitas siempre se ocupaban para resolver problemas aritméticos y geométricos, pero poniendo énfasis en ellos nunca utilizaron Cálculo Diferencial e Integral, al menos no como el que usamos en la actualidad.”³ Desde esta perspectiva, la hipótesis que fundamenta el trabajo se orienta sobre la posibilidad de que estudiantes de bachillerato sin conocimientos de cálculo y sin uso de la notación formal como sumatoria, factorial, entre otros, puedan construir términos de una serie infinita utilizando únicamente conocimientos de aritmética y álgebra. Para responder a esta hipótesis Gutiérrez (2009) optó por utilizar dos situaciones de aprendizaje: la primera actividad gráfica, tomada de la tesis de Rosas (2007, pp. 258) aquí los alumnos usan un graficador “para interactuar entre las gráficas y las características que se tienen de ellas, posteriormente se tiene que ver si ellos pueden encontrar los términos de una serie numérica y la notación que usan”. La segunda actividad numérica fue tomada como referencia de la tesis de Pérez (1991, cap. 3, pp. 11) la cual consiste en que a través de una calculadora científica los estudiantes puedan establecer si hay un acercamiento en valor entre la función e^x y la suma de los términos, con el objetivo de determinar si los alumnos pueden concluir que “la función e^x y la suma de términos de la serie alcanzan los mismos valores, conforme se toman más términos de la serie de Taylor”.

La ingeniería didáctica se utiliza allí como metodología de investigación, fundamentalmente porque los productos son construidos a partir de experimentaciones didácticas realizadas en un medio; a través de esta metodología se puede realizar un análisis preliminar, un diseño de la situación didáctica y su análisis a priori, una fase de experimentación y finalmente un análisis a posteriori y validación; permitiendo que se dé una interacción entre profesor, alumno y saber. Visto de esta forma produce “aprendizaje significativo” en los estudiantes.

A continuación se describen de manera breve la forma como se implementan cada una de las fases demarcadas en la ingeniería didáctica por considerarse relevantes para las conclusiones.

- Experimentación: se pide al grupo hacer tres equipos de estudiantes para graficar algunas funciones utilizando el software y hacer comparaciones de comportamiento entre ellas a través de preguntas orientadoras.
- Análisis a priori: en las preguntas 1, 2, 3 Y 4 de la fase de graficación, la investigadora supone que va a haber dificultades para ver similitudes entre las gráficas de funciones por falta de conocimientos, pero la intención es que puedan establecer una intersección en un punto a partir del que continúan juntas las gráficas conforme se aumenta los términos de la serie. Para la fase dos en las preguntas 1-5, se prevé que no tendrán dificultades en sustituir los valores en la función exponencial y su serie numérica correspondiente, utilizando correctamente la calculadora y haciendo uso de todos los decimales para así tener la igualdad o no entre las dos funciones.
- Análisis a posteriori: preguntas 1, 2, 3, 4 (fase de graficación) dos de los tres equipos que se constituyen logran ver el punto común a partir del cual

coinciden las gráficas de las funciones. Pregunta 1-5 (fase numérica) algunos de los resultados obtenidos fueron:

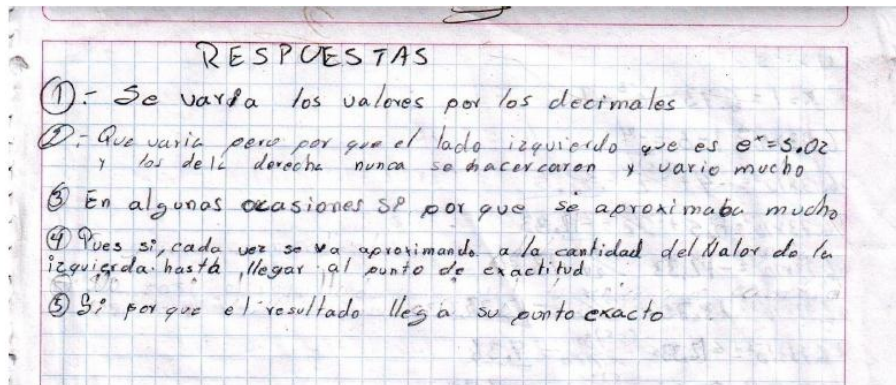


Figura 1: Página 70. “Una secuencia didáctica para generar los conceptos de sucesión y series en el nivel superior. (Gutiérrez 2009).

Lo que permite que la investigadora corrobore la fase dos de la etapa anterior.

Finalmente la aplicación minuciosa de cada una de las etapas de la ingeniería didáctica permite dar respuesta a la hipótesis planteada y aunque los estudiantes no tenían conocimientos de cálculo, pudieron comprender algunos conceptos relacionados con sucesiones y series infinitas usando únicamente conocimientos de aritmética y álgebra. Esto lo logran a través de sus propias conjeturas y discusiones que los conducen a obtener conclusiones muy similares a las de los alumnos que ya han hecho un curso de cálculo diferencial.

Sobre Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas (Cañadas Santiago 2007)

El tema de investigación por el que se interesa la autora es el relacionado con “el razonamiento inductivo y se enmarca dentro de la línea de investigación del pensamiento numérico. Dicha línea se ocupa de estudiar los procesos cognitivos y culturales con los que los seres humanos asignan y comparten significados utilizando diferentes estructuras numéricas”⁴. La doctora María Consuelo Cañadas pone de manifiesto que aunque ya se han realizado varios estudios sobre el tema el aporte fundamental de esta investigación apunta a resolver problemas que pueden ser modelados mediante una sucesión aritmética.

La estructura de la investigación apunta al desarrollo de tres términos clave: razonamiento inductivo, progresiones aritméticas de números naturales y resolución de problemas los cuales se abordan durante los nueve capítulos de la tesis, pero aquí solo retoman los capítulos 3 y 4 por ser los de nuestro interés particular y se describen a continuación.

En el capítulo tres, del apartado “Las sucesiones como estructura matemática” se desarrolla la importancia de las sucesiones de números naturales cuyos términos generales se pueden expresar mediante polinomios de orden uno (lineales) y dos (cuadráticos), recogiendo un análisis centrado en dos pilares. El primero basado en la

estructura conceptual, algunos aspectos fenomenológicos e históricos y los sistemas de representación. El segundo hace referencia a los procedimientos que se pueden realizar en las tareas determinadas para la investigación.

En el capítulo cuatro “Antecedentes” se destacan algunas investigaciones donde se describe de manera clara que el razonamiento inductivo se trabaja habitualmente a partir del contenido de sucesiones, particularmente, las sucesiones lineales y cuadráticas que están dirigidas a los niveles medios.

El enfoque que permite desarrollar la investigación es cualitativo y cuantitativo. Comenzando con la descripción del diseño que apunta al desarrollo del objetivo general y de un estudio piloto a través del estudio de casos, donde se analizan los datos obtenidos a través de la reunión, clasificación, ordenación, síntesis e interpretación; de las variables de investigación desde una aproximación a los tres elementos claves antes mencionados. Finalmente se redactan unas conclusiones con el análisis de la información obtenida a partir de las hojas de codificación, entrevistas y desarrollo de las actividades planteadas.

Algunos resultados obtenidos a partir de la síntesis del proceso de investigación están referidos a la recopilación de los aportes teóricos metodológicos llevados a cabo en el trabajo; estos se centran en el modelo teórico de razonamiento inductivo y las estrategias inductivas. Al respecto de los pasos del razonamiento inductivo se genera una de las conclusiones más importantes de la investigación la cual es expresada por la autora como: “El sistema de representación numérico se ve asociado con unas frecuencias significativamente superiores a la media en el trabajo con términos k -ésimos y en la formulación de conjeturas. Sin embargo, se asocia con frecuencias significativamente bajas en la identificación de un patrón, en la formulación de conjeturas y en la generalización.

Por otra parte, las diferencias significativas identificadas en los problemas donde los términos k -ésimos se expresan en el sistema de representación numérico. Es decir, el sistema de representación verbal está asociado con frecuencia significativamente baja en el trabajo con los términos k -ésimos y a una frecuencia significativamente superior a la media en la identificación del patrón y la generalización”⁵. De lo anterior se puede inferir que los estudiantes pueden obtener patrones errados quizá por dar respuestas intuitivas.

Dadas las tres revisiones anteriores puede afirmarse que: abordar profundamente el concepto de sucesión, resulta imprescindible para poder identificar dificultades y el uso que de este se hace en el desarrollo de conceptos matemáticos posteriores; esto permite a los docentes elaborar propuestas didácticas que puedan orientar adecuadamente los aprendizajes dentro del aula, haciendo que los estudiantes puedan superar los obstáculos epistemológicos más fácilmente.

1.2. Las sucesiones en los primeros años escolares

Para hablar de secuencia numérica en los primeros años escolares es necesario delimitarla dentro del marco general de número natural, pues es allí donde se fundamenta la construcción de conceptos matemáticos en edades tempranas, al respecto Grize citado por (Fernández 2010) afirma que “En la matemática, todo aquello que puede enunciarse en el lenguaje de los sistemas formales reposa en la noción de número natural, por medio de las funciones recursivas [...]. Un primer hecho resulta importante. Tan pronto intentamos, ya sea pensar, con mayor modestia incluso, utilizar en forma totalmente práctica un número n , lo hacemos siempre como miembro

de la serie de los números naturales. De lo cual se desprende un primer enfoque del problema, que consistiría simplemente en describir esa serie y los razonamientos que sostiene, pero del modo más preciso posible.”⁶

Partiendo de la perspectiva de Grize puede inferirse que la secuencia numérica es una componente del número natural en su aspecto ordinal; esta afirmación también es sustentada en la Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Vol. 1, por Fernández quien sostiene “La secuencia numérica requiere de un soporte conceptual ordinal para su construcción, que es posible definir a través de las relaciones dadas en un sistema de progresiones. Tener en cuenta el soporte conceptual ordinal nos lleva a integrar la secuencia numérica en un sistema conceptual e interpretativo coherente que pasa por las concepciones y creencias sobre la secuencia numérica, lo cual remite inmediatamente a consideraciones de tipo epistemológico y didáctico.”⁷

Si se parte de esta premisa entonces se hace necesario definir los planteamientos epistemológicos que circunscriben la naturaleza, origen y modo de existencia del número natural y de la aritmética básica, sustentados en la perspectiva de tres corrientes: el convencionalismo, el logicismo y la epistemología genética.

El convencionalismo es una concepción la cual señala que las leyes y teorías científicas son convenciones que dependen de una libre elección entre varios modos alternativamente posibles de describir el mundo natural, este trae consigo consecuencias importantes para el aprendizaje de la matemática y, en concreto, para la enseñanza del número. La autora Catalina Fernández cita a Brunshvicg, 1929, p. 398 quien al respecto afirma: “Podemos considerar los números como una serie de signos arbitrarios elegidos, pero a los cuales les aplicamos un modo determinado de sucesión a título de sucesión regular o, conforme a la expresión habitual, de sucesión natural. El orden de los signos numéricos es tan convencional como el orden de las letras en las diversas lenguas; orden que, una vez adoptado y empleado de una manera constante, toma igualmente una apariencia normal y regular [...]. Se evita la noción de número cardinal y la idea de unidad. La serie ordinal basta para constituir el número.”⁸

El logicismo por su parte explica la construcción de los números naturales, situando la secuencia numérica en el marco conceptual de las relaciones ordinales; uno de sus principales exponentes es Bertrand Russell quien defiende la idea de que “todas las propiedades ordinales o las de las series de números finitos sólo se emplean en la matemática común, y a través de un procedimiento de abstracción se llega a deducir toda la aritmética.”⁹ (Fernández 2010, página 70).

La epistemología genética a su vez es una visión evolutiva de los estados del conocimiento, pasando de unos estados primarios a otros más avanzados; uno de sus principales exponentes es Piaget quien define la construcción de número a partir de la clasificación y la seriación, sin embargo para abordar el desarrollo de la secuencia numérica en los primeros años, se enfatizará en la postura estructuralista de éste autor, en el tratamiento de la secuencia numérica como serie; al respecto Fernández, citada por Fernández en la página 74 afirma: “Debido a que el estudio de la estructura lógica de seriación es un análisis genético, el tratamiento de la secuencia numérica como una serie en el sentido piagetiano implica ahondar en las capacidades necesarias que el niño debe manifestar para llegar a establecer las relaciones intrínsecas de un elemento de la secuencia (posición relativa) con todos los demás. Se trataría de estudiar el paso de la seriación a la sistematización de la secuencia mediante las capacidades seriales que el niño necesita aplicar para llegar a dicha sistematización. La expresión “sistematización de la secuencia” se traduce en la

terminología piagetiana como alcanzar el éxito operatorio de la serie, que consiste en construir las relaciones ordinales entre los términos de la secuencia numérica.” ¹⁰

A partir de las corrientes convencionalista, logicista y la epistemología genética queda expuesto claramente que el concepto de sucesión se empieza a formar desde tempranas edades con la construcción del concepto de número y que por ende, el abordaje de las mismas puede iniciarse en la básica primaria.

Otro aspecto necesario en el abordaje de las sucesiones es el referido al de la didáctica como campo disciplinar de la pedagogía, integrando los aspectos teóricos y metodológicos en el proceso de enseñanza y aprendizaje, sin desconocer la importancia del ámbito escolar, cultural y social en la construcción de conceptos en el individuo. Una investigación realizada en la Universidad de Jaén (España) en noviembre de 2008 sobre las sucesiones en la matemática escolar tenía como objetivo describir, analizar y comparar el tratamiento que se les ha dado en la escuela, allí se pone de manifiesto la necesidad de profundizar en investigaciones que permitan el diseño de propuestas metodológicas de enseñanza de las sucesiones donde las definiciones y la notación usada no sean un obstáculo en el proceso de aprendizaje, comprometiéndose con una enseñanza de las matemáticas de manera que éstas contribuyan a “la formación de individuos partícipes de su propio aprendizaje y al desarrollo de competencias acordes con las necesidades de su entorno.” ¹¹ Batanero y Godino citados por (Marcolini y Sánchez 2008).

Su marco teórico se sustenta en la socio epistemología considerando que, en la construcción del conocimiento se involucran tanto variables sociales como culturales, al analizar la forma “cómo construyen los alumnos un determinado conocimiento, según el ámbito escolar, cultural y social. Siendo esencial, por tanto, el estudio de la actividad humana en su intento por transformar su realidad social y material. Esta realidad humana está guiada por diferentes prácticas sociales. En la actividad humana los objetos matemáticos son asignados según el contexto en el que se presentan. La distinción entre actividad matemática y actividad humana es que la primera se centra en la construcción de los conceptos matemáticos, en tanto que la segunda se hace sobre las actividades que implican usar las matemáticas como una herramienta para modelar.” ¹² Batanero y Godino citados por (Marcolini y Sánchez 2008).

Al respecto Arrieta, citado por (Marcolini y Sánchez 2008) considera “la modelación como una práctica social que puede vincular la escuela con su entorno y articula las diferentes ciencias y la tecnología con las matemáticas. Estas prácticas sociales son las que permiten la construcción de conocimiento, y al realizarlas los estudiantes construyen concepciones que utilizan como herramientas para modificar su entorno.” ¹³

Desde estas perspectivas, la modelación matemática reproduce o representa la realidad y su entorno en forma esquemática para hacerlos más comprensibles, esta condición favorece el aprendizaje en la primaria y ayuda a que los estudiantes puedan realizar una interpretación más significativa de las matemáticas.

Otros autores que sustentan esta postura son Flores y Castellanos citados por (Marcolini y Sánchez 2008) quienes proponen que “desde los cursos iniciales los alumnos resuelvan problemas a partir de modelos que pueden ser dibujos o diagramas, que les permitan una interpretación significativa de la situación y la construcción de un puente que los lleve a la comprensión de los aspectos conceptuales necesarios para la solución de un problema y su consecuente solución mediante una ecuación.” ¹⁴ Las sociedades actuales necesitan entonces que los

aprendizajes o conocimientos adquiridos adquieran significado en la aplicación a la vida cotidiana.

