Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XX (1986) págs. 105-128

EL ESPECTRO Y LA DIMENSION DE ANILLOS EN EL ALGEBRA SOBRE UN TOPOS

por

Luis ESPAÑOL

Este texto es una exposición de los trabajos [3] y [4] del autor, que desarrollan ideas de A. Joyal sobre la dimensión constructiva de anillos. El álgebra que a continuación se expone es constructiva en el sentido de no utilizar la regla del tercio excluso ni el axioma de elección (teorema del ideal primo), por lo que los resultados obtenidos tendrán validez en un topos con números naturales. Algunas de las construcciones aquí consideradas se realizan en el topos de haces sobre un álgebra de Boole.

Todos los anillos serán conmutativos y unitarios, con subanillos y homomorfismos conservando la unidad. Así mismo, los retículos serán distributivos con mínimo y máximo, que serán conservados por los homomorfismos.

En la sección 1 se expone la versión algebraica de Joyal del espectro de un anillo, que es un retículo obtenido a partir del anillo como solución de un problema universal. Este espectro es el retículo dual del considerado en [3], Así que los resultados allí obtenidos aparecerán ahora dualizados. El espectro es isomorfo al retículo de los abiertos casicompactos del espectro primo clásico, cuando el topos considerado es el ordinario de los conjuntos. También se considera el espectro booleano, álgebra de Boole líbremente engendrada por el espectro, que se corresponde en el caso clásico con la topología constructiva sobre el espectro primo.

La Sección 2 se dedica al estudio de las localizaciones en anillos y retículos, verificando que estas propiedades son conservadas por el espectro. Así, los espectros de los anillos de fracciones de un anillo son retículos de fracciones del espectro de dicho anillo. Esta sección no aparece en [3], que tampoco menciona las propiedades de conservación, análogas a las aquí expuestas, que el espectro dual verifica respecto a la noción de dominio de integridad.

Las secciones 3 y 4 se refieren a la dimensión de Krull de los anillos. Ya que los ideales primos del espectro se corresponden biyectivamente con los ideales primos del anillo, la dimensión (de Krull) de un anillo es la dimensión (de Krull) de su espectro. La naturaleza constructiva del álgebra que desarrollamos exige una reformulación de la dimensión independiente de los ideales primos, lo que se hace, siguiendo a Joyal, a través de una resolución simplicial del retículo. En la sección 3 se demuestra que los retículos de dimensión cero son las álgebras de Boole. Este teorema es un caso particular del teorema general de [4] que caracteriza los retículos de dimensión menor o igual que n en términos del álgebra de Boole libre sobre el retículo. La demostración dada aquí del caso cero es directa y permite apreciar los métodos básicos del teorema general. La sección termina caracterizando los anillos de dimensión cero.

La sección 4 contiene un resumen amplio de la demostración de que la dimensión de K[X] es uno si K es un cuerpo. Esto se demuestra en [3] utilizando el caso n = 1 del teorema general de [4]. El trabajo termina con la sección 5, donde se prueba el mismo teorema de dimensión para polinomios sobre un anillo regular, interpretando éste como un cuerpo en el topos de haces sobre el álgebra de Boole de sus idempotentes, a través de la representación de Pierce y utilizando algunas propiedades de conservación de funtor sección global.

Contenido.

§1. El retículo espectro de un anillo.

Es bien sabido (álgebra conmutativa) que el *espectro primo* de un anillo A es el conjunto Spec A de los ideales primos de A con la topología, llamada de Zariski, que tiene como base de abiertos la familia

$$D(a) = \{x \in \operatorname{Spec} A \mid a \notin x\}, \quad a \in A \tag{1.1}$$

El conjunto Q(A) de los abiertos casicompactos de Spec A es un retículo engendrado finítamente por los D(a) y la aplicación

$$D : A \longrightarrow Q(A), \quad a \mapsto D(a) \tag{1.2}$$

verifica las propiedades siguientes:

(i) $D(0) = \emptyset$, $D(1) = \operatorname{Spec} A$
(ii) $D(ab) = D(a) \cap D(b)$
(iii) $D(a+b) \leqslant D(a) \cup D(b)$. (1.3)

Llamaremos *soporte* de un anillo A a una aplicación $d:A \to D'$ donde D' es un retículo, que verifique

(i) $d(0) = 0$, $d(1) = 1$
(ii) $d(ab) = d(a) \wedge d(b)$
(iii) $d(a+b) \leqslant d(a) \vee d(b)$.

TEOREMA 1.1. *La aplicación* $D:A \to Q(A)$ *de* (1.2) *es un soporte de* A *con la propiedad universal siguiente: para cada soporte* $d:A \to D'$ *existe un único homomorfismo de retículos* $\bar{d}:Q(A) \to D'$ *tal que* $\bar{d}D = d$.

Demostración. Hay que ver que $\bar{d}(D(a_1) \cup \ldots \cup D(a_n)) = d(a_1) \vee \ldots \vee d(a_n)$ define una aplicación $Q(A) \to D'$, pues entonces es inmediato que se trata del homomorfismo buscado. La fórmula anterior es una buena definición de $\bar{d}$ si y sólo si

$$D(a) \subseteq D(b_1) \cup \ldots \cup D(b_m) \Rightarrow d(a) \leqslant d(b_1) \vee \ldots \vee d(b_m).$$

El contenido primero significa que **a** pertenece al radical engendrado por los b_j, asi que existen $r > 0$ y $t_j \in A$ tales que $a^r = t_1b_1 + \ldots + t_mb_m$ de donde se sigue, aplicando (1.3),

$$d(a) = d(a^r) \leqslant d(t_1b_1) \vee \ldots \vee d(t_mb_m) \leqslant d(b_1) \vee \ldots \vee d(b_m). \blacktriangle$$

