



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Contribución al estudio de los sistemas no suaves (bifurcación zip)

Contribution to the study of non-smooth systems (Zip
bifurcation)

Carlos Mario Escobar Callejas

Contribución al estudio de los sistemas no suaves (bifurcación zip)

Carlos Mario Escobar Callejas

Tesis o trabajo de grado presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:
Doctor en Ingeniería

Director(a):
Ph.D. Gerard Olivar

Línea de Investigación:
Automática
Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales
Facultad de Ingeniería y Arquitectura
Manizales, Colombia
2013

Dedico este trabajo a mi pequeño compañerito de tesis, mi hijo Camilo Andres y a mis padres por los mejores tiempos que hemos compartido.

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mi orientador Dr. Gerard Olivar por haberme iniciado en el tema de los sistemas dinámicos no suaves, guiado pacientemente, ayudado en los numerosos obstáculos académicos y personales en la realización de mi trabajo de investigación; sin su colaboración decidida nada hubiera sido posible. En segundo lugar al Doctor Jocirei Dias Ferreira quién participo activamente en la discusión de la primera parte de mi tesis relacionada con la caracterización del fenómeno de zip en sistemas suaves, por su amable invitación para realizar la pasantía en la Universidad Federal de Matto Grosso Brasil y la hospitalidad de su familia. También quiero manifestar mi gratitud para con los profesores Fabiola Angulo, Gerard Olivar, Gustavo Osorio y Germán Castellanos de la Universidad Nacional Sede Manizales quienes, a través de sus cursos, me brindaron las bases necesarias para alcanzar el objetivo académico que me impuse al iniciar el programa de Doctorado y a los profesores de la Universidad Nacional de Colombia sede Medellin, Drs. Julio Morales, Fernando Puerta, Iván Asmar, Carlos Parra, Diego Vélez y Rafael Ahumada quienes me inculcaron gran aprecio por las matemáticas desinteresadamente. Agradecimientos especiales a los jurados evaluadores de mi tesis, los profesores Jaime Arango de la universidad del Valle de Colombia, Enrique Ponce de la universidad de Sevilla España y Jocirei Dias Ferreira de la Universidad Federal de Mato Grosso Brasil, por haber tenido paciencia infinita para evaluar la extensión de mi trabajo. Al seminario de Sistemas Dinámicos orientado por el grupo Abc Dynamics de la Universidad Nacional de Colombia que me enseñaron cuan divertido pueden ser los sistemas dinámicos. A la Universidad Tecnológica de Pereira quién me otorgó la comisión de estudios para adelantar los estudios respectivos, en especial al Doctor Gómez Espíndola que estuvo siempre muy pendiente del desarrollo de la misma y a los Doctores William Ardila, Germán Quintero, Reinaldo Marín, Fernando Mesa y César Valencia Solanilla por su actuación a favor de mi comisión de estudios. Por último mi eterna gratitud al Doctor Miklós Farkas y al Doctor Gerard Olivar quienes con su trabajo hicieron posible esta investigación y me han permitido participar de su cosecha intelectual.

Resumen

En este trabajo se propone extender el concepto de la bifurcación zip introducido por el profesor Miklós Farkas [1984, 1985] en un sistema dinámico suave que modela la competición de dos especies predadores por una presa que se regenera, a sistemas dinámicos de naturaleza no suave, los cuales poseen un conjunto continuo de equilibrios a lo largo del cual la matriz jacobiana del sistema es discontinua y presentar una estrategia para su clasificación basada en la dinámica de sus valores propios para el caso en que las variedades invariantes bidimensionales locales del sistema existen a pesar de la conmutación del sistema no-suave. Se presenta un completo análisis del comportamiento dinámico y asintótico tanto de la componente real como imaginaria de los valores propios asociados a la linealización del sistema a lo largo de su conjunto de equilibrios y se establece un nuevo criterio de clasificación geométrico de las bifurcaciones en sistemas suaves de clase C^2 planares, el cual preserva información sobre el número, estabilidad, topología de los conjuntos invariantes y también de las formas geométricas de nodos y focos alrededor de puntos de equilibrios hiperbólicos aislados. Con base en los resultados obtenidos en el análisis de las componentes de los valores propios y del criterio de clasificación geométrico antes mencionado se demuestra que la bifurcación de zip descubierta por Farkas [1985] al estudiar la componente real de los valores propios forma parte de un fenómeno más complejo determinado por la combinación de dos tipos de bifurcación geométrica las cuales son causadas por la acción simultánea de la componente real y la componente imaginaria de los valores propios a lo largo de su conjunto de equilibrios; dando lugar a un escenario de bifurcaciones conformado por 11 tipos de zip geométricos en total cuando el sistema es de naturaleza suave y a un escenario de bifurcaciones conformado por 142 tipos de zip geométricos no suaves en total en sistemas no suaves. En el caso en que las variedades invariantes bidimensionales locales del sistema no existen en el interior de su conjunto de equilibrios se demuestra que el fenómeno de pérdida continua de atractividad del segmento de equilibrios se preserva también en el fenómeno de zip no suave.

Palabras Claves: Bifurcación Andronov-Hopf, Bifurcación zip, k-estrategista, r-estrategista, respuesta funcional, sistemas no suaves, sistemas suaves

Abstract

This work proposes to extend the concept of Zip Bifurcation introduced by Miklós Farkas in [1984-1985] in a smooth dynamic system, describing the competition of two predator species for a single regenerating prey species into a non-smooth dynamic system, that has a

continuous set of equilibria where the Jacobian matrix of the system is discontinuous; and also shows a strategy for classification based in the dynamic of its eigenvalues for the case which the local two-dimensional invariant manifolds of the system exist despite the commutation of system non-smooth. It is show a complete analysis on the dynamic and asymptotic behavior due the real and imaginary component of the eigenvalues, associated to the system linearity along its equilibria set and establishes a new criterion of geometric classification of bifurcation in a smooth system class C^2 planar, that preserves information about the stability, topology of the invariant set and the geometric forms of node and focus around the isolated hyperbolic equilibria points. Based on the results obtained in an analysis of the component of the eigenvalues and the geometric classification criterion shows that bifurcation zip discovered by Farkas [1985] to study the real component of the eigenvalues is part of a more complex phenomenon given by combination of two geometrical bifurcation caused by simultaneous action of the real and imaginary component of the eigenvalues associated to the system linearity along its equilibria set; generating a bifurcations scenario conformed by 11 types in total of geometric zip bifurcations for smooth system and a bifurcations scenario conformed by 142 types in total the non-smooth bifurcations of geometric zip for non-smooth systems. In the event that the local invariant manifolds two-dimensional system does not exist in the interior of its set of equilibria is shown that the loss of attractivity of the segment of equilibria is preserved too in the non smooth zip phenomenon.

Keywords: Andronov-Hopf Bifurcation, Zip Bifurcation, k-strategist, r-strategist, funtional response, nonsmooth system, smooth system.

Contenido

Agradecimientos	iv
Resumen	v
Introducción	1
1 Preliminares	12
1.1 Sistemas suaves	12
1.1.1 Variedades invariantes locales y linealización alrededor de puntos aislados	13
1.1.2 Bifurcación, equivalencia topológica y geométrica en sistemas suaves	17
1.2 Estabilidad, bifurcación y equivalencia topológica en sistemas no suaves	28
1.2.1 <i>Estabilidad asintótica en sistemas suave por tramos continuos</i>	31
2 Construcción del modelo	35
2.1 Consideraciones generales del modelo	35
2.1.1 Condiciones de Butler-Farkas	40

<i>Contenido</i>	ix
2.1.2 Verificación de las condiciones Butler-Farkas en el modelo no suave	45
2.1.3 Modelo original concreto que exhibe bifurcación zip	46
3 Extensión de la dinámica de la bifurcación zip en modelos suaves	50
3.1 Preliminares	50
3.1.1 Puntos de equilibrio del sistema	52
3.1.2 Coexistencia y extinción por bifurcación zip en cada sub-sistema del sistema no suave	54
4 Extensión de la bifurcación zip en modelos suave por tramos	146
4.1 Introducción	146
4.2 Variedad invariante	149
4.3 Atractividad del segmento de equilibrios L_k	151
4.4 Pérdida de atractividad y estabilidad del segmento de equilibrios L_k .	177
4.5 Bifurcación Hopf en el sistema perturbado	206
4.5.1 Planteamiento del sistema	206
4.5.2 Equilibrios del sistema	207
5 Persistencia de la atractividad del zip en sistemas no suaves	215
6 Conclusiones	246
Bibliografía	254
A Preliminares en estabilidad y bifurcaciones	261

<i>Contenido</i>	x
A.1 Sistemas suaves	262
A.1.1 Estabilidad estructural y bifurcación en sistemas suaves	270
A.1.2 Bifurcaciones en sistemas dinámicos suaves a tiempo continuo	275
A.1.3 Bifurcaciones en sistemas dinámicos no-suaves a tiempo continuo	283
B Modelos no suaves numéricos que exhiben bifurcación zip	308
B.1 Generalidades(4.2)	308
B.2 Modelo con variedad invariante del tipo 1A	310
B.3 Modelo sin variedad invariante del tipo 1A	337
B.4 Modelo con variedad invariante del tipo 1B	368
B.5 Modelo sin variedad invariante del tipo 1B	396
B.6 Modelo con variedad invariante del tipo 2	425
B.7 Modelo sin variedad invariante del tipo 2	453
B.8 Modelo con variedad invariante del tipo 3	484
B.9 Modelo sin variedad invariante del tipo 3	510

Introducción

En ecología, en el estudio de la dinámica de poblaciones, aparece el problema de saber bajo cuales condiciones del ecosistema es posible la coexistencia de especies estrechamente emparentadas o bajo qué circunstancias actúa el *principio de exclusión competitiva*, como lo llamara Harden en 1940 o *principio de Gause*, en honor del biólogo ruso que lo observó en 1932 en la separación de especies en cultivos experimentales. Hutchinson y Deevey [49] expresan que la hipótesis de Gause o principio de exclusión competitiva es “uno de los avances más importantes en la ecología teórica” y “uno de los fundamentos de la ecología moderna”; y no sin razón, ya que a éste se le considera como uno de los mecanismos básicos como se presenta el proceso de selección natural y por ende el origen y evolución de las especies mediante la competición tanto intraespecífica como interespecífica. Darwin [12] lo enunció por primera vez, aunque en una forma un poco diferente, en 1859. En su artículo “El origen de las especies por la selección natural” expresa: “Debido a que las especies de un mismo género presentan usualmente, aunque no en forma invariable, mucho mayor similitud en habitat, constitución y siempre en estructura, la lucha entre ellos será, por lo general, más intensa si llegan a competir entre sí que si lo hacen con especies de géneros distintos”.

En el estudio del problema concerniente a la validez del *principio de la exclusión competitiva*, para el caso de dos especies predatoras compitiendo por una presa que se regenera, el siguiente modelo ha sido ampliamente considerado por Koch [52, 53]

y Hsu, Hubbel & Walman [47, 48].

$$\begin{aligned}\dot{s} &= \gamma s \left(1 - \frac{s}{k}\right) - x_1 \frac{m_1 s}{a_1 + s} - x_2 \frac{m_2 s}{a_2 + s} \\ \dot{x}_1 &= x_1 \frac{m_1 s}{a_1 + s} - d_1 x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_2 \frac{m_2 s}{a_2 + s} - d_2 x_2.\end{aligned}\tag{0.1}$$

Aquí x_1 , x_2 y s son, el tamaño de la población de los dos predadores y el de la presa que se regenera, respectivamente. Un crecimiento logístico de la presa se supone en ausencia del predador; la respuesta funcional es saturada de acuerdo con la cinética de Michaelis-Menten, $\gamma > 0$ es la tasa de crecimiento intrínseca de la presa, $k > 0$ es la capacidad de carga del medio con respecto a la presa; $m_i > 0$, $d_i > 0$ y $a_i > 0$ son la tasa de nacimiento maximal, la tasa de muerte y la *constante de saturación media*, respectivamente, del predador ($i = 1, 2$). En este modelo las constantes:

$$\lambda_i = \frac{a_i d_i}{m_i - d_i}, i = 1, 2,\tag{0.2}$$

se introducen teniendo el siguiente significado: x_i se incrementa si y sólo si $s > \lambda_i$, según sea x_i positivo, llegando a ser cero en $s = \lambda_i$. Hsu, Hubbel & Waltman [47, 48] han mostrado que las soluciones del sistema (0.1) correspondiente a valores iniciales positivos son acotados y permanecen en el octante positivo y que la especie predadora i -ésima puede sobrevivir únicamente si $0 < \lambda_i < k$, lo cual implica que $m_i > d_i$. También ellos han estudiado el caso genérico con $\lambda_1 \neq \lambda_2$, Koch [52] y Hsu, Hubbel & Waltman [48] demuestran que, para algunos valores de los parámetros, algunas soluciones periódicas pueden obtenerse en el octante positivo significando que la coexistencia es posible. Smith [90] ha probado (usando teoría de bifurcación) que, en el caso $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, existen soluciones periódicas en el octante positivo para valores suficientemente pequeños de $|\lambda_1 - \lambda_2|$ y $k - (a_1 + 2\lambda_1)$. Wilken [96] ha tratado el caso $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Él ha establecido, en el caso $a_1 = a_2 = a$, que si $k \leq a + 2\lambda$, entonces hay un segmento de línea de equilibrios estable, mientras que si, $k > a + 2\lambda$ entonces “todas las tres especies sobreviven en un ciclo límite permanentemente”. Él también ha probado que; en el caso $a_1 > a_2$, si $k > a_1 + 2\lambda$, entonces x_2 va a cero, s y x_1 permanecen en un ciclo límite; si $k = a_1 + 2\lambda$, entonces x_2 va a cero s y x_1 tienden al equilibrio; si $k < a_2 + 2\lambda$, entonces todas las tres

especies sobreviven y la solución tiende a un punto de equilibrio del segmento de la línea de equilibrios.

Butler [7] y Farkas [27] han mostrado que la mayoría de resultados concernientes al modelo de Hsu y otros pueden ser investigados para toda clase de modelos del tipo *dos-predadores-una-presa*, modelo cuyo característica común es que la tasa de desarrollo de la presa y la respuesta funcional del depredador son funciones arbitrarias que satisfacen ciertas condiciones naturales denominada condiciones de Butler-Farkas.

Farkas [24] ha estudiado el modelo de Hsu y otros bajo la hipótesis especial de que cierto valor de un parámetro umbral es igual en las dos especies predatoras; este parámetro puede interpretarse como la cantidad de presa necesaria para alcanzar una tasa de crecimiento intrínseca igual a la tasa de muerte natural del predador. Esta Hipótesis hace posible la identificación de uno de los predadores como un *r-estratega* y el otro como un *k-estratega*. Los términos *r-estratega* y *k-estratega* tienen un significado semejante al asignado en la teoría de la dinámica de poblaciones, es decir un *r-estratega* es un predador cuya rata maximal de nacimiento y muerte es alta por lo cual necesita una gran cantidad de alimento para incrementar su rata de nacimiento, mientras un *k-estratega* significa un predador con una rata de nacimiento y muerte relativamente baja, pero con la habilidad de mantener la tasa de nacimiento relativamente alta aún cuando pequeñas cantidades de alimentos le sean posibles lograr.

Farkas [26] ha introducido el concepto de *bifurcación zip* para denotar el siguiente fenómeno. “A bajos valores de la capacidad de carga k del ecosistema con respecto a la presa, una línea de equilibrios es un atractor del sistema, ella representa coexistencia estable de las tres especies. Si k es incrementado los equilibrios son continuamente desestabilizados, empezando por aquellos, que representan la dominancia del *k-estratega* sobre el *r-estratega*. Arriba de cierto valor de k , el sistema no tiene más equilibrios estables que representen coexistencia; sin embargo, un ciclo límite permanece representando la oscilación de coexistencia del *r-estratega* y la presa ”.

Recientemente Farkas, E. Saéz y Szantó [30] han generalizado el fenómeno de zip

a un sistema EDO cuatro dimensional con respuesta funcional generalizada tipo Holling III, Ferreira [34] ha tratado la ocurrencia de la bifurcación zip en un sistema predador-presa $(n+1)$ -dimensional con respuesta funcional tipo Holling II y también ha mostrado en [35] la ocurrencia de la bifurcación zip en sistemas predador-presa *tri-dimensionales* que presentan reacción difusión con respuesta funcional tipo Holling II. También Kiss [51] ha generalizado la bifurcación zip en un sistema predador-presa $(n+1)$ -dimensional con respuesta funcional tipo Ivlev.

Por otro parte en los últimos 10 años el uso de sistemas dinámicos no suaves (dinámica híbrida y suave por tramos) se han incrementado en Ingeniería y Ciencia Aplicada para el modelamiento de una variedad de sistemas físicos, biológicos y dispositivos tecnológicos caracterizados por eventos discontinuos. Se pueden encontrar ejemplos en la ocurrencia de impactos en sistemas mecánicos, movimiento stick-slip en osciladores con fricción, switchings en circuitos eléctricos y electrónicos, caminata de robots, y dinámica híbrida en sistemas de control los cuales han sido modelados como sistemas no suaves. Los sistemas dinámicos con eventos discontinuos también caen dentro del ancho rango de los sistemas dinámicos no suaves (SNS). En general, estos sistemas físicos pueden operar en diferentes modos, y la transición desde un modo al otro es frecuentemente mucho más corta en tiempo que la escala de tiempo de las dinámicas de los modos individuales. Los sistemas dinámicos no suaves (SNS) son divididos en tres tipos de acuerdo al grado de discontinuidad del campo: *sistemas suaves por tramos continuos*, los cuales tienen campo vectorial continuo con matrices jacobiana discontinua (SST) o campo continuo, con derivada de mayor orden a uno discontinua; *sistemas de Filippov*, descritos por ecuaciones con campo vectorial discontinuo; por último *sistemas con impacto y fricción*, sujetos a saltos en el espacio de estados.

En dinámica de población y ecología problemas de manejo de recursos renovables y control biológico de plagas han sido también modelados como sistemas no suave caracterizados por eventos discontinuos tratados principalmente por Křivan y coautores a través de modelos con el enfoque de Filippov: Křivan [54, 55, 56, 57, 59]; Sirot and Křivan [84]; Boukal and Křivan [6]; Genkai-Kato and Yamamura [39]; Křivan y Sikder

[58]; Van Baalen et ál., [95]; Křivan and Eisner [60]; Křivan and Schmitz [61]; Křivan and Diehl [62]; Srinivasu and Gayatri [91]; Dercole et ál. [14]. Estos problemas tratan con poblaciones en las cuales los individuos maximizan competencia, así que su estrategia individual conmuta alternativas de hábitos o dietas tan pronto como la densidad de algunas poblaciones llegan a ser altas o también bajas.

Los modelos de Filippov pueden ser usados para imitar la evolución de explotación de poblaciones si la explotación es prohibida cuando la población está debajo de un umbral crítico, Dercole et ál. [14] y Meza et ál. [75]. Esto es actualmente el sentido del uso de cuotas en la pesquería, Hilborn y Walters [44] y es una práctica común en la producción de madera en la explotación maderera, Davis and Jonson [13] y Fredericksen [37]. Consideraciones similares se tienen sí, en orden a evitar epidemias humanas, una particular pesquería es forzada temporalmente a parar esta actividad tan pronto como la concentración de un contaminante particular cruza un cierto umbral preestablecido. Los modelos de Filippov han sido usado en problemas de biología evolucionaria donde presiones selectivas pueden abruptamente cambiar durante la evolución de los rasgos fenotípicos relevantes Dercole et ál. [14].

Finalmente los sistemas no suaves sujetos a discontinuidades y saltos en el espacio de estados han sido modelados por sistemas de ecuaciones diferenciales impulsivas (SDI). En años recientes la mayoría de su investigación se ha concentrado en sistemas con impulso fijo en el tiempo, Simeon P. E [83] los cuales fueron usados para modelar problemas prácticos en Biología como modelos de enfermedad de vacunación impulsiva, Shulgin B, Stone L, and Agur Z. [85]; Lu Z, Chi X, and Chen L [71] y en dinámica de poblaciones, Ballinger G, Liu X [4] y Lakmeche A. [67]. Lakmeche ha transformado el problema de solución periódica a un problema de punto fijo y ha obtenido condiciones de existencia de la solución trivial y la solución 1-periódica Lakmeche A, Arino O. [67]. Tang ha obtenido una completa expresión para la solución 1-periódica y discutido la bifurcación de solución periódica numéricamente para sistemas dinámicos discretos por determinación del mapeo estroboscópico [92]. Los efectos impulsivos de predadores y sus características en el modelo presa-predador fueron estudiados en Liu B, Zhang Y, and Chen L [70] y Zhang S, Dong L [98].

Algunas dificultades surgen producidas por las características de estos sistemas, tales como el uso de funciones multivaluadas, discontinuidad de las trayectorias en el espacio de estados a través de la variedad de discontinuidad, discontinuidad del campo vectorial en la frontera del espacio de estados, no unicidad de soluciones, mal condicionamiento de la solución, estabilidad de las soluciones, etc. En los sistemas (SNS) se ha encontrado puede exhibir un ancho rango de fenómenos incluido las bifurcaciones y caos, pérdida súbita de la estabilidad estructural bajo variación de parámetros. Por ejemplo el oscilador de fricción se ha visto exhibe salto súbito desde una solución periódica al caos determinístico. Fenómenos Chattering y sliding también son observados los cuales corresponde a frecuencias de conmutación altas no deseadas en circuitos electrónicos. A pesar del crecimiento evidente y de su uso extendido, en los sistemas dinámicos no suave (SNS) no existe una teoría sistemática efectiva en el tratamiento de estos sistemas. Mientras en las pasadas décadas se ha presenciado un desarrollo explosivo en la teoría de sistemas dinámicos suaves, muchos problemas permanecen abiertos aún para los sistemas dinámicos no suaves. Estos incluyen temas teóricos como existencia y unicidad de las soluciones, estabilidad y evolución de atractores (clasificación de bifurcaciones no-suaves) y algoritmos numéricos (Continuación de órbitas no-suaves), también temas prácticos de relevancia en aplicaciones. Por ejemplo, en la industria de prototipos virtuales es crucial el paso del diseño de sistemas mecánicos, eléctricos y electrónicos por el ahorro en dinero y mejora en su confiabilidad. Al mismo tiempo algunos de estos sistemas son dificultosos para modelarlos y simularlos numéricamente por lo que ellos involucran dinámicas complejas de características no-suaves que aún no se comprenden (sistemas con impacto fricción, transistores MOS, mecanismos swithing, etc.). Sin embargo gran parte del software realizable para estos sistemas no incorpora rutinas apropiadas para el tratamiento de la no-suavidad.

Alrededor de mundo, investigadores e industriales están urgidos del desarrollo de herramientas analíticas y numéricas nuevas, apropiadas para tratar los sistemas no suaves. Esto podría soportar la derivación y el desarrollo de modelos caracterizados por dinámicas no suaves en el nivel de complejidad requerido.

Siguiendo ideas semejantes a las dadas por Leine [68] el cual ha mostrado la existencia de una contrapartida no suave para las bifurcaciones uniparamétricas de estado estacionario en sistemas suaves por tramos continuos más conocidas, como la bifurcación silla-nodo, la transcítica y de Yu. A. Kuznetsov*, S. Rinaldi and A. Gragnani [65], para la clase más simple de sistema de Filippov llamados sistemas planares genéricos para los cuales se deriva un catálogo completo de bifurcaciones deslizantes locales y globales de codimensión 1; se busca determinar condiciones de existencia del fenómeno de bifurcación zip no suave y caracterizar su comportamiento dinámico para derivar un catálogo completo de bifurcaciones de zip no-suave de codimensión 1 en sistemas no suaves (continuos por tramos). Específicamente en este trabajo se demuestra que el fenómeno de ocurrencia de la bifurcación de Andronov-Hopf, y de zip-Farkas, pueden ser extendidas a una clase de *sistemas no lineales suaves a trozos continuos*, los cuales poseen un conjunto continuo de equilibrios a lo largo del cual la matriz jacobiana del sistema es discontinua y satisfacen las condiciones de Butler-Farkas [7, 27]. Se presenta una estrategia para la demostración de su existencia y clasificación, basada en el estudio de la dinámica de los valores propios de la linealización de los subsistemas que lo componen a lo largo de su conjunto de equilibrios para el caso en que el sistema no-suave preserve las variedades invariantes bidimensionales locales de cada subsistema que intersectan transversalmente el segmento de equilibrios L_k . En el caso en que la conmutación del sistema no-suave destruye sus variedades invariantes bidimensionales locales, se demuestra que aún el fenómeno de pérdida de atractividad del segmento de equilibrios L_k se preserva en el fenómeno de bifurcación zip no suave, a pesar de que la estabilidad de los puntos interiores del segmento de equilibrios L_k no se puede determinar por la linealización del sistema.

El contorno de este trabajo se organiza como sigue: En el Capítulo uno se presentan algunos conceptos y teoremas relacionados con estabilidad y bifurcación de sistemas dinámicos de naturaleza tanto suave como no-suave tratadas desde el marco de la equivalencia topológica y también geométrica que nos sirven de marco teórico para el desarrollo de los resultados en los capítulos subsiguientes.

En el Capítulo dos se propone el sistema no-suave (continuo por tramos) a partir

de la composición de dos subsistemas suaves los cuales satisfacen las condiciones de Butler-Farkas, se determinan condiciones de continuidad y de compatibilidad entre los subsistemas para garantizar la existencia de la bifurcación de zip no-suave. También se construye un modelo concreto original el cual satisface las condiciones generales del modelo propuesto, el cual nos sirve para ilustrar la existencia de los distintos comportamientos de la dinámica de la bifurcación de zip no-suave.

En el Capítulo tres se presenta un completo análisis del comportamiento dinámico y asintótico tanto de la componente real como imaginaria de los valores propios asociados a la linealización del sistema a lo largo de su conjunto de equilibrios y se establece un nuevo criterio de clasificación geométrica de las bifurcaciones en sistemas suaves de clase C^2 del tipo (2.1) el cual preserva información sobre el número, estabilidad, topología de los conjuntos invariantes y también de las formas geométricas de nodos y focos alrededor de puntos de equilibrios hiperbólicos aislados. Con base en los resultados obtenidos en el análisis de la componentes de los valores propios y del criterio de clasificación geométrica antes mencionado se demuestra que la bifurcación de zip descubierta por Farkas [1985] al estudiar la componente real de los valores propios con base en el criterio de equivalencia topológica es también una bifurcación con el criterio de clasificación geométrica y que además el fenómeno de bifurcación de zip forma parte de un fenómeno más complejo el cual viene dado por la combinación de dos tipos de bifurcación geométrica que son causadas por la acción simultánea de la componente real y la componente imaginaria de los valores propios a lo largo de su conjunto de equilibrios; dando lugar a un escenario de bifurcaciones conformado por 11 tipos de zip geométrico en total.

En el Capítulo cuatro se realiza el análisis de la bifurcación zip en sistemas *suaves por tramos del tipo (2.1)* los cuales satisfacen las condiciones de Butler-Farkas y preservan las variedades invariantes locales que intersectan transversalmente el interior del segmento de equilibrios L_k o las del sistema perturbado asociado a éste. Se demuestra la existencia de un sistema aproximado (perturbado) y topológicamente equivalente del sistema no suave considerado, el cual es construido a partir de los subsistemas generados por los campos \tilde{f}_j que son aproximaciones topológicamente

equivalentes de los campos f_j que generan los subsistemas del sistema no suave en un entorno tubular alrededor del segmento de equilibrios L_k salvo en un conjunto de medida cero. Se presenta un teorema a cerca de la existencia de la bifurcación de zip del sistema suave por tramos considerado y un teorema de clasificación de estas bifurcaciones de naturaleza no suave el cual afirma que bajo la acción posible de los 11 tipos de bifurcaciones geométricas que actúan a lo largo del segmento de equilibrio L_k inducidas por la evolución de cada uno de los campos f_1 y f_2 que conforman el sistema no suave se produce un escenario de bifurcaciones de naturaleza no suave conformado por 142 tipos de zip geométricos en total. En este capítulo también se demuestra para el sistema perturbado suave del sistema considerado, que en todas las variedades invariantes que intersectan transversalmente el conjunto de equilibrios ocurre una bifurcación de Hopf; de tal forma que la bifurcación de zip que ocurre en estos sistemas perturbados se puede considerar conformada por una familia uniparamétrica de bifurcaciones de Hopf. Además, utilizando las hipótesis que se usaron para demostrar la existencia de la bifurcación de zip no-suave, y las caracterizaciones de la bifurcación Hopf no-suave debida a Zou & Küpper [99], así como de la atractividad de puntos de equilibrios aislados en sistemas suave por tramos planares reportada en: Freire E. Ponce E. & Torres F. [38]; Camlibel [8], Olivares & Angulo [77]; Carmona V., Freire E., Ponce E. & Torres F. [11], se demuestra la existencia de la bifurcación de Hopf-Zou & Küpper no suave en cada una de las variedades invariantes bidimensionales que intersectan transversalmente el segmento equilibrios L_k del sistema perturbado no-suave.

En el Capítulo cinco se analiza la dinámica del sistema no-suave cuando sus subsistemas asociados a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, $j = 1, 2$, no satisfacen la *condición de la variedad invariante*. Como consecuencia de ello se puede demostrar que las únicas variedades invariantes bidimensionales del sistema son los planos coordenados, ahora la estabilidad de los puntos interiores del segmento de equilibrios L_k no se puede determinar por la linealización del sistema, ya que con cada conmutación, las órbitas a cada lado de la superficie de discontinuidad sobre las subvariedades bidimensionales respectivas, van cambiando sus centros de equilibrios en la dirección del

"zip no-suave". Sin embargo se puede demostrar que la pérdida de atractividad del segmento de equilibrios L_k se conserva a pesar de la conmutación de las órbitas del sistema no-suave.

Finalmente en el Capítulo seis se presenta una mirada de la tesis, capítulo por capítulo, subrayando las ideas centrales y los aportes respectivos. También se sugiere algunos temas de posibles líneas de investigación.

En el anexo A se presentan preliminares en la teoría de estabilidad y bifurcaciones que complementan el Capítulo 1, haciendo especial énfasis en las bifurcaciones uniparamétricas de estado estacionario tanto de sistemas suaves como de sistemas no suaves.

En el Anexo B se construyen cuatro ejemplos numéricos de modelos no-suaves mediante el programa Mathematica que preservan las variedades invariantes bidimensionales del sistema y cuatro ejemplos más de modelos no-suaves que preservan sólo atractividad del segmento de equilibrios L_k , los cuales representan modelos naturales y artificiales del tipo exponencial algebraico, que generalizan el modelo de crecimiento logístico de Gilpin para la tasa de reproducción de la presa, así como los modelos del tipo Holling III y Rosenzweig para la respuesta funcional del depredador. Los modelos hallados satisfacen las condiciones necesarias planteadas por Butler [7] y Farkas [27] en cada una de los subsistemas del sistema no-suave, así como las condiciones de compatibilidad entre ellas. Como consecuencia de lo anterior el modelo de Hsu y otros se generaliza a sistemas no-suaves (continuos por tramos) para el caso tratado por Wilken [96] y Farkas [24]; es decir para el caso tridimensional, $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ para $a_1 > a_2$, y el caso bidimensional $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ con $a_1 = a_2 = a$, en dinámica de poblaciones, y nos muestra la existencia, diversidad de dinámicas, del fenómeno de bifurcación de zip-no-suave. Los ejemplos numéricos de modelos no-suaves construidos aquí ilustran los contenidos teóricos de los resultados obtenidos respecto a la existencia de una familia uniparamétrica de bifurcaciones de Hopf-Zou & Küpper en desarrollo del fenómeno de la bifurcación de zip no-suave de un sistema perturbado del sistema considerado, en el cual existen variedades invariantes que intersectan transversalmente el segmento de equilibrios L_k que no cambian con

el parámetro de bifurcación k del sistema. Se ilustra el caso en que las variedades invariantes locales de los subsistema que conforman el sistema no suave considerado se destruyen en el interior del segmento de equilibrios L_k por la conmutación del sistema; sin embargo la pérdida de la atractividad zip del segmento de equilibrios L_k se preserva.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se introducen algunos conceptos y resultados sobre estabilidad y bifurcaciones tanto de sistemas suaves como de sistemas no-suaves que nos sirven de base en las demostraciones de los principales teoremas en el desarrollo de este trabajo. La primera parte se dedica a las nociones básicas y teoremas de estabilidad y bifurcaciones de sistemas suaves (campo diferenciable) haciendo especial énfasis en los conceptos y propiedades de la variedad invariante, de la equivalencia tanto topológica como geométrica, los cuales pueden ser encontrados en Farkas [28] y Kuznetsov [64]. En la segunda parte se tratan algunos conceptos y teoremas relacionados con la estabilidad asintótica así como de la equivalencia topológica y geométrica de los sistemas no suaves (con campo no diferenciable) los cuales pueden ser encontrados en di Bernardo M., Nordmark A., Olivar G. [19]; di Bernardo [20]; y di Bernardo M., Nordmark A., Olivar. G. [21]. Este capítulo se complementa con el Anexo **A**.

1.1 Sistemas suaves

La teoría de bifurcación tiene sus orígenes en los trabajos matemáticos de Euler (1774), sin embargo la teoría moderna comienza con la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales de Poincaré. En los últimos años, esta teoría ha experimentado un enorme desarrollo con una fusión de nuevas ideas y métodos de la teoría de sistemas

dinámicos, teoría de la singularidad, la teoría de grupos, y el estudio de los sistemas dinámicos con ayuda de computadora. En esta revisión, los objetos "en cuestión" son los sistemas dinámicos en la forma de ecuaciones diferenciales $\dot{x} = f(x, \mu)$.

1.1.1 Variedades invariantes locales y linealización alrededor de puntos aislados

En esta sección se presentan definiciones básicas y teoremas relacionados con la linealización de variedades invariantes locales de sistemas autónomos, las cuales consideramos necesarios para mostrar algunos resultados sobre atractividad de ciertos conjuntos invariantes en los capítulos sobre bifurcación zip.

Iniciamos esta sección definiendo formalmente lo que entendemos por *conjunto invariante del flujo*. Un sistema dinámico puede ser considerado a lo largo de una vecindad de un punto de equilibrio bajo un sistema de ecuaciones diferenciales autónomo y sin pérdida de generalidad que el equilibrio está en el origen, por lo cual el sistema es de la forma:

$$\dot{x} = Ax + g(x), \quad (1.1)$$

donde A es una matriz constante de orden $n \times n$, $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $g(0) = 0$, $\partial_x g(0) = 0$, $\partial_x g(0)$ es la matriz derivada de g en $x = 0$. El flujo generado por el sistema se denota por φ_t , es decir, $\varphi_t(x) = \varphi_t(t, x)$, es solución de (1.1) que satisface las condiciones iniciales $\varphi(0, x) = x$. Se supone que la solución está definida para $t \in \mathbb{R}$.

Definición 1 *La variedad diferenciable M pasando a través del origen $x = 0$ es llamada variedad invariante local del sistema (1.1), o del flujo φ_t , si existe un $\varepsilon > 0$, tal que para $x \in M$, $|\varphi(t, x)| < \varepsilon$ implica $\varphi(t, x) \in M$.*

El sistema variacional del sistema (1.1) con respecto a la solución $\varphi(t, x)$ es:

$$\dot{y} = (A + \partial_x g(\varphi(t, x)))y. \quad (1.2)$$

Se denota la matriz fundamental del sistema como $\Phi(t, x)$, se supone que $\Phi(0, x) = I$.

Además:

$$\dot{\Phi}(t, x) = (A + \partial_x g(\varphi(t, x)))\Phi(t, x).$$

Se puede mostrar que $\Phi(t, x) = \partial_x g(t, x)$. En particular, si $x = 0$ entonces $\varphi(t, 0) \equiv 0$.

Además $\partial_x g(\varphi(t, 0)) = \partial_x g(0) = 0$ y la ecuación (1.2) toma la forma:

$$\dot{y} = Ay; \tag{1.3}$$

por lo tanto, $\Phi(t, 0) = \partial_x \varphi(t, 0) = \exp(At)$. Esto significa que el flujo φ_t es dado por

$$\varphi_t(x) = \varphi(t, x) = e^{At}x + G(t, x) \tag{1.4}$$

donde:

$$G \in C^1, G(t, 0) = 0, \partial_x G(t, 0) = 0.$$

De (1.4) se puede asumir sin pérdida de generalidad que la matriz de coeficiente A tiene $s \geq 0$ valores propios con parte real negativa, $c \geq 0$ valores propios con parte real cero y $u \geq 0$ valores propios con parte real positiva; contando la multiplicidad en el polinomio característico de A se tiene que $s + c + u = n$.

Denotamos con R^s, R^c y R^u los subespacios propios s -dimensional, c -dimensional y u -dimensional, correspondientes a los valores propios positivos, cero y negativos, respectivamente. Entonces R^n es la suma directa de estos subespacios propios

$$R^n = R^s \oplus R^c \oplus R^u$$

los cuales son invariantes con respecto al sistema lineal (1.3). Las restricciones de las proyecciones del sistema (1.3) en estos subespacios propios generan tres sistemas lineales independientes. El sistema lineal definido sobre R^s es asintóticamente estable; todas las soluciones tiende a cero exponencialmente cuando t tiende a infinito; el sistema lineal definido sobre R^c puede tener algunas soluciones acotadas y también puede tener soluciones que tienden a infinito cuando t tiende a infinito, y el sistema lineal definido sobre R^u es completamente inestable, es decir todas las soluciones no triviales tienden exponencialmente a infinito cuando t tiende a infinito.

En otras palabras existe una transformación de coordenadas lineal regular que lleva el sistema (1.3) a la forma:

$$\dot{\eta} = \tilde{A}\eta, \quad (1.5)$$

siendo $\tilde{A} = \text{diag}[S, C, U]$, donde S es una matriz estable de orden $s \times s$, C una matriz cuyos valores propios tienen parte real cero de orden $c \times c$, y U una matriz inestable de orden $u \times u$.

Considérese el vector $\eta \in R^n$ como suma directa de vectores $\eta^s \in R^s$, $\eta^c \in R^c$ y $\eta^u \in R^u$:

$$\eta = \eta^s \oplus \eta^c \oplus \eta^u.$$

El sistema (1.5) puede ser llevado a la forma:

$$\dot{\eta}^s = S\eta^s, \quad \dot{\eta}^c = C\eta^c, \quad \dot{\eta}^u = U\eta^u. \quad (1.6)$$

Una pregunta importante que surge es si el sistema (1.1) permite una estructura similar. La respuesta es positiva. El siguiente teorema garantiza la existencia de variedades estables e inestables.

Teorema 2 *Se supone que la matriz A tiene la forma del sistema (1.1), que existe un entorno V_x del origen $x = 0$ de R^n y una transformación de coordenadas regular de orden C^1 , $r : V_x \rightarrow V_x$ de esta vecindad en la vecindad V_x del origen $z = 0$ de tal manera que $r(0) = 0$. El flujo (1.4) es transformado en el flujo $\psi_t(z) := (r \circ \varphi_t \circ r^{-1})(z)$ de la forma:*

$$\psi(t, z) = \psi_t(z) = \text{diag}[e^{St}, e^{Ct}, e^{Ut}]z + \tilde{G}(t, z), \quad (1.7)$$

donde para un $T > 0$ arbitrario la matriz $\exp(ST)$ es de orden $s \times s$ con todos sus valores propios en módulo menores que uno, $\exp(CT)$ es de orden $c \times c$ con sus valores propios en módulo iguales que uno, $\exp(UT)$ es de orden $u \times u$ con sus valores propios en módulo mayores que uno, la función vectorial \tilde{G} es la suma directa de las funciones vectoriales \tilde{G}^s, \tilde{G}^c , y \tilde{G}^u de dimensión s, c y u respectivamente, es decir $\tilde{G} = \tilde{G}^s \oplus \tilde{G}^c \oplus \tilde{G}^u$ y

$$\begin{aligned} \tilde{G} &= (\tilde{G}_1, \dots, \tilde{G}_n) = (\tilde{G}_1^s, \dots, \tilde{G}_s^s, \tilde{G}_1^c, \dots, \tilde{G}_c^c, \tilde{G}_1^u, \dots, \tilde{G}_u^u), \\ \tilde{G}(t, 0) &= \partial_z \tilde{G}(t, 0) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{G}^u(t, z^s, 0, 0) &\equiv 0, & \tilde{G}^c(t, z^s, 0, 0) &\equiv 0, \\ \tilde{G}^s(t, 0, 0, z^u) &\equiv 0, & \tilde{G}^c(t, 0, 0, z^u) &\equiv 0,\end{aligned}\tag{1.8}$$

donde $z = z^s \oplus z^c \oplus z^u \in R^s, z^c \in R^c, z^u \in R^u$; la misma transformación de coordenada transforma el sistema (1.1) en:

$$\begin{aligned}\dot{z}^s &= Sz^s + \tilde{g}^s(z^s, z^c, z^u), \\ \dot{z}^c &= Cz^c + \tilde{g}^c(z^s, z^c, z^u), \\ \dot{z}^u &= Uz^u + \tilde{g}^u(z^s, z^c, z^u),\end{aligned}$$

donde S es una matriz estable de orden $s \times s$, C una matriz con la parte real de sus valores propios iguales a cero de orden $c \times c$ y la matriz U de orden $u \times u$ con sus valores propios con parte real positiva

$$\begin{aligned}\tilde{g}^u(z^s, 0, 0) &\equiv 0, & \tilde{g}^c(z^s, 0, 0) &\equiv 0, \\ \tilde{g}^s(0, 0, z^u) &\equiv 0, & \tilde{g}^c(0, 0, z^u) &\equiv 0, \\ \tilde{g}(z) &= \tilde{g}^s \oplus \tilde{g}^c \oplus \tilde{g}^u(z) = \sigma(|z|) \text{ cuando, } z \longrightarrow 0.\end{aligned}\tag{1.9}$$

Prueba: Véase Hartman [41, página 243]. \square

En el caso de mapeos el siguiente lema garantiza la existencia de variedades invariantes, el cual es de utilidad en la demostración de la atractividad del segmento de equilibrios L_k más adelante.

Lema 3 *Sea la matriz A de orden $d \times d$ y C una matriz no singular de orden $e \times e$ tal que*

$$\begin{aligned}a &= \|A\|, \frac{1}{c} = \|C^{-1}\|, \\ a &< c, a < 1.\end{aligned}$$

Sea $T : (y_0, z_0) \rightarrow (y_1, z_1)$ el mapeo de la forma

$$\begin{aligned}T &: y_1 = Ay_0 + Y(y_0, z_0), \\ z_1 &= Cz_0 + Z(y_0, z_0),\end{aligned}\tag{1.10}$$

donde Y, Z , son de clase C^1 para pequeños $\|y_0\|, \|z_0\|$ con Y, Z , y las matrices jacobianas $\partial_{y_0, z_0} Y, Z$, se desvanecen en (y_0, z_0) . Entonces existe una función vectorial e -dimensional de clase C^1 para pequeños $\|y\|$ tal que

$$g(0) = 0, \partial_v g(0) = 0,$$

y los mapeos

$$\begin{aligned} R & : u = y, v = z - g(y), \\ R^{-1} & : y = u, z = v + g(u) \end{aligned}$$

transforman T en la forma

$$\begin{aligned} RTR^{-1} & : u_1 = Au_0 + U(u_0, v_0) \\ v_1 & = Cv_0 + V(u_0, v_0) \end{aligned} \tag{1.11}$$

donde U, V , y las matrices jacobianas $\partial_{y_0, z_0} U, V$, se desvanecen en (y_0, z_0) y

$$V(u_0, 0) = 0. \tag{1.12}$$

Prueba: Ver Harman [41, página 234]. \square

La condición (1.12), significa que el conjunto de puntos (u_0, v_0) cerca del origen sobre la superficie $v_0 = 0$, es invariante bajo el mapeo (1.11), es decir la variedad $z = g(y)$ es localmente invariante por (1.10).

1.1.2 Bifurcación, equivalencia topológica y geométrica en sistemas suaves

En esta sección indicaremos por $X^r(A)$ el conjunto de los campos vectoriales $X : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase $C^r, r \geq 1$, donde $A \subset G$ es un abierto de \mathbb{R}^n . Ahora se define el concepto de equivalencia topológica y de equivalencia geométrica, los cuales contribuyen a definir el concepto de bifurcación zip en nuestro sistema dinámico. Se observa que la equivalencia geométrica definida aquí implica lógicamente la equivalencia topológica, es decir si dos sistemas son geoméricamente equivalentes, entonces también son

topológicamente equivalentes por lo cual la equivalencia geométrica es por supuesto un concepto de clasificación de retratos de fase más fuerte que la topológica y nos será de utilidad para clasificar los distintos escenarios de la bifurcación zip.

Definición 4 *Los sistemas dinámicos diferenciables (M, φ, R) y $(\widehat{M}, \widehat{\varphi}, R)$ son topológicamente equivalentes en las vecindades $V \subset M$ y $\widehat{U} \subset \widehat{M}$ si existe un homeomorfismo $h : V \rightarrow \widehat{U}$ y una función creciente $\tau : V \times R \rightarrow R$ que lleva las órbitas de V sobre las órbitas de \widehat{U} preservando la orientación a lo largo de éstas es decir*

$$h(\varphi(x, t)) = \widehat{\varphi}(h(x), \tau(x, t)), \forall (x \in V, t \in R).$$

Decimos que los sistemas dinámicos son C^r equivalentes si son topológicamente por medio de un homeomorfismo que es de clase C^r .

Nótese que la equivalencia topológica aplica órbitas en órbitas, y preserva el sentido del recorrido de tales órbitas, pero los puntos de la órbita imagen se pueden recorrer a distinta velocidad. Cuando tenemos una equivalencia que preserva la parametrización del tiempo a lo largo de cada órbita, entonces decimos que es una conjugación de sistemas dinámicos o de campos según se use el lenguaje de los flujos o de campo vectoriales.

Definición 5 *Los sistemas dinámicos diferenciables (M, φ, R) y $(\widehat{M}, \widehat{\varphi}, R)$ son conjugados en las vecindades $V \subset M$ y $\widehat{U} \subset \widehat{M}$, si existe un homeomorfismo $h : V \rightarrow \widehat{U}$ que lleva las órbitas de V sobre las órbitas de \widehat{U} preservando la orientación a lo largo de éstas, es decir*

$$h(\varphi(x, t)) = \widehat{\varphi}(h(x), t), \forall (x \in V, t \in R)$$

Decimos que los sistemas dinámicos son C^r conjugados si son conjugados por medio de un homeomorfismo que es de clase C^r .

Equivalencia geométrica: Cuando en un sistema autónomo el campo $f(x) \in C^1$ es posible clasificar los retratos de fase del sistema con base en el criterio de la equivalencia topológica, la cual preserva información sobre el número, estabilidad, y

topología de los conjuntos invariantes, mientras se puede perder información sobre el comportamiento transiente, dependiente del tiempo y la geometría de los retratos de fase. Por ejemplo la equivalencia topológica entre flujos de sistemas alrededor de puntos hiperbólicos del tipo nodo y del tipo foco es bien establecida en Kuznetsov [64]; sin embargo su comportamiento transiente y geométrico difieren en la dinámica del sistema y resulta importante en algunas aplicaciones poder diferenciar entre ellos como es el caso de los sistemas no suaves, donde se ha observado que la estabilidad y la atractividad de ciertos conjuntos invariantes depende tanto de la componente real como imaginaria de sus valores propios de la linealización del sistema. Si en un sistema autónomo el campo $f(x) \in C^2$, entonces es posible establecer un criterio de clasificación geométrica más refinado para los escenarios (conjunto de bifurcaciones) en un entorno U de un punto de equilibrio hiperbólico en el plano, el cual realizamos con base en una modificación del criterio de la equivalencia lineal y de algunos teoremas que establecen la misma estructura cualitativa entre el sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x)$$

y la del sistema lineal

$$\dot{x} = Df(x_0),$$

cerca a un punto de equilibrio hiperbólico x_0 del tipo nodo, tipo foco o del tipo silla. Este criterio nos será de utilidad más adelante para introducir una clasificación de la dinámica de la bifurcación de zip en sistemas suaves y también para extender la dinámica de la bifurcación de zip a sistema no suaves (suave por tramos). Para establecer el criterio de equivalencia geométrica nos restringimos a sistemas planos.

Sea el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix}, (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (1.13)$$

El sistema no lineal (1.13) puede ser escrito en términos de coordenadas polares como

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta + f_2(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta \\ f_2(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta - f_1(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

donde

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}, 0 \leq \theta < 2\pi.$$

A continuación se dan definiciones geométricas precisas para centro, foco, centro foco estable e inestable, nodo estable e inestable y silla topológica de sistemas no lineal (1.13), véase Perko [80]. Se asume que $x_0 \in R^2$ es un punto de equilibrio del sistema no lineal (1.13) el cual ha sido trasladado al origen; $r(t, r_0, \theta_0)$ y $\theta(t, r_0, \theta_0)$ denotan la solución del sistema no lineal (1.14) con $r(0) = r_0$ y $\theta(0) = \theta_0$.

Definición 6 *El origen es llamado un centro para el sistema no lineal (1.13) si existe un $\alpha > 0$, tal que toda curva solución de (1.13) en un entorno reducido con centro en el origen $N_\delta(0) - \{0\}$ es una curva cerrada con el origen en su interior.*

Definición 7 *El origen es llamado un centro-foco para el sistema no lineal (1.13) si existe una secuencia de curvas solución cerradas Γ_n con Γ_{n+1} en el interior de Γ_n tal que $\Gamma_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, y tal que toda trayectoria entre Γ_n y Γ_{n+1} se desenrolla hacia Γ_n o Γ_{n+1} cuando $t \rightarrow \pm\infty$.*

Definición 8 *El origen es llamado un foco para el sistema no lineal (1.13) si existe un $\delta > 0$, tal que para $0 < r_0 < \delta$ y $\theta_0 \in R$, $r(t, r_0, \theta_0) \rightarrow 0$, y $|\theta(t, r_0, \theta_0)| \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$. Es llamado un foco inestable si $r(t, r_0, \theta_0) \rightarrow 0$, y $|\theta(t, r_0, \theta_0)| \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow -\infty$. Cualquier trayectoria del sistema no lineal (1.13) la cual satisface $r(t, r_0, \theta_0) \rightarrow 0$, y $|\theta(t, r_0, \theta_0)| \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \pm\infty$ se dice que es un punto espiral hacia adelante del origen cuando $t \rightarrow \pm\infty$.*

Definición 9 *El origen es llamado un nodo estable para el sistema no lineal (1.13) si existe un $\delta > 0$, tal que para $0 < r_0 < \delta$ y $\theta_0 \in R$, $r(t, r_0, \theta_0) \rightarrow 0$, y $|\theta(t, r_0, \theta_0)| < \infty$, cuando $t \rightarrow \infty$, es decir cada trayectoria en un entorno reducido con centro en el origen $N_\delta(0) - \{0\}$ se acerca al origen a lo largo de una línea tangente bien definida cuando $t \rightarrow \infty$. El origen es llamado un nodo inestable si*

$r(t, r_0, \theta_0) \rightarrow 0$, y $|\theta(t, r_0, \theta_0)| < \infty$ para $r_0 \in (0, \delta)$ y $\theta_0 \in R$ cuando $t \rightarrow -\infty$. El origen es llamado un nodo propio para el sistema no lineal (1.13), si éste es un nodo y además todo rayo a través del origen es tangente para alguna trayectoria de (1.13).

Definición 10 *El origen es una silla topológica para el sistema no lineal (1.13) si allí existen dos trayectorias Γ_1 y Γ_2 las cuales se acerca al origen cuando $t \rightarrow \infty$ y dos trayectorias Γ_3 y Γ_4 la cuales se acercan al origen cuando $t \rightarrow -\infty$ y si existe un $\delta > 0$, tal que todas las otras trayectorias las cuales empiezan en un entorno reducido con centro en el origen $N_\delta(0) - \{0\}$ alcanzan $N_\delta(0)$ cuando $t \rightarrow \pm\infty$. Las trayectorias $\Gamma_1, \dots, \Gamma_4$ son llamadas separatrices.*

Para una silla topológica, la variedad estable en el origen es $S = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{0\}$ y la variedad inestable en el origen es $U = \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \{0\}$. Si la trayectoria Γ_i se acerca al origen a lo largo de un rayo haciendo un ángulo θ_i con el eje-x donde $\theta_i \in (-\pi, \pi]$ para $i = 1, \dots, 4$, entonces $\theta_2 = \theta_1 \pm \pi$ y $\theta_4 = \theta_3 \pm \pi$. Esto se sigue de considerar las posibles direcciones en las cuales una trayectoria de (1.13), escrita en coordenadas polares (1.14), pueden acercarse al origen dado por la dirección de β , la cual satisface

$$b \sin^2 \beta + (a - d) \sin \beta \cos \beta - c \cos^2 \beta = 0, \quad (1.15)$$

$$\text{con } Df(x_0) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Como una consecuencia inmediata del teorema de la variedad estable y el Teorema de Harman-Grobman. Se establece que si el origen es un punto de equilibrio hiperbólico del sistema no lineal (1.13), entonces este es una silla topológica para el sistema (1.13) si y únicamente si es una silla topológica para su linealización en el origen.

Teorema 11 *Sea E un subconjunto abierto de R^2 conteniendo el origen y sea $f \in C^1(E)$. Suponga que el origen es punto crítico hiperbólico del sistema (1.13). Entonces el origen es una silla topológica del sistema no lineal (1.13), si y únicamente si éste es una silla para el sistema lineal asociado a (1.13) en el origen*

$$\dot{x} = Df(0)x$$

El próximo teorema probado en Andronov-Leontovich [1], muestra que bajo hipótesis más fuertes $f \in C^2(E)$ se tiene que nodos y focos del sistema lineal persisten bajo la adición de términos no lineales.

Teorema 12 *Sea E un subconjunto abierto de R^2 conteniendo el origen y sea $f \in C^2(E)$. Suponga que el origen es punto crítico hiperbólico del sistema (1.13). Entonces el origen es nodo estable (o inestable) del sistema no lineal (1.13), si y únicamente si este es un nodo estable (o inestable) del sistema para el sistema lineal asociado a (1.13) en el origen*

$$\dot{x} = Df(0)x,$$

y el origen es foco estable (o inestable) del sistema no lineal (1.13) si y únicamente si éste es un foco estable (o inestable) del sistema para el sistema lineal asociado a (1.13) en el origen.

A continuación se establece un criterio de partición (equivalencia geométrica) de flujos lineales hiperbólicos teniendo en cuenta la estructura de valores propios de la matriz del sistema la cual determina a su vez una partición (equivalencia geométrica) de los flujos no lineales de clase C^2 como consecuencia de los Teoremas 11 y 12.

Definición 13 *Sean los sistema lineales*

$$\dot{x} = Df_1(0)x. \tag{1.16}$$

$$\dot{x} = Df_2(0)x. \tag{1.17}$$

Se puede asumir sin pérdida de generalidad que la matriz de coeficiente Df_k , $k = 1, 2$; tiene $s_k \geq 0$ valores propios reales con parte real negativa, $c_k \geq 0$ valores propios con parte real cero, $u_k \geq 0$ valores propios reales con parte real positiva y $sc_k \geq 0$ valores propios complejos con parte real negativa, $uc_k \geq 0$ valores propios complejos con parte real positiva ; contando la multiplicidad en el polinomio característico de Df_k se tiene que $s_k + c_k + u_k + sc_k + uc_k = n_k$. Entonces decimos que el sistema (1.16) es geoméricamente equivalente al sistema (1.17) si y sólo si son topológicamente equivalentes y

$$s_1 = s_2; u_1 = u_2; sc_1 = sc_2; uc_1 = uc_2; c_1 = c_2$$

Se observa claramente que la definición anterior particiona los sistemas lineales hiperbólicos cerca el origen en clases de sistemas las cuales son equivalentes a nodos, focos o sillas. Si el flujo es no hiperbólico este queda clasificado por el criterio de equivalencia topológica el cual de hecho particiona los flujos no-hiperbólicos.

A continuación damos la definición de flujos equivalentes para sistemas autónomos entorno de un punto equilibrio:

Definición 14 *Considere los sistemas no lineales autónomos de clase C^2 siguientes*

$$\dot{x} = f_1(x), \tag{1.18}$$

$$\dot{x} = f_2(x). \tag{1.19}$$

y

$$\dot{x} = Df_1(0)x, \tag{1.20}$$

$$\dot{x} = Df_2(0)x, \tag{1.21}$$

sus sistemas lineales asociados con respecto al origen de coordenadas. Se puede asumir sin pérdida de generalidad que la matriz de coeficiente Df_k tiene $s_k \geq 0$ valores propios reales con parte real negativa, $c_k \geq 0$ valores propios con parte real cero, $u_k \geq 0$ valores propios reales con parte real positiva y $sc_k \geq 0$ valores propios complejos con parte real negativa, $uc_k \geq 0$ valores propios complejos con parte real positiva; contando la multiplicidad en el polinomio característico de Df_k , luego se tiene que $s_k + c_k + u_k + sc_k + uc_k = n_k$. Entonces decimos que el sistema (1.18) es equivalente geométricamente al sistema (1.19) cerca al origen si y sólo si son topológicamente equivalentes cerca al origen y

$$s_1 = s_2; u_1 = u_2; sc_1 = sc_2; uc_1 = uc_2; c_1 = c_2.$$

Se observa claramente que la definición anterior particiona los sistemas no-lineales hiperbólicos de clase C^2 cerca el origen en clases de sistemas las cuales son equivalentes a nodos, focos o sillas topológicas. Si el flujo es no-hiperbólico de clase C^2 éste se clasifica por el criterio de equivalencia topológica, el cual de hecho particiona los flujos no-hiperbólicos de clase C^2 .

La definición geométrica de equivalencia de flujos de sistemas no lineales de clase C^2 cerca el origen es claramente consistente por la Definición 13, de equivalencia geométrica en sistemas lineales y la correspondencia establecida por los Teoremas 11 y 12, entre los flujos del sistema no-lineal cerca el origen de un punto tipo nodo, foco o silla y los flujos del sistema lineal asociado cerca el origen de un punto tipo nodo, foco o silla, respectivamente. Esta definición puede extenderse a mayor dimensión; para nuestro trabajo es suficiente, ya que el espacio de estados es particionado por variedades invariantes de dimensión dos. Se observa también que la Definición 13, de equivalencia geométrica permite tratar los cruces de ambos ejes coordenados por los valores propios de la linealización del sistema al variar el parámetro como bifurcaciones geométricas del sistema. Así un cambio de retrato de fase de un nodo a un foco (cruce del eje real) se considera una bifurcación. Desde este punto de vista el tratamiento de los distintos escenarios reciben un tratamiento más simétrico con respecto a la dinámica de los valores propios, ya que en este caso el eje imaginario no es privilegiado.

A continuación definimos el concepto de estabilidad topológicamente (geométricamente) estructuralmente estable.

Definición 15 Si $f \in X^1(A)$, entonces la C^1 – norma de f se define como

$$\|f\|_1 = \sup_{x \in A} |f(x)| + \sup_{x \in A} \|f'\| \quad (1.22)$$

donde $|\cdot|$ denota la norma euclídeana sobre R^n , y $\|\cdot\|$ denota la norma usual matricial. La función $\|\cdot\|_1 : X^1(A) \rightarrow R$ define una norma y el conjunto de funciones $X^1(A)$ acotadas con la norma C^1 – norma, es un espacio normado completo (espacio de Banach). Nosotros usamos la C^1 – norma para definir la medida de la distancias entre cualesquiera dos funciones en $X^1(A)$.

Definición 16 Considere el sistema dinámico diferenciable (M, φ, R) y la vecindad $A \subset M$. Un campo $f \in X^1(A)$ se dice topológicamente (geométricamente) estructuralmente estable si existe un $\varepsilon > 0$ tal que para todo $g \in X^1(A)$ con

$$\|f - g\|_1 < \varepsilon$$

f y g son topológicamente (geoméricamente) equivalente sobre A .