Un aspecto no menos relevante durante esta revisión bibliográfica es el referido a la legislación Colombiana para la enseñanza de las matemáticas, el MEN propone la enseñanza de las mismas sustentadas desde el desarrollo de cinco tipos de pensamiento, que en particular para nuestro proyecto de investigación sobre la dificultad en la solución de sucesiones al no identificar patrones y regularidades, las enmarca dentro del desarrollo del pensamiento variacional, definiéndolo como aquel que tiene “que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos. Uno de los propósitos de cultivar el pensamiento variacional es construir desde la Educación Básica Primaria distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico [...]Este pensamiento cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas.” ¹⁵ Lineamientos curriculares, página 66.

El autor John Mason, citado en la definición del problema de investigación, sustenta la posibilidad de abordar el estudio de patrones y regularidades desde la primaria a través de la movilización de habilidades tales como: ver, decir y registrar; dejando en evidencia que lo necesario a la hora de abordar la enseñanza de contenidos matemáticos es dinamizar las actividades escolares tendientes a generar aprendizaje significativo para el desarrollo de competencias no solo en una ciencia en particular sino en la aplicación de ella a diversos contextos.

Resulta importante resaltar que para la construcción del concepto de sucesión en los primeros años escolares las definiciones y la notación no se deben convertir en obstáculo, pero para que esto pueda ser posible es necesario enseñar las matemáticas de forma que contribuyan a la formación de personas partícipes de su propio aprendizaje y al desarrollo de competencias acordes con las necesidades de su entorno tal y como también se proponen hacerlo desde la enseñanza media y superior.

1.3. Pensamiento variacional

Uno de los logros planteados por el Ministerio de Educación Nacional es el referente al trabajo del desarrollo del pensamiento variacional desde la básica primaria que pretende que el estudiante pueda cuantificar la variación, pero esto solo se hace posible si existe un análisis de los procedimientos que ellos aplican a la hora de resolver ejercicios o problemas; es primordial entonces orientarlos en la identificación del fenómeno de cambio, brindarles herramientas para que lo pueda describir, interpretar, predecir consecuencias, cuantificar y modelarlo. Con ello se evita llegar a una mecanización de fórmulas que entorpecen este proceso tal y como lo sustenta Vasco “El pensamiento variacional no es aprenderse las fórmulas de áreas y volúmenes como: $b \cdot a$; πr^2 , o las de los modelos matemáticos de la física, como $f = m \cdot a$, $V = IR$, os $= (\frac{1}{2}) \cdot gt^2 + V_0 \cdot t$.

Más aún, esos modelos, entendidos sólo como fórmulas para remplazar valores en ellas, obstaculizan el pensamiento variacional, que primero trata de captar qué varía

con qué y cómo, antes de escribir nada y, mucho menos, antes de memorizar fórmulas”.¹⁶

Ayudar a que el estudiante de básica primaria desarrolle adecuadamente su pensamiento variacional implica poner en acción sus conocimientos previos, para este caso en particular, apoyarse en el pensamiento numérico fijando la atención en la forma como varían los números y así poder captar patrones y regularidades que se repiten en las diversas sucesiones propuestas en la fase de intervención.

Pero, ¿Qué es un Patrón? “Un patrón es una propiedad, una regularidad, una cualidad invariante que expresa una relación estructural entre los elementos de una determinada configuración, disposición, composición, etc”.¹⁷ Dentro de un ámbito matemático. Los patrones permiten al estudiante observar y analizar detalladamente una situación de variación, por ende el estudiante evidencia qué cambia y qué permanece invariante. “El análisis cuidadoso de patrones y regularidades permite establecer generalizaciones”.¹⁸

Ayudar a que los estudiantes identifiquen patrones y regularidades no basta, es importante además que los puedan describir y representar a través de diversos sistemas como: la representación escrita para poder comunicar las conclusiones que se establezcan de las observaciones, las representaciones pictóricas que les permiten mostrar lo que sucede en diversos momentos de la situación de cambio, representación tabular útil en los procesos aritméticos y la construcción de fórmulas y finalmente la representación algebraica para condensar la información. Estos tipos de representaciones ayudan a los estudiantes para que finalmente puedan modelar una situación matemática a través de la captación de las propiedades antes mencionadas.

2. Planteamiento del problema

A partir del análisis realizado a las pruebas de período diseñadas en años anteriores para los estudiantes de grado 4° en la Institución Educativa Arzobispo Tulio Botero Salazar, se detecta que al momento de solucionar problemas o simples ejercicios que tienen que ver con las secuencias numéricas presentan dificultad para comprenderlas y solucionarlas de forma adecuada. En pocas ocasiones logran establecer relaciones entre unas y otras lo cual deja en evidencia que no infieren patrones y regularidades que les permiten dar solución a los mismos. Caso contrario sucede cuando resuelven operaciones de adición, sustracción, multiplicación o división, pues en la mayoría de los casos las realizan adecuadamente siguiendo los pasos requeridos por el algoritmo. Desde esta perspectiva se observa que los estudiantes hacen un uso memorístico de las matemáticas, lo cual genera únicamente un aprendizaje a corto plazo, situación que va en contravía con el desarrollo de competencias y de los pensamientos matemáticos contemplados en los lineamientos curriculares.

El MEN mediante algunos documentos rectores como los estándares y los lineamientos curriculares para las diversas áreas propone redefinir y reestructurar los procesos de enseñanza y aprendizaje tendientes al desarrollo de competencias, lo cual quiere decir que el estudiante además de aprender un saber pueda hacer algo con él, y que lo pueda aplicar en diversos contextos; también pone de manifiesto que las competencias no se desarrollan en forma espontánea, por el contrario deben pasar por unos niveles los cuales se van constituyendo desde los primeros grados escolares. Desde esta perspectiva cabe destacar que aun desde la primaria los estudiantes están

en capacidad no solo de solucionar problemas y ejercicios con sucesiones sino también de establecer patrones y regularidades numéricas al interior de ellas.

Un autor del cual se puede inferir que es posible abordar el estudio de patrones y regularidades desde la primaria es John Mason a través de la movilización de habilidades tales como: ver, decir y registrar; ya que estas habilidades no son propias de una edad en particular y pueden incentivarse desde edades tempranas. Al respecto el autor escribe:

““Ver” hace relación a la identificación mental de un patrón o una relación..., y con frecuencia esto sucede cuando se logra la identificación de un algo común... El “decir”, ya sea a uno mismo o a alguien en particular, es un intento de articular, en palabras, esto es que se ha reconocido. “Registrar” es hacer visible el lenguaje lo cual requiere un movimiento hacia los símbolos y la comunicación escrita (incluyendo los dibujos)”.¹⁹ De lo anterior podría decirse que la dificultad detectada no deriva entonces de una etapa de desarrollo en el pensamiento del niño como lo diría Piaget, sino que puede atribuirse quizá a las estrategias metodológicas implementadas en el proceso de enseñanza y aprendizaje, pues para que este proceso sea exitoso no solo debe existir dominio conceptual y fundamentación teórica por parte del docente, sino también, que él sea un agente motivador e innovador en cuanto a esta interacción se refiere.

Se hace necesario entonces dinamizar las actividades escolares para generar en el estudiante aprendizaje significativo, que lo lleve al desarrollo de competencias tendientes a facilitar transición entre la primaria y la secundaria, para favorecer la aplicación del saber matemático tanto en su contexto particular, como en el de las ciencias en general.

Se pretende abordar el estudio de las sucesiones numéricas a través de una intervención de aula en un grupo de muchachos de básica primaria, con el fin de establecer modelos matemáticos aditivos y multiplicativos mediante el uso de la observación, el registro y la utilización del lenguaje matemático; dando un especial reconocimiento a los procesos de variación; cabe anotar que la propuesta se elabora de acuerdo con los lineamientos del MEN quien para tal fin describe: “[...] este tipo de pensamiento tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos. Uno de los propósitos de cultivar el pensamiento variacional es construir desde la Educación Básica Primaria distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico y, en la Educación Media, del cálculo diferencial e integral. Este pensamiento cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas”.²⁰

Uno de los aspectos centrales en educación es el referido al desarrollo de competencias, el cual resulta esencial al momento en que los estudiantes se enfrentan a los exámenes de servicio nacional ICFES y a las olimpiadas del conocimiento; los bajos resultados permiten inferir que desde la escuela aún no se implementan estrategias metodológicas que permitan abordarlas y desarrollarlas adecuadamente; de allí que se pretende implementar un proceso de enseñanza y aprendizaje mediado por una estrategia didáctica que potencie las competencias entendidas como una habilidad para relacionar los números, sus operaciones básicas,

los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, con el fin de producir e interpretar distintos tipos de información y ampliar el conocimiento sobre los aspectos cuantitativos para resolver problemas de la realidad.

Para orientar la propuesta de enseñanza para el aula referida a la problemática mencionada, el trabajo que aquí se reporta asume como problema central la interrogante:

¿Cómo construir desde los grados iniciales el concepto de sucesión numérica potenciando el desarrollo de las competencias y el uso del pensamiento variacional en los estudiantes de grado cuarto de la Institución Educativa Arzobispo Tulio Botero Salazar?

3. Objetivos

3.1. Objetivo general

Construir el concepto de sucesión numérica a través de la identificación de patrones de regularidad aditivo y multiplicativo para potenciar el desarrollo de competencias y el uso del pensamiento variacional.

3.2. Objetivos específicos

- Identificar el nivel de razonamiento cualitativo que utilizan los estudiantes de grado cuarto, para resolver situaciones que incluyan sucesiones numéricas, a partir del desarrollo de una actividad diagnóstica.
- Iniciar la construcción del concepto de sucesión numérica a partir de la identificación de la variación entre sus términos.
- Consolidar en los estudiantes el concepto de sucesión numérica, por medio del estudio y análisis de patrones y regularidades aditivas y multiplicativas en contextos numéricos.

4. Metodología

4.1. Descripción del método de investigación

La escuela es un escenario donde no solo intervienen docentes y estudiantes, por el contrario gracias al gran número de situaciones que allí se presentan, involucran a toda la comunidad educativa en general, por tal motivo se hace necesario reflexionar

sobre el rol del docente y los alcances de este en cuanto a su labor educativa. Es importante tratar de hacer pequeñas transformaciones en los entornos educativos que favorezcan el desarrollo individual de los estudiantes pero que a la vez ayuden a mejorar las estrategias de enseñanza tendientes a lograr un mejoramiento continuo de los currículos. Para tratar de responder a esta necesidad se sustenta este trabajo desde la implementación de una propuesta metodológica soportada en la aplicación de varias teorías y en la reflexión sobre los resultados obtenidos; de allí la importancia de establecer el método de investigación que lo soportará; es el referido a la investigación cualitativa enmarcada en la técnica de investigación acción, utilizando como herramientas principales para el análisis la observación, los registros y las entrevistas realizadas a los alumnos.

Para contextualizar un poco la técnica y método a continuación se hace una descripción de ellos.

La investigación acción: “La investigación-acción se relaciona con los problemas prácticos cotidianos experimentados por los profesores, en vez de con los "problemas teóricos" definidos por los investigadores puros en el entorno de una disciplina del saber. Puede ser desarrollada por los mismos profesores...”²¹ (Elliott J. 2000, página 5).

Al relacionarse con los problemas prácticos cotidianos, permite hacer una reflexión de estos para hacer un trabajo consciente tanto de docentes como de estudiantes; en el área de matemáticas en particular es necesario abordar este tipo de problemáticas ya que históricamente es un área en la cual se han generado bastantes conflictos al interior de su aprendizaje.

La investigación acción constituye una vía para la reflexión constante y sistemática sobre la práctica docente, permite optimizar los procesos de enseñanza y aprendizaje pues desarrolla la capacidad de introducir mejoras progresivas a la propia práctica.

KURT LEWIN (1947) describe la investigación acción como una forma de investigación donde se resaltan 2 características:

- Actividades de comunidades para la consecución colectiva de un bien.
- Práctica reflexiva social en la que no hay distinción entre la práctica sobre la que se investiga y el proceso de investigar sobre ella, para llevar a cabo cambios apropiados.

Teniendo en cuenta esta descripción John Elliott afirma que “la docencia no es una actividad y la investigación sobre la enseñanza otra. Las estrategias docentes suponen la existencia de teorías prácticas acerca de los modos de plasmar los valores educativos en situaciones concretas, y cuando se llevan a cabo de manera reflexiva, constituyen una forma de investigación acción.”²²

El método de investigación acción sustenta ampliamente el tipo de intervención que aquí se desarrolla, pues esta es producto de una reflexión hecha en el aula a un grupo de estudiantes sobre una problemática concreta, para implementar estrategias de intervención que apunten a la solución eficaz del problema planteado.

La observación: se entiende como una técnica para captar atentamente el fenómeno, hecho o caso, tomar información y registrarla para su posterior análisis. Esta resulta fundamental en todo proceso investigativo, pues el investigador se apoya en ella para obtener el mayor número posible de datos. Para hacer un buen proceso de observación científica es necesario seguir los siguientes pasos:

- Adecuar la estrategia al análisis en función del objetivo claro, definido y preciso.
- Tener presente un objetivo claro de investigación.
- Asumir una postura clara como observador.
- Planificar sistemáticamente la observación.
- Escoger las técnicas o instrumentos de registro a utilizar.

Pero no basta simplemente con hacer una observación, es indispensable consignar la información que de ella se deriva, hacer una descripción clara de los detalles y circunstancias de los hechos tal y como acontecen, sin omitir detalles por esta razón se debe acudir a registros escritos que apoyen la observación y para el propósito de este trabajo se utilizan los siguientes:

El diario de campo: allí se consignan los datos de interés que se deriven a lo largo del proceso investigativo; en él se pueden incluir observaciones, interpretaciones, sentimientos y progresos entre otros, los cuales se convierten en un soporte para posteriores análisis.

El cuaderno de trabajo: “son las planillas diseñadas por el observador y en las cuales se registran los datos específicos de los ítems o aspectos observados” ²³ (Gallego Ramírez 2011, página 34)

La entrevista: permite describir e interpretar aspectos que no son directamente observables, para lograr su fin debe ser dirigida por el contenido explícito que se pretende buscar.

El método de investigación acción descrito anteriormente permite dar solución al problema de investigación planteado, pues se sustenta una intervención basada en el análisis al interior del aula con los sujetos de estudio, generando así reflexiones conducentes a propiciar estrategias de aprendizaje significativo que transforme el contexto escolar.

4.2. Cronograma de actividades

Tabla 1: Cronograma de actividades.

FASES	ACTIVIDAD	DURACIÓN
Diagnóstico	Diseñar y aplicar una actividad diagnóstica inicial.	2 Semanas
Intervención	Elaborar tres guías didácticas. Dos con simples ejercicios que apunten a la construcción del concepto de sucesión numérica y una donde se genere una situación problema para la aplicación del concepto. Aplicar nuevamente la actividad diagnóstica. Realizar una encuesta a 10 niños elegidos aleatoriamente, que permita indagar por los conceptos trabajados.	5 Semanas (un bloque cada semana)

Evaluación y análisis de resultados	Contrastar los 2 momentos iniciales de la intervención a través del análisis de los instrumentos utilizados para la recolección de la información.	2 Semanas
-------------------------------------	--	-----------

4.3. Población

Partiendo de la necesidad de mejorar o potenciar las competencias matemáticas y el desarrollo del pensamiento variacional tal y como lo exige el Ministerio de Educación Nacional desde los Estándares para matemáticas, se diseña una propuesta para la Institución Educativa Arzobispo Tulio Botero Salazar del barrio Buenos Aires, con el fin de mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de sucesión numérica en particular, y de esta ciencia en general en cuanto permite a estos estudiantes realizar análisis reflexivos en torno a un concepto matemático trabajado tanto en secundaria como a nivel universitario y de otras ciencias.

Al interior de la Institución Educativa existe una población de 188 docentes matriculados en el grado cuarto, distribuidos en cinco grados, cuatro pertenecientes a la sede principal con 156 estudiantes y uno de ellos ubicado en el sector de las Estancias (Barrio Caicedo) con 32. Para esta intervención se toma una muestra de 36 estudiantes que cursan el grado 4^o1 en la sede principal distribuyéndolos en 9 equipos de 4 personas para desarrollar las guías de trabajo diseñadas para este fin.