Joyal propuso una construcción del soporte universal de un anillo independiente de la existencia (no constructiva por depender del axioma de elección) de ideales primos. Es como sigue: en el conjunto de las sucesiones finita de elementos de A definimos la relación

$$(a_1, \ldots, a_n) \leqslant (b_1, \ldots, b_m) \quad \text{sii} \quad a_i^{r_i} = \sum_{j=1}^{m} t_{ij} b_j, \quad 1 \leqslant i \leqslant n \qquad (1.4)$$

con $r_i \geqslant 1$ y los t_{ij} en A. Esta relación es reflexiva y se prueba que es transitiva utilizando la fórmula siguiente, válida en todo anillo

$$\left(\sum_{j=1}^{m} t_{ij} b_j\right)^{s_1 + \ldots + s_m} = \sum_{j=1}^{m} \bar{t}_{ij} b_j^{s_j}$$

en la que los $\bar{t}_{ij}$ son elementos adecuados de A. Sea D(A) el conjunto ordenado obtenido antisimetrizando la relación anterior y escribamos también $(a_1, \ldots, a_n) \in D(A)$, de manera que es $(a_1, \ldots, a_n) = (b_1, \ldots, b_m)$ si y sólo si se verifica la relación (1.4) y su simétrica. Se demuestra sin dificultad que D(A) es un retículo con las operaciones

$$(a_1, \ldots, a_n) \wedge (b_1, \ldots, b_m) = (a_1b_1, \ldots, a_nb_m), \qquad (1.5)$$
$$(a_1, \ldots, a_n) \vee (b_1, \ldots, b_m) = (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)$$

y la aplicación

$$d_A : A \to D(A) \quad , \quad a \mapsto (a) \tag{1.6}$$

es el equivalente constructivo de (1.2).

TEOREMA 1.2. *La aplicación* d_A *de* (1.6) *es un soporte universal de* A.

Demostración. Es inmediato verificar que d_A es un soporte y que si $d' : A \to D'$ es otro soporte entonces la aplicación $\bar{d} : D(a) \to D'$ definida por $\bar{d}(a_1, \ldots, a_n) = d(a_1) \vee \ldots \vee d(a_n)$ es el único homomorfismo tal que $\bar{d} d_A = d'$. ▲

Los teoremas 1.1 y 1.2 son equivalentes en la categoría de conjuntos ordinaria, pero sólo el último se extiende a los topos.

PROPOSICION 1.3. *Los ideales primos de* D(A) *se corresponden biunívocamente con los ideales primos de* A.

Demostración. Recordemos que J es un ideal primo de un retículo D si

(i) $0 \in J$ (iv) $\neg(1 \in J)$

(ii) $x, y \in J \Rightarrow x \vee y \in J$ (v) $x \wedge y \in J \Rightarrow x \in J$ ó $y \in J$

(iii) $x \in J \Rightarrow x \wedge y \in J$

Si $d : A \to D$ es un soporte entonces $I = d^{-1}(J)$ es un ideal primo de A, es decir, se verifica:

(i) $0 \in I$ (iv) $\neg(1 \in I)$

(ii) $a, b \in I \Rightarrow a+b \in I$ (v) $ab \in I \Rightarrow a \in I$ ó $b \in I$

(iii) $a \in I \Rightarrow ab \in I$

Veamos por ejemplo que se verifica (ii): si $a, b \in I$ entonces $d(a), d(b) \in J$ y por tanto $d(a) \vee d(b) \in J$. Pero la condición (iii) de J equivale a "$y \in J$ si $y \leqslant x \in J$" y por tanto $d(a+b) \in J$ según (1.3), luego $a+b \in I$.

Recíprocamente, y ya en el caso $d = d_A$, sea I un ideal primo de A y consideremos el ideal J de D(A) engendrado por $d_A(I)$, es decir

$$J = \{x \in D(A) \mid x \leqslant (a_1, \ldots, a_n), a_1, \ldots, a_n \in I\}$$

Veamos que J es primo. En efecto:

(iv) Si $1 \in J$ entonces $1 \in I$ y esto es falso.

(v) Sea $x = (x_1,\ldots,x_p)$, $y = (y_1,\ldots,y_q)$ con $x \wedge y \in J$, es decir $(x_1y_1,\ldots,x_py_q) \leqslant (a_1,\ldots,a_n)$ donde cada a_i esta en I. Aplicando (1.4) resulta ser x_iy_j un elemento de I para cada par i,j de índices de manera que todos los x_i están en I o bien todos los y_j están en I y en consecuencia $x \in I$ ó $y \in I$. ▲

Si consideramos ideales primos complementados (todos en el caso clásico) la proposición (1.3) se obtiene como caso particular del teorema (1.2) tomando $D' = \{0,1\}$, pues un ideal primo de A (resp. D) es lo mismo que $d^{-1}(0)$ con $d:A \to \{0,1\}$ (resp. $d:D \to \{0,1\}$) soporte (resp. homomorfismo).

Diremos que D(A) es el *espectro* del anillo A, sobreentendiendo en general el soporte d_A. Dado un homomorfismo $f:A \to A'$ de anillos, la propiedad universal de d_A permite definir un único homomorfismo de retículos $D(f):D(A) \to D(A')$ tal que $D(f)d_A = d_{A'}f$, a saber

$$D(f)(a_1,\ldots,a_n) = (f(a_1),\ldots,f(a_n)) \tag{1.7}$$

Se obtiene así el *funtor espectro* $D:An \to Ret$ de la categoría de los anillos en la categoría de los retículos.

Al igual que en el caso clásico, un anillo y su reducido tienen el mismo espectro.

TEOREMA 1.4. *Si* N *es el nilradical de* A *entonces* $D(A/N) = D(A)$.

Demostración. Ver [3].

Llamando B(A) al álgebra de Boole líbremente engendrada por D(A) se obtiene el *funtor espectro booleano* $B:An \to B\ell$. El *espectro booleano* B(A) es el retículo de los abiertos casicompactos en la topología constructible de Spec A en el álgebra conmutativa ordinaria.

Un anillo K es un *cuerpo* si verifica las condiciones

$$\neg(0 = 1), \quad x = 0 \vee x \text{ unidad}. \tag{1.8}$$

Otras condiciones clásicamente equivalentes a (1.7) no lo son desde el punto de vista constructivo (intuicionista) que aquí se utiliza, como puede verse en [6]. Es fácil ver que un cuerpo es *decidible*, es decir sastisface la fórmula

$$x = 0 \vee \neg(x = 0) \tag{1.9}$$

y que $D(K) = \{0,1\}$ siendo $d_K : K \to \{0,1\}$ la función característica del complemento de 0.