Definición 17 Considerando los sistemas dependientes de un parámetro (familia uni-paramétrica), se dice que el sistema (A.4) exhibe una bifurcación topológica (geométrica) en $\mu = \mu_0$, si para una perturbación arbitrariamente pequeña no se obtiene un sistema topológicamente (geoméricamente) equivalente.

Por el Teorema de Harman Grossman para sistemas continuos la definición de bifurcación topológica anterior es equivalente en sistemas uniparamétricos a la siguiente.

Definición 18 Considere el sistema dinámico continuo descrito por el sistema EDO

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, \mu), \\ f &: R^n \times R \rightarrow R^n\end{aligned}\tag{1.23}$$

Una bifurcación topológica (geométrica) local ocurre en (x_0, μ_0) , si la matriz jacobiana $D_x f(x_0, \mu_0)$ tiene un valor propio con parte real cero cruzando el eje imaginario (tiene un valor propio con parte real cero cruzando el eje imaginario o un valor propio con parte imaginaria igual a cero cruzando el eje real). Si el valor propio es igual a cero, la bifurcación es de estados estacionario, pero si el valore propio es imaginario puro, esta es una bifurcación de Hopf.

Bifurcación de Hopf en sistemas que poseen un segmento continuo de equilibrios: A continuación se presenta algunos teoremas relacionados con la existencia de órbitas periódicas y la bifurcación de Hopf en sistemas que poseen un segmento continuo de equilibrios sin parámetros del tipo los cuales se encuentra en el artículo de Fiedler B. & Liebscher S. [36]. Sea el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) \in R^3 \\ x &= (y, z), z \in R^2.\end{aligned}$$

Se considera el caso complejo, donde la pérdida de estabilidad a lo largo de una línea de equilibrios ocurre por un par de valores propios complejos cruzando el eje imaginario. Se reduce a una variedad de centro tridimensional y se escoge las coordenadas

y, z sin pérdida de generalidad, tal que

$$\begin{aligned} x &= (y, z), z \in \mathbb{R}^2 \\ \dot{y} &= f^y(y, z) \\ \dot{z} &= f^z(y, z). \end{aligned}$$

Se asume la línea de equilibrios coincide con el eje y , y (y, z) es la descomposición del espacio de valores propios. En esta descomposición se asume que

$$\begin{aligned} 0 &= f(y, 0) \\ 0 &= \operatorname{Re} \lambda(0) \\ 0 &\neq \partial_y \operatorname{Re} \lambda(0) \end{aligned} \tag{1.24}$$

donde, se escribe la linealización en $(y, 0)$ en notación compleja como

$$\partial_{(y,z)} \begin{pmatrix} f^y \\ f^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda(y) \end{pmatrix}, \tag{1.25}$$

con valores propios $\lambda(y) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Denotando la laplaciana con respecto a la coordenadas $z \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ por Δ_z . Finalmente se requiere la condición de no degeneramiento

$$\Delta_z f^y(0, 0) \neq 0. \tag{1.26}$$

La siguiente definición clasifica las condiciones de no degeneramiento.

Definición 19 *Para una pérdida compleja de estabilidad a lo largo de la línea de equilibrios satisfaciendo (1.24)-(1.26), sea*

$$\delta := \operatorname{sig}((\partial_y \operatorname{Re} \lambda).(\Delta_z f^y)) = \pm 1 \text{ en } (y, z) = (0, 0) \tag{1.27}$$

Se llama pérdida de estabilidad hiperbólica, si $\delta = +1$, y elíptica, si $\delta = -1$.

Teorema 20 *Considere una línea de equilibrios en \mathbb{R}^3 con pérdida compleja de estabilidad de acuerdo a las condiciones (1.24)-(1.26) arriba. Entonces la forma normal truncada en orden finito y expresada en coordenadas polares $z = re^{i\varphi}$, llega a ser equivariante con respecto a las rotaciones en φ .*

Teorema 21 *Bajo las condiciones del Teorema 20, pero ahora se considera el vector de campo $\dot{x} = f(x) \in \mathbb{R}^3$ cerca al origen $x = 0$, de clase diferenciable al menos C^5 y con términos de alto orden no necesariamente in forma normal. Entonces existe un $\varepsilon > 0$, tal que cualquier solución $x(t)$ la cual permanece en un entorno ε de $x = 0$, para todo tiempo positivo o negativo (posiblemente ambos) converge a un equilibrio singular sobre el eje y .*

En el caso hiperbólico, todas las trayectorias de no-equilibrio alcanzan el entorno U en dirección del tiempo positivo o negativo (posiblemente ambos). El conjunto estable e inestable de $x = 0$, respectivamente, forma un cono con el extremo de la región tangente a la imagen rotada de la correspondiente forma normal 1.1. Estos conos separan regiones con diferente comportamiento de convergencia.

En el caso elíptico, todas las trayectorias de no-equilibrio empezando suficientemente cerca a $x = 0$, son heteroclínicas entre equilibrios $(y_{\pm}, 0)$ e intersectan en un ángulo con límite exponencialmente pequeño en términos de $|y_{\pm}|$, proporcionando que f es real y analítica, véase Figura 1.1.

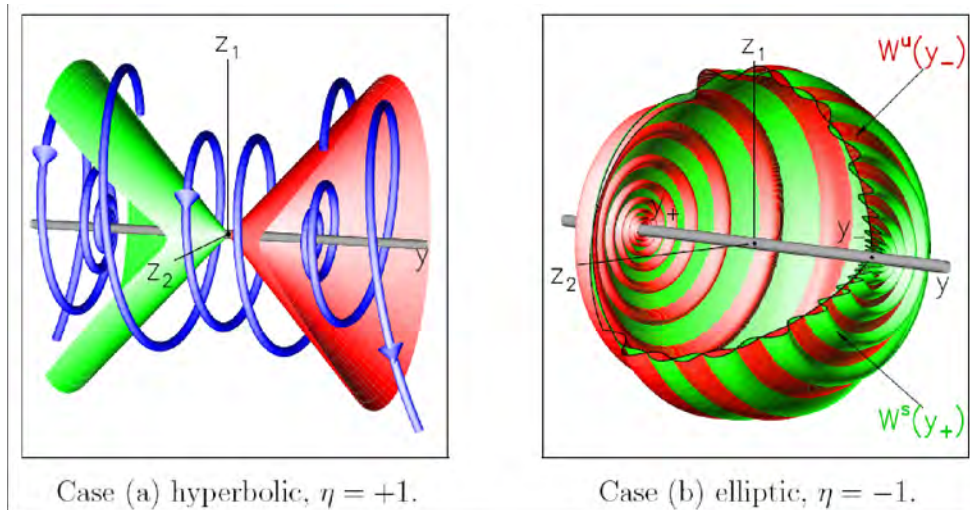


Figura 1.1: Dinámica cerca a una bifurcación de Hopf desde líneas de equilibrio: a) Hiperbólica, $\delta = +1$; b) Elíptica, $\delta = -1$.

El teorema anterior no aplica en algunos casos de la teoría de perturbación geométrica, y reversibilidad in dimensión impar.

1.2 Estabilidad, bifurcación y equivalencia topológica en sistemas no suaves

A continuación se dan las definiciones de equivalencia topológica (geométrica) de sistema suave por tramos a tiempo continuo.

Definición 22 *Un sistema suave por tramos (SST) a tiempo continuo es un conjunto finito de ecuaciones diferenciales en R^n descrito por:*

$$\dot{x} = f_i(x, \mu) \text{ con } x \in M_i \subset R^n, \mu \in R^p, \quad (1.28)$$

donde M_i ($i = 1, 2, \dots, m$) son regiones abiertas que no se traslapan separadas por una variedad (frontera) $\Sigma = \bigcup_{i \neq j} \Sigma_{ij}$, donde $\Sigma_{ij} = (\bar{M}_i \cap \bar{M}_j)$ es una variedad $(n - 1)$ -dimensional, μ es el vector de parámetros y las funciones $f_i(x, \mu)$ y sus fronteras Σ_{ij} son suaves con respecto tanto al estados x como al parámetro μ . La unión de Σ y todos los M_i conforman todo el espacio de estados del sistema y el flujo $\Phi_i(x, t, \mu)$ generado dentro de cualquier abierto M_i es por lo tanto suave.

A Σ también se le suele llamar *conjunto de discontinuidad, frontera de discontinuidad, variedad de discontinuidad* o algunas veces como *variedad de conmutación*. Note que la Definición 22, no se especifica una regla de evolución en la *frontera de discontinuidad* Σ . En general diferentes sistemas (SST) a tiempo continuo pueden clasificarse dependiendo de lo que suceda en la frontera Σ .

Sistemas dinámicos (SST) pueden exhibir la mayoría de las bifurcaciones exhibidas por los sistemas suaves tales como silla-nodo, fold, doblamiento de período, tangencia homoclínicas, etc. Adicionalmente a éstas, ellos pueden también exhibir algunos fenómenos de bifurcaciones nuevas que son únicas en los sistemas suave a tramos o

bifurcaciones inducidas por la discontinuidad (BID), véase diBernardo et ál. [19]. En la literatura rusa estas nuevas transiciones fueron llamadas como C-bifurcaciones (la letra C corresponde a la primera letra de la palabra rusa "Coser") para distinguirlas de los fenómenos también observados en sistemas suaves Feigin [31, 33]. Una BID en este sentido es cualquier cambio cualitativo del espacio de fase (transición) observada en el sistema bajo investigación el cual puede ser explicada en términos de interacciones entre sus conjuntos invariantes y las variedades de discontinuidad en el espacio de fase. Así BID incluye interacciones de puntos fijos, equilibrios y ciclos límites con la frontera de discontinuidad del sistema. En lo que sigue, el término bifurcación se usa significando transición no suave. Adoptamos una nueva definición de equivalencia topológica (geométrica) para el caso de sistema suave a tramos, di Bernardo [20].

Definición 23 *Equivalencia topológica (geométrica) en sistema suave por tramos: Sea (M, Φ, G) o $(\tilde{M}, \tilde{\Phi}, G)$ dos sistemas suave por tramos de los tipos definidos en 22, generados por un número contable de flujos $\Phi_i(x, t, \mu)$ o $\tilde{\Phi}_i(x, t, \mu)$ en alguna región acotada del espacio de fase M_i o \tilde{M}_i respectivamente, $i = 1, \dots, N$. Dos sistemas SST son llamados equivalentes topológicamente (geoméricamente) suave por tramos si:*

1. *Ellos son topológicamente (geoméricamente) equivalentes, esto es hay un homeomorfismo h que mapea las órbitas del primer sistema en las órbitas del segundo, preservando la dirección del tiempo, así que $\Phi_i(x, t, \mu) = h^{-1}(\tilde{\Phi}_i(h(x), s, \mu))$, donde el mapeo $t \mapsto s(t)$ es continuo e invertible (preservando la geometría de las órbitas (nodos o focos), si los puntos son de tipo hiperbólico)*

2. *$h : M \mapsto \tilde{M}$ es un homeomorfismo tal que:*

$$M_i \mapsto \tilde{M}_i; \Sigma_{ij} \mapsto \tilde{\Sigma}_{ij}; \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

3. *Además h puede ser escogido tal que para cada j , h restringido a R^n/\bar{M}_j y h restringido a $R^n/int(M_j)$ es también un homeomorfismo, donde $int(M_j)$ es el interior de M_j .*

Note que en la tercera parte de la definición anterior, que si nosotros suprimimos una región del espacio de fase M_j , entonces los dos sistemas tiene que ser todavía topológicamente equivalentes. La definición anterior nos permite dar la definición topológica de una bifurcación inducida por la frontera de discontinuidad en sistemas suave por tramos.

Definición 24 *Considerando los sistemas dependientes de un parámetro (familia uniparamétrica), se dice que el sistema suave por tramos (mapeo suave por tramos) exhibe una bifurcación en $\mu = \mu_0$ si para una perturbación arbitrariamente pequeña no se obtiene un sistema topológicamente (geoméricamente) equivalente-suave por tramos.*

Bifurcación de Hopf-no suave en sistemas de Filippov continuos planares: A continuación se presenta el Teorema de bifurcación de Hopf-no suave en sistemas de Filippov continuos planares en el origen, el cual es mostrado en Zou & Küpper [99].

Teorema 25 (Zou- Küpper [99]). *Considere el sistema SSTC planar siguiente*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, \mu) = \begin{cases} f_1(x, \mu), & \text{si } x_1 \geq 0 \\ f_2(x, \mu), & \text{si } x_1 < 0 \end{cases}, & (1.29) \\ (x_1, x_2) &= x \in M = M_1 \cup M_2 \cup \Sigma_{12}; M_1 = \{x \in D : x_1 > 0\} \cap D; \\ M_2 &= \{x \in M : x_1 < 0\} \cap D, \Sigma_{12} = \{x \in M : x_1 = 0\} \cap D, \end{aligned}$$

definido en una región $D \subset \mathbb{R}^2$ que contiene el origen el cual es dividido por la superficie suave $\Sigma = \{x \in D : x_1 = 0\}$, donde $x \in \mathbb{R}^2$, $\mu \in (-\lambda, \lambda) = \Lambda$, y si se satisface

(H1) $f_1, f_2 : M \times \Lambda \mapsto \mathbb{R}^2$ son de clase C^k , $k \geq 2$ para $(x, \mu) \in M \times \Lambda$.

(H2) $f_1, f_2(0, 0, \mu) \equiv 0$ para todo $\mu \in \Lambda$.

(H3) Para $|\mu|$ pequeño la matriz $f_1'(0, \mu) = \begin{pmatrix} a_{11}^1(\mu) & a_{12}^1(\mu) \\ a_{21}^1(\mu) & a_{22}^1(\mu) \end{pmatrix}$ y

$f'_2(0, \mu) = \begin{pmatrix} a_{11}^2(\mu) & a_{12}^2(\mu) \\ a_{21}^2(\mu) & a_{22}^2(\mu) \end{pmatrix}$ tienen un par de valores propios complejos conjugados $\alpha_1(\mu) \pm ib_1(\mu)$, $\alpha_2(\mu) \pm ib_2(\mu)$ respectivamente, y existe $b^* > 0$, tal que $b_{1,2}(\mu) > b^*$ para $\mu \in \Lambda$

$$(H4) \quad a_{12}^1(0)a_{12}^2(0) > 0,$$

$$(H5) \quad \frac{\alpha_1(0)}{b_1(0)} + \frac{\alpha_1(0)}{b_1(0)} = 0, \quad \partial_\mu \left(\frac{\alpha_1(\mu)}{b_1(\mu)} + \frac{\alpha_1(\mu)}{b_1(\mu)} \right) \Big|_{\mu=0} \neq 0.$$

Entonces se tiene que

i) Existe un $\delta > 0$, y una función $\mu \in C^0((-\delta, \delta), \mathbb{R})$ tal que para $\varepsilon \in (-\delta, \delta)$ el sistema (1.29) tiene una solución periódica $p(t, \varepsilon)$ con período $T(\varepsilon, \mu(\varepsilon)) > 0$, también $T \in C^0$, $\mu(0) = 0$, $T(0, 0) = \frac{\pi}{b_1(0)} + \frac{\pi}{b_2(0)}$, $p(t, 0) = 0$.

(ii) El origen $(x, \mu) = (0, 0)$ del espacio $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ tiene una vecindad $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ que no contiene órbitas periódicas del sistema (1.29) de las familias $p(t, \varepsilon)$, $\varepsilon \in (-\delta, \delta)$.

Observación: En el caso de sistemas suaves, la dirección de la bifurcación es determinada por la forma de la función $\mu = \mu(\varepsilon)$, la cual es usualmente dadas por las derivadas de orden alto, véase Negrini-Salvadori [76]. En el caso de sistemas no suaves, este enfoque es realizable ya que la función de bifurcación $\mu(\varepsilon)$ es sólo continua. Sin embargo en ciertos casos, resultados sobre la estabilidad de un lado para la órbita periódica bifurcando puede ser dada. Usando resultados de Lasota A. and Strauss A [66], se puede mostrar que la solución estacionaria $(0, 0)$ del sistema (1.29) es globalmente asintóticamente estable si $\left| e^{\pi(\frac{\alpha_1(\mu)}{b_1(\mu)} + \frac{\alpha_1(\mu)}{b_1(\mu)})} \right| < 1$, e inestable si $\left| e^{\pi(\frac{\alpha_1(\mu)}{b_1(\mu)} + \frac{\alpha_1(\mu)}{b_1(\mu)})} \right| > 1$.

1.2.1 Estabilidad asintótica en sistemas suave por tramos continuos

El problema de determinar condiciones necesarias y suficientes que garanticen la estabilidad asintótica de conjuntos invariantes de sistemas (SSTC) es una tarea difícil,

véase Housner et ál. [46] para una revisión. Aún el problema de evaluación de la estabilidad asintótica de equilibrios que yacen sobre la frontera de discontinuidad es un problema abierto en general Blondel et ál. [5]. Motivo por el cual se considera el caso especial de sistemas (SSTC) planares, los cuales son de interés para el desarrollo posterior de este trabajo. Considere

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \begin{cases} A_1 x, & \text{si } c^T x \leq 0 \\ A_2 x, & \text{si } c^T x > 0 \end{cases}, \quad (1.30)$$

donde $A_{1,2} \in R^{n \times n}$ y $c \in R^n$. Se asume que todo el campo vectorial es continuo a través del hiperplano $\{x \in R^n : c^T x = 0\}$, pero el grado de discontinuidad es uniforme. Esto significa que

$$A_1 - A_2 = cc^T,$$

para algún $c \in R^n$. Para el caso planar, es posible una teoría completa y puede mostrarse que el punto $x = 0$, del sistema (1.30) es asintóticamente estable si el sistema obedece a ciertas condiciones de observabilidad de la teoría de control las cuales se resumen en el Teorema 27, (véase Freire E., Ponce E. & Torres F. [38]; Camlibel [8], Olivar & Angulo [77]; Carmona V., Freire E., Ponce E. & Torres F. [11]).

Definición 26 Sea C una matriz de orden $1 \times n$ y A una matriz de orden n . Si el rango de la matriz

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix},$$

es n , entonces al par (C, A) se dice que es observable.

Teorema 27 Considere el sistema (1.30) con $n = 2$. Sean los pares (c^T, A_1) y (c^T, A_2) observables. Entonces se tiene los siguientes casos:

- Si el origen es un foco en cada subsistema $(c^T, A_i; i = 1, 2)$ del sistema (1.30) (caso foco-foco), entonces el origen es asintóticamente estable si y únicamente si:

a) si A_1 y A_2 no tienen valores propios no-negativos, y

b) si A_1 y A_2 tienen valores propios complejos conjugados $\alpha_1(\mu) \pm ib_1(\mu), \alpha_2(\mu) \pm ib_2(\mu)$ respectivamente, entonces $\frac{\alpha_1(0)}{b_1(0)} + \frac{\alpha_2(0)}{b_2(0)} < 0$.

- Si el origen es un foco y un nodo respectivamente de los subsistema $(c^T, A_i; i = 1, 2)$ del sistema (1.30) (caso foco-nodo), entonces:

a) Si la traza en la zona de nodos es negativa, el origen es un atractor global y no existen órbitas periódicas.

b) Si la traza en la zona de nodos es positiva, el origen es un repelente global y no existen órbitas periódicas.

En dimensiones más altas, el problema llega a ser considerablemente más difícil. Puede darse el caso en que los sistemas $\dot{x} = A_1x$, y $\dot{x} = A_2x$ sean asintóticamente estables, pero el sistema (1.30) sea inestable.

Ejemplo: Considere el sistema (1.30) con

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1.28 & 0 & -1 \\ -0.624 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -3.2 & -1 & 0 \\ 25.61 & 0 & -1 \\ -75.03 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

los valores propios de A_1 son $-0.2 \pm i$ y -0.6 , y de A_2 son $-0.1 \pm 0.5i$ y $-0.6, y - 3$. Por lo cual implica la estabilidad en el origen de cada sistema lineal individualmente. Sin embargo el sistema lineal suave por tramos tiene trayectorias que tiende a ∞ . Usando la teoría de conos invariantes, Carmona & Ponce et ál. [10] han establecido condiciones suficientes para la estabilidad asintótica en dimension tres para el sistema (1.30).

Teorema 28 Considere el sistema (1.30) con $n = 3$. Sean los pares (c^T, A_1) y (c^T, A_2) observables. Sea A_1, A_2 y c

$$A_1 = \begin{pmatrix} t_1 & -1 & 0 \\ m_1 & 0 & -1 \\ d_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} t_2 & -1 & 0 \\ m_2 & 0 & -1 \\ d_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

las formas canónicas. Suponga que los valores propios de las matrices A_1, A_2 son $\lambda_1 \in \mathbb{R}, \alpha_1(0) \pm ib_1(0)$, y $\lambda_2 \in \mathbb{R}, \alpha_2(0) \pm ib_2(0)$, donde $b_1(0), b_2(0) > 0$, respectivamente. También se asume que

$$(\alpha_1(0) - \lambda_1)(\alpha_2(0) - \lambda_2) < 0, (t_2 - t_1)(\alpha_2(0) - \lambda_2) \leq 0,$$

entonces, el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable si, y únicamente si λ_1, λ_2 son ambos negativos.

En sistemas n-dimensionales es posible caracterizar con algún grado de generalidad la existencia de otros atractores ramificando afuera de un punto de equilibrio de frontera bajo ciertas circunstancias, véase de Bernardo M., Nordmark A., Olivar. G. [19].

Teorema 29 *Si (x^*, μ^*) es un equilibrio de frontera que es asintóticamente estable en un sistema (SSTC), entonces para todo μ cercano a μ^* , existe al menos un atractor cercano a x^* . La amplitud de tal atractor escala linealmente con μ para el orden principal.*

Observación: Como corolario se tiene que si un equilibrio asintóticamente estable desaparece sobre una o ambos lados del punto de bifurcación, algún otro atractor tiene que aparecer.

El hecho de que este conjunto atractivo escale localmente y linealmente con μ viene del hecho que la linealización $f_{1,x}$ del sistema no lineal es no degenerada y por lo tanto localmente el sistema (SSTC) puede ser aproximado por su linealización. Por lo tanto cualquier atractor del sistema linealizado tiene que escalar linealmente con μ .

Capítulo 2

Construcción del modelo

2.1 Consideraciones generales del modelo

En el presente trabajo de investigación se construye una clase nueva y original de modelo del tipo no suave (continuo por tramos) a partir de la composición de dos subsistemas suaves los cuales satisfacen las condiciones de Butler-Farkas y se determinan condiciones de compatibilidad entre los subsistemas para garantizar la existencia de la bifurcación de zip no suave. También se construye un modelo original concreto el cual satisface las condiciones de Butler-Farkas en cada subsistema, el cual se utiliza más adelante para ilustrar los distintos comportamientos de la dinámica de la bifurcación de zip no suave en dinámica de poblaciones. Éste parte de la hipótesis, de que el ecosistema consiste de tres especies; dos predadores y una presa que se regenera, el cual es modelado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales. Se nota el punto encima de la letra como diferenciación con respecto al tiempo.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{s} \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} f_1((s, x_1, x_2), (k, a_1, a_2)), & (s, x_1, x_2) \in D_1 \text{ y } (k, a_1, a_2) \in \tilde{D} \\ f_2((s, x_1, x_2), (k, a_1, a_2)), & (s, x_1, x_2) \in D_2 \text{ y } (k, a_1, a_2) \in \tilde{D} \end{cases}, \quad (2.1)$$

donde $f_j = g_j|_{D_j}$; $j = 1, 2$, es la restricción del campo suave g_j al dominio $D_j \times \tilde{D}$.

El campo suave g_j y su sistema asociado vienen dados por

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{s} \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = g_j((s, x_1, x_2), (k, a_1, a_2)); (s, x_1, x_2) \in D \text{ y } (k, a_1, a_2) \in \tilde{D}, \quad (2.2)$$

$$g_j((s, x_1, x_2), (k, a_1, a_2)) = \begin{pmatrix} \gamma s g(s, k) - x_1 p_j(s, a_1) - x_2 p_j(s, a_2) \\ x_1 p_j(s, a_1) - d_1 x_1 \\ x_2 p_j(s, a_2) - d_2 x_2 \end{pmatrix}; j = 1, 2, \quad (2.3)$$

con

$$D_1 = \{(s, x_1, x_2) \in R^3 : 0 \leq s \leq \lambda, 0 \leq x_1, x_2 \leq \infty\}, \quad (2.4)$$

$$D_2 = \{(s, x_1, x_2) \in R^3 : \lambda \leq s \leq \infty, 0 \leq x_1, x_2 \leq \infty\},$$

$$\tilde{D} = \{(k, a_1, a_2) \in R^3 : 0 < k, a_1, a_2 < \infty\},$$

$$\pi = D_1 \cap D_2,$$

$$D = D_1 \cup D_2,$$

$$p_2(s, a) = p_3(s, a) - p_3(\lambda, a) + p_1(\lambda, a), \quad s \geq \lambda, \quad (2.5)$$

$$p(s, a) = \begin{cases} p_1(s, a) & s \leq \lambda \\ p_2(s, a) & s \geq \lambda \end{cases},$$

$$d_j = p(\lambda, a_j). \quad (2.6)$$

Se considera el sistema (2.1) definido en el espacio de estados D y el espacio de parámetro \tilde{D} ; compuesto por la unión de dos subsistemas $\dot{x} = f_j((s, x_1, x_2), (k, a_1, a_2)); j = 1, 2$, los cuales se obtienen por la restricción de los campos suaves g_j del dominio $D \times \tilde{D}$ al dominio $D_j \times \tilde{D}$ en (2.3); y separados por un plano de discontinuidad π que es la superficie de conmutación de los flujos de cada subsistema φ_j ; $s(t)$ representa la población de especie de la presa; $x_1(t)$, $x_2(t)$ describen las poblaciones de las especies predatoras que compiten por la presa $s(t)$; $p(s, a_i)$ representa la *tasa de nacimiento* o *respuesta funcional* del predador i , continua por tramos formada por la unión de las respuestas funcionales $p_1(s, a)$ y $p_3(s, a)$ las cuales satisfacen las

condiciones denominadas de Butler-Farkas y la condición de continuidad (2.5) en todo el espacio de estados D ; $p_j(s, a_i)$ representa la *tasa de nacimiento* o *respuesta funcional* del predador i que actúa en el subsistema j . La respuesta funcional $p_2(s, a)$ satisfacen las condiciones denominadas de Butler-Farkas en D_2 , y $g(s, k)$ significa la *resistencia ambiental* del medio al crecimiento de la presa. Las constantes $\gamma, d_i > 0$, son respectivamente la *tasa de crecimiento maximal* de la presa, *tasa de muerte* de la especie predadora i , y por último, $a_i > 0, (i = 1, 2)$ representan los *parámetros de escala* en la *respuesta funcional* del predador i .

Observación 30 Si $p_1 = p_2$, entonces en (2.3) se tiene que $g_1 = g_2$, en todo punto del dominio $(s, x_1, x_2) \in D$ y $(k, a_1, a_2) \in \tilde{D}$, en cuyo caso el sistema (2.1) define un sistema suave, por lo cual se hace alusión a él, como el sistema suave (2.1) generado por el campo g_j o asociado al campo f_j ; pero si $p_1 \neq p_2$, y $\partial_s p_1(\lambda, a_i) \neq \partial_s p_2(\lambda, a_i)$, entonces la jacobiana del sistema (2.1) es discontinua y el sistema (2.1) define un sistema no suave del tipo **continuo suave por tramos** (véase Apéndice A.1.3), por consiguiente se hace alusión a él, como el sistema no suave (2.1) generado por los campos f_j . También se hace referencia a los subsistemas, tanto en sistemas suaves como no suaves generados por los campos f_j , en cuyo caso se sobreentiende que el campo f_j a que se hace alusión es desde luego la restricción del campo g_j definido en (2.3) sobre los espacios de estados D_j y de parámetros \tilde{D} . En el caso en que se hace alusión al sistema (2.1) sin mencionar si es del tipo suave o no suave, significa que la propiedad en consideración es válida tanto en sistemas suaves como no suaves.

El sistema (2.1) tiene los siguientes puntos de equilibrio: $Q_1(0, 0, 0)$, $Q_2(k, 0, 0)$ y los puntos del segmento de línea recta L_k :

$$L_k = \{(s, x_1, x_2) : p(\lambda, a_1)x_1 + p(\lambda, a_2)x_2 = \gamma\lambda g(\lambda, k), \\ \lambda, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}. \quad (2.7)$$

Si el sistema (2.1) es suave las variedades invariantes locales de cada subsistema que intersectan transversalmente el segmento de equilibrios L_k coinciden sobre la variedad de discontinuidad π ; sin embargo si el sistema (2.1) es no suave podría por

efecto de la conmutación del sistema no coincidir sobre el plano π , lo cual motiva la siguiente definición.

Definición 31 Sea $x_0 \in L_k$ y $V_{x_0,j}$ la variedad invariante local estable (inestable) del subsistema generado por el campo $f_j, j = 1, 2$, en x_0 . Decimos que el sistema no suave (2.1) preserva sus variedades invariantes locales $V_{x_0,1}$ y $V_{x_0,2}$ en $x_0 \in L_k$ si $V_{x_0,1} \cap \pi = V_{x_0,2} \cap \pi$; en caso contrario decimos que no preserva o que destruye sus variedades invariantes locales en x_0 en la conmutación del sistema.

Se presume además en el modelo que la presencia del predador disminuye la tasa de crecimiento de la presa, exactamente en la misma cantidad que la tasa de nacimiento del respectivo predador. Con el fin de considerar $s(t), x_1(t), x_2(t) \geq 0$ como funciones continuas, se supone que las poblaciones son lo suficientemente grandes. Con frecuencia es más apropiado medir $s(t), x_1(t), x_2(t)$ en cantidades de masa. Hay dos razones para ello; primero, la variación de la biomasa de una especie cambia de forma casi continua de tal forma que se le puede modelar como un continuo. Segundo, para un depredador no es importante el número de individuos de una especie que se come, sino cuánto se come.

Se asume que la rata de crecimiento per capita de la presa en ausencia del predador es $\gamma g(s, k)$, donde γ es una constante positiva; de hecho γ es la rata de *crecimiento-maximal* de la presa ya que, en el modelo propuesto, la resistencia ambiental g decrece a medida que se incrementa la presa, siendo g máxima en ausencia de la presa, es decir $\gamma g(0, k) = \gamma$ y $\partial_s g(s, k) < 0, s \geq 0, k > 0$.

La capacidad del medio de soportar el desarrollo de la presa se supone limitada y viene expresada por el parámetro $k > 0$. Resulta lógico suponer, en el caso de la presa, que si el número de individuos de la presa es mayor que la capacidad del medio $s > k$, la tasa de crecimiento de la presa per capita es negativa es decir, $\gamma g(s, k) < 0$.

En el modelo, al aumentar la población de predadores disminuye la tasa de cambio de la presa, es decir $\partial_{x_1}(\dot{s})(s, x_1, x_2) < 0, \partial_{x_2}(\dot{s})(s, x_1, x_2) < 0$. Tal supuesto, obliga a imponer la condición de que las tasas de crecimiento de los predadores sean positivas,

es decir $p(s, a_1) > 0$, y $p(s, a_2) > 0$, para $s > 0$, $a_1 > 0$ y $a_2 > 0$. Tal conclusión se sigue, ya que en el sistema (2.1), $\partial_{x_i}(\dot{s})(s, x_1, x_2) = -p(s, a_i) < 0$, por lo tanto, $p(s, a_i) > 0$, $i = 1, 2$.

En el modelo propuesto el efecto de decrecimiento de la tasa de crecimiento de la presa, como consecuencia del aumento de ésta, se ve disminuido con el aumento de la capacidad de soporte del medio; expresando aquello en términos simbólicos, resulta la condición $\partial_{sk}g(s, k) > 0$ para $s \geq 0$, $k > 0$.

Otra restricción que se impone a la tasa de crecimiento de la especie predatora en el modelo es que, si la capacidad del medio es ilimitada respecto al desarrollo de la presa, la tasa de crecimiento no puede superar el potencial biológico de la especie, es decir, $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma g(s, k) = \gamma$ para $s \geq 0$.

En el sistema (2.1) está implícito el hecho de que las variaciones en la población de especies \dot{s} , \dot{x}_1 , \dot{x}_2 sólo dependen de las poblaciones de las tres especies en consideración en el tiempo t y no de otros factores de tipo climático (variaciones estacionales), o efectos de retrasosq, o a factores externos como fluctuaciones en el abastecimiento de comida de la presa, como nutrientes, luz, por ejemplo.

Una condición natural resulta de las hipótesis anteriores: si cualquiera de las poblaciones es lo suficientemente grande su tasa de cambio será negativa (se cuenta con una cantidad limitada de comida, nutrientes, luz, etc. para las presas y una cantidad finita de terreno, techo para los predadores), es decir \dot{s} , \dot{x}_1 , $\dot{x}_2 < 0$ para s , x_1 , x_2 suficientemente grandes. Es claro que la condición $\dot{s} < 0$, se presenta para el sistema en consideración, ya que $g(s, k) < 0$ para $s > k$, y $p(s, a_1) > 0$, $p(s, a_2) > 0$, para $s > 0$, $k > 0$, por lo tanto $\dot{s} = \gamma s g(s, k) - x_1 p(s, a_1) - x_2 p(s, a_1) < 0$, para s suficientemente grande y $x_i > 0$, $i = 1, 2$. En forma semejante se tiene que \dot{x}_1 , $\dot{x}_2 < 0$, ya que si x_i es lo bastante grande, s decrecerá suficientemente para que se dé la condición $p(s, a_i) < d_i$ por tanto: $\dot{x}_i = x_i p(s, a_i) - d_i x_i = x_i (p(s, a_i) - d_i) < 0$, $i = 1, 2$.

Si la especie de la presa está ausente, entonces no puede haber variación en dicha población; en forma simbólica se tiene la condición: $\dot{s}(0, x_1(t), x_2(t)) = 0$. Esta condición a su vez implica, que la ratas de crecimiento de las especies predatoras en el

modelo deben verificar que $p(0, a_i) = 0$, para, $i = 1, 2$, $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$, ya que:

$$\begin{aligned}\dot{s}(0, x_1(t), x_2(t)) &= \gamma 0g(0, k) - x_1p(0, a_1) - x_2p(0, a_2), \\ &= -x_1p(0, a_1) - x_2p(0, a_2) = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$p(0, a_i) = 0, \text{ para, } i = 1, 2. \forall s, x_1, x_2 \geq 0.$$

Al aumentar la población de la presa, aumenta la población de los predadores (más comida lleva a un crecimiento mayor); por lo tanto $\partial_s(\dot{x}_i) > 0$; lo que obliga en el modelo a que $\partial_s p_j(s, a_i) > 0$, para $i, j = 1, 2$, por la siguiente relación $\partial_s(\dot{x}_i) = x_i \partial_s p_j(s, a_i) > 0$, lo que a su vez implica claramente que $\partial_s p_j(s, a_i) > 0$, para $i, j = 1, 2$. Si no hay predadores, unas cuantas presas se pueden incrementar ya que si, $x_1 = 0, x_2 = 0$, entonces:

$$\begin{aligned}\dot{s} &= \gamma s g(s, k) - x_1 p(s, a_1) - x_2 p(s, a_2), \\ &= \gamma s g(s, k) > 0,\end{aligned}$$

Así mismo, si se impone la condición de que la ratas de nacimiento per capita de las especies predatoras es cero en ausencia de la presa $p(0, a_i) = 0$, la población de predadores disminuye ya que:

$$\dot{x}_i = x_i p(0, a_i) - d_i x_i = -d_i x_i < 0, \text{ para } p(0, a_i) = 0, s = 0.$$

2.1.1 Condiciones de Butler-Farkas

Se resumen las condiciones generales para las funciones g y p en el modelo no suave (2.1):

Como la función g satisface las condiciones de Butler-Farkas en sistemas suaves se tiene que

$$g \in C^2((0, \infty) \times (0, \infty), R), g \in C^0([0, \infty) \times (0, \infty), R),$$

$$g(0, k) = 1, \quad \partial_s g(s, k) < 0 < \partial_{sk}^2 g(s, k), \quad g_k(s, k) > 0; \quad s \geq 0, k > 0, \quad (2.8)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \partial_s g(s, k) = 0, \quad s \geq 0. \quad (2.9)$$

A la función $\partial_s g$ se le impone condiciones de uniformidad en $[\delta, S_0]$ para cualquier δ , $0 < \delta < S_0$; la integral posiblemente impropia $\int_0^{S_0} \partial_s g(s, k) ds$ debe ser uniformemente convergente en $[k_0, \infty)$, para cualquier valor $k_0 > 0$. Por último se impone la condición siguiente sobre g :

$$(k - s)g(s, k) > 0, \quad s \geq 0, \quad k > 0, \quad s \neq k. \quad (2.10)$$

Las funciones que representan a tramos la respuesta funcional del predador i , $p_j(s, a_i)$ con a_j constante, ($i = 1, 2$; $j = 1, 3$) satisfacen las siguientes condiciones:

$$p_j \in C^1((0, \infty) \times (0, \infty), R), \quad p_j \in C^0([0, \infty) \times (0, \infty), R),$$

$$p_j(0, a) \geq 0, \quad \partial_s p_j(s, a) > 0, \quad s > 0, \quad a > 0, \quad (2.11)$$

$$\partial_s p_j(s, a) < \frac{p_j(s, a)}{s}, \quad s > 0, \quad a > 0, \quad (2.12)$$

$$\partial_a p_j(s, a) < 0, \quad s > 0, \quad a > 0, \quad (2.13)$$

$$p_1(\lambda, a) > p_3(\lambda, a), \quad (2.14)$$

$$\partial_a p_3(s, a) - \partial_a p_3(\lambda, a) + \partial_a p_1(\lambda, a) < 0, \quad s > \lambda \quad (2.15a)$$

Las condiciones de (2.8) a (2.13) son condiciones apropiadas para el modelo no-suave. Estas condiciones coinciden aproximadamente con las condiciones realizadas por Butler [7] y Farkas [27] en cada subsistema del sistema no suave (2.1). La condición (2.8) significa que la tasa de crecimiento específica máxima de la presa es alcanzada en $s = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ y es $\gamma > 0$; la tasa de crecimiento decrece si la cantidad de presa se incrementa, y la tasa de crecimiento de $\partial_s g(s, k)$ se incrementa con la capacidad de carga k . La relación (2.9) establece que para altos valores de k , el cambio en la cantidad de presa tiene un efecto despreciable en la tasa de crecimiento. La desigualdad (2.10) significa que (en ausencia del predador) la tasa de crecimiento de la presa es positiva si s está abajo de la capacidad de carga k , y es negativa si s está arriba de ésta. Es claro que la condición (2.8) y (2.9) implica:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g(s, k) = 1, \quad s \geq 0. \quad (2.16)$$

La condición (2.11) significa que la rata de nacimiento per capita p_j de los predadores (también llamada la rata de predación o respuesta funcional) es cero en ausencia de la presa y es una función que se incrementa con la cantidad de presa. La condición (2.12) es una condición de *concauidad débil*, algunas veces llamada condición Krasonseleskij. Si p es una función estrictamente cóncava de s (para cualquier $a > 0$), entonces (2.12) se tiene, salvo puntos aislados donde se tiene un signo de igualdad. La desigualdad (2.13) establece que la rata de depredación decrece con el parámetro a (entre más alto sea el parámetro a , más alimento es necesario para mantener la misma tasa de nacimiento de la especie predadora). En el modelo original de Hsu y et ál. [47], a es la *constante media de saturación*.

Adicionalmente se imponen las condiciones (2.14) y (2.15a) a las respuestas funcionales p_j de los subsistemas para que la respuesta funcional continua por tramos p del sistema (2.1) se satisfaga las condiciones de Butler-Farkas con

$$p \in C^1[((0, \lambda) \times (0, \infty), R) \cup ((\lambda, \infty) \times (0, \infty), R)], \quad p \in C^0[(0, \infty) \times (0, \infty), R],$$

$$p(0, a) = 0, \quad \partial_s p(s, a) > 0, \quad s > 0, s \neq \lambda, \quad a > 0, \quad (2.17)$$

$$\partial_s p(s, a) < \frac{p(s, a)}{s}, \quad s > 0, s \neq \lambda \quad a > 0, \quad (2.18)$$

$$\partial_a p(s, a) < 0, \quad s > 0, s \neq \lambda \quad a > 0. \quad (2.19)$$

En el caso en que p es una función acotada para un valor a dado, se tiene:

$$\bar{m}_i = \sup_{s>0} p(s, a_i),$$

es la *rata maximal de nacimiento* del predador i , claramente:

$$\sup_{s>0} p(s, a_i) = \begin{cases} \bar{m}_i & \text{si } p \text{ es acotada} \\ \infty & \text{si } p \text{ es no acotada.} \end{cases} \quad (2.20)$$

Para el caso en que los parámetros a_1 y a_2 son distintos, sin pérdida de generalidad se supone:

$$a_1 > a_2 > 0, \quad (2.21)$$

$$p(s, a_1) < p(s, a_2) \quad \text{para } s > 0.$$

En correspondencia con esta última condición, a un nivel de presa dado, la rata de nacimiento del predador dos es más alto que la del predador uno, en otras palabras el predador uno necesita más alimento para llegar a la misma tasa de nacimiento que el depredador dos. Ahora bien, si d_1 es más grande que d_2 , la condición (2.21) implica que:

$$p(s, a_1) - d_1 < p(s, a_2) - d_2,$$

es decir, la rata de crecimiento del predador dos es más alta que la del predador uno. Se puede mostrar en este caso que el predador dos saca de competencia al predador uno. Se supone por lo tanto que:

$$d_1 < d_2. \tag{2.22}$$

Tal como consecuencia, de (2.21) ahora esta condición no implica necesariamente que la tasa de crecimiento neta del predador dos excede la del predador uno. Si en la respuesta funcional del predador i , para un valor del parámetro de escala a_i se satisface la desigualdad $\bar{m}_i \geq d_i$, por la continuidad de p , existirá un nivel de presa $s = \lambda_i$, en la cual se tiene la siguiente relación:

$$p(\lambda_i, a_i) = d_i. \tag{2.23}$$

Al parámetro λ_i le llamaremos parámetro umbral del predador i ; este parámetro puede interpretarse como la cantidad de presa necesaria para alcanzar una tasa de nacimiento intrínseca, igual a la tasa de muerte natural del depredador i . En general no se tiene que $\lambda_1 = \lambda_2$, pero para una clase importante de modelos se puede suponer que $\lambda_1 = \lambda_2$. Dados d_1 y d_2 , existen λ, a_1, a_2 , tal que $p(\lambda, a_i) = d_i$ para los modelos que satisfacen la siguiente condición:

$$m_i \geq d_i, \tag{2.24}$$

$$\inf_{a_1 > 0} p(\lambda, a_1) \leq d_1, \quad p(\lambda, a_2) = d_2.$$

Para el modelo concreto la condición (2.24) se reduce a la siguiente desigualdad:

$$m_2 \geq d_2,$$

ya que bajo el supuesto inicial de $d_1 < d_2$ y la forma específica de la función p se satisface la condición $\inf_{a > 0} p(s, a) = 0$ para todo $s \geq 0$.

Los parámetros a_i , $i = 1, 2$, son parámetros de escala del modelo y el parámetro λ actúa como calibrador o seleccionador del tipo de modelo, por esta razón la condición $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, no es tan restrictiva como parece a primera vista.

En lo que sigue se supone que las dos especies poseen igual parámetro umbral de la presa, es decir $m_2 \geq d_2$, por lo tanto existe un $\lambda > 0$, tal que se tiene (2.23).

La clase de modelos bajo nuestra consideración serán divididos en tres subclases de acuerdo con la siguiente definición:

Definición 32 *Se dice que el sistema suave (2.1) asociado al acampo f_j que satisface las condiciones de (2.11) a (2.13) y de (2.21) a (2.23) es natural, artificial, o degenerado sii:*

$$Tm_j(\lambda, a_1, a_2) = \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{p_j(s, a_2)}{p_j(s, a_1)} \right]_{s=\lambda} \begin{cases} < 0 \\ > 0 \\ = 0, \end{cases} \quad (2.25)$$

respectivamente.

La primera ecuación de (2.25) significa por continuidad, que el cociente de las ratas de nacimiento (la cual es por (2.21), más grande que la unidad) decrece en un entorno de $s = \lambda$, es decir, la ventaja de la especie dos sobre la uno expresada por (2.21), decrece a medida que la presa se incrementa; que es lo que usualmente se espera que suceda. La segunda desigualdad de (2.25) significa que la ventaja de la especie dos sobre la uno expresada por (2.21) se incrementa a medida que la presa se incrementa.

Especial caracterización puede hacerse en el caso en que el sistema suave (2.1) es del tipo natural, ya que teniendo en cuenta las relaciones de (2.21)-(2.23) se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{p_j(\lambda, a_1)}{d_1} &= 1 = \frac{p_j(\lambda, a_2)}{d_2} \\ \frac{p_j(\lambda, a_1)}{p_j(\lambda, a_2)} &= \frac{d_1}{d_2} < 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para $s > \lambda$, aplicando la primera condición de (2.25), se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{p_j(s, a_1)}{p_j(s, a_2)} &> \frac{p_j(\lambda, a_1)}{p_j(\lambda, a_2)} = \frac{d_1}{d_2}, \\ \frac{p_j(s, a_1)}{d_1} &> \frac{p_j(s, a_2)}{d_2}, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

La última condición muestra que en éste caso, el predador uno tiene mayores tasas de crecimiento relativo que el predador dos en sistemas suaves (2.1) de tipo natural. Farkas [24] ha caracterizado a la especie uno como un *r-estratega*, ya que su estrategia de supervivencia se basa en el mantenimiento a lo largo del tiempo de altas tasas de crecimiento relativo. Mientras en la especie dos, de las condiciones (2.11)-(2.13) se deduce fácilmente que hace un uso más eficiente e inteligente de la energía pues requiere menos cantidad de presa para mantener iguales tasas de nacimiento que la especie uno, por ésto Farkas [24] ha llamado a este predador un *k-estratega*.

Observación 33 *Se dice que el subsistema del sistema (2.1) generado por el campo f_j , $j = 1, 2$, es natural, artificial, o degenerado si el sistema suave (2.1) asociado al campo f_j es natural, artificial, o degenerado, respectivamente.*

A continuación se determinan las condiciones de compatibilidad entre las funciones $p_1(s, a)$ y $p_3(s, a)$ que componen la respuesta funcional continua por tramos $p(s, a)$ y de la función $g(s, k)$ para que se satisfagan las condiciones de Butler-Farkas para el sistema no suave (2.1).

2.1.2 Verificación de las condiciones Butler-Farkas en el modelo no suave

Las condiciones de (2.8)-(2.10) para la función g se satisfacen por hipótesis en el sistema no suave (2.1).

A continuación se verifica las condiciones de compatibilidad que deben tener $p_1(s, a)$ y $p_3(s, a)$ para que la función p verifique las condiciones de (2.17) a (2.19):

Verificación de la condición (2.17):

$$p(0, a) = p_1(0, a) = 0,$$

ya que la función p_1 satisface las condiciones Butler-Farkas y por lo tanto se verifica la condición requerida en el dominio del modelo. Diferenciando la función p respecto

de s , claramente se tiene la condición, ya que p_1 y p_3 la satisfacen:

$$\partial_s p(s, a) = \begin{cases} \partial_s p_1(s, a) > 0, & s < \lambda \\ \partial_s p_2(s, a) = \partial_s p_3(s, a) > 0, & s > \lambda. \end{cases}$$

Verificación de la condición de Krasonselskij :

Se tiene que:

$$\partial_s p(s, a) = \begin{cases} \partial_s p_1(s, a) < \frac{p_1(s, a)}{s} = \frac{p(s, a)}{s} & s < \lambda \\ \partial_s p_2(s, a) = \partial_s p_3(s, a) < \frac{p(s, a)}{s} = \frac{p_3(s, a) - p_3(\lambda, a) + p_1(\lambda, a)}{s}, & s > \lambda, \end{cases}$$

ya que las funciones $p_1(s, a)$ y $p_3(s, a)$ satisfacen la condición de *Krasonselskij* si

$$p_1(\lambda, a) > p_3(\lambda, a), \quad (2.26)$$

entonces $p(s, a)$ satisface la condición de *Krasonselskij* también.

Verificación de la condición (2.19):

Diferenciando la función p respecto de a , claramente se tiene la condición:

$$\partial_a p(s, a) = \begin{cases} \partial_a p_1(s, a) < 0 & s < \lambda \\ \partial_a p_2(s, a) = \partial_a p_3(s, a) - \partial_a p_3(\lambda, a) + \partial_a p_1(\lambda, a) < 0, & s > \lambda, \end{cases}$$

ya que las funciones $p_1(s, a)$ y $p_3(s, a)$ satisfacen la condición (2.19) por hipótesis si

$$\partial_a p_3(s, a) - \partial_a p_3(\lambda, a) + \partial_a p_1(\lambda, a) < 0, \quad s > \lambda, \quad (2.27)$$

ó $\partial_a p_1(\lambda, a) < \partial_a p_3(\lambda, a)$, luego $p(s, a)$ satisface también la condición (2.19).

2.1.3 Modelo original concreto que exhibe bifurcación zip

En esta sección se presenta un modelo concreto original que satisface las condiciones generales del sistema no suave (2.1), el cual se utiliza más adelante para ilustrar los distintos comportamientos de la dinámica de la bifurcación zip no suave; éste es una generalización no suave del modelo tratado por varios autores (Hsu et ál. [47], Koch [52], Hubbel y Wilken [96]), bajo el supuesto de que la función g satisface las

condiciones de Butler-Farkas en el espacio de estados y de parámetros, y la función p es una función continua a tramos compuesta por la unión de las respuestas funcionales $p_1(s, a)$ y $p_3(s, a)$; las cuales satisfacen las condiciones denominadas de Butler-Farkas y adicionalmente las condiciones (2.14) y (2.15a) que garantizan que la respuesta funcional continua por tramos p del sistema no suave (2.1) satisface las condiciones de Butler-Farkas, donde

$$p \in C^1[((0, \lambda) \times (0, \infty), R) \cup ((\lambda, \infty) \times (0, \infty), R)], \quad p \in C^0[(0, \infty) \times (0, \infty), R],$$

y así poder asegurar la existencia de la bifurcación de zip no suave, la cual se demuestra más adelante. Tal generalización permite tratar combinaciones de modelos distintos de los sólo naturales, artificiales y degenerados que se adapten al complejo y diverso universo de las respuestas funcionales de las especies. El modelo concreto presentado aquí toma la forma del modelo tratado por varios autores (Hsu et ál. [47], Koch [52], Hubbel y Wilken [96]), bajo el supuesto de que la función g es de la forma $g(s, k) = 1 - s/k$, y la función p es de la forma $p = p_1(s, a_i) = p_3(s, a_i) = \frac{m_i s}{a_i + s}$. La función g en este caso, significa en la dinámica de poblaciones *la resistencia ambiental* asociada a la forma de crecimiento logístico y la función p representa la respuesta funcional del predador i del tipo *Holling I* la cual excluye la respuesta numérica.

La generalización de la resistencia ambiental resulta conveniente, ya que en ecología se ha observado que la mayoría de poblaciones siguen un patrón intermedio de crecimiento entre la forma de crecimiento logístico y la forma de crecimiento exponencial, las cuales se consideran como la menor y la mayor forma de crecimiento, respectivamente. La forma *sigmoide* de la curva de crecimiento logístico, es característica de pequeños organismos, o de organismos grandes cuando éstos son introducidos en islas previamente despobladas, tal es el caso (del crecimiento de las poblaciones de Ovejas en la isla de Tasmania, o el crecimiento de una población de Faisanes, introducidas en la isla de Puget Sound Washinton).

La función propuesta para la resistencia ambiental g es la siguiente

$$\begin{aligned} g(s, k) &= 1 - \left(\frac{e^s - 1}{e^k - 1}\right)^u \left(\frac{s}{k}\right)^m \\ &= k > 0, s \geq 0, u \geq 0, m \geq 0, u = m \neq 0, \end{aligned} \tag{2.28}$$

la cual se mostró satisface las condiciones de (2.8) -(2.10) en Escobar [22]. Esta función claramente generaliza la resistencia ambiental, asociada al modo de crecimiento exponencial y al logístico; en particular para los siguientes valores de los parámetros m, u se tiene:

$$\text{forma Logística} : g(s, k) = 1 - s/k, \text{ si } u = 0, m = 1.$$

$$\text{forma Exponencia} : g(s, k) = 1, \text{ si } u \longrightarrow \infty, m \longrightarrow \infty.$$

La respuesta funcional del predador hace alusión a la forma como responden los predadores a variaciones de la cantidad de presa modificando el consumo de presa por cada predador.

Los siguientes son los modelos de *respuesta funcional* del predador que satisfacen las condiciones (2.11)-(2.13) que se conocen en la literatura del tema satisfaciendo las condiciones anteriores:

$$\begin{aligned} p_j(s, a) &= \frac{A}{Ba+C} \frac{s}{s+a} && \text{tipo Holling} \\ & \frac{A}{Ba+C} [1 - \exp(\frac{-s}{a})] && \text{tipo Ivlev} \\ & \frac{A}{Ba+C} s^q && \text{tipo Rosenzweig.} \end{aligned}$$

Donde $A > 0, B \geq 0, 0 < q < 1$ y $C \in R$.

Los modelos tipo Holling e Ivlev son modelos naturales, mientras que el modelo tipo Rosenzweig es un modelo degenerado.

La respuesta funcional del predador p concreta que se propone en éste trabajo para ilustrar las dinámicas del modelo no suave es la siguiente:

$$p_j(s, a) = \frac{As^n}{Ba^r + D} + \frac{cqs}{(a^{-v} + F)(qs + a)}; j = 1, 3, \quad (2.29)$$

donde:

$$\begin{aligned} (s \geq 0, a > 0, A \geq 0, B > 0, C \geq 0, D \geq 0, \\ q \geq 0, F \geq 0, v \leq 0, 0 \leq n < 1) \quad \cup \quad (s \geq 0, \\ a > 0, A \geq 0, B > 0, C > 0, D \geq 0, q \geq 0, \\ F \geq 0, v \leq 0, n = 1). \quad 0 \leq r < \infty, \end{aligned} \quad (2.30)$$

la cual se mostró satisface las condiciones de (2.11)-(2.13) en Escobar [22]. Esta es una generalización de la respuesta funcional tipo Holling y tipo Rosenzweig integradas, la cual da origen a los tres tipos de modelos dados por la Definición 32; es decir da origen a modelos naturales, artificiales y degenerados, así como a combinación de ellos con respecto a la superficie de conmutación $s = \lambda$. En este trabajo se exhibe combinaciones de modelos no suaves naturales, artificiales sin antecedentes en la literatura que exhiben la bifurcación zip no suave.

Capítulo 3

Extensión de la dinámica de la bifurcación zip en modelos suaves

3.1 Preliminares

En este capítulo se presenta un completo análisis del comportamiento dinámico y asintótico tanto de la componente real como imaginaria de los valores propios asociados a la linealización de los subsistemas del sistema no suave (2.1) a lo largo de su conjunto de equilibrios, ya que en el análisis de la bifurcación zip en sistemas no suaves del tipo (2.1), la estabilidad de cada punto de equilibrio del segmento L_k sobre la variedad invariante asociada al él es determinada tanto por la componente real como por la componente imaginaria de los valores propios a lo largo del segmento de equilibrios L_k , véase Freire E., Ponce E. & Torres F. [38]; Camlibel [8], Olivar & Angulo [77]; Carmona V., Freire E., Ponce E. & Torres F. [11]. También se establece un nuevo criterio de clasificación geométrico de las bifurcaciones en sistemas suaves de clase C^2 del tipo (2.1) el cual preserva información sobre el número, estabilidad, topología de los conjuntos invariantes y también de las formas geométricas de nodos y focos alrededor de puntos de equilibrios hiperbólicos aislados. Se observa que el criterio de equivalencia geométrica dado en la Definición 14 permite tratar los cruces de ambos ejes coordenados por los valores propios de la linealización del

sistema al variar el parámetro como bifurcaciones geométricas del sistema. Así un cambio del retrato de fase de un nodo a un foco (cruce del eje real) se considera una bifurcación geométrica. Desde este punto de vista el tratamiento de los distintos escenarios reciben un tratamiento más simétrico con respecto a la dinámica de los valores propios, ya que en este caso el eje imaginario no es privilegiado. Con base en los resultados obtenidos en el análisis de la componentes de los valores propios y del criterio de clasificación geométrico antes mencionado se demuestra que la bifurcación de zip descubierta por Farkas [26] al estudiar la componente real de los valores propios con base en el criterio de equivalencia topológica es también una bifurcación con el criterio de clasificación geométrico antes mencionado y que además que el fenómeno de bifurcación de zip forma parte de un fenómeno más complejo el cual viene dado por la combinación de dos tipos de bifurcación geométrica, causadas por la acción simultánea de la componente real y la componente imaginaria de los valores propios a lo largo del segmento de equilibrios L_k ; el cual da lugar a un escenario de bifurcaciones conformado por 11 tipos de zip geométrico en total.

Se regresa al sistema (2.1) donde se supone que $a_1 > a_2$; además se asume, que las condiciones (2.21) y (2.22) se satisfacen. Como ya hemos mostrado, bajo la suposición (2.24), existe un parámetro umbral para las dos especies predadoras en competencia en el cual se presenta la condición (2.23). Si consideramos un modelo natural, las especies x_1 y x_2 pueden ser consideradas como un r -estratega y un k -estratega, respectivamente. La capacidad de carga k del medio puede ser considerada como parámetro de bifurcación y nuestro interés estará en ver cómo responde el sistema dinámico a cambios en la capacidad de carga del medio k . Es claro que para este sistema, los planos coordenados son variedades invariantes del sistema (2.1); por lo tanto las soluciones del sistema no pueden escapar del octante positivo; además, dado que el campo de velocidades, a valores altos de s, x_1, x_2 , apunta en la dirección negativa de los respectivos ejes coordenados, las soluciones no pueden ser *no-acotadas*; en consecuencia todas las soluciones con condiciones iniciales en el octante positivo están definidas en $[0, \infty)$, son acotadas y permanecen no negativas.

3.1.1 Puntos de equilibrio del sistema

El sistema (2.1) tiene los siguientes puntos de equilibrio: $Q_1 = (0, 0, 0)$, $Q_2(k, 0, 0)$ y los puntos del segmento de línea recta L_k :

$$L_k = \left\{ (s, x_1, x_2) : p(\lambda, a_1)x_1 + p(\lambda, a_2)x_2 = \gamma\lambda g(\lambda, k), \right. \\ \left. s = \lambda, 0 \leq x_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)} \right\}. \quad (3.1)$$

Notación 34 Cuando nos referimos a la línea L_k , significa que en la ecuación (3.1), $x_1 \in (-\infty, \infty)$. También se define la proyección del segmento de línea L_k sobre el plano coordenado $x_1 - x_2$ como

$$\hat{L}_k = \left\{ (x_1, x_2) : p(\lambda, a_1)x_1 + p(\lambda, a_2)x_2 = \gamma\lambda g(\lambda, k), \right. \\ \left. 0 \leq x_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)} \right\}. \quad (3.2)$$

esta convención también es válida para las demás curvas o segmentos de curva que se definen más adelante.

Mediante la linealización del sistema (2.1) se determina que Q_1 es inestable y Q_2 es asintóticamente estable para $k < \lambda$, e inestable para $k > \lambda$; pero la condición $0 < \lambda = \lambda_1 = \lambda_2 < k$, es necesaria para la supervivencia de cada predador. Por lo tanto, se asumirá en lo que sigue. Si $k < \lambda$, por la condición (2.10), entonces L_k es vacío, y si $k = \lambda$, el único punto de equilibrio es el origen Q_1 . A continuación, se verifica la estabilidad de los puntos Q_1 y Q_2 por linealización del sistema.