5. Intervención

A la luz del diseño curricular propuesto por la Secretaría de Educación de Medellín llamado “Recontextualización de las mallas curriculares”, el cual propone organizar los planes de estudios de las diversas áreas basados en competencias, con el fin de favorecer aprendizaje significativo bajo actividades bien diseñadas en las cuales el estudiante sea el protagonista de su proceso de aprendizaje, se diseña una intervención en tres etapas a través de las cuales se trabaja el estándar referente a la identificación de los “patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica” bajo la temática de sucesión. En cada una de estas etapas se propende por abarcar los objetivos específicos planteados en este trabajo.

En la etapa inicial se identifica el alcance del razonamiento empleado por los estudiantes para la solución de sucesiones, a través de la aplicación de una prueba inicial (Ver ACTIVIDAD INICIAL - FINAL) que apunte al fin propuesto por el Ministerio de Educación, pero que a su vez responda a las necesidades de esta intervención.

Esta prueba está constituida por seis ITEMS: el primero con 4 sucesiones verbales, con el fin de ambientar a los estudiantes en el concepto de sucesión desde un conjunto de palabras que se relacionan en forma ascendente o descendente; el segundo con 4 secuencias de figuras en las cuales para su completación deben tener en cuenta el manejo de variables como trama, color, posición y tamaño las cuales deben manejar en forma simultánea; el tercero con sucesiones numéricas aditivas y multiplicativas simples donde utilicen sus preconceptos; el cuarto de 2 sucesiones

aditivas y multiplicativas con mayor grado de complejidad con el fin de que los estudiantes puedan desplegar la capacidad de razonar de una forma más analítica; el quinto desde una tabla con una relación funcional y con una secuencia interrumpida para varios valores con el propósito de hacer más evidente su pensamiento variacional, la idea de esta tabla se extrae del módulo para el desarrollo de competencias en matemáticas 5° de la página 17 con algunas modificaciones; finalmente el sexto ITEM con 5 preguntas que permiten plasmar los razonamientos empleados, los cálculos realizados, las reglas o patrones y si les es posible las expresiones matemáticas que den cuenta de las soluciones para las sucesiones propuestas. Teniendo en cuenta que el año lectivo para los estudiantes es de 40 semanas, la aplicación de esta prueba se desarrolla durante las semanas 29 y 30 correspondientes al mes de agosto, en los días jueves durante un bloque de matemáticas.

En la etapa intermedia se realiza la intervención docente a través de actividades que estimulen el desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes para construir el concepto de sucesión. Para ello se diseñan tres guías basadas en actividades lúdicas que motivan a los docentes a aprender y a su vez dinamizan los procesos de aprendizaje; al respecto Azcárate y otros en su libro: *“Enfoques actuales en la didáctica de la matemática”*, plantean que “Un ambiente lúdico contribuye a despertar la curiosidad del alumno y salvar el rechazo que puedan sentir hacia la materia, lo que puede permitir que las clases sean más participativas y amenas. Los juegos y otras actividades recreativas son generadoras de un placer espontáneo que hacen que la matemática deje de parecer una disciplina triste y los matemáticos unos aguafiestas”.²⁴

La primera actividad de intervención (Ver PRIMERA ACTIVIDAD DE INTERVENCIÓN) está estructurada sobre un juego llamado “La pirámide de vasos” el cual utiliza tablas para el registro de datos obtenidos a través de la actividad lúdica, luego se pide a los estudiantes que reflexionen sobre 7 preguntas divididas en inferencias, magnitudes que varían de forma simultánea y el establecimiento del patrón. La actividad está diseñada para aplicarse en la semana 31 del año lectivo, durante un bloque de matemáticas.

La segunda actividad (ver SEGUNDA ACTIVIDAD DE INTERVENCIÓN) llamada “Descubriendo las regularidades” requiere, “además de hacer registros de datos” descubrir el patrón para secuencia de potencias de base 2 y 3; en la etapa de reflexión se plantean 10 preguntas, durante las tres primeras se debe hacer un análisis de la actividad realizada para establecer esquemas multiplicativos que permitan la construcción de otras sucesiones haciendo uso de preconceptos como la descomposición en factores primos, las preguntas 4 y 5 afianzan el concepto de sucesión como tal; de la pregunta 6 a la 10 los estudiantes utilizan un esquema de representación geométrico basado en áreas, para trabajar la secuencias de potencias en base 2, con el fin de consolidar el concepto de sucesión y a la vez promover el desarrollo del pensamiento variacional. La actividad diseñada se aplica en semana 32 y 33 del calendario escolar los jueves durante un bloque.

La tercera actividad (ver TERCERA ACTIVIDAD DE INTERVENCIÓN) se desarrolla con base en una situación problema llamada “Tarjetas y bonos” y aunque se fundamenta en una relación de tipo funcional apunta a desarrollar el concepto de sucesión porque permite obtener un conjunto de números a partir del número anterior, mediante la aplicación de una operación o por el uso de una regla o patrón que determine su formación. Se plantean en este anexo, cinco preguntas que apuntan a explicitar, verificar y realizar cálculos para llegar a una generalización previamente dada; cabe anotar que para poder dar respuesta a las preguntas planteadas los

estudiantes deben realizar unos registros previos en las tablas de tal forma que puedan acceder fácilmente a la información, solo se analizará la respuesta número cinco en caso de que los equipos no puedan reconocer el patrón, se aplica esta actividad durante la semana 34 en un bloque el día jueves.

La cuarta actividad (Ver ACTIVIDAD INICIAL - FINAL) corresponde nuevamente a la aplicación de la actividad inicial - final descrita en la primera etapa, tanto la actividad inicial como la final se aplica durante dos semanas en un bloque cada semana.

Finalmente se aplica una entrevista escrita a 9 de los 36 seleccionados al azar para poder establecer si mediante las actividades implementadas donde se registra la variación y el cambio se logra consolidar el concepto de sucesión. La entrevista está diseñada con 5 preguntas en las cuales los estudiantes definen con sus palabras los conceptos de sucesión y regla o patrón, la entrevista se aplica en la semana 36. En la etapa final se realiza el análisis de resultados, para establecer si mediante las actividades implementadas donde se registra la variación y el cambio, se logra validar la pregunta de investigación.

5.1. Etapa inicial – Diagnóstico

En cumplimiento al primer objetivo específico planteado al interior de este trabajo, “Identificar el nivel de razonamiento cualitativo que utilizan los estudiantes de grado cuarto, para resolver situaciones que incluyan sucesiones numéricas, a partir del desarrollo de una actividad diagnóstica”; se diseña la misma (ver ACTIVIDAD INICIAL - FINAL) teniendo en cuenta que, de forma habitual, los estudiantes en general utilizan el sentido común para tratar de resolver cualquier ejercicio o problema que se les presente, es por ello que resulta importante destacar el rol que juega el uso de los preconceptos para realizar una abstracción cualitativa de las relaciones como un todo integrado a partir de la información presentada, sin hacer consciente o explícito el conocimiento cuantitativo inmerso al interior de la misma situación. Por tal razón se pretende que durante la aplicación de esta primera fase los estudiantes puedan, a través de las preguntas orientadoras expresar con palabras las técnicas de razonamiento utilizadas en la toma de decisiones para dar respuesta a la tarea encomendada.

Antes de presentar la actividad diagnóstica resulta importante definir bien las condiciones del ejercicio o problema para no incurrir en ambigüedades o en errores al momento de solucionar una sucesión. En este sentido se exponen a continuación dos ejemplos de lo que podría suceder si no se tiene cuidado en ello.

- Presentar a los estudiantes secuencias como

AA	BB	CC			
----	----	----	--	--	--

Bajo la instrucción “Completa las últimas casillas siguiendo la secuencia”, puede generar respuestas como:

AA	BB	CC	DD	EE	FF
----	----	----	----	----	----

AA	BB	CC	AA	BB	CC
----	----	----	----	----	----

Desde esta perspectiva ambas respuesta resultan válidas; de allí la necesidad de una hipótesis bien formulada que permita inducir un razonamiento claro y preciso conducente a una solución adecuada.

- A continuación se analiza un ejercicio propuesto en el Módulo para el desarrollo de competencias en matemáticas 5° de la página 25, propuesto por la Alcaldía de Medellín, en él se pretende que los estudiantes puedan encontrar el cuarto número de la secuencia bajo el siguiente enunciado.

Una máquina traga números saca la siguiente secuencia de números

Tabla 2: Actividad máquina tragamonedas, pagina 25. Módulo para el desarrollo de competencias en matemáticas 5°.

Número ingresado	Proceso	Número que salió
1	→	3
2	→	6
3	→	11
4	→	

El número que resulta después de asignar el número cuatro es

- 17
- 18
- 19
- 20

Por la forma como se plantea el ejercicio si el estudiante escoge cualquiera de las respuestas esta resulta matemáticamente válida tal y como se muestra a continuación.

Respuesta a. 17

Tabla 3: Demostración respuesta a, máquina tragamonedas.

Número ingresado	Proceso	Número que salió	Patrón que sigue
1	→	3	$2 + 1^2 + (n - 1)(n - 2)(n - 3) \left(-\frac{1}{6}\right)$
2	→	6	$2 + 2^2 + (n - 1)(n - 2)(n - 3) \left(-\frac{1}{6}\right)$
3	→	11	$2 + 3^2 + (n - 1)(n - 2)(n - 3) \left(-\frac{1}{6}\right)$
4	→	17	$2 + 4^2 + (n - 1)(n - 2)(n - 3) \left(-\frac{1}{6}\right)$
·			
·			
·			
n	→		$2 + n^2 + (n - 1)(n - 2)(n - 3) \left(-\frac{1}{6}\right)$

Respuesta b. 18

Tabla 4: Demostración respuesta b, máquina tragamonedas.

Número ingresado	Proceso	Número que salió	Patrón que sigue
1	→	3	$2 + 1^2$
2	→	6	$2 + 2^2$
3	→	11	$2 + 3^2$
4	→	18	$2 + 4^2$
· · · n	→		$2 + n^2$

Respuesta c. 19

Tabla 5: Demostración respuesta c, máquina tragamonedas.

Número ingresado	Proceso	Número que salió	Patrón que sigue
1	→	3	$2 + 1^2 + (n-1)(n-2)(n-3) \left(\frac{1}{6}\right)$
2	→	6	$2 + 2^2 + (n-1)(n-2)(n-3) \left(\frac{1}{6}\right)$
3	→	11	$2 + 3^2 + (n-1)(n-2)(n-3) \left(\frac{1}{6}\right)$
4	→	19	$2 + 4^2 + (n-1)(n-2)(n-3) \left(\frac{1}{6}\right)$
· · · n	→		$2 + n^2 + (n-1)(n-2)(n-3) \left(\frac{1}{6}\right)$

Respuesta d. 20

Tabla 6: Demostración respuesta d, máquina tragamonedas.

Número ingresado	Proceso	Número que salió	Patrón que sigue
1	→	3	$2 + 1^2 + (n-1)(n-2)(n-3) \left(\frac{1}{3}\right)$
2	→	6	$2 + 2^2 + (n-1)(n-2)(n-3) \left(\frac{1}{3}\right)$
3	→	11	$2 + 3^2 + (n-1)(n-2)(n-3) \left(\frac{1}{3}\right)$
4	→	20	$2 + 4^2 + (n-1)(n-2)(n-3) \left(\frac{1}{3}\right)$
· · · n	→		$2 + n^2 + (n-1)(n-2)(n-3) \left(\frac{1}{3}\right)$

Otra fórmula simple que permite obtener las primeras cuatro respuestas también es: $2^n + n$ de aquí puede concluirse que con un número finito de datos no se puede garantizar un único modelo.

Después de verificar matemáticamente cada una de las respuestas se puede observar que para obtener las respuestas (a, c y d) se deben emplear algoritmos matemáticos que requieren de mayor razonamiento que el de la respuesta (b) la cual es seguramente la respuesta esperada, por lo tanto y para el caso anterior se sugiere mejorar actividades como estas con hipótesis claras y lo más explícitas posibles teniendo en cuenta que se está partiendo de la formación del concepto de sucesión. Con el planteamiento de las hipótesis en las guías de trabajo se pretende no incurrir en errores de este tipo utilizando un lenguaje sencillo y comprensible para los niños de esta edad.

5.2. Etapa intermedia – Intervención

Las tres situaciones diseñadas para esta etapa (Ver SEGUNDA, TERCERA Y CUARTA ACTIVIDAD DE INTERVENCIÓN) se fundamentan en el uso del esquema aditivo y multiplicativo en contextos numéricos como estrategia para representar la covariación entre dos espacios de medida que permitan interpretar patrones y regularidades características propias del pensamiento variacional.

De esta forma se busca que los estudiantes identifiquen que cuando se producen cambios en uno de los espacios de medida así también se generan cambios en el otro; al desarrollar estas situaciones asociadas a la búsqueda de la variación mediante el reconocimiento de patrones aditivos y multiplicativos se espera que el razonamiento allí empleado por los estudiantes les permita construir el concepto de sucesión.

No obstante, el uso de habilidades tales como: ver, decir y registrar se dinamizan al interior de las actividades aquí propuestas, construyendo así un acercamiento significativo al concepto de sucesión. Al utilizar distintos registros como el verbal, el escrito y el tabular, se ayuda a los estudiantes para que puedan cuantificar la variación, lo cual se hace posible a través del análisis realizado a los procedimientos aplicados mediante las preguntas orientadoras que los invitan a describir, interpretar, predecir y modelar el fenómeno de cambio.

Se espera además que, empleando el juego como factor motivacional se produzcan aprendizajes que perduren en el tiempo y les sean útiles a los estudiantes cuando en grados posteriores deban recurrir a preconceptos para construir otros conceptos más elaborados.

5.3. Etapa final - Evaluación y análisis de resultados

Resulta importante resaltar el papel preponderante que el área de matemáticas juega en el currículo escolar, por ello cabe detenerse a analizar la forma como se desarrollan las clases de esta área en particular; en el afán de los docentes por obtener buenos resultados tanto en pruebas internas como externas se centran en la mayoría de las clases, en desarrollar el dominio y memorización de los algoritmos para que posteriormente los puedan aplicar en la resolución de problemas y no tanto en el desarrollo del pensamiento y la capacidad de análisis que puedan desarrollar los estudiantes, es por ello que el pensamiento variacional ha quedado rezagado durante la primaria pues para su desarrollo se requiere desplegar todo un arsenal didáctico y

cognoscitivo que favorezca en los estudiantes la comprensión y el uso de la variación y el cambio no solo en las matemáticas sino en situaciones cotidianas.

Durante esta intervención de aula se quiere favorecer a partir de la primaria la correlación del pensamiento variacional con el numérico de una forma estructurada, presentando algunos elementos para una didáctica que promueva la construcción del concepto de sucesión a través de actividades lúdicas.

6. Resultados

El análisis de resultados se efectúa bajo dos criterios:

El primero bajo seis parámetros interpretados a partir de los diagramas de barras y las entrevistas realizadas a los estudiantes; el segundo teniendo en cuenta el análisis de los datos obtenidos en la ejecución de las pruebas utilizando el programa estadístico Statgraphics Centurión XV, por modelo de comparación de medias y varianzas, utilizando como nivel de confianza el 95% y un porcentaje de incertidumbre de 5%.