Sea ahora un anillo regular, es decir tal que cada elemento a tiene un asociado a^* (único) que satisface

$$a^2a^* = a, \quad aa^{*2} = a^* \tag{1.10}$$

de manera que aa^* es un idempotente. Recordemos que el conjunto E(A) de los idempotentes de un anillo A es un álgebra de Boole con las operaciones $a \wedge b = ab$, $a \vee b = a+b-ab$, $\neg a = 1-a$. Pues bien, un cálculo rutinario prueba que si R es un anillo regular su espectro es

$$d : R \to E(R), \quad a \mapsto d(a) = aa^*. \tag{1.11}$$

En general se verifica el siguiente teorema, que es la versión en topos de la caracterización de la igualdad entre las topologías de Zariski y constructiva en el espectro primo clásico.

TEOREMA 1.5. *D(A) es un álgebra de Boole si y sólo si A/N es regular.*

Demostración. Ver [3].

Más importante y laborioso de probar es el teorema siguiente:

TEOREMA 1.6. *Si R es el anillo regular libremente engendrado por un anillo A entonces B(A) = B(R).*

Demostración. Ver la sección 2 de [3].

En la tantas veces citada referencia [3] se trabaja, como ya se ha indicado antes, con el retículo $Z(A)$ dual de $D(A)$ provisto de una aplicación $z_A:A \to Z(A)$ que es universal respecto a las propiedades duales de (1.3), a saber (i) $z(0) = 1$, $z(1) = 0$, (ii) $z(ab) = z(a) \vee z(b)$ y (iii) $z(a+b) \geq z(a) \wedge z(b)$, que definen las llamadas nociones de cero de un anillo en un retículo. Pero este espectro dual no implica cambios en el espectro booleano ya que el álgebra de Boole líbremente engendrada por $Z(A)$ es también $B(A)$. La versión conjuntista del espectro dual es análoga a (1.2) sustituyendo la familia (1.1) por la de los complementarios

$$Z(a) = \{x \in \operatorname{Spec} A \mid a \in x\}, \quad a \in A.$$

§2. Localizaciones y espectro.

Recordaremos rápidamente algunos hechos básicos de la localización de anillos en el álgebra sobre un topos. En [7] puede verse una exposición realizada en el lenguaje categórico de objetos, morfismos y diagramas.

Dado un subconjunto *multiplicativo* S de un anillo A ($1 \in S$ y $a,b \in S$ implica $ab \in S$) se tiene un epimorfismo $\ell:A \to A[S^{-1}]$ en el anillo de fracciones de A sobre S que es universal respecto a la propiedad "$\ell(a)$ unidad si $a \in S$". Cada anillo de fracciones lo es sobre un subconjunto multiplicativo *saturado* ($ab \in S$ implica $a,b \in S$) es decir tal que $S = \{a \in A \mid \ell(a) \text{ unidad}\}$. Si $f:A \to A'$ es un homomorfismo de anillos entonces $S = \{a \in A \mid f(a) \text{ unidad}\}$ es un subconjunto multiplicativo saturado y existe un único homomorfismo $\bar{f}:A[S^{-1}] \to A'$ tal que $\bar{f}\ell = f$.

PROPOSICION 2.1. $\bar{f}$ *es isomorfismo si y sólo si* f *verifica*

(i) $\forall a' \in A', \exists a,b \in A, f(a)a' = f(b)$ *y* $f(a)$ *unidad*

(ii) $f(a) = 0 \Rightarrow \exists b \in A, ab = 0$ *y* $f(b)$ *unidad.*

Demostración. Sea $g:A' \to A[S^{-1}]$ tal que $g(a') = b/a$ donde a,b son los de (i). Si $f(a_1)a' = f(b_1)$ con $f(a_1)$ unidad entonces $f(ab_1-a_1b) = 0$ y según (ii) $s(ab_1-a_1b) = 0$ con

$s \in S$, lo que equivale a $b_1/a_1 = b/a$; luego g es una aplicación. Se ve fácilmente que g es el isomorfismo inverso de $\bar{f}$. El recíproco es inmediato. ▲

Llamaremos *fraccionario* a un homomorfismo que verifique las propiedades (i) y (ii) de la proposición 2.1.

Un subconjunto multiplicativo es *primo* si $\neg(0 \in S)$ y $a+b \in S$ implica $a \in S$ ó $b \in S$.

PROPOSICION 2.2. *Los subconjuntos multiplicativos primos de un anillo* A *se corresponden biyectivamente con los filtros primos del espectro* D(A).

Demostración. Se copia dualizándola la prueba de la proposición 1.3, en este caso $d_A(S)$ engendra el filtro $F = \{x \in D(A) \mid x = (a_1)\wedge\ldots\wedge(a_n),\ a_1,\ldots,a_n \in S\}$ y como $(a_1)\wedge\ldots\wedge(a_n) = (a_1\ldots a_n) \in d_A(S)$ resulta simplemente $F = \{x \in D(A) \mid x = (a),\ a \in S\}$. ▲

Un anillo es *local* si $\neg(1 = 0)$ y

$$x + y = 1 \Rightarrow x \text{ unidad} \vee y \text{ unidad} \qquad (2.1)$$

lo que equivale clásicamente a la existencia de un único ideal maximal.

PROPOSICION 2.3. *Sea* S *saturado.* S *es primo si y sólo si* $A[S^{-1}]$ *es local.*

Demostración. Sea S primo y supongamos $x+y = 1$ con $x = a/s$, $y = b/t, s, t, S$. Existe $u \in S$ tal que $u(ta+sb-st) = 0$, así que aplicando las propiedades de S resulta $s \in S$ o $t \in S$, es decir x unidad ó y unidad. La prueba se termina sin dificultad. ▲

También la teoría de los retículos admite fracciones, de las que [1] es una referencia en el marco del álgebra clásica.