Sea $J(s, x_1, x_2)$ la matriz Jacobiana que representa la linealización del sistema (2.1) en el punto del octante positivo (s, x_1, x_2) e I_3 la matriz identidad de orden tres, sea la matriz Jacobiana en el origen

$$J(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(0,0,0)}{\partial s} & \frac{\partial f_1(0,0,0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(0,0,0)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(0,0,0)}{\partial s} & \frac{\partial f_2(0,0,0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(0,0,0)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_3(0,0,0)}{\partial s} & \frac{\partial f_3(0,0,0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3(0,0,0)}{\partial x_2} \end{bmatrix},$$

donde f_1, f_2 , y f_3 son funciones dadas por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} f_1(s, x_1, x_2) &= \gamma s g(s, k) - x_1 p(s, a_1) - x_2 p(s, a_2), \\ f_2(s, x_1, x_2) &= x_1 p(s, a_1) - d_1 x_1, \\ f_3(s, x_1, x_2) &= x_2 p(s, a_2) - d_2 x_2. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las condiciones para las funciones p y g en el origen:

$$\begin{aligned} g(0, k) &= 1, & k > 0, \\ p(0, a_1) &= 0, & p(0, a_2) = 0, & a_1 > 0, & a_2 > 0, \\ s &= 0, & x_1 &= 0, \end{aligned}$$

se obtiene:

$$J(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & -d_1 & 0 \\ 0 & 0 & -d_2 \end{bmatrix}.$$

El polinomio característico de $J(0, 0, 0)$, está dado por el determinante de la matriz $D(\mu) = \text{Det}[J - \mu I_3]$:

$$\begin{aligned} \text{Det}[J - \mu I_3] &= -\mu^3 + d_1 d_2 \gamma + \mu^2(-d_1 - d_2 + \gamma) \\ &\quad + \mu(-d_1 d_2 + d_1 \gamma + d_2 \gamma) \\ &= (\mu + d_1)(\mu + d_2)(\mu - \gamma), \end{aligned}$$

cuyos valores propios están dados por $\mu = -d_1$, $\mu = -d_2$, $\mu = \gamma$, por lo tanto el origen es inestable. En forma semejante se considera la linealización $J(s, x_1, x_2)$ del sistema (2.1) en el punto Q_2 , por lo tanto se obtiene las siguientes condiciones para la función g :

$$\begin{aligned} g(k, k) &= 1, & k > 0, \\ s &= k, & x_1 = 0, & x_2 = 0, \end{aligned}$$

entonces la matriz $J = J(k, 0, 0)$ adopta la forma:

$$J(k, 0, 0) = \begin{bmatrix} \gamma k g'_s(k, k) & -p(k, a_1) & -p(k, a_2) \\ 0 & -d_1 + p(k, a_1) & 0 \\ 0 & 0 & -d_2 + p(k, a_2) \end{bmatrix}.$$

El polinomio característico de $J = J(k, 0, 0)$ es:

$$\begin{aligned}
 \text{Det}[J - \mu I_3] &= -\mu^3 + d_1 d_2 k \gamma \partial_s g(k, k) - d_2 k \gamma p(k, a_1) \\
 &\quad \partial_s g(k, k) - d_1 k \gamma p(k, a_2) \partial_s g(k, k) + \gamma \lambda \\
 &\quad p(k, a_1) p(k, a_2) \partial_s g(k, k) + \mu^2 (-d_1 - d_2 \\
 &\quad + p(k, a_1) + p(k, a_2) + k \gamma \partial_s g(k, k)) + \mu \\
 &\quad (-d_1 d_2 + d_2 p(k, a_1) + d_1 p(k, a_2) - p \\
 &\quad (k, a_1) p(k, a_2) + d_1 k \gamma \partial_s g(k, k) \partial_s g(k, k) \\
 &\quad \partial_s g(k, k) - k \gamma p d_2 k \gamma) \\
 &= (\mu + d_1 - p(k, a_1))(\mu + d_2, -p(k, a_2)) \\
 &\quad (\mu - k \gamma \partial_s g(k, k) k),
 \end{aligned}$$

cuyos valores propios son dados por:

$$\begin{aligned}
 \mu_1 &= -d_1 + p(k, a_1), \\
 \mu_2 &= -d_2 + p(k, a_2), \\
 \mu_3 &= k \gamma \partial_s g(k, k),
 \end{aligned}$$

De la expresión anterior y las condiciones (2.17) y (2.23) claramente se tiene que el punto Q_2 es inestable para $k > \lambda$, y *asintóticamente estable* para $k < \lambda$.

3.1.2 Coexistencia y extinción por bifurcación zip en cada subsistema del sistema no suave

En esta sección se trata la estabilidad del conjunto L_k . Los elementos del conjunto L_k son denotados como (λ, ξ_1, ξ_2) . La matriz Jacobiana que representa la linealización del sistema no suave (2.1) en un punto arbitrario (λ, ξ_1, ξ_2) de L_k no existe sobre la superficie de conmutación; sin embargo dado que los campos f_1 y f_2 son de clase C^1 en $s \leq \lambda$, y $s \geq \lambda$, respectivamente, se puede linealizar el campo generado por f_1 en el espacio de estados $s \leq \lambda$, y linealizar el campo generado f_2 en el espacio de estados $s \geq \lambda$. Sea $J_1 = J_1(s, \xi_1, \xi_2)$ la matriz Jacobiana que representa la linealización del sistema suave (2.1) generado por el campo f_1 en un punto arbitrario (s, ξ_1, ξ_2) de

L_k , $s = \lambda$, y $J_2 = J_2(s, \xi_1, \xi_2)$ la matriz Jacobiana que representa la linealización del sistema suave (2.1) generado por el campo f_2 en un punto arbitrario (s, ξ_1, ξ_2) de L_k . Teniendo en cuenta la condición (2.23) para la función p se tiene:

$$\begin{aligned} p(\lambda, a_1) &= d_1, \\ p(\lambda, a_2) &= d_2, \\ s &= \lambda, \end{aligned}$$

y

$$J_j = \begin{bmatrix} \gamma g(\lambda, k) + \lambda \gamma \partial_s g(\lambda, k) - \xi_1 \partial_s p_j(\lambda, a_1) & -d_1 & -d_2 \\ -\xi_2 \partial_s p_j(\lambda, a_2) & & \\ \xi_1 \partial_s p_j(\lambda, a_1) & 0 & 0 \\ \xi_2 \partial_s p_j(\lambda, a_2) & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

El polinomio característico de $J_j = J_j(\lambda, \xi_1, \xi_2)$, está dado por:

$$\begin{aligned} Det[J_j - \mu I_3] &= \mu[\mu^2 + [\xi_1 \partial_s p_j(\lambda, a_1) + \xi_2 \partial_s p_j(\lambda, a_2) - \gamma \\ &g(\lambda, k) - \gamma \lambda \partial_s g(\lambda, k)]\mu + \xi_1 p(\lambda, a_1) \partial_s p_j(\lambda, a_1) + \\ &\xi_2 p(\lambda, a_2) \partial_s p_j(\lambda, a_2)]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

despejando ξ_2 en (3.1) se tiene

$$\xi_2 = \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k) - p(\lambda, a_1) \xi_1}{p(\lambda, a_2)} \quad (3.5)$$

Teniendo en cuenta (3.5) en el polinomio característico (3.4). Los valores propios de $J_j = J_j(\lambda, \xi_1, \xi_2)$ $j = 1, 2$, vienen dados por

$$\begin{aligned} \mu_{0j} &= 0, \\ \mu_{1j} &= a_j(\xi_1, k) + b_j(\xi_1, k)i, \\ \mu_{2j} &= a_j(\xi_1, k) - b_j(\xi_1, k)i, \\ a_j(\xi_1, k) &= \frac{p_j(\lambda, a_1) \partial_s p_j(\lambda, a_2) - p_j(\lambda, a_2) \partial_s p_j(\lambda, a_1)}{2p_j(\lambda, a_2)} \xi_1, \\ &+ \frac{\gamma \lambda \partial_s g(\lambda, k)}{2} + \frac{\gamma g(\lambda, k)(p_j(\lambda, a_2) - \lambda \partial_s p_j(\lambda, a_2))}{2p_j(\lambda, a_2)}, \\ b_j(\xi_1, k) &= \sqrt{-a_j^2(\xi_1, k) + \xi_1 p_j(\lambda, a_1)(\partial_s p_j(\lambda, a_1) - \partial_s p_j(\lambda, a_2)) + D(k, a_2)}, \\ D(k, a_2) &= \gamma \lambda g(\lambda, k) \partial_s p_j(\lambda, a_2). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Por conveniencia en la descripción de la dinámica de los valores propios introducimos la siguiente notación

$$m_j = \frac{p_j(\lambda, a_1)\partial_s p_j(\lambda, a_2) - p_j(\lambda, a_2)\partial_s p_j(\lambda, a_1)}{2p_j(\lambda, a_2)} \quad (3.7)$$

$$c_j(k, a) = \frac{\gamma\lambda\partial_s g(\lambda, k)}{2} + \frac{\gamma g(\lambda, k)(p_j(\lambda, a) - \lambda\partial_s p_j(\lambda, a))}{2p_j(\lambda, a)} \quad (3.8)$$

$$\bar{c}_j(k, a) = -c_j^2(k, a) + \gamma\lambda g(\lambda, k)\partial_s p_j(\lambda, a) \quad (3.9)$$

$$\bar{b}_j(\xi_1, k) = b_j^2(\xi_1, k) \quad (3.10)$$

$$A_j = p_j(\lambda, a_1)(\partial_s p_j(\lambda, a_1) - \partial_s p_j(\lambda, a_2)) \quad (3.11)$$

$$D_j(k, a) = \gamma\lambda g(\lambda, k)\partial_s p_j(\lambda, a). \quad (3.12)$$

Las variables $c_j(k, a)$, y $\bar{c}_j(k, a)$, nos serán útiles para expresar algunas simetrías de la parte real e imaginaria de los valores propios de la linealización de los subsistemas en los puntos extremos del segmento de equilibrios L_k respectivamente. De las expresiones de (3.7)-(3.12) se puede escribir

$$a_j(\xi_1, k) = m_j\xi_1 + c_j(k, a_2) \quad (3.13)$$

$$\bar{b}_j(\xi_1, k) = -a_j^2(\xi_1, k) + \xi_1 p_j(\lambda, a_1)(\partial_s p_j(\lambda, a_1) - \partial_s p_j(\lambda, a_2)) \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} & + \gamma\lambda g(\lambda, k)\partial_s p_j(\lambda, a_2) \\ & = -m_j^2\xi_1^2 + (A_j - 2m_j c_j(k, a_2))\xi_1 + D_j(k) - c_j^2(k, a_2). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Así que $\mu_{0j} = 0$, es siempre un valor propio, y μ_{1j}, μ_{2j} , son valores propios complejos (no reales) conjugados o reales del mismo signo dependiendo de si $b_j(\xi_1, k) > 0$, o $b_j(\xi_1, k) = 0$. En esta subsección se establecen los puntos de bifurcación del sistema (2.1) con respecto al segmento de equilibrios L_k , los cuales resultan de considerar la unión de los puntos de bifurcación de cada subsistema generado por los campos f_j . En general la condición para establecer los puntos de bifurcación del sistema (2.1) es aquella en la cual el segmento de equilibrios L_k experimenta un cambio cualitativo y esto ocurre en la bifurcación de zip, cuando $a_j(\xi_1, k) = 0$ ó $b_j(\xi_1, k) = 0$, en los extremos de L_k .

Se observa que los puntos de bifurcación topológicos vienen dados por la condición $a_j(\xi_1, k) = 0$, sin embargo dado que el criterio de equivalencia geométrica implica al de

Capítulo 3. Extensión de la dinámica de la bifurcación zip en modelos suaves 57
 equivalencia topológico para clasificar retratos de fase, entonces los puntos de bifurcación geométricos contiene los puntos de bifurcación topológicos, (véase Kuznetsov [64, Capítulo 2] y el criterio de equivalencia geométrica dado en la Definición 14).

A continuación se establece una propiedad de simetría algebraica de los puntos extremos del segmento de equilibrios L_k .

Proposición 35 *Considere $\xi_{10} = 0$ y $\xi_{11}(k) = \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)}$ las componentes de ξ_1 del extremo superior e inferior respectivamente del segmento de equilibrios L_k , entonces se tiene la siguiente propiedad de simetría*

$$a_j(\xi_{10}, k) = c_j(k, a_2), \quad (3.16)$$

$$a_j(\xi_{11}, k) = c_j(k, a_1). \quad (3.17)$$

Prueba: Que $a_j(0, k) = c_j(k, a_2)$ se sigue inmediatamente de (3.13). También de (3.13) se tiene

$$\begin{aligned} a_j(\xi_{11}(k), k) &= m_j \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)} + c_j(k, a_2) \\ &= \frac{p_j(\lambda, a_1)\partial_s p_j(\lambda, a_2) - p_j(\lambda, a_2)\partial_s p_j(\lambda, a_1)}{2p_j(\lambda, a_2)} \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)} \\ &\quad + \frac{\gamma\lambda\partial_s g(\lambda, k)}{2} + \frac{\gamma g(\lambda, k)(p_j(\lambda, a_2) - \lambda\partial_s p_j(\lambda, a_2))}{2p_j(\lambda, a_2)}, \end{aligned}$$

observe que el lado derecho de la última igualdad se escribe como

$$\begin{aligned} &\frac{p_j(\lambda, a_1)\partial_s p_j(\lambda, a_2) - p_j(\lambda, a_2)\partial_s p_j(\lambda, a_1)}{2p_j(\lambda, a_2)} \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)} \\ &+ \frac{\gamma g(\lambda, k)(p_j(\lambda, a_2) - \lambda\partial_s p_j(\lambda, a_2))}{2p_j(\lambda, a_2)} + \frac{\gamma\lambda\partial_s g(\lambda, k)}{2} \\ &= \frac{\gamma g(\lambda, k)}{2p_j(\lambda, a_1)} (p_j(\lambda, a_1) - \lambda\partial_s p_j(\lambda, a_1)) + \frac{\gamma\lambda\partial_s g(\lambda, k)}{2} \\ &= c_j(k, a_1), \end{aligned}$$

de lo cual se concluye (3.17) y se termina la prueba. \square

Lema 36 *Considere $\xi_{10} = 0$ y $\xi_{11}(k) = \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)}$ las componentes de ξ_1 del extremo superior e inferior respectivamente del segmento de equilibrios L_k ; entonces a_j es*

Capítulo 3. Extensión de la dinámica de la bifurcación zip en modelos suaves 58
 creciente con respecto al parámetro k . Además para cada $\xi_1 \in [0, \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)}]$, existe un
 único $\bar{k}_j(\xi_1) \in (\lambda, \infty)$ tal que $a_j(\xi_1, \bar{k}_j(\xi_1)) = 0$.

Prueba: Note que

$$\partial_k a_j(\xi_1, k) = \frac{\gamma\lambda \partial_{sk} g(\lambda, k)}{2} + \gamma \partial_k g(\lambda, k) \frac{p_j(\lambda, a_2) - \lambda \partial_s p_j(\lambda, a_2)}{2p_j(\lambda, a_2)} > 0, \quad (3.18)$$

de las condiciones (2.8), (2.11) y (2.12). Para mostrar la segunda parte del lema, nosotros probamos la existencia y unicidad de $\bar{k}_j(\xi_1)$ tal que $a_j(\xi_1, \bar{k}_j(\xi_1)) = 0$, en cada extremo del intervalo $[0, \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)}]$, después mostramos el mismo resultado en cada punto interior del intervalo. De la expresión (3.13), la condición (2.8) y (2.10) se tiene

$$\begin{aligned} a_j(\xi_{10}, k) &= c_j(k, a_2), \\ a_j(0, \lambda) &= \frac{\gamma\lambda \partial_s g(\lambda, k)}{2} < 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

También por (2.8), (2.9) y (2.11), (2.12) se tiene

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_j(\xi_{10}, k) = \frac{\gamma(p_j(\lambda, a_2) - \lambda \partial_s p_j(\lambda, a_2))}{2p_j(\lambda, a_2)} > 0, \quad (3.20)$$

por lo tanto de (4.74), (4.75) y (3.20) se tiene que existe un único $\bar{k}_j(\xi_{10})$ tal que $a_j(\xi_{10}, \bar{k}_j(\xi_{10})) = 0$. Además de la simetría dada en (3.17) se tiene que existe único $\bar{k}_j(\xi_{11})$ tal que $a_j(\xi_{11}(\bar{k}_j(\xi_{11})), \bar{k}_j(\xi_{11})) = 0$. Para probar que por cada $\xi_1 \in [0, \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)}]$, existe $\bar{k}_j(\xi_1)$ único tal que $a_j(\xi_1, \bar{k}_j(\xi_1)) = 0$, se observa que de (3.13) se obtiene

$$\frac{\partial a_j(\xi_1, k)}{\partial \xi_1} = m_j. \quad (3.21)$$

Si $m_j = 0$, $a_j(\xi_1, \bar{k}_j(\xi_1))$ es una función constante de ξ_1 . De la primera parte del lema, $a_j(\xi_{10}, \bar{k}_j(\xi_{10})) = 0$, así que por cada $\xi_1 \in [0, \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)}]$ se tiene que $a_j(\xi_1, \bar{k}_j(\xi_{10})) = 0$. La unicidad de \bar{k}_j se sigue del hecho que $a_j(\xi_1, k)$ se incrementa con k . En otro caso, si $m_j > 0$, $a_j(\xi_1, k)$ se incrementa con ξ_1 y para cada $\xi_1 \in [0, \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)}]$ y $k > 0$, se tiene

$$a_j(\xi_{10}, k) < a_j(\xi_1, k) < a_j(\xi_{11}, k).$$

Considere a k_0 tal que $a_j(\xi_{11}(k_0), k_0) < 0$, entonces $a_j(\xi_1, k_0) < 0$, para cada $\xi_1 \in [0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)}]$. Similarmente, si se toma k_1 tal que $a_j(\xi_{10}, k_1) > 0$, entonces $a_j(\xi_1, k_1) > 0$, luego $a_j(\xi_1, k)$ cambia de signo, la unicidad se sigue del hecho que $a_j(\xi_1, k)$ se incrementa con k . La prueba en el caso $m_j < 0$, es análoga. \square

Por conveniencia introducimos la siguiente definición

Definición 37 Se denota por k_{a2j} y k_{a1j} a los puntos de bifurcación del sistema suave (2.1) asociado al campo f_j , $j = 1, 2$, con respecto a la parte real de los valores propios a lo largo del segmento de equilibrios L_k , los cuales satisfacen las condiciones

$$\begin{aligned} a_j(\xi_{10}, k_{a2j}) &= 0, \\ a_j(\xi_{11}(k_{a1j}), k_{a1j}) &= 0. \end{aligned}$$

Se entiende ξ_{11} como $\xi_{11}(k_{a1j})$ en caso de omisión de la variable k .

Claramente la Definición 37 tiene sentido por el Lema 36.

A continuación se establece una relación de orden entre los valores de bifurcación k_{a2j} y k_{a1j} del sistema suave (2.1) de acuerdo a si el modelo es natural, artificial o degenerado.

Proposición 38 Los puntos de bifurcación k_{a2j} y k_{a1j} del sistema suave (2.1) asociado al campo f_j , satisfacen la siguiente relación

$$\begin{aligned} k_{a2j} &< k_{a1j} \text{ si } m_j < 0, \\ k_{a2j} &= k_{a1j} \text{ si } m_j = 0, \\ k_{a1j} &< k_{a2j} \text{ si } m_j > 0. \end{aligned}$$

Prueba: De (3.13) se tiene que

$$\partial_{\xi_1} a_j(\xi_1, k) = m_j,$$

como $a_j(\xi_{10}, k_{a2j}) = 0$, luego

$$a_j(\xi_{11}, k_{a2j}) = \begin{cases} < 0, & \text{si } m_j < 0 \\ = 0, & \text{si } m_j = 0 \\ > 0, & \text{si } m_j > 0, \end{cases} .$$

Como $\partial_k a_j(\xi_1, k) > 0$, $\xi_1 \in [0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)}]$, entonces si

$$a_j(\xi_{11}, k_{a1j}) = 0, \text{ implica que } \begin{cases} k_{a2j} < k_{a1j}, & \text{si } m_j < 0 \\ k_{a2j} = k_{a1j}, & \text{si } m_j = 0 \\ k_{a2j} > k_{a1j}, & \text{si } m_j > 0 \end{cases} ,$$

con lo cual se termina la prueba \square .

En la parte anterior se considera el análisis de la parte real de los valores propios u_{1j} y u_{2j} . Ahora se considera el análisis de la parte imaginaria de los valores propios de u_{1j} y u_{2j} .

La condición que establece los puntos de bifurcación en el sistema suave (2.1) asociado al campo f_j con respecto a la parte imaginaria de los valores propios es $b_j(\xi_1, k) = 0$, evaluada en los extremos del segmento de equilibrios. Dado que $b_j(\xi_1, k) = 0$, si y sólo si $\bar{b}_j(\xi_1, k) = 0$, el análisis de la componente imaginaria se realiza sobre $\bar{b}_j(\xi_1, k)$ dada en (3.8) sin pérdida de generalidad.

A continuación se establece una propiedad de simetría algebraica de los puntos extremos del segmento de equilibrios L_k .

Proposición 39 *Considere $\xi_{10} = 0$ y $\xi_{11} = \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)}$ las componentes de ξ_1 del extremo superior e inferior respectivamente del segmento de equilibrios L_k , entonces se tiene la siguiente propiedad de simetría entre ellos.*

$$\bar{b}_j(\xi_{10}, k) = \bar{c}_j(k, a_2) \tag{3.22}$$

$$\bar{b}_j(\xi_{11}, k) = \bar{c}_j(k, a_1) \tag{3.23}$$

Prueba: Si en las expresiones (3.13) y (3.14) se toma $\xi_1 = \xi_{10}$ se sigue que

$$\bar{b}_j(\xi_{10}, k) = -a_j^2(\xi_{10}, k) + \gamma \lambda g(\lambda, k) \partial_s p_j(\lambda, a_2), \tag{3.24}$$

$$a_j(\xi_{10}, k) = c_j(k, a_2), \tag{3.25}$$

Capítulo 3. Extensión de la dinámica de la bifurcación zip en modelos suaves 61
sustituyendo (3.25) en (3.24) se tiene (3.22). De la expresión (3.14) se obtiene

$$\begin{aligned}\bar{b}_j(\xi_{11}, k) &= -a_j^2(\xi_{11}, k) + \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)} p_j(\lambda, a_1) (\partial_s p_j(\lambda, a_1) - \partial_s p_j(\lambda, a_2)) \\ &\quad + \gamma \lambda g(\lambda, k) \partial_s p_j(\lambda, a_2) \\ &= -a_j^2(\xi_{11}, k) + \gamma \lambda g(\lambda, k) \partial_s p_j(\lambda, a_1),\end{aligned}$$

pero por la condición (3.17) $a_j(\xi_{11}, k) = c_j(k, a_1)$, por lo tanto

$$\begin{aligned}\bar{b}_j(\xi_{11}, k) &= -c_j^2(k, a_1) + \gamma \lambda g(\lambda, k) \partial_s p_j(\lambda, a_1) \\ &= \bar{c}_j(k, a_1),\end{aligned}$$

con lo cual se concluye (3.23) y se termina la prueba. \square

Lema 40 *Considere $\xi_{10} = 0$ y $\xi_{11} = \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)}$ las componentes de ξ_1 del extremo superior e inferior respectivamente del segmento de equilibrios L_k ; entonces \bar{b}_j es creciente con respecto al parámetro k , con $0 < k \leq \bar{k}_j(\xi_1)$, donde $\bar{k}_j(\xi_1)$ satisface la ecuación $a_j(\xi_1, \bar{k}_j(\xi_1)) = 0$. Además existe un único $\bar{\bar{k}}_j(\xi_1)$ tal que $\bar{b}_j(\xi_1, \bar{\bar{k}}_j(\xi_1)) = 0$, para cada $\xi_1 \in [0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)}]$, y $\bar{\bar{k}}_j(\xi_1) \leq \bar{k}_j(\xi_1)$.*

Prueba: Veamos que \bar{b}_j es creciente con respecto al parámetro k , como

$$\partial_k \bar{b}_j(\xi_1, k) = -2a_j(\xi_1, k) \partial_k a_j(k, a_1) + \gamma \lambda \partial_k g(\lambda, k) \partial_s p_j(\lambda, a_1), \quad (3.26)$$

entonces como por la condiciones (2.8), (2.11) y (2.12) se tiene que $\partial_k a_j(\xi_1, k) > 0$, además $a_j(\xi_1, k) < 0$ sii $k < \bar{k}_j(\xi_1)$, por lo tanto de (3.26) se sigue que \bar{b}_j es creciente en $k \in (0, \bar{k}_j(\xi_1)]$. Para mostrar la segunda parte del lema, nosotros probamos la existencia y unicidad de $\bar{\bar{k}}_j(\xi_1)$ tal que $\bar{b}_j(\xi_1, \bar{\bar{k}}_j(\xi_1)) = 0$, en cada extremo del intervalo $[0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)}]$. Después mostramos el mismo resultado en cada punto interior del intervalo. Veamos que $\bar{b}_j(\xi_1, k)$ cambia de signo para $k \in (0, \bar{k}_j(\xi_1))$ y $\xi_1 \in [0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)}]$, es decir

$$\bar{b}_j(\xi_{10}, \lambda) = -c_j^2(\lambda, a_2) < 0, \quad (3.27)$$

$$\bar{b}_j(\xi_{10}, k_{a_{2j}}) = \gamma \lambda g(\lambda, k) \partial_s p_j(\lambda, a_1) > 0, \quad (3.28)$$

por la condiciones (2.10), (2.17) y por la igualdad $c_j(k_{a2j}, a_2) = 0$. De (3.26), (3.27) y (3.28) se sigue que existe un único $\bar{k}_j(\xi_{10})$ talque $\bar{b}_j(\xi_{10}, \bar{k}_j(\xi_{10})) = 0$. Además por la condición (3.23) se tiene por simetría que existe único $\bar{k}_j(\xi_{11})$ tal que $\bar{b}_j(\xi_{11}, \bar{k}_j(\xi_{11})) = 0$. También si $\xi_1 \in (\xi_{10}, \xi_{11})$, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} \bar{b}_j(\xi_1, k) &= \lim_{k \rightarrow 0} -a_j^2(\xi_1, k) + \xi_1 p_j(\lambda, a_1) (\partial_s p_j(\lambda, a_1) - \partial_s p_j(\lambda, a_2)) \\ &\quad + \lim_{k \rightarrow 0} \gamma \lambda g(\lambda, k) \partial_s p_j(\lambda, a_2). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Ahora se asume que

$$\lim_{k \rightarrow 0} \gamma \lambda g(\lambda, k) = -\infty; \quad (3.30)$$

esta suposición es realista dado que si la capacidad del medio es infinitamente pequeña la tasa de crecimiento de la presa decrece infinitamente. Así, de (3.29) y (3.30) se tiene que $\lim_{k \rightarrow 0} \bar{b}_j(\xi_1, k) = -\infty$.

Si $(\partial_s p_j(\lambda, a_1) - \partial_s p_j(\lambda, a_2)) > 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} \bar{b}_j(\xi_1, \bar{k}_j(\xi_1)) &= \xi_1 p_j(\lambda, a_1) (\partial_s p_j(\lambda, a_1) - \partial_s p_j(\lambda, a_2)) \\ &\quad + \gamma \lambda g(\lambda, \bar{k}_j(\xi_1)) \partial_s p_j(\lambda, a_2) > 0, \end{aligned} \quad (3.31)$$

ya que $a_j^2(\xi_1, \bar{k}_j(\xi_1)) = 0$. En el otro sentido si $(\partial_s p_j(\lambda, a_1) - \partial_s p_j(\lambda, a_2)) < 0$, y tomando en cuenta que $\xi_1 \leq \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)}$ se obtiene

$$\begin{aligned} \bar{b}_j(\xi_1, \bar{k}_j(\xi_1)) &= \xi_1 p_j(\lambda, a_1) (\partial_s p_j(\lambda, a_1) - \partial_s p_j(\lambda, a_2)) \\ + \gamma \lambda g(\lambda, \bar{k}_j(\xi_1)) \partial_s p_j(\lambda, a_2) &> \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)} p_j(\lambda, a_1) (\partial_s p_j(\lambda, a_1) - \partial_s p_j(\lambda, a_2)) \\ &\quad + \gamma \lambda g(\lambda, \bar{k}_j(\xi_1)) \partial_s p_j(\lambda, a_2) \\ &= \gamma \lambda g(\lambda, \bar{k}_j(\xi_1)) \partial_s p_j(\lambda, a_1) > 0. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Así, cuando $\bar{b}_j(\xi_1, k)$ se incrementa con k existe un único $\bar{k}_j(\xi_1)$ satisfaciendo $0 < \bar{k}_j(\xi_1) \leq \bar{k}_j(\xi_1)$ tal que $\bar{b}_j(\xi_1, \bar{k}_j(\xi_1)) = 0$, para cada $\xi_1 \in [0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)}]$. \square

Por conveniencia se introduce la siguiente definición

Definición 41 Se denotan por k_{b2j} y k_{b1j} a los puntos de bifurcación del sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j, j = 1, 2$, con respecto a la parte imaginaria de los

Capítulo 3. Extensión de la dinámica de la bifurcación zip en modelos suaves 63
valores propios a lo largo del segmento de equilibrios L_k ; los cuales satisfacen las condiciones

$$\begin{aligned}\bar{b}_j(\xi_{10}, k_{b2j}) &= 0, \\ \bar{b}_j(\xi_{11}, k_{b1j}) &= 0.\end{aligned}$$

Observación 42 La Definición 41 tiene sentido por el Lema 40.

Observación 43 De las Definiciones 37, 41 y el Lema 40, se sigue las siguientes relaciones de orden entre los puntos bifurcación de la parte real y la parte imaginaria de los valores propios conjugados del sistema (2.1).

$$\begin{aligned}k_{b2j} &< k_{a2j} \\ k_{b1j} &< k_{a1j}.\end{aligned}\tag{3.33}$$

Definición 44 Se denota por $\bar{\xi}_{1j}(k)$ y $\bar{\bar{\xi}}_{1j}(k)$ a las raíces menor y mayor respectivamente de la siguiente ecuación cuadrática en la variable ξ_1 dada por $\bar{b}_j(\xi_1, k) = 0$, es decir

$$-m_j^2 \xi_1^2 + (A_j - 2m_j c_j(k, a_2)) \xi_1 + D_j(k) - c_j^2(k, a_2) = 0.\tag{3.34}$$

Observe que si $\bar{b}_j(\xi_1, k) = 0$, y $\bar{\xi}_{1j}(k) = 0$, o $\bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) = 0$, para algún k , entonces $D_j(k) - c_j^2(k, a_2) = 0$. Esto significa que los ceros de $\bar{\xi}_{1j}(k)$ o los ceros de $\bar{\bar{\xi}}_{1j}(k)$ están contenidos en los ceros de $\bar{c}_j(k, a_2) = D_j(k) - c_j^2(k, a_2)$ más adelante se mostrará que en verdad coinciden.

Para determinar la dinámica de la parte imaginaria de los valores propios \bar{b}_j sobre la recta de equilibrios L_k de cada subsistema del sistema (2.1) generado por el campo f_j , $j = 1, 2$, el análisis del comportamiento de las funciones $\bar{\xi}_{1j} = \bar{\xi}_{1j}(k)$ y $\bar{\bar{\xi}}_{1j} = \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k)$ será de fundamental importancia, donde $\bar{\xi}_{1j}$ y $\bar{\bar{\xi}}_{1j}$ son las raíces de la ecuación $\bar{b}_j(\xi_1, k) = 0$. El comportamiento de $\bar{\xi}_{1j}$ y $\bar{\bar{\xi}}_{1j}$ es en gran medida determinado por el comportamiento de las siguientes funciones

$$\bar{c}_j(k, a_2) = D_j(k, a_2) - c_j^2(k, a_2),\tag{3.35}$$

$$w_j(k, a_2) = (A_j - 2m_j c_j(k, a_2)),\tag{3.36}$$

Capítulo 3. Extensión de la dinámica de la bifurcación zip en modelos suaves 64
razón por la cual se realiza su análisis para determinar sus características en lo que sigue.

Proposición 45 *Considere la función $\bar{c}_j(k, a_2) = D_j(k, a_2) - c_j^2(k, a_2)$. Entonces:*

i) *Existe $\varepsilon > 0$, tal que $\partial_k \bar{c}_j(k) > 0$, para $\lambda < k < k_{a_{2j}} + \varepsilon$. Además existe un único k_{bj} con $\lambda < k_{bj} < k_{a_{2j}} + \varepsilon$, satisfaciendo $\bar{c}_j(k_{bj}) = 0$, y $k_{bj} = k_{b_{2j}}$.*

ii) *Si $\gamma \lambda \partial_s p_j(\lambda, a_2) < \frac{\gamma^2}{4p_j(\lambda, a_2)^2} (p_j(\lambda, a_2) - \lambda \partial_s p_j(\lambda, a_2))^2$, existe $\bar{k}_{b_{2j}} \neq k_{b_{2j}}$ tal que $\bar{c}_j(\bar{k}_{b_{2j}}, a_2) = 0$.*

iii) *Si $\gamma \lambda \partial_s p_j(\lambda, a_1) < \frac{\gamma^2}{4p_j(\lambda, a_1)^2} (p_j(\lambda, a_1) - \lambda \partial_s p_j(\lambda, a_1))^2$, existe $\bar{k}_{b_{1j}} \neq k_{b_{1j}}$ tal que $\bar{c}_j(\bar{k}_{b_{1j}}, a_1) = 0$.*

iv) *Si $D_j(k_{ij}, a_2) < c_j^2(k_i, a_2)$, existe $\bar{k} \in (k_{a_{2j}}, k_{ij})$ tal que $\partial_k \bar{c}_j(\bar{k}, a_2) = 0$, donde k_{ij} es el punto de inflexión de la función $c_j^2(k, a_2)$ con $k \in (k_{a_{2j}}, \infty)$.*

Prueba: i) La función

$$\partial_k \bar{c}_j(k) = \partial_k D_j(k, a_2) - 2c_j(k, a_2) \partial_k c_j(k, a_2) > 0, k \in (\lambda, k_{a_{2j}}], \quad (3.37)$$

ya que $\partial_k D_j(k, a_2) > 0$, $\partial_k c_j(k, a_2) > 0$, y $c_j(k_{a_{2j}}, a_2) = 0$, (Definición 37); luego por continuidad existe un $\varepsilon > 0$, tal que si $\lambda < k < k_{a_{2j}} + \varepsilon$, $\partial_k \bar{c}_j(k) > 0$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} \bar{c}_j(\lambda, a_2) &= D_j(\lambda, a_2) - c_j^2(\lambda, a_2) \\ &= -c_j^2(\lambda, a_2) < 0, \end{aligned} \quad (3.38)$$

y

$$\begin{aligned} \bar{c}_j(k_{a_{2j}}) &= D_j(k_{a_{2j}}, a_2) - c_j^2(k_{a_{2j}}, a_2) \\ &= D_j(k_{a_{2j}}, a_2) > 0. \end{aligned} \quad (3.39)$$

De (3.37), (3.38) y (3.39) se concluye por continuidad que existe k_{bj} tal que $\bar{c}_j(k_{bj}, a_2) = 0$, $k_b \in (\lambda, k_{a_{2j}})$. Resta mostrar que $k_{bj} = k_{b_{2j}}$. Como

$$\begin{aligned} \bar{b}_j(\xi_{10}, k_{b_{2j}}) &= -m_j^2 \xi_1^2 + (A_j - 2m_j c_j(k, a_2)) \xi_1 + D_j(k, a_2) - c_j^2(k, a_2) \\ &= D_j(k_{b_{2j}}, a_2) - c_j^2(k_{b_{2j}}, a_2) = 0, \end{aligned}$$

o sea $\bar{c}_j(k_{b2j}) = 0$, lo cual implica $k_{bj} = k_{b2j}$.

ii) De (2.8) y (2.9) se tiene

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g(\lambda, k) = 1; \lim_{k \rightarrow \infty} \partial_s g(\lambda, k) = 0,$$

consecuentemente

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} D_j(k, a_2) &= \lim_{k \rightarrow \infty} g(\lambda, k) \gamma \lambda \partial_s p_j(\lambda, a_2) \\ &= \gamma \lambda \partial_s p_j(\lambda, a_2), \end{aligned} \quad (3.40)$$

y

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} c_j(k, a_2) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\gamma \lambda \partial_s g(\lambda, k)}{2} + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\gamma g(\lambda, k) (p_j(\lambda, a_2) - \lambda \partial_s p_j(\lambda, a_2))}{2p_j(\lambda, a_2)} \\ &= \frac{\gamma (p_j(\lambda, a_2) - \lambda \partial_s p_j(\lambda, a_2))}{2p_j(\lambda, a_2)}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

De la hipótesis de (3.40) y (3.41) se tiene que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{c}_j(k, a_2) = \gamma \lambda \partial_s p_j(\lambda, a_2) - \frac{\gamma^2 (p_j(\lambda, a_2) - \lambda \partial_s p_j(\lambda, a_2))^2}{4p_j(\lambda, a_2)^2} < 0. \quad (3.42)$$

Además,

$$\begin{aligned} \bar{c}_j(k_{a2j}) &= D_j(k_{a2j}, a_2) - c_j^2(k_{a2j}, a_2) \\ &= D_j(k_{a2j}, a_2) > 0, \end{aligned} \quad (3.43)$$

luego de (3.42) y (3.43) se concluye que existe $\bar{k}_{b2j} \in (k_{a2j}, \infty)$ tal que $\bar{c}_j(\bar{k}_{b2j}, a_2) = 0$, y $k_{b2j} \neq \bar{k}_{b2j}$, ya que por la Observación 43, $k_{b2j} < k_{a2j}$.

iii) La afirmación se tiene por simetría en el procedimiento con a_2 y a_1 .

iv) Como $c_j(k_{a2j}, a_2) = 0$ y $c_j(k, a_2)$ es creciente en k , entonces

$$\partial_k c_j^2(k, a_2) = \begin{cases} 2c_j(k, a_2) \partial_k c_j(k, a_2) > 0, & \text{si } k \in (k_{a2j}, \infty) \\ 0, & \text{si } k = k_{a2j} \\ 2c_j(k, a_2) \partial_k c_j(k, a_2) < 0, & \text{si } k \in (0, k_{a2j}), \end{cases} \quad (3.44)$$

luego

$$\begin{aligned} \partial_{kk}^2 c_j^2(k_{a2j}, a_2) &= 2c_j(k_{a2j}, a_2) \partial_{kk}^2 c_j(k_{a2j}, a_2) + 2(\partial_k c_j(k_{a2j}, a_2))^2 \\ &= 2(\partial_k c_j(k_{a2j}, a_2))^2 > 0, \end{aligned}$$

ya que $c_j(k_{a2j}, a_2) = 0$ y $\partial_k c_j(k, a_2) > 0$. Además de (3.44) y (2.16) se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \partial_k c_j^2(k, a_2) &= 0, \\ \partial_k c_j^2(k_{a2j}, a_2) &= 0, \end{aligned}$$

así por continuidad existe $k_{ij} \in (k_{a2j}, \infty)$ tal que

$$\partial_{kk}^2 c_j^2(k_{ij}, a_2) = 0.$$

Como $\partial_{kk}^2 D_j(k, a_2) = \gamma \lambda \partial_{kk}^2 g(\lambda, a_2) \partial_s p_j(\lambda, a_2) < 0$; $\partial_k c_j^2(k, a_2) > 0$, con $k \in (k_{a2j}, k_{ij})$ y $\partial_k D_j(k_{a2j}, a_2) > 0$, por lo tanto si $D_j(k_{ij}, a_2) < c_j^2(k_{ij}, a_2)$, entonces existe por continuidad $\bar{k} \in (k_{a2j}, k_{ij})$ satisfaciendo $\bar{c}_j(\bar{k}, a_2) = 0$, donde k_{ij} es el punto de inflexión de la función $c_j^2(k, a_2)$ y $k_{ij} \in (k_{a2j}, \infty)$. \square

Definición 46 Si se cumple la condición ii) de la Proposición 45, decimos que la función $\bar{c}_j(k, a_2)$ tiene genéricamente una gráfica del tipo I, ver Figura 3.1. Si la función $\bar{c}_j(k, a_2)$ es monótona creciente, decimos que tiene genéricamente una gráfica del tipo IIA, ver Figura 3.2. Si la función $\bar{c}_j(k, a_2)$ tiene una gráfica del tipo IIA o del tipo IIB decimos que tiene genéricamente una gráfica del tipo II. Si se cumple la condición ii) con desigualdad contraria, y iv) de la propocición 45, decimos que la función $\bar{c}_j(k, a_2)$ tiene genéricamene una gráfica del tipo IIB, ver Figura 3.3.

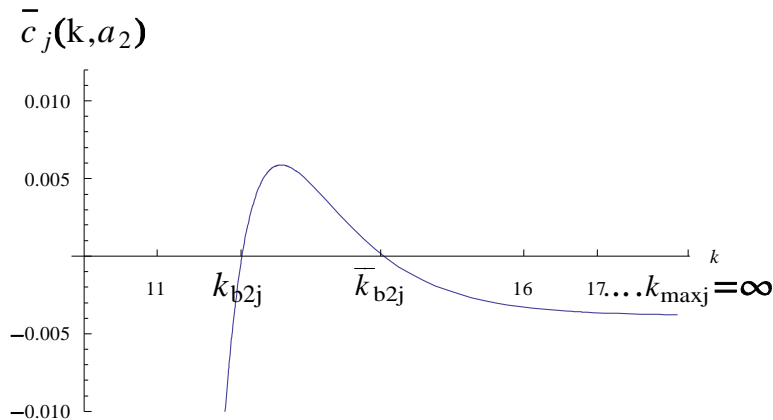


Figura 3.1: Gráfica del tipo I de la función $\bar{c}_j(k, a_2)$.

Las gráficas del tipo I, tipo IIA y del tipo IIB, se presentan en las Figuras 3.1, 3.2, y 3.3, respectivamente. Estas gráficas ilustran los diferentes comportamientos de función $\bar{c}_j(k, a_2)$ considerados en la Definición 46.

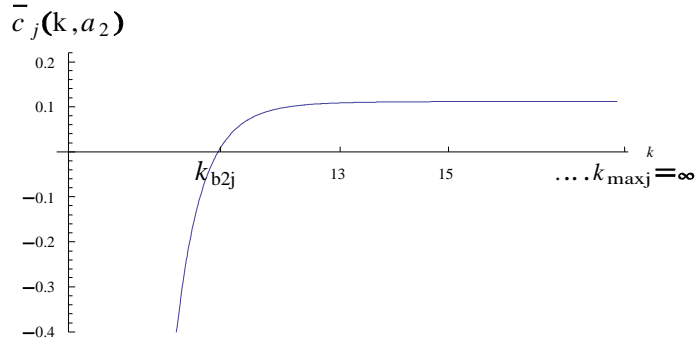


Figura 3.2: Gráfica del tipo IIA de la función $\bar{c}_j(k, a_2)$.

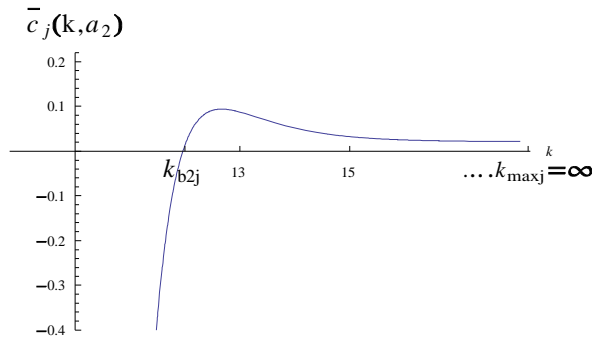


Figura 3.3: Gráfica del tipo IIB de la función $\bar{c}_j(k, a_2)$.

Ahora se conjetura la existencia de ciertas clases de modelos que exhiben la bifurcación zip, lo cual se demuestra más adelante. Estas clases se establecen con base en los parámetros $m_j, w_j(k_{b2j}) = (A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2))$ que determinan la dirección del zip geo-métrico asociado a la parte real e imaginaria de los valores propios conjugados de la linealización del sistema suave (2.1) generado por el campo $f_j, j = 1, 2$, respectivamente. Sin embargo, el parámetro adicional A_j también juega un papel importante en la determinación del comportamiento monótono de las clases determinadas por los parámetros m_j y $w_j(k_{b2j})$ en la dinámica que describen los puntos $\bar{\xi}_{1j}$ y $\bar{\bar{\xi}}_{1j}$, los cuales dividen las zonas de estabilidad de los puntos del segmento de

Capítulo 3. Extensión de la dinámica de la bifurcación zip en modelos suaves 68
 equilibrios L_k en equilibrios (foco o nodo, estable e inestable) en cada sistema suave
 (2.1) generado por el campo f_j .

Observación 47 *El $k_{\max j} = \infty$ en las gráficas del tipo I, IIA y IIB significa la no existencia de un $k > \bar{k}_{b2j}$ tal que $\bar{c}_j(k, a_2) = 0$.*

Definición 48 *Se dice que sistema (2.1) asociado al campo f_j , $j = 1, 2$, satisfaciendo las condiciones de Butler-Farkas es:*

del tipo 1A sii

$$m_j < 0, w_j(k_{b2j}) < 0, A_j < 0,$$

del tipo 1B sii

$$m_j < 0, w_j(k_{b2j}) < 0, A_j > 0,$$

de tipo 2 sii

$$m_j > 0, w_j(k_{b2j}) < 0, A_j < 0,$$

del tipo 3 sii

$$m_j < 0, w_j(k_{b2j}) > 0, A_j > 0,$$

del tipo 4 sii

$$m_j > 0, w_j(k_{b2j}) > 0, A_j < 0,$$

del tipo 5 sii

$$m_j < 0, w_j(k_{b2j}) > 0, A_j < 0,$$

del tipo 6 sii

$$m_j > 0, w_j(k_{b2j}) > 0, A_j > 0,$$

del tipo 7 sii

$$m_j > 0, w_j(k_{b2j}) < 0, A_j > 0,$$

donde $w_j(k_{b2j}) = (A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2))$.

Observación 49 *Se dice que el subsistema del sistema (2.1) generado por el campo f_j , $j = 1, 2$, es del tipo 1A, 1B, 2, 3, 4, sii el sistema suave (2.1) asociado al campo f_j es del tipo 1A, 1B, 2, 3, 4, respectivamente.*

Proposición 50 *Las clases de los sistemas (2.1) asociados a los campos f_j que son de los tipos 1-4 son no vacías. Además, las clases de los sistemas (2.1) asociados a los campos f_j que son de los tipos 5-7 son vacías.*

Prueba: En primer lugar se demuestra que las clases de los sistemas (2.1) asociados a los campos f_j de los tipos 5-7 son vacías.

Suponga que existen modelos del tipo 5, como $c_j(k_{b2j}, a_2) < 0$, ya que c_j es creciente en k , $k_{b2j} < k_{a2j}$ y $c_j(k_{a2j}, a_2) = 0$, por lo tanto $m_i < 0$, y $A_j < 0$, implica que $w_j(k_{b2j}) < 0$, lo cual es absurdo. Por lo tanto la clase de los sistemas (2.1) del tipo 5 asociados a campos f_j es vacía.

Veamos que las clases de los sistemas (2.1) asociados a los campos de los tipos 6-7 son vacías.

Si el modelo es artificial $m_j > 0$, es decir

$$m_j = \frac{p_j(\lambda, a_1)\partial_s p_j(\lambda, a_2) - p_j(\lambda, a_2)\partial_s p_j(\lambda, a_1)}{2p_j(\lambda, a_2)} > 0,$$

como $p_j(\lambda, a_2) > 0$, consecuentemente de la expresión anterior se tiene

$$p_j(\lambda, a_2)\partial_s p_j(\lambda, a_1) - p_j(\lambda, a_1)\partial_s p_j(\lambda, a_2) < 0. \quad (3.45)$$

De (2.21) se tiene $p_j(\lambda, a_1) < p_j(\lambda, a_2)$, por lo tanto de (3.45) se obtiene

$$p_j(\lambda, a_1)\partial_s p_j(\lambda, a_1) - p_j(\lambda, a_1)\partial_s p_j(\lambda, a_2) < 0,$$

$$A_j = p_j(\lambda, a_1) [\partial_s p_j(\lambda, a_1) - \partial_s p_j(\lambda, a_2)] < 0.$$

Ahora bien $A_j < 0$, no puede ser ya que por hipótesis $A_j > 0$, luego las clases de los sistemas (2.1) asociados a los campos f_j que son de los tipos 6 y 7 son vacías.

Para demostrar que las clases de los sistemas (2.1) asociados a los campos f_j , $j = 1, 2$, que son de los tipos 1-4 no son vacías, se construyen modelos que satisfacen las propiedades que definen estas clases. Esto se realiza considerando que el sistema (2.1) depende de la función de resistencia ambiental g dada por la expresión (2.28) y respuesta funcional p_j dada por la expresión (2.29), y satisfacen las condiciones

de Butler-Farkas arriba mencionadas. A continuación se presentan las funciones que definen los subsistemas de cada tipo:

Modelo Tipo 1:

$$\begin{aligned}
 p_1(s, a) &= \frac{s}{1 + \sqrt{a}} + \frac{s}{a + s} \\
 p_2(s, a) &= \frac{10}{1 + \sqrt{a}} - \frac{10}{10 + a} - \frac{13.7867}{2 + 6a} + \frac{3s^{0.66234}}{a + 6a} + \frac{2s}{a + s} \\
 g(s, k) &= 1 - \left(\frac{e^s - 1}{e^k - 1} \right) \left(\frac{s}{k} \right) \\
 a_1 &= 4.47736; a_2 = 2; \gamma = 1; d_1 = 3.9; d_2 = 4.97547; \\
 \lambda &= 10; k_{b21} = 11.0431; k_{b22} = 11.4115
 \end{aligned}$$

Modelo tipo 1A:

$$\begin{aligned}
 p_1(s, a) &= \frac{s^{.8}}{1 + 10a^3} + \frac{4.8s}{a + 6s} \\
 p_2(s, a) &= \frac{9.6}{12 + a} - \frac{14}{a^{0.1}(14 + a)} - \frac{1.7411}{1 + 10a^{15}} + \frac{s^{0.4032}}{1 + a^{15}} + \frac{7s}{a^{0.1}(a + 7s)} \\
 g(s, k) &= 1 - \left(\frac{s}{k} \right) \\
 a_1 &= 12.006; a_2 = 1.12; \gamma = 1; d_1 = .4; d_2 = 0.8474066344007937; \\
 \lambda &= 2; k_{b21} = 2.89569; k_{b22} = 2.90424
 \end{aligned}$$

Modelo tipo 2:

$$\begin{aligned}
 p_1(s, a) &= \frac{s}{1 + a} + \frac{s}{a + s} \\
 p_2(s, a) &= \frac{10}{1 + a} - \frac{10}{10 + a} - \frac{29.4921}{2 + 6a} + \frac{3s^{0.992585}}{2 + 6a} + \frac{2s}{a + s} \\
 g(s, k) &= 1 - \left(\frac{e^s - 1}{e^k - 1} \right) \left(\frac{s}{k} \right) \\
 a_1 &= 6.22681; a_2 = 1.01; \gamma = 1; d_1 = 2; d_2 = 5.883389591551778 \\
 ; \lambda &= 10; k_{b21} = 10.9835; k_{b22} = 11.0541
 \end{aligned}$$

Modelo tipo 3:

$$\begin{aligned}
 p_1(s, a) &= \frac{s^{-1}}{1 + a^{15}} + \frac{7s}{a \cdot (a + 7s)} \\
 p_2(s, a) &= -\frac{14}{14 + a} + \frac{14}{a \cdot (14 + a)} - \frac{1.09976}{2 + a^{10}} + \frac{1.07177}{1 + a^{15}} + \\
 &\quad \frac{s^{0.137186}}{1 + a^{10}} + \frac{7s}{a + 7s} \\
 g(s, k) &= 1 - \left(\frac{s}{k}\right) \\
 a_1 &= 5.630119; a_2 = 1.0; \gamma = 1; d_1 = .6; d_2 = 1.46922006460148; \\
 \lambda &= 2; k_{b21} = 2.86864; k_{b22} = 2.89186
 \end{aligned}$$

Modelo tipo 4:

$$\begin{aligned}
 p_1(s, a) &= \frac{s^{0.9}}{(5 + 5a^8)} + \frac{(0.1s)}{(3 + a^{0.2})(a + s)} \\
 p_2(s, a) &= \frac{.5}{(3 + a^2)(5 + a)} - \frac{.5}{(4 + a^3)(5 + a)} - \frac{3.83139}{1 + 5a^7} + \frac{4.2567}{5 + 5a^8} \\
 &\quad + \frac{s^{0.834594}}{1 + 5a^7} + \frac{.15}{(4 + a^3)(a + s)} \\
 g(s, k) &= 1 - \left(\frac{e^s - 1}{e^k - 1}\right)^3 \left(\frac{s}{k}\right) \\
 a_1 &= 1.70308; a_2 = 1.6; \gamma = 1; d_1 = .03; d_2 = 0.03785473781883826 \\
 ; \lambda &= 5; k_{b21} = 8.20873; k_{b22} = 8.49312
 \end{aligned}$$

□

Para establecer la importancia del parámetro $w_j(k_{b2j})$ en la dinámica del sistema (2.1), se estudia las siguientes propiedades de la función $w_j(k) = A_j - 2m_j c_j(k, a_2)$.

Proposición 51 *La derivada de la función $w_j(k) = A_j - 2m_j c_j(k, a_2)$, con $k \in (0, \infty)$ tiene la siguiente propiedad*

$$\begin{aligned}
 \partial_k w_j(k) &> 0, \text{ si } m_j < 0, \\
 \partial_k w_j(k) &= 0, \text{ si } m_j = 0, \\
 \partial_k w_j(k) &< 0, \text{ si } m_j > 0.
 \end{aligned}$$

Prueba: Es consecuencia inmediata de que $c_j(k, a_2)$ es creciente con k . □

Definición 52 Se define la constante \bar{k}_{bj} como sigue: Si $m_j \neq 0$, y existe un $\bar{k} \in (0, \infty)$, que satisface la ecuación

$$A_j - 2m_j c_j(\bar{k}, a_2) = 0, \quad (3.46)$$

entonces, $\bar{k}_{bj} = \bar{k}$; si no existe $k \in (0, \infty)$ tal que $A_j - 2m_j c_j(\bar{k}, a_2) = 0$, o si $m_j = 0$, se define $\bar{k}_{bj} = \infty$.

Claramente la definición anterior es consistente, ya que \bar{k}_{bj} es único por la Proposición 51, en cualquiera de los casos.

A continuación se define los valores de $\bar{k}_{\min j}$ y $\bar{k}_{\max j}$ que determinan los dominios de las funciones $w_j(k)$, $\bar{\xi}_{1j}(k)$ y $\bar{\bar{\xi}}_{1j}(k)$, donde se restringe una parte del estudio de interés de la dinámica de la bifurcación de zip.

Definición 53 Los valores de $\bar{k}_{\min j}$ y $\bar{k}_{\max j}$ que determinan los dominios de interés de las funciones $w_j(k)$, $\bar{\xi}_{1j}(k)$ y $\bar{\bar{\xi}}_{1j}(k)$, vienen dados por las expresiones:

$$\begin{aligned} \bar{k}_{\min j} &= \inf\{k > 0 : A_j^2 + 4m_j^2 D_j(k) - 4m_j A_j c_j(k, a_2) \geq 0, k \in (0, k_{a2j})\}, \\ \bar{k}_{\max j} &= \begin{cases} \sup\{k > 0 : A_j^2 + 4m_j^2 D_j(k) - 4m_j A_j c_j(k, a_2) \geq 0, k \in [k_{a2j}, \infty)\} < \infty \\ \infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Observacion: En la definición anterior $\bar{k}_{\min j}$, siempre existe y es único, porque el conjunto

$$\{k > 0 : A_j^2 + 4m_j^2 D_j(k) - 4m_j A_j c_j(k, a_2) \geq 0, k \in (0, k_{a2j})\},$$

es un conjunto acotado de número reales, luego existe su ínfimo y su supremo. Ahora $\bar{k}_{\max j}$ siempre existe y es único en nuestro caso, ya que si el conjunto

$$\{k > 0 : A_j^2 + 4m_j^2 D_j(k) - 4m_j A_j c_j(k, a_2) \geq 0, k \in [k_{a2j}, \infty)\},$$

no es acotado se adopta como $\bar{k}_{\max j} = \infty$, y si es acotado existe y es único por la misma razón que $\bar{k}_{\min j}$.

Proposición 54 *La función $w_j(k) = A_j - 2m_j c_j(k, a_2)$, con $k \in (0, \infty)$ tiene la siguiente propiedad*

$$\begin{aligned} w_j(k) &< 0, \text{ si } w_j(k_{b2j}) < 0, k \in [\bar{k}_{\min j}, k_{b2j}), \\ w_j(k) &> 0, \text{ si } w_j(k_{b2j}) > 0, k \in [\bar{k}_{\min j}, k_{b2j}). \end{aligned}$$

Prueba: si $m_j > 0$, entonces por la Proposición 51, se tiene que $\partial_k w_j(k) < 0$, además existe $\bar{k} \in (0, k_{b2j})$ tal que $w_j(\bar{k}) > 0$, por lo tanto existe $\bar{\bar{k}}$ tal que $w_j(\bar{\bar{k}}) = 0$. Como $\bar{\bar{k}} < k_{b2j}$, entonces teniendo en cuenta la parte i) de la Proposición 45, se tiene que

$$\left(A_j - 2m_j c_j(\bar{\bar{k}}, a_2) \right)^2 + 4m_j^2 \left(D_j(\bar{\bar{k}}) - c_j^2(\bar{\bar{k}}, a_2) \right) < 0,$$

luego $\bar{k}_{\min j} > \bar{\bar{k}}$, y por lo tanto $w_j(k) < 0$, si $k \in [\bar{k}_{\min j}, k_{b2j})$.

Si $m_j < 0$, entonces por la Proposición 51, se tiene que $\partial_k w_j(k) > 0$, además como $w_j(k_{b2j}) < 0$, por lo tanto $w_j(k) < 0$, si $k \in [\bar{k}_{\min j}, k_{b2j})$.

Si $m_j = 0$, entonces por la Proposición 51, se tiene que $\partial_k w_j(k) = 0$, y $w_j(k) = w_j(k_{b2j}) < 0$, si $k \in [\bar{k}_{\min j}, k_{b2j})$; luego se obtiene la primera afirmación. La segunda propiedad se demuestra en forma semejante y por brevedad se omite. \square

Observación 55 *A pesar de que los dominios de las funciones $\bar{\xi}_{1j}(k)$ y $\bar{\bar{\xi}}_{1j}(k)$ están bien definidos en el intervalo cerrado $[\bar{k}_{\min j}, \bar{k}_{\max j}]$ se tienen dos limitaciones de este intervalo ocasionadas por la dinámica propia de la bifurcación zip. La primera restricción ocurre si la condición $k = \bar{k}_{b2j}$ o $k = \bar{k}_{b1j}$ es alcanzada, entonces $\bar{c}_j(\bar{k}_{b2j}, a_2) = 0$, o $\bar{c}_j(\bar{k}_{b1j}, a_1) = 0$ (véase la parte ii) y iii) de la Proposición 45), luego por la proposición 39, el Lema 40 y la definición 41, se sigue que $\bar{k}_{b2j} \geq k_{b2j}$, $\bar{b}_j(\xi_{10}, \bar{k}_{b2j}) = 0$; o $\bar{k}_{b1j} \geq k_{b1j}$, $\bar{b}_j(\xi_{11}, \bar{k}_{b1j}) = 0$, lo que ocasiona de nuevo alteración del estado cualitativo del extremo superior o del inferior de L_k , respectivamente, los cuales se restringuen en la dinámica propia de la bifurcación zip. En consecuencia de lo anterior el intervalo $[\bar{k}_{\min j}, \bar{k}_{\max j}]$ se limita superiormente en algunas ocasiones por los valores de \bar{k}_{b1j} o \bar{k}_{b2j} . También la condición de supervivencia de las tres especies en competición $\lambda < k$, puede limitar inferiormente el el intervalo $[\bar{k}_{\min j}, \bar{k}_{\max j}]$. Teniendo en cuenta*

Capítulo 3. Extensión de la dinámica de la bifurcación zip en modelos suaves 74
las limitantes en los dominios de las funciones $\bar{\xi}_{1j}(k)$ y $\bar{\bar{\xi}}_{1j}(k)$ mencionadas, nosotros restringimos el estudio de interés de la dinámica de la bifurcación de zip como sigue.