6.1. Análisis de las actividades implementadas

Para tener mayor claridad al momento de interpretar los análisis realizados se sugiere al lector remitirse a las guías implementadas las cuales se encuentran al final del texto. A continuación se describen los ítems a analizar

- Registro de datos y cálculos.
- Identificación del fenómeno de cambio.
- Descripción del patrón y cuantificación de la variación.
- Interpretación de la regularidad.
- Análisis cualitativo (solo aplica para la actividad inicial – final)
- Comprensión de conceptos de patrón o regla y sucesión (solo aplica para la entrevista escrita)

6.1.1. En la gráfica correspondiente a la actividad de Pirámide de vasos

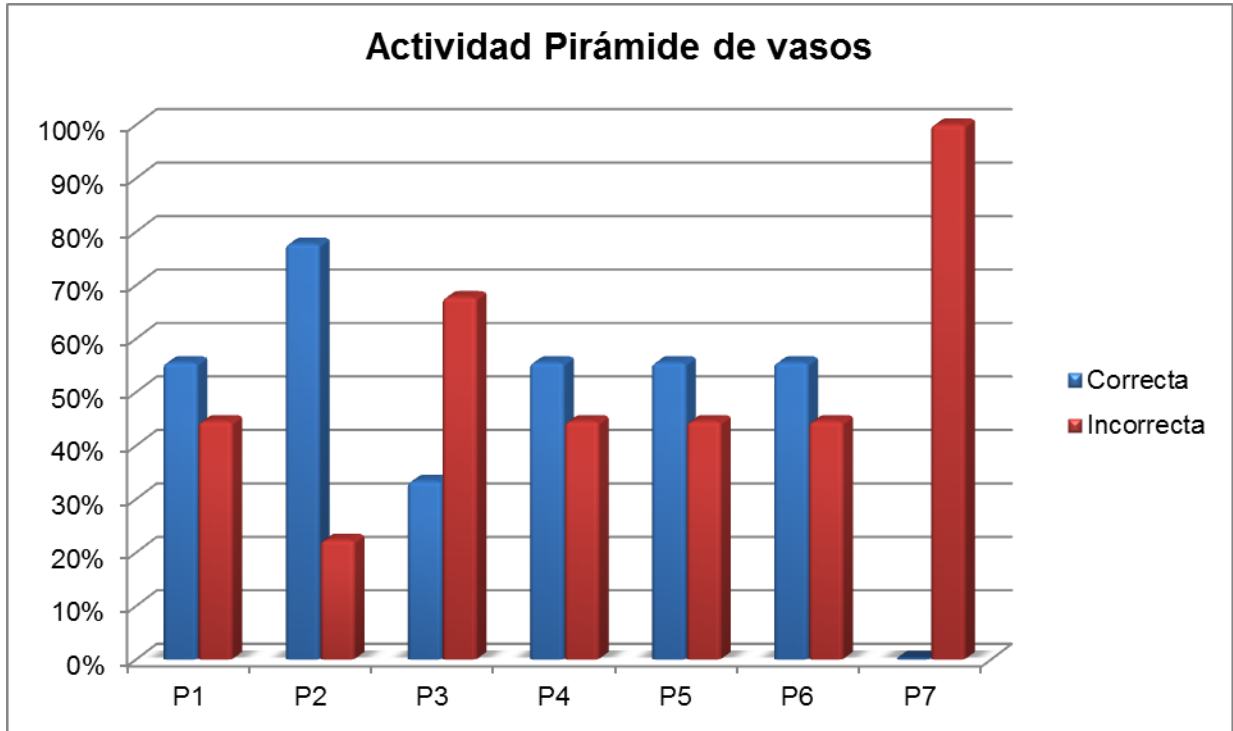


Figura 2: Diagrama de barras actividad pirámide de vasos.

- En las preguntas 5 y 6, ambas con 56% de respuestas correctas y 44% incorrectas, los estudiantes registran datos en tablas haciendo uso de cálculos aritméticos sencillos que determinan un patrón común para la construcción de toda la sucesión, la mayoría de respuestas correctas indica que cuando el estudiante hace un registro escrito del trabajo realizado, este le permite establecer correlaciones entre las 2 variables cantidad y puntaje; realizar cálculos centrando la atención en la cantidad que se repite y a su vez en las veces que ella se repite, tal y como se encuentra implícito en las tablas de multiplicar.
- En las preguntas 1 y 2 debían identificar el fenómeno de cambio a partir de unos registros previos realizados durante el juego, el 56% y el 78% respondieron acertadamente en las preguntas 1 y 2 respectivamente, aunque ambas apuntan a lo mismo “presentar el puntaje para obtener el número de vasos tumbados” los estudiantes deben recurrir a la reversibilidad de pensamiento con el fin de obtener una solución correcta, resulta evidente que muchos de ellos logran hacer una apropiada conceptualización de las operaciones inversas.
- En la pregunta 7 se indaga por la regla para predecir los términos de la sucesión. Se observa que ninguno de los estudiantes logra responder acertadamente, esto puede deberse a que el establecimiento de

correlaciones entre variables supone poner en marcha operaciones cognitivas complejas, las cuales pueden desarrollarse a través de la misma práctica, comenzando por establecer patrones sencillos hasta lograr identificar algunos más elaborados.

- Finalmente la interpretación de la regularidad se desarrolla en las preguntas 3 y 4 obteniendo en la primera el 33% de aciertos y en la segunda 56%; esta disparidad se presenta dado que en la pregunta 3 el cálculo a realizar presenta mayor dificultad que en la pregunta 4.

6.1.2. En la gráfica correspondiente a la actividad Descubriendo las regularidades

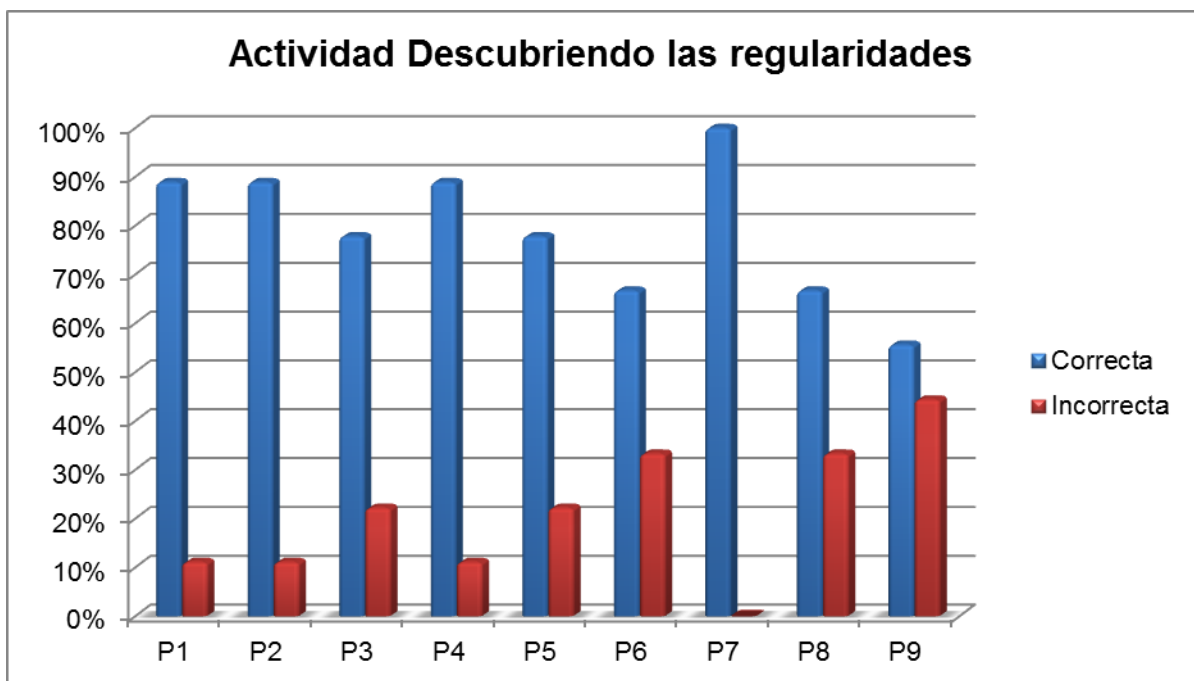


Figura 3: Diagrama de barras descubriendo las regularidades.

- En las preguntas uno y dos, 32 de los 36 estudiantes logran hacer los cálculos de una forma acertada para dar respuesta a estas preguntas propuestas, apoyándose en los registros previos de descomposición en factores primos, utilizados durante la actividad.
- El 78%; 89% y 100% logran identificar del fenómeno de cambio en las preguntas 3, 4 y 7 respectivamente; lo cual quiere decir que en la pregunta tres solo 8 estudiantes no logran construir la sucesión correctamente; en la pregunta cuatro únicamente a 4 estudiantes se les dificulta identificar los factores que siempre se conservan en todos los números de la sucesión; mientras que en la pregunta 7 todos los estudiantes logran identificar la magnitud que se conserva en la nueva representación usada, una representación geométrica para una sucesión de base dos.

- En las preguntas 5 y 9 los estudiantes deben dar cuenta de la descripción del patrón y la cuantificación de la variación, en la primera, el 78% (28 de 36 estudiantes) logran establecerlos correctamente al utilizar el preconcepto de descomposición en factores primos, mientras que en la segunda el 56% (20 de 36 estudiantes) responden acertadamente al utilizar un nuevo método de representación, el geométrico.
- Las preguntas 6 y 8 apuntan a la interpretación de la regularidad en ambas el 67% de los estudiantes, es decir 24 de ellos logran hacer una correcta interpretación de la regularidad a partir de la representación gráfica de rectángulos con igual altura y diferente base, encontrando así una nueva representación para la sucesión de base dos.

6.1.3. En la gráfica correspondiente a la actividad Tarjetas y bonos

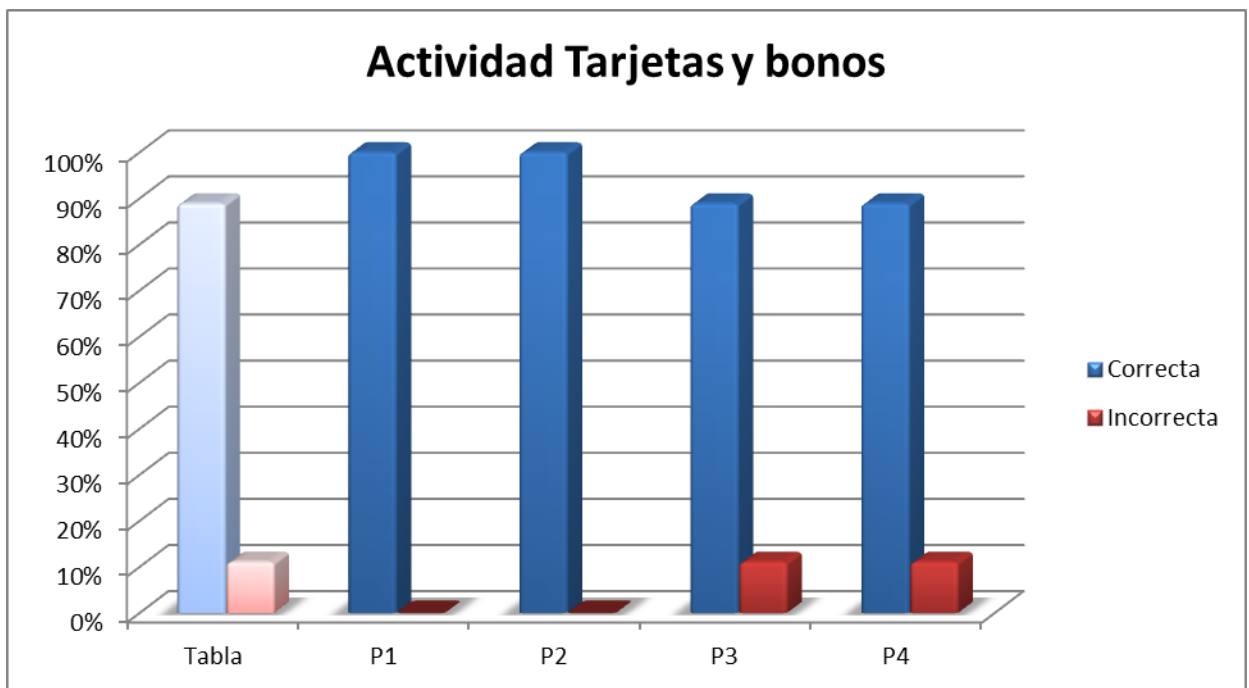


Figura 4: Diagrama de barras actividad tarjetas y bonos.

- El 89% de los estudiantes logra hacer correctamente el registro de los datos y los cálculos, es decir, de los 36 estudiantes que realizaron la actividad 32 lo hicieron bien; el 11% que corresponde a 4 estudiantes no lograron completar los datos de la tabla de manera exitosa lo que llama la atención porque en las preguntas número uno y dos el 100% de ellos respondió correctamente y para poder hacerlo debían tener en cuenta el llenado de la tabla.

- En las preguntas uno y dos el 100% de los estudiantes logran identificar fenómeno de cambio de una forma correcta evidenciando así que el uso de la estrategia implementada resulta exitoso, pero además muestra que sí es posible potenciar el desarrollo del pensamiento variacional desde la primaria, tal y como lo propone el M.E.N. a través de los lineamientos curriculares.
- El 89% de los niños responden acertadamente a la pregunta que tiene que ver con la descripción del patrón y cuantificación de la variación (pregunta número tres), en tanto que identifican la regla que determina la relación planteada en la actividad, mientras que el 11% no logra hacerlo.
- En la pregunta 4 sólo el 11% de los estudiantes, es decir 4 de los 36 no responden acertadamente, más bien no logran dar cuenta de la interpretación de la regularidad al no poder hacer el proceso de verificación.

6.1.4. En las gráficas correspondientes a la actividad Inicial - final

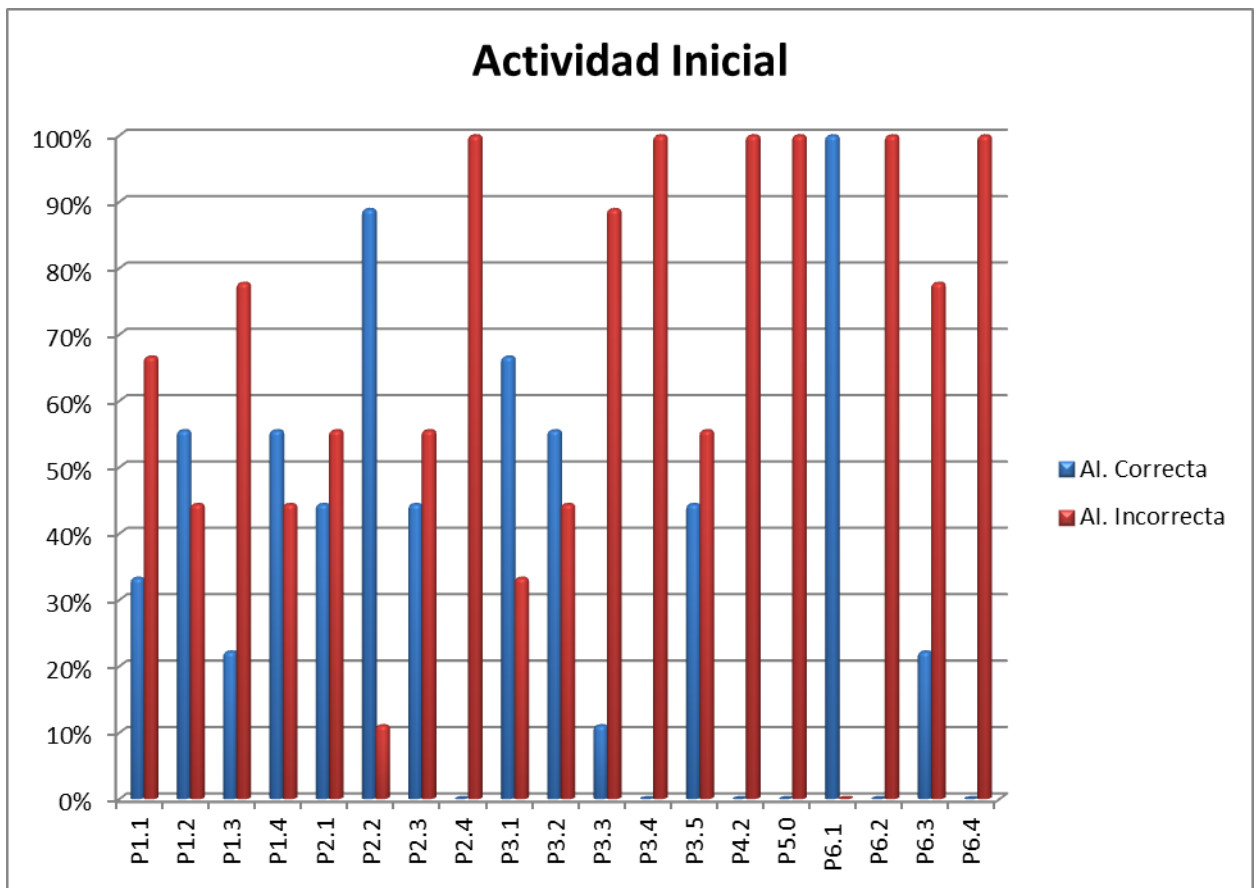


Figura 5: Diagrama de barras actividad inicial.