Dado un subconjunto $\wedge$-*cerrado* S de un retículo D

$(1 \in S$ y $x,y \in S$ implica $x \wedge y \in S)$ la relación

$$x \sim y \Longleftrightarrow \exists u \in S, \quad x \wedge u = y \wedge u \tag{2.2}$$

es una congruencia que define un retículo cociente $D[S^{-1}]$ con un homomorfismo suprayectivo $\ell : D \to D[S^{-1}]$ que es la solución universal de "$\ell(x) = 1$ si $x \in S$". Todo retículo de la forma $D[S^{-1}]$ lo es para un subconjunto $\wedge$-cerrado *saturado* $(x \wedge y \in S$ implica $x,y \in S)$ es decir tal que $S = \{x \in D \mid \ell(x) = 1\}$, lo que equivale a decir que S es un filtro, pues si $x \in S$ entonces $x = x \wedge (x \vee y)$ luego $x \vee y \in S$ y recíprocamente, todo filtro es $\wedge$-cerrado saturado. Si $f : D \to D'$ es un homomorfismo de retículos entonces $S = \{x \in D \mid f(x) = 1\}$ es un $\wedge$-cerrado saturado y existe un único homomorfismo $\bar{f} : D[S^{-1}] \to D'$ tal que $\bar{f}\ell = f$.

PROPOSICION 2.4. $\bar{f}$ *es isomorfismo si y sólo si* f *verifica*

(i) f *es suprayectiva*

(ii) $f(x) = f(y) \Rightarrow \exists u \in D,\ x \wedge u = y \wedge u,\ f(u) = 1.$

Demostracion. Sea $g : D' \to D[S^{-1}]$ tal que $g(x') = \ell(x)$ con $f(x) = x'$ ya que f es suprayectiva. Si $f(x) = f(y)$ entonces (ii) implica $x \wedge u = y \wedge u$ con $u \in S$ asi que $\ell(x) = \ell(y)$ según (2.2). Luego g es una aplicación. Se comprueba que es el isomorfismo inverso de $\bar{f}$. ▲

Como en los anillos, diremos que f es *fraccionario* si verifica las condiciones (i) y (ii) de la proposición 2.4.

Un retículo D es *local* si $\neg(1 = 0)$ y

$$x \vee y = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ ó } y = 1 \tag{2.3}$$

condiciones que equivalen a la existencia de un único ideal (filtro) maximal en la situación clásica.

PROPOSICION 2.5. *Un filtro* S *es primo si y sólo si* $D[S^{-1}]$ *es local.*

Demostración. Sea S un filtro primo y supongamos $\ell(x) \vee \ell(y) = 1$, así que $\ell(x \vee y) = 1$ y según (2.2) $(x \vee y) \wedge u = u$

para algún $u \in S$. Entonces $(x \wedge u) \vee (y \wedge u) \in S$ y por tanto $x \wedge u \in S$ ó $y \wedge u \in S$, lo que implica $x \in S$ ó $y \in S$ es decir $\ell(x) = 1$ ó $\ell(y) = 1$. Luego $D[S^{-1}]$ verifica (2.3). El recíproco es similar.

PROPOSICION 2.6. *A es local si y sólo si* D(A) *es local.*

Demostración. Si $(a) \vee (b) = 1$ entonces $1 = sa+tb$ luego s ó t es unidad, es decir $(a) = 1$ ó $(b) = 1$. El argumento con elementos generales de D(A) es análogo. Recíprocamente, si $a+b = 1$ resulta $(a) \vee (b) = (a,b) \geqslant (a+b) = 1$ y por tanto $(a) = 1$ ó $(b) = 1$, es decir a unidad ó b unidad.

Veamos finalmente cómo es el espectro de un anillo de fracciones.

TEOREMA 2.7. *Si* F *es el filtro engendrado por* $d_A(S)$ *entonces*

$$D(A[S^{-1}]) = D(A)[F^{-1}].$$

Demostración. Supongamos primero $S = \{1,a,a^2,\ldots\}$, de manera que F es el filtro principal $D(A)_{\geqslant(a)} = \{x \in D(A) \mid x \geqslant (a)\}$ y $D(A)[F^{-1}] = D(A)_{\leqslant(a)}$, considerando este último ideal como retículo con $(a) = 1$. En la sección 2 de [3] se demuestra que

$$D(A[a^{-1}]) = D(A)_{\leqslant(a)} \tag{2.4}$$

En el caso general, es conocido que

$$A[S^{-1}] = \varinjlim_{a\in S} \text{filt } A\,[a^{-1}] \tag{2.5}$$

siendo el límite inductivo sobre el orden en S definido por $a \leqslant b$ si $(b) \leqslant (a)$ en D(A), que es filtrante ya que $a,b \in S$ implica $a,b \leqslant ab \in S$. Se tienen pues relaciones de la forma $b^n = ta$ que permiten definir un sistema inductivo de anillos

$$a \leqslant b,\ A[a^{-1}] \to A[b^{-1}],\ x/a^p \mapsto t^n x/b^{np}.$$

Mediante una comprobación rutinaria se pone de manifiesto que el funtor espectro conmuta con los colímites filtrantes, así que según (2.4) y las consideraciones que le preceden (2.5) implica

$$D(A[S^{-1}]) = \varinjlim_{a\in S} \text{filt } D(A)[D(A)_{\geqslant(a)}^{-1}]$$

Pero $\{D(A)_{\geqslant(a)},\ a \in S\}$ es un sistema inductivo dirigido de filtros, ya que si $a,b \in S$ se tiene $(a) \wedge (b) = (ab)$ con $ab \in S$ y por tanto los filtros principales de (a) y (b) están contenidos en el filtro principal de (ab). Además la unión de todos los filtros principales del sistema es F, así que basta aplicar la proposición 1.5 de [1] para obtener la conclusión buscada. ▲

Una *localización* es un homomorfismo fraccionario con rango local. De los resultados anteriores se sigue que existe una correspondencia biunívoca (salvo isomorfismos) entre las localizaciones de A y las de D(A). Un homomorfismo de rango local se factoriza (proposiciones 2.1 y 2.4) en la forma $f = \bar{f}\ell$ con ℓ localización. Es fácil verificar además que $\bar{f}$ verifica "$\bar{f}(a)$ unidad $\Rightarrow$ a unidad" en el caso de anillos y "$\bar{f}(x) = 1 \Rightarrow x = 1$" en el de retículos. Un homomorfismo con estas propiedades se llama *local*. Dada otra factorización $f = gh$ con g local, existe un único homomorfismo k tal que $k\ell = h$ y se verifica también $\bar{f} = gk$. Este tipo de factorizaciones universales son conservadas por el espectro.