Definición 56 El estudio de interés de la dinámica de la bifurcación de zip se restringe al intervalo $[k_{\min j}, k_{\max j}]$, donde $k_{\min j}$ y $k_{\max j}$ se definen como:

$$\begin{aligned} k_{\min j} &= \max\{\lambda, \bar{k}_{\min j}\}, \\ k_{\max j} &= \min\{\bar{k}_{b2j}, \bar{k}_{b1j}, \bar{k}_{\max j}\}, \end{aligned}$$

donde $\bar{k}_{b2j}, \bar{k}_{b1j}$, son los considerados en la Proposición 45 y $\bar{k}_{\min j}, \bar{k}_{\max j}$, los considerados en la Definición 53.

A continuación se realiza el análisis del comportamiento de las funciones $\bar{\xi}_{1j}(k)$ y $\bar{\bar{\xi}}_{1j}(k)$ como funciones de k ; para determinar la dinámica de la parte imaginaria de los valores propios \bar{b}_j sobre la recta de equilibrios L_k de cada subsistema $f_j, j = 1, 2$, del sistema (2.1) para las clases de subsistemas del tipo1 al tipo 4.

Proposición 57 Considere $\bar{\xi}_{1j}(k)$ y $\bar{\bar{\xi}}_{1j}(k)$ las raíces de $\bar{b}_j(\xi_1, k)$ dada en la Definición 44. Entonces se tiene que:

i)

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_{1j}(k) &= \frac{A_j - 2m_j c_j(k, a_2) - \sqrt{(A_j - 2m_j c_j(k, a_2))^2 + 4m_j^2 (D_j(k) - c_j^2(k, a_2))}}{2m_j^2}, \\ &= \frac{A_j - 2m_j c_j(k, a_2) - \sqrt{A_j^2 + 4m_j^2 D_j(k) - 4m_j A_j c_j(k, a_2)}}{2m_j^2}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) &= \frac{A_j - 2m_j c_j(k, a_2) + \sqrt{(A_j - 2m_j c_j(k, a_2))^2 + 4m_j^2 (D_j(k) - c_j^2(k, a_2))}}{2m_j^2}, \\ &= \frac{A_j - 2m_j c_j(k, a_2) + \sqrt{A_j^2 + 4m_j^2 D_j(k) - 4m_j A_j c_j(k, a_2)}}{2m_j^2}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

ii) Las funciones $\bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k)$ están bien definidas en el intervalo $D = [k_{\min j}, k_{\max j}]$, y satisfacen $\bar{\xi}_{1j}(\bar{k}_{\min j}) = \bar{\bar{\xi}}_{1j}(\bar{k}_{\min j})$, donde $k_{\min j}, \bar{k}_{\min j}$ y $k_{\max j}$, son los considerados

Capítulo 3. Extensión de la dinámica de la bifurcación zip en modelos suaves 75
 en la Definiciones 53 y 56. Además se tiene que

$$\begin{aligned} \text{si } m_j A_j &\geq 0, \\ k_{\min j} &= \lambda; \\ \text{si } m_j A_j &< 0, \\ \bar{k}_{\max j} &= \infty. \end{aligned}$$

iii) Si $(A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2)) < 0$, entonces

$$\partial_k \bar{\xi}_{1j}(k_{b2j}) > 0,$$

y si $(A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2)) > 0$, entonces

$$\partial_k \bar{\xi}_{1j}(k_{b2j}) < 0.$$

iv) Si $\bar{c}_j(k) > 0$, entonces

$$\bar{\xi}_{1j}(k) < 0, \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) > 0, \text{ para } k > k_{b2j}. \quad (3.49)$$

Si $\bar{c}_j(k) < 0$, y $m_j \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) < 0 &\iff (A_j - 2m_j c_j(k, a_2)) < 0 \\ &\iff (m_j > 0, k > \bar{k}_b) \vee (m_j < 0, k < \bar{k}_b); \\ \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) > 0 &\iff (A_j - 2m_j c_j(k, a_2)) > 0 \\ &\iff (m_j > 0, k < \bar{k}_b) \vee (m_j < 0, k > \bar{k}_b). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Por otra parte, si $m_j = 0$,

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) < 0 &\iff (A_j - 2m_j c_j(k, a_2)) < 0 \\ &\iff A_j < 0 \text{ y } k < \infty; \\ \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) > 0 &\iff (A_j - 2m_j c_j(k, a_2)) > 0 \\ &\iff A_j > 0 \text{ y } k < \infty. \end{aligned} \quad (3.51)$$

v) Si existe \bar{k} satisfaciendo $\bar{c}_j(\bar{k}) = 0$, con $\bar{k} > 0$, entonces

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_{1j}(\bar{k}) &= 0, \text{ si } (A_j - 2m_j c_j(\bar{k}, a_2)) > 0, \\ \bar{\bar{\xi}}_{1j}(\bar{k}) &= 0, \text{ si } (A_j - 2m_j c_j(\bar{k}, a_2)) < 0. \end{aligned} \quad (3.52)$$

vi) Los ceros de las funciones $\bar{\xi}_{1j}(k)$ y $\bar{\bar{\xi}}_{1j}(k)$ coinciden con los ceros de la función $\bar{c}_j(k)$.

Prueba: i) Las expresiones (3.47) y (3.48) se deducen en forma directa de considerar las raíces de la ecuación cuadrática (3.34) teniendo en cuenta que $\bar{\xi}_{1j}(k) \leq \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k)$ si son reales; si son complejas, significa que las raíces del polinomio característico $J_j(\lambda, \xi_1, \xi_2)$ son reales y consecuentemente la parte imaginaria es cero.

ii) La existencia de $\bar{\xi}_{1j}(k)$, $\bar{\bar{\xi}}_{1j}(k)$, con $k \in [k_{\min j}, k_{\max j}]$, es consecuencia inmediata de la existencia de $k_{\min j}$, $k_{\max j}$, por la observación dada en la Definición 53, y de que $\bar{\xi}_{1j}(k)$ y $\bar{\bar{\xi}}_{1j}(k)$ son funciones reales continuas si $A_j^2 + 4m_j^2 D_j(k) - 4m_j A_j c_j(k, a_2) \geq 0$, con $k \in [k_{\min j}, \bar{k}_{\max j}]$.

Si $m_j A_j \geq 0$, entonces

$$A_j^2 + 4m_j^2 D_j(k) - 4m_j A_j c_j(k, a_2) \geq 0, k \in (0, k_{a2j}),$$

ya que $c_j(k, a_2)$ es creciente en k y $c_j(k_{a2j}, a_2) = 0$, por lo tanto

$$\lambda \geq \inf \{k > 0 : A_j^2 + 4m_j^2 D_j(k) - 4m_j A_j c_j(k, a_2) \geq 0, \text{ con } k \in (0, k_{a2j})\} = 0,$$

luego $k_{\min j} = \lambda$.

Si $m_j A_j < 0$, entonces

$$A_j^2 + 4m_j^2 D_j(k) - 4m_j A_j c_j(k, a_2) \geq 0, \text{ para } k \in (k_{a2j}, \infty),$$

ya que $D_j(k) > 0$, y $c_j(k, a_2)$ para $k \in (k_{a2j}, \infty)$, luego

$$\bar{k}_{\max j} = \sup \{k > 0 : A_j^2 + 4m_j^2 D_j(k) - 4m_j A_j c_j(k, a_2) \geq 0, k \in (k_{a2j}, \infty)\} = \infty.$$

Por último $\bar{\xi}_{1j}(\bar{k}_{\min j}) = \bar{\bar{\xi}}_{1j}(\bar{k}_{\min j})$ es consecuencia directa de tener en cuenta que $A_j^2 + 4m_j^2 D_j(\bar{k}_{\min j}) - 4m_j A_j c_j(\bar{k}_{\min j}, a_2) = 0$, en las expresiones de (3.47) y (3.48).

iii) La derivada de $\bar{\bar{\xi}}_{1j}(k)$ viene dada por

$$\partial_k \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) = \frac{-4m_j \sqrt{A_j^2 + 4m_j^2 D_j(k) - 4m_j A_j c_j(k, a_2)} \partial_k c_j(k, a_2) + 4m_j^2 \partial_k D_j(k) - 4m_j A_j \partial_k c_j(k, a_2)}{4 \sqrt{A_j^2 + 4m_j^2 D_j(k) - 4m_j A_j c_j(k, a_2)}}. \quad (3.53)$$

De la parte 1 de la Proposición 45, se tiene que

$$D_j(k_{b2j}) = c_j^2(k_{b2j}, a_2); \quad (3.54)$$

sustituyendo (3.54) en (3.53) y teniendo en cuenta que $(A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2)) < 0$, se obtiene

$$\partial_k \bar{\xi}_{1j}(k_{b2j}) = \frac{-8m_j^2 c_j(k_{b2j}, a_2) \partial_k c_j(k_{b2j}, a_2) + 4m_j^2 \partial_k D(k_{b2j})}{\sqrt{A_j^2 + 4m_j^2 D(k_{b2j}) - 4m_j A_j c_j(k_{b2j}, a_2)}} > 0,$$

ya que $c_j(k_{b2j}, a_2) < 0$, y $\partial_k c_j(k, a_2)$, $\partial_k D_j(k)$ son ambos positivos para $k \in (0, k_{a2j})$. La otra desigualdad se obtiene de forma semejante y se omite.

iv) Si $\bar{c}_j(k) = (D_j(k) - c_j^2(k, a_2)) > 0$, entonces de la expresiones (3.47) y (3.48) resulta que

$$A_j - 2m_j c_j(k, a_2) < \sqrt{(A_j - 2m_j c_j(k, a_2))^2 + 4m_j^2 (D_j(k) - c_j^2(k, a_2))},$$

de lo cual se concluye (3.49).

Si $\bar{c}_j(k) = (D_j(k) - c_j^2(k, a_2)) < 0$, entonces de las expresiones (3.47) y (3.48), se tiene que

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_{1j}(k) &\leq 0 \\ \iff A_j - 2m_j c_j(k, a_2) - \sqrt{(A_j - 2m_j c_j(k, a_2))^2 + 4m_j^2 (D_j(k) - c_j^2(k, a_2))} &\leq 0 \\ \iff (A_j - 2m_j c_j(k, a_2)) &\leq 0; \end{aligned}$$

ahora bien, teniendo en cuenta la Proposición 51 y la Definición 52, se tiene que

$$\begin{aligned} (A_j - 2m_j c_j(k, a_2)) \leq 0 &\iff (m_j > 0, k \geq \bar{k}_{bj}) \vee (m_j < 0, k \leq \bar{k}_{bj}), \\ (A_j - 2m_j c_j(k, a_2)) \leq 0 &\iff (m_j = 0, A_j \leq 0, 0 < k < \infty), \end{aligned}$$

ya que $\partial_k w(k) = m_j$ y \bar{k}_{bj} es por definición el punto donde $w(\bar{k}_b) = 0$, $m_j \neq 0$ y $\bar{k}_{bj} = \infty$, en caso contrario. Por otra parte

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_{1j}(k) &\leq 0 \\ \iff A_j - 2m_j c_j(k, a_2) + \sqrt{(A_j - 2m_j c_j(k, a_2))^2 + 4m_j^2 (D_j(k) - c_j^2(k, a_2))} &\leq 0 \\ \iff (A_j - 2m_j c_j(k, a_2)) &\leq 0. \end{aligned}$$

Nuevamente, si tenemos en cuenta la Proposición 51 y la Definición 52, se obtiene

$$(A_j - 2m_j c_j(k, a_2)) \leq 0 \iff (m_j > 0, k \geq \bar{k}_{bj}) \vee (m_j < 0, k \leq \bar{k}_{bj})$$

$$(A_j - 2m_j c_j(k, a_2)) \leq 0 \iff (m_j = 0, A_j \leq 0, 0 < k < \infty),$$

ya que $\partial_k w_j(k) = m_j$ y \bar{k}_{bj} es por definición el punto donde $w(\bar{k}_{bj}) = 0, m_j \neq 0$ y $\bar{k}_{bj} = \infty$, en caso contrario, con lo cual queda demostrada (3.50) y 3.51.

v) Las expresiones (3.52) son consecuencia directa de sustituir $\bar{c}_j(\bar{k}) = 0$, en las expresiones (3.47) y (3.48), ya que

$$\frac{A_j - 2m_j c_j(k, a_2) - \sqrt{(A_j - 2m_j c_j(k, a_2))^2}}{2m_j^2} = 0,$$

ó

$$\frac{A_j - 2m_j c_j(k, a_2) + \sqrt{(A_j - 2m_j c_j(k, a_2))^2}}{2m_j^2} = 0.$$

vi) Teniendo en cuenta la observación de la Definición 44, basta probar que todo cero de $\bar{\xi}_{1j}(k)$ o $\bar{\bar{\xi}}_{1j}(k)$ es también cero de $\bar{c}_j(k)$ pero esto se sigue inmediatamente de las expresiones (3.47) y (3.48). \square

Observación 58 : *La propiedad iv) de la Proposición 57, nos dice que $\bar{c}_j(k)$ y $\bar{\xi}_{1j}(k)$ tienen el mismo signo si, y sólo si, $\bar{c}_j(k) > 0$, y que $\bar{c}_j(k)$ y $\bar{\xi}_{1j}(k)$ tienen signo contrario si, y sólo si, $\bar{c}_j(k) < 0$. Además si $\bar{c}_j(k) < 0$, los signos de $\bar{\xi}_{1j}(k)$ y $\bar{\bar{\xi}}_{1j}(k)$ son los mismos que el signo de $(A_j - 2m_j c_j(k, a_2))$, el cual depende de la clase de subsistema introducido en la Definición 48. La propiedad v) y Definición 41, nos dicen que los ceros de $\bar{c}_j(k)$ coinciden con los ceros de $\bar{\xi}_{1j}(k)$ o $\bar{\bar{\xi}}_{1j}(k)$, y nos da un criterio para determinarlo. Algunas de estas propiedades tienen alcance global, ya que como se demostrará ellas son suficientes para determinar la dinámica de los puntos de bifurcación de la parte imaginaria que depende del comportamiento de las funciones $\bar{\xi}_{1j}(k)$ y $\bar{\bar{\xi}}_{1j}(k)$ una vez conocido el tipo de comportamiento de la función $\bar{c}_j(k)$ dado por la Definición 46.*

A continuación se establecen relaciones de orden entre los valores de bifurcación k_{b2j} y k_{b1j} del sistema (2.1) de acuerdo a los diferentes casos de dirección del zip sobre la componente imaginaria.

Proposición 59 considere k_{b2j} y k_{b1j} los puntos bifurcación del sistema suave (2.1) dados en la Definición 41, y $\bar{k}_{\min j}$ de la Definición 53, entonces se tiene que

$$i) \text{ Si } A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2) < 0, m_j \neq 0, \quad (3.55)$$

$$\text{ entonces } k_{b2j} < k_{b1j}, \text{ y } \frac{A_j - 2m_j c_j(\bar{k}_{\min j}, a_2)}{m_j^2} \leq \xi_{11}(\bar{k}_{\min j}).$$

$$ii) \text{ Si } A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2) = 0, \text{ y } m_j \neq 0, \text{ entonces } k_{b2j} < k_{b1j}.$$

$$\text{ Si } A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2) = 0, \text{ y } m_j = 0, \text{ entonces } k_{b1j} = k_{b2j}.$$

$$iii) \text{ Si } A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2) > 0, \text{ y } \xi_{11}(\bar{k}_{\min j}) \leq \frac{A_j - 2m_j c_j(\bar{k}_{\min j}, a_2)}{m_j^2}, \quad (3.56)$$

$$\text{ entonces } k_{b1j} \leq k_{b2j}.$$

$$iv) \text{ Si } (A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2)) > 0, \frac{(A_j - 2m_j c_j(\bar{k}_{\min j}, a_2))}{m_j^2} \leq \xi_{11}(\bar{k}_{\min j}), \quad (3.57)$$

$$\frac{(A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2))}{m_j^2} \leq \xi_{11}(k_{b2j}), \text{ entonces } k_{b2j} \leq k_{b1j}.$$

$$v) \text{ Si } (A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2)) > 0, \frac{(A_j - 2m_j c_j(\bar{k}_{\min j}, a_2))}{m_j^2} \leq \xi_{11}(\bar{k}_{\min j}), \quad (3.58)$$

$$\text{ y } \xi_{11}(k_{b2j}) \leq \frac{A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2)}{m_j^2}, \text{ entonces } k_{b1j} \leq k_{b2j}.$$

Prueba: i) De (3.15) se tiene que si $A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2) < 0$, entonces

$$\partial_{\xi_1} \bar{b}_j(\xi_1, k_{b2j}) = -2m_j^2 \xi_1 + A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2) < 0,$$

para cada $\xi_1 \in [0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)}]$; además como $\bar{b}_j(\xi_{10}, k_{b2j}) = 0$, se concluye que

$$\bar{b}_j(\xi_{11}, k_{b2j}) < 0.$$

Como $\partial_k \bar{b}_j(\xi_{11}, k) > 0$, para $k \in (0, \bar{k}(\xi_{11}))$, por lo tanto si $\bar{b}_j(\xi_{11}, k_{b1j}) = 0$, entonces $k_{b2j} < k_{b1j}$. Además $w_j(k) < 0$, para $k \in (\bar{k}_{\min j}, k_{b2j})$, por la Proposición 54, luego $w_j(\bar{k}_{\min j}) < 0$, y

$$\frac{A_j - 2m_j c_j(\bar{k}_{\min j}, a_2)}{m_j^2} < 0 \leq \xi_{11}(\bar{k}_{\min j}). \quad (3.59)$$

Observe que la condición (3.59) nos indica que la parábola $\bar{b}_j(\xi_1, k)$ emerge del lado izquierdo de L_k y la condición (3.49) que la componente $\bar{\xi}_{1j}(k)$ no alcanza el origen, así que $\bar{\xi}_{1j}(k)$ determina la dinámica de cambio cualitativo del retrato de fase de la

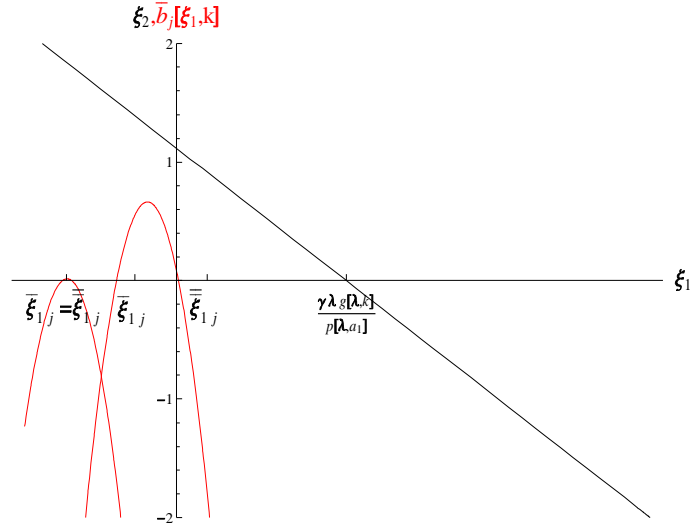


Figura 3.4: Gráfica que ilustra la condición de bifurcación (3.55). La parábola con raíces dobles se obtiene para $k = \bar{k}_{\min j}$ y la parábola con raíces diferentes se obtiene para $k = k_{b2j}$.

parte imaginaria de los valores propios \bar{b}_j sobre L_k alcanzando primero el origen que el extremo inferior de L_k , con lo cual $k_{b2j} < k_{b1j}$, ver Figura 3.4.

ii) Como $A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2) = 0$, se tiene que

$$\partial_{\xi_1} \bar{b}_j(\xi_1, k_{b2j}) = \begin{cases} -2m_j^2 \xi_1 + (A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2)) < 0, & m_j \neq 0 \\ -2m_j^2 \xi_1 + (A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2)) = 0, & \text{si } m_j = 0 \end{cases},$$

para cada $\xi_1 \in [0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)}]$; además como $\bar{b}_j(\xi_{10}, k_{b2j}) = 0$, luego

$$\bar{b}_j(\xi_{11}, k_{b2j}) \begin{cases} < 0, & \text{si } m_j \neq 0 \\ = 0, & \text{si } m_j = 0 \end{cases}.$$

Como $\partial_k \bar{b}_j(\xi_{11}, k) > 0, k \in (0, \bar{k}(\xi_{11}))$, se concluye que

$$\text{si } \bar{b}_j(\xi_{11}, k_{b1j}) = 0, \text{ entonces } \begin{cases} k_{b2j} < k_{b1j}, & \text{si } A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2) = 0, m_j \neq 0 \\ k_{b2j} = k_{b1j}, & \text{si } A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2) = 0, m_j = 0. \end{cases}.$$

iii) De la parte ii) de la Proposición 57, se tiene que $\bar{\xi}_{1j}(\bar{k}_{\min j}) = \bar{\xi}_{1j}(\bar{k}_{\min j}) = \frac{A_j - 2m_j c_j(\bar{k}_{\min j}, a_2)}{m_j^2} \geq 0$, entonces $\xi_{11}(\bar{k}_{\min j}) \leq \bar{\xi}_{1j}(\bar{k}_{\min j})$. Además se establece a continuación que $\bar{\xi}_1(k)$ es decreciente con $k \in (\bar{k}_{\min j}, k_{b2j})$, utilizando la clasificación de

Capítulo 3. Extensión de la dinámica de la bifurcación zip en modelos suaves 81
los tipos de modelos introducida en la Definición 46. Como $A - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2) > 0$, entonces el sistema suave (2.1) es del tipo 3 o del tipo 4, de acuerdo con la Definición 46. Si el sistema suave (2.1) es del tipo 3; de la primera expresión (3.47), se tiene que

$$\partial_k \bar{\xi}_{1j}(k) = \frac{-4m_j \sqrt{(A_j - 2m_j c_j(k, a_2))^2 + 4m_j^2 (D_j(k) - c_j^2(k, a_2))} \partial_k c_j(k, a_2) + 4m_j (A_j - 2m_j c_j(k, a_2)) \partial_k c_j(k, a_2) - 4m_j^2 \partial_k (D_j(k) - c_j^2(k, a_2))}{4m_j^2 \sqrt{(A_j - 2m_j c_j(k, a_2))^2 + 4m_j^2 (D_j(k) - c_j^2(k, a_2))}}, \quad (3.60)$$

es menor que cero, ya que $D_j(k) - c_j^2(k, a_2) < 0$, $m_j < 0$, $A_j - 2m_j c_j(k, a_2) > 0$, y $\partial_k (D_j(k) - c_j^2(k, a_2)) > 0$, si $k \in (\bar{k}_{\min j}, k_{b2j})$. Si el sistema suave (2.1) es del tipo 4; de la segunda igualdad en (3.47), se tiene que

$$\partial_k \bar{\xi}_{1j}(k) = \frac{-4m_j \sqrt{A_j^2 + 4m_j^2 D_j(k) - 4m_j A_j c_j(k, a_2)} \frac{\partial c_j(k, a_2)}{\partial k} - 4m_j^2 \partial_k D_j(k) + 4m_j A_j \partial_k c_j(k, a_2)}{4m_j^2 \sqrt{A_j^2 + 4m_j^2 D_j(k) - 4m_j A_j c_j(k, a_2)}} < 0; \quad (3.61)$$

ya que $m_j > 0$, $A_j < 0$, y $\partial_k D_j(k) > 0$, $\partial_k c_j(k, a_2) > 0$, si $k \in (\bar{k}_{\min j}, \infty)$, luego de (3.60) y (3.61), se tiene que

$$\partial_k \bar{\xi}_{1j}(k) < 0, \text{ si } k \in (\bar{k}_{\min j}, k_{b2j}). \quad (3.62)$$

Además como $\partial_k \xi_{11}(k) > 0$, ya que $g_k > 0$, por la condición (2.8) y $\bar{\xi}_1(k)$ decreciente para $k \in (\bar{k}_{\min j}, k_{b2j})$, entonces $\bar{\xi}_1(k_{b2j}) = 0$, implica la existencia de $\bar{k} < k_{b2j}$, tal que $\bar{\xi}_1(\bar{k}) = \xi_{11}(k)$ por continuidad, de lo cual se concluye que $\bar{k} = k_{b1} \leq k_{b2j}$. En este caso la parábola $\bar{b}_j(\xi_1, k)$ emerge del lado derecho de L_k y la componente $\bar{\xi}_{1j}(k)$ determina fundamentalmente la dinámica de cambio cualitativo del retrato de fase de la parte imaginaria de los valores propios \bar{b}_j sobre L_k alcanzando primero el extremo inferior de L_k que el origen con lo cual $k_{b2j} < k_{b1j}$, (ver Figura 3.5).

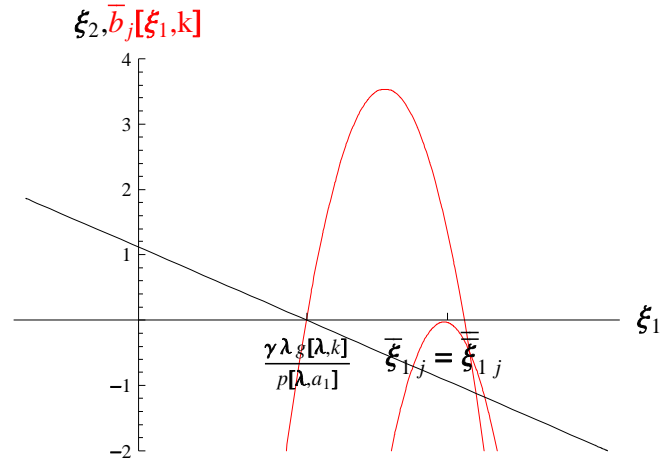


Figura 3.5: Gráfica que ilustra la condición de bifurcación (3.56). La parábola con raíces dobles se obtiene para $k = \bar{k}_{\min j}$ y la parábola con raíces diferentes se obtiene para $k = k_{b2j}$.

iv) y v) Como $\bar{b}_j(\xi_1(\bar{k}_{\min j}), \bar{k}_{\min j}) = 0$, se tiene que

$$\begin{aligned}
 \bar{b}_j(\xi_{11}, k_{b2j}) &= \int_{\xi_1(\bar{k}_{\min j})}^{\xi_{11}(k_{b2j})} \partial_{\xi_1} \bar{b}_j(\xi_1, k_{b2j}) d\xi_1 & (3.63) \\
 &= \int_{\xi_1(\bar{k}_{\min j})}^{\xi_{11}(k_{b2j})} -2m_j^2 \xi_1 + (A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2)) d\xi_1 \\
 &= -m_j^2 \xi_{11}^2 + (A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2)) \xi_{11} \\
 &= \xi_{11} (-m_j^2 \xi_{11} + (A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2))),
 \end{aligned}$$

así de (3.63), se deduce que

$$\bar{b}_j(\xi_{11}(k_{b2j}), k_{b2j}) \begin{cases} \leq 0, & \text{si } \frac{(A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2))}{m_j^2} \leq \xi_{11}(k_{b2j}), \\ \geq 0, & \text{si } \xi_{11}(k_{b2j}) \leq \frac{(A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2))}{m_j^2}. \end{cases} \quad (3.64)$$

Dado que $\partial_k \bar{b}_j(\xi_{11}(k), k) > 0, k \in (0, \bar{k}(\xi_{11}(k_{b1j}))]$, entonces $\bar{b}_j(\xi_{11}(k_{b1j}), k_{b1j}) = 0$,

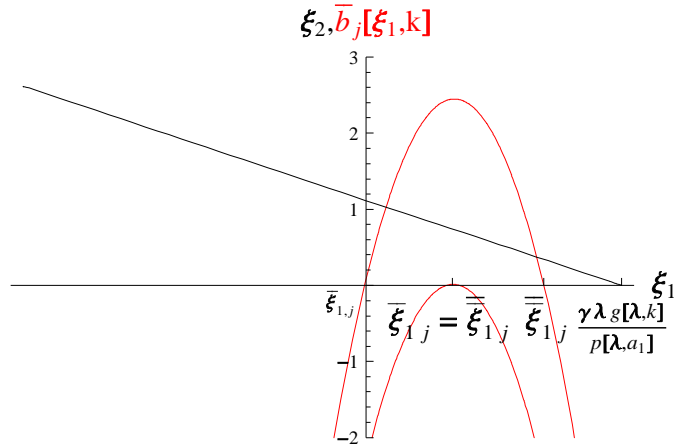


Figura 3.6: Gráfica que ilustra la condición de bifurcación (3.57). La parábola con raíces dobles se obtiene para $k = \bar{k}_{\min j}$ y la parábola con raíces diferentes se obtiene para $k = k_{b2j}$.

implica que

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{b2j} < k_{b1j}, \text{ si } (A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2)) > 0, \frac{(A_j - 2m_j c_j(\bar{k}_{\min j}, a_2))}{m_j^2} \leq \xi_{11}(\bar{k}_{\min j}), \\ \text{y } \frac{(A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2))}{m_j^2} \leq \xi_{11}(k_{b2j}); \\ k_{b2j} > k_{b1j}, \text{ si } (A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2)) > 0, \frac{(A_j - 2m_j c_j(\bar{k}_{\min j}, a_2))}{m_j^2} \leq \xi_{11}(\bar{k}_{\min j}), \\ \text{y } \xi_{11}(k_{b2j}) \leq \frac{(A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2))}{m_j^2}. \end{array} \right.$$

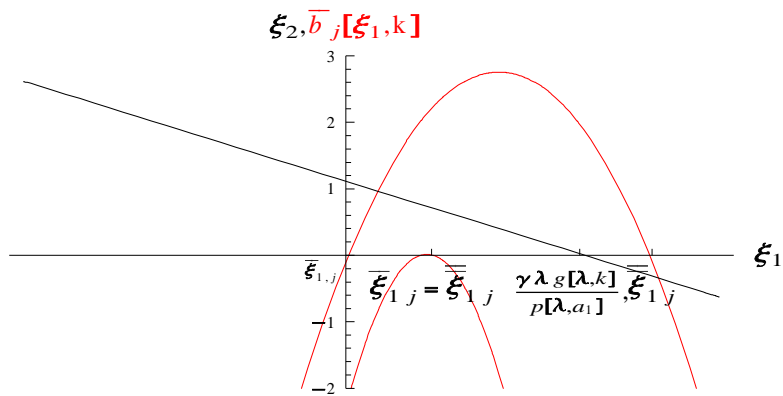


Figura 3.7: Gráfica que ilustra la condición de bifurcación (3.58). La parábola con raíces dobles se obtiene para $k = \bar{k}_{\min j}$ y la parábola con raíces diferentes se obtiene para $k = k_{b2j}$.

En este caso la parábola $\bar{b}_j(\xi_1, k)$ emerge debajo de L_k y ambas componentes $\bar{\xi}_{1j}(k)$ y $\bar{\bar{\xi}}_{1j}(k)$ determinan la dinámica de cambio cualitativo del retrato de fase de la parte imaginaria de los valores propios \bar{b}_j sobre L_k . En el caso *iv*) $\bar{\xi}_{1j}(k)$ alcanza primero el origen que $\bar{\bar{\xi}}_{1j}(k)$ el extremo inferior de L_k con lo cual $k_{b2j} < k_{b1j}$ y en el caso *v*) $\bar{\bar{\xi}}_{1j}(k)$ alcanza después el origen que $\bar{\xi}_{1j}(k)$ el extremo inferior de L_k con lo cual $k_{b1j} < k_{b2j}$ (véase Figura 3.6 y la Figura 3.7). \square

Observación 60 La condición $\frac{(A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2))}{m_j^2} \leq \xi_{11}(k_{b2j})$, significa geométricamente que el extremo izquierdo de la parábola $\bar{b}_j(\xi_1, k)$ intercepta el punto $\xi_{10}(k_{b2j})$ antes que el extremo derecho de la parábola $\bar{b}_j(\xi_1, k)$ intercepte el punto $\xi_{11}(k_{b2j})$ del segmento de equilibrios L_k , lo cual es consecuencia directa de que $\bar{\xi}_{1j}(k_{b2j}) = \xi_{10}$, $\bar{\bar{\xi}}_{1j}(k_{b2j}) = \frac{(A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2))}{m_j^2}$, ya que en este caso $D_j(k_{b2j}, a_2) - c_j^2(k_{b2j}, a_2) = 0$, véase (La Proposición 57). La Proposición 59 es interesante, ya que da lugar a una tentativa de clasificación de la dinámica de la bifurcación de zip de los modelos propuestos.

A continuación se establecen relaciones de orden entre los valores de bifurcación k_{b1j} y k_{a2j} del sistema suave (2.1).

Proposición 61 Considere k_{a2j} y k_{b1j} los puntos bifurcación de la parte real e imaginaria de los valores propios del sistema suave (2.1) respectivamente, dadas en las definiciones 41, y 37. Las siguientes propiedades se tienen:

i)

$$\begin{aligned} \text{si } -m_j^2 \xi_{11}^2 + \xi_{11} A_j + D_j(k_{a2j}) &> 0, \text{ entonces } k_{b1j} < k_{a2j} & (3.65) \\ \text{si } -m_j^2 \xi_{11}^2 + \xi_{11} A_j + D_j(k_{a2j}) &< 0, \text{ entonces } k_{a2j} < k_{b1j} \end{aligned}$$

ii) Si m_j es suficientemente pequeño, entonces $k_{b1j} < k_{a2j}$, lo cual ocurre para pequeñas perturbaciones de los modelos degenerados.

iii) Si $(k_{a1j} < k_{a2j}) \vee (k_{b1j} < k_{a2j})$, entonces $k_{b1j} < k_{a2j}$.

Prueba i) Dado que $c_j(k_{a2j}, a_2) = 0$, por (3.16) de la Proposición 35, de la Definición

Capítulo 3. Extensión de la dinámica de la bifurcación zip en modelos suaves 85
37 y la igualdad (3.15) se tiene

$$\bar{b}_j(\xi_{10}, k_{a2j}) = D_j(k_{a2j}) - c_j(k_{a2j}, a_2)^2 = D_j(k_{a2j}),$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \bar{b}_j(\xi_{11}, k_{a2j}) &= \int_{\xi_{10}(k_{a2j})}^{\xi_{11}(k_{a2j})} \frac{\partial \bar{b}_j(\xi_1, k_{a2j})}{\partial \xi_1} d\xi_1 + D_j(k_{a2j}) = \int_{\xi_{10}}^{\xi_{11}} (-2m_j^2 \xi_1 + A_j) d\xi_1 + D_j(k_{a2j}) \\ &= -m_j^2 \xi_{11}^2 + (A_j) \xi_{11} + D_j(k_{a2j}) = -m_j^2 \xi_{11}^2 + \xi_{11} A_j + D_j(k_{a2j}). \end{aligned} \quad (3.66)$$

De la Definición 41, se tiene $\bar{b}_j(\xi_{11}, k_{b1j}) = 0$, y dado que \bar{b}_j es creciente con k por el Lema 40, entonces se tiene que

$$\begin{cases} k_{b1j} < k_{a2j}, & \text{si } -m_j^2 \xi_{11}^2 + \xi_{11} A_j + D_j(k_{a2j}) > 0 \\ k_{b1j} > k_{a2j}, & \text{si } -m_j^2 \xi_{11}^2 + \xi_{11} A_j + D_j(k_{a2j}) < 0 \end{cases}. \quad (3.67)$$

ii) Como $\xi_{11} A_j + D_j(k_{a2j}) > 0$, luego de (3.67) se concluye que si m_j es suficientemente pequeño, entonces

$$k_{b1j} < k_{a2j}, \quad -m_j^2 \xi_{11}^2 + \xi_{11} A_j + D_j(k_{a2j}) > 0,$$

lo cual puede ocurrir en modelos degenerados con perturbaciones suficientemente pequeñas de m_j . Esta misma conclusión se puede obtener del siguiente razonamiento. Si el modelo es degenerado genéricamente se tiene que

$$k_{a1j} = k_{a2j}, \quad (3.68)$$

$$k_{b1j} = k_{b2j},$$

pero de (3.33) se tiene que

$$k_{b2j} < k_{a2j}, \quad (3.69)$$

$$k_{b1j} < k_{a1j},$$

luego de(3.68) y (3.69) se obtiene

$$k_{b1j} < k_{a2j}. \quad (3.70)$$

La conclusión se tiene por continuidad, ya que si perturbamos ligeramente m_j la desigualdad (3.70) todavía persiste.

iii) Si $(k_{a1j} < k_{a2j})$: De (3.33) se tiene que $k_{b1j} < k_{a1j}$, luego por transitividad

$$k_{b1j} < k_{a1j} < k_{a2j}.$$

Si $(k_{b1j} < k_{b2j})$: De (3.33) se tiene que $k_{b2j} < k_{a2j}$, luego por transitividad

$$k_{b1j} < k_{b2j} < k_{a2j},$$

con lo cual se termina la prueba. \square

A continuación se establece la relación entre los tipos de gráfica de $\bar{\xi}_{1j}(k)$ y $\bar{\bar{\xi}}_{1j}(k)$ y los tipos de gráficas de $\bar{c}_j(k)$ dados en la Definición 46, de acuerdo con los modelos dados en la Definición 48.

Proposición 62 *Sea el sistema (2.1) asociado al campo f_j , $j = 1, 2$, del tipo 1A.*

i) *Si $\bar{c}_j(k)$ tiene una gráfica del tipo IIA, entonces $\bar{\xi}_{1j}(k)$ es una gráfica del tipo IIA, y $\bar{\xi}_{1j}(k) < 0$, para $k \in (\lambda, \bar{k}_{\max j})$, ver Figura 3.8.*

ii) *Si $\bar{c}_j(k)$ tiene una gráfica del tipo IIB, entonces $\bar{\xi}_{1j}(k)$ es una gráfica del tipo IIA o IIB, y $\bar{\xi}_{1j}(k) < 0$, para $k \in (\lambda, \bar{k}_{\max j})$, ver Figuras 3.8 y 3.9.*

iii) *Si $\bar{c}_j(k)$ tiene una gráfica del tipo I, con $\bar{k}_{b2j} > \bar{k}_{bj}$, entonces $\bar{\xi}_{1j}(k)$ es una gráfica del tipo IIA o IIB, y $\bar{\xi}_{1j}(k) \leq 0$, si $k \in (\lambda, \bar{k}_{b2j})$; $\bar{\xi}_{1j}(k) > 0$, si $k \in (\bar{k}_{b2j}, \bar{k}_{\max j})$.*

iv) *Si $\bar{c}_j(k)$ tiene una gráfica del tipo I, con $\bar{k}_{b2j} < \bar{k}_{bj}$, entonces $\bar{\xi}_{1j}(k)$ es una gráfica del tipo I, y $\bar{\xi}_{1j}(k) < 0$, si $k \in (\lambda, \bar{k}_{\max j})$, ver Figura 3.10.*

Prueba: i) Considere la función $\bar{c}_j(k)$ del tipo IIA. Si $k > k_{b2j}$, entonces $\bar{c}_j(k) > 0$, luego de la parte iv) de la Proposición 57, se tiene que

$$\bar{\xi}_{1j}(k) < 0, \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) > 0;$$

ahora, si $k \leq k_{b2j}$, entonces $\bar{c}_j(k) < 0$, y

$$\bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) \leq 0,$$

Capítulo 3. Extensión de la dinámica de la bifurcación zip en modelos suaves 87
de la parte iv) de la Proposición 57.

De la segunda igualdad de (3.48), se tiene que

$$\partial_k \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) = \frac{-4m_j \sqrt{A_j^2 + 4m_j^2 D_j(k) - 4m_j A_j c_j(k, a_2)} \partial_k c_j(k, a_2) + 4m_j^2 \partial_k D_j(k) - 4m_j A_j \partial_k c_j(k, a_2)}{4m_j^2 \sqrt{A_j^2 + 4m_j^2 D_j(k) - 4m_j A_j c_j(k, a_2)}} > 0,$$

si

$$4m_j^2 D_j(k) - 4m_j A_j c_j(k, a_2) > 0,$$

o equivalentemente

$$m_j D_j(k) < A_j c_j(k, a_2),$$

ya que $m_j < 0$, $A_j < 0$, por ser el modelo del tipo 1A por hipótesis; luego si $k \in (\lambda, k_{a2j}]$.

$$\partial_k \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) > 0, \quad (3.71)$$

ya que $D_j(k) > 0$, y $c_j(k, a_2) < 0$, en este dominio. Además, de la primera igualdad en (3.48) se tiene que

$$\partial_k \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) = \frac{4m_j \sqrt{(A_j - 2m_j c_j(k, a_2))^2 + 4m_j^2 (D_j(k) - c_j^2(k, a_2))} \partial_k c_j(k, a_2) + 4m_j (A_j - 2m_j c_j(k, a_2)) \partial_k c_j(k, a_2) - 4m_j^2 \partial_k (D_j(k) - c_j^2(k, a_2))}{-4m_j^2 \sqrt{(A_j - 2m_j c_j(k, a_2))^2 + 4m_j^2 (D_j(k) - c_j^2(k, a_2))}};$$

como $\partial_k (D_j(k) - c_j^2(k, a_2)) > 0$, y $D_j(k) - c_j^2(k, a_2) > 0$, si $k \in [k_{a2j}, \infty)$, de la expresión anterior para $\partial_k \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k)$ se tiene que

$$\partial_k \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) > 0. \quad (3.72)$$

De (3.71) y (3.72) se concluye que $\bar{\bar{\xi}}_{1j}(k)$ es una gráfica del tipo IIA, y $\bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) < 0$, para $k \in (\lambda, \bar{k}_{\max j})$, con lo cual se tiene la primera afirmación, ver Figura 3.8.

ii) Considere la función $\bar{c}_j(k)$ del tipo IIB, entonces $\bar{c}_j(k) > 0$, si y sólo si $k \in (k_{b2j}, \infty)$. En consecuencia, por la parte (iii) de la Proposición 57, se tiene

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_{1j}(k) &< 0, \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) > 0 \text{ si } k > k_{b2j}, \\ \bar{\xi}_{1j}, \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) &\leq 0, \text{ si } k \leq k_{b2j}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

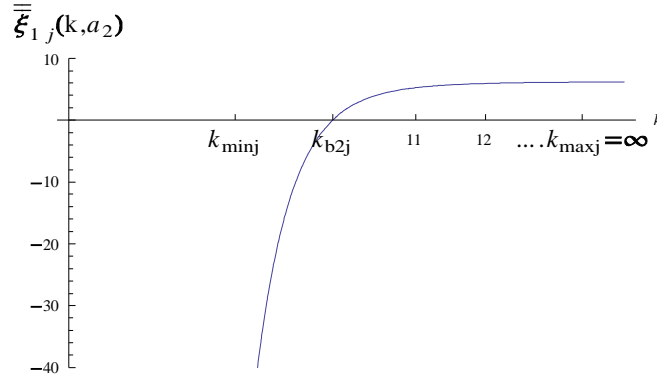


Figura 3.8: Gráfica del tipo IIA de la función $\bar{\xi}_{1j}(k, a_2)$ con $A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2) < 0$.

Además por la Definición 46, existe \bar{k} tal que $\partial_k \bar{c}_j(\bar{k}) = 0$, luego $\partial_k \bar{c}_j(k) > 0$, si $k \in (\lambda, \bar{k})$; $\partial_k \bar{c}_j(k) < 0$, si $k \in (\bar{k}, \infty)$, pues \bar{k} es punto de máximo de $\bar{c}_j(k)$ en el intervalo $(\lambda, \bar{k}_{maxj})$. En consecuencia, por la parte iii) de la Proposición 57, se tiene siguiendo el mismo argumento que se utilizó en (i) que

$$\partial_k \bar{\xi}_{1j}(k) > 0, \text{ si } k \in (\lambda, \bar{k});$$

dato que $\partial_k \bar{\xi}_{1j}(k)$ puede ser positiva o negativa en el intervalo $(k_{b2j}, \bar{k}_{maxj})$ y $\bar{\xi}_{1j}(k) > 0$, en $k \in (k_{b2j}, \infty)$ se tiene la segunda afirmación, es decir que $\bar{\xi}_{1j}(k)$ es una gráfica del tipo IIA o IIB, y $\bar{\xi}_{1j}(k) < 0$, para $k \in (\lambda, \bar{k}_{maxj})$, ver 3.8, y 3.9.

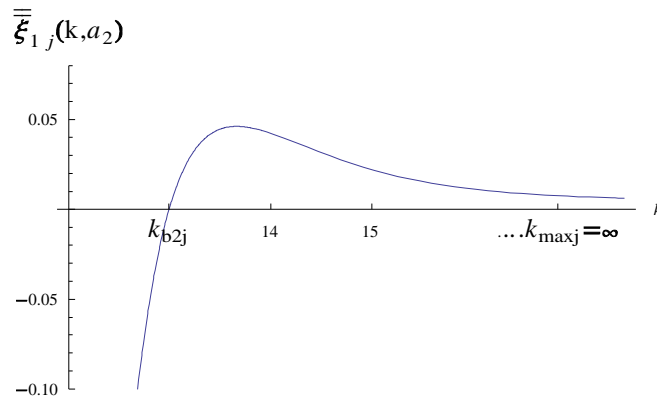


Figura 3.9: Gráfica del tipo IIB de la función $\bar{\xi}_{1j}(k, a_2)$ con $A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2) < 0$.

iii) Con raciocinio análogo al de (i) se muestra que

$$\partial_k \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) > 0, \text{ si } k \in (\lambda, \bar{k}_{\max j}).$$

Así, si $\bar{c}_j(k)$ tiene una gráfica del tipo I, y $\bar{k}_{b2j} > \bar{k}_{bj}$, por la parte ii) de la Proposición 45, existe \bar{k}_{b2j} tal que $\bar{c}_j(\bar{k}_{b2j}) = 0$; además $\bar{c}_j(k) > 0$ si $k \in (k_{b2j}, \bar{k}_{b2j})$, y $\bar{c}_j(k) < 0$, si $k \in (\lambda, k_{b2j})$ o $k \in (\bar{k}_{b2j}, k_{\max j})$. Luego, por (iv) y (v) de la Proposición 57, se tiene

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_{1j}(k) &< 0, \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) > 0, \text{ si } k \in (k_{b2j}, \bar{k}_{b2j}), \\ \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) &\leq 0, \text{ si } k \leq k_{b2j}, \\ \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) &> 0, \text{ si } k \in (\bar{k}_{b2j}, \bar{k}_{\max j}), \\ \bar{\xi}_{1j}(\bar{k}_{b2j}) &= 0, \text{ y } \bar{\bar{\xi}}_{1j}(\bar{k}_{b2j}) > 0, \end{aligned}$$

y dado que $\partial_k \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) \leq 0$, $k \in (k_{b2j}, \bar{k}_{\max j})$ y $\bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) > 0$, con $k \in (k_{b2j}, k_{\max j})$ se tiene la tercera afirmación, es decir que $\bar{\bar{\xi}}_{1j}(k)$ es una gráfica del tipo IIA o IIB y $\bar{\xi}_{1j}(k) \leq 0$, si $k \in (\lambda, \bar{k}_{b2j})$; $\bar{\xi}_{1j}(k) > 0$, si $k \in (\bar{k}_{b2j}, \bar{k}_{\max j})$, ver Figuras 3.8, y 3.9.

iv) Por otro lado, si $\bar{c}_j(k)$ tiene una gráfica del tipo I, y $\bar{k}_{b2j} < \bar{k}_{bj}$, por la Definición 46, existe \bar{k}_{b2j} tal que $\bar{c}_j(\bar{k}_{b2j}) = 0$; además $\bar{c}_j(k) > 0$, si $k \in (k_{b2j}, \bar{k}_{b2j})$, y $\bar{c}_j(k) < 0$, si $k \in (\lambda, k_{b2j})$, o $k \in (\bar{k}_{b2j}, \bar{k}_{\max j})$. Luego, por (iv) y (v) de la Proposición 57, se tiene

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_{1j}(k) &< 0, \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) > 0 \text{ si } k \in (k_{b2j}, \bar{k}_{b2j}), \\ \bar{\xi}_{1j}, \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) &\leq 0, \text{ si } k \leq k_{b2j}, \\ \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) &< 0, \text{ si } k \in (\bar{k}_{b2j}, \bar{k}_{\max j}) \\ \bar{\bar{\xi}}_{1j}(\bar{k}_{b2j}) &= 0. \end{aligned}$$

Dado que $\partial_k \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) \leq 0$, si $k \in (k_{b2j}, \infty)$; $\bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) < 0$, si $k \in (k_{b2j}, \infty)$; y $\bar{\bar{\xi}}_{1j}(\bar{k}_{b2j}) = 0$, se obtiene la cuarta afirmación, es decir, $\bar{\bar{\xi}}_{1j}(k)$ es una gráfica del tipo I y $\bar{\xi}_{1j}(k) < 0$, si $k \in (\lambda, \bar{k}_{\max j})$, ver Figura 3.10. \square

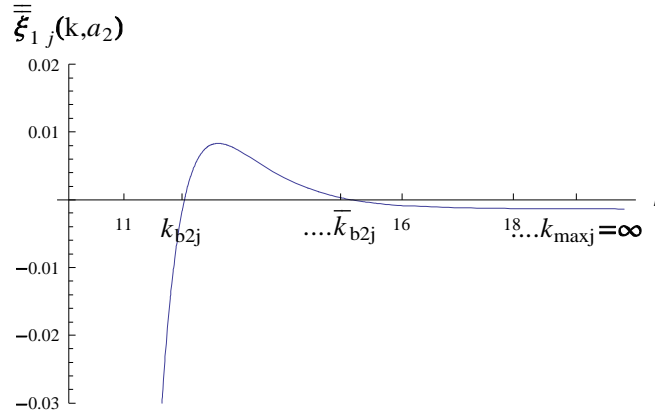


Figura 3.10: Gráfica del tipo I de la función $\bar{\xi}_{1j}(k, a_2)$ con $A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2) < 0$.

Proposición 63 Sea el sistema (2.1) asociado al campo f_j , $j = 1, 2$, del tipo 1B.

i) Si $\bar{c}_j(k)$ tiene una gráfica del tipo IIA o IIB, entonces $\bar{\xi}_{1j}(k)$ es una gráfica del tipo IIA, y $\bar{\xi}_{1j}(k) \leq 0$, si $k \in (k_{\min j}, \infty)$, ver Figura 3.8.

ii) Si $\bar{c}_j(k)$ tiene una gráfica del tipo I, entonces $\bar{\xi}_{1j}(k)$ es una gráfica del tipo IIA, y $\bar{\xi}_{1j}(k) \leq 0$, si $k \in (\lambda, \bar{k}_{b2j})$; $\bar{\xi}_{1j}(k) > 0$ si $k \in (\bar{k}_{b2j}, \infty)$.

Prueba: Considere la función $\bar{c}_j(k)$ del tipo IIA o IIB. Por la Definición 46, $\bar{c}_j(k) > 0$, si $k > k_{b2j}$; $\bar{c}_j(k) < 0$, si $k_{\min j} < k < k_{b2j}$, y además por la Proposición 54 $A_j - 2m_j c_j(k, a_2) < 0$, para $k_{\min j} < k < k_{b2j}$, luego por (iv) de la Proposición 57, se tiene

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_{1j}(k) &< 0, \bar{\xi}_{1j}(k) > 0, \text{ si } k > k_{b2j}, \\ \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{1j}(k) &< 0, \text{ si } k_{\min j} < k < k_{b2j}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

De la segunda igualdad de (3.48) se tiene que

$$\partial_k \bar{\xi}_{1j}(k) = \frac{-4m_j \sqrt{A_j^2 + 4m_j^2 D_j(k) - 4m_j A_j c_j(k, a_2)} \partial_k c_j(k, a_2) + 4m_j^2 \partial_k D_j(k) - 4m_j A_j \partial_k c_j(k, a_2)}{4m_j^2 \sqrt{A_j^2 + 4m_j^2 D_j(k) - 4m_j A_j c_j(k, a_2)}} > 0, \quad (3.75)$$

ya que

$$m_j < 0, m_j A_j < 0, \partial_k c_j(k, a_2) > 0, \partial_k D_j(k) > 0 \text{ para } k \in (k_{\min j}, \infty),$$

Capítulo 3. Extensión de la dinámica de la bifurcación zip en modelos suaves 91
luego de (3.74) y (3.75) se concluye la primera afirmación.

Si $\bar{c}_j(k)$ tiene una gráfica del tipo I, entonces se tiene que $\bar{k}_{b21} > \bar{k}_{bj}$, y por la Definición 46, existe \bar{k}_{b2j} tal que $\bar{c}_j(\bar{k}_{b2j}) = 0$; además $\bar{c}_j(k) > 0$, si $k \in (k_{b2j}, \bar{k}_{b2j})$, y $\bar{c}_j(k) < 0$, si $k \in (k_{\min j}, k_{b2j})$ o $k \in (\bar{k}_{b2j}, \infty)$, consecuentemente por la parte (iv) y (v) de la Proposición 57, se tiene

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_{1j}(k) &< 0, \quad \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) > 0, \quad \text{si } k \in (k_{b2j}, \bar{k}_{b2j}), \\ \bar{\xi}_{1j}(k), \quad \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) &\leq 0, \quad \text{si } k \leq k_{b2j}, \\ \bar{\xi}_{1j}(k), \quad \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) &> 0, \quad \text{si } k \in (\bar{k}_{b2j}, \infty), \\ \bar{\xi}_{1j}(\bar{k}_{b2j}) &= 0, \quad \bar{\bar{\xi}}_{1j}(\bar{k}_{b2j}) > 0. \end{aligned}$$

Siguiendo el mismo argumento que se utilizó en la primera parte de la demostración se muestra que

$$\partial_k \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) > 0, \quad \text{si } k \in (k_{\min j}, \infty);$$

luego $\bar{\bar{\xi}}_{1j}(k)$ es una gráfica del tipo IIA y $\bar{\xi}_{1j}(k) \leq 0$, si $k \in (k_{\min j}, \bar{k}_{b2j})$, y $\bar{\xi}_{1j}(k) > 0$, si $k \in (\bar{k}_{b2j}, \infty)$, ver Figura 3.8. \square

Proposición 64 *Sea el sistema (2.1) asociado al campo f_j , $j = 1, 2$, del tipo 2.*

i) *Si $\bar{c}_j(k)$ tiene una gráfica del tipo IIA o IIB, entonces $\bar{\bar{\xi}}_{1j}(k)$ es una gráfica del tipo IIA o IIB, y $\bar{\xi}_{1j}(k) < 0$, $\partial_k \bar{\xi}_{1j}(k) < 0$, si $k \in (k_{\min j}, \infty)$; $\partial_k \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) > 0$, si $k \in (k_{\min j}, k_{b1j})$, ver Figuras 3.8, y 3.9.*

ii) *Si $\bar{c}_j(k)$ tiene una gráfica del tipo I, entonces $\bar{\bar{\xi}}_{1j}(k)$ es una gráfica del tipo I, y $\bar{\xi}_{1j}(k) < 0$, $\partial_k \bar{\xi}_{1j}(k) < 0$, si $k \in (k_{\min j}, \infty)$; $\partial_k \bar{\bar{\xi}}_{1j} > 0$, si $k \in (k_{\min j}, k_{b1j})$, ver Figura 3.10.*

Prueba: Considere la función $\bar{c}_j(k)$ del tipo IIA o IIB. Por la Definición 46, $\bar{c}_j(k) > 0$, si $k > k_{b2j}$; $\bar{c}_j(k) < 0$, si $k_{\min j} < k < k_{b2j}$, y además por la Proposición 54, $A_j - 2m_j c_j(k, a_2) < 0$, si $k_{\min j} < k < k_{b2j}$, luego por (iv) de la Proposición 57, se tiene

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_{1j}(k) &< 0, \quad \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) > 0 \quad \text{si } k > k_{b2j}, \\ \bar{\xi}_{1j}(k), \quad \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) &< 0, \quad \text{si } k \in (k_{\min j}, k_{b2j}). \end{aligned} \tag{3.76}$$

Además de la primera expresión de (3.48) se tiene que

$$\partial_k \bar{\xi}_{1j}(k) = \frac{4m_j \sqrt{(A_j - 2m_j c_j(k, a_2))^2 + 4m_j^2 (D_j(k) - c_j^2(k, a_2))} \partial_k c_j(k, a_2) + 4m_j (A_j - 2m_j c_j(k, a_2)) \partial_k c_j(k, a_2) - 4m_j^2 \partial_k (D_j(k) - c_j^2(k, a_2))}{-4m_j^2 \sqrt{(A_j - 2m_j c_j(k, a_2))^2 + 4m_j^2 (D_j(k) - c_j^2(k, a_2))}}; \quad (3.77)$$

como $m_j > 0$, $A_j - 2m_j c_j(k, a_2) < 0$, $\partial_k (D_j(k) - c_j^2(k, a_2)) > 0$, y $D_j(k) - c_j^2(k, a_2) < 0$, ya que el modelo es del tipo 2, y $k \in (k_{\min j}, k_{b2j})$, entonces se tiene de la expresión (3.77) que

$$\partial_k \bar{\xi}_{1j}(k) > 0, \text{ si } k \in (k_{\min j}, k_{b2j}). \quad (3.78)$$

De la segunda igualdad en (3.47) se tiene que

$$\partial_k \bar{\xi}_{1j}(k) = \frac{-4m_j \sqrt{A_j^2 + 4m_j^2 D_j(k) - 4m_j A_j c_j(k, a_2)} \partial_k c_j(k, a_2) - 4m_j^2 \partial_k D_j(k) + 4m_j A_j \partial_k c_j(k, a_2)}{4m_j^2 \sqrt{A_j^2 + 4m_j^2 D_j(k) - 4m_j A_j c_j(k, a_2)}} < 0, \quad (3.79)$$

ya que $m_j > 0$, $m_j A_j < 0$, $\partial_k c_j(k, a_2) > 0$, $\partial_k D_j(k) > 0$, con $k \in (k_{\min j}, \infty)$.

De (3.76), (3.78), y (3.79) se concluye que $\bar{\xi}_{1j}(k)$ es una gráfica del tipo IIA o IIB, ya que satisfacen las propiedades dadas en la Definición 46, y $\bar{\xi}_{1j}(k) < 0$, $\partial_k \bar{\xi}_{1j}(k) < 0$, si $k \in (k_{\min j}, \infty)$. Resta probar que $\partial_k \bar{\xi}_{1j}(k) > 0$, si $k \in (k_{b2j}, k_{b1j})$. Derivando la igualdad $\bar{b}_j(\xi_1, k) = 0$, de (3.15) respecto al parámetro k , y despejando $\partial_k \bar{\xi}_{1j}(k)$ se obtiene

$$\partial_k \bar{\xi}_{1j}(k) = \frac{d_k c(k, a_2) (2c(k, a_2) + 2\bar{\xi}_{1j}(k)m_j) - \partial_k D_j(k)}{-2m_j^2 \bar{\xi}_{1j}(k) + A_j - 2m_j c(k, a_2)}. \quad (3.80)$$

Como el denominador de la expresión anterior es negativo, ya que $A_j - 2m_j c(k, a_2) < 0$, $\partial_k D_j(k)$, $\partial_k c(k, a_2) > 0$, si $k \in (k_{b2j}, k_{b1j})$, entonces

$$\partial_k \bar{\xi}_{1j}(k) > 0, \text{ si } \bar{\xi}_{1j}(k) < -\frac{c(k, a_2)}{m_j}.$$

Si $\xi_1(k) = -\frac{c_j(k, a_2)}{2m_j}$, entonces $a_j(\xi_1(k), k) = 0$, y como $m_j > 0$, y $k_{b2j} < k_{b1j} < k_{a2j}$, entonces $\xi_1(k) > \bar{\xi}_{1j}(k)$, si $k \in (k_{b2j}, k_{a2j})$, de lo cual se concluye que $\bar{\xi}_{1j}(k) < -\frac{c_j(k, a_2)}{m_j}$, si $k \in (k_{b2j}, k_{a2j})$ y se termina la afirmación (i).