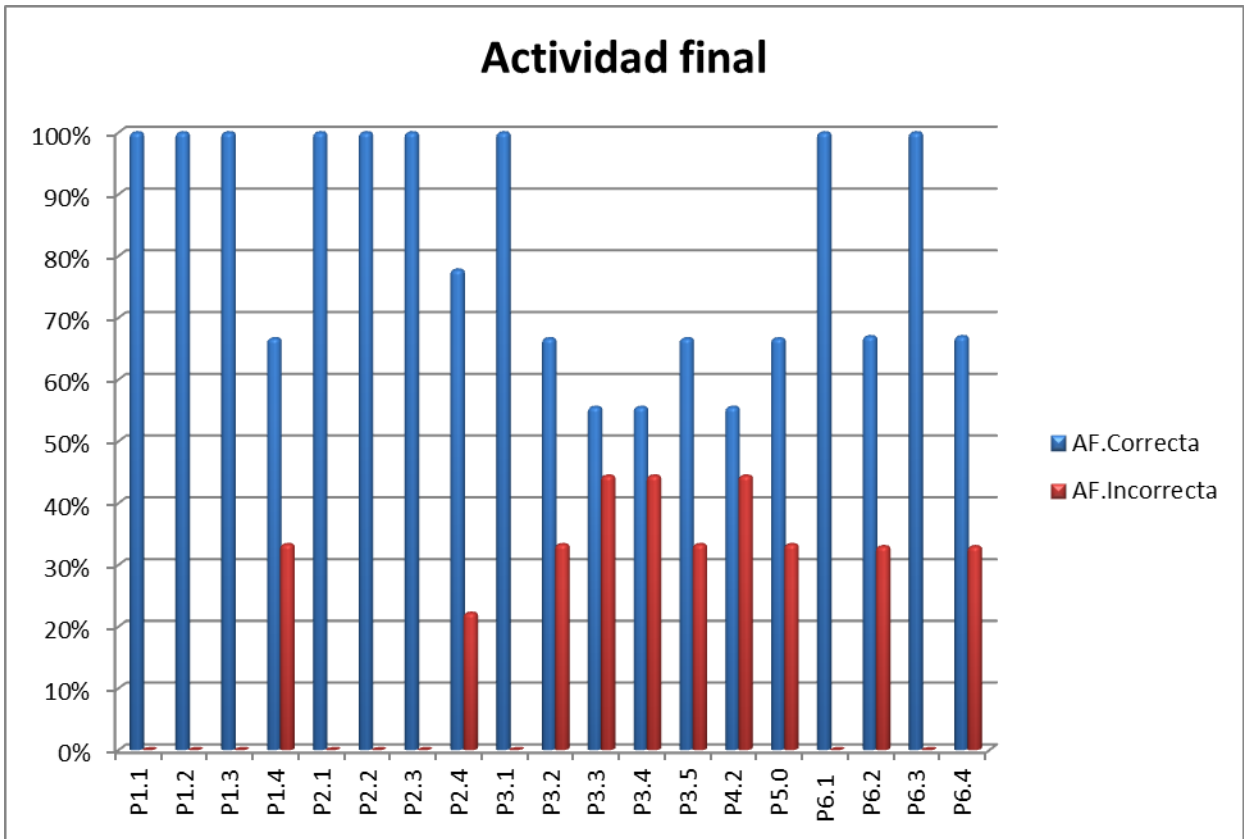


Figura 6: Diagrama de barras actividad final.

- Al comparar los resultados entre las gráficas de la actividad inicial y final se observa que ítem correspondiente al registro de datos y cálculos presenta un incremento en todas las preguntas pertenecientes a este grupo (3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 4.1, 4.2, 5, 6.1), sin embargo llama la atención que en las preguntas 3.4; 4.2 y 5 el porcentaje de aciertos pasa de cero a 56%, 56% y 67% respectivamente. Esto indica que las actividades implementadas permitieron a los estudiantes avanzar en la solución de sucesiones.
- En la pregunta 6.2 se muestra un incremento de aciertos de cero a 67%, es decir que después de realizar la intervención 24 de los 36 estudiantes logran identificar el fenómeno de cambio, estableciendo de forma correcta el tipo de operación que debe realizar para poder resolver la sucesión.
- Durante la actividad inicial solo el 22% de los estudiantes pueden observar el patrón que les permite generar el número siguiente a partir del número dado, mientras que en la actividad final el 100% de ellos reconocen que hay una regla implícita durante el cambio producido; se evidencia entonces un incremento del 88% de estudiantes que resuelven acertadamente esta pregunta.
- El 67% de los estudiantes en la actividad final logran hacer una interpretación acertada de la regularidad pudiendo establecer el patrón que genera las sucesiones, mientras que antes de la intervención ninguno de ellos lo hacía.

- En las preguntas 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 2.1, 2.2, 2.3 y 2.4 nuevamente se observa un incremento en los porcentajes de respuestas acertadas; en las tres primeras el 100% de los estudiantes logran completar las secuencias ascendentes y descendentes de palabras; se ve un porcentaje igual para la quinta, sexta y séptima pregunta en las cuales deben completar secuencias de figuras teniendo en cuenta al mismo tiempo varias relaciones estructurales que no requieren de cálculos aritméticos sino de una observación directa de relaciones entre la figura que le antecede y la que le sigue. En la respuesta 2.4 se observa un incremento de 78% de respuestas acertadas con respecto a la actividad inicial.

6.1.5. En la gráfica correspondiente a la entrevista escrita

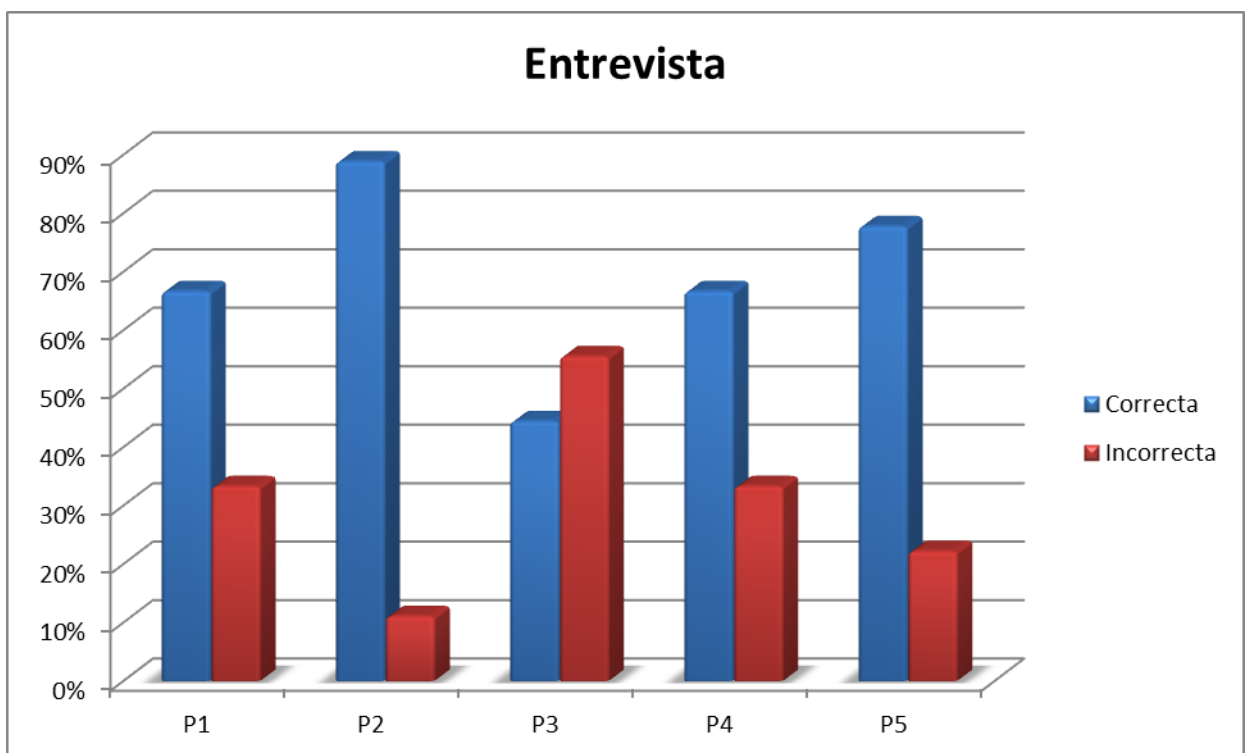


Figura 7: Diagrama de barras entrevista.

- Al finalizar la intervención “6 de los 9 estudiantes entrevistados que corresponden a 67%” logran identificar el fenómeno de cambio a través de las diversas actividades trabajadas, las cuales tuvieron en cuenta la observación, descripción y análisis de datos.
- El 89% de los estudiantes, son capaces de definir con sus palabras lo que es una regla o patrón; mientras que el 67% también logran definir el concepto de sucesión, el 78% de los estudiantes encuestados son capaces de identificar que para poder resolver una sucesión de forma correcta deben encontrar primero el patrón.

6.2. Análisis de las observaciones, entrevistas orales y escritas realizadas durante la ejecución de las actividades

En esta etapa se hace transcripción de algunas de las entrevistas realizadas a los estudiantes durante la ejecución de las actividades, con el fin de apoyar las observaciones realizadas a lo largo de la intervención.

6.2.1. Actividad Pirámide de vasos

Ya se había escrito anteriormente en el análisis gráfico que el 56% de los estudiantes responden las preguntas 5 y 6 acertadamente sin embargo, durante la realización de la actividad se le indaga a los estudiantes por la forma cómo están obteniendo los datos, llama la atención que los niños con menores edades utilizan estrategias aditivas para resolver secuencias multiplicativas como se muestra a continuación.

Registro realizado en la semana 31, clases 154 y 155, septiembre 13

“al hacer un recorrido por los equipos de trabajo se observa que el los estudiantes Edwin, Leider, Cristián y Juliana realizan la actividad diferente a sus compañeros por lo cual se les pregunta ¿Cómo haces para encontrar los puntajes de la tabla 5? Juliana responde pues profe vamos sumando seis más seis más seis y así hasta completar la tabla, ¿Habría otra forma más sencilla de hacerlo? Edwin no profe sumando queda bien...”

Este hallazgo resulta relevante porque se espera que al estar cursando el grado cuarto de primaria ya deban dominar las cuatro operaciones básicas y emplear en la solución de ejercicios y situaciones problema el algoritmo más sencillo que para este caso es la multiplicación y sobre el cual se fundamenta esta actividad.

Durante la realización de la actividad se observa que en la pregunta 7 de la actividad Pirámide de Vasos ninguno de los equipos hace una descripción de la regla utilizada para completar la tabla del punto 5 por lo cual se indaga verbalmente sobre este hecho y se registran las respuestas en el diario de campo institucional.

Registro realizado en la semana 31, clases 154 y 155, septiembre 13

“... finalizando la actividad llama la atención que todos los equipos devuelven la guía de trabajo con la respuesta 7 incorrecta por lo cual se pregunta a los equipos de Natalia, Neide, Mateo, Verónica, Mariana, Camilo, Luisa y Didier. ¿Para encontrar cualquier puntaje de la tabla del punto 6 que debían hacer? , ¿Cuál es entonces la regla?

Natalia, Neide, Mateo y Verónica.

- Respuesta a la pregunta 1: contar de 5 en cinco.
- Respuesta a la pregunta 2: ¿el 5?
- Mariana, Camilo, Luisa y Didier.
- Respuesta a la pregunta 1: ir sumando de a cinco.
- Respuesta a la pregunta 2: sumar de a 5 “

De acuerdo con las respuestas dadas por los niños resulta evidente que ellos identifican el patrón a seguir para completar la sucesión, pero no les es sencillo explicitarlo en forma escrita.

En las preguntas 3 y 4 los estudiantes que responden acertadamente a ellas, evidencian dificultad para reconocer que cuando se producen cambios en uno de los espacios de medida así también se generan cambios en el otro pues confunden las magnitudes como se muestra a continuación la respuesta debe ser puntaje y no número de vasos.

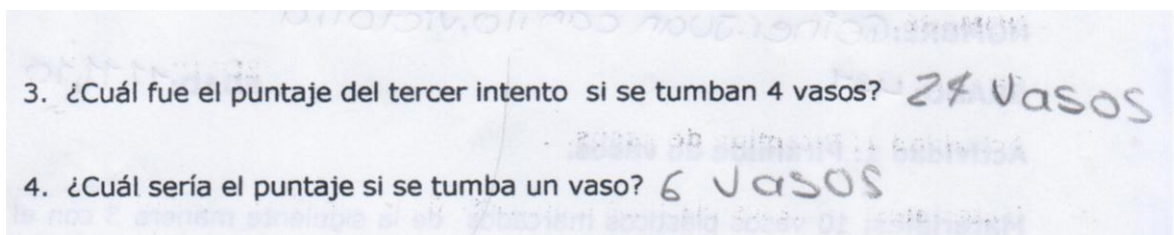


Figura 8: Respuesta 1,2 actividad pirámide de vasos.

6.2.2. Actividad Descubriendo las regularidades

Después de dar las indicaciones iniciales y de conformar los grupos de trabajo, se observa que para completar las tablas uno y dos, correspondientes a los factores de una sucesión de base dos y tres respectivamente, los estudiantes comienzan a hacer la extracción de tarjetas para expresar los tres números iniciales. Sin embargo, para expresar los dos números finales lo hacen sin necesidad de acudir a las tarjetas, obsérvese las tablas.

NUMERO	2	4	8	16	32
TARJETAS	2	2 x 2	2 x 2 x 2	2 x 2 x 2 x 2	2 x 2 x 2 x 2 x 2

NUMERO	3	9	27	81	243
TARJETAS	3	3 x 3	3 x 3 x 3	3 x 3 x 3 x 3	3 x 3 x 3 x 3 x 3

Figura 9: Tablas actividad descubriendo las regularidades, base 2, 3.

Los equipos descomponen los dos últimos datos 16, 32, 81 y 243 utilizando únicamente el esquema multiplicativo.

En la completación de las tablas tres y cuatro los equipos requieren hacer el ejercicio una vez más antes de lograr establecer el patrón para descubrir el esquema multiplicativo que da cuenta de los términos 96 y 972 como se ve en la siguiente imagen.

NUMERO	6	12	24	48	96
TARJETAS	2 x 3	2 x 3 x 2	2 x 3 x 2 x 2	2 x 3 x 2 x 2 x 2	2 x 3 x 2 x 2 x 2 x 2
NUMERO	12	36	108	324	972
TARJETAS	2 x 3 x 2	3 x 2 x 3 x 3	3 x 2 x 3 x 3 x 3	3 x 2 x 3 x 3 x 3 x 3	3 x 2 x 3 x 3 x 3 x 3 x 3

Figura 10: Tablas actividad descubriendo las regularidades, factores 2, 3.

Se indaga al equipo de Juliana, Edwin, Alexander y Leider acerca de la forma como están realizando el ejercicio, las respuestas que se muestran a continuación se toman del diario de campo durante la semana 32, clases 159 y 160, septiembre 20

“... ¿Cómo lograron establecer los factores de 16 y 32 sin utilizar las tarjetas? Juliana: mire profe que hay una regla, cada vez se multiplica por 2 el número que sigue. ¿Cómo lograron establecer los factores de 81 y 243 sin utilizar las tarjetas? Alexander: por lo mismo que dijo Juliana pero esta vez la regla es que va multiplicando por tres cada vez. ¿Cómo lograron establecer los factores de 96 sin utilizar las tarjetas? Juliana aquí es un poco igual pero diferente, porque primero hay que multiplicar por dos y por tres y después únicamente por dos, como si estuviéramos descomponiendo en factores primos pero en desorden. ¿Cómo lograron establecer los factores de 972 sin utilizar las tarjetas? Juliana: aquí también se multiplica por 3 y por 2 y otra vez por dos y después por tres y es ir multiplicando por tres...”