PROPOSICION 2.8. *Si* $f{:}A \to A'$ *es local con* A' *local entonces* D(f) *es local.*

Demostración. $D(f)(a_1,\ldots,a_n) = 1$ equivale a $1 = t_1f(a_1)+\ldots+t_nf(a_n)$ y por ser A' local algún $f(a_i)$ es unidad, luego también a_i es unidad pues f es local. Por tanto $(a_i)=1$ lo que implica $(a_1,\ldots,a_n) = 1$.

§3. Anillos de dimensión cero.

Ya que los ideales primos de un anillo A están en biyección con los de su espectro D(A), diremos que

$$\dim A = \dim D(A) \tag{3.1}$$

y reduciremos el estudio de la dimensión (en el sentido de Krull) de los anillos a la de los retículos.

En vez de considerar cadenas de ideales primos en un retículo D tomaremos cadenas de homomorfismos $f_o \leqslant f_1 \leqslant \ldots \leqslant f_n : D \to D'$. Clásicamente, si $D' = \{0,1\}$ y $I_i = f_i^{-1}(0)$, $0 \leqslant i \leqslant n$, se obtiene una cadena de ideales primos.

TEOREMA 3.1. *Para cada retículo* D *y cada* $n \geqslant 1$ *existe un retículo* D_n *con homomorfismos* $p_o \leqslant p_1 \leqslant \ldots \leqslant p_n : D \to D_n$ *tales que para cada cadena de homomorfismos* $f_o \leqslant \ldots \leqslant f_n : D \to D'$ *existe un único homomorfismo* $f : D_n \to D'$ *tal que* $fp_i = f_i$, $0 \leqslant i \leqslant n$.

Demostración. Se toma como D_n el cociente del retículo libre engendrado por n+1 copias de D por la congruencia engendrada por $(0 \leqslant i,\ j \leqslant n)$

$$0_i = 0,\ 1_i = 1,\ x_i \wedge y_i = (x \wedge y)_i,\ x_i \vee y_i = (x \vee y)_i\ , \tag{3.2}$$

$$x_i \wedge x_j = x_{\min(i,j)}$$

Los detalles pueden verse en [4]. ▲

El teorema anterior permite construir una resolución simplicial del retículo D. Así por ejemplo la propiedad universal de D_{n+1} aplicada a la cadena $p_o \leqslant \ldots \leqslant p_i \leqslant p_i \leqslant \ldots \leqslant p_n : D \to D_n$ produce el homomorfismo de degeneración $s_i : D_{n+1} \to D_n$.

Definimos la *dimensión* de un retículo D mediante

$$\dim D \leqslant n \Longleftrightarrow (s_o, \ldots, s_n) : D_{n+1} \to \prod_{n+1} D_n \quad \text{monomorfismo.} \tag{3.3}$$

En la situación conjuntista podemos usar la dualidad de Birkhoff-Stone y escribir para el conjunto ordenado de los ideales primos de D

$$\dim X \leqslant n \iff \{s_o,..,s_n\}: \coprod_{n+1} X_n \to X_{n+1} \text{ epimorfismo} \tag{3.4}$$

siendo X_n el conjunto de las cadenas $x_o \leqslant .. \leqslant x_n$ y $s_i(x_o \leqslant .. \leqslant x_n) = x_o \leqslant .. \leqslant x_i \leqslant x_i \leqslant .. \leqslant x_n \in X_{n+1}$. La condición (3.4) significa que cada (n+1)-cadena es degenerada, es decir tiene al menos dos elementos repetidos. Vemos así que la definición (3.3) se corresponde con la clásica, estando formulada para un topos con números naturales.

El teorema siguiente es el caso particular n = 0 del teorema general de [4]. No obstante daremos aquí una demostración directa que permitirá apreciar los métodos del caso general.

TEOREMA 3.2. *Un retículo tiene dimensión cero si y sólo si es un álgebra de Boole.*

Demostración. $\dim D = 0$ significa que $s_o: D_1 \to D$ es inyectiva por (3.3) y como $s_o(x_o) = x_o = s_o(x_1)$ resulta $x_o = x_1$, es decir $D_1 = D$. Probaremos ahora que (notar que escribimos $x_i = p_i(x)$)

$$p_o = p_1 : D \cong D_1 \implies D \text{ es álgebra de Boole.} \tag{3.5}$$

Aplicando a $p_i: D \to D_1$ el funtor álgebra de Boole libre se obtiene $p_i: B \to B_1$ y supongamos por el momento que

$$D = \{x \in B \mid x_o \leqslant x_1\}. \tag{3.6}$$

Entonces también se verifica $\neg D = \{x \in B \mid x_1 \leqslant x_o\}$ y $C(D) = \{x \in B \mid x_o = x_1\}$ siendo $C(D)$ el álgebra de Boole de los elementos complementados de D. Pero como suponemos la hipótesis de (3.5) será $B = C(D)$ y D es por tanto un álgebra de Boole. De manera que (3.5) es una consecuencia de (3.6).

Para probar (3.6) supongamos primero que D es un retículo de presentación finita. En este caso sí podemos aplicar la dualidad de Birkhoff-Stone para obtener aplicaciones monótonas $p_o \leqslant p_1: X_1 \to X$ con $p_i(x_o \leqslant x_1) = x_i$. La traducción de (3.6) es que todo subconjunto $U \subseteq X$ es una sección superior ($x_1 \geqslant x_o \in U \Rightarrow x_1 \in U$) si y sólo si $p_o^{-1}(U) \subseteq p_1^{-1}(U)$ lo que evidentemente es cierto. Luego los retículos de presentación finita verifican (3.6).