Si $\bar{c}_j(k)$ tiene una gráfica del tipo I, como $\bar{k}_{b21} > \bar{k}_b$, entonces por la Definición 46, existe \bar{k}_{b2j} tal que $\bar{c}_j(\bar{k}_{b2j}) = 0$; además $\bar{c}_j(k) > 0$, si $k \in (k_{b2j}, \bar{k}_{b2j})$, y $\bar{c}_j(k) < 0$, si $k \in (k_{\min j}, k_{b2j})$ o (\bar{k}_{b2j}, ∞) . Luego, por (iv) y (v) de la Proposición 57, se tiene

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_{1j}(k) &< 0, \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) > 0 \text{ si } k \in (k_{b2j}, \bar{k}_{b2j}), \\ \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) &\leq 0, \text{ si } k \in (k_{\min j}, k_{b2j}), \\ \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) &< 0, \text{ si } k \in (\bar{k}_{b2j}, \infty), \\ \bar{\xi}_{1j}(\bar{k}_{b2j}) &< 0, \bar{\bar{\xi}}_{1j}(\bar{k}_{b2j}) = 0, \end{aligned} \quad (3.81)$$

Dado que la relación entre \bar{k}_{b2j} y \bar{k}_b no influyen en las expresiones que determinan $\partial_k \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k)$ y $\partial_k \bar{\xi}_{1j}(k)$ siguiendo un raciocinio análogo al anterior, se muestra que

$$\begin{aligned} \partial_k \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) &> 0, \text{ si } k \in (k_{\min j}, k_{b2j}). \\ \partial_k \bar{\xi}_{1j}(k) &< 0, \text{ si } k \in (k_{\min j}, \infty) \end{aligned} \quad (3.82)$$

y también que $\partial_k \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) > 0$, si $k \in (k_{b2j}, k_{b1j})$. De (3.81) y (3.82) se tiene la parte ii) de la proposición. \square

Proposición 65 *Sea el sistema (2.1) asociado al campo f_j , $j = 1, 2$, del tipo 3.*

i) *Si $\bar{c}_j(k)$ tiene una gráfica del tipo IIA o IIB, entonces $\bar{\xi}_{1j}(k)$ es una gráfica del tipo IIA o IIB, y $\bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) > 0$, $\partial_k \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) > 0$, si $k \in (k_{\min j}, \infty)$, ver Figura 3.11.*

ii) *Si $\bar{c}_j(k)$ tiene una gráfica del tipo I, entonces $\bar{\xi}_{1j}(k)$ es una gráfica del tipo I, y $\bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) > 0$, $\partial_k \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) > 0$, si $k \in (k_{\min j}, \infty)$, ver Figura 3.12.*

Prueba: i) Sea la función $\bar{c}_j(k)$ del tipo IIA o IIB. Por la Definición 46, $\bar{c}_j(k) > 0$, si $k > k_{b2j}$; $\bar{c}_j(k) < 0$, si $k_{\min j} < k < k_{b2j}$, y además por la Proposición 54, $A_j - 2m_j c_j(k, a_2) > 0$, si $k_{\min j} < k < k_{b2j}$, luego por (iv) de la Proposición 57, se tiene que

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_{1j}(k) &< 0, \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) > 0 \text{ si } k > k_{b2j}, \\ \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) &> 0, \text{ si } k \in (k_{\min j}, k_{b2j}). \end{aligned} \quad (3.83)$$

Además de la primera igualdad en (3.47), se tiene que

$$\partial_k \bar{\xi}_{1j}(k) = \frac{4m_j \sqrt{(A_j - 2m_j c_j(k, a_2))^2 + 4m_j^2 (D_j(k) - c_j^2(k, a_2))} \partial_k c_j(k, a_2) - 4m_j (A_j - 2m_j c_j(k, a_2)) \partial_k c_j(k, a_2) + 4m_j^2 \partial_k (D_j(k) - c_j^2(k, a_2))}{-4m_j^2 \sqrt{(A_j - 2m_j c_j(k, a_2))^2 + 4m_j^2 (D_j(k) - c_j^2(k, a_2))}}; \quad (3.84)$$

como $D_j(k) - c_j^2(k, a_2) < 0$, $m_j < 0$, $A_j - 2m_j c_j(k, a_2) > 0$, y $\partial_k (D_j(k) - c_j^2(k, a_2)) > 0$, si $k \in (k_{\min j}, k_{b2j})$, luego de la expresión (3.84) se concluye

$$\partial_k \bar{\xi}_{1j}(k) < 0, \text{ si } k \in (k_{\min j}, k_{b2j}). \quad (3.85)$$

Además, de la segunda expresión de (3.48) se tiene que

$$\partial_k \bar{\xi}_{1j}(k) = \frac{-4m_j \sqrt{A_j^2 + 4m_j^2 D_j(k) - 4m_j A_j c_j(k, a_2)} \partial_k c_j(k, a_2) + 4m_j^2 \partial_k D_j(k) - 4m_j A_j \partial_k c_j(k, a_2)}{4m_j^2 \sqrt{A_j^2 + 4m_j^2 D_j(k) - 4m_j A_j c_j(k, a_2)}} > 0, \quad (3.86)$$

ya que $m_j < 0$, $m_j A_j < 0$, $\partial_k c_j(k, a_2) > 0$, $\partial_k D_j(k) > 0$, si $k \in (k_{\min j}, \infty)$.

De (3.83), (3.84), (3.85), y (3.86) se concluye que $\bar{\xi}_{1j}(k)$ es una gráfica del tipo IIA o IIB y que $\bar{\xi}_{1j}(k) > 0$, $\partial_k \bar{\xi}_{1j}(k) > 0$, si $k \in (k_{\min j}, \infty)$, ver Figura 3.11.

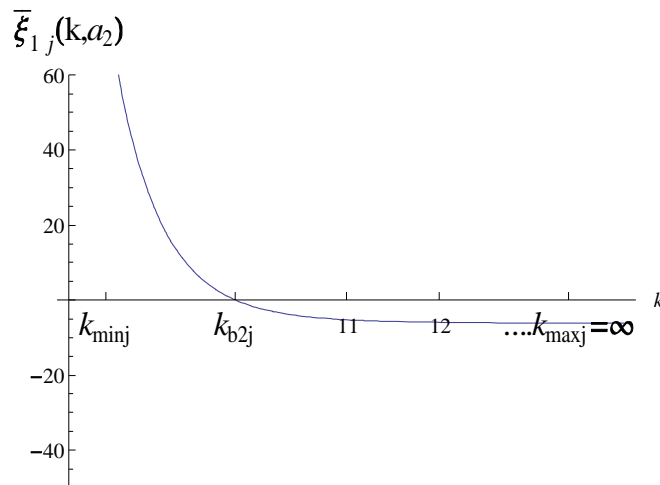


Figura 3.11: Gráfica del tipo II de la función $\bar{\xi}_{1j}(k, a_2)$ con $A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2) > 0$.

ii) Como $\bar{k}_{b21} > \bar{k}_b$, si $\bar{c}_j(k)$ tiene una gráfica del tipo I, entonces por la Definición 46, existe \bar{k}_{b2j} tal que $\bar{c}_j(\bar{k}_{b2j}) = 0$; además $\bar{c}_j(k) > 0$, si $k \in (k_{bj}, \bar{k}_{b2j})$, y $\bar{c}_j(k) < 0$, si $k \in (k_{\min j}, k_{b2j})$ o $k \in (\bar{k}_{b2j}, \infty)$. Luego, por (iv) y (v) de la Proposición 57, se tiene

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_{1j}(k) &< 0, \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) > 0, \text{ si } k \in (k_{b2j}, \bar{k}_{b2j}), \\ \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) &> 0, \text{ si } k \in (k_{\min j}, k_{b2j}), \\ \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) &> 0, \text{ si } k \in (\bar{k}_{b2j}, \infty), \\ \bar{\xi}_{1j}(\bar{k}_{b2j}) &= 0, \bar{\bar{\xi}}_{1j}(\bar{k}_{b2j}) > 0. \end{aligned} \quad (3.87)$$

De manera análoga a la primera parte de la demostración se muestra que

$$\begin{aligned} \partial_k \bar{\xi}_{1j}(k) &< 0, \text{ si } k \in (k_{\min j}, k_{b2j}), \\ \partial_k \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) &> 0, \text{ si } k \in (k_{\min j}, \infty). \end{aligned} \quad (3.88)$$

De (3.87) y (3.88) se tiene que $\bar{\xi}_{1j}(k)$ es una gráfica del tipo I, y $\bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) > 0$, $\partial_k \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) > 0$, si $k \in (k_{\min j}, \infty)$, ver Figura 3.12. \square

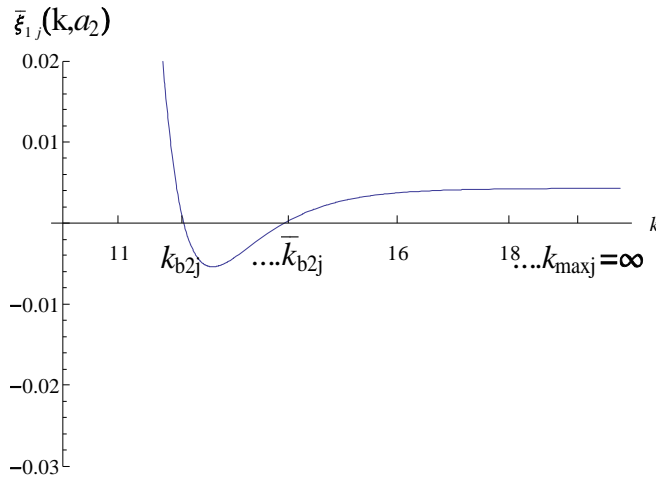


Figura 3.12: Gráfica del tipo I de la función $\bar{\xi}_{1j}(k)$ con $A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2) > 0$.

Proposición 66 Sea el sistema (2.1) asociado al campo f_j , $j = 1, 2$, del tipo 4.

i) Si $\bar{c}_j(k)$ tiene una gráfica del tipo IIA o IIB, entonces $\bar{\xi}_{1j}(k)$ es una gráfica del tipo IIA, y $\bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) > 0$ si $k \in (k_{\min j}, \infty)$, ver Figura 3.11.

ii) Si $\bar{c}_j(k)$ tiene una gráfica del tipo I, entonces $\bar{\xi}_{1j}(k)$ es una gráfica del tipo IIA, y $\bar{\xi}_{1j}(k) > 0$, si $k \in (k_{\min j}, \bar{k}_{b2j})$; $\bar{\xi}_{1j}(k) < 0$ si $k \in (\bar{k}_{b2j}, \infty)$.

Prueba: Considere la función $\bar{c}_j(k)$ del tipo IIA o IIB. Por la Definición 46 $\bar{c}_j(k) > 0$, si $k > k_{b2j}$, y $\bar{c}_j(k) < 0$, si $k_{\min j} < k < k_{b2j}$, y además por la Proposición 54 $A_j - 2m_j c_j(k, a_2) > 0$, si $k_{\min j} < k < k_{b2j}$, luego por (iv) de la Proposición 57, se tiene

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_{1j}(k) &< 0, \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) > 0, \text{ si } k > k_{b2j}, \\ \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) &> 0, \text{ si } k \in (k_{\min j}, k_{b2j}). \end{aligned} \quad (3.89)$$

Además, de la segunda igualdad en (3.47), se tiene que

$$\partial_k \bar{\xi}_{1j}(k) = \frac{-4m_j \sqrt{A_j^2 + 4m_j^2 D_j(k)} - 4m_j A_j c_j(k, a_2) \frac{\partial c_j(k, a_2)}{\partial k} - 4m_j^2 \partial_k D_j(k) + 4m_j A_j \partial_k c_j(k, a_2)}{4m_j^2 \sqrt{A_j^2 + 4m_j^2 D_j(k)} - 4m_j A_j c_j(k, a_2)}; \quad (3.90)$$

como $m_j > 0$, $m_j A_j < 0$, y $\partial_k D_j(k) > 0$, $\partial_k c_j(k, a_2) > 0$, si $k \in (k_{\min j}, \infty)$, luego de (3.90) se tiene que

$$\partial_k \bar{\xi}_{1j}(k) < 0, \text{ si } k \in (k_{\min j}, \infty). \quad (3.91)$$

De (3.89) y (3.91) se concluye que $\bar{\xi}_{1j}(k)$ es una gráfica del tipo IIA y $\bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) > 0$, si $k \in (k_{\min j}, \infty)$.

Si $\bar{c}_j(k)$ tiene una gráfica del tipo I, como $\bar{k}_{b21} > \bar{k}_b$, entonces por la Definición 46, existe \bar{k}_{b2j} tal que $\bar{c}_j(\bar{k}_{b2j}) = 0$; además $\bar{c}_j(k) > 0$, si $k \in (k_{b21}, \bar{k}_{b2j})$, y $\bar{c}_j(k) < 0$, si $k \in (k_{\min j}, k_{b2j})$ o $k \in (\bar{k}_{b2j}, \infty)$. Luego, por (iv) y (v) de la Proposición 57, se tiene

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_{1j}(k) &< 0, \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) > 0 \text{ si } k \in (k_{b2j}, \bar{k}_{b2j}), \\ \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) &> 0, \text{ si } k \in (k_{\min j}, \bar{k}_{b2j}), \\ \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) &< 0, \text{ si } k \in (\bar{k}_{b2j}, \infty), \\ \bar{\xi}_{1j}(\bar{k}_{b2j}) &> 0, \bar{\bar{\xi}}_{1j}(\bar{k}_{b2j}) = 0. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Siguiendo argumento análogo al que se utilizó en la primera parte de la demostración se muestra que

$$\partial_k \bar{\xi}_{1j}(k) < 0, \text{ si } k \in (k_{\min j}, \infty).$$

De (3.91) y (3.92) se tiene que $\bar{\xi}_{1j}(k)$ es una gráfica del tipo IIA, y $\bar{\xi}_{1j}(k) > 0$, si $k \in (k_{\min j}, \bar{k}_{b2j})$; $\bar{\xi}_{1j}(\bar{k}_{b2j}) < 0$, si $k \in (\bar{k}_{b2j}, \infty)$, ver Figura 3.11. \square

A continuación se muestra la ocurrencia de la *bifurcación zip* y de *tipo zip* para el sistema suave (2.1) generado por el campo f_j la cual depende de la evolución de la componente real e imaginaria de los valores propios u_{1j} y u_{2j} dados en la Definición 3.6, respectivamente. En primer lugar se presenta el análisis de la parte real de los valores propios, a reglón seguido se presenta el análisis de la parte imaginaria de los valores propios y por último se obtiene un teorema de clasificación de estas bifurcaciones con base en el criterio de equivalencia geométrico para clasificar retratos de fase introducido en la Definición 14.

Los valores propios conjugados u_{1j} y u_{2j} tienen parte real negativa, si y únicamente si $a_j(\xi_1, k) < 0$, es decir

$$m_j \xi_1 + c_j(k, a_2) < 0, \quad (3.93)$$

Se considera el segmento de línea recta $La_{k,j}$ siguiente

$$La_{k,j} = \{(s, \xi_1, a_j(\xi_1, k)) : a_j(\xi_1, k) = m_j \xi_1 + c_j(k, a_2), \\ s = \lambda, 0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}\}. \quad (3.94)$$

Fijando k , se puede determinar el punto $(\lambda, \hat{\xi}_{1j}(k), \hat{\xi}_{2j}(k)) \in L_k$ en que la linealización del sistema suave (2.1) tiene valores propios con componente real cero, es decir $a_j(\xi_1, k) = 0$. Dicho punto se obtiene resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones

$$m_j \xi_1 + c_j(k, a_2) = 0, \\ p(\lambda, a_1) \xi_1 + p(\lambda, a_2) \xi_2 = \gamma \lambda g(\lambda, k), \text{ con } \xi_1, \xi_2 \geq 0,$$

(ver (3.1)) y viene dado, después de algunas simplificaciones, por

$$\hat{\xi}_{1j}(k) = -\frac{c_j(k, a_2)}{m_j} \quad (3.95)$$

$$\hat{\xi}_{2j}(k) = \frac{c_j(k, a_1) p(\lambda, a_1)}{p(\lambda, a_2) m_j}. \quad (3.96)$$

Como una preparación al teorema siguiente, se comentan algunas propiedades de las funciones $\hat{\xi}_{1j}(k)$ y $\hat{\xi}_{2j}(k)$. De las expresiones (3.95) y (3.96), claramente se concluye

que el denominador de $\widehat{\xi}_{1j}(k)$ y $\widehat{\xi}_{2j}(k)$ es negativo, positivo o cero si el modelo es natural, artificial, o degenerado respectivamente. Igualmente se puede demostrar que las funciones $\widehat{\xi}_{1j}(k)$ y $\widehat{\xi}_{2j}(k)$ son estrictamente creciente y estrictamente decreciente respectivamente, si se considera que el modelo es natural; estrictamente decreciente y estrictamente creciente respectivamente, si se considera que el modelo es artificial; además $\widehat{\xi}_{1j}(k)$ y $\widehat{\xi}_{2j}(k)$ presentan variación de signo en el intervalo (λ, ∞) como una consecuencia de la proposición 35, el Lema 36 y la Definición 37.

Teorema 67 *Si el sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$, $j = 1, 2$, es natural y satisface las condiciones (2.8) a (2.13) y (2.20) a (2.23), entonces existen k_{a2j} , k_{a1j} únicos, con $\lambda < k_{a2j} < k_{a1j} < \infty$, tal que para todo $k \in (\lambda, k_{a2j})$, todos los puntos del segmento L_k son estables en el sentido de Lyapunov, y L_k es un atractor del sistema en el sentido que existe una vecindad del segmento de equilibrios para el cual las soluciones con condición inicial en esta vecindad tiende a un punto del segmento L_k cuando t tiende a infinito. Para $k \in (k_{a2j}, k_{a1j})$ el punto $(\lambda, \widehat{\xi}_{1j}(k), \widehat{\xi}_{2j}(k)) \in L_k$, divide L_k en dos partes (una de las cuales puede ser vacía), donde $\widehat{\xi}_{1j}(k)$ y $\widehat{\xi}_{2j}(k)$ son dados por (3.95), y (3.96), respectivamente. Los puntos de L_k a la izquierda de este punto son inestables, los puntos a la derecha son estables en el sentido de Lyapunov, y forman un atractor del sistema. Para $k \in (k_{a1j}, \infty)$, el sistema no tiene puntos de equilibrios estables en el octante positivo del espacio cerrado s, x_1, x_2 .*

Prueba: Por hipótesis nuestro modelo es natural. Así, como $\widehat{\xi}_{1j}(k)$ es continua, estrictamente creciente y presenta cambio de signo en el intervalo (λ, ∞) , existe un único $\bar{k} > \lambda$, en el cual $\widehat{\xi}_{1j}(\bar{k}) = 0$, luego por (3.95)

$$c_j(\bar{k}, a_2) = 0,$$

con lo cual $\bar{k} = k_{a2j}$ de acuerdo con la proposición 35, el Lema 36 y la Definición 37. Sin embargo de (3.96) se deduce que la línea \widehat{L}_k (ver Notación 34) intercepta el eje ξ_2 en un punto de coordenada positivo en $k = k_{a2j} > \lambda$, es decir $\widehat{\xi}_{2j}(k_{a2j}) > 0$. Similarmente por las Proposiciones 35, 38 y la Definición 37, existe un $k_{a1j} > k_{a2j}$, en la cual $\widehat{\xi}_{2j}(k_{a1j}) = 0$. En conclusión, para $k \in (k_{a2j}, k_{a1j})$ el punto $(\widehat{\xi}_{1j}(k), \widehat{\xi}_{2j}(k))$

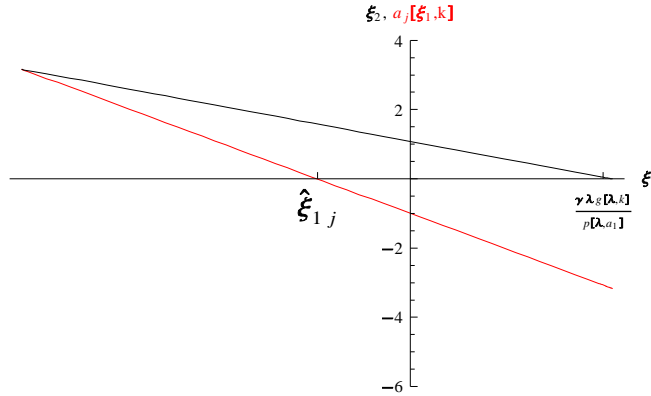


Figura 3.13: Gráfica del segmento de línea L_k y el segmento de línea $L_{a_{k,j}}$ para la condición $\lambda < k < k_{a_{2j}}$.

$\in \hat{L}_k$, donde la parte real de los valores propios de la linealización del sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j, j = 1, 2$, se anula, se localiza en el primer cuadrante del plano ξ_1, ξ_2 con $s = \lambda$ fijo (ver las Figuras 3.14, 3.15 y 3.16).

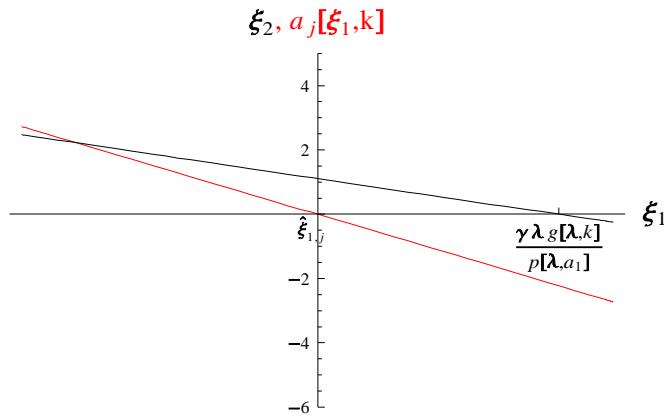


Figura 3.14: Gráficas de los segmentos de línea recta L_k y $L_{a_{k,j}}$ para la condición $k = k_{a_{2j}}$.

Además como

$$\frac{\partial a_j(\xi_1, k)}{\partial \xi_1} = m_j < 0, \quad (3.97)$$

entonces de la proposición 35, el Lema 36 y la Definición 37, para $k \in (\lambda, k_{a_{2j}})$ se tiene que

$$a_j(\xi_1, k) < 0, \text{ si } 0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}. \quad (3.98)$$

Sin embargo, (3.98) implica que en los puntos de L_k el sistema linealizado tienen dos valores propios con parte real negativa y tienen una variedad estable bidimensional por un teorema dado en Harman [41, Capítulo IX, Teorema 6.1], véase la Figura 3.13.

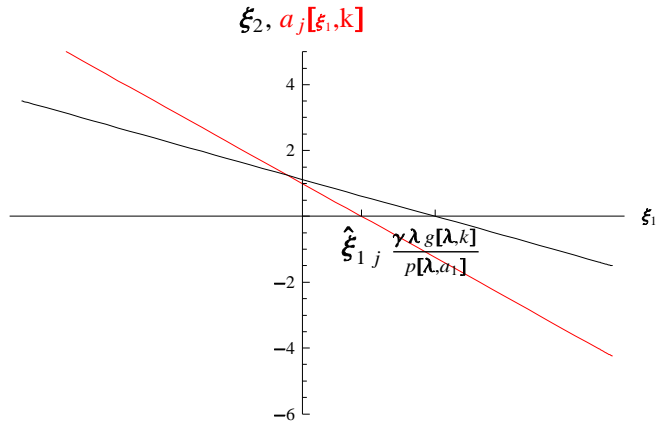


Figura 3.15: Gráficas de los segmentos de línea recta L_k y $L_{a_{kj}}$ para la condición $k_{a21} < k < k_{a1j}$.

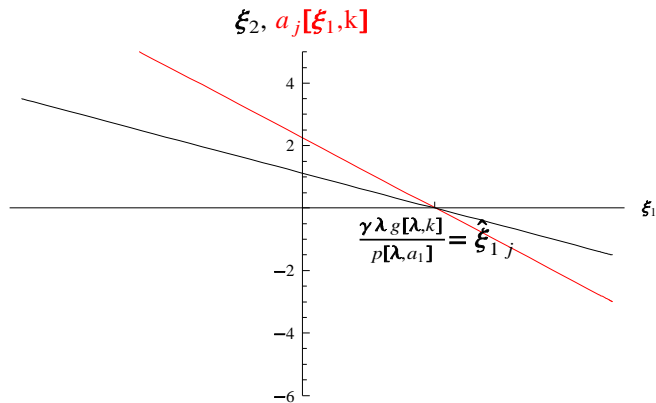


Figura 3.16: Gráficas de los segmentos de línea recta L_k y $L_{a_{kj}}$ para la condición $k = k_{a11}$.

Para $k \in (k_{a1j}, \infty)$, el punto de intersección $(\widehat{\xi}_{1j}(k), \widehat{\xi}_{2j}(k)) \in \widehat{L}_k$ donde la parte real de los valores propios de la linealización del sistema suave (2.1) es cero se localiza en el cuarto cuadrante del plano ξ_1, ξ_2 , con $s = \lambda$ fijo (ver las Figuras 3.16 y 3.17). Por

Capítulo 3. Extensión de la dinámica de la bifurcación zip en modelos suaves 101
la condición (3.97), la proposición 35, el Lema 36 y la Definición 37, se tiene que

$$a_j(\xi_1, k) > 0, \text{ si } 0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}, \quad (3.99)$$

sin embargo, (3.99) implica que en los puntos de L_k el subsistema linealizado tienen dos valores propios con parte real positiva, y tiene una variedad inestable bidimensional por un teorema dado en Harman [41, Capítulo IX, Teorema 6.1].

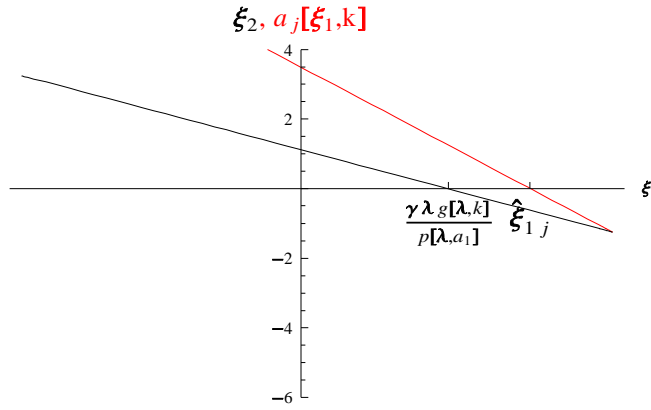


Figura 3.17: Gráficas de los segmentos de línea recta L_k y $L_{a_{kj}}$ para la condición $k_{a_{1j}} < k < \infty$.

Si $k \in (k_{a_{2j}}, k_{a_{1j}})$, el punto de intersección $(\lambda, \hat{\xi}_{1j}(k), \hat{\xi}_{2j}(k))$ divide a L_k en dos partes; en la parte izquierda la condición (3.100) es válida

$$a_j(\xi_1, k) > 0, \text{ si } 0 \leq \xi_1 \leq \hat{\xi}_{1j}(k); \quad (3.100)$$

esto significa que los puntos en esta parte de L_k son inestables; por otro lado, en la parte derecha la condición (3.101) es válida

$$a_j(\xi_1, k) < 0, \text{ si } \hat{\xi}_{1j} \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}, \quad (3.101)$$

es decir en cada punto en esta parte de L_k los puntos son estables, ver Figura 3.15.

La prueba de la atractividad del lado derecho del segmento de equilibrios coincide paso a paso con la prueba dada por Farkas [24, Teorema 3.1]. Resaltamos en esta parte que como $g(\lambda, \cdot)$ es una función no decreciente y $\hat{\xi}_{2j}(k)$ es una función monótona

Capítulo 3. Extensión de la dinámica de la bifurcación zip en modelos suaves 102

decreciente, entonces si k es incrementado de k_{a2j} a k_{a1j} , el punto $(\lambda, \widehat{\xi}_{1j}(k), \widehat{\xi}_{2j}(k))$ se mueve constantemente a lo largo de L_k del extremo del lado izquierdo, es decir $\widehat{\xi}_{1j}(k) = 0$, al extremo del lado derecho o sea $\widehat{\xi}_{2j}(k) = 0$; además el segmento L_k sufre un desplazamiento paralelo hacia arriba. En este proceso los puntos que se quedan detrás del punto $(\lambda, \widehat{\xi}_{1j}(k), \widehat{\xi}_{2j}(k))$ pierden su estabilidad, Farkas [24, Capítulo IX, Teorema 6.1] llamó a este fenómeno de *bifurcación de zip*. \square

Un modelo artificial $m_j > 0$, se comporta de forma similar a un modelo natural, excepto en que la dirección del zip va en sentido contrario. La prueba del siguiente teorema es análoga a la del teorema anterior motivo por el cual sólo se presenta su enunciado y las gráficas del segmento de línea L_k y del segmento de línea La_{kj} para las diferentes condiciones del parámetro k que caracterizan la bifurcación zip.

Teorema 68 *Si el sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$, $j = 1, 2$, es artificial y satisface las condiciones (2.8) a (2.13) y (2.20) a (2.23), entonces existen k_{a2j} , k_{a1j} únicos, con $\lambda < k_{a1j} < k_{a2j} < \infty$, tal que para todo $k \in (\lambda, k_{a1j})$ todos los puntos del segmento L_k son estables en el sentido de Lyapunov, y L_k es un atractor del sistema. Para $k \in (k_{a1j}, k_{a2j})$ el punto $(\lambda, \widehat{\xi}_{1j}(k), \widehat{\xi}_{2j}(k)) \in L_k$, divide L_k en dos partes (una de las cuales puede ser vacía), donde $\widehat{\xi}_{1j}(k)$ y $\widehat{\xi}_{2j}(k)$ son dados por (3.95) y (3.96) respectivamente. Los puntos de L_k a la derecha del punto que divide son inestables, los puntos a la izquierda son estables, en el sentido de Lyapunov y forman un atractor del sistema. Para $k \in (k_{a2j}, \infty)$, el sistema no tiene puntos de equilibrios estables en el octante positivo del espacio cerrado s, x_1, x_2 .*

A continuación se presentan las gráficas de los segmentos de línea L_k y La_{kj} en el plano $s = \lambda$, las cuales muestran la dinámica de la componente real de los valores propios u_{1j} y u_{2j} del sistema suave (2.1) linealizado en puntos de L_k (véase Definición 3.6).

i) Condición para $\lambda < k < k_{a1j}$

El segmento de línea recta de pendiente positiva La_{kj} intersecta el eje ξ_1 en el punto $\xi_1 = \widehat{\xi}_1(k) < \overline{\xi}_{1j}(k)$, así que $a_j(\xi_1, k) < 0$, en el dominio de L_k . Por lo tanto en el

Capítulo 3. Extensión de la dinámica de la bifurcación zip en modelos suaves 103

sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$ todos los puntos del segmento L_k son nodos estables en el sentido de *Lyapunov* y L_k es un atractor del sistema (véase Figura 3.18).

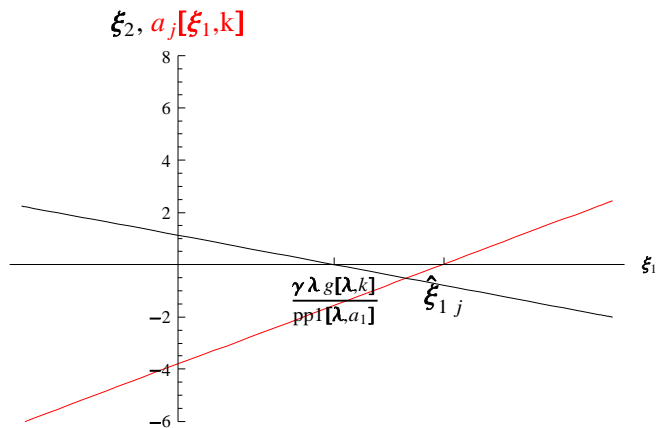


Figura 3.18: Gráficas de los segmentos de línea recta L_k y $L_{a_{kj}}$ para la condición $k < k_{a1j}$.

ii) Condición para $k = k_{a1j}$.

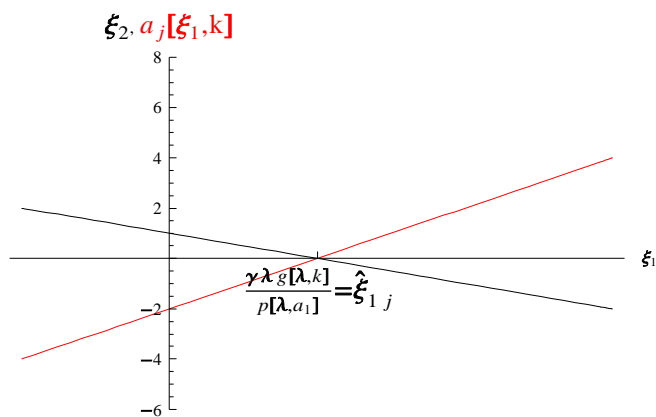


Figura 3.19: Gráficas de los segmentos de línea recta L_k y $L_{a_{kj}}$ para la condición $k = k_{a1j}$.

El segmento de línea recta de pendiente positiva $L_{a_{kj}}$ intersecta el eje ξ_1 en el punto $\xi_1 = \widehat{\xi}_1(k_{a1j}) = \xi_{11}(k_{a1j})$, así que $a_j(\xi_1, k) < 0$ en el dominio de L_k , excepto en $\xi_1 = \widehat{\xi}_1(k_{a1j}) = \xi_{11}(k_{a1j})$, donde $a_j(\xi_1, k_{a1j}) = 0$. Por lo tanto en el sistema suave

(2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$ todos los puntos del segmento L_k son estables en el sentido de *Lyapunov* y L_k es un atractor del sistema. Además en este punto de bifurcación empieza el proceso de desestabilización de L_k (véase Figura 3.19).

iii) Condición para $k_{a_{1j}} < k < k_{a_{2j}}$.

El segmento de línea recta de pendiente positiva $L_{a_{kj}}$ intersecta el eje ξ_1 en el punto $\widehat{\xi}_1(k)$ en un punto interior del dominio de L_k , porque $\widehat{\xi}_1$ es decreciente con k y $\widehat{\xi}_1(k_{a_{1j}}) = \xi_{11}(k_{a_{1j}})$, por consiguiente el punto $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k), \widehat{\xi}_2(k))$, divide L_k en dos

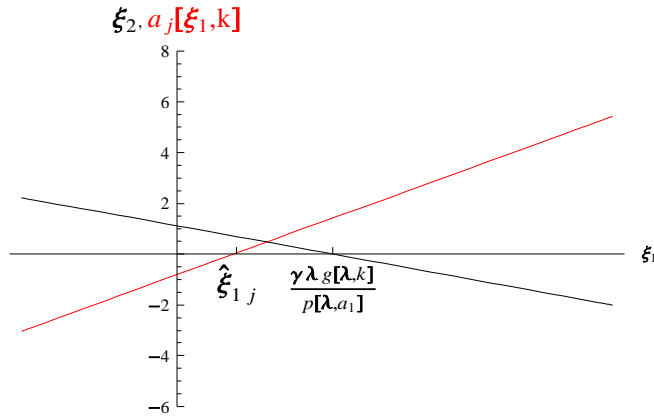


Figura 3.20: Gráficas de los segmentos de línea recta L_k y $L_{a_{kj}}$ para la condición $k_{a_{1j}} < k < k_{a_{2j}}$.

partes (*una de las cuales puede ser vacía*). Luego los puntos del segmento de equilibrios L_k a la derecha del punto $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k), \widehat{\xi}_2(k))$ son inestables; los puntos del segmento de equilibrios L_k a la izquierda del punto $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k), \widehat{\xi}_2(k))$ son asintóticamente estables en el sentido de *Lyapunov* y forman un atractor del sistema (véase Figura 3.20).

iv) Condición para $k = k_{a_{2j}}$.

El segmento de línea recta de pendiente positiva $L_{a_{kj}}$ intersecta el eje ξ_1 en el punto $\xi_1 = \widehat{\xi}_1(k_{a_{2j}}) = \xi_{10}$, así que $a_j(\xi_1, k) > 0$ en el dominio de L_k , excepto en $\xi_1 = \widehat{\xi}_1(k_{a_{2j}}) = \xi_{10}$, donde $a_j(\xi_1, k_{a_{2j}}) = 0$. Por lo tanto en el sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$ todos los puntos del segmento L_k son inestables en el sentido de *Lyapunov*, excepto el punto $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k_{a_{2j}}), \widehat{\xi}_2(k_{a_{2j}}))$ el cual es estable, por lo cual

$L_k - \{(\lambda, \widehat{\xi}_1(k_{a_{2j}}), \widehat{\xi}_2(k_{a_{2j}}))\}$ es un repulsor del sistema. Además en este punto de bifurcación se culmina el proceso de desestabilización de L_k (véase Figura 3.21).

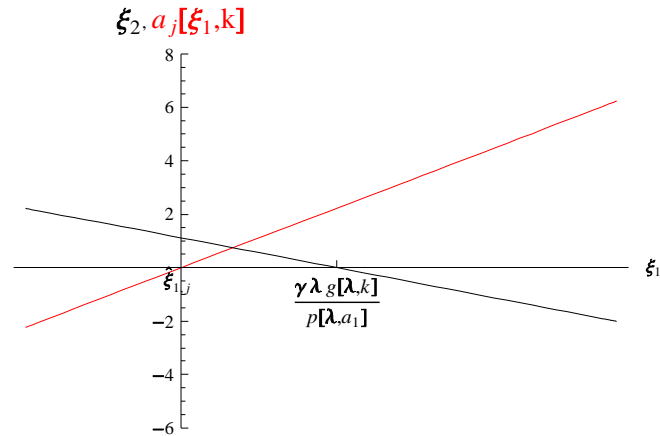


Figura 3.21: Gráficas de los segmentos de línea recta L_k y $L_{a_{kj}}$ para la condición $k = ka_{2j}$.

v) Condición para $ka_{2j} < k < \infty$.

El segmento de línea recta de pendiente positiva $L_{a_{kj}}$ intersecta el eje ξ_1 , en el punto

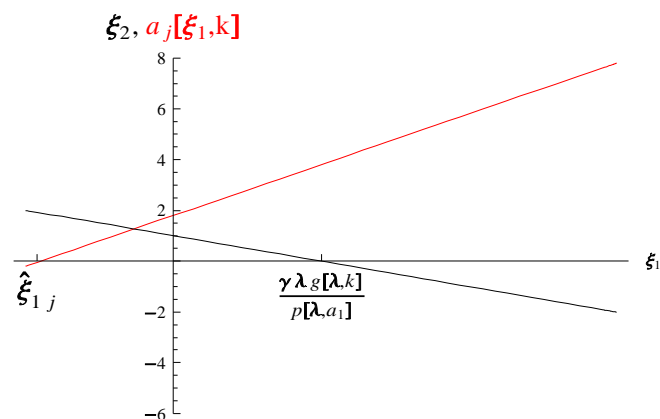


Figura 3.22: Gráficas del segmento de línea L_k y del segmento de línea $L_{a_{kj}}$ para la condición $k > ka_{2j}$.

$\xi_1 = \widehat{\xi}_1(k) < \xi_{10}$, así que $a_j(\xi_1, k) > 0$, en el dominio de L_k . Por lo tanto en el sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$ todos los puntos del segmento L_k son

Capítulo 3. Extensión de la dinámica de la bifurcación zip en modelos suaves 106
 inestables en el sentido de *Lyapunov* y L_k es un repulsor del sistema. Además se incrementa la inestabilidad del sistema con el incremento del parámetro de bifurcación k , ver Figura 3.22.

□

A continuación se demuestra la ocurrencia de la bifurcación geométrica de tipo zip para el sistema suave (2.1) la cual depende de la dinámica de la componente imaginaria respectivamente de los valores propios u_{1j} y u_{2j} del sistema suave (2.1) linealizado en puntos de L_k (véase la Definición 3.6).

Los valores propios conjugados μ_{1j} y μ_{2j} tienen parte imaginaria positiva, si y sólo si $\bar{b}_j(\xi_1, k) > 0$, es decir

$$-m_j^2 \xi_1^2 + (A_j - 2m_j c_j(k, a_2)) \xi_1 + D_j(k) - c_j^2(k, a_2) > 0. \quad (3.102)$$

Se consideran el segmento de la parábola $L\bar{b}_{kj}$ en el plano $s = \lambda$ siguiente (véase la Notación 34)

$$L\bar{b}_{kj} = \{(s, \xi_1, \bar{b}_j(\xi_1, k)) : \bar{b}_j(\xi_1, k) = -m_j^2 \xi_1^2 + (A_j - 2m_j c_j(k, a_2)) \xi_1 + D_j(k) - c_j^2(k, a_2); \\ s = \lambda, 0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}\}.$$

Fijando k , se puede determinar los puntos $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$ y $(\lambda, \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k), \bar{\bar{\xi}}_{2j}(k)) \in L_k$ en que la linealización del sistema suave (2.1) tienen dos valores propios con componente imaginaria cero, es decir $\bar{b}_j(\xi_1, k) = 0$. Dichos puntos se obtienen resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} -m_j^2 \xi_1^2 + (A_j - 2m_j c_j(k, a_2)) \xi_1 + D_j(k) - c_j^2(k, a_2) &= 0, \\ p(\lambda, a_1) \xi_1 + p(\lambda, a_2) \xi_2 &= \lambda g(\lambda, k), \quad \xi_1 \in (0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}), \end{aligned}$$

(véase (3.1)) y viene dado, después de algunas simplificaciones, por

$$\bar{\xi}_{1j} = \frac{A_j - 2m_j c_j(k, a_2) + \sqrt{A_j^2 + 4m_j^2 D(k) - 4m_j A_j c_j(k, a_2)}}{2m_j^2}, \quad (3.103)$$

$$\bar{\xi}_{2j} = \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k) - \bar{\xi}_{1j} p(\lambda, a_1)}{p(\lambda, a_2)},$$

$$\bar{\bar{\xi}}_{1j} = \frac{A_j - 2m_j c_j(k, a_2) - \sqrt{A_j^2 + 4m_j^2 D(k) - 4m_j A_j c_j(k, a_2)}}{2m_j^2}, \quad (3.104)$$

$$\bar{\bar{\xi}}_{2j} = \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k) - \bar{\bar{\xi}}_{1j} p(\lambda, a_1)}{p(\lambda, a_2)}.$$

Observación 69 Como una preparación al teorema siguiente, se mencionan algunas propiedades analíticas de las funciones $\bar{\xi}_{1j}(k)$ y $\bar{\bar{\xi}}_{1j}(k)$. De las Proposiciones 62, 63 y 64, se tiene que la función $\bar{\bar{\xi}}_{1j}$, es estrictamente creciente cuando $k \in (k_{\min j}, k_{b1j})$ si se consideran modelos en los cuales $w_j(k_{b2j}) < 0$, en el sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$, $j = 1, 2$, (véase la Definición 48). Igualmente por las Proposiciones 65 y 66 se puede concluir que la función $\bar{\xi}_{1j}(k)$ es estrictamente decreciente en $k \in (k_{\min j}, k_{b2j})$ si se consideran modelos en los cuales $w_j(k_{b2j}) > 0$, en el sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$, $j = 1, 2$. Además las funciones $\bar{\bar{\xi}}_{1j}$ y $\bar{\xi}_{1j}(k)$ presentan cambio de signo en el intervalo $(k_{\min j}, k_{\max j})$ de acuerdo con la parte iii) de la Proposición 57, y la Definición 41.

Teorema 70 Si el sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$, $j = 1, 2$, con $w_j(k_{b2j}) < 0$, $\xi_{11}(k_{\min j}) \geq \frac{(A_j - 2m_j c_j(k_{\min j}, a_2))}{m_j^2}$, satisface las condiciones (2.8) a (2.13) y (2.20) a (2.23); entonces existen k_{b2j}, k_{b1j} , únicos, con $k_{\min j} < k_{b2j} < k_{b1j} < k_{\max j}$, tal que para todo $k \in (k_{\min j}, k_{b2j})$, todos los puntos del segmento L_k son nodos estables, y L_k es un atractor del sistema, en el sentido que existe una vecindad del segmento de equilibrios L_k para el cual las soluciones con condición inicial en esta vecindad tiende a un punto del segmento L_k cuando t tiende a infinito. Para $k \in (k_{b2j}, k_{b1j})$, el punto $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k)) \in L_k$ divide L_k en dos partes (una de las cuales puede ser vacía), donde $\bar{\bar{\xi}}_{1j}(k)$ y $\bar{\bar{\xi}}_{2j}(k)$ son dados por (3.104). Los puntos de L_k a la izquierda de este punto son focos, los puntos a la derecha son nodos. Para $k \in (k_{b1j}, k_{\max j})$, el sistema sólo tiene equilibrios focos en el octante positivo del espacio cerrado s, x_1, x_2 .

Prueba: Por hipótesis nuestro subsistema satisface $w_j(k_{b2j}) = A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2) < 0$ (véase las observaciones 55 y 69). Así, como $\bar{\bar{\xi}}_{1j}(k)$ es continua, estrictamente creciente y presenta cambio de signo en $(k_{\min j}, \bar{k}_{\max j})$, existe un único $\bar{k}_j \in (k_{\min j}, \bar{k}_{\max j})$ en el cual $\bar{\bar{\xi}}_{1j}(\bar{k}_j) = 0$; luego de la parte i) de la Proposición 45, y la parte (v) y (vi) de la Proposición 57, se tiene que

$$\bar{k} = k_{b2j}.$$

Sin embargo de la segunda ecuación de (3.104) se deduce que la línea \widehat{L}_k (ver Notación 34) intercepta el eje ξ_2 en un punto de coordenada positivo en $k = k_{b2j} > k_{\min j}$, es

decir $\bar{\bar{\xi}}_{2j}(k_{b2j}) > 0$. Similarmente, por la proposición 39, el Lema 40, la Definición 41 y la parte i) de la proposición 59, existe un $k_{b1j} > k_{b2j}$, en el cual $\bar{\bar{\xi}}_{1j}(k_{b1j}) = \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k_{b1j})}{p(\lambda, a_1)}$, es decir $\bar{\bar{\xi}}_{2j}(k_{b1j}) = 0$. Consecuentemente, para $k \in (k_{b1j}, k_{b2j})$, el punto

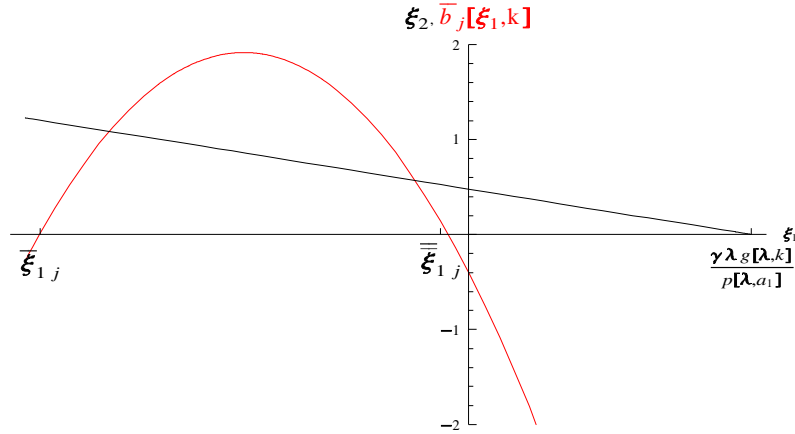


Figura 3.23: Gráfica del segmento de línea recta L_k y del segmento de línea $L_{\bar{b}_{kj}}$ para la condición $k < k_{b2j}$.

de intersección $(\bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\bar{\xi}}_{2j}(k)) \in \hat{L}_k$ en el cual la linealización del sistema suave (2.1) tiene valores propios con componente imaginaria cero se localiza en el primer cuadrante del plano ξ_1, ξ_2 con $s = \lambda$ fijo (véase las Figuras 3.24, 3.25 y 3.27).

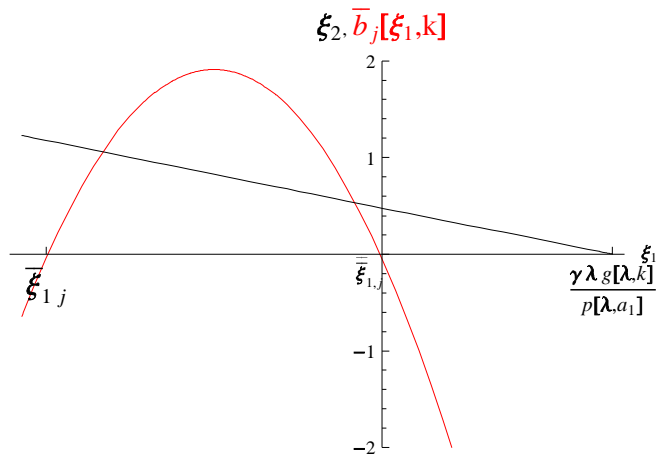


Figura 3.24: Gráficas del segmento de línea recta L_k y del segmento de línea $L_{\bar{b}_{kj}}$ para la condición $k = k_{b2j}$.

De las Proposiciones 62, 63, y 64, se tiene que $\bar{\xi}_{1j}(k) < 0$, con $k \in (k_{\min}, k_{b2j})$; donde $\bar{\xi}_{1j}$ es el extremo derecho de la intersección de la parábola (3.105) con el eje ξ_1 .

$$\bar{b}_j(\xi_1, k) = -m_j^2 \xi_1^2 + (A_j - 2m_j c_j(k, a_2)) \xi_1 + D_j(k) - c_j^2(k, a_2), \quad (3.105)$$

$$-\infty \leq \xi_1 \leq \infty.$$

Además como el coeficiente principal de la parábola (3.105) definida con k fijo es negativo, entonces la parábola es cóncava hacia abajo, por consiguiente

$$\bar{b}_j(\xi_1, k) < 0, \text{ si } 0 = \bar{\xi}_{1j}(k_{b2j}) \leq \xi_1 \leq \bar{\xi}_{1j}(k_{b1j}) = \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)} \text{ y } k \in (k_{\min j}, k_{b2j}). \quad (3.106)$$

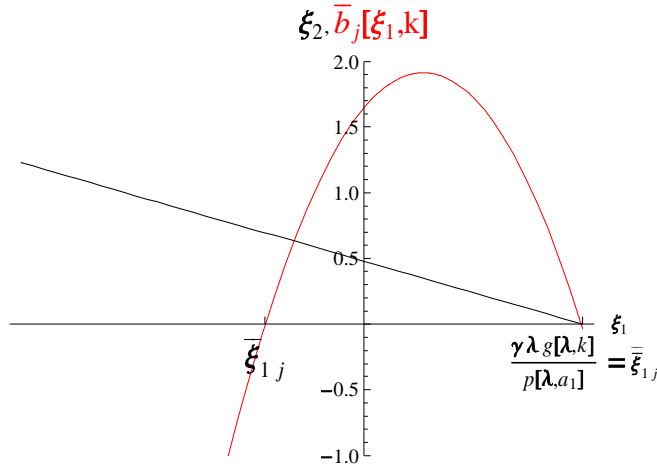


Figura 3.25: Gráficas del segmento de línea recta L_k y del segmento de línea $L_{\bar{b}_{kj}}$ para la condición $k = k_{b1j}$.

Sin embargo de (3.106) y la observación 43, se deduce que en los puntos de L_k el sistema suave (2.1) linealizado tienen dos valores propios negativos con lo cual se infiere que por estos puntos pasa una variedad bidimensional estable y son del tipo nodo de acuerdo con un teorema dado en Harman [41, Capítulo IX, Teorema 6.1], véase Figura 3.23. También de la proposición 39, el Lema 40, la Definición 41, la observación 55 y la parte i) de la proposición 59, se tiene que

$$\bar{b}_j(\xi_{11}(k), k) > 0, k \in (k_{b1j}, k_{\max j}), \quad (3.107)$$

lo cual implica que el punto de intersección $(\bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$ en \hat{L}_k en el cual el sistema

Capítulo 3. Extensión de la dinámica de la bifurcación zip en modelos suaves 110
 suave (2.1) linealizado tiene dos valores propios con parte imaginaria cero se localiza en el cuarto cuadrante del plano ξ_1, ξ_2 con $s = \lambda$ fijo (véase Figuras 3.25 y 3.26).

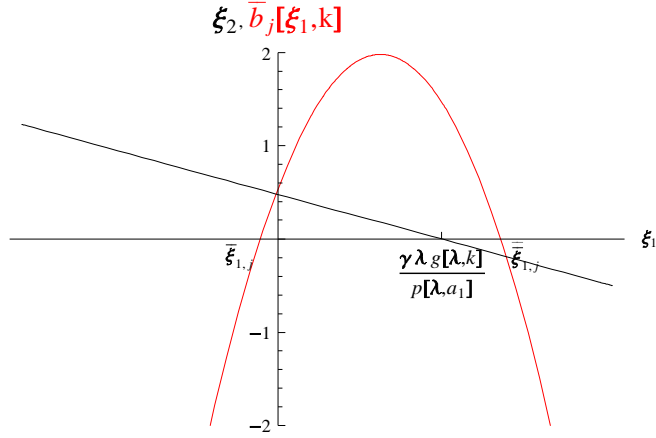


Figura 3.26: Gráfica del segmento de línea recta L_k y el segmento de línea $L_{\bar{b}_k}$ para la condición $k > k_{b1j}$.

Además como consecuencia de las Proposiciones 62, 63, y 64 (ver la observación 55), se tiene que

$$\bar{\xi}_{1j}(k) < 0, \text{ si } k \in (k_{b1j}, k_{\max j}), \quad (3.108)$$

luego, (3.107) y (3.108) implican que en los puntos de L_k el sistema suave (2.1) linealizado tiene dos valores propios con parte imaginaria distinta de cero y por tanto los puntos de L_k son focos. Si $k \in (k_{b2j}, k_{b1j})$, el punto de intersección $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$ divide L_k en dos partes; en los puntos que están a la izquierda de $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$, es decir los puntos para los cuales $0 \leq \xi_1 \leq \bar{\xi}_{1j}$, donde la condición (3.109) se tiene

$$\bar{b}_j(\xi_1, k) \geq 0, \quad (3.109)$$

ya que con k fijo, la parábola (3.105) es cóncava hacia abajo; además $\bar{\xi}_{1j} > 0$, en el extremo derecho de la parábola (intersección del lado derecho de la parábola con el eje ξ_1), y $\bar{\xi}_{1j}(k) < 0$, en el extremo izquierdo de la parábola (intersección del lado izquierdo de la parábola con el eje ξ_1); esto significa que los puntos de L_k que están a la izquierda del punto $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$ son focos. Por otro lado, en los puntos de L_k que están a la derecha de $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$, es decir los puntos para los cuales

$\bar{\xi}_{2j} \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}$ la condición (3.110) se tiene

$$\bar{b}_j(\xi_{1j}, k) < 0, \quad (3.110)$$

esto significa que los puntos de L_k que están a la derecha del punto $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$ son nodos (ver Figura 3.27).

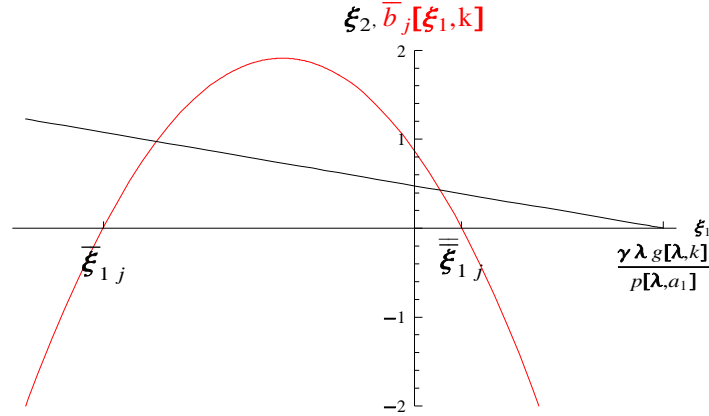


Figura 3.27: Gráficas del segmento de línea recta L_k y del segmento de línea $L_{\bar{b}_k}$ para la condición $k_{b2j} < k < k_{b1j}$.

Resaltamos en esta parte que $g(\lambda, \cdot)$ es una función no decreciente, y

$$\partial_k \left(\bar{\xi}_{2j}(k) - \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_2)} \right)$$

es una función monótona decreciente, ya que $\bar{\xi}_{1j}(k)$ es una función monótona creciente para $k \in (k_{\min j}, k_{b1j})$ de acuerdo con la segunda igualdad de (3.104); como consecuencia, si k es incrementado de k_{b2j} a k_{b1j} los puntos $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$ se mueven continuamente a lo largo de L_k del extremo izquierdo al extremo derecho y el segmento L_k sufre un desplazamiento paralelo hacia arriba. En este proceso los puntos que quedan hacia atrás de $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$ cambian su comportamiento cualitativo; a este fenómeno le llamamos una *bifurcación geométrica del tipo zip* causada por la dinámica de la componente imaginaria de los valores propios de la linealización del sistema suave en los puntos de L_k . \square

Los modelos que satisfacen las condiciones $w_j(k_{b2j}) = A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2) > 0$, y $\xi_{11}(k_{\min j}) \leq \frac{(A_j - 2m_j c_j(k_{\min j}, a_2))}{m_j^2}$, tienen un comportamiento similar a los modelos que

satisfacen las condiciones $A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2) < 0$, y $\frac{A_j - 2m_j c_j(\bar{k}_{\min j}, a_2)}{m_j^2} \leq \xi_{11}(\bar{k}_{\min j})$ (véase el Teorema 70), excepto en que la dirección de la bifurcación de tipo-zip que se desarrolla a lo largo del segmento de equilibrios L_k es de sentido contrario; motivo por el cual sólo se presenta su enunciado y las gráficas de la recta L_k con las del segmento de curva $L\bar{b}_{kj}$ que ilustran la dinámica de la bifurcación tipo-zip a lo largo del segmento de equilibrios L_k para distintas condiciones del parámetro de bifurcación k .

Teorema 71 *Si el sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$, $j = 1, 2$, con $w_j(k_{b2j}) > 0$, $\xi_{11}(k_{\min j}) \leq \frac{(A_j - 2m_j c_j(k_{\min j}, a_2))}{m_j^2}$, satisface las condiciones (2.8) a (2.13) y (2.20) a (2.23), existen k_{b2j}, k_{b1j} , únicos, con $k_{\min} < k_{b1j} < k_{b2j} < k_{\max j}$, tal que para todo $k \in (k_{\min j}, k_{b1j})$, todos los puntos del segmento L_k son nodos estables, y L_k es un atractor del sistema, en el sentido que existe una vecindad del segmento de equilibrios para el cual las soluciones con condición inicial en esta vecindad tiende a un punto del segmento L_k cuando t tiende a infinito. Para $k \in (k_{b1j}, k_{b2j})$, el punto $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k)) \in L_k$ divide L_k en dos partes (una de las cuales puede ser vacía), donde $\bar{\xi}_{1j}(k)$ y $\bar{\xi}_{2j}(k)$ son los dados por (3.103). Los puntos de L_k a la izquierda de este punto son nodos, los puntos a la derecha son focos. Para $k \in (k_{b2j}, k_{\max j})$, el sistema sólo tiene equilibrios focos en el octante positivo del espacio cerrado s, x_1, x_2 .*

A continuación se presentan las gráficas de la línea recta L_k y del segmento de curva $L\bar{b}_{kj}$ en el plano $s = \lambda$, las cuales muestran la dinámica de la componente imaginaria de los valores propios u_{1j} y u_{2j} del sistema suave (2.1) linealizado en puntos de L_k (ver Definición 3.6).

i) Condición para $k = k_{\min j}$.