De lo anterior se infiere que los estudiantes ya logran además de hacer registros, observar la variación para describir los cambios y luego descubrir el patrón que genera la sucesión; esto lo hacen recurriendo a preconceptos como el de descomposición en factores primos trabajado anteriormente, de allí la importancia de generar estrategias de intervención en el aula que apunten a hacer uso de los mismos para construir nuevos conceptos, al respecto Daniel Cazés en su texto Encuentro de Especialistas en Educación Superior señala “... la importancia que tiene el conocer los preconceptos de los alumnos para cimentar la enseñanza de la ciencias, son elementos que deben ser incorporados a la formación de profesores para que identifiquen los preconceptos, y sobre este conocimiento, buscar el mejoramiento de la teoría y la práctica de las enseñanza de las ciencias en los diferentes niveles educativos” ²⁵

En la pregunta 5 que apunta a afianzar el concepto de sucesión, 3 equipos no logran responder correctamente, es decir, no describen el patrón que permite generar la sucesión, solo describen la operación a pesar de que ya lo habían establecido en la tabla dos. Al indagarse a uno de ellos por este aspecto se encuentra que la forma como se planteó la pregunta no resultó clara para ellos como se registra en el diario de campo semana 32, clases 159 y 160, septiembre 20

“... ¿Qué debo hacerle a cada número para obtener el siguiente? Neide: multiplicar, mire que en el ejemplo está; pero ¿Por cuánto debo multiplicar? Neide: A cada vez por tres...”

6.2.3. Actividad Tarjetas y bonos

Durante el registro de datos se observa que el equipo conformado por Juan Esteban, Santiago, Melany y Anlli todos con edades de 9 años son los únicos que no registran adecuadamente los datos de los bonos recibidos cuando entregan tarjetas de 5,10 y 25 como se muestra a continuación.

ROLL	LIBRETA																																
CLIENTE	<table border="1"> <thead> <tr> <th>TARJETAS</th> <th></th> <th>BONOS</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>→</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>→</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>→</td> <td>9</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>→</td> <td>16</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>→</td> <td>15</td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>→</td> <td>36</td> </tr> <tr> <td>10</td> <td>→</td> <td>20</td> </tr> <tr> <td>25</td> <td>→</td> <td>50</td> </tr> <tr> <td>n</td> <td>→</td> <td>N²</td> </tr> </tbody> </table>			TARJETAS		BONOS	1	→	1	2	→	4	3	→	9	4	→	16	5	→	15	6	→	36	10	→	20	25	→	50	n	→	N ²
TARJETAS		BONOS																															
1	→	1																															
2	→	4																															
3	→	9																															
4	→	16																															
5	→	15																															
6	→	36																															
10	→	20																															
25	→	50																															
n	→	N ²																															

Figura 11: Tabla actividad tarjetas y bonos.

Resulta evidente que los niños en lugar de elevar el número al cuadrado (multiplicarlo por sí mismo 2 veces) lo suman 2 veces, por la razón anterior se les pide que nuevamente revisen la tabla para constatar si hay algún error, las preguntas y respuestas se toman de los registros hechos en el diario de campo durante la semana 34, clases 169 y 170, Octubre 4 se muestran a continuación “Niños revisen las respuestas 1 y 2 de acuerdo con ello, observen si los registros de las tablas son correctos, Juan Esteban: mire profesora había que hacer una multiplicación del mismo número que nos entregaban en la tarjeta dos veces así $2 \times 10 = 20$ y lo mismo con 25, $2 \times 25 = 50$ ”

De lo anterior podría concluirse que el error de estos niños está en la forma de interpretar el enunciado matemático implícito en la tabla, ellos asumen que multiplicar el número por sí mismo dos veces ($n \times n$) es lo mismo que ($2 \times n$) sumar el número dos veces, o lo que es lo mismo dos por el número dado; sin tener en cuenta que en el primer caso se establece el producto de factores iguales mientras que en el segundo es la suma de sumados iguales.

En la pregunta número tres y cuatro, el grupo conformado por Sebastián, Cristián, Brayan y Diego no logran responder acertadamente la pregunta; obsérvese las respuestas dadas por ellos.

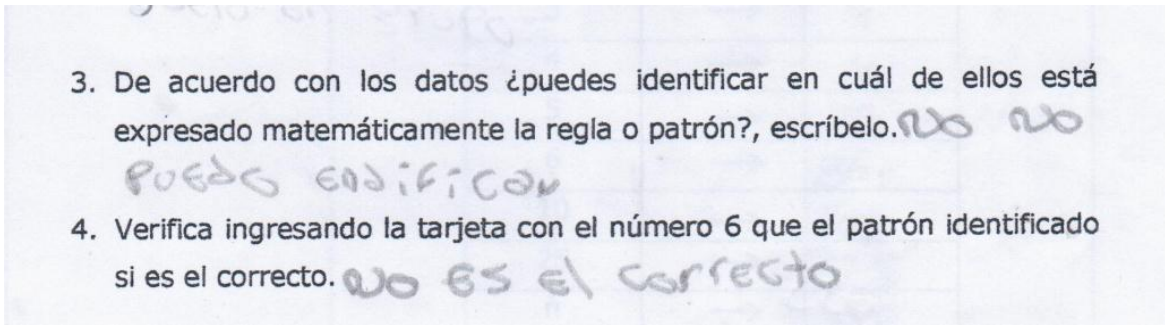


Figura 12: Actividad tarjetas y bonos, respuestas 2,3.

Se observa que no identifican el proceso de generalización y que por lo tanto no pueden verificar si este es correcto para esta situación en particular; caso contrario al del resto de sus compañeros, quienes a pesar de no haberse hecho énfasis en dicho proceso, logran establecer la regla y hacer la verificación adecuadamente gracias a los razonamientos utilizados durante la actividad. Se muestra a continuación una entrevista realizada al grupo de Natalia, Neide, Kevin y Susana y registrada en el diario de campo durante la semana 34, clases 169 y 170, Octubre 4

“... ¿cómo lograron identificar en cuál de los datos estaba expresado matemáticamente el patrón? Natalia: muy fácil profesora porque en todas las casillas había números y la última era diferente con letras. ¿Cómo verificaron si este patrón era correcto? Kevin: cogimos el 6 y multiplicamos así 6×6 y nos dio lo mismo que había en la libreta del banquero.”

6.2.4. Actividad inicial - final

En el desarrollo de secuencias no verbales, se observa que en la actividad inicial tanto en la sucesión 2.3 como en la sucesión 2.4 los niños deben tener en cuenta dos variables para realizar los ejercicios de forma correcta; en el 2.3 cantidad y tamaño y en el 2.4 cantidad y forma. Se observa que hay algunos equipos a los cuales se les dificulta realizar esta discriminación, obsérvese una respuesta del ejercicio 2.4.

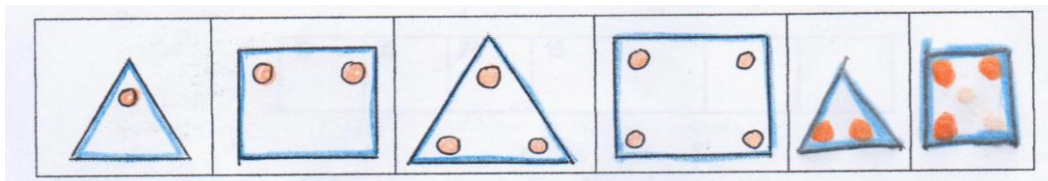


Figura 13: Actividad inicial, sucesiones con interpretación de forma y cantidad.

Este hecho resulta relevante en tanto que se constituye en un paso previo de la ordenación secuencial y búsqueda de regularidades rítmicas que permite generar posteriormente el concepto de sucesión. Se indaga al equipo de Esteban, Santiago, Melany y Anlli sobre los aspectos que se tuvieron en cuenta para la solución de los ejercicios quedando consignada la siguiente entrevista en el diario de campo durante la semana 29, clases 144 y 145 de agosto 30

“¿Cómo sabía cuál de las figuras seguía en la secuencia? Melany: mirando que primero hay un triángulo con un punto, después un cuadrado con puntos, otra vez triángulo con puntos, cuadrado con puntos entonces sigue triángulo con puntos y

cuadrado con puntos. ¿Tuvieron en cuenta las formas y la cantidad de puntos para completar los espacios? Santiago: no, únicamente las figuras los puntos no eran importantes.”

Resulta obvio que estos estudiantes no pudieron realizar inferencias simultáneas en torno a dos variables, distrayendo su atención a una sola regla la forma, sin tener en cuenta la cantidad; aquí se evidencia una dificultad para la construcción del concepto de secuencias multiplicativas donde se encuentra presente la covariación entre dos magnitudes. Después realizar la actividad de intervención se observa que los estudiantes logran desarrollar la misma sucesión correctamente es decir, logran identificar ambas variables y su correlación de forma cualitativa. A continuación se registra la entrevista realizada al mismo grupo de alumnos durante la actividad final, semana 35 clases 174 y 175 de octubre 18 y que involucra la primera pregunta.

“¿Cómo sabía cuál de las figuras seguía en la secuencia? Santiago: poniendo mucha atención y mirando las figuras y contando los puntos.”

Obsérvese además la solución de la secuencia después de la intervención.

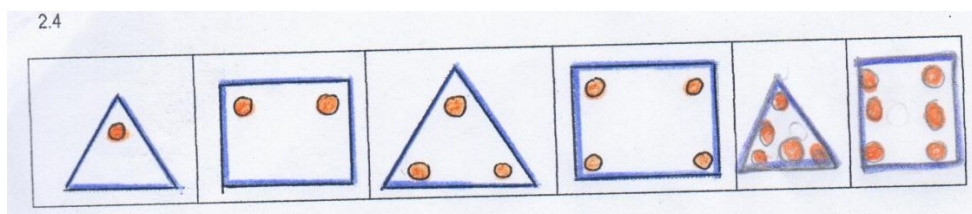


Figura 14: Actividad final, sucesiones con interpretación de forma y cantidad.

En el siguiente registro se puede observar cómo después de la intervención, los estudiantes antes de entrar a resolver las sucesiones ya establecen de forma natural el patrón como una condición necesaria para poder llevar a cabo el ejercicio de forma correcta.

3. Observa los números que se presentan a continuación en cada ejercicio, trata de establecer una relación sencilla entre ellos y de acuerdo con ella completa con el número que consideres sea el más apropiado.

3.1

Patrón 11 Sumar

20	31	42	53	64	75	86
----	----	----	----	----	----	----

3.2

Patrón 9 restar

68	59	50	41	32	23	10
----	----	----	----	----	----	----

3.3

Patrón 7 multiplicar

7	49	343	2401	16807	117649	823543
---	----	-----	------	-------	--------	--------

3.4

patrón 3 dividir entre 3

729	243	81	27	9	3	1
-----	-----	----	----	---	---	---

3.5

patrón 2 dividir entre 2

960	480	240	120	60	30	15
-----	-----	-----	-----	----	----	----

Figura 15: Actividad final sucesiones numéricas pregunta 3.

Quizá el elemento más complejo en esta actividad es la tabla del quinto punto donde se plantea una relación de tipo funcional con una secuencia interrumpida, se destaca que en la actividad inicial ninguno de los equipos pudo dar una solución correcta a esta y que después de la intervención 6 de los nueve equipos logran realizar la actividad en forma correcta, algunos completaron la tabla con los números correspondientes, mientras que otros tuvieron la capacidad de hacerlo directamente como se muestra en las siguientes imágenes.

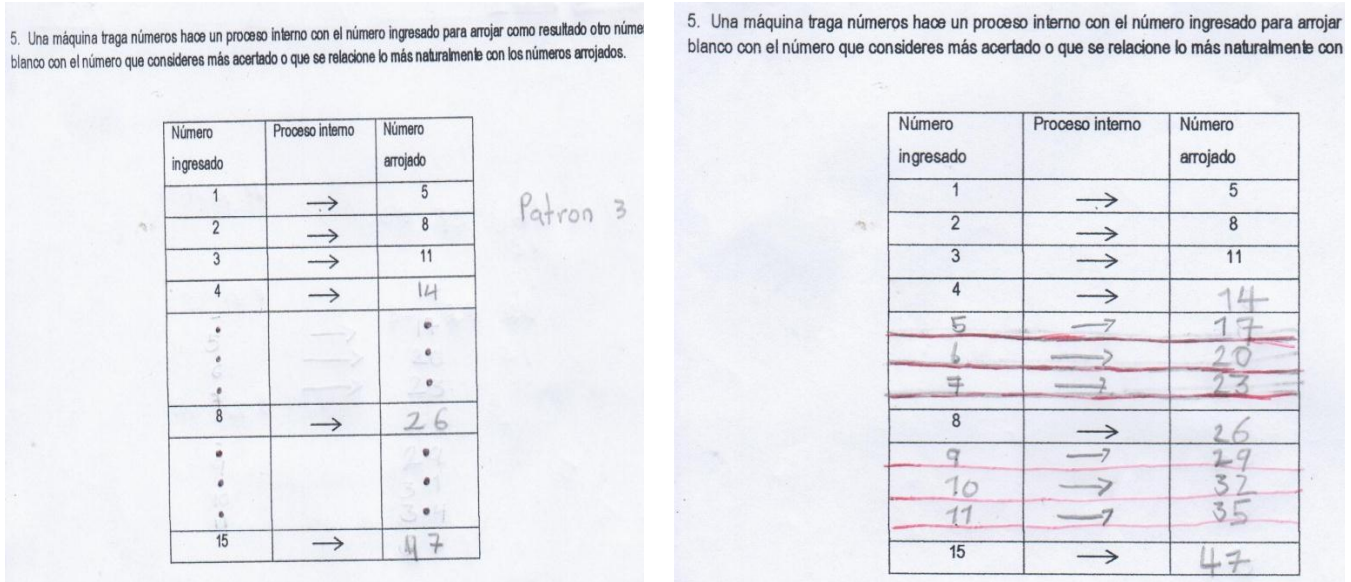


Figura 16: Resultados competición de tablas actividad final máquina traga números.

Utilizar una relación de tipo funcional en esta actividad no supone desarrollar su concepto, el propósito es centrarse en indagar relaciones de covariación usando diversos métodos de representación para analizar dichas relaciones; es decir, considerar propiedades aritméticas y lógicas comunes a todos los números para determinar el concepto de sucesión “de tipo recurrente, a partir del primer término y la diferencia o razón; y otra conceptual, que es aplicable en ciertos casos y consiste en obtener una clase ordenada de números naturales detectando una propiedad común, que se puede expresar mediante una ley.” ²⁶

6.3. Entrevista escrita

La entrevista escrita nos proporciona una buena fuente de análisis en cuanto no depende de la subjetividad del entrevistador, es allí donde se hacen explícitas las reflexiones o percepciones que puede tener el entrevistado en cuanto a un tema. Dado que esta se convierte en una excelente evidencia de los procesos desarrollados, se muestran 4 de ellas para evidenciar los alcances y el proceso de conceptualización de los entrevistados.

	I. E. ARZOBISPO TULIO BOTERO SALAZAR	
	ENTREVISTA	PROFESORA
	GRADO CURTO	LINA JANET VELASQUEZ NARANJO

NOMBRE: *Juliana Zapata Puerta.*

GRADO: *4^o 1* **EDAD:** *10,*

Descubramos que has aprendido durante el desarrollo de las actividades.

- Las diversas actividades trabajadas te permiten observar, describir y analizar ¿qué datos cambian o varían? ¿por qué?
Si porque podemos ver como cambian las operaciones distintas y nos ayudan para poner mas atencion en mente.
- ¿Qué es una regla o patrón?
Un patron es el numero que siempre se repite en todas las operaciones de la regla.
- ¿Cómo se puede expresar una regla o patrón matemáticamente?, explica.
Por ejemplo Tengo esta tabla y el patron es el 10 porque voy sumando de 10 en 10

10	20	30	40	50	60	70
----	----	----	----	----	----	----

Figura 17: Entrevista escrita de conceptos Juliana Zapata.

Brayan Marín Oquendo

	I. E. ARZOBISPO TULIO BOTERO SALAZAR	
	ENTREVISTA	PROFESORA
	GRADO CURTO	LINA JANET VELASQUEZ NARANJO

NOMBRE: *Brayan Marín Oquendo*

GRADO: *4^o 1* **EDAD:** *12*

Descubramos que has aprendido durante el desarrollo de las actividades.