Volviendo al caso general, se sabe que todo retículo es límite inductivo filtrante de retículos de presentación finita y que el álgebra de Boole libre conmuta con estos límites. También se prueba sin dificultad que la construcción funtorial $D \mapsto D_n$ conserva los límites inductivos filtrantes. Sea pues

$$D = \varinjlim_{k \in K} \text{filt } D_k \tag{3.7}$$

con los D_k de presentación finita. Dado $x \in B$ con $x_o \leqslant x_1$ existirá algún $k \in K$ tal que $x_k \in B_k$ con $x_{ko} \leqslant x_{k1}$ y por tanto $x_k \in D_k$, luego $x \in D$. Con esto se ha demostrado uno de los contenidos de la igualdad (3.6), pero el otro es inmediato.

Hemos probado que los retículos de dimensión cero son álgebras de Boole, y el recíproco es obvio.

Ahora es fácil caracterizar los anillos de dimensión cero.

COROLARIO 3.3. $\dim A = 0$ *si y sólo si* A/N *es regular.*
Demostración. Sigue de los teoremas 3.2 y 1.5.

Para terminar veamos un ejemplo importante de anillos de dimensión cero, bien conocido en álgebra conmutativa.

TEOREMA 3.4. *Una K-álgebra finita sobre un cuerpo* K *tiene dimensión cero.*

Demostración. Dado un elemento x se prueba utilizando su ecuación minimal que x^r es regular para algún $r \geqslant 1$, de manera que (x) tiene complemento en el espectro. Los detalles están en [3].

§4. Anillos de polinomios sobre un cuerpo.

El objetivo de esta sección es demostrar que, en cualquier topos con números naturales, el anillo de polinomios en una indeterminada sobre un cuerpo tiene dimensión uno. Para ello debemos previamente identificar los retículos de dimensión uno. Siguiendo el esquema de la demostración del teorema 3.2, es necesario ocuparse primero de los retículos de presentación finita reduciéndolos a conjuntos ordenados finitos mediante la dualidad de Birkhoff-Stone.

PROPOSICION 4.1. *Sea* X *un conjunto ordenado finito.* $\dim X \leqslant 1$ *si y sólo si cada* $U \subseteq X$ *es un intervalo.*

Demostración. Recordemos que U es un intervalo si $x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_2$ con $x_0, x_2 \in U$ implica $x_1 \in U$. Si todo $U \subseteq X$ es un intervalo, tomando una cadena como la anterior y $U = \{x_0, x_2\}$ resulta $x_1 = x_0$ ó $x_1 = x_2$, luego $\dim X \leqslant 1$. El recíproco es inmediato. ▲

Notemos que los intervalos son los subconjuntos de la forma $U = A \quad B$ con A sección superior y B sección inferior, o equivalentemente de la forma $U = A \cap \neg B$ con A y B secciones superiores, y que las secciones superiores de X son los elementos del retículo D asociado por la dualidad.

TEOREMA 4.2. *Sea* D *un retículo.* $\dim D < 1$ *si y sólo si*

$$\forall u \in B, \quad \exists x, y \in D, \quad u = x \wedge \neg y. \tag{4.1}$$

Demostración. La proposición 4.1 equivale a este teorema si D es de presentación finita. Si pudiéramos suponer (3.7) con $\dim D_k \leqslant 1$ para cada índice k sería fácil deducir el teorema para un retículo arbitrario. Como no sabemos si tal hipótesis es válida hay que proceder con otros argumentos.

Denotando $A_2 = \{u \in B \mid u = x \wedge \neg y,\ x, y \in D\}$, (4.1) dice que $A_2 = B$. En el caso finito podemos poner por dualidad

$A_2 = \{U \subseteq X \mid U \text{ intervalo}\}$, lo que se expresa con la ayuda de la aplicación

$$\alpha_2 : P(X) \to P(X_2), \quad \alpha_2 = p_o^{-1} \cap \neg p_1^{-1} \cap p_2^{-1} \tag{4.2}$$

(que envía $U \subseteq X$ en el conjunto de las cadenas $x_o \leq x_1 \leq x_2$ tales que $x_o, x_2 \in U$ y $x_1 \notin U$) diciendo que $A_2 = \alpha_2^{-1}(\emptyset)$. Considerando pues la aplicación en el caso general

$$\alpha_2 : B \to B_2, \quad \alpha_2 = p_o \wedge \neg p_1 \wedge p_2 \tag{4.3}$$

y observando que las construcciones A_2 y $\alpha_2^{-1}(0)$ son funtoriales y conservan los límites inductivos filtrantes, de lo anterior y (3.7) se deduce que todo retículo verifica

$$A_2 = \alpha_2^{-1}(0). \tag{4.4}$$

Sea ahora $C_2 = \alpha_2(B)$, que también es un funtor que conserva los colímites filtrantes al igual que $\bar{C}_2$, el ideal de B_2 engendrado por C_2. Probaremos que

$$K_2 = \bar{C}_2 \tag{4.5}$$

siendo K_2 el núcleo del homomorfismo $(s_o, s_1) : B_2 \to B_1 \times B_1$, otro funtor análogo a los anteriores. Un contenido sigue de $s_o\alpha_2(u) = s_o(u_o \wedge \neg u_1 \wedge u_2) = u_o \wedge \neg u_o \wedge u_1 = 0$ y $s_1\alpha_2(u) = u_o \wedge \neg u_1 \wedge u_1 = 0$. Aplicando una vez más (3.7) basta ahora probar que $K_2 \subseteq \bar{C}_2$ para retículos de presentación finita. Un elemento $w \in K_2$ es por dualidad $W \subseteq X_2$ tal que $s_o^{-1}(W) = \emptyset = s_1^{-1}(W)$, es decir formado por cadenas no degeneradas. Luego $W = W_1 \cup .. \cup W_n$ siendo $W_i = \{x_{io} \leq x_{i1} \leq x_{i2}\}$ un conjunto formado por una sola cadena. Tomando $U_i = \{x_{io}, x_{i2}\}$ resulta $x_{i1} \notin U$ y por tanto $W_i \subseteq \alpha_2(U_i)$. En consecuencia $w = w_1 \vee .. \vee w_n \leq \alpha_2(u_1) \vee .. \vee \alpha_2(u_n)$ lo que significa que $w \in \bar{C}_2$. Queda por tanto probado (4.5).