La parábola cóncava hacia abajo $L\bar{b}_{kj}$ (véase la Notación 34) emerge del eje ξ_1 al lado derecho del segmento de equilibrios L_k en el punto $\xi_1 = \bar{\xi}_{1j}(k_{\min j}) = \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k_{\min j})$, el cual es una raíz doble de $L\bar{b}_{kj}$, así que $\bar{b}_j(\xi_1, k) < 0$, en el dominio de L_k . Por consiguiente en el sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$ todos los puntos del segmento L_k son nodos estables en el sentido de *Lyapunov* y L_k es un atractor del sistema (véase la Observación 43 y la Figura 3.28).

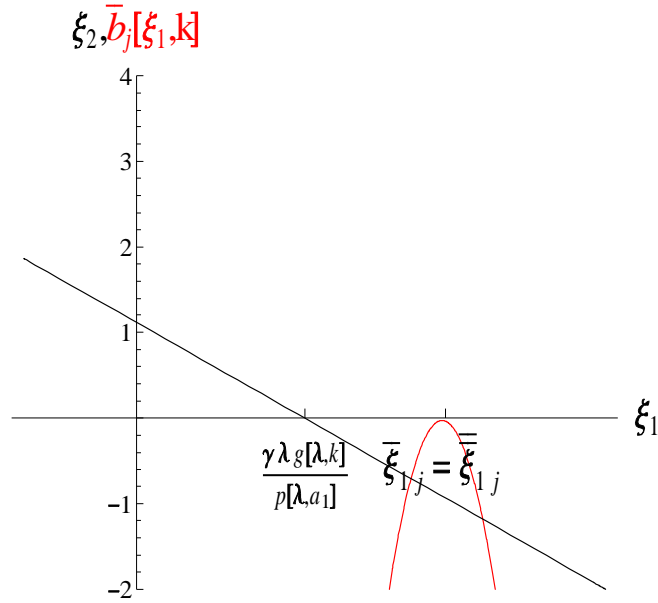


Figura 3.28: Gráficas del segmento de línea L_k y del segmento de línea $L_{\bar{b}_{k_j}}$ para la condición $k = k_{\min j}$.

ii) Condición para $k_{\min j} < k < k_{b1j}$.

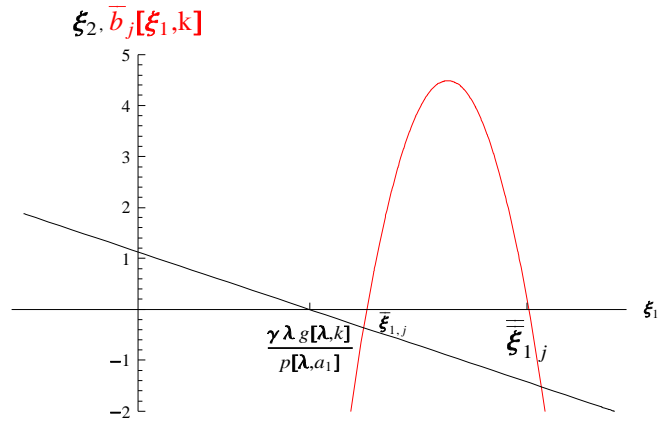


Figura 3.29: Gráficas del segmento de línea L_k y del segmento de línea $L_{\bar{b}_{k_j}}$ para la condición $k < k_{b1j}$.

La parábola cóncava hacia abajo $L_{\bar{b}_{k_j}}$ (véase la Notación 34) interseca el eje ξ_1 en los puntos $\xi_1 = \bar{\xi}_{1j}(k) > \xi_{11}(k)$ y $\xi_1 = \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) > \bar{\xi}_{1j}(k)$, por lo cual $\bar{b}_j(\xi_1, k) < 0$, en el dominio de L_k . Por lo tanto en el sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$

todos los puntos del segmento L_k son nodos estables en el sentido de *Lyapunov* y L_k es un atractor del sistema (véase la Observación 43 y la Figura 3.29).

iii) Condición para $k = k_{b1j}$.

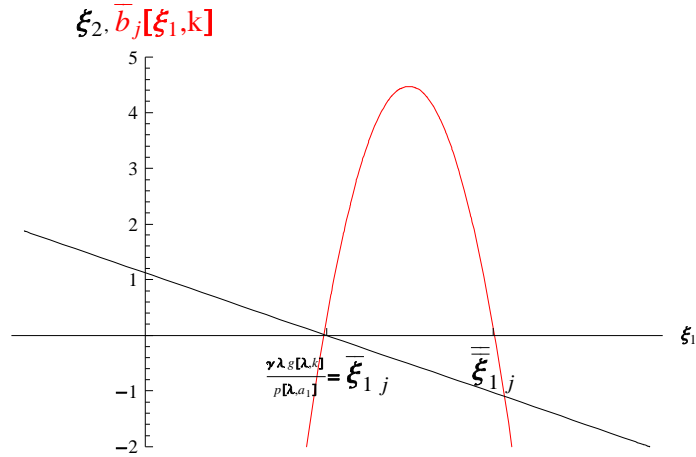


Figura 3.30: Gráficas del segmento de línea recta L_k y del segmento de línea $L_{\bar{b}_{kj}}$ para la condición $k = k_{b1j}$.

La parábola cóncava hacia abajo $L_{\bar{b}_{kj}}$ intersecta el eje ξ_1 en los puntos $\xi_1 = \bar{\xi}_{1j}(k_{b1j}) = \xi_{11}(k_{b1j})$ y $\xi_1 = \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k_{b1j}) > \xi_{11}(k_{b1j})$ por lo cual $\bar{b}_j(\xi_1, k) < 0$, en el dominio de L_k , excepto en el punto $\xi_1 = \bar{\xi}_{1j}(k_{b1j}) = \xi_{11}(k_{b1j})$, donde $\bar{b}_j(\xi_1, k_{b1j}) = 0$. Entonces en el sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$ todos los puntos de L_k son nodos estables en el sentido de *Lyapunov* y L_k es un atractor del sistema (véase la observación 43). Además en este punto de bifurcación empieza el proceso de cambio cualitativo de los puntos de L_k (véase la Figura 3.30).

iv) Condición para $k_{b1j} < k < k_{b2j}$.

La parábola cóncava hacia abajo $L_{\bar{b}_{kj}}$ intersecta el eje ξ_1 en el punto $\xi_1 = \bar{\xi}_{1j}(k) < \xi_{11}(k)$ en un punto interior del dominio de L_k , porque $\bar{\xi}_{1j}$ decrece con k , y $\bar{\xi}_{1j}(k_{b1j}) = \xi_{11}(k_{b1j})$ (véase observación 69) y en el punto $\xi_1 = \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) > \xi_{11}(k)$. Por consiguiente el punto $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$, divide L_k en dos partes (*una de las cuales puede ser vacía*). Entonces en el sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$ cada punto de L_k a la izquierda del punto $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$ se comporta como nodo estable y cada

Capítulo 3. Extensión de la dinámica de la bifurcación zip en modelos suaves 115
 punto de L_k a la derecha del punto $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$ se comporta como foco (véase la Figura 3.31).

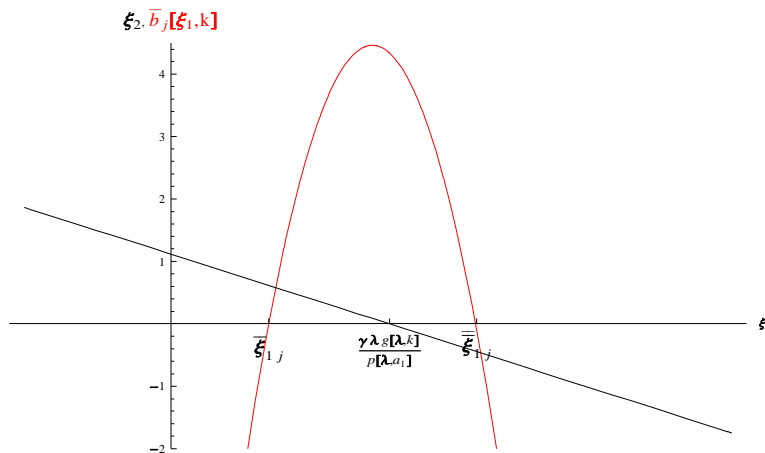


Figura 3.31: Gráficas del segmento de línea recta L_k y del segmento de línea $L_{\bar{b}_{kj}}$ para la condición $k_{b1j} < k < k_{b2j}$.

v) Condición para $k = k_{b2j}$.

La parábola cóncava hacia abajo $L_{\bar{b}_{kj}}$ intersecta el eje ξ_1 en el punto $\xi_1 = \bar{\xi}_{1j}(k_{b2j}) = \xi_{10}$ en el dominio de L_k y en el punto $\xi_1 = \bar{\xi}_{1j}(k_{b2j}) > \xi_{11}(k_{b2j})$, por lo cual $\bar{b}_j(\xi_1, k) > 0$, en el dominio de L_k , excepto en $\xi_1 = \bar{\xi}_{1j}(k_{b2j}) = \xi_{10}$, donde $\bar{b}_j(\xi_1, k_{b2j}) = 0$.

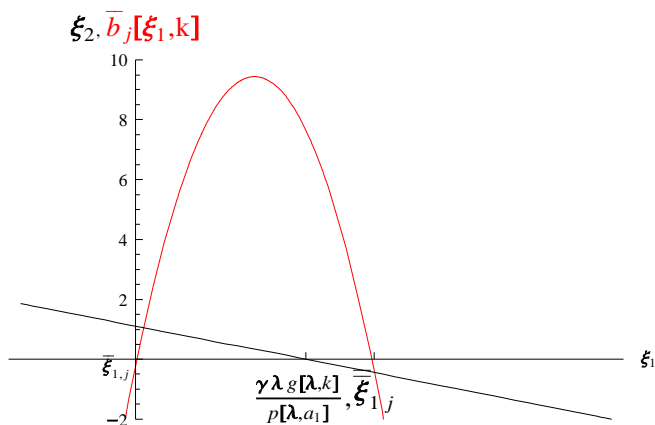


Figura 3.32: Gráficas del segmento de línea recta L_k y del segmento de línea $L_{\bar{b}_{kj}}$ para la condición $k = k_{b2j}$.

Entonces en el sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$ cada punto de L_k se comporta como foco a excepción del punto $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k_{b2j}), \bar{\xi}_{2j}(k_{b2j}))$ que se comporta como nodo (véase la Figura 3.32).

vi) Condición para $k_{b2j} < k < k_{\max j}$.

La parábola cóncava hacia abajo $L\bar{b}_{kj}$ intersecta el eje ξ_1 en el punto $\xi_1 = \bar{\xi}_{1j}(k) < \xi_{10}$ y en el punto $\xi_1 = \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) > \xi_{11}(k)$, por lo cual $\bar{b}_j(\xi_1, k) > 0$, en el dominio de L_k . Entonces en el sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$ cada punto de L_k se comporta como foco. Además se incrementa los cambios cualitativos del sistema al incrementarse el parámetro de bifurcación k (véase la Figura 3.33).

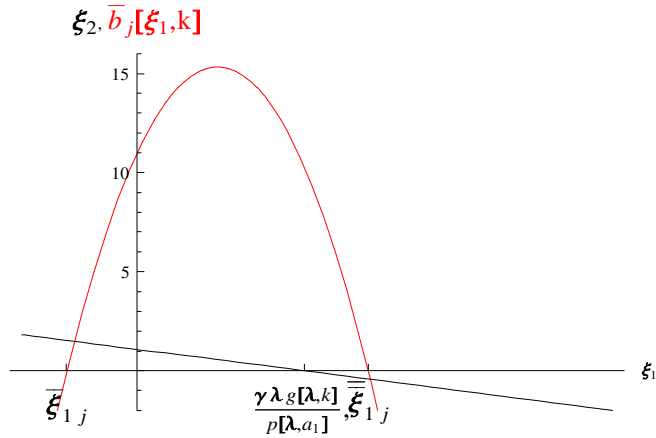


Figura 3.33: Gráficas del segmento de línea recta L_k y del segmento de línea $L\bar{b}_{kj}$ para la condición $k_{b2j} < k < k_{\max j}$.

Los modelos que satisfacen las condiciones $w_j(k_{b2j}) = A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2) > 0$, $\xi_{11}(k_{\min j}) \geq \frac{(A_j - 2m_j c_j(k_{\min j}, a_2))}{m_j^2}$, y $\xi_{11}(k_{b2j}) \leq \frac{(A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2))}{m_j^2}$, tienen diferente comportamiento de los modelos que satisfacen las condiciones $A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2) > 0$, y $\xi_{11}(k_{\min j}) \leq \frac{(A_j - 2m_j c_j(k_{\min j}, a_2))}{m_j^2}$, ya que en este caso la bifurcación de tipo-zip que se origina surge desde interior del segmento equilibrios L_k en el plano $s = \lambda$, propagándose en los dos sentidos y llegando al extremo derecho (intersección de L_k con el eje ξ_1) antes que al izquierdo (intersección de L_k con el eje ξ_2) del segmento de equilibrios L_k (véase la parte *v*) de la proposición 59). \square

La prueba del siguiente teorema es análoga a la del teorema anterior motivo por el cual sólo se presentará su enunciado junto con las gráficas de la recta L_k y la curva $L_{b_{k,j}}$ que ilustran la dinámica de la bifurcación tipo-zip a lo largo del segmento de equilibrios L_k para distintas condiciones del parámetro de bifurcación k .

Teorema 72 *Si el sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$, $j = 1, 2$, con $w_j(k_{b_{2j}}) > 0$, $\xi_{11}(k_{\min j}) \geq \frac{(A_j - 2m_j c_j(k_{\min j}, a_2))}{m_j^2}$, $\xi_{11}(k_{b_{21}}) \leq \frac{(A_j - 2m_j c_j(k_{b_{21}}, a_2))}{m_j^2}$, satisface las condiciones (2.8) a (2.13) y (2.20) a (2.23); entonces existen $k_{b_{2j}}, k_{b_{1j}}$ únicos, satisfaciendo $k_{\min j} < k_{b_{1j}} < k_{b_{2j}} < k_{\max j}$, tal que para todo $k \in (k_{\min j}, k_{b_{1j}})$, los puntos $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$ y $(\lambda, \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k), \bar{\bar{\xi}}_{2j}(k))$ dividen los puntos del segmento L_k en tres partes (dos de las cuales puede ser vacías), donde $\bar{\xi}_1(k), \bar{\xi}_2(k)$ son los dados por (3.103) y $\bar{\bar{\xi}}_{1j}(k), \bar{\bar{\xi}}_{2j}(k)$, los dados por (3.104). Los puntos de L_k a la izquierda de $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$ y a la derecha de $(\lambda, \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k), \bar{\bar{\xi}}_{2j}(k))$ son nodos, los puntos entre $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$ y $(\lambda, \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k), \bar{\bar{\xi}}_{2j}(k))$ son focos. Para $k \in (k_{b_{1j}}, k_{b_{2j}})$, el punto $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$ divide L_k en dos partes (una de las cuales puede ser vacía). Los puntos de L_k a la izquierda de este punto son nodos, los puntos a la derecha son focos. Para $k \in (k_{b_{2j}}, k_{\max j})$, el sistema sólo tiene equilibrios focos en el octante positivo del espacio cerrado s, x_1, x_2 .*

A continuación se presentan las gráficas de la línea recta L_k y de la curva $L\bar{b}_{kj}$ en el plano $s = \lambda$, las cuales muestran la dinámica de la componente imaginaria de los valores propios u_{1j} y u_{2j} del sistema suave (2.1) linealizado en puntos de L_k (ver Definición 3.6).

i) Condición para $k = k_{\min j}$.

La parábola cóncava hacia abajo $L\bar{b}_{kj}$ (véase la Notación 34) emerge del eje ξ_1 en el interior del dominio de L_k en el punto $\xi_1 = \bar{\xi}_{1j}(k_{\min j}) = \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k_{\min j})$, el cual es una raíz doble de $L\bar{b}_{kj}$, así que $\bar{b}_j(\xi_1, k) < 0$, en el dominio de L_k , excepto en $\xi_1 = \bar{\xi}_{1j}(k_{\min j})$, donde $\bar{b}_j(\xi_1, k_{\min j}) = 0$. Por consiguiente en el sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$ todos los puntos del segmento L_k son nodos estables en el sentido de Lyapunov y L_k es un atractor del sistema (véase la observación 43 y la Figura 3.34).

Además en este punto de bifurcación se empieza el proceso de cambio cualitativo de los puntos de L_k , el cual se extiende en ambas direcciones.

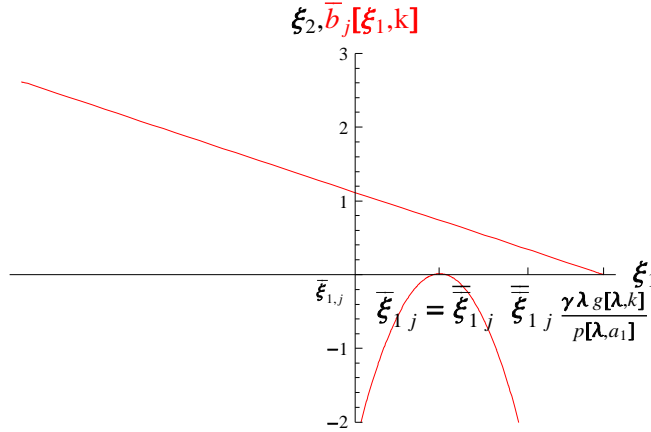


Figura 3.34: Gráficas del segmento de línea recta L_k y del segmento de línea $L_{\bar{b}_{kj}}$ para la condición $k_{\min j} = k$.

ii) Condición para $k_{\min j} < k < k_{b1j}$.

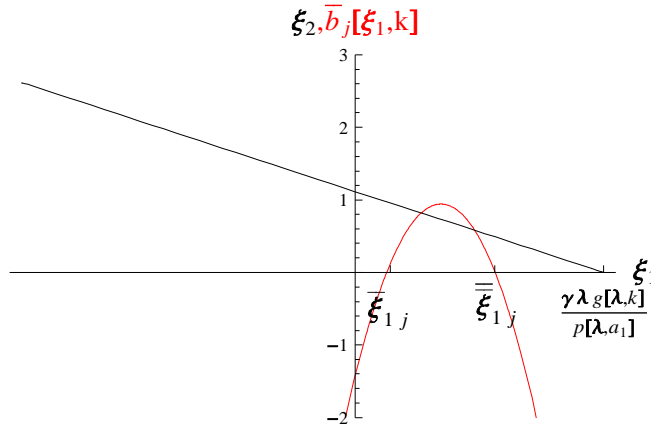


Figura 3.35: Gráficas del segmento de línea recta L_k y del segmento de línea $L_{\bar{b}_{kj}}$ para la condición $k_{\min j} \leq k < k_{b2j}$.

La parábola cóncava hacia abajo $L_{\bar{b}_{kj}}$ (véase la Notación 34) intersecta el eje ξ_1 en los puntos $\xi_1 = \bar{\xi}_{1j}(k) > \xi_{10}$ y $\xi_1 = \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) < \xi_{11}(k)$, por lo cual los puntos $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$ y $(\lambda, \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k), \bar{\bar{\xi}}_{2j}(k))$ dividen L_k en tres partes (una de las cuales puede ser vacía).

Entonces en el sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$ los puntos de L_k a la izquierda del punto $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$ y a la derecha del punto $(\lambda, \bar{\xi}_{12}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$ se comportan como nodos estables, y los puntos de L_k entre los puntos $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$ y $(\lambda, \bar{\xi}_{12}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$ se comportan como focos estables, véase Figura 3.35.

iii) Condición para $k = k_{b1j}$.

La parábola cóncava hacia abajo $L\bar{b}_{kj}$ (véase la Notación 34) intersecta el eje ξ_1 en los puntos $\xi_1 = \bar{\xi}_{1j}(k_{b1j}) < \xi_{10}$ y $\xi_1 = \xi_{11}(k_{b1j}) = \bar{\xi}_{1j}(k_{b1j})$, por lo cual el punto $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k_{b11}), \bar{\xi}_{2j}(k_{b11}))$, divide L_k en dos parte (una de las cuales puede ser vacía). Entonces en el sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$ cada punto de L_k a la izquierda del punto $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k_{b11}), \bar{\xi}_{2j}(k_{b11}))$ se comporta como nodo estable, y cada punto a la derecha del punto $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k_{b11}), \bar{\xi}_{2j}(k_{b11}))$ se comportan como foco, véase Figura 3.36.

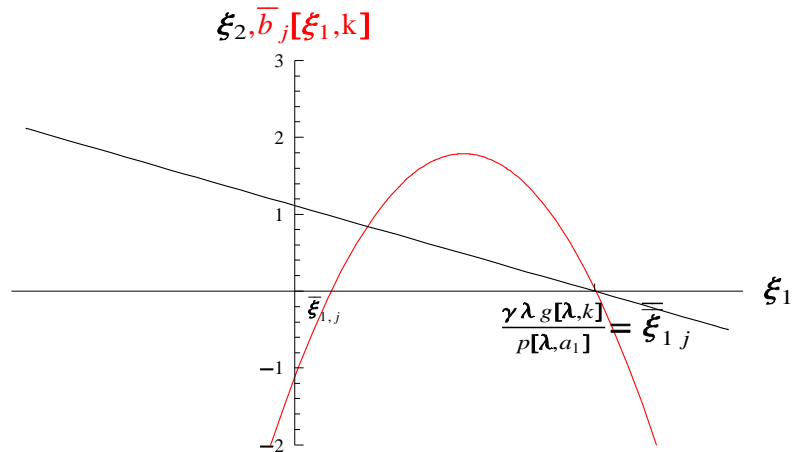


Figura 3.36: Gráficas del segmento de línea recta L_k y del segmento de línea $L\bar{b}_{kj}$ para la condición $k = k_{b1j}$.

iv) Condición para $k_{b1j} < k < k_{b2j}$.

La parábola cóncava hacia abajo $L\bar{b}_{kj}$ intersecta el eje ξ_1 en los puntos $\xi_1 = \bar{\xi}_{1j}(k) > \xi_{10}$ y $\xi_1 = \bar{\xi}_{1j}(k) > \xi_{11}(k)$, por lo cual el punto $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$, divide el segmento L_k en dos partes (una de las cuales puede ser vacía). Entonces en el sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$ cada punto de L_k a la izquierda del punto

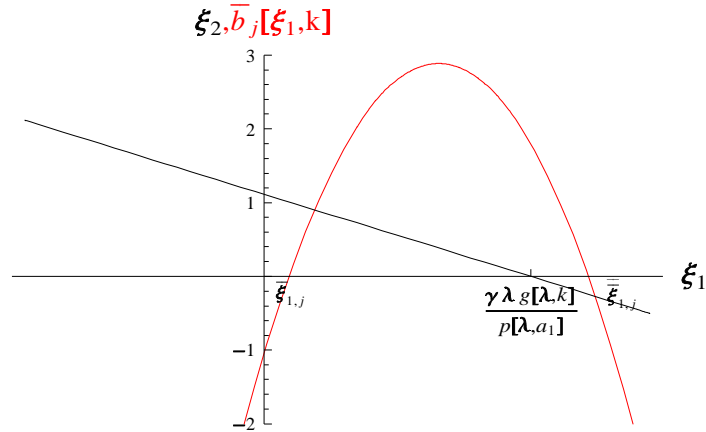


Figura 3.37: Gráficas del segmento de línea recta L_k y del segmento de línea $L_{\bar{b}_{k,j}}$ para la condición $k_{b1j} \leq k < k_{b2j}$.

$(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$ se comporta como nodo estable y cada punto de L_k a la derecha del punto $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$ se comporta como foco, véase Figura 3.37.

v) Condición para $k = k_{b2j}$.

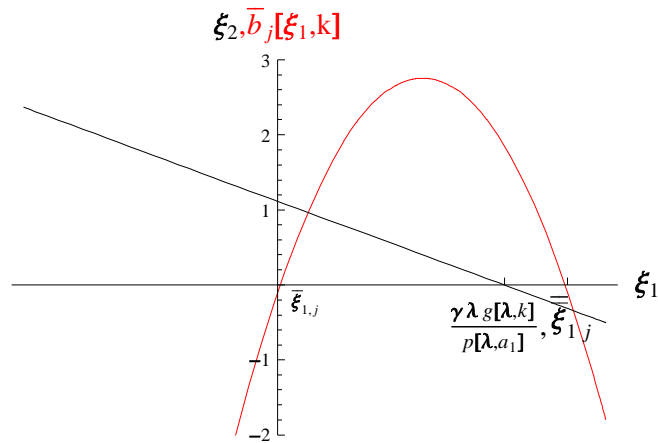


Figura 3.38: Gráficas del segmento de línea recta L_k y del segmento de línea $L_{\bar{b}_{k,j}}$ para la condición $k = k_{b2j}$.

La parábola cóncava hacia abajo $L_{\bar{b}_{k,j}}$ intersecta el eje ξ_1 en los puntos $\xi_1 = \bar{\xi}_{1j}(k_{b2j}) = \xi_{10}$ y $\xi_1 = \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k_{b2j}) > \xi_{11}(k_{b2j})$ por lo cual se tiene que $\bar{b}_j(\xi_1, k) > 0$, en el dominio de L_k , excepto en $\xi_1 = \bar{\xi}_{1j}(k_{b2j}) = \xi_{10}$, donde $\bar{b}_j(\xi_1, k_{b2j}) = 0$. Entonces en el sistema

Capítulo 3. Extensión de la dinámica de la bifurcación zip en modelos suaves 121
 suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$ cada punto de L_k se comporta como foco a excepción del punto $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k_{b2j}), \bar{\xi}_{2j}(k_{b2j}))$ el cual se comporta como nodo, véase Figura 3.38.

vi) Condición para $k_{b2j} < k < k_{\max j}$.

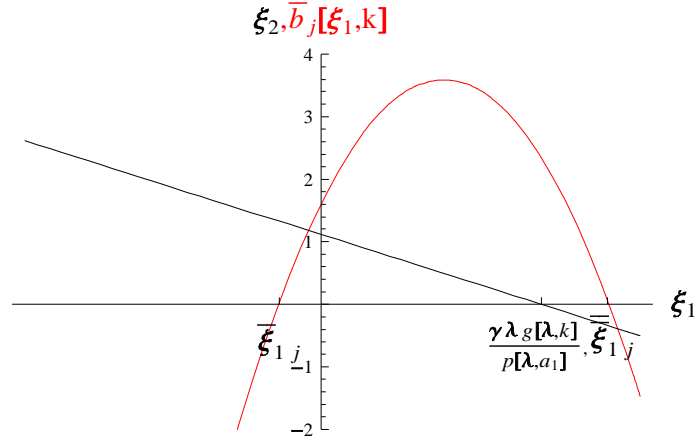


Figura 3.39: Gráficas del segmento de línea recta L_k y del segmento de línea $L_{\bar{b}_{kj}}$ para la condición $k_{b2j} < k < k_{\max j}$.

La parábola cóncava hacia abajo $L_{\bar{b}_{kj}}$ intersecta el eje ξ_1 en los puntos $\xi_1 = \bar{\xi}_{1j}(k) < 0$ y $\xi_1 = \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) > \xi_{11}(k)$, por lo cual se tiene que $\bar{b}_j(\xi_1, k) > 0$, en el dominio de L_k . Entonces en el sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$ cada punto de L_k se comporta como foco, véase Figura 3.39. \square

Los modelos que satisfacen las condiciones $w_j(k_{b2j}) = A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2) > 0$, $\xi_{11}(k_{\min j}) \geq \frac{(A_j - 2m_j c_j(k_{\min j}, a_2))}{m_j^2}$, y $\xi_{11}(k_{b21}) \geq \frac{(A_j - 2m_j c_j(k_{b21}, a_2))}{m_j^2}$, tienen un comportamiento similar a los modelos que satisfacen las condiciones $A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2) > 0$, $\xi_{11}(k_{\min j}) \geq \frac{(A_j - 2m_j c_j(k_{\min j}, a_2))}{m_j^2}$, y $\xi_{1j}(k_{b2j}) \leq \frac{(A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2))}{m_j^2}$, ya que en este caso la bifurcación de tipo-zip que se origina surge desde interior del segmento equilibrios L_k en el plano $s = \lambda$, propagándose en los dos sentidos y llegando al extremo izquierdo (intersección de L_k con el eje ξ_2) antes que al derecho (intersección de L_k con el eje ξ_1) del segmento de equilibrios L_k (véase la parte vi) de la Proposición 59).

La prueba del siguiente teorema es análoga a la del teorema anterior motivo por el

Capítulo 3. Extensión de la dinámica de la bifurcación zip en modelos suaves 122
cual sólo se presentará su enunciado junto con las gráficas de la recta L_k y la curva $L_{b_{k,j}}$ que ilustran la dinámica de la bifurcación tipo-zip a lo largo del segmento de equilibrios L_k para distintas condiciones del parámetro de bifurcación k .

Teorema 73 *Si el sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$, $j = 1, 2$, con $w_j(k_{b2j}) > 0$, $\xi_{11}(k_{\min j}) \geq \frac{(A_j - 2m_j c_j(k_{\min j}, a_2))}{m_j^2}$, $\xi_{11}(k_{b21}) \geq \frac{(A_j - 2m_j c_j(k_{b21}, a_2))}{m_j^2}$, satisface las condiciones (2.8) a (2.19) y (2.20) a (2.23), existen k_{b2j}, k_{b1j} únicos, con $k_{\min j} < k_{b1j} < k_{b2j} < k_{\max j}$, tal que para todo $k \in (k_{\min j}, k_{b1j})$, los puntos $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$ y $(\lambda, \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k), \bar{\bar{\xi}}_{2j}(k))$ dividen los puntos del segmento L_k en tres partes (dos de las cuales puede ser vacías), donde $\bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k)$, son dados por (3.103), y $\bar{\bar{\xi}}_{1j}(k), \bar{\bar{\xi}}_{2j}(k)$, son dados por (3.104). Los puntos de L_k a la izquierda de $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$ y a la derecha de $(\lambda, \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k), \bar{\bar{\xi}}_{2j}(k))$ son nodos, los puntos entre $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$ y $(\lambda, \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k), \bar{\bar{\xi}}_{2j}(k))$ son focos. Para $k \in (k_{b1j}, k_{b2j})$, el punto $(\lambda, \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k), \bar{\bar{\xi}}_{2j}(k))$ divide L_k en dos partes (una de las cuales puede ser vacía). Los puntos de L_k a la izquierda de este punto son focos, los puntos a la derecha son nodos. Para $k \in (k_{b1j}, k_{\max j})$, el sistema sólo tiene equilibrios focos en el octante positivo del espacio cerrado s, x_1, x_2 .*

A continuación se presentan las gráficas de la línea recta L_k y de la curva $L\bar{b}_{kj}$ en el plano $s = \lambda$, las cuales muestran la dinámica de la componente imaginaria de los valores propios u_{1j} y u_{2j} del sistema suave (2.1) linealizado en puntos de L_k (ver Definición 3.6).

i) Condición para $k = k_{\min j}$.

La parábola cóncava hacia abajo $L\bar{b}_{kj}$ (véase la Notación 34) emerge del eje ξ_1 en el dominio de L_k en el punto $\xi_1 = \bar{\xi}_{1j}(k_{\min j}) = \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k_{\min j})$, el cual es una raíz doble de $L\bar{b}_{kj}$, así que $\bar{b}_j(\xi_1, k) < 0$, en el dominio de L_k , excepto en $\xi_1 = \bar{\xi}_{1j}(k_{\min j})$, donde $\bar{b}_j(\xi_1, k_{\min j}) = 0$. Por consiguiente en el sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$ todos los puntos del segmento L_k son nodos estables en el sentido de *Lyapunov* y L_k es un atractor del sistema (véase la Observación 43 y la Figura 3.40). Además en este punto de bifurcación se empieza el proceso de cambio cualitativo de los puntos de L_k , el cual se extiende en ambas direcciones.

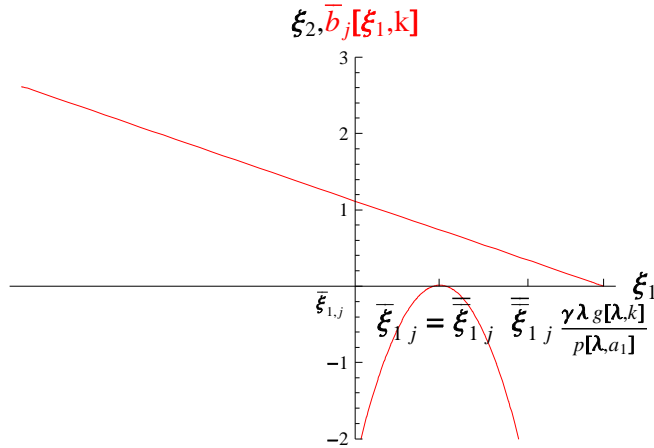


Figura 3.40: Gráficas del segmento de línea recta L_k y del segmento de línea $L_{\bar{b}_{kj}}$ para la condición $k_{\min j} = k$.

ii) Condición para $k_{\min j} < k < k_{b2j}$.

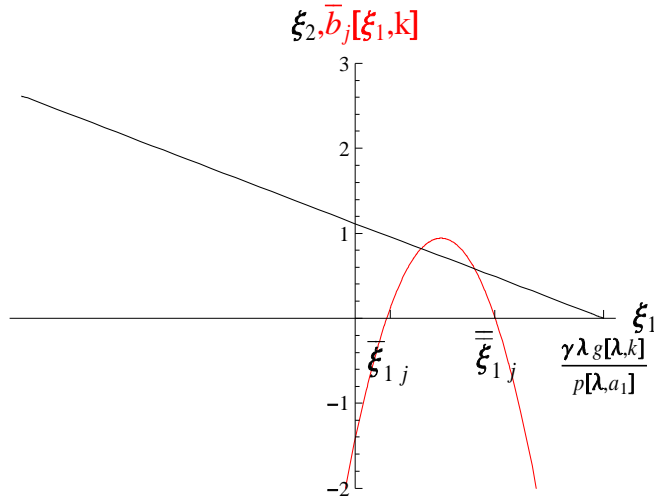


Figura 3.41: Gráficas del segmento de línea recta L_k y del segmento de línea $L_{\bar{b}_{kj}}$ para la condición $k_{\min j} \leq k < k_{b2j}$.

La parábola cóncava hacia abajo $L_{\bar{b}_{kj}}$ (véase la Notación 34) intersecta el eje ξ_1 en los puntos $\xi_1 = \bar{\xi}_{1j}(k) > \xi_{10}$ y $\xi_1 = \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) < \xi_{11}(k)$, por lo cual los puntos $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$ y $(\lambda, \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k), \bar{\bar{\xi}}_{2j}(k))$ dividen L_k en tres partes (una de las cuales puede ser vacía). Entonces en el sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$

cada punto de L_k a la izquierda del punto $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$ y a la derecha del punto $(\lambda, \bar{\bar{\xi}}_{12}(k), \bar{\bar{\xi}}_{2j}(k))$ se comporta como nodo estable, y cada punto de L_k entre los puntos $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$ y $(\lambda, \bar{\bar{\xi}}_{12}(k), \bar{\bar{\xi}}_{2j}(k))$ se comporta como foco estable, véase Figura 3.41.

iii) Condición para $k = k_{b2j}$.

La parábola cóncava hacia abajo $L\bar{b}_{kj}$ (véase la Notación 34) interseca el eje ξ_1 en los dos puntos $\xi_1 = \bar{\xi}_{1j}(k_{b2j}) = \xi_{10}$ y $\xi_1 = \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k_{b2j}) < \xi_{11}(k_{b2j})$ por lo cual el punto $(\lambda, \bar{\xi}_{12}(k_{b2j}), \bar{\xi}_{2j}(k_{b2j}))$ divide L_k en dos partes (*una de las cuales puede ser vacía*). Entonces en el sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$ cada punto de L_k a la derecha del punto $(\lambda, \bar{\xi}_{12}(k_{b2j}), \bar{\xi}_{2j}(k_{b2j}))$ se comporta como nodo estable, y cada punto a la izquierda del punto $(\lambda, \bar{\bar{\xi}}_{12}(k_{b2j}), \bar{\bar{\xi}}_{2j}(k_{b2j}))$ se comportan como foco estable, véase Figura 3.42.

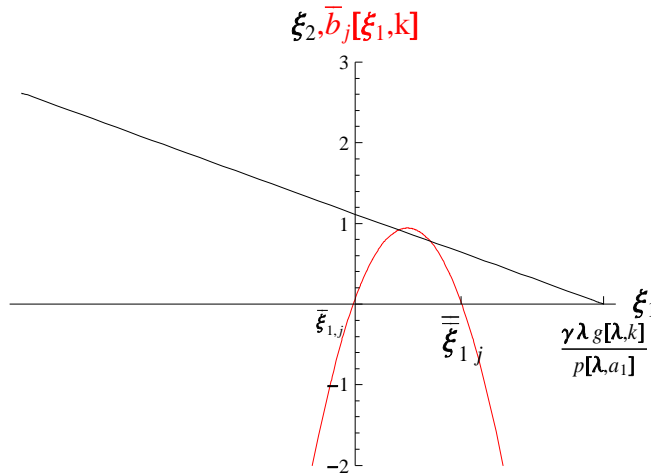


Figura 3.42: Gráficas del segmento de línea recta L_k y del segmento de línea $L\bar{b}_{kj}$ para la condición $k = k_{b2j}$.

iv) Condición para $k_{b2j} < k < k_{b1j}$

La parábola cóncava hacia abajo $L\bar{b}_{kj}$ interseca el eje ξ_1 en los puntos $\xi_1 = \bar{\xi}_{1j}(k) < \xi_{10}$ y $\xi_1 = \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) < \xi_{11}(k)$, por lo cual el punto $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$, divide el segmento L_k en dos partes (*una de las cuales puede ser vacía*). Entonces en el sistema

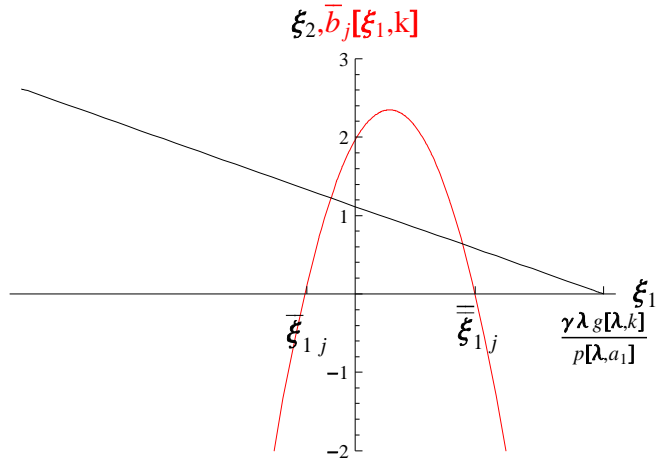


Figura 3.43: Gráficas del segmento de línea recta L_k y del segmento de línea $L_{\bar{b}_{kj}}$ para la condición $k_{b_{2j}} \leq k < k_{b_{1j}}$.

suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$ cada punto de L_k a la izquierda del punto $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$ se comporta como foco y cada punto de L_k a la derecha del punto $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$ se comporta como nodo estable, véase Figura 3.43.

v) Condición para $k = k_{b_{1j}}$.

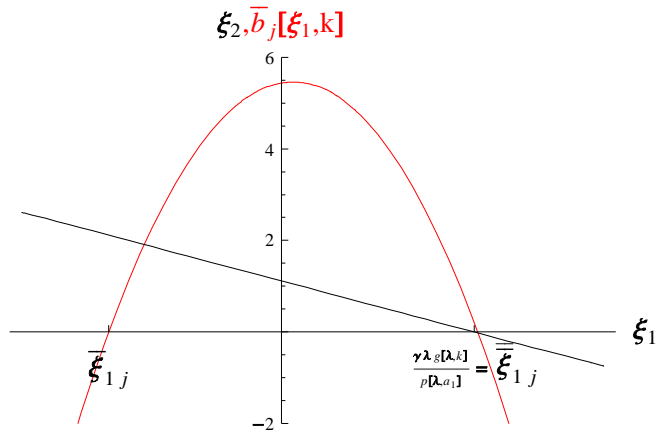


Figura 3.44: Gráficas del segmento de línea recta L_k y del segmento de línea $L_{\bar{b}_{kj}}$ para la condición $k = k_{b_{1j}}$.

La parábola cóncava hacia abajo $L_{\bar{b}_{kj}}$ intersecta el eje ξ_1 en el punto $\xi_1 = \bar{\xi}_{1j}(k_{b_{1j}}) < \xi_{10}$ y en el punto $\xi_1 = \bar{\xi}_{1j}(k_{b_{1j}}) = \xi_{11}(k_{b_{1j}})$, por lo cual $\bar{b}_j(\xi_1, k) > 0$, en el dominio

de L_k , excepto en $\xi_1 = \bar{\xi}_{1j}(k_{b1j}) = \xi_{11}(k_{b1j})$, donde $\bar{b}_j(\xi_1, k_{b1j}) = 0$. Entonces en el sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$ cada punto de L_k se comporta como foco a excepción del punto $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k_{b1j}), \bar{\xi}_{2j}(k_{b1j}))$ que comporta como nodo, véase Figura 3.44.

vi) Condición para $k_{b1j} < k < k_{\max j}$.

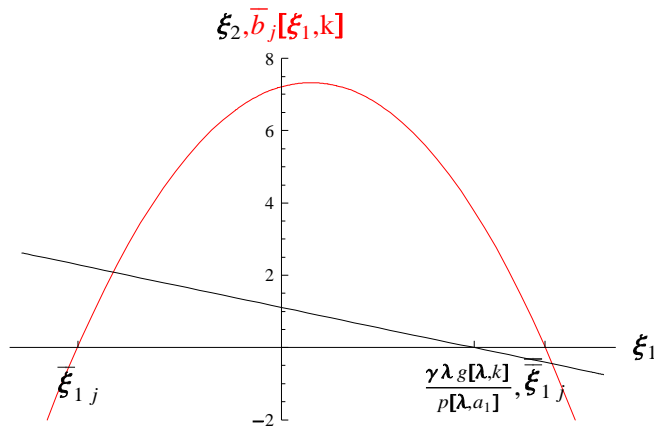


Figura 3.45: Gráficas del segmento de línea L_k y del segmento de línea $L_{\bar{b}_{kj}}$ para la condición $k_{b1j} < k < k_{\max j}$.

La parábola cóncava hacia abajo $\bar{L}_{\bar{b}_{kj}}$ intersecta el eje ξ_1 en los puntos $\xi_1 = \bar{\xi}_{1j}(k) < \xi_{10}$ y $\xi_1 = \bar{\xi}_{1j}(k) > \xi_{11}(k)$, así que $\bar{b}_j(\xi_1, k) > 0$, en el dominio de L_k . Entonces en el sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$ cada punto de L_k se comporta como foco, véase Figura 3.45. \square

Observación 74 *La evolución de los distintos escenarios de bifurcación geométrica de zip y de tipo zip (presentada por los Teoremas 67 - 73) dependen de las secuencias de sus puntos de bifurcación los cuales vienen determinados por la dinámica tanto de la componente real como imaginaria de los valores propios u_{1j} y u_{2j} del sistema suave (2.1) linealizado en puntos de L_k .*

A continuación se introduce la noción de cadena de bifurcación con el propósito de clasificar los diferentes escenarios de la bifurcación geométrica de zip y de tipo zip

Capítulo 3. Extensión de la dinámica de la bifurcación zip en modelos suaves 127
 acopladas que se presentan en el sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$,
 $j = 1, 2$, satisfaciendo las condiciones (2.8)-(2.13) y (2.20)-(2.23).

Definición 75 Una cadena de bifurcación ascendente de los puntos de bifurcación $k_{a1j}, k_{a2j}, k_{b1j}, k_{b2j}$, es toda secuencia de la forma $k_1 \leq k_2 \leq k_3 \leq k_4$, con $k_i \in \{k_{a1j}, k_{a2j}, k_{b1j}, k_{b2j}\}$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Es claro que toda clase de bifurcación geométrica de zip y tipo-zip acoplada en el sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$, $j = 1, 2$, que satisface las condiciones (2.8) a (2.13) y (2.20) a (2.23) tiene asociado una cadena de bifurcación formada por los puntos $k_i \in \{k_{a1j}, k_{a2j}, k_{b1j}, k_{b2j}\}$; sin embargo existen algunas cadenas de bifurcación compuestas por los valores de bifurcación $k_i \in \{k_{a1j}, k_{a2j}, k_{b1j}, k_{b2j}\}$ los cuales no están asociadas a alguna bifurcación de zip o tipo-zip como consecuencia de las proposiciones 38, 43, 59 y 61.

Teorema 76 Los sistemas suaves del tipo (2.1) asociados a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, $j = 1, 2$, con $m_j \neq 0$ y $w_j(k_{b2j}) \neq 0$, satisfaciendo las condiciones (2.8) a (2.13) y (2.20) a (2.23) presentan once clases diferentes de bifurcaciones geométricas de zip y del tipo zip acopladas.

prueba: La condición $m_j \neq 0$, y $w_j(k_{b2j}) \neq 0$, se pueden dividir lógicamente en las siguientes condiciones $m_j < 0$, $w_j(k_{b2j}) < 0$; $m_j > 0$, $w_j(k_{b2j}) < 0$; $m_j > 0$, $w_j(k_{b2j}) > 0$; $m_j < 0$, $w_j(k_{b2j}) > 0$, las cuales se corresponde con los cuatro tipos de modelos de la Definición 48. Entonces como consecuencia de la Proposición 38, y la Proposición 59, toda cadena de bifurcación geométrica de tipo-zip pertenece a uno de los siguientes casos:

Si $m_j < 0$, $w_j(k_{b2j}) < 0$:

Caso1: Si $w_j(k_{b2j}) < 0$, $\xi_{11}(k_{\min j}) > \frac{(A_j - 2m_j c_j(k_{\min j}, a_2))}{m_j^2}$, $m_j < 0$; entonces por las Proposiciones 38, 61 y (3.33), (3.55) se tienen las siguientes cadenas posibles ascen-

$$k_{\min j} \leq k_{b2j} \leq k_{b1j} \leq k_{a2j} \leq k_{a1j} \leq k_{\max j},$$

$$k_{\min j} \leq k_{b2j} \leq k_{a2j} \leq k_{b1j} \leq k_{a1j} \leq k_{\max j},$$

las cuales existen por la Proposición 50 y los Teoremas 67, 70.

Si $m_j > 0$ y $w_j(k_{b2j}) < 0$:

Caso 2: Si $w_j(k_{b2j}) < 0$, $\xi_{11}(k_{\min j}) > \frac{(A_j - 2m_j c_j(k_{\min j}, a_2))}{m_j^2}$, $m_j > 0$; entonces por (3.33), (3.55) y la Proposición 38, se tiene la siguiente cadena posible ascendente de bifurcación zip

$$k_{\min j} \leq k_{b2j} \leq k_{b1j} \leq k_{a1j} \leq k_{a2j} \leq k_{\max j},$$

la cual existe por la Proposición 50 y los Teoremas 68, 71.

Si $m_j < 0$ y $w_j(k_{b2j}) > 0$:

Entonces por la Proposición 59, se pueden presentar los siguientes dos casos:

Caso 3: Si $m_j < 0$, $w_j(k_{b2j}) > 0$, $\xi_{11}(k_{\min j}) < \frac{(A_j - 2m_j c_j(k_{\min j}, a_2))}{m_j^2}$; entonces por (3.33), (3.56) y la Proposición 38, se tiene la siguiente cadena posible ascendente de bifurcación zip

$$k_{\min j} \leq k_{b1j} \leq k_{b2j} \leq k_{a2j} \leq k_{a1j} \leq k_{\max j},$$

la cual existe por la Proposición 50 y los Teoremas 67, 71.

caso 4: Si $m_j < 0$, $w_j(k_{b2j}) > 0$, $\xi_{11}(k_{\min j}) > \frac{(A_j - 2m_j c_j(k_{\min j}, a_2))}{m_j^2}$, $\xi_{11}(k_{b21}) < \frac{(A_j - 2m_j c_j(k_{b21}, a_2))}{m_j^2}$; entonces por (3.33) y (3.57), se tiene la siguiente cadena posible ascendente de bifurcación zip

$$k_{\min j} \leq k_{b1j} \leq k_{b2j} \leq k_{a2j} \leq k_{a1j} \leq k_{\max j},$$

la cual existe por la Proposición 50 y los Teoremas 67, 72. Se observa que a pesar que las dos últimas cadenas de bifurcación de zip son iguales sin embargo producen diferentes tipos de bifurcación de zip debido a que sus componente imaginaria emergen en forma diferente respecto del segmento de equilibrios L_k como se puede apreciar en las Figuras 3.5 y 3.7.

caso 5: Si $m_j < 0$, $w_j(k_{b2j}) > 0$, $\xi_{11}(k_{k_{\min j}}) > \frac{(A_j - 2m_j c_j(k_{\min j}, a_2))}{m_j^2}$, $\xi_{11}(k_{b21}) > \frac{(A_j - 2m_j c_j(k_{b21}, a_2))}{m_j^2}$; entonces por (3.33), (3.58) y la Proposición 38, se tiene la siguiente cadena posible ascendente de bifurcación zip

$$k_{\min j} \leq k_{b2j} \leq k_{b1j} \leq k_{a2j} \leq k_{a1j} \leq k_{\max j},$$

la cual existe por la Proposición 50 y los Teoremas 67, 73.

Si $m_j > 0$ y $w_j(k_{b2j}) > 0$:

Entonces por la Proposición 59, se pueden presentar los siguientes dos casos:

Caso 6: Si $m_j > 0$, $w_j(k_{b2j}) > 0$, $\xi_{11}(k_{\min j}) < \frac{(A_j - 2m_j c_j(k_{\min j}, a_2))}{m_j^2}$, entonces por (3.33), (3.56) y las Proposiciones 38 y 61, se tienen las siguientes cadenas posibles ascendentes de bifurcación zip

$$k_{\min j} \leq k_{b1j} \leq k_{b2j} \leq k_{a1j} \leq k_{a2j} \leq k_{\max j},$$

$$k_{\min j} \leq k_{b1j} \leq k_{a1j} \leq k_{b2j} \leq k_{a2j} \leq k_{\max j},$$

las cuales existen por la Proposición 50 y los Teoremas 68, 71.

Caso 7: Si $m_j > 0$, $w_j(k_{b2j}) > 0$, $\xi_{11}(k_{\min j}) > \frac{(A_j - 2m_j c_j(k_{\min j}, a_2))}{m_j^2}$, $\xi_{11}(k_{b21}) < \frac{(A_j - 2m_j c_j(k_{b21}, a_2))}{m_j^2}$; entonces por (3.33), (3.58) y las Proposiciones 38 y 61, se tiene las siguientes cadenas posibles ascendentes de bifurcación zip

$$k_{\min j} \leq k_{b1j} \leq k_{b2j} \leq k_{a1j} \leq k_{a2j} \leq k_{\max j},$$

$$k_{\min j} \leq k_{b1j} \leq k_{a1j} \leq k_{b2j} \leq k_{a2j} \leq k_{\max j},$$

las cuales existen por la Proposición 50 y los Teoremas 68, 72. Se observa que a pesar que las cuatro últimas cadenas ascendentes de bifurcación zip son iguales sin embargo producen diferentes tipos de bifurcación zip debido a que sus componentes imaginarias emergen del eje ξ_1 en forma diferente respecto del segmento de equilibrios L_k , como se puede apreciar en las Figuras 3.5 y 3.6.

Caso 8: Si $m_j > 0$, $w_j(k_{b2j}) > 0$, $\xi_{11}(k_{\min j}) > \frac{(A_j - 2m_j c_j(k_{\min j}, a_2))}{m_j^2}$, $\xi_{11}(k_{b21}) > \frac{(A_j - 2m_j c_j(k_{b21}, a_2))}{m_j^2}$; entonces por (3.33), (3.57) y la Proposición 38, se tiene la siguiente cadena posible ascendente de bifurcación zip

$$k_{\min j} \leq k_{b2j} \leq k_{b1j} \leq k_{a1j} \leq k_{a2j} \leq k_{\max j},$$

Capítulo 3. Extensión de la dinámica de la bifurcación zip en modelos suaves 130
la cual existe por la Proposición 50 y los Teoremas 68, 73. Finalmente se concluye de los casos anteriores que existen en total 11 cadenas ascendentes de bifurcación zip y tipo zip acopladas en sistemas suaves del tipo (2.1). \square

El próximo corolario es una consecuencia del teorema anterior.

Corolario 77 *En el sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$, $j = 1, 2$, que satisface las condiciones (2.8) a (2.19) y (2.20) a (2.23) se tiene que:*

i) si $w_j(k_{b2j}) < 0$, entonces se pueden presentar las siguientes cadenas ascendentes de bifurcación zip

$$k_{b2j} \leq k_{b1j} \leq k_{a2j} \leq k_{a1j},$$

$$k_{b2j} \leq k_{b1j} \leq k_{a1j} \leq k_{a2j},$$

$$k_{b2j} \leq k_{a2j} \leq k_{b1j} \leq k_{a1j}.$$

ii) si $w_j(k_{b2j}) > 0$, entonces se pueden presentar las siguientes cadenas ascendentes de bifurcación zip

$$k_{b1j} \leq k_{b2j} \leq k_{a2j} \leq k_{a1j},$$

$$k_{b2j} \leq k_{b1j} \leq k_{a1j} \leq k_{a2j},$$

$$k_{b2j} \leq k_{a2j} \leq k_{b1j} \leq k_{a1j}.$$

El próximo corolario presenta la dinámica acoplada de la bifurcación geométrica de zip a lo largo del segmento de equilibrios L_k para la primera cadena de bifurcación del caso 1, del Teorema 76. Este corolario es una consecuencia de los Teoremas 67, 70 y 76, por lo cual sólo se presenta su enunciado junto con las gráficas de los segmentos de línea L_k , La_{kj} y $L\bar{b}_{kj}$.

Corolario 78 *Si el sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$, $j = 1, 2$, es del tipo 1, es decir, $w_j(k_{b2j}) < 0$, $m_j < 0$, satisface las condiciones (2.8) a (2.13) y (2.20) a (2.23), existen $k_{a2j}, k_{a1j}, k_{b2j}, k_{b1j}$, únicos, satisfaciendo $k_{\min j} \leq k_{b2j} \leq k_{b1j} \leq k_{a2j} \leq k_{a1j} \leq k_{\max j}$, o $k_{\min j} \leq k_{b2j} \leq k_{a2j} \leq k_{b1j} \leq k_{a1j} \leq k_{\max j}$ tal que:*

i) Si $k_{\min j} \leq k_{b2j} \leq k_{b1j} \leq k_{a2j} \leq k_{a1j} \leq k_{\max j}$, entonces para todo $k \in (k_{\min j}, k_{b2j})$, todos los puntos del segmento L_k son nodos estables y L_k es un atractor del sistema en el sentido de que existe una vecindad del segmento de equilibrios L_k para el cual las soluciones con condición inicial en esta vecindad tiende a un punto del segmento L_k cuando t tiende a infinito. Para $k \in (k_{b2j}, k_{b1j})$ el punto $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$ divide L_k en dos partes (una de las cuales puede ser vacía), donde $\bar{\xi}_{1j}(k)$, $\bar{\xi}_{2j}(k)$ son dados por (3.104). Los puntos de L_k a la izquierda de este punto son focos estables, y los puntos a la derecha son nodos estables. Para $k \in (k_{b1j}, k_{a2j})$ todos los puntos del segmento L_k son focos estables. Para $k \in (k_{a2j}, k_{a1j})$, el punto $(\lambda, \hat{\xi}_{1j}(k), \hat{\xi}_{2j}(k))$ divide L_k en dos partes (una de las cuales puede ser vacía), donde $\hat{\xi}_{1j}(k)$ y $\hat{\xi}_{2j}(k)$ son dados por (3.95) y (3.96) respectivamente. Los puntos de L_k a la izquierda de este punto son focos inestables, los puntos a la derecha son focos estables. Para $k \in (k_{a1j}, k_{\max j})$, el sistema sólo tiene focos inestables en el octante positivo del espacio cerrado s, x_1, x_2 .

ii) Si $k_{\min j} \leq k_{b2j} \leq k_{a2j} \leq k_{b1j} \leq k_{a1j} \leq k_{\max j}$, entonces para todo $k \in (k_{\min j}, k_{b2j})$, todos los puntos del segmento L_k son nodos estables y L_k es un atractor del sistema en el sentido de que existe una vecindad del segmento de equilibrios para el cual las soluciones con condición inicial en esta vecindad tiende a un punto del segmento L_k cuando t tiende a infinito. Para $k \in (k_{b2j}, k_{a2j})$, el punto $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$ divide L_k en dos partes (una de las cuales puede ser vacía), donde $\bar{\xi}_{1j}(k)$, $\bar{\xi}_{2j}(k)$ son dados por (3.104). Los puntos de L_k a la izquierda de este punto son focos estables, los puntos a la derecha son nodos estables. Para $k \in (k_{a2j}, k_{b1j})$ los puntos $(\lambda, \hat{\xi}_{1j}(k), \hat{\xi}_{2j}(k))$ y $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$ dividen L_k en tres partes (dos de las cuales pueden ser vacías), donde $\hat{\xi}_{1j}(k)$ y $\hat{\xi}_{2j}(k)$ son dados por (3.95) y (3.96) respectivamente. Los puntos de L_k a la izquierda de $(\lambda, \hat{\xi}_{1j}(k), \hat{\xi}_{2j}(k))$ son focos inestables, los puntos de L_k entre $(\lambda, \hat{\xi}_{1j}(k), \hat{\xi}_{2j}(k))$ y $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$ son focos estables, los puntos a la derecha del punto $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$ son nodos estables. Para $k \in (k_{b1j}, k_{a1j})$, el punto $(\lambda, \hat{\xi}_{1j}(k), \hat{\xi}_{2j}(k))$ divide L_k en dos partes (una de las cuales puede ser vacía). Los puntos de L_k a la izquierda de este punto son focos inestables, los puntos a la derecha son focos estables. Para $k \in (k_{a1j}, k_{\max j})$ el sistema sólo tiene focos inestables en el octante positivo del espacio cerrado s, x_1, x_2 .

A continuación se presentan las gráficas de las líneas rectas L_k , $L_{a_{kj}}$ y de la curva $L_{\bar{b}_{kj}}$ en el plano $s = \lambda$, las cuales muestran la dinámica acoplada de la componente real e imaginaria de los valores propios u_{1j} y u_{2j} del sistema suave (2.1) linealizado en puntos de L_k (ver Definición 3.6).

i) Condición para $k = k_{\min j}$ en el caso 1.