- Las diversas actividades trabajadas te permiten observar, describir y analizar ¿qué datos cambian o varían? ¿por qué?
Si porque a partir de los trabajos realizados van cambiando los resultados
- ¿Qué es una regla o patrón? *es algo que se repite constantemente*
- ¿Cómo se puede expresar una regla o patrón matemáticamente?, explica. *mediante las letras*

Figura 18: Entrevista escrita de conceptos Brayan Marín Oquendo.

I. E. ARZOBISPO TULLIO BOTERO SALAZAR	
ENTREVISTA	PROFESORA
GRADO CURTO	LINA JANET VELASQUEZ NARANJO

NOMBRE: Geiner Alexis Rojas Vabos

GRADO: 4-1 **EDAD:** 11

Descubramos que has aprendido durante el desarrollo de las actividades.

- Las diversas actividades trabajadas te permiten observar, describir y analizar ¿qué datos cambian o varían? ¿por qué?
Si porque a partir de las actividades realizadas van variando las respuestas.
- ¿Qué es una regla o patrón? es algo que se repite.
- ¿Cómo se puede expresar una regla o patrón matemáticamente?, explica. mediante letras

Figura 19: Entrevista escrita de conceptos Geiner Alexis Rojas.

I. E. ARZOBISPO TULLIO BOTERO SALAZAR	
ENTREVISTA	PROFESORA
GRADO CURTO	LINA JANET VELASQUEZ NARANJO

NOMBRE: Veronica Zuluaga Cardona

GRADO: 4-1 **EDAD:** 10

Descubramos que has aprendido durante el desarrollo de las actividades.

- Las diversas actividades trabajadas te permiten observar, describir y analizar ¿qué datos cambian o varían? ¿por qué?
Si porque podemos ver como cambian las operaciones y nos ayuda a aprender más.
- ¿Qué es una regla o patrón?
Es el número que se repite en todas las operaciones que estamos haciendo.
- ¿Cómo se puede expresar una regla o patrón matemáticamente?, explica.
con letras que representan números.

Figura 20: Entrevista escrita de conceptos Verónica Zuluaga Cardona.

Obsérvese como en la primera pregunta los niños se dan cuenta de la variación o cambio a través de las operaciones que realizan durante las actividades, lo cual

resulta favorable en el avance de su razonamiento y en la construcción de conceptos; Todos definen la regla o patrón como “algo que se repite” y solo dos de ellos logran describirlo en términos de números. Brayan, Geiner y Verónica logran interpretar el proceso de generalización infiriendo que en este las letras nos representan cualquier número que remplacemos y aunque este no fue el propósito de la intervención algunos de ellos ya logran introducir conceptos algebraicos en su razonamiento.

6.4. Análisis estadístico

Tabla 7: Tabla medias y varianza actividad final e inicial.

Actividad	Media	Varianza	Desviación Típica
AF Correcto	7,166	4,5	2,12
AI Correcto	8,22	7,94	2,81
AF Incorrecto	1,944	5,937	2,436
AI Incorrecto	5,77	7,947	2,819

Bajo el modelo de comparación de medias y varianzas se puede afirmar que existe una diferencia significativamente importante en el porcentaje de aciertos en la actividad final con respecto a la actividad inicial, las actividades desarrolladas durante la etapa de intervención no afectan las medias pero si la varianza lo que evidencia la capacidad de los estudiantes para analizar la variación en el establecimiento de patrones y regularidades, reflejando así un incremento significativo en el número de aciertos en la actividad final.

A continuación se muestran los diagramas de caja de bigotes para las actividades iniciales y finales, los cuales muestran la simetría y dispersión del anterior análisis.

Gráfico de Cajas y Bigotes

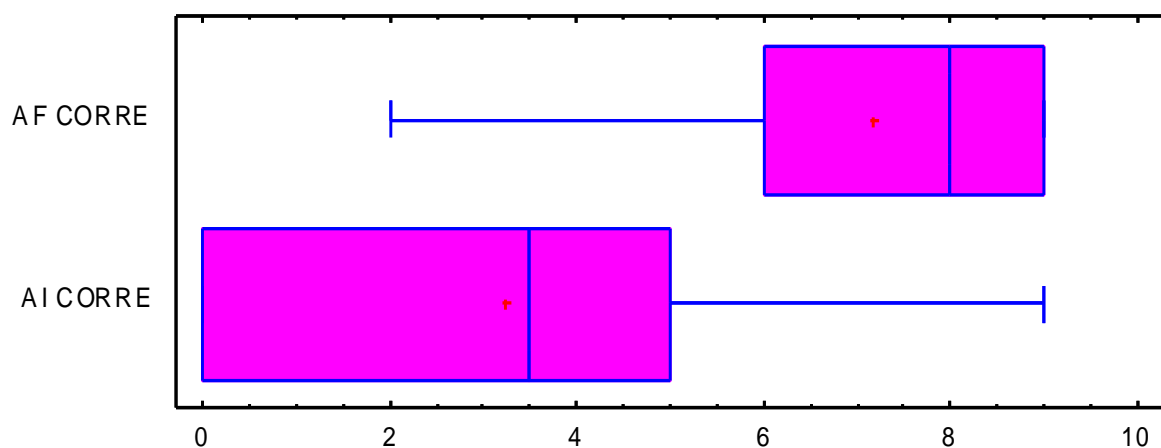


Figura 21: Diagrama caja de bigotes para AF correcto y AI correcto.

Gráfico de Cajas y Bigotes

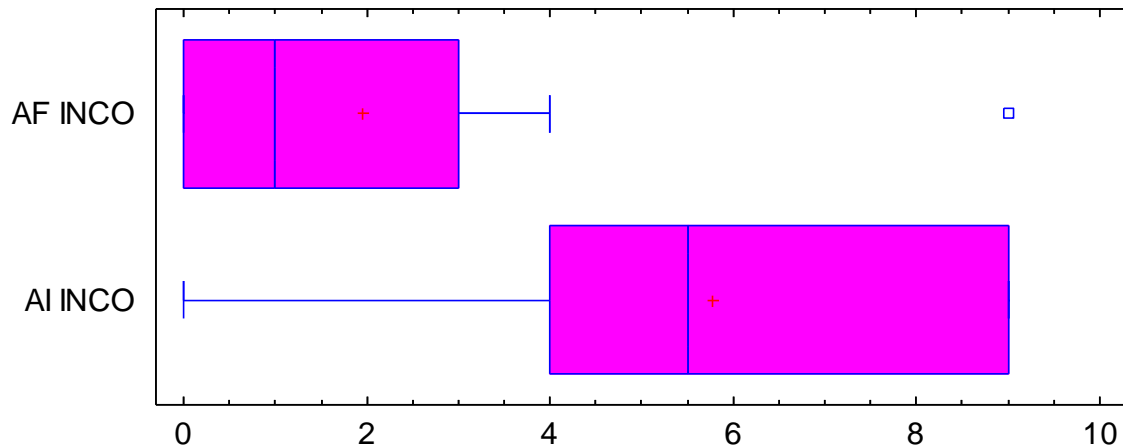


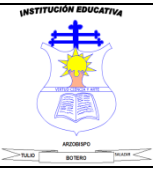
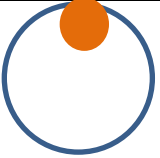
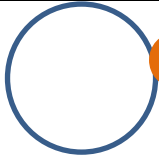
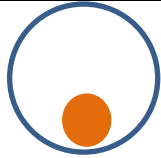
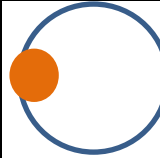
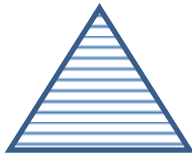
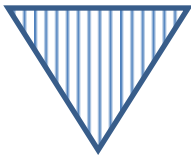

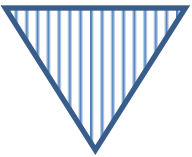
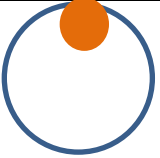
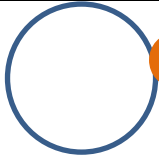
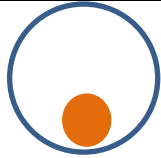
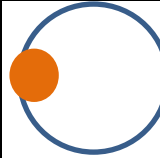
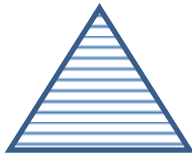
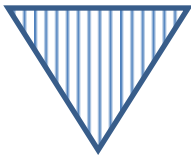

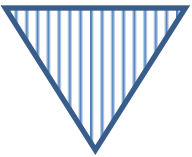
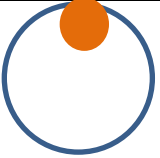
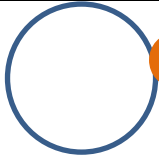
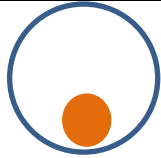
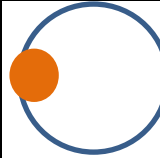
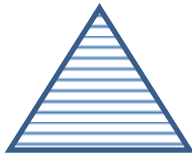
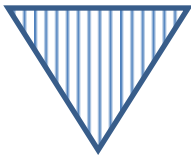

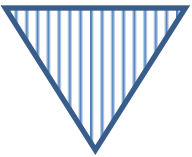
Figura 22: Diagrama caja de bigotes para AF incorrecto y AI incorrecto.

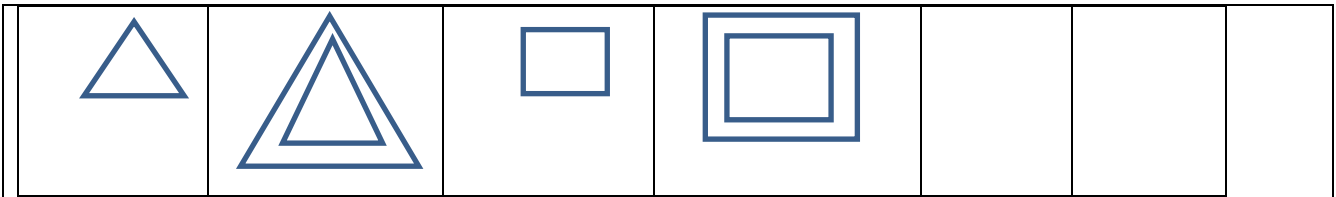
7. Conclusiones

- El diseño y desarrollo de la estrategia metodológica de enseñanza aquí implementado, en términos de Batanero y Godino permite la formación de individuos participes de su propio aprendizaje y el desarrollo de competencias, sin que las definiciones y notaciones se conviertan en un obstáculo en el proceso de aprendizaje e interiorización de un concepto, esto queda en evidencia cuando los estudiantes pudieron dar cuenta de la solución de secuencias verbales y no verbales inicialmente y en el transcurso de las mismas valerse de sus conocimientos aritméticos para acercarse a conceptos como patrón y sucesión.
- El método de investigación-acción utilizado durante la fase de intervención permite realizar un acercamiento a la realidad de los estudiantes y generar así situaciones de enseñanza y aprendizaje basadas en la lúdica y en el uso de material concreto para posibilitar la adquisición del concepto matemático que se pretendía desarrollar, no obstante el aprendizaje logrado por los estudiantes se vuelve significativo en cuanto que su participación activa en la completación de registros simbólicos, de carácter verbal, icónico, gráfico o aritmético les permiten usar identificar, percibir y caracterizar el cambio y la variación en diferentes contextos; para lograr desarrollo de pensamiento variacional.
- Definir lo más explícitamente posible la hipótesis del ejercicio o problema, haciendo uso de lenguaje sencillo y comprensible para niños de básica primaria resulta relevante si no se quiere incurrir en ambigüedades o en errores al momento de construir una sucesión, tal y como se demuestra en el análisis hecho al ejercicio propuesto en el módulo para el desarrollo de competencias en matemáticas 5° de la página 26, propuesto por la Alcaldía de Medellín; este análisis también deja claro que con un número finito de datos no se puede garantizar un único modelo de solución a un ejercicio o problema planteado, solamente podríamos conjeturar.

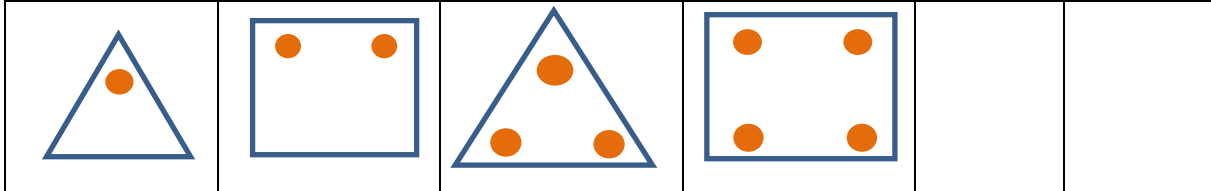
- A partir de los registros realizados por los estudiantes, se observa que algunos de ellos presentan dificultad para establecer correctamente las magnitudes tal y como se evidencia en las preguntas 3 y 4 de la actividad llamada pirámide de vasos, podría decirse entonces que el reconocimiento de los cambios en un espacio de medida no les permite observar el cambio en el otro, es decir la covariación.
- No se puede hablar de un proceso de enseñanza y aprendizaje en el que se excluya las emociones y sentimientos de los sujetos, es por ello que resulta relevante destacar que durante la etapa de intervención se observó motivación en los estudiantes durante el desarrollo de las actividades, no solo se fortaleció el desarrollo de competencias cognitivas reflejado en el incremento de los porcentajes de la actividad inicial con respecto a la final y el desarrollo de los objetivos propuestos, sino que además las competencias sociales también se fortalecieron con el trabajo en equipo el interés y la responsabilidad con la cual asumieron cada una de las actividades implementadas.

A. Formatos actividades ejecutadas en clase

ACTIVIDAD INICIAL - FINAL																															
	I. E. ARZOBISPO TULIO BOTERO SALAZAR																														
	ACTIVIDAD DIAGNÓSTICA GRADO CUARTO	PROFESORA LINA JANET VELASQUEZ NARANJO																													
<p>NOMBRE: _____</p> <p>GRADO: _____ EDAD: _____</p> <p>Actividad inicial y final.</p> <p>1. Agrega a cada lista de palabras una que se relacione lo más naturalmente posible con las presentadas en la secuencia.</p> <p>1.1</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin-bottom: 10px;"> <tr> <td style="width: 25%; height: 20px;"></td> <td style="width: 25%; text-align: center;">Abuelo</td> <td style="width: 25%; text-align: center;">Padre</td> <td style="width: 25%; text-align: center;">Hijo</td> </tr> </table> <p>1.2</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin-bottom: 10px;"> <tr> <td style="width: 25%; text-align: center;">Niñez</td> <td style="width: 25%; text-align: center;">Juventud</td> <td style="width: 25%; text-align: center;">Madurez</td> <td style="width: 25%; height: 20px;"></td> </tr> </table> <p>1.3</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin-bottom: 10px;"> <tr> <td style="width: 25%; height: 20px;"></td> <td style="width: 25%; text-align: center;">Flores</td> <td style="width: 25%; text-align: center;">Hojas</td> <td style="width: 25%; text-align: center;">Tallo</td> </tr> </table> <p>1.4</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin-bottom: 10px;"> <tr> <td style="width: 25%; text-align: center;">Coronel</td> <td style="width: 25%; text-align: center;">Mayor</td> <td style="width: 25%; text-align: center;">Capitán</td> <td style="width: 25%; height: 20px;"></td> </tr> </table> <p>2. Observa las formas, colores, posiciones, cantidad y tramas de los objetos que se muestran a continuación, para que completes las últimas casillas siguiendo la secuencia.</p> <p>2.1</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin-bottom: 10px;"> <tr> <td style="width: 25%; text-align: center;"></td> <td style="width: 25%; text-align: center;"></td> <td style="width: 25%; text-align: center;"></td> <td style="width: 25%; text-align: center;"></td> <td style="width: 25%; height: 60px;"></td> <td style="width: 25%; height: 60px;"></td> </tr> </table> <p>2.2</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin-bottom: 10px;"> <tr> <td style="width: 25%; text-align: center;"></td> <td style="width: 25%; text-align: center;"></td> <td style="width: 25%; text-align: center;"></td> <td style="width: 25%; text-align: center;"></td> <td style="width: 25%; height: 60px;"></td> <td style="width: 25%; height: 60px;"></td> </tr> </table> <p>2.3</p>					Abuelo	Padre	Hijo	Niñez	Juventud	Madurez			Flores	Hojas	Tallo	Coronel	Mayor	Capitán													
	Abuelo	Padre	Hijo																												
Niñez	Juventud	Madurez																													
	Flores	Hojas	Tallo																												
Coronel	Mayor	Capitán																													
																															
																															



2.4



Observa los números que se presentan a continuación en cada ejercicio, trata de establecer una relación sencilla entre ellos y de acuerdo con ella completa con el número que consideres sea el más apropiado.