Usando (3.3), (4.5) y (4.4) resulta finalmente

$$\dim D \leq 1 \iff K_2 = 0 \iff C_2 = 0 \iff A_2 = B \iff (4.1). \blacktriangle$$

Podemos ya pasar a considerar los anillos de polinomios sobre un cuerpo.

TEOREMA 4.3. *Si K es un cuerpo, entonces* $\dim K[X] = 1$.

Demostración. Hay que probar que el espectro $D = (K[X])$ verifica (4.1). Por divisibilidad resulta fácilmente que los elementos de D son de la forma (f) con $f \in K[X]$. El teorema 3.4 implica que $D(K[X]/(f))$ es un álgebra de Boole si $f \neq 0$ y se demuestra en [2] la siguiente fórmula análoga de (2.4): $D(A/(a)) = D(A)_{\geqslant(a)}$. Resulta en definitiva que D es un retículo con 0 decidible (ver (1.9)) y tal que para cada $x = 0$ $D_{\geqslant x}$ es un álgebra de Boole. En estas condiciones se prueba en [2] que $B = D \cup \neg D$ lo que evidentemente implica $\dim D \leqslant 1$. ▲

§5. Representación de Pierce y dimensión de anillos.(*)

Mostraremos para terminar cómo un teorema en un topos ε puede obtenerse a partir de otro más simple que sea válido en un topos arbitrario, aplicando este último a un adecuado topos sobre ε.

Partimos en un álgebra de Boole B en un topos ε con números naturales (aunque algunas de las construcciones que siguen no los necesitan), y sea $\varepsilon(B)$ el topos de haces sobre B con cubrimientos finitos, [2].

Llamaremos B-An a la "comma" categoría $(B \downarrow E)$, [5].

$$\begin{tikzcd} & E(A) \arrow[d] & A \arrow[d] \\ B \arrow[ur] \arrow[r] & E(A') & A' \end{tikzcd}$$

donde $E: An \to B\ell$ es el funtor de idempotentes.

TEOREMA 5.1. $An\varepsilon(B) \cong$ B-An.

Demostración. Dado un haz de anillos $\tilde{A}: B^{op} \to \varepsilon$, definimos $\alpha: B \to E(A)$ así: si $x \in B$, $1 = x + \neg x$ ("+" quiere decir

(*) Esta sección es un resumen y anticipo del artículo del autor: *Dimension of boolean valued lattices and rings*, publicado en el Journal of Pure and Applied Algebra 42(1986) 223-236.

"$\vee$" con "$\wedge$" nula) implica

$$\exists!\, a \in A = \bar{A}(1)\,,\quad \bar{A}_{x,1}(a) = 1\,,\quad A_{\neg x,1}(a) = 0$$

donde $\bar{A}_{x,1}$ es la imagen por $\bar{A}$ de $x \leqslant 1$. Se prueba sin dificultad que $a^2 = 0$ y que $x \mapsto a$ define un homomorfismo de álgebras de Boole.

En el otro sentido, dado α se define $\bar{A}$ así:

$$\begin{array}{ccc} & \bar{A}(x) = A\alpha(x) & \\ x \leqslant y & \uparrow & t\alpha(y) \mapsto t\alpha(x) \\ & \bar{A}(y) = A\alpha(y) & \end{array}$$

y se verifican todos los detalles.

TEOREMA 5.2. $\mathrm{Ret}\,\varepsilon(B) \cong B\text{-Ret}$ *y* $B\ell\,\varepsilon(B) \cong B\text{-}B\ell$ (*donde* B-Ret *y* B-Bl *son "comma" categorías definidas obviamente.*

Demostración. Dado un haz de retículos $\bar{D}:B^{op} \to \varepsilon$ y $x \in B$

$$\exists!\, a \in D = \bar{D}(1)\,,\quad \bar{D}_{x,1}(a) = 1\,,\quad \bar{D}_{\neg x,1}(a) = 0$$

y se define $a = \delta(x)$ obteniéndose un homomorfismo de retículos $\delta:B \to D$. En particular el complementario de a es el único $b \in D$ tal que $\bar{D}_{x,1}(b) = 0$ y $\bar{D}_{\neg x,1}(b) = 1$.

En sentido contrario se define el haz $\bar{D}$ así:

$$\begin{array}{ccc} & \bar{D}(x) = D_{\leqslant\delta(x)} & \\ x \leqslant y & \uparrow & a \mapsto a \wedge \delta(x) \\ & \bar{D}(y) = D_{\leqslant\delta(y)} & \end{array}$$

Si D es álgebra de Boole, lo es también cada $D_{\leqslant\delta(x)}$, siendo $\neg a \wedge \delta(x)$ el complementario de $a \in D_{\leqslant\delta(x)}$, donde $\neg a$ es el complementario de a en D.

Se verifican sin dificultad todos los detalles pertinentes: $\bar{D}$ es un haz y se obtiene un funtor $B\text{-Ret} \to \mathrm{Ret}\,\varepsilon(B)$ que es pleno, fiel y para cada $\bar{D}$ existe δ tal que $\delta \mapsto \bar{D}$; así que se trata de una equivalencia, [5].

Nótese que el funtor de idempotentes:

$$E : An\varepsilon(B) \to B\ell\,\varepsilon(B)$$

es, después de las equivalencias, de la forma

$$E(B \overset{\alpha}{\to} E(A),A) = B \overset{\alpha}{\to} E(A)$$

Análogamente, un soporte en $\varepsilon(B)$

$$(B \overset{\alpha}{\to} E(A),A) \xrightarrow{d} (B \overset{\delta}{\to} D)$$

es un soporte $d:A \to D$ en ε que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "d"] & D \\
E(A) \arrow[u, hook, "j"] \arrow[ur] & B \arrow[l, "\alpha"] \arrow[u, "\delta"']
\end{tikzcd}$$

Nótese que dj es un homomorfismo de retículos, pues siendo d soporte, si $a,b \in E(A)$ entonces $d(a \vee b) = d(a+b-ab) = d(a) \vee d(b)$. Todo soporte d en ε lo es en $\varepsilon(B)$, definiendo δ a través del diagrama anterior

TEOREMA 5.3. d_A *es el soporte universal de* $(B \overset{\alpha}{\to} E(A),A)$ *en* $\varepsilon(B)$.

Demostración. Se verifica la propiedad universal sobre el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & D \\
A \arrow[urr, "d"] \arrow[r, "d_A"] & D(A) \arrow[ur, dashed, "\bar{d}"] & \\
E(A) \arrow[u, hook, "j"] \arrow[ur] & B \arrow[l, "\alpha"] \arrow[u, "\delta_A"'] \arrow[uur, "\delta"'] &
\end{tikzcd}$$

Un caso particular importante de B-anillos se presenta cuando $B = E(A)$, $\alpha = id$. Entonces el haz es la representación de Pierce del anillo A, [2],

$$\bar{A}: B^{op} \to \varepsilon, \quad \bar{A}(e) = Ae.$$

Supongamos ahora que $B = E(R)$, siendo R un anillo regular.

TEOREMA 5.4. (Pierce) *R es un cuerpo en* $\varepsilon(B)$.

Demostración. Interpretando la definición de cuerpo ($\neg(1 = 0)$ y $x = 0 \vee x$ unidad) en $\varepsilon(B)$ y aplicando la equivalencia resulta que $\bar{R}$ es un cuerpo si $1 \neq 0$ en R y para cada $a \in R$ existe un cubrimiento (partición) $1 = x_1 + \ldots + x_n$ en B y para cada índice i un elemento $a_i \in R$ tal que

$$a\alpha(x_i) = 0 \text{ ó } aa_i\alpha(x_i) = \alpha(x_i).$$

En nuestro caso es $\alpha = id$ y dado $a \in R$ se tiene un idempotente $e = aa^*$ con el que obtener una partición $1 = e + (1-e)$ que verifica

$$a(1-e) = 0, \quad aa^*e = e.$$

El anillo de polinomios $R[X]$ verifica $E(R[X]) = B = E(R)$ y su representación es

$$(B \xrightarrow{id} E(R[X]), R[X]) = \overline{R[X]}: e \to R[X]e = Re[X].$$

TEOREMA 5.5. $\overline{R[X]}$ *es el anillo de polinomios* $\bar{R}[X]$ *en* $\varepsilon(B)$.

Demostración. $\bar{R}[X] = \{f \in \bar{R}^N \mid \exists n: m > n \Rightarrow f(m) = 0\}$. Entonces se tiene una biyección

$$\frac{\xi: e \to \bar{R}[X]}{\xi = \{\xi_n\}_{n \in N} \subset Re \qquad \exists n: m > n \Rightarrow \xi_m = 0}$$

y esto quiere decir que existe $e = e_1 + \ldots + e_r$ y para cada índice i, n_i tal que $\xi_m e_i = 0$ si $m > n_i$. Tomando $n = \text{máx}\{n_1, \ldots, n_r\}$ se tiene $\xi_m e = 0$ si $m > n$, luego $\xi \in Re[X]$, es decir $\xi: e \to \overline{R[X]}$.

Llegamos finalmente a la dimensión de anillos de polinomios en $\varepsilon(B)$. Se sabe que $\dim K[X] \leqslant 1$ si K es un cuerpo en un topos con números naturales. Por tanto, si R es anillo regular en un tal topos ε entonces

$$\dim \overline{R[X]} \leqslant 1 \text{ en } \varepsilon(B)$$

donde $B = E(R)$.

TEOREMA 5.6. $\dim R[X] \leqslant 1$ *si* R *es un anillo regular en* ε.

Demostración. Es $\{s_0,s_1\}\colon D_2(\overline{R[X]}) \rightarrowtail D_1(\overline{R[X]})\times D_1(\overline{R[X]})$ mono, así que

$$\Gamma(D_2(\overline{R[X]})) \rightarrowtail \Gamma(D_1(\overline{R[X]}))\times\Gamma(D_1(\overline{R[X]})) \quad \text{mono},$$

siendo $\Gamma\colon\varepsilon(B) \to \varepsilon$ el funtor sección global (adjunto a derecha, luego conserva límites y monomorfismos). Verifiquemos ahora el siguiente

LEMA. $\Gamma(-)_n = (-)_n\Gamma$.

En efecto, dados homomorfismos $B \xrightarrow{\delta} D \xrightarrow{p_0\leqslant\cdot\cdot\leqslant p_n} D_n$ se tiene $p\circ\delta = .. = p_n\delta \quad (= \delta_n)$ y se ve que

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[d, "p_0\leqslant..\leqslant p_n"] \\ B \arrow[ur, "\delta"] \arrow[r, "\delta_n"'] & D_n \end{tikzcd}$$

es universal en $\varepsilon(B)$ si lo es en ε.

Aplicando el lema resulta el monomorfismo

$$\{s_0,s_1\}\colon D_2(R[X]) \rightarrowtail D_1(R[X])\times D_1(R[X])$$

así que $\dim D(R[X]) \leqslant 1$.

REFERENCIAS

[1] Brezuleanu, A., et Diaconescu, R., *Sur la duale de la categorie des treillis*, Rev. Romm. Math. Pures et Appl. XIV, Nº 3 (1969), 311-323.

[2] Español, L., *Nota sobre la representación de Pierce de un anillo*, Rev. Univ. Santander, Nº 2, Parte II (1979), 761-767.

[3] Español, L., *Le spectre d'un anneau dans l'algèbre constructive et applications à la dimension*, Cahiers Topo. et Géo. Diff. XXIV-2 (1983), 133-144.

[4] Español, L., *Constructive Krull dimension of lattices*, Rev. Acad. Ciencias Zaragoza 37 (1982), 5-9.

[5] Mac Lane, S., *Categories for the working matematician*, Graduate Text in Math. Vol. 5, Springer, Verlag, 1971.

[6] Johnstone, P.T., *Rings fields and spectra*, J. Algebra 49 (1977), 238-260.

[7] Tierney, M., *On the spectrum of a ringed topos*, in *Algebra Topology and Category Theory*: a collection of papers in honour of S. Eilenberg, Ed. A. Heller and M. Tierney, Academic Press, 1977. 189-210.

Colegio Universitario de la Rioja

(Universidad de Zaragoza)

Logroño, ESPAÑA.