La parábola cóncava hacia abajo $L_{\bar{b}_{kj}}$ (véase la Notación 34) emerge del eje ξ_1 a la izquierda del segmento de equilibrios L_k en el punto $\xi_1 = \bar{\xi}_{1j}(k_{\min j}) = \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k_{\min j}) < \xi_{10}$, el cual es una raíz doble de $L_{\bar{b}_{kj}}$, por lo cual se tiene que $\bar{b}_j(\xi_1, k) < 0$, en el dominio de L_k . El segmento de línea recta de pendiente negativa $L_{a_{kj}}$ intersecta el

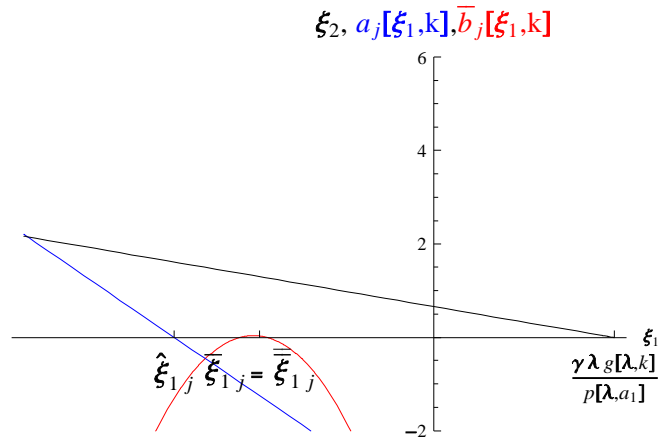


Figura 3.46: Gráficas del segmento de línea recta L_k y de los segmentos de línea $L_{a_{kj}}$, $L_{\bar{b}_{kj}}$ para la condición $k = k_{\min j}$.

eje ξ_1 en el punto $\xi_1 = \hat{\xi}_{1j}(k_{\min j}) < \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k_{\min j})$, así que $a_j(\xi_1, k) < 0$, en el dominio de L_k . Por lo tanto en el sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$ todos los puntos del segmento L_k son nodos estables en el sentido de *Lyapunov* y L_k es un atractor del sistema (véase la Figura 3.46).

ii) Condición para $k_{\min j} < k < k_{b2j}$ en el caso 1.

La parábola cóncava hacia abajo $L_{\bar{b}_{kj}}$ (véase la Notación 34) intersecta el eje ξ_1 en los puntos $\xi_1 = \bar{\xi}_{1j}(k) < \xi_{10}$ y $\xi_1 = \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) < \xi_{10}$, por lo cual $\bar{b}_j(\xi_1, k) < 0$, en el dominio de L_k , El segmento de línea recta de pendiente negativa $L_{a_{kj}}$ intersecta el

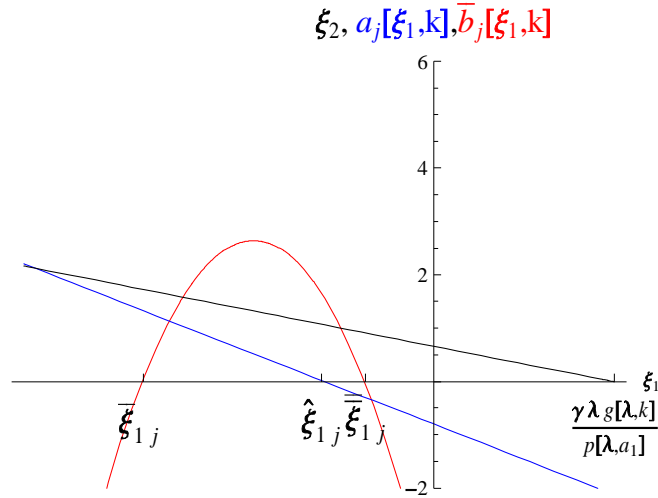


Figura 3.47: Gráficas del segmento de línea recta L_k y de los segmentos de línea $L_{a_{kj}}$, $L_{\bar{b}_{kj}}$ para la condición $k_{\min j} \leq k < k_{b2j}$.

eje ξ_1 en el punto $\xi_1 = \hat{\xi}_1(k_{\min j}) < \bar{\xi}_1(k_{\min j})$, así que $a_j(\xi_1, k) < 0$, en el dominio de L_k . Por lo tanto en el sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$ todos los puntos del segmento L_k son nodos estables en el sentido de *Lyapunov* y L_k es un atractor del sistema (véase la Figura 3.47).

iii) Condición para $k = k_{b2j}$ en el caso 1.

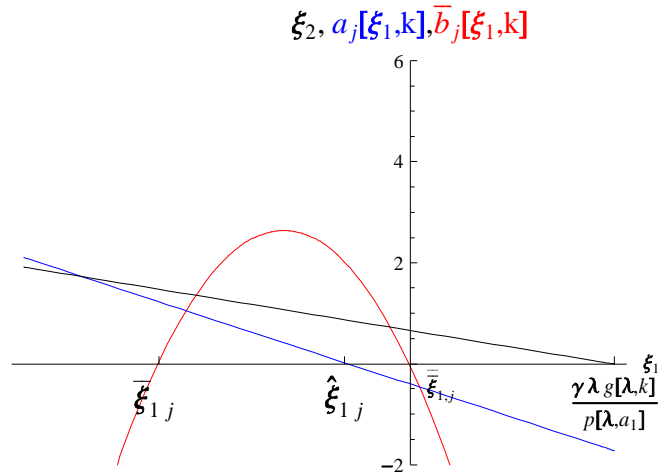


Figura 3.48: Gráficas del segmento de línea recta L_k y de los segmentos de línea $L_{a_{kj}}$, $L_{\bar{b}_{kj}}$ para la condición $k = k_{b2j}$.

La parábola cóncava hacia abajo $L\bar{b}_{kj}$ (véase la Notación 34) interseca el eje ξ_1 en los puntos $\xi_1 = \bar{\xi}_{1j}(k_{b2j})$ y $\xi_1 = \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k_{b2j}) = \xi_{10}$, por lo cual $\bar{b}_j(\xi_1, k) < 0$, en el dominio de L_k , excepto en $\xi_1 = \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k_{b2j}) = \xi_{10}$, donde $\bar{b}_j(\xi_1, k_{b2j}) = 0$. El segmento de línea recta de pendiente negativa $L_{a_{kj}}$ interseca el eje ξ_1 en el punto $\xi_1 = \hat{\xi}_{1j}(k_{b2j}) < \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k_{b2j})$, así que $a_j(\xi_1, k) < 0$, en el dominio de L_k . Por lo tanto en el sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$ todos los puntos del segmento L_k son nodos estables en el sentido de *Lyapunov* y L_k es un atractor del sistema (véase la Figura 3.48).

iv) Condición para $k_{b2j} < k < k_{b1j}$ en el caso 1.

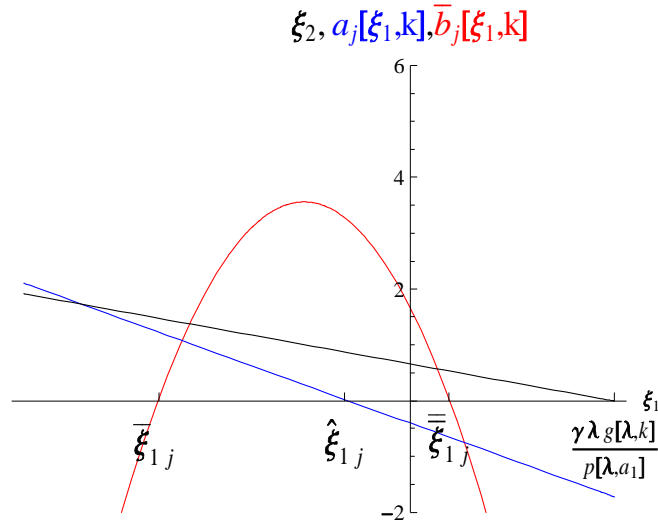


Figura 3.49: Gráficas del segmento de línea recta L_k y de los segmentos de línea $L_{a_{kj}}$, $L_{\bar{b}_{kj}}$ para la condición $k_{b2j} < k < k_{b1j}$.

La parábola cóncava hacia abajo $L\bar{b}_{kj}$ (véase la Notación 34) interseca el eje ξ_1 en los puntos $\xi_1 = \bar{\xi}_{1j}(k) < 0$ y $\xi_1 = \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) > \xi_{10}$, por lo cual el punto $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\bar{\xi}}_{2j}(k))$ dividen el segmento L_k en dos partes (*una de las cuales puede ser vacía*). El segmento de línea recta de pendiente negativa $L_{a_{kj}}$ interseca el eje ξ_1 en el punto $\xi_1 = \hat{\xi}_{1j}(k_{b2j}) < \xi_{10}$, así que $a_j(\xi_1, k) < 0$, en el dominio de L_k . Entonces en el sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$ cada punto de L_k a la izquierda del punto $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\bar{\xi}}_{2j}(k))$ se comporta como foco estable y cada punto de L_k a la derecha del punto $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\bar{\xi}}_{2j}(k))$ se comporta como nodo estable (véase la Figura 3.49).

La parábola cóncava hacia abajo $L\bar{b}_{kj}$ (véase la Notación 34) interseca el eje ξ_1 en

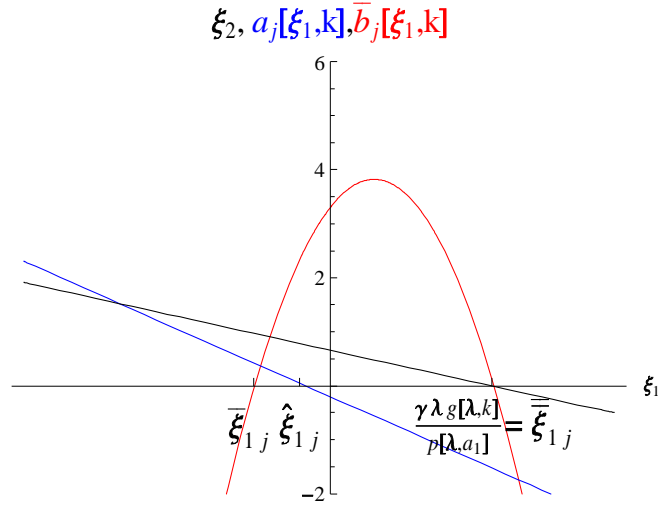


Figura 3.50: Gráficas del segmento de línea recta L_k y de los segmentos de línea $L_{a_{kj}}$, $L_{\bar{b}_{kj}}$ para la condición $k = k_{b1j}$.

los puntos $\xi_1 = \bar{\xi}_{1j}(k_{b1j}) < 0$ y $\xi_1 = \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k_{b1j}) = \xi_{11}(k_{b1j})$, por lo cual $\bar{b}_j(\xi_1, k) > 0$, en el dominio de L_k , excepto en $\xi_1 = \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k_{b1j}) = \xi_{11}(k_{b1j})$, donde $\bar{b}_j(\xi_1, k_{b1j}) = 0$. El segmento de línea recta de pendiente negativa $L_{a_{kj}}$ interseca el eje ξ_1 en el punto $\xi_1 = \hat{\xi}_{1j}(k_{b1j}) < \xi_{10}$, así que $a_j(\xi_1, k) < 0$, en el dominio de L_k . Entonces en el sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$ cada punto de L_k se comporta como foco estable (véase la Figura 3.50).

vi) Condición para $k_{b1j} < k < k_{a2j}$ en el caso 1.

La parábola cóncava hacia abajo $L\bar{b}_{kj}$ (véase la Notación 34) interseca el eje ξ_1 en los puntos $\xi_1 = \bar{\xi}_{1j}(k) < 0$ y $\xi_1 = \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) > \xi_{11}(k)$, por lo cual $\bar{b}_j(\xi_1, k) > 0$, en el dominio de L_k . El segmento de línea recta de pendiente negativa $L_{a_{kj}}$ interseca el eje ξ_1 en el punto $\xi_1 = \hat{\xi}_{1j}(k) < \xi_{10}$, así que $a_j(\xi_1, k) < 0$, en el dominio de L_k . Entonces en el sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$ cada punto de L_k se comporta como foco estable. Además en este intervalo crece la variación media del radio de oscilación de las órbitas del sistema al aumentar el parámetro de bifurcación

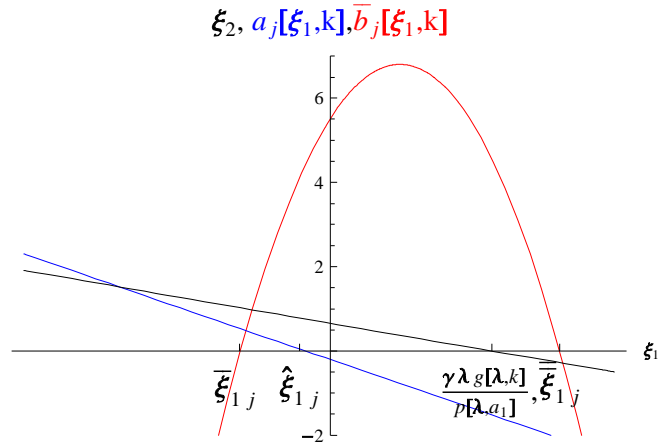


Figura 3.51: Gráficas del segmento de línea recta L_k y de los segmentos de línea $L_{a_{kj}}$, $L_{b_{kj}}$ para la condición $k_{b1j} < k < k_{a2j}$.

k con respecto al caso anterior por el decrecimiento de la magnitud de la componente real de los valores propios u_{1j} y u_{2j} del sistema suave (2.1) linealizado en puntos de L_k (véase la Figura 3.51).

vii) Condición para $k = k_{a2j}$ en el caso 1.

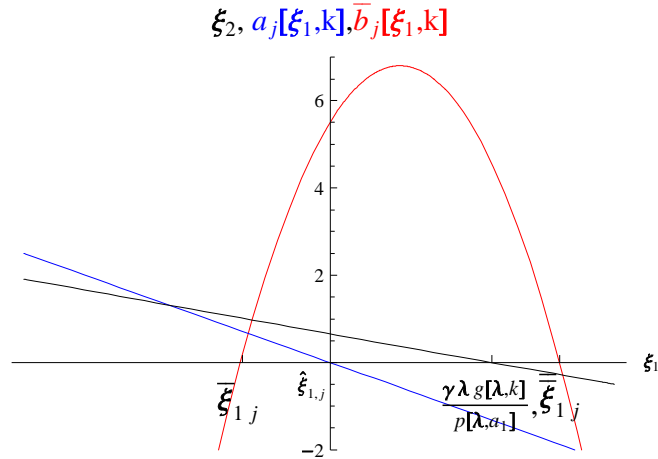


Figura 3.52: Gráficas del segmento de línea recta L_k y de los segmentos de línea $L_{a_{kj}}$, $L_{b_{kj}}$ para la condición $k = k_{a2j}$.

La parábola cóncava hacia abajo $L_{b_{kj}}$ (véase la Notación 34) intersecta el eje ξ_1 en los puntos $\xi_1 = \bar{\xi}_{1j}(k) < 0$ y $\xi_1 = \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k_{a2j}) > \xi_{11}(k)$, por lo cual $\bar{b}_j(\xi_1, k) > 0$, en

el dominio de L_k . El segmento de línea recta de pendiente negativa La_{kj} intersecta el eje ξ_1 en el punto $\xi_1 = \widehat{\xi}_{1j}(k) = \xi_{10}$, así que $a_j(\xi_1, k) < 0$, en el dominio de L_k , excepto en $\xi_1 = \widehat{\xi}_{1j}(k_{a2j}) = \xi_{10}$, donde $a_j(\xi_1, k_{a2j}) = 0$. Entonces en el sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$ cada punto de L_k se comporta como foco estable. Además en este punto de bifurcación comienza el proceso de destabilización continua de los puntos de L_k al crecer el parámetro de bifurcación k (véase la Figura 3.52).

viii) Condición para $k_{a2j} < k < k_{a1j}$ en el caso 1.

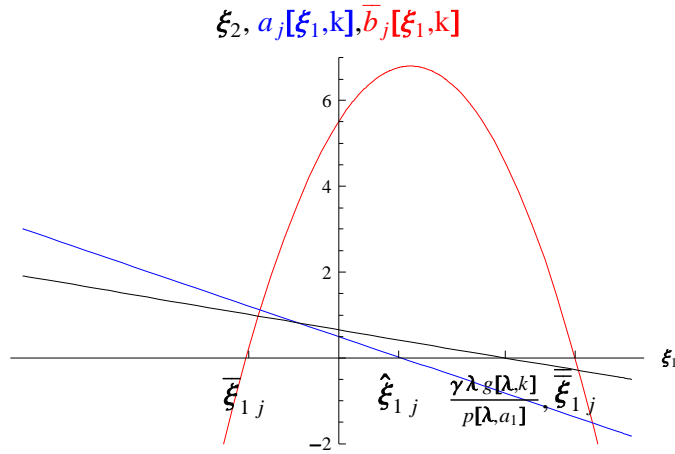


Figura 3.53: Gráficas del segmento de línea recta L_k y de los segmentos de línea La_{kj} , $L_{\bar{b}_{kj}}$ para la condición $k_{a2j} < k < k_{a1j}$.

La parábola cóncava hacia abajo $L_{\bar{b}_{kj}}$ (véase la Notación 34) intersecta el eje ξ_1 en los puntos $\xi_1 = \bar{\xi}_{1j}(k) < 0$ y $\xi_1 = \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) > \xi_{11}(k)$, por lo cual $\bar{b}_j(\xi_1, k) > 0$, en el dominio de L_k . El segmento de línea recta de pendiente negativa La_{kj} intersecta el eje ξ_1 en el punto $\widehat{\xi}_{1j}(k)$ en el interior del dominio de L_k , porque $\widehat{\xi}_1$ es creciente con k y $\widehat{\xi}_{1j}(k_{a2j}) = \xi_{10}$. Por consiguiente el punto $(\lambda, \widehat{\xi}_{1j}(k), \widehat{\xi}_{2j}(k))$, divide L_k en dos partes (una de las cuales puede ser vacía). Luego los puntos del segmento de equilibrios L_k a la izquierda del punto $(\lambda, \widehat{\xi}_{1j}(k), \widehat{\xi}_{2j}(k))$ son focos inestables; los puntos del segmento de equilibrios L_k a la derecha del punto $(\lambda, \widehat{\xi}_{1j}(k), \widehat{\xi}_{2j}(k))$ son focos asintóticamente estables en el sentido de *Lyapunov* por lo cual forman un atractor del sistema (véase la Figura 3.53).

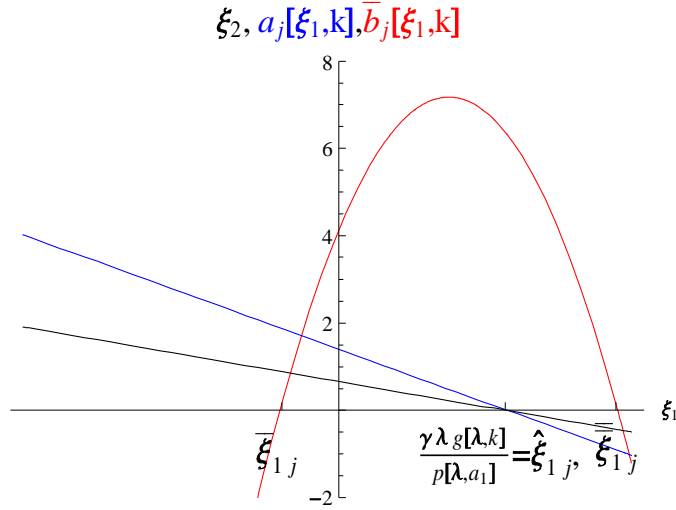


Figura 3.54: Gráficas del segmento de línea recta L_k y de los segmentos de línea $L_{a_{kj}}$, $L_{\bar{b}_{kj}}$ para la condición $k = k_{a1j}$.

La parábola cóncava hacia abajo $L_{\bar{b}_{kj}}$ (véase la Notación 34) intersecta el eje ξ_1 en los puntos $\xi_1 = \bar{\xi}_{1j}(k) < 0$ y $\xi_1 = \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) > \xi_{11}$, por lo cual $\bar{b}_j(\xi_1, k) > 0$, en el dominio de L_k . El segmento de línea recta de pendiente negativa $L_{a_{kj}}$ intersecta el eje ξ_1 en el punto $\hat{\xi}_{1j}(k_{a1j}) = \xi_{11}$, así que $a_j(\xi_1, k) > 0$, en el dominio de L_k , excepto en $\xi_1 = \hat{\xi}_{1j}(k_{a1j}) = \xi_{11}(k_{a1j}) < \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k_{a2j})$, donde $a_j(\xi_1, k_{a1j}) = 0$. Luego los puntos del segmento de equilibrios L_k son focos asintóticamente inestables en el sentido de *Lyapunov* y forman un repulsor del sistema (véase la Figura 3.54).

x) Condición para $k_{a1j} < k < k_{\max j}$ en el caso 1.

La parábola cóncava hacia abajo $L_{\bar{b}_{kj}}$ (véase la Notación 34) intersecta el eje ξ_1 en los puntos $\xi_1 = \bar{\xi}_{1j}(k) < 0$ y $\xi_1 = \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k) > \xi_{11}(k)$, por lo cual $\bar{b}_j(\xi_1, k) > 0$, en el dominio de L_k . El segmento de línea recta de pendiente negativa $L_{a_{kj}}$ intersecta el eje ξ_1 en el punto $\hat{\xi}_{1j}(k) > \xi_{11}(k)$, así que $a_j(\xi_1, k) > 0$, en el dominio de L_k . Luego los puntos del segmento de equilibrios L_k son focos asintóticamente inestables en el sentido de *Lyapunov* y forman un repulsor del sistema (véase la Figura 3.55).

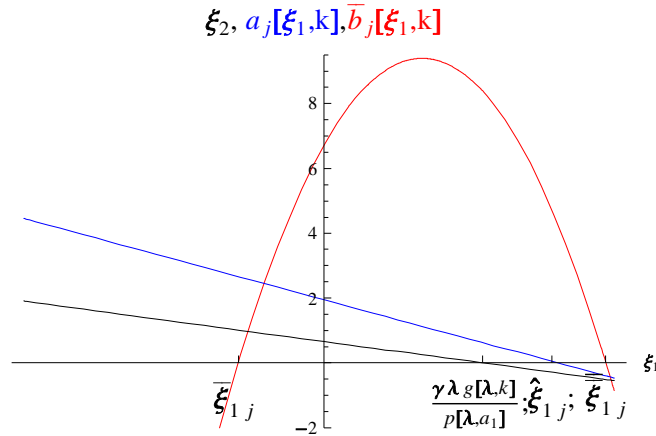


Figura 3.55: Gráficas del segmento de línea recta L_k y de los segmentos de línea $L_{a_{kj}}$, $L_{\bar{b}_{kj}}$ para la condición $k_{a1j} < k < k_{\max j}$.

El próximo corolario presenta la dinámica acoplada de la bifurcación geométrica de zip a lo largo del segmento de equilibrios L_k para la cadena de bifurcación del caso 2, del Teorema 76. Este corolario es una consecuencia de los Teoremas 68, 71, y 76, por lo cual sólo se presenta su enunciado.

Corolario 79 *Si el sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$, $j = 1, 2$, es de tipo 2, es decir, $m_j > 0$, $w_j(k_{b2j}) < 0$; satisface las condiciones (2.8) a (2.13) y (2.20) a (2.23), entonces existen $k_{a2j}, k_{a1j}, k_{b2j}, k_{b1j}$ únicos, satisfaciendo $k_{\min j} \leq k_{b2j} \leq k_{b1j} \leq k_{a1j} \leq k_{a2j} \leq k_{\max j}$ tal que para $k \in (k_{\min j}, k_{b2j})$, todos los puntos del segmento L_k son nodos estables, y L_k es un atractor del sistema. Para $k \in (k_{b2j}, k_{b1j})$, el punto $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$ divide L_k en dos partes (una de las cuales puede ser vacía), donde $\bar{\xi}_{1j}(k)$ y $\bar{\xi}_{2j}(k)$ son dados por (3.104). Los puntos de L_k a la izquierda de este punto son focos estables, los puntos a la derecha son nodos estables. Para $k \in (k_{b1j}, k_{a1j})$, todos los puntos del segmento L_k son focos estables. Para $k \in (k_{a1j}, k_{a2j})$, el punto $(\lambda, \hat{\xi}_{1j}(k), \hat{\xi}_{2j}(k))$ divide L_k en dos partes (una de las cuales puede ser vacía), donde $\hat{\xi}_{1j}(k)$ y $\hat{\xi}_{2j}(k)$ son dados por (3.95) y (3.96) respectivamente. Los puntos de L_k a la izquierda de este punto son focos estables, los puntos a la derecha son focos inestables. Para $k \in (k_{a2j}, k_{\max j})$, el sistema sólo tiene equilibrios focos inestables en el octante positivo del espacio cerrado s, x_1, x_2 .*

El próximo corolario presenta la dinámica acoplada de la bifurcación geométrica de zip a lo largo del segmento de equilibrios L_k para la cadena de bifurcación del caso 3, del Teorema 76. Este corolario es una consecuencia de los Teoremas 67, 71, y 76, por lo cual sólo se presenta su enunciado.

Corolario 80 *Si el sistema suave (2.1) asociado al campo f_j , $j = 1, 2$, es del tipo 3, es decir $m_j < 0$, $w_j(k_{b2j}) > 0$, con $\xi_{11}(k_{\min j}) \leq \frac{(A_j - 2m_j c_j(k_{\min j, a2}))}{m_j^2}$; satisface las condiciones (2.8) a (2.13) y (2.20) a (2.23), entonces existen $k_{a2j}, k_{a1j}, k_{b2j}, k_{b1j}$, únicos, satisfaciendo $k_{\min j} \leq k_{b1j} \leq k_{b2j} \leq k_{a2j} \leq k_{a1j} \leq k_{\max j}$, tal que para $k \in (k_{\min j}, k_{b1j})$, todos los puntos del segmento L_k son nodos estables, y L_k es un atractor del sistema. Para $k \in (k_{b1j}, k_{b2j})$, el punto $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$ divide L_k en dos partes (una de las cuales puede ser vacía), donde $\bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k)$, son dados por (3.103). Los puntos de L_k a la izquierda de este punto son nodos estables, los puntos a la derecha son focos estables. Para $k \in (k_{b2j}, k_{a2j})$, todos los puntos del segmento L_k son focos estables. Para $k \in (k_{a2j}, k_{a1j})$, el punto $(\lambda, \hat{\xi}_{1j}(k), \hat{\xi}_{2j}(k))$ divide L_k en dos partes (una de las cuales puede ser vacía), donde $\hat{\xi}_{1j}(k)$ y $\hat{\xi}_{2j}(k)$ son dados por (3.95) y (3.96) respectivamente. Los puntos de L_k a la izquierda de este punto son focos inestables, los puntos a la derecha son focos estables. Para $k \in (k_{a1j}, k_{\max j})$, el sistema sólo tiene equilibrios focos inestables en el octante positivo del espacio cerrado s, x_1, x_2 .*

El próximo corolario presenta la dinámica acoplada de la bifurcación geométrica de zip a lo largo del segmento de equilibrios L_k para la cadena de bifurcación del caso 4, del Teorema 76. Este corolario es una consecuencia de los Teoremas 67, 72, y 76, por lo cual sólo se presenta su enunciado.

Corolario 81 *Si el sistema suave (2.1) asociado al campo f_j , $j = 1, 2$, es del tipo 3, es decir, $m_j < 0$, $w_j(k_{b2j}) > 0$, con $\xi_{11}(k_{\min j}) \geq \frac{(A_j - 2m_j c_j(k_{\min j, a2}))}{m_j^2}$, $\xi_{11}(k_{b2j}) \leq \frac{(A_j - 2m_j c_j(k_{b2j, a2}))}{m_j^2}$; satisface las condiciones (2.8) a (2.13) y (2.20) a (2.23), entonces existen $k_{a2j}, k_{a1j}, k_{b2j}, k_{b1j}$, únicos, satisfaciendo $k_{\min} \leq k_{b1j} \leq k_{b2j} \leq k_{a2j} \leq k_{a1j} \leq k_{\max j}$, tal que para todo $k \in (k_{\min j}, k_{b1j})$, los puntos $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$ y $(\lambda, \bar{\xi}_{2j}(k), \bar{\xi}_{1j}(k))$ dividen los puntos del segmento L_k en tres partes (dos de las cuales*

Capítulo 3. Extensión de la dinámica de la bifurcación zip en modelos suaves 141
puede ser vacías), donde $\bar{\xi}_1(k)$, $\bar{\xi}_2(k)$, son dados por (3.103), y $\bar{\bar{\xi}}_{1j}(k)$, $\bar{\bar{\xi}}_{2j}(k)$, son dados por (3.104). Los puntos de L_k a la izquierda de $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$ y a la derecha de $(\lambda, \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k), \bar{\bar{\xi}}_{2j}(k))$ son nodos estables, los puntos entre $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$ y $(\lambda, \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k), \bar{\bar{\xi}}_{2j}(k))$ son focos estables. Para $k \in (k_{b1j}, k_{b2j})$, el punto $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$ divide L_k en dos partes (una de las cuales puede ser vacía). Los puntos de L_k a la izquierda de este punto son nodos estables, los puntos a la derecha son focos estables. Para $k \in (k_{b2j}, k_{a2j})$, el sistema sólo tiene equilibrios focos estables. Para $k \in (k_{a2j}, k_{a1j})$, el punto $(\lambda, \hat{\xi}_{1j}(k), \hat{\xi}_{2j}(k))$ divide L_k en dos partes (una de las cuales puede ser vacía), donde $\hat{\xi}_{1j}(k)$ y $\hat{\xi}_{2j}(k)$ son dados por (3.95), y (3.96), respectivamente. Los puntos de L_k a la izquierda de este punto son focos inestables, los puntos a la derecha son focos estables. Para $k \in (k_{a1j}, k_{\max j})$, el sistema sólo tiene equilibrios focos inestables en el octante positivo del espacio cerrado s, x_1, x_2 .

El próximo corolario presenta la dinámica acoplada de la bifurcación geométrica de zip a lo largo del segmento de equilibrios L_k para la cadena de bifurcación del caso 5, del Teorema 76. Este corolario es una consecuencia de los Teoremas 67, 73, y 76, por lo cual sólo se presenta su enunciado.

Corolario 82 Si el sistema suave (2.1) asociado al campo f_j , $j = 1, 2$, es del tipo 3, es decir, $m_j < 0$, $w_j(k_{b2j}) > 0$, con $\xi_{11}(k_{\min j}) \geq \frac{(A_j - 2m_j c_j(k_{\min j, a2}))}{m_j^2}$, $\xi_{11}(k_{b2j}) \geq \frac{(A_j - 2m_j c_j(k_{b21, a2}))}{m_j^2}$; satisface las condiciones (2.8) a (2.13) y (2.20) a (2.23), entonces existen $k_{a2j}, k_{a1j}, k_{b2j}, k_{b1j}$, únicos, satisfaciendo $k_{\min j} \leq k_{b2j} \leq k_{b1j} \leq k_{a2j} \leq k_{a1j} \leq k_{\max j}$, tal que para todo $k \in (k_{\min j}, k_{b2j})$ los puntos $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$ y $(\lambda, \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k), \bar{\bar{\xi}}_{2j}(k))$ dividen los puntos del segmento L_k en tres partes (dos de las cuales puede ser vacías), donde $\bar{\xi}_{1j}(k)$, $\bar{\xi}_{2j}(k)$ son dados por (3.103), y $\bar{\bar{\xi}}_1(k)$, $\bar{\bar{\xi}}_2(k)$, son dados por (3.104). Los puntos de L_k a la izquierda de $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$ y a la derecha de $(\lambda, \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k), \bar{\bar{\xi}}_{2j}(k))$ son nodos estables, los puntos entre $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$ y $(\lambda, \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k), \bar{\bar{\xi}}_{2j}(k))$ son focos estables. Para $k \in (k_{b2j}, k_{b1j})$, el punto $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$ divide L_k en dos partes (una de las cuales puede ser vacía). Los puntos de L_k a la izquierda de este punto son focos estables, los puntos a la derecha son nodos estables. Para $k \in (k_{b1j}, k_{a2j})$, el sistema sólo tiene equilibrios focos estables. Para

Capítulo 3. Extensión de la dinámica de la bifurcación zip en modelos suaves 142

$k \in (k_{a2j}, k_{a1j})$, el punto $(\lambda, \widehat{\xi}_{1j}(k), \widehat{\xi}_{2j}(k))$ divide L_k en dos partes (una de las cuales puede ser vacía), donde $\widehat{\xi}_{1j}(k)$ y $\widehat{\xi}_{2j}(k)$ son dados por (3.95), y (3.96), respectivamente. Los puntos de L_k a la izquierda de este punto son focos inestables, los puntos a la derecha son focos estables. Para $k \in (k_{a1j}, k_{\max j})$, el sistema sólo tiene equilibrios focos inestables en el octante positivo del espacio cerrado s, x_1, x_2 .

El próximo corolario presenta la dinámica acoplada de la bifurcación geométrica de zip a lo largo del segmento de equilibrios L_k para las dos cadenas de bifurcación del caso 6, del Teorema 76. Este corolario es una consecuencia de los Teoremas 68, 71, y 76, por lo cual sólo se presenta su enunciado.

Corolario 83 Si el sistema suave (2.1) asociado al campo f_j , $j = 1, 2$, es del tipo 4, es decir, $m_j > 0$, $w_j(k_{b2j}) > 0$, con $\xi_{11}(k_{\min j}) \leq \frac{(A_j - 2m_j c_j(k_{\min j}, a_2))}{m_j^2}$; satisface las condiciones (2.8) a (2.13) y (2.20) a (2.23), entonces existen $k_{a2j}, k_{a1j}, k_{b2j}, k_{b1j}$, únicos, satisfaciendo $k_{\min j} \leq k_{b1j} \leq k_{b2j} \leq k_{a1j} \leq k_{a2j} \leq k_{\max j}$, o $k_{\min} \leq k_{b1j} \leq k_{a1j} \leq k_{b2j} \leq k_{a2j} \leq k_{\max j}$ tal que si:

i) $k_{\min j} \leq k_{b1j} \leq k_{b2j} \leq k_{a1j} \leq k_{a2j} \leq k_{\max j}$, entonces para $k \in (k_{\min j}, k_{b1j})$, todos los puntos del segmento L_k son nodos estables, y L_k es un atractor del sistema. Para $k \in (k_{b1j}, k_{b2j})$, el punto $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$ divide L_k en dos partes (una de las cuales puede ser vacía), donde $\bar{\xi}_{1j}(k)$, $\bar{\xi}_{2j}(k)$ son dados por (3.103). Los puntos de L_k a la izquierda de este punto son nodos estables, los puntos a la derecha son focos estables. Para $k \in (k_{b2j}, k_{a1j})$, todos los puntos del segmento L_k son focos estables. Para $k \in (k_{a1j}, k_{a2j})$, el punto $(\lambda, \widehat{\xi}_{1j}(k), \widehat{\xi}_{2j}(k))$ divide L_k en dos partes (una de las cuales puede ser vacía), donde $\widehat{\xi}_{1j}(k)$ y $\widehat{\xi}_{2j}(k)$ son dados por (3.95) y (3.96) respectivamente. Los puntos de L_k a la izquierda de este punto son focos estables, los puntos a la derecha son focos inestables. Para $k \in (k_{a1j}, k_{\max j})$, el sistema sólo tiene equilibrios focos inestables en el octante positivo del espacio cerrado s, x_1, x_2 .

ii) $k_{\min j} \leq k_{b1j} \leq k_{a1j} \leq k_{b2j} \leq k_{a2j} \leq k_{\max j}$, entonces para $k \in (k_{\min j}, k_{b1j})$, todos los puntos del segmento L_k son nodos estables, y L_k es un atractor del sistema. Para $k \in (k_{b1j}, k_{a1j})$, el punto $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$ divide L_k en dos partes (una de las cuales

Capítulo 3. Extensión de la dinámica de la bifurcación zip en modelos suaves 143
puede ser vacía), donde $\bar{\xi}_{1j}(k)$ y $\bar{\xi}_{2j}(k)$ son dados por (3.103). Los puntos de L_k a la izquierda de este punto son nodos estables, los puntos a la derecha son focos estables. Para $k \in (k_{a1j}, k_{b2j})$, los puntos $(\lambda, \hat{\xi}_{1j}(k), \hat{\xi}_{2j}(k))$ y $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$ dividen L_k en tres partes (dos de las cuales pueden ser vacías), donde $\hat{\xi}_{1j}(k)$ y $\hat{\xi}_{2j}(k)$ son dados por (3.95), y (3.96) respectivamente. Los puntos de L_k a la izquierda de $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$ son nodos estables, los puntos de L_k entre $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$ y $(\lambda, \hat{\xi}_{1j}(k), \hat{\xi}_{2j}(k))$ son focos estables, los puntos a la derecha del punto $(\lambda, \hat{\xi}_{1j}(k), \hat{\xi}_{2j}(k))$ son focos inestables. Para $k \in (k_{b2j}, k_{a2j})$, el punto $(\lambda, \hat{\xi}_{1j}(k), \hat{\xi}_{2j}(k))$ divide L_k en dos partes (una de las cuales puede ser vacía). Los puntos de L_k a la izquierda de este punto son focos estables, los puntos a la derecha son focos inestables. Para $k \in (k_{a2j}, k_{\max j})$, el sistema sólo tiene equilibrios focos inestables en el octante positivo del espacio cerrado s, x_1, x_2 .

El próximo corolario presenta la dinámica acoplada de la bifurcación geométrica de zip a lo largo del segmento de equilibrios L_k para las dos cadenas de bifurcación del caso 7, del Teorema 76. Este corolario es una consecuencia de los Teoremas 68, 72, y 76, por lo cual sólo se presenta su enunciado.

Corolario 84 Si el sistema suave (2.1) asociado al campo f_j , $j = 1, 2$, es del tipo 4, es decir, $m_j > 0$, $w_j(k_{b2j}) > 0$, con $\xi_{11}(k_{\min j}) \geq \frac{(A_j - 2m_j c_j(k_{\min j}, a_2))}{m_j^2}$, $\xi_{11}(k_{b21}) \leq \frac{(A_j - 2m_j c_j(k_{b21}, a_2))}{m_j^2}$; satisface las condiciones (2.8) a (2.13) y (2.20) a (2.23), entonces existen $k_{a2j}, k_{a1j}, k_{b2j}, k_{b1j}$, únicos, satisfaciendo $k_{\min j} \leq k_{b1j} \leq k_{b2j} \leq k_{a1j} \leq k_{a2j} \leq k_{\max j}$, o $k_{\min j} \leq k_{b1j} \leq k_{a1j} \leq k_{b2j} \leq k_{a2j} \leq k_{\max j}$ tal que si:

i) $k_{\min j} \leq k_{b1j} \leq k_{b2j} \leq k_{a1j} \leq k_{a2j} \leq k_{\max j}$, entonces para todo $k \in (k_{\min j}, k_{b1j})$, los puntos $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$ y $(\lambda, \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k), \bar{\bar{\xi}}_{2j}(k))$ dividen los puntos del segmento L_k en tres partes (dos de las cuales puede ser vacías), donde $\bar{\xi}_{1j}(k)$, $\bar{\xi}_{2j}(k)$ son dados por (3.103), y $\bar{\bar{\xi}}_{1j}(k)$, $\bar{\bar{\xi}}_{2j}(k)$, son dados por (3.104). Los puntos de L_k a la izquierda de $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$, y a la derecha de $(\lambda, \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k), \bar{\bar{\xi}}_{2j}(k))$, son nodos estables, los puntos entre $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$ y $(\lambda, \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k), \bar{\bar{\xi}}_{2j}(k))$ son focos estables. Para $k \in (k_{b1j}, k_{b2j})$, el punto $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$ divide L_k en dos partes (una de las cuales puede ser vacía). Los puntos de L_k a la izquierda de este punto son nodos estables, los puntos a la derecha son focos estables. Para $k \in (k_{b2j}, k_{a1j})$, el sistema sólo tiene equilibrios focos

Capítulo 3. Extensión de la dinámica de la bifurcación zip en modelos suaves 144
estables. Para $k \in (k_{a1j}, k_{a2j})$, el punto $(\lambda, \widehat{\xi}_{1j}(k), \widehat{\xi}_{2j}(k))$ divide L_k en dos partes (una de las cuales puede ser vacía), donde $\widehat{\xi}_{1j}(k)$ y $\widehat{\xi}_{2j}(k)$ son dados por (3.95) y (3.96) respectivamente. Los puntos de L_k a la izquierda de este punto son focos estables, los puntos a la derecha son focos inestables. Para $k \in (k_{a1j}, k_{\max j})$, el sistema sólo tiene equilibrios focos inestables en el octante positivo del espacio cerrado s, x_1, x_2 .

ii) $k_{\min} \leq k_{b1j} \leq k_{a1j} \leq k_{b2j} \leq k_{a2j} \leq k_{\max j}$, entonces para todo $k \in (k_{\min j}, k_{b1j})$, los puntos $(\lambda, \overline{\xi}_{1j}(k), \overline{\xi}_{2j}(k))$ y $(\lambda, \overline{\overline{\xi}}_{1j}(k), \overline{\overline{\xi}}_{2j}(k))$ dividen los puntos del segmento L_k en tres partes (dos de las cuales puede ser vacías), donde $\overline{\xi}_1(k)$, $\overline{\xi}_2(k)$, son dados por (3.103), y $\overline{\overline{\xi}}_1(k)$, $\overline{\overline{\xi}}_2(k)$ son dados por (3.104). Los puntos de L_k a la izquierda de $(\lambda, \overline{\xi}_{1j}(k), \overline{\xi}_{2j}(k))$, y a la derecha de $(\lambda, \overline{\overline{\xi}}_{1j}(k), \overline{\overline{\xi}}_{2j}(k))$, son nodos estables, los puntos entre $(\lambda, \overline{\xi}_{1j}(k), \overline{\xi}_{2j}(k))$ y $(\lambda, \overline{\overline{\xi}}_{1j}(k), \overline{\overline{\xi}}_{2j}(k))$ son focos estables. Para $k \in (k_{b1j}, k_{a1j})$, el punto $(\lambda, \overline{\xi}_{1j}(k), \overline{\xi}_{2j}(k))$ divide L_k en dos partes (una de las cuales puede ser vacía). Los puntos de L_k a la izquierda de este punto son nodos estables, los puntos a la derecha son focos estables. Para $k \in (k_{a1j}, k_{b2j})$, los puntos $(\lambda, \overline{\xi}_{1j}(k), \overline{\xi}_{2j}(k))$ y $(\lambda, \widehat{\xi}_{1j}(k), \widehat{\xi}_{2j}(k))$ dividen L_k en tres partes (dos de las cuales pueden ser vacías). Los puntos de L_k a la izquierda de $(\lambda, \overline{\xi}_{1j}(k), \overline{\xi}_{2j}(k))$, son nodos estables, los puntos de L_k entre $(\lambda, \overline{\xi}_{1j}(k), \overline{\xi}_{2j}(k))$ y $(\lambda, \widehat{\xi}_{1j}(k), \widehat{\xi}_{2j}(k))$ son focos estables, los puntos a la derecha del punto $(\lambda, \widehat{\xi}_{1j}(k), \widehat{\xi}_{2j}(k))$ son focos inestables. Para $k \in (k_{b2j}, k_{a2j})$, el punto $(\lambda, \widehat{\xi}_{1j}(k), \widehat{\xi}_{2j}(k))$ divide L_k en dos partes (una de las cuales puede ser vacía), donde $\widehat{\xi}_{1j}(k)$ y $\widehat{\xi}_{2j}(k)$ son dados por (3.95), y (3.96), respectivamente. Los puntos de L_k a la izquierda de este punto son focos estables, los puntos a la derecha son focos inestables. Para $k \in (k_{a2j}, k_{\max j})$, el sistema sólo tiene equilibrios focos inestables en el octante positivo del espacio cerrado s, x_1, x_2 .

El próximo corolario presenta la dinámica acoplada de la bifurcación geométrica de zip a lo largo del segmento de equilibrios L_k para la cadena de bifurcación del caso 8, del Teorema 76. Este corolario es una consecuencia de los Teoremas 68, 73, y 76, por lo cual sólo se presenta su enunciado.

Corolario 85 Si el sistema suave (2.1) asociado al campo f_j , $j = 1, 2$, es del tipo 4, es decir, $m_j > 0$, $w_j(k_{b2j}) > 0$, con $\xi_{11}(k_{\min j}) \geq \frac{(A_j - 2m_j c_j(k_{\min j, a2}))}{m_j^2}$, $\xi_{11}(k_{b21}) \geq$

Capítulo 3. Extensión de la dinámica de la bifurcación zip en modelos suaves 145

$\frac{(A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2))}{m_j^2}$; *satisface las condiciones (2.8) a (2.13) y (2.20) a (2.23), entonces existen $k_{a2j}, k_{a1j}, k_{b2j}, k_{b1j}$, únicos, con $k_{\min j} \leq k_{b2j} \leq k_{b1j} \leq k_{a1j} \leq k_{a2j} \leq k_{\max j}$, tal que para todo $k \in (k_{\min j}, k_{b2j})$, los puntos $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$ y $(\lambda, \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k), \bar{\bar{\xi}}_{2j}(k))$ dividen al segmento L_k en tres partes (dos de las cuales puede ser vacías), donde $\bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k)$ son dados por (3.103), y $\bar{\bar{\xi}}_{1j}(k), \bar{\bar{\xi}}_{2j}(k)$, son dados por (3.104). Los puntos de L_k a la izquierda de $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$, y a la derecha de $(\lambda, \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k), \bar{\bar{\xi}}_{2j}(k))$, son nodos estables, los puntos entre $(\lambda, \bar{\xi}_{1j}(k), \bar{\xi}_{2j}(k))$, y $(\lambda, \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k), \bar{\bar{\xi}}_{2j}(k))$, son focos estables. Para $k \in (k_{b2j}, k_{b1j})$, el punto $(\lambda, \bar{\bar{\xi}}_{1j}(k), \bar{\bar{\xi}}_{2j}(k))$ divide L_k en dos partes (una de las cuales puede ser vacía). Los puntos de L_k a la izquierda de este punto son focos estables, los puntos a la derecha son nodos estables. Para $k \in (k_{b1j}, k_{a1j})$, el sistema sólo tiene equilibrios focos estables. Para $k \in (k_{a1j}, k_{a2j})$, el punto $(\lambda, \hat{\xi}_{1j}(k), \hat{\xi}_{2j}(k))$ divide L_k en dos partes (una de las cuales puede ser vacía), donde $\hat{\xi}_{1j}(k)$ y $\hat{\xi}_{2j}(k)$ son dados por (3.95), y (3.96), respectivamente. Los puntos de L_k a la izquierda de este punto son focos estables, los puntos a la derecha son focos inestables. Para $k \in (k_{a1j}, k_{\max j})$, el sistema sólo tiene equilibrios focos inestables en el octante positivo del espacio cerrado s, x_1, x_2 .*

Capítulo 4

Extensión de la bifurcación zip en modelos suave por tramos

4.1 Introducción

En este capítulo se realiza el análisis de la bifurcación zip en sistemas dinámicos no suaves (*suave por tramos*) del tipo (2.1) (véase apéndice A.1.3) los cuales satisfacen las condiciones de Butler-Farkas y preservan sus variedades invariantes locales o las del sistema perturbado asociado a éste (véase Definición 31) las cuales intersectan transversalmente el segmento de equilibrios L_k en el interior del octante positivo. En general un sistema suave por tramos se puede construir por la composición de varios flujos de sistemas suaves los cuales conmutan sobre una variedad de discontinuidad π , y como resultado de esta conmutación las variedades invariantes locales de los sistemas suaves pueden destruirse; la existencia de estas variedades juegan un papel importante en nuestro caso en la determinación de la existencia de la bifurcación de zip en sistemas no suaves del tipo (2.1).

Para las condiciones mencionadas en el párrafo anterior se demuestra la existencia de un sistema aproximado (perturbado) y topológicamente equivalente al sistema no suave (2.1) el cual se construye a partir de los subsistemas generados por los campos

\tilde{f}_j que son aproximaciones topológicamente equivalentes de los campos f_j que generan los subsistemas del sistema no suave (2.1) en un entorno tubular alrededor del segmento de equilibrios L_k salvo en un conjunto de medida cero. Además como a las variedades invariantes que intersectan transversalmente el segmento de equilibrios L_k de los subsistemas generados por los campos \tilde{f}_j se les conoce su integral primera, entonces se determina que la condición (4.7) es condición necesaria y suficiente para la existencia de variedades invariantes que intersectan transversalmente el segmento de equilibrios L_k en el sistema perturbado. Adicionalmente a las condiciones de continuidad (2.5), de compatibilidad (2.14) y (2.15a) que garantizan que las condiciones Butler-Farkas se satisfacen en el modelo no suave (2.1) se imponen condiciones de compatibilidad entre los dominios (Definición 110) de los subsistemas que componen el sistema no suave (2.1) que aseguran un comportamiento monótono de la función $a(\xi_1, k) = \frac{a_1(\xi_1, k)}{b_1(\xi_1, k)} + \frac{a_2(\xi_1, k)}{b_2(\xi_1, k)}$ con respecto a las variables ξ_1 y k , la cual determina la estabilidad de los puntos del segmento de equilibrios de L_k como consecuencia del Teorema 27 debido a Camlibel [8] y el Corolario 99. Bajo las condiciones (4.7), (2.5), (2.14), (2.15a) y la Definición 110 antes mencionada, se demuestra finalmente el Teorema 114 a cerca de la existencia de la bifurcación de zip en el sistema suave por tramos (2.1) y la Proposición 119 de clasificación de estas bifurcaciones, el cual afirma que bajo la acción posible de los 11 tipos de bifurcaciones geométricas que actúan a lo largo del segmento de equilibrios L_k generadas por cada uno de los campos f_1 y f_2 se produce un escenario de bifurcaciones de naturaleza no suave conformado por 142 bifurcaciones geométricas en total. En este capítulo también se trata la existencia de la bifurcación de Hopf para el sistema restringido a las variedades invariantes bidimensionales que intersectan transversalmente el segmento equilibrios L_k . En sistemas suaves del tipo (2.1) degenerados ($a_1 = a_2$) fue confirmada la existencia de la bifurcación de Hopf en Farkas [24]. Él también ha mostrado Farkas [27] en el caso de los sistemas suaves no degenerados (modelos naturales y artificiales) que en los planos coordenados se desarrolla una bifurcación de Hopf; sin embargo la existencia de la bifurcación de Hopf en las variedades invariantes bidimensionales que intersectan transversalmente el interior del segmento de equilibrios L_k en el interior del octante positivo es una conjetura que no ha sido probada. La

dificultad en la prueba de esta conjetura radica en la imposibilidad de determinar la integral primera del sistema que define estas variedades invariantes; sin embargo en el sistema perturbado (4.2) si es posible; desde luego nos permite establecer la existencia de la bifurcación de Hopf en el sistema suave (4.2) (el perturbado suave de modelos naturales y artificiales) y la existencia de la bifurcación de Hopf-Zou & Küpper en el sistema no suave (4.2) (el perturbado no suave de modelos naturales y artificiales) en cada una de las variedades invariantes que intersectan transversalmente el segmento de equilibrios L_k , como consecuencia directa del Corolario 99. Respecto de la existencia de la bifurcación de Hopf en el sistema suave (2.1) (modelos naturales y artificiales suaves) y la existencia de la bifurcación de Hopf-Zou & Küpper en el sistema no suave (2.1) (modelos naturales y artificiales no suaves) en cada una de las variedades invariantes que intersectan transversalmente el segmento de equilibrios L_k se establece la hipótesis de que la conjetura sigue siendo válida si el sistema no suave (2.1) preserva las variedades invariantes bidimensionales bajo variación del parámetro k , como consecuencia directa del Corolario 101, como ocurre en los sistemas degenerados no suaves del tipo (2.1) con $(a_1 = a_2)$. En el caso en que las variedades invariantes bidimensionales no se preservan bajo variación del parámetro k , en sistemas no suaves hiperbólicos del tipo (2.1) (de acuerdo con la Definición 19) se ha observado que existe un entorno tubular del segmento de equilibrios $\bar{L}_{ku} \subset L_k$ inestable, para el cual las trayectorias con condiciones iniciales en esta vecindad tienden al mismo ciclo límite sobre el plano coordinado al cual derivan por tener pérdida de estabilidad del tipo hiperbólico. El ciclo límite crece en amplitud con el incremento del parámetro k desde el valor cero, el cual ocurre, donde el punto que degenerada en el segmento de equilibrios L_k intersecta el plano coordinado en consideración. En este caso no se puede afirmar que en las variedades invariantes que intersectan el segmento de equilibrios se desarrolla una bifurcación de Hopf, ya que estas variedades no se preservan por cambios en el parámetro de bifurcación k ; sin embargo los ciclos límites que se desarrollan en ellas, están asociadas a la bifurcación de Hopf que se desarrolla en el plano coordinado del sistema al cual derivan sus órbitas.

4.2 Variedad invariante

En esta sección se considera una aproximación (perturbación) del sistema no suave (2.1) generado por los campos \tilde{f}_j los cuales son aproximaciones de los campos f_j que generan los subsistemas del sistema no suave (2.1); esta aproximación se obtiene mediante la aproximación lineal de la respuesta funcional $p_j(s, a_1)$, $j = 1, 2$, alrededor del punto $s = \lambda$. Se demuestra que el sistema aproximado y el sistema no suave (2.1) son topológicamente equivalentes en un entorno tubular alrededor de la recta de equilibrios L_k salvo en un conjunto de medida cero.

Si realizamos una perturbación del sistema no suave (2.1) mediante una aproximación lineal de la respuesta funcional p_j es decir

$$p_j(s, a_i) \cong p_j(\lambda, a_i) + z_{ij}(s - \lambda), \text{ donde } z_{ij} = \partial_s p_j(\lambda, a_i); \quad (4.1)$$

se obtiene que el sistema perturbado

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{s} \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \tilde{f}_1((s, x_1, x_2), (k, a_1, a_2)), & \text{si } (s, x_1, x_2) \in D_1 \text{ y } (k, a_1, a_2) \in \tilde{D} \\ \tilde{f}_2((s, x_1, x_2), (k, a_1, a_2)), & \text{si } (s, x_1, x_2) \in D_2 \text{ y } (k, a_1, a_2) \in \tilde{D}, \end{cases} \quad (4.2)$$

donde los campos \tilde{f}_j del sistema perturbado por la aproximación lineal de $p_j(s, a_i)$ vienen dados por

$$\tilde{f}_j(x) = \begin{pmatrix} \gamma_s g(s, k) - x_1 (p_j(\lambda, a_1) + z_{1j}(s - \lambda)) - x_2 (p_j(\lambda, a_2) + z_{2j}(s - \lambda)) \\ x_1 z_{1j}(s - \lambda) \\ x_2 z_{2j}(s - \lambda) \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

con $x = (s, x_1, x_2)$, $j = 1, 2$,

y sus subsistemas asociados en la forma

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \gamma_s g(s, k) - x_1 (p_j(\lambda, a_1) + z_{1j}(s - \lambda)) - x_2 (p_j(\lambda, a_2) + z_{2j}(s - \lambda)) \\ \dot{x}_1 &= x_1 z_{1j}(s - \lambda) \\ \dot{x}_2 &= x_2 z_{2j}(s - \lambda). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Al dividir la tercera ecuación por la segunda ecuación del subsistema (4.4) generado por el campo \tilde{f}_j se obtiene las ecuaciones de las trayectorias que satisfacen la ecuación diferencial $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2 z_{2j}}{x_1 z_{1j}}$. Así, la función $f_j(x_2, x_1) = \frac{x_2 z_{2j}}{x_1 z_{1j}}$ es una integral primera del subsistema (4.4) generado por el campo perturbado \tilde{f}_j . Como una consecuencia se tiene que las superficies

$$x_2 = c_j (x_1)^{\frac{z_{2j}}{z_{1j}}}, \quad c_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \quad (4.5)$$

son superficies invariantes del subsistema generado por el campo perturbado \tilde{f}_j , donde $c_j \in R$. Para $c_j \geq 0$, sea M_{c_j} , $j = 1, 2$, la variedad definida por

$$M_{c_j} = \{(s, x_1, x_2) \in R^3 : s \geq 0, \text{ y } x_1, x_2 \text{ satisfaciendo (4.5)}\}. \quad (4.6)$$

Entonces, la familia de variedades $\{M_{c_j} : c_j \in R, j = 1, 2\}$ de cada subsistema del sistema (4.4) son foliaciones bidimensionales del primer octante de R^3 . Con las notación e hipótesis dadas anteriormente se tiene la siguiente condición de existencia de variedad invariante para el sistema no suave (4.2).

Proposición 86 *Una condición necesaria y suficiente para la existencia de variedades invariantes en el sistema no suave (4.2) viene dada por la siguiente condición*

$$(CEV) \quad \frac{z_{22}}{z_{12}} - \frac{z_{21}}{z_{11}} = 0. \quad (4.7)$$

Prueba: La prueba se sigue de (4.5) ya que las variedades invariantes M_{c_j} , $j = 1, 2$, de cada subsistema asociado al campo \tilde{f}_j , $j = 1, 2$, coinciden en la superficie de comutación π dada en (2.4) si, y sólo si $\frac{z_{22}}{z_{12}} = \frac{z_{21}}{z_{11}}$. \square

Observación 87 - *Se observa que la condición necesaria y suficiente para la existencia de variedades invariantes para el sistema no suave (4.2) es que las variedades respectivas de cada subsistema coincidan en la superficie de comutación π .*

Observación 88 - *Si el modelo es degenerado ($a_1 = a_2$) claramente se satisface (4.7) lo cual ha sido establecido en Farkas [24] para sistemas suaves.*

4.3 Atractividad del segmento de equilibrios L_k

En esta sección se trata la atractividad del segmento de equilibrios L_k con $k \in (k_{\min}, k_{\max})$. La estabilidad y la atractividad de L_k en el sistema suave (2.1) generado por el campo f_j , $j = 1, 2$, depende de los valores de la componente real $a_j(\xi_1, k)$ de los autovalores u_{1j} y u_{2j} (ver Definición 3.6) debido que existen foliaciones bidimensionales de los entornos tubulares de la zona atractiva y de la zona repulsiva del segmento de equilibrios L_k por las variedades estables e inestables que intersectan transversalmente a L_k (véase Teorema 3.1 y Corolario 3.2 en Farkas [24]). En cambio en sistemas suaves por tramos planares se puede demostrar que la estabilidad de los puntos del segmento de equilibrios de L_k del tipo foco-foco depende de la suma de los cocientes de las partes real e imaginaria de los valores propios u_{1j} y u_{2j} de la linealización de los subsistemas asociados a los campos $f_j = 1, 2$, del sistema no suave (2.1) expresado por $a(\xi_1, k) = \frac{a_1(\xi_1, k)}{b_1(\xi_1, k)} + \frac{a_2(\xi_1, k)}{b_2(\xi_1, k)}$, y también que la estabilidad de los puntos del segmento de equilibrios de L_k del tipo nodo-foco depende fundamentalmente de la componente real $a_j(\xi_1, k)$ como consecuencia del Teorema 27 (véase Freire E. Ponce E. & Torres F. [38]; Camlibel [8], Olivar & Angulo [77] y el Corolario 99), ya que al igual que el caso suave es posible demostrar la existencia de un homeomorfismo entre un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k en el sistema no suave (2.1) y un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k en un sistema perturbado no suave del sistema no suave (2.1) el cual tiene la particularidad que preserva sus variedades invariantes (véase Definición 31) y es topológicamente equivalente al sistema no suave (2.1) restringido al entorno tubular anteriormente mencionado.

Inicialmente se presenta el procedimiento para construir un homeomorfismo entre un entorno tubular de la zona atractiva del segmento de equilibrios L_k del espacio de estados del sistema suave (2.1) generado por el campo f_j , $j = 1, 2$, y un entorno tubular de la zona atractiva del segmento de equilibrios L_k del espacio de estados del sistema suave (2.1) generado por el campo tangente a f_j , $j = 1, 2$, realizado por Farkas en [24]. Éste procedimiento se utiliza más adelante para demostrar que el

sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$, y el sistema suave (4.2) asociado al campo perturbado $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$, $j = 1, 2$, son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k .

Además, como consecuencia de la equivalencia topológica entre el sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$, y el sistema suave (4.2) asociado al campo perturbado $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$, $j = 1, 2$, se tiene también la equivalencia topológica entre el sistema no suave (2.1) y su sistema perturbado no suave (4.2) en un entorno tubular alrededor del segmento de equilibrios L_k para el caso en que se preservan las variedades invariantes locales (véase Definición 31) que intersectan transversalmente el interior del segmento de equilibrios L_k (el interior de L_k se toma con respecto a la topología inducida por L_k) del sistema no suave (2.1) o las del sistema perturbado asociado a éste.

Se define formalmente la función $a(\xi_1, k)$ que determina la estabilidad de los puntos del segmento de equilibrios de L_k del tipo foco-foco de acuerdo con el Teorema 27.

Definición 89 *Considere el sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$; $j = 1, 2$, satisfaciendo las condiciones (2.8) a (2.15a) y (2.20) a (2.23), así como la condición de la variedad invariante (4.7). Se define como **función de estabilidad de los puntos del segmento de equilibrios** L_k a la función*

$$a(\xi_1, k) = \frac{a_1(\xi_1, k)}{b_1(\xi_1, k)} + \frac{a_2(\xi_1, k)}{b_2(\xi_{10}, k)}.$$

Denotamos como $D(a)$ al dominio de la función $a(\xi_1, k)$ y como $\overline{D}(a) \subset D(a)$, al subdominio de la función $a(\xi_1, k)$ siguiente

$$\overline{D}(a) = \left(\overline{\xi}_{11}(k), \overline{\overline{\xi}}_{11}(k) \right) \times (k_{\min 1}, k_{\max 1}) \cap \left(\overline{\xi}_{12}(k), \overline{\overline{\xi}}_{12}(k) \right) \times (k_{\min 2}, k_{\max 2}),$$

donde, $\overline{\xi}_{1j}(k)$ y $\overline{\overline{\xi}}_{1j}(k)$ $j = 1, 2$, son considerados en la Definición 44.

Observación: Claramente $\overline{D}(a)$ está bien definido, ya que $b_j(\xi_1, k) > 0$, y $a_j(\xi_1, k) \in \mathbb{R}$ en $\overline{D}(a)$, con $j = 1, 2$. Además $\overline{D}(a) \neq \emptyset$, como consecuencia de la parte ii) de la Proposición 57.

Por analogía de la variable $a(\xi_{10}, \bar{k}_{a2})$ con la variables $a_j(\xi_1, k)$ respecto a la determinación de la estabilidad de los puntos del segmento de equilibrios de L_k se define formalmente los puntos de bifurcación del sistema no suave (2.1).

Definición 90 Se denota por k_{a2} y k_{a1} a los puntos de bifurcación del sistema no suave (2.1) con respecto al segmento de equilibrios L_k , como aquellos puntos que satisfacen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} a(\xi_{10}, k_{a2}) &= \frac{a_1(\xi_{10}, k_{a2})}{b_1(\xi_{10}, k_{a2})} + \frac{a_2(\xi_{10}, k_{a2})}{b_2(\xi_{10}, k_{a2})} = 0, \\ a(\xi_{11}, k_{a1}) &= \frac{a_1(\xi_{11}(k_{a1}), k_{a1})}{b_1(\xi_{11}(k_{a1}), k_{a1})} + \frac{a_2(\xi_{11}(k_{a1}), k_{a1})}{b_2(\xi_{11}(k_{a1}), k_{a1})} = 0; \end{aligned}$$

se entenderá ξ_{11} como $\xi_{11}(k_{a1})$ si se omite la variable k .

Observación 91 La Definición formal 90 es consistente como consecuencia del Lema 111.

Se introducen las siguientes notaciones por simplicidad en la descripción de la dinámica compleja del sistema no suave (2.1).

Definición 92 Los puntos asociados a los puntos de bifurcación del sistema no suave (2.1) son los siguientes:

i) Los puntos

$$\begin{aligned} k_{\min} &= \max\{k_{\min 1}, k_{\min 2}\}, \\ k_{\max} &= \min\{k_{\max 1}, k_{\max 2}\}, \end{aligned}$$

tiene el siguiente significado: si $k \in (k_{\min}, k_{a \max})$, entonces $a(\xi_1, k) \in R$ en el dominio $\bar{D}(a)$, donde $k_{\min 1}$ y $k_{\min 2}$ son considerados en la parte ii) de la Proposición 57.

ii) Los puntos

$$\begin{aligned} k_{a \min} &= \min\{k_{a1}, k_{a2}\}, \\ k_{a \max} &= \max\{k_{a1}, k_{a2}\}, \end{aligned}$$

tienen el siguiente significado: (si $m_j < 0$, entonces $k_{a \min} = k_{a2}$ y $k_{a \max} = k_{a1}$) o (si $m_j > 0$, entonces $k_{a \min} = k_{a1}$ y $k_{a \max} = k_{a2}$); donde k_{a1} y k_{a2} son considerados en la Definición 90.

iii) Los puntos

$$\begin{aligned}\bar{k}_{a \min}(\xi_1) &= \min\{\bar{k}_1(\xi_1), \bar{k}_2(\xi_1)\}, \\ \bar{k}_{a \max}(\xi_1) &= \max\{\bar{k}_1(\xi_1), \bar{k}_2(\xi_1)\},\end{aligned}$$

tienen el siguiente significado: ($a(\xi_1, \bar{k}_{a \min}(\xi_1)) < 0$, y $a(\xi_1, \bar{k}_{a \max}(\xi_1)) > 0$), donde $\bar{k}_j(\xi_1)$ es el único valor que satisface la ecuación $a_j(\xi_1, \bar{k}_j(\xi_1)) = 0$, con $\xi_1 \in [0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)}]$; $j = 1, 2$, del Lema 36.

iv) Los puntos

$$\begin{aligned}k_{a \min j} &= \min\{k_{a1j}, k_{a2j}\}, \\ k_{a \max j} &= \max\{k_{a1j}, k_{a2j}\},\end{aligned}$$

tienen el siguiente significado en el sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$, $j = 1, 2$: (si $m_j < 0$, entonces $k_{a \min j} = k_{a2j}$ y $k_{a \max j} = k_{a1j}$) o (si $m_j > 0$, entonces $k_{a \min j} = k_{a1j}$ y $k_{a \max j} = k_{a2j}$), donde k_{a1j} y k_{a2j} son considerados en la Definición 37.

v) Los puntos

$$\begin{aligned}\bar{k}_{a \min} &= \min\{k_{a \min 1}, k_{a \min 2}\}, \\ \bar{k}_{a \max} &= \max\{k_{a \max 1}, k_{a \max 2}\},\end{aligned}$$

tienen el siguiente significado: si $k \in (k_{\min}, \bar{k}_{a \min})$ los puntos de equilibrios L_k del sistema no suave (2.1) restringido a las variedades invariantes que intersectan transversalmente el segmento de equilibrios L_k son estables, pero si $k \in (\bar{k}_{a \max}, k_{\max})$ los puntos de equilibrios de L_k restringido a estas variedades invariantes son inestables.

vi) Los puntos

$$\begin{aligned}\bar{\bar{k}}_{b \min}(\xi_1) &= \min\{\bar{\bar{k}}_1(\xi_1), \bar{\bar{k}}_2(\xi_1)\}, \\ \bar{\bar{k}}_{b \max}(\xi_1) &= \max\{\bar{\bar{k}}_1(\xi_1), \bar{\bar{k}}_2(\xi_1)\},\end{aligned}$$

tienen el siguiente significado: $(\bar{b}(\xi_1, \bar{k}_{b \min}(\xi_1)) < 0$, y $\bar{b}(\xi_1, \bar{k}_{b \max}(\xi_1)) > 0$), donde $\bar{k}_j(\xi_1)$ es el único valor que satisface la ecuación $\bar{b}_j(\xi_1, \bar{k}_j(\xi_1)) = 0$, con $\xi_1 \in [0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)}]$; $j = 1, 2$, del Lema 40.

vii) Los puntos

$$\begin{aligned} k_{b \min j} &= \min\{k_{b1j}, k_{b2j}\}, \\ k_{b \max j} &= \max\{k_{b1j}, k_{b2j}\}, \end{aligned}$$

en el subsistema j tienen el siguiente significado: (si $A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}) < 0$, entonces $k_{b \min j} = k_{b2j}$ y $k_{b \max j} = k_{b1j}$) o (si $A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}) > 0$, entonces $k_{b \min j} = k_{b1j}$ y $k_{b \max j} = k_{b2j}$), donde k_{b1j} y k_{b2j} son considerados en la Definición 41.

viii) Los puntos

$$\begin{aligned} \bar{k}_{b \min} &= \min\{k_{b \min 1}, k_{b \min 2}\}, \\ \bar{k}_{b \max} &= \min\{k_{b \max 1}, k_{b \max 2}\}, \end{aligned}$$

tienen el siguiente significado: si $k \in (k_{\min}, \bar{k}_{b \min})$ los puntos de equilibrios L_k del sistema no suave (2.1) restringido a las variedades invariantes que intersectan transversalmente el segmento de equilibrios L_k son del tipo nodo-nodo, pero si $k \in (\bar{k}_{b \max}, k_{\max})$ los puntos de equilibrios de L_k restringido a estas variedades invariantes son del tipo foco-foco.

Preliminarmente se presenta algunas generalizaciones de los teoremas propuestos por Hartman [41, Capítulos IX, lemma 5.1, Corolario 5.2] presentada en Farkas [24].

Lema 93 Para $S \in [0, S_0]$, $S_0 > 0$ sea $P(S)$ una matriz estable $p \times p$ y $Q(S)$ una matriz $q \times q$ cuyos valores propios tienen parte real no negativa para todo $S \in [0, S_0]$; sean $P, Q \in C^0[0, S_0]$ y considere la aplicación $T^1 : R^p \times R^q \times [0, S_0] \mapsto R^p \times R^q$ definido por

$$T^1(y, z, S) = (e^{P(S)}y + Y(y, z, S), e^{Q(S)}z + Z(y, z, S)) = (y_1, z_1), \quad (4.8)$$

para $(y, z, S) \in R^p \times R^q \times [0, S_0]$, donde $Y, Z, \partial_y Y, \partial_z Y, \partial_y Z, \partial_z Z \in C^0$, $Y(0, 0, S) \equiv Z(0, 0, S) \equiv 0$, y para las matrices Jacobianas $\partial_{(y, z)} Y(0, 0, S) \cap 0, \partial_{(y, z)} Z(0, 0, S) \equiv 0$.

Entonces existe una vecindad del origen $W_p \subset R^p$ y una función $g : W_p \times [0, S_0] \mapsto W_q$ (un entorno en el origen de R^q) tal que $g, \partial_y g \in C^0$, $g(0, S) \equiv 0$, $\partial_y g(0, S) \equiv 0$, y la transformación de coordenadas

$$u = y, \quad v = z - g(y, S) \tag{4.9}$$

transforma (4.8) en la forma

$$\begin{aligned} u_1 &= e^{P(S)}u + U(u, v, S), \\ v_1 &= e^{Q(S)}v + V(u, v, S), \end{aligned} \tag{4.10}$$

donde

$$\begin{aligned} U(0, 0, S) &\equiv 0, \quad V(0, 0, S) \equiv 0 \\ \partial_{(u,v)}U(0, 0, S) &\equiv 0, \quad \partial_{(u,v)}V(0, 0, S) \equiv 0, V(u, 0, S) \equiv 0. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Prueba: La prueba coincide paso a paso con la prueba dada en Hartman [41, Capítulo IX, Lemma 5.1]. \square

Se observa que las últimas identidades del lema anterior significan que si $(u, v) = (u, 0)$, entonces su imagen por la aplicación (4.10) es tal que $(u_1, v_1) = (u_1, 0)$. Esto significa que si en el origen de coordenadas $z = g(y, S)$, entonces por (4.8), también se tiene que $z_1 = g(y_1, S)$, es decir el conjunto $\{(y, z) \in R^p \times R^q : z = g(y, S)\}$ es una variedad invariante de T^1 para cada $S \in [0, S]$.

Lema 94 Para $S \in [0, S_0], S_0 > 0$ sean las matrices $P(S)$ y $Q(S)$ como en el lema anterior; considere la familia de sistemas dinámicos $T : [0, \infty] \times R^p \times R^q \times [0, S_0] \mapsto R^p \times R^q$ dependiente de un parámetro S definido por

$$\begin{aligned} T : y(t, y_0, z_0, S) &= e^{P(S)}y_0 + Y(t, y_0, z_0, S) \\ z(t, y_0, z_0, S) &= e^{Q(S)}z_0 + Z(t, y_0, z_0, S); \end{aligned} \tag{4.12}$$

para $t \in [0, \infty], y_0 \in R^p, z_0 \in R^q, S \in [0, S_0]$ donde

$$Y, Z, \dot{Y}, \partial_{y_0}Y, \partial_{z_0}Y, \dot{Z}, \partial_{y_0}Z, \partial_{z_0}Z \in C^0$$

$$\begin{aligned} Y(t, 0, 0, S) &\equiv Z(t, 0, 0, S) \equiv 0, \\ \partial_{(y_0, z_0)} Y(t, 0, 0, S) &\equiv 0, \\ \partial_{(y_0, z_0)} Z(t, 0, 0, S) &\equiv 0, \end{aligned}$$

y con

$$\begin{aligned} T^1 : y(1, y_0, z_0, S) &= e^{P(S)} y_0 + Y(1, y_0, z_0, S) \\ z(1, y_0, z_0, S) &= e^{Q(S)} z_0 + Z(1, y_0, z_0, S); \end{aligned}$$

si g es la función construida por el lema anterior para T^1 , entonces la transformación de coordenadas (4.9) transforma (4.12) en

$$\begin{aligned} u(t, u_0, v_0, S) &= e^{P(S)t} u_0 + U(t, u_0, v_0, S) \\ v(t, u_0, v_0, S) &= e^{Q(S)t} v_0 + V(t, u_0, v_0, S); \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} U(t, 0, 0, S) &\equiv 0, \quad V(t, 0, 0, S) \equiv 0 \\ \partial_{(u_0, v_0)} U(t, 0, 0, S) &\equiv 0, \quad \partial_{(u_0, v_0)} V(t, 0, 0, S) \equiv 0, \quad V(t, u_0, 0, S) \equiv 0; \end{aligned} \quad (4.13)$$

si $y_0 \neq 0$, $|y_0|$ es suficientemente pequeño y $z_0 = g(y_0, S)$, entonces se tiene que $z(t, y_0, z_0, S) = g(y(t, y_0, z_0, S), S)$ para todo $t \in [0, \infty]$,

$$\begin{aligned} \frac{|z(t, y_0, z_0, S)|}{|y(t, y_0, z_0, S)|} &\longrightarrow 0 \quad y \\ \text{Lim sup } t^{-1} \log |(t, y_0, z_0, S)| &\leq \alpha, \\ &\text{cuando } t \longrightarrow \infty, \quad \alpha < 0. \end{aligned}$$

Prueba: Se sigue como consecuencia del lema anterior. \square

Para efectos de considerar la atractividad del segmento L_k con $k \in (k_{\min j}, k_{\max j})$, se introduce la siguiente notación para los conjuntos estables e inestables de L_k . Sea $(\lambda, \xi_{1j}(k), \xi_{2j}(k)) = p_0(\lambda, \widehat{\xi}_{1j}(k), \widehat{\xi}_{2j}(k)) \in L_k$ el punto en que la linealización del sistema suave (2.1) asociado al campo f_j tiene valores propios con componente real cero, es decir $a_j(\widehat{\xi}_{1j}(k), k) = 0$, y $p_1\left(\lambda, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)}, 0\right)$, $p_2\left(\lambda, 0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_2)}\right)$ los puntos extremos

del segmento de equilibrios L_k . Para $k \in (k_{\min j}, k_{\max j})$ el punto $p_0 \left(\lambda, \widehat{\xi}_{1j}(k), \widehat{\xi}_{2j}(k) \right)$ divide el segmento de equilibrios L_k en dos; los equilibrios del sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$, $j = 1, 2$, en el conjunto

$$L_{kuj} = \{(\lambda, \xi_{1j}, \xi_{2j}) \in L_k : \xi_{1j} \leq \widehat{\xi}_{1j}(k)\}; \text{ si } m_j \leq 0\}$$

que son inestables y los equilibrios en el conjunto

$$L_{ksj} = \{(\lambda, \xi_{1j}, \xi_{2j}) \in L_k : \widehat{\xi}_{1j}(k) \leq \xi_{1j}\}; \text{ si } m_j \leq 0\}, \quad (4.14a)$$

que son estables en el sentido Lyapunov.

Considere las siguientes relaciones

$$\widehat{\xi}_{1j}(k) < \widehat{\xi}_{1js}(k) < \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k_2)}{p_j(\lambda, a_1)}; 0 < \widehat{\xi}_{1ju}(k) < \widehat{\xi}_{1j}(k), \text{ si } m_j < 0, \quad (4.15)$$

$$\widehat{\xi}_{1j}(k) < \widehat{\xi}_{1ju}(k) < \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k_2)}{p_j(\lambda, a_1)}; 0 < \widehat{\xi}_{1js}(k) < \widehat{\xi}_{1j}(k), \text{ si } m_j > 0, \quad (4.16)$$

y los subconjuntos propios de L_{ksj} y L_{kuj} cerrados, siguientes

$$\bar{L}_{ksj} = \{(\lambda, \xi_{1j}, \xi_{2j}) \in L_k : \xi_{1j} \geq \widehat{\xi}_{1js}(k)\}; \text{ si } m_j \leq 0, \quad (4.17)$$

$$\bar{L}_{kuj} = \{(\lambda, \xi_{1j}, \xi_{2j}) \in L_k : \widehat{\xi}_{1ju}(k) \geq \xi_{1j}\}; \text{ si } m_j \leq 0. \quad (4.18)$$

Parametrizamos al segmento $L_{ksj} \cup \{p_0\}$ por $\phi_{ksj} : [0, 1] \rightarrow L_{ksj} \cup \{p_0\}$, donde

$$\phi_{ksj}(S) = S p_0 + (1 - S) p_i; \phi_{ksj}(0) = p_i = \begin{cases} p_1 & \text{si } m_j < 0 \\ p_2 & \text{si } m_j > 0 \end{cases}, \quad (4.19)$$

al segmento $L_{kuj} \cup \{p_0\}$ por $\phi_{kuj} : [1, 2] \rightarrow L_{kuj} \cup \{p_0\}$, donde

$$\phi_{kuj}(S) = (2 - U)p_0 + (U - 1)p_i; \phi_{kuj}(0) = p_i = \begin{cases} p_1 & \text{si } m_j > 0 \\ p_2 & \text{si } m_j < 0 \end{cases}, \quad (4.20)$$

y por último al segmento $L_{kj} = L_k$ por $\phi_{kj} : [0, 2] \rightarrow L_{kj}$, donde

$$\phi_{kj}(S) = \begin{cases} \phi_{ksj}(S) & \text{si } S \in [0, 1] \\ \phi_{kuj}(S) & \text{si } S \in [1, 2] \end{cases}, \quad (4.21)$$

Sea M_{kj} una superficie suave interceptando L_k transversalmente en $(\lambda, \widehat{\xi}_{1js}(k), \widehat{\xi}_{2js}(k)) \in L_k$ en el sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$, $j = 1, 2$. Se denota como $T_{M_{ksj}}$ y se denomina *entorno tubular* de \bar{L}_{ksj} de radio ρ , al conjunto compacto acotado por la parte de M_{kj} dentro de la superficie que define el siguiente conjunto

$$\{(s, x_1, x_2) \in R^3 : d((s, x_1, x_2), \bar{L}_{ksj}) = \rho\}, \quad (4.22)$$

con $\rho > 0$, d la distancia *Euclidiana*, la parte de la superficie de (4.22) entre M_{kj} y el plano s, x_1 y la parte del plano s, x_1 dentro de la superficie (4.22). Claramente si $\rho > 0$, es suficientemente pequeño, la intersección de M_{kj} con la superficie (4.22) es una curva de *Jordan* simple c_{kj} , $\bar{L}_{ksj} \subset T_{M_{ksj}}$ y el interior del segmento de línea \bar{L}_{ksj} está en el interior de $T_{M_{ksj}}$. En forma análoga se define *el entorno tubular* de \bar{L}_{kuj} de radio ρ , denominado $T_{M_{kuj}}$.

Observación 95 *Se observa que si $k_{\min j} < k < k_{a \min j}$, entonces $L_{ksj} = L_k$ y $L_{kuj} = \emptyset$, por lo cual se asume formalmente que el entorno tubular $T_{M_{kuj}} = \emptyset$, y que L_{kuj} es un repulsor del sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$, $j = 1, 2$; si $k_{a \min j} < k < k_{a \max j}$, entonces $L_{ksj}, L_{kuj}, T_{M_{ksj}}, T_{M_{kuj}} \neq \emptyset$; si $k_{a \max j} < k < k_{\max j}$, entonces $L_{kuj} = L_k$ y $L_{ksj} = \emptyset$, por lo cual se asume formalmente que el entorno tubular $T_{M_{ksj}} = \emptyset$, y que L_{ksj} es un atractor del sistema. También se considera que la función identidad sobre el conjunto X , $I_X : X \longrightarrow X$ es un homeomorfismo aún en el caso en que $X = \emptyset$. Estas definiciones formales nos ayudan a reducir el número de casos posibles a considerar en el análisis de la atractividad de L_k .*

Teniendo en cuenta la notación anterior se tiene el siguiente corolario.

Corolario 96 *Para $k \in (k_{\min j}, k_{\max})$ y $\widehat{\xi}_{1js}(k), \widehat{\xi}_{1ju}(k)$ cualesquiera satisfaciendo (4.15) o (4.16); los segmentos de rectas \bar{L}_{ksj} y \bar{L}_{kuj} dados por (4.17) y (4.18) (uno de los cuales puede ser vacío) son un atractor y un repulsor respectivamente para el sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$, $j = 1, 2$, en el siguiente sentido: \bar{L}_{ksj} tiene un entorno tubular $W_{sj} \times [0, S_{0,j}(k)]$, y existe un homeomorfismo T_{ksj} entre*

$W_{sj} \times [0, S_{0,j}(k)]$ y un entorno tubular $T_{M_{ksj}}$ de \bar{L}_{ksj} en el espacio de fase del sistema (2.1) en R_+^3

$$T_{ksj} : W_{sj} \times [0, S_{0,j}(k)] \rightarrow T_{M_{ksj}}$$

$$T_{ksj}(y_1, y_2, s) \mapsto (s, x_1, x_2); S_{0,j} < 1,$$

tal que las trayectorias con condiciones iniciales en $W_{sj} \times [0, S_{0,j}(k)]$ tienden a \bar{L}_{ksj} cuando t tiende a infinito; \bar{L}_{kuj} tiene un entorno tubular $W_{uj} \times [U_{0,j}(k), 2]$ y existe un homeomorfismo T_{kuj} entre $W_{uj} \times [U_{0,j}(k), 2]$ y un entorno tubular $T_{M_{kuj}}$ del espacio de fase del sistema (2.1) en R_+^3

$$T_{kuj} : W_{uj} \times [U_{0,j}(k), 2] \rightarrow T_{kuj}$$

$$T_{kuj}(y_1, y_2, s) \mapsto (s, x_1, x_2); U_{0,j}(k) > 1.$$

Prueba: Basta considerar la prueba de la atractividad del segmento \bar{L}_{ksj} con $k \in (k_{\min j}, k_{\max j})$, $m_j < 0$; la prueba de la atractividad en los restantes segmentos (\bar{L}_{ksj} para $k \in (k_{\min j}, k_{\max j})$, $m_j > 0$; \bar{L}_{kuj} para $k \in (k_{\min j}, k_{\max j})$, $m_j \leq 0$) es similar como secuencia del papel simétrico que juegan las variedades estables e inestables transversales a L_k en la descomposición de la familia de sistemas dinámicos T^1 y T dependiente del parámetro S (Lema 93 y Lema 93) y la simetría de la notación introducida en la descripción de los entornos tubulares $T_{M_{ksj}}$ y $T_{M_{kuj}}$ por lo cual la omitimos por brevedad.

Sea $(\lambda, \xi_{1j}(k), \xi_{2j}(k)) = p_0 \left(\lambda, \widehat{\xi}_{1j}(k), \widehat{\xi}_{2j}(k) \right) \in L_k$ el punto en que la linealización del sistema suave (2.1) asociado al campo f_j tiene valores propios con componente real cero, es decir $a_j(\widehat{\xi}_{1j}(k), k) = 0$, y $p_1 \left(\lambda, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)}, 0 \right)$, $p_2 \left(\lambda, 0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_2)} \right)$ los puntos extremos del segmento de equilibrios L_k . Parametrizamos \bar{L}_{ksj} por ϕ_{ksj} para $m_j < 0$, $k \in (k_{\min j}, k_{a1j}]$, teniendo en cuenta (4.19) se tiene

$$s = \lambda$$

$$x_1 = \xi_{1js}(k) = \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)} + S \left(\widehat{\xi}_{1j}(k) - \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)} \right) \quad (4.23)$$

$$x_2 = \xi_{2js}(k) = S \widehat{\xi}_{2j}(k), \quad 0 \leq S < 1; j = 1, 2.$$

Si $S = 0$, se obtiene el punto extremo inferior en L_k en el plano s, x_1 ; si $S = 1$, obtenemos el punto $(\lambda, \xi_{1j}(k), \xi_{2j}(k)) = (\lambda, \widehat{\xi}_{1j}(k), \widehat{\xi}_{2j}(k)) \in L_k$ en que la linealización del sistema suave (2.1) asociado al campo f_j tiene valores propios con componente real cero, es decir $a_j(\widehat{\xi}_{1j}(k), k) = 0$. Sea $\xi_{1j} = \xi_{1js_0}$ un valor fijo correspondiente a un valor de $0 < S_0 < 1$ es decir,

$$\xi_{1j} = \xi_{1js_0} = \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)} + S_0 \left(\widehat{\xi}_{1j}(k) - \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)} \right). \quad (4.24)$$

Así, \bar{L}_{ksj} dado por (4.17) corresponde al intervalo cerrado $[0, S_{0,j}]$. Para cada $S \in (0, S_{0,j}]$, un sistema de referencia puede ser introducido de la siguiente manera: el origen está en $(\lambda, \xi_{1js}(k), \xi_{2js}(k))$, dos vectores de la base pueden ser fijados en el subespacio generado por los vectores propios correspondientes a los dos valores propios con parte real negativa en el sistema suave (2.1) asociado al campo f_j linealizado en $(\lambda, \xi_{1js}(k), \xi_{2js}(k))$ y el tercer vector puede ser fijado en la dirección del vector de la línea L_k dado por (4.23), el cual es el valor correspondiente al valor propio cero. En el sistema (4.23), $\xi_{1js}(k), \xi_{2js}(k)$ dependen continuamente de S con k fijo, como una consecuencia de ello las raíces del polinomio característico (3.4) dependen continuamente de S . Claramente, los dos vectores en el subespacio bidimensional de vectores propios correspondiente a las raíces con parte real negativa pueden ser escogidos como funciones continuas de S en el intervalo $[0, S_{0,j}]$, dado que la dirección del plano varía continuamente. Se concluye que la familia uniparamétrica de transformación de coordenadas dependiente de $S \in [0, S_{0,j}]$ descrita arriba, puede ser representada por:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ z \end{bmatrix} = R(S) \begin{bmatrix} s - \lambda \\ x_1 - \xi_{1js}(k) \\ x_2 - \xi_{2js}(k) \end{bmatrix}, \quad (4.25)$$

donde $y = (y_1, y_2)$ denota las coordenadas en el subespacio bidimensional de vectores propios, z es la coordenada en L_k , y $R(S)$ es una matriz tres por tres regular, $R \in C^0[0, S_{0,j}]$. Bajo la transformación de coordenadas, el sistema suave (2.1) asociado

al campo f_j toma la forma:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= P(S)y + F(y, z, S) \\ \dot{z} &= G(x, z, S), \end{aligned} \tag{4.26}$$

donde P es una matriz estable de orden dos por dos, F un vector de dimensión dos y G un escalar, $P, F; \partial_y F, \partial_z F, \partial_y G, \partial_z G \in C^0$ en un entorno del origen $(y_1, y_2, z) = (0, 0, 0)$ y para todos los $S \in [0, S_0]$, $F(0, 0, S) = G(0, 0, S) = 0$, $\partial_{(y,z)} F(0, 0, S) = 0$, $\partial_{(y,z)} G(0, 0, S) = 0$. El sistema dinámico generado por (4.26) es de la forma (4.12) con $Q(S) = 0$, y satisface todas las condiciones del Lema 94. Así la función $g : W_{s_j} \times [0, S_{0,j}] \rightarrow R$ del Lema 93 existe, donde W_{s_j} es un entorno de $(y_1, y_2) = (0, 0)$, $g \in C^0$ y para cada $S \in [0, S_{0,j}]$ la superficie:

$$\{(y_1, y_2, z) \in R^3 : z = g(y_1, y_2, S), (y_1, y_2) \in W_{s_j}\},$$

es localmente una variedad invariante de (4.26). Realizando la transformación inversa de (4.25) al sustituir la función g por z se tiene:

$$\begin{bmatrix} s \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = T_{ksj}(y_1, y_2, S) = \begin{bmatrix} \lambda \\ \xi_{1js}(k) \\ \xi_{2js}(k) \end{bmatrix} + R^{-1}(S) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ g(y_1, y_2, S) \end{bmatrix}. \tag{4.27}$$

Para S fijo, $S \in [0, S_{0,j}]$, (4.27) es la ecuación paramétrica de la variedad invariante estable en el sistema suave (2.1) asociado al campo f_j pasando a través del punto de equilibrio $(\lambda, \xi_{1js}(k), \xi_{2js}(k)) \in \bar{L}_{ksj}$. La aplicación $T_{ksj} : (y_1, y_2, S) \mapsto (s, x_1, x_2)$ del cilindro $W_{s_j} \times [0, S_{0,j}]$ en el entorno tubular $T_{M_{ksj}}$ del espacio s, x_1, x_2 definido por (4.27) es continuo y uno a uno (por la unicidad de la solución y la regularidad de la matriz $R^{-1}(S)$). Por lo tanto, esta aplicación es un homeomorfismo y esto prueba que para cada ξ_{1js} que satisface (4.15) estas variedades invariantes correspondientes a los puntos de \bar{L}_{ksj} en (4.17) llenan un entorno tubular de \bar{L}_{ksj} . Por un Teorema de Harman sobre existencia de variedades estables e inestables, véase Harman [41, página 243], se tiene que a través de cada punto $(\lambda, \xi_{1js}(k), \xi_{2js}(k))$ de \bar{L}_{ksj} , pasa una variedad local bidimensional invariante tal que todas las trayectorias en esta variedad tiende a $(\lambda, \xi_{1js}(k), \xi_{2js}(k))$ exponencialmente cuando t tiende a infinito. Claramente,

$(\lambda, \xi_{1js}(k), \xi_{2js}(k))$ es asintóticamente estable con respecto a la restricción en el sistema suave (2.1) asociado al campo f_j a la variedad invariante bidimensional; por la argumentación anterior se tienen que estas variedades llenan un entorno de \bar{L}_{ksj} y por lo tanto se concluye la primera parte de la prueba del corolario.

Si $m_j < 0, k \in (k_{a1j}, k_{\max j})$ se tiene por la Observación 95, que $L_{ksj} = \emptyset$, es un atractor del sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2), j = 1, 2$.

Igual construcción procede en el caso de las variedades inestables. Si $m_j < 0$, y $k \in (k_{\min j}, k_{\max j})$, teniendo en cuenta (4.19) parametrizamos \bar{L}_{kuj} de la siguiente manera

$$\begin{aligned} s &= \lambda \\ x_1 &= \xi_{1ju}(k) = (2 - U)\widehat{\xi}_{1j}(k) \\ x_2 &= \xi_{2ju}(k) = U \left(\frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_2)} - \widehat{\xi}_{2j}(k) \right) - \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_2)} + 2\widehat{\xi}_{2j}(k), \quad 1 < U \leq 2; \end{aligned} \quad (4.28)$$

si $U = 2$, se obtiene el punto extremo superior en L_k en el plano s, x_2 ; si $U = 1$, obtenemos el punto $(\lambda, \xi_{1j}(k), \xi_{2j}(k)) = (\lambda, \widehat{\xi}_{1j}(k), \widehat{\xi}_{2j}(k)) \in L_k$ en que la linealización del sistema suave (2.1) asociado al campo f_j tiene valores propios con componente real cero, es decir $a_j(\widehat{\xi}_{1j}(k), k) = 0$. Sea $\xi_{1j} = \xi_{1ju_0}$ un valor fijo correspondiente a un valor de $1 < U_{0,j} < 2$ es decir,

$$\xi_{1j} = \xi_{1ju_0} = (2 - U_{0,j})\widehat{\xi}_{1j}(k). \quad (4.29)$$

Así, \bar{L}_{kuj} dado por (4.18) corresponde al intervalo cerrado $[U_{0,j}, 2]$. Siguiendo un procedimiento similar a la prueba de la atractividad del segmento \bar{L}_{ksj} con $k \in (k_{\min j}, k_{\max j}), m_j < 0$, se demuestra la existencia de un homeomorfismo T_{kuj} entre $W_{uj} \times [U_{0,j}(k), 2]$, y un entorno tubular $T_{M_{kuj}}$ del espacio de fase del sistema (2.1) en R_+^3 alrededor de la zona inestable del segmento de equilibrios $\bar{L}_{kuj} \subset L_k$ dado por

$$\begin{bmatrix} s \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = T_{kuj}(y_1, y_2, U) = \begin{bmatrix} \lambda \\ \xi_{1js}(k) \\ \xi_{2js}(k) \end{bmatrix} + R^{-1}(U) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ g(y_1, y_2, U) \end{bmatrix}. \quad (4.30)$$

Por un Teorema de Harman sobre existencia de variedades estables e inestables, véase Harman [41, página 243], se tiene que a través de cada punto $(\lambda, \xi_{1ju}(k), \xi_{2ju}(k))$ de

\bar{L}_{kuj} , pasa una variedad local bidimensional invariante tal que todas las trayectorias en esta variedad tiende a $(\lambda, \xi_{1ju}(k), \xi_{2ju}(k))$ exponencialmente cuando t tiende a infinito. Claramente, $(\lambda, \xi_{1ju}(k), \xi_{2ju}(k))$ es asintóticamente estable con respecto a la restricción en el sistema suave (2.1) asociado al campo f_j a la variedad invariante bidimensional; por la argumentación anterior se tienen que estas variedades llenan un entorno de \bar{L}_{kuj} y por lo tanto se concluye la prueba del corolario. \square

Observación 97 *En el Corolario 96, las parametrizaciones de $\bar{L}_{ksj}, \bar{L}_{kuj} \subset L_k$ se eligen de tal manera que $[0, S_0(k)] \cap [U_0(k), 2] = \emptyset$, para así poder pegar los homeomorfismos T_{ksj} y T_{kuj} en un sólo homeomorfismo T_{kj}*

$$T_{kj}(y_1, y_2, s) = \begin{cases} T_{ksj}(y_1, y_2, s) : (y_1, y_2, s) \in W_{sj} \times [0, S_{0,j}(k)] \\ T_{kuj}(y_1, y_2, s) : (y_1, y_2, s) \in W_{uj} \times [U_{0,j}(k), 2], \end{cases} \quad (4.31)$$

definido alrededor de la zona tanto estable como e inestable del segmento de equilibrios $\bar{L}_{ksj} \cup \bar{L}_{kuj} \subset L_k$, el cual puede cubrir L_k excepto posiblemente en un conjunto de medida tan pequeño como se quiera. Para el sistema suave (4.2) asociado al campo $\tilde{f}_j(\bar{s}, \bar{x}_1, \bar{x}_2)$, con $j = 1, 2$, se tiene la existencia de un homeomorfismo \tilde{T}_{kj} definido alrededor de la zona tanto estable como e inestable del segmento de equilibrios $\bar{L}_{ksj} \cup \bar{L}_{kuj} \subset L_k$ dado por

$$\tilde{T}_{kj}(y_1, y_2, s) = \begin{cases} \tilde{T}_{ksj}(y_1, y_2, s) : (y_1, y_2, s) \in \tilde{W}_{sj} \times [0, S_{0,j}(k)] \\ \tilde{T}_{kuj}(y_1, y_2, s) : (y_1, y_2, s) \in \tilde{W}_{uj} \times [U_{0,j}(k), 2]. \end{cases} \quad (4.32)$$

Proposición 98 *Considere el sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$ satisfaciendo las condiciones (2.8) a (2.15a) y (2.20) a (2.23) y el sistema suave (4.2) asociado al campo $\tilde{f}_j(\tilde{s}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$, con $j = 1, 2$; entonces para cualquier k tal que $k_{\min j} < k < k_{\max j}$, existen entornos tubulares $T_{M_{kj}}$ y $\tilde{T}_{\tilde{M}_{kj}}$ del segmento de equilibrios L_k para el sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$ y para el sistema suave (4.2) asociado al campo $\tilde{f}_j(\tilde{s}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ respectivamente, tal que los sistemas considerados son topológicamente equivalentes en los entornos tubulares $T_{M_{kj}}$ y $\tilde{T}_{\tilde{M}_{kj}}$, excepto en un conjunto de medida cero de $T_{M_{kj}}$ y $\tilde{T}_{\tilde{M}_{kj}}$ respectivamente.*

Prueba: Iniciamos la prueba considerando la atractividad del segmento \bar{L}_{ksj} con $k \in (k_{\min j}, k_{\max j})$, $m_j < 0$. Como la matriz jacobiana $\tilde{J}_j(\tilde{s}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ que representa la linealización del sistema suave (4.2) asociado al campo $\tilde{f}_j(\tilde{s}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$, $j = 1, 2$, es igual a la matriz jacobiana $J_j(s, x_1, x_2)$ del sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$, $j = 1, 2$, a lo largo de L_k . Luego los valores y vectores propios correspondientes en el sistema original y del perturbado a lo largo del segmento L_k son iguales. Se concluye, que la familia uniparamétrica de transformación de coordenadas dependiente de $S \in [0, S_{0,j}]$ dada en (4.27) tiene la misma representación para los dos sistemas considerados. Luego por el Corolario 96, existen $g : W_{sj} \times [0, S_{0,j}] \mapsto R$ y $\tilde{g} : \tilde{W}_{sj} \times [0, S_{0,j}] \mapsto R$ satisfaciendo las condiciones del Lema 93, donde W_j es un entorno de $(y_1, y_2) = (0, 0)$, $g, \tilde{g} \in C^0$ y para cada $S \in [0, S_0]$ las superficies:

$$\begin{aligned} & \{(y_1, y_2, z) \in R^3 : z = g(y_1, y_2, S), (y_1, y_2) \in W_{sj}\}, \\ & \{(y_1, y_2, z) \in R^3 : \tilde{z} = \tilde{g}(y_1, y_2, S), (y_1, y_2) \in W_{sj}\}, \\ & W_{sj} = \tilde{W}_{sj}, \end{aligned}$$

son localmente variedades invariantes de (4.26). Realizando la transformación inversa de (4.25) después de sustituir la función g por z y \tilde{g} por \tilde{z} se tiene dos homeomorfismos, el primero entre el cilindro sólido $W_{sj} \times [0, S_{0,j}]$ y el entorno tubular $T_{M_{ksj}}$ dentro del espacio de estados del sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$, $j = 1, 2$ definido por

$$\begin{bmatrix} s \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = T_{ksj}(y_1, y_2, S) = \begin{bmatrix} \lambda \\ \xi_{1js}(k) \\ \xi_{2js}(k) \end{bmatrix} + R^{-1}(S) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ g(y_1, y_2, S) \end{bmatrix}. \quad (4.33)$$

El segundo entre el cilindro sólido $W_{sj} \times [0, S_{0,j}]$ y el entorno tubular $\tilde{T}_{\tilde{M}_{ksj}}$ en el espacio de estados del sistema suave (4.2) asociado al campo $\tilde{f}_j(\tilde{s}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$, $j = 1, 2$, definido por

$$\begin{bmatrix} \tilde{s} \\ \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = \tilde{T}_{ksj}(y_1, y_2, S) = \begin{bmatrix} \lambda \\ \xi_{1js}(k) \\ \xi_{2js}(k) \end{bmatrix} + R^{-1}(S) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \tilde{g}(y_1, y_2, S) \end{bmatrix}. \quad (4.34)$$

Entonces la composición de los homomorfismos entre \tilde{T}_{ksj} y T_{ksj}^{-1}

$$\tilde{\tilde{T}}_{ksj} = \tilde{T}_{ksj} \circ T_{ksj}^{-1},$$

es un homeomorfismo entre el entorno tubular $T_{M_{ksj}}$ del espacio de estados en el sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$ y un entorno tubular $\tilde{\tilde{T}}_{\tilde{M}_{ksj}}$ en el sistema suave (4.2) asociado al campo $\tilde{f}_j(\tilde{s}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ alrededor de la zona estable del segmento de equilibrios \bar{L}_{ksj} . Luego la equivalencia topológica entre el sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$ y el sistema suave (4.2) asociado al campo $\tilde{f}_j(\tilde{s}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ en los entornos tubulares $T_{M_{ksj}}$ y $\tilde{\tilde{T}}_{\tilde{M}_{ksj}}$, es consecuencia de los siguientes hechos:

i) En primer lugar de la equivalencia topológica entre la restricción del sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$ a la variedad invariante estable bidimensional $z = g(y_1, y_2, S)$ y la restricción del sistema suave (2.1) asociado al campo f_j linealizado en el punto $(\lambda, \xi_{1js}(k), \xi_{2js}(k))$ al subespacio estable, para cada $S \in [0, S_{0,j}]$, porque el punto de equilibrio $(\lambda, \xi_{1js}(k), \xi_{2js}(k))$ es aislado y de tipo hiperbólico con respecto a dicha restricción, véase (Farkas [24]).

ii) De la equivalencia topológica entre la restricción del sistema suave (4.2) asociado al campo $\tilde{f}_j(\tilde{s}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ a la variedad invariante bidimensional estable $\tilde{z} = \tilde{g}(y_1, y_2, S)$ y la restricción del sistema suave (2.1) asociado al campo \tilde{f}_j linealizado en el punto $(\lambda, \xi_{1js}(k), \xi_{2js}(k))$ al subespacio estable, para cada $S \in [0, S_{0,j}]$ por las mis razones que 1)

iii) De la igualdad como aplicación entre la restricción del sistema suave (2.1) asociado al campo f_j linealizado en el punto $(\lambda, \xi_{1js}(k), \xi_{2js}(k))$ al subespacio estable, y la restricción del sistema suave (4.2) asociado al campo \tilde{f}_j linealizado en el punto $(\lambda, \xi_{1js}(k), \xi_{2js}(k))$ al subespacio estable, para cada $S \in [0, S_{0,j}]$, ya que poseen matrices jacobianas iguales alrededor de la zona estable del segmento de equilibrios $\bar{L}_{sj} \subset L_k$ con lo cual los índices de los campos asociados a estos sistemas suaves sobre las variedades invariantes estables son iguales para cada $S \in [0, S_{0,j}]$. Por consiguiente de Jacob Palis & Welington de Melo [50, Proposición 2.15] se tiene que el campo f_j asociado a la restricción del sistema suave (2.1) a la variedad invariante

estable $z = g(y_1, y_2, S)$ y el campo $\tilde{f}_j(\tilde{s}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ asociado a la restricción del sistema suave suave (4.2) son topológicamente equivalentes en cada restricción para cada $S \in [0, S_{0,j}]$.

Igual construcción procede en el caso de las variedades inestables como consecuencia del Corolario 96, luego existe un homeomorfismo

$$\tilde{\tilde{T}}_{kuj} = \tilde{T}_{kuj} \circ T_{kuj}^{-1},$$

entre el entorno tubular $T_{M_{kuj}}$ del espacio de estados en el sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$ y un entorno tubular $\tilde{T}_{\tilde{M}_{kuj}}$ en el sistema suave (4.2) asociado al campo $\tilde{f}_j(\tilde{s}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ alrededor de la zona inestable del segmento de equilibrios $\bar{L}_{kuj} \subset L_k$. Luego si pegamos los homeomorfismos T_{ksj} y T_{kuj} en un único homeomorfismo $\tilde{\tilde{T}}_{kj}$

$$\tilde{\tilde{T}}_{kj}(y_1, y_2, s) = \begin{cases} \tilde{\tilde{T}}_{ksj}(y_1, y_2, s) : (y_1, y_2, s) \in T_{ksj}(W_{sj} \times [0, S_{0,j}(k)]) \\ \tilde{\tilde{T}}_{kuj}(y_1, y_2, s) : (y_1, y_2, s) \in T_{kuj}(W_{uj} \times [U_{0,j}(k), 2]) \end{cases}, \quad (4.35)$$

definido alrededor de la zona tanto estable como e inestable del segmento de equilibrios $\bar{L}_{ksj} \cup \bar{L}_{kuj} \subset L_k$, podemos mostrar que existen entornos tubulares $T_{M_{kj}}$ y $\tilde{T}_{\tilde{M}_{kj}}$ del segmento de equilibrios L_k para el sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$ y para el sistema suave (4.2) asociado al campo $\tilde{f}_j(\tilde{s}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ respectivamente, tal que los sistemas considerados son topológicamente equivalentes en los entornos tubulares $T_{M_{kj}}$ y $\tilde{T}_{\tilde{M}_{kj}}$, excepto en un conjunto de medida cero de $T_{M_{kj}}$ y $\tilde{T}_{\tilde{M}_{kj}}$ respectivamente. En efecto dado que para $k_{\min j} < k < k_{\max j}$, sólo existe a lo sumo un punto en L_k (el punto $(\lambda, \hat{\xi}_{1j}(k), \hat{\xi}_{2j}(k))$), donde la componente real de los valores propios u_{1j} y u_{2j} (véase Definición 3.6) son cero. Luego para todo $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeño, existe dos entornos tubulares $T_{M_{kj\varepsilon}}$ y $\tilde{T}_{\tilde{M}_{kj\varepsilon}}$ del segmento $\bar{L}_{ksuj} \subset L_k$, donde $\bar{L}_{ksuj} = L_k - \bar{L}_{ksj} - \bar{L}_{kuj}$; el primer entorno tubular está limitado entre las secciones determinadas por las curvas de jordan $M_{ksj} \cap T_{M_{ksj}}$ y $M_{kuj} \cap T_{M_{kuj}}$ con distancia $d(M_{ksj} \cap T_{M_{ksj}}, M_{kuj} \cap T_{M_{kuj}}) < |\bar{L}_{ksuj}|$ y la superficie dada por la homotopía $F(\mu, t) = (1-t)f(\mu) + tg(\mu)$, donde $f(\mu), g(\mu)$ son parametrizaciones naturales de las curvas de jordan $M_{ksj} \cap T_{M_{ksj}}$ y $M_{kuj} \cap T_{M_{kuj}}$. El segundo entornos tubular está limitado entre las secciones determinadas por las curvas de jordan $\tilde{M}_{ksj} \cap \tilde{T}_{\tilde{M}_{ksj}}$ y

$\tilde{M}_{kuj} \cap \tilde{T}_{M_{kuj}}$ con distancia $d(\tilde{M}_{ksj} \cap \tilde{T}_{\tilde{M}_{ksj}}, \tilde{M}_{kuj} \cap \tilde{T}_{M_{kuj}}) < |\bar{L}_{ksuj}|$ y la superficie dada por la homotopía $\tilde{F}(\mu, t) = (1-t)\tilde{f}(s) + t\tilde{g}(s)$, donde $\tilde{f}(\mu), \tilde{g}(\mu)$ son parametrizaciones naturales de las curvas de jordan $\tilde{M}_{ksj} \cap \tilde{T}_{\tilde{M}_{ksj}}$ y $\tilde{M}_{kuj} \cap \tilde{T}_{\tilde{M}_{kuj}}$. Teniendose que por construcción $T_{M_{kj}} = T_{M_{ksj}} \cup T_{M_{kuj}} \cup T_{M_{kj\varepsilon}}$ y $\tilde{T}_{\tilde{M}_{kj}} = \tilde{T}_{\tilde{M}_{ksj}} \cup \tilde{T}_{\tilde{M}_{kuj}} \cup \tilde{T}_{\tilde{M}_{j\varepsilon}}$ son entornos tubulares de L_k y que la medida de los entornos tubulares $|T_{M_{j\varepsilon}}|, |\tilde{T}_{\tilde{M}_{j\varepsilon}}| \leq \varepsilon$, ya que la medida de $|\bar{L}_{ksuj}|$ puede hacerse tan pequeña como se quiera y además las medidas de las secciones rectas de los entornos tubulares de $T_{M_{j\varepsilon}}, \tilde{T}_{\tilde{M}_{j\varepsilon}}$ con centro en \bar{L}_{ksuj} son conjuntos acotados, porque $T_{M_{j\varepsilon}}, \tilde{T}_{\tilde{M}_{j\varepsilon}}$ son conjuntos compactos de R^3 ; por lo tanto los límites superiores del conjunto de las medidas de la secciones rectas de $T_{M_{j\varepsilon}}$ y $\tilde{T}_{\tilde{M}_{j\varepsilon}}$ con centro en cada punto de \bar{L}_{ksuj} respectivamente, existen; supongamos que ellos son A_{su} y \tilde{A}_{su} respectivamente. Así $|T_{M_{j\varepsilon}}| \leq A_{su} \times |\bar{L}_{ksuj}|$ y $|\tilde{T}_{\tilde{M}_{j\varepsilon}}| \leq \tilde{A}_{su} \times |\bar{L}_{ksuj}|$, luego tomando $|\bar{L}_{ksuj}| = \min\{\frac{\varepsilon}{A_{su}}, \frac{\varepsilon}{\tilde{A}_{su}}\}$ se tiene que $|T_{M_{j\varepsilon}}| \leq \varepsilon$ y $|\tilde{T}_{\tilde{M}_{j\varepsilon}}| \leq \varepsilon$. Como las relaciones anteriores se satisfacen para ε arbitrario se tiene la afirmación de la equivalencia topológica entre los dos sistemas restringidos al entorno tubular $T_{M_{kj}}$ del espacio de estados del sistema suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$ y al entorno tubular $\tilde{T}_{\tilde{M}_{kj}}$ del espacio de estados del sistema suave (4.2) asociado al campo $\tilde{f}_j(\tilde{s}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ alrededor del segmento de equilibrios L_k excepto en los entornos tubulares $T_{M_{j\varepsilon}}, \tilde{T}_{\tilde{M}_{j\varepsilon}}$ que son conjuntos que pueden tener medida arbitrariamente pequeña y en el límite medida cero. \square

Corolario 99 *Considere el sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$ satisfaciendo las condiciones (2.8) a (2.15a) y (2.20) a (2.23) preservando sus variedades invariantes locales de acuerdo con la Definición 31, y el sistema no suave (4.2) asociado a los campo $\tilde{f}_j(\tilde{s}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2), j = 1, 2$, preservando sus variedades invariantes locales. Entonces para cualquier k tal que $k_{\min} < k < k_{\max}$ existen entornos tubulares T_{M_k} y $\tilde{T}_{\tilde{M}_k}$ del segmento de equilibrios L_k en el sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$ y en el sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(\tilde{s}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ respectivamente, tal que los sistemas considerados son topológicamente equivalentes en los entornos tubulares T_{M_k} y $\tilde{T}_{\tilde{M}_k}$, excepto en un conjunto de medida cero de T_{M_k} y $\tilde{T}_{\tilde{M}_k}$ respectivamente.*

Prueba: Para demostrar que los sistemas no suaves (2.1) y (4.2) son topológicamente equivalentes en los entornos tubulares T_{M_k} y $\tilde{T}_{\tilde{M}_k}$ del segmento de equilibrios L_k , se construye a continuación un homeomorfismo $\tilde{\tilde{T}}_k$ entre ellos que deja invariante la frontera de conmutación π , y lleva órbitas del sistema no suave (2.1) en órbitas del sistema no suave (4.2) preservando su orientación. Sea π_1 la función proyección sobre la primera componente y T_{k_j}, \tilde{T}_{k_j} los tipos de aplicaciones definidas en el Corolario 96 y la Observación 97. Dado que los homeomorfismo T_{k_j}, \tilde{T}_{k_j} no están definidos sobre los entornos tubulares de $L_k - \bar{L}_{ksj} - \bar{L}_{kuj}$ de cada subsistema es necesario extraer estos antes de realizar el pegado de las variedades estables e inestables del subsistema del sistemas no suave (2.1) generado por el campo f_1 con las variedades estables e inestables del subsistema del sistemas no suaves (4.2) generado por el campo f_2 , para ello utilizamos las parametrizaciones de $\phi_{kj}; j = 1, 2$, de L_k (véase (4.21)). Por consiguiente el conjunto en el cual no esta definido los homeomorfismo T_{k_j} y cuya medida puede hacerse tan pequeño como se quiera viene definido por

$$D = W_{\mu_1 2} \times (\phi_{k2}^{-1} \circ \phi_{k1}^{-1}(U_{0,1}), \phi_{k2}^{-1} \circ \phi_{k1}^{-1}(S_{0,1})) \cup W_{\mu_2 1} \times (\phi_{k1}^{-1} \circ \phi_{k2}^{-1}(U_{0,2}), \phi_{k1}^{-1} \circ \phi_{k2}^{-1}(S_{0,2})),$$

donde $\mu_1 = s; \mu_2 = u$ si $\phi_{k2}^{-1} \circ \phi_{k1}^{-1}(S_{0,1}) < 1$; y $\mu_1 = u; \mu_2 = s$ si $\phi_{k2}^{-1} \circ \phi_{k1}^{-1}(S_{0,1}) > 1$.

Ahora consideramos los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned} Z_1 &= \{(y_1, y_2, S) \in W_{s1} \times [0, S_{0,1}] \cup W_{u1} \times [U_{0,1}, 2] - D : \pi_1 \circ T_{k1}(y_1, y_2, S) \leq \lambda\}, \\ Z_2 &= \{(y_1, y_2, S) \in W_{s2} \times [0, S_{0,2}] \cup W_{u2} \times [U_{0,2}, 2] - D : \pi_1 \circ T_{k2}(y_1, y_2, S) \geq \lambda\}, \\ \tilde{Z}_1 &= \{(y_1, y_2, S) \in \tilde{W}_{s1} \times [0, S_{0,1}] \cup \tilde{W}_{u1} \times [U_{0,1}, 2] - \tilde{D} : \pi_1 \circ \tilde{T}_{k1}(y_1, y_2, S) \leq \lambda\}, \\ \tilde{Z}_2 &= \{(y_1, y_2, S) \in \tilde{W}_{s2} \times [0, S_{0,2}] \cup \tilde{W}_{u2} \times [U_{0,2}, 2] - \tilde{D} : \pi_1 \circ \tilde{T}_{k2}(y_1, y_2, S) \geq \lambda\}, \end{aligned}$$

donde $\tilde{D} = D; W_{sj} = \tilde{W}_{sj}; W_{uj} = \tilde{W}_{uj}; j = 1, 2$, y las aplicaciones definidas sobre Z dadas por

$$\hat{T}_k = \begin{cases} T_{k1}/Z_1 \\ T_{k2}/Z_2, \end{cases}$$

y

$$\hat{\tilde{T}}_k = \begin{cases} \tilde{T}_{k1}/\tilde{Z}_1 \\ \tilde{T}_{k2}/\tilde{Z}_2, \end{cases}$$

donde tenemos $Z_1 = \tilde{Z}_1; Z_2 = \tilde{Z}_2; Z = Z_1 \cup Z_2 = \tilde{Z} = \tilde{Z}_1 \cup \tilde{Z}_2$.

Dado que por hipótesis se preservan las variedades invariantes locales (véase Definición 31) de los sistemas no suaves (2.1) y (4.2), entonces el pegado de los homeomorfismo T_{k_1}/Z_1 con T_{k_2}/Z_2 y $\tilde{T}_1/\tilde{Z}_{1,1}$ con \tilde{T}_2/\tilde{Z}_2 se presenta como consecuencia de la Proposición 98 y Lema del Encololado (Glueing Lemma, ver Armstrong [3, pp 79]). Por lo tanto las aplicaciones $\hat{T}_k : Z \rightarrow T_{M_k}$ y $\tilde{\hat{T}}_k : Z \rightarrow \tilde{T}_{\tilde{M}_k}$ son homeomorfismos. Luego la aplicación $\tilde{\tilde{T}}_k = \tilde{\hat{T}}_k \circ \hat{T}_k^{-1}((s, x_1, x_2))$ también es un homeomorfismo entre los entornos tubulares T_{M_k} y $\tilde{T}_{\tilde{M}_k}$ del segmento de equilibrios L_k de los sistemas no suaves considerados, dejando invariante la frontera de conmutación π , y llevando órbitas del sistema no suave (2.1) en órbitas del sistema no suave (4.2) preservando su orientación excepto en un conjunto de medida cero de T_{M_k} y $\tilde{T}_{\tilde{M}_k}$ respectivamente como consecuencia de la Proposición 98. \square

Observación 100 *Dado que el sistema degenerado no suave (2.1), con $(a_1 = a_2)$, preserva sus variedades invariantes de acuerdo con la Definición 31, con independencia del parámetro k , véase la Observación 88; se sigue del Corolario 99, que el sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$ y el sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(\tilde{s}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$, son topológicamente equivalentes para todo valor del parámetro $k \neq k_{a \min}$, en los entornos tubulares T_{M_k} y $\tilde{T}_{\tilde{M}_k}$ del segmento de equilibrios L_k .*

Corolario 101 *Considere el sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$ satisfaciendo las condiciones (2.8) a (2.15a) y (2.20) a (2.23) y el sistema no suave (4.2) asociado a los campo $\tilde{f}_j(\tilde{s}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2), j = 1, 2$ preservando sus variedades invariantes locales de acuerdo con la Definición 31; entonces para cualquier k tal que $k_{\min} < k < k_{\max}$ existen entornos tubulares T_{M_k} y $\tilde{T}_{\tilde{M}_k}$ del segmento de equilibrios L_k en el sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$ y en el sistema no suave (4.2) asociado a los campo $\tilde{f}_j(\tilde{s}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ respectivamente, tal que los sistemas considerados son topológicamente equivalentes en los entornos tubulares T_{M_k} y $\tilde{T}_{\tilde{M}_k}$, excepto en un conjunto de medida cero de T_{M_k} y $\tilde{T}_{\tilde{M}_k}$ respectivamente.*

Prueba: Para demostrar que los sistemas no suaves (2.1) y (4.2) son topológicamente equivalentes en los entornos tubulares T_{M_k} y $\tilde{T}_{\tilde{M}_k}$ del segmento de equi-

librios L_k inicialmente se considera la equivalencia topológica entre los sistemas no suaves (2.1) y (4.2) en los entornos tubulares $T_{M_{ks}}$ y $\tilde{T}_{\tilde{M}_{ks}}$ del segmento \bar{L}_{ksj} , donde es válida la condición $a(\xi_1, k) = \frac{a_1(\xi_1, k)}{b_1(\xi_1, k)} + \frac{a_2(\xi_1, k)}{b_2(\xi_{10}, k)} < 0$. Se asume una notación similar a la utilizada en la prueba del Corolario 96, en cuanto a las descripción de los conjuntos estables e inestables de L_k sólo que ahora se considera que $(\lambda, \xi_1(k), \xi_2(k)) = p_0 \left(\lambda, \widehat{\xi}_1(k), \widehat{\xi}_2(k) \right) \in L_k$ es el punto en que la linealización del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j; j = 1, 2$, tiene valores propios cuya suma de cocientes entre las partes real e imaginaria asociada a cada sub-sistema es cero, es decir $a(\widehat{\xi}_1(k), k) = \frac{a_1(\xi_1, k)}{b_1(\xi_1, k)} + \frac{a_2(\xi_1, k)}{b_2(\xi_{10}, k)} = 0$, y $p_1 \left(\lambda, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)}, 0 \right)$, $p_2 \left(\lambda, 0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_2)} \right)$ son los puntos extremos del segmento de equilibrios L_{kj} . Parametrizamos $L_{kj} = L_k; j = 1, 2$, por las funciones ϕ_{kj} del tipo (4.19). Se construye a continuación un homeomorfismo