3.1

20	31	42	53			
----	----	----	----	--	--	--

3.2

68	59	50	41			
----	----	----	----	--	--	--

3.3

7	49	343	2401			
---	----	-----	------	--	--	--

3.4

729	243	81	27			
-----	-----	----	----	--	--	--

3.5

960	480	240	120			
-----	-----	-----	-----	--	--	--

4. Observa el ejemplo, establece una relación entre los números y de acuerdo con ella, completa los espacios en blanco.

Ejemplo

4	5	7	11	19	35	67
---	---	---	----	----	----	----

4.1

1	4	8	12			
---	---	---	----	--	--	--

4.2

48	35	24	15			
----	----	----	----	--	--	--

5. Una máquina traga números hace un proceso interno con el número ingresado para arrojar como resultado otro número. Completa los espacios en blanco con el número que consideres más acertado o que se relacione lo más naturalmente con los números arrojados.

Número Ingresado	Proceso interno	Número arrojado
1	→	5
2	→	8
3	→	11
4	→	
.		
.		
.		
8	→	
.		
.		
.		
15	→	

6. De acuerdo con los ejercicios anteriores responde las siguientes preguntas.

6.1 ¿Para resolver cada uno de los ejercicios debiste realizar cálculos matemáticos?


6.2 Explica en cada numeral qué tipo de cálculos realizaste, si lo hiciste (sumas, restas, multiplicaciones, divisiones u operaciones combinadas) para completar los espacios en blanco.

6.3 ¿Pudiste observar alguna regla o patrón que te permitiera realizar la tarea?

6.4 Si te es posible describe en cada caso el patrón que encontraste. De no ser así explica la estrategia que empleaste para su solución.

6.5 Si encontraste algún patrón, en cada caso trata de expresarlo matemáticamente.

PRIMERA ACTIVIDAD DE INTERVENCIÓN

	I. E. ARZOBISPO TULIO BOTERO SALAZAR	
	ACTIVIDAD GRADO CUARTO	PROFESORA LINA JANET VELASQUEZ NARANJO

NOMBRE:**GRADO:****EDAD:**

Actividad 1: Pirámide de vasos.

Materiales: 10 vasos plásticos marcados de la siguiente manera 3 con el número 6, 3 con el número 5, 2 con el número 4 y 2 con el número 3 (los números del vaso indican el puntaje), pelota plástica, lápiz y papel.

Cómo Jugar: reúnete con tres compañeros, organiza los vasos en forma de pirámide empezando con cuatro vasos en la base, cada jugador lanza la pelota una vez y todos registran los resultados de los vasos derribados en cada lanzamiento en las siguientes tablas.

	VASOS CON EL NÚMERO 6	PUNTAJE TOTAL
PRIMER LANZAMIENTO		
SEGUNDO LANZAMIENTO		
TERCER LANZAMIENTO		
CUARTO LANZAMIENTO		

	VASOS CON EL NÚMERO 5	PUNTAJE TOTAL
PRIMER LANZAMIENTO		
SEGUNDO LANZAMIENTO		
TERCER LANZAMIENTO		
CUARTO LANZAMIENTO		

	VASOS CON EL NÚMERO 4	PUNTAJE TOTAL
PRIMER LANZAMIENTO		
SEGUNDO LANZAMIENTO		
TERCER LANZAMIENTO		
CUARTO LANZAMIENTO		

	VASOS CON EL NÚMERO 3	PUNTAJE TOTAL
PRIMER LANZAMIENTO		
SEGUNDO LANZAMIENTO		
TERCER LANZAMIENTO		
CUARTO LANZAMIENTO		

Reflexiona

Supongamos que todos los vasos tienen el número 6

1. En el primer lanzamiento se obtuvieron 18 puntos, ¿cuántos vasos tumbaron?
2. Si en el segundo lanzamiento se quieren obtener 12 puntos, ¿cuántos vasos deben tumbar?
3. ¿Cuál fue el puntaje del tercer intento si se tumbaron 4 vasos?
4. ¿Cuál sería el puntaje si se tumba un vaso?
5. En un equipo llenaron la tabla de registros con los datos anteriores pero algunos de ellos se borraron, puedes ayudar a completarlos.

VASOS CON EL NUMERO 6	0	1			4				
PUNTAJE			12	18		30			

6. Ahora supongamos que todos los vasos tienen el número 5 y que en cada intento se tumba un vaso más que en el intento anterior, podrías registrar en una tabla únicamente los puntajes.

		10		20		30		
--	--	----	--	----	--	----	--	--

7. Describe la regla que utilizaste para completar la tabla.

SEGUNDA ACTIVIDAD DE INTERVENCIÓN

I. E. ARZOBISPO TULLIO BOTERO SALAZAR

ACTIVIDAD
GRADO CUARTOPROFESORA
LINA JANET VELASQUEZ NARANJO**NOMBRE:****GRADO:****EDAD:**

Actividad 2: Descubriendo las regularidades.

Materiales: 50 tarjetas con el número 2 y 50 tarjetas con el número 3, una bolsa oscura, lápiz y papel.

Cómo Jugar: reúnete con tres compañeros, introduce las tarjetas en una bolsa oscura, cada jugador saca una tarjeta y la ubica debajo del número del cual es factor, se colocan todas las tarjetas necesarias que dejen expresar el número como producto de estos factores. Luego registran los resultados en las siguientes tablas.

NUMERO	2	4	8	16	32
TARJETAS		x	x x	x x x	x x x x

NUMERO	3	9	27	81	243
TARJETAS		x	x x	x x x	x x x x

NUMERO	6	12	24	48	96
TARJETAS	x	x x	x x x	x x x x	x x x x x

NUMERO	12	36	108	324	972
TARJETAS	x x	x x x	x x x x	x x x x x	x x x x x x

Reflexiona

1. Siguiendo la misma regla escribe el sexto término de la tabla uno.
2. ¿Qué tarjetas me arrojarían el sexto número de la tabla 2?
3. Cuando estuve llenando la tabla tres olvidé completar algunos espacios podrías ayudarme?

6	12	24	48	96				
---	----	----	----	----	--	--	--	--

Observa como se forman los términos de la tabla 2 y con base en ello responde las preguntas 4 y 5

Formación de los números de la tabla 2

$$3 = 1 \times 3$$


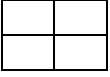
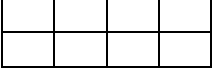
$$9 = 1 \times 3 \times 3$$

$$27 = 1 \times 3 \times 3 \times 3$$


$$81 = 1 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

$$243 = 1 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

4. De acuerdo con lo observado podrías decirme ¿Cuáles factores se conservan siempre en todos los números de la sucesión?
5. ¿Qué debo hacerle a cada número para obtener el siguiente?
6. Utilicemos otra forma de representación para generar la sucesión de la tabla uno. Construye rectángulos utilizando la cantidad de cuadritos que te indica el número ten cuidado de conservar la misma cantidad de cuadritos para la altura, donde no hay número de acuerdo con la secuencia completa con el que consideres más apropiado y luego gráficalo.

NÚMERO	REPRESENTACIÓN GRÁFICA
2	
4	
8	
16	
32	

7. ¿Se conserva la misma altura en los rectángulos?
8. ¿Cuál dimensión varía? ¿De cuánto en cuánto varía?
9. ¿A cuánto equivale el área del segundo cuadrado con respecto al primero?
10. ¿Qué debo hacerle a la base de cada rectángulo para obtener el área del siguiente rectángulo?

TERCERA ACTIVIDAD DE INTERVENCIÓN																																																											
	I. E. ARZOBISPO TULLIO BOTERO SALAZAR																																																										
	ACTIVIDAD GRADO CUARTO	ACTIVIDAD GRADO CUARTO																																																									
NOMBRE: GRADO: Actividad 3: Tarjetas y bonos EDAD: Materiales: Tarjetas con los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 25, n (último número a ingresar), 1, 4, 9, 16, 25, 36, n^2 (último número devuelto por el cajero); lápiz, guía, tablas																																																											
ROL	LIBRETA																																																										
CLIENTE	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 33%;">TARJETAS</th> <th style="width: 33%;"></th> <th style="width: 33%;">BONOS</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">→</td><td></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">2</td><td style="text-align: center;">→</td><td></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">→</td><td></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">4</td><td style="text-align: center;">→</td><td></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">5</td><td style="text-align: center;">→</td><td></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">6</td><td style="text-align: center;">→</td><td></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">.</td><td></td><td></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">.</td><td></td><td></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">.</td><td></td><td></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">10</td><td style="text-align: center;">→</td><td></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">.</td><td></td><td></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">.</td><td></td><td></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">.</td><td></td><td></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">25</td><td style="text-align: center;">→</td><td></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">.</td><td></td><td></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">.</td><td></td><td></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">.</td><td></td><td></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">n</td><td style="text-align: center;">→</td><td></td></tr> </tbody> </table>		TARJETAS		BONOS	1	→		2	→		3	→		4	→		5	→		6	→		.			.			.			10	→		.			.			.			25	→		.			.			.			n	→	
TARJETAS		BONOS																																																									
1	→																																																										
2	→																																																										
3	→																																																										
4	→																																																										
5	→																																																										
6	→																																																										
.																																																											
.																																																											
.																																																											
10	→																																																										
.																																																											
.																																																											
.																																																											
25	→																																																										
.																																																											
.																																																											
.																																																											
n	→																																																										
CAJERO	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 33%;">TARJETAS</th> <th style="width: 33%;"></th> <th style="width: 33%;">BONOS</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td></td><td style="text-align: center;">→</td><td style="text-align: center;">1</td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">→</td><td style="text-align: center;">4</td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">→</td><td style="text-align: center;">9</td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">→</td><td style="text-align: center;">16</td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">→</td><td style="text-align: center;">25</td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">→</td><td style="text-align: center;">36</td></tr> <tr><td></td><td></td><td style="text-align: center;">.</td></tr> <tr><td></td><td></td><td style="text-align: center;">.</td></tr> <tr><td></td><td></td><td style="text-align: center;">.</td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">→</td><td></td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">→</td><td></td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">→</td><td style="text-align: center;">n^2</td></tr> </tbody> </table>		TARJETAS		BONOS		→	1		→	4		→	9		→	16		→	25		→	36			.			.			.		→			→			→	n^2																		
TARJETAS		BONOS																																																									
	→	1																																																									
	→	4																																																									
	→	9																																																									
	→	16																																																									
	→	25																																																									
	→	36																																																									
		.																																																									
		.																																																									
		.																																																									
	→																																																										
	→																																																										
	→	n^2																																																									

BANQUERO	TARJETAS		BONOS
	1	→	1
	2	→	4
	3	→	9
	4	→	16
	5	→	25
	6	→	36
	.		.
	.		.
	.		.
	10	→	
	.		
	.		
25	→		
.			
.			
.			
n	→	n^2	


Cómo Jugar: reúnete con tres compañeros, repártanse los roles de banquero (libreta con datos), cliente (tarjetas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 25, n y libreta para registrar bonos) y cajero (tarjetas 1, 4, 9, 16, 25, 36, n^2 y libreta para registrar tarjetas), recorten y entreguen las libretas a quien corresponda, el cliente y el cajero ingresan en sus libretas los números que reciben teniendo en cuenta que siempre los registrarán en el orden que los reciban, luego representan la siguiente situación.

Un cliente llega a un banco y le entrega una tarjeta con el número más pequeño al cajero el cual después de hacer una transacción le devuelve unos bonos (la tarjeta con el número más pequeño que tiene); al día siguiente llega el cliente de nuevo al banco entrega la tarjeta con el número más pequeño y así mismo el cajero hace la transacción y le devuelve los bonos (el número más pequeño). Día a día continúan haciendo lo mismo hasta que el cliente entrega el número 10 pero el cajero no tiene bonos para devolverle, por lo cual van juntos donde el banquero para comparar las transacciones y que el banquero les indique la cantidad de bonos que deben registrar.

Cuando llegan donde el banquero comparan sus tarjetas para verificar que estuvieran haciendo las transacciones correctamente y después de hacerlo se dan cuenta que al banquero tampoco le han dado algunos datos de los bonos, por lo cual entre los tres deben establecer el patrón que siguen los bonos para asignar en forma correcta aquellos que faltan para completar la tabla.

Reflexiona:

1. Describe los cálculos matemáticos que realizaste para encontrar los bonos que faltan.
2. Describe la regla o patrón que encontraste para poder solucionar la situación.
3. De acuerdo con los datos ¿puedes identificar en cuál de ellos está expresado matemáticamente la regla o patrón?, escríbelo.
4. Verifica, ingresando la tarjeta con el número 6, que el patrón identificado sí es el correcto.
5. Si aún no has podido encontrar los bonos que faltan emplea el patrón matemático para hacerlo.

ENTREVISTA		
	I. E. ARZOBISPO TULLIO BOTERO SALAZAR	
	ACTIVIDAD GRADO CUARTO	PROFESORA LINA JANET VELASQUEZ NARANJO
<p>NOMBRE:</p> <p>GRADO:</p> <p>EDAD:</p> <p>Descubramos que has aprendido durante el desarrollo de las actividades.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Las diversas actividades trabajadas te permiten observar, describir y analizar ¿qué datos cambian o varían? ¿Por qué? 2. ¿Qué es una regla o patrón? 3. ¿Cómo se puede expresar una regla o patrón matemáticamente?, explica. 		

8. Bibliografía

^{1,2} Agila Rodríguez M.Sc Ramos, Guibet González M.Sc Idania Caridad. Algunas consideraciones acerca del tratamiento de las sucesiones numéricas en la enseñanza primaria. Revista Edusol, vol 3. 2009. Cuba.

³Rodríguez Gutiérrez Lic. Norma. Una secuencia didáctica para generar los conceptos de sucesión y serie en el nivel medio superior. Instituto Politécnico Nacional Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México, D. F. Junio de 2009.

^{4,5} Cañadas Santiago María Consuelo. Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas. Universidad de Granada Departamento de didáctica de la matemática. Granada, 2007.

^{6,7,8,9,10}Fernández Escalona. Catalina, Análisis epistemológico de la secuencia numérica, Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa, Volumen 13, Marzo de 2010.

^{11,12,13,14} Marcolini Bernardi, Marta y Sánchez Gómez, Carmen. Construcción del concepto de serie numérica con soporte informático a través de modelos matemáticos, Universidad de Jaén- España.

^{15,20}Ministerio de Educación Nacional. Lineamientos curriculares para el área de Matemáticas. 1998

¹⁶Vasco, Carlos Eduardo. El pensamiento variacional y la modelación matemática. Universidad del Valle. 2009

^{17,18}Posada, M. E. (2005) Interpretación e Implementación de los Estándares Básicos de Matemáticas. Gobernación de Antioquia. p. 51.

¹⁹Mason, J. y otros, Pensar matemáticamente, Barcelona, Editorial Labor, 1992.

^{21,22}Elliot. John, La investigación-acción en educación, Ediciones Morata, S. L. Cuarta edición 2000.

²³ Gallego Ramírez, Diana Cecilia, Tesis de maestría "Enseñanza por competencias para un aprendizaje significativo en matemáticas". Universidad Nacional de Colombia sede Medellín, 2011.

²⁴ Azcárate Goded, Pilar y Durán Palermo, Jesús. Enfoques actuales en la didáctica de las matemáticas. Instituto Superior de formación del profesorado. Madrid 2006

²⁵ Cazés Menache, Daniel. Encuentro de Especialistas en Educación Superior. Centro de Investigaciones Inter Disciplinarias en Ciencias y Humanidades de la Universidad Autónoma de México año 2000. Página 37

²⁶ Ortiz Comas, Alfonso. Razonamiento Inductivo Numérico un estudio en Educación Primaria. Departamento de didáctica de la matemática. Universidad de Granada 1997. Página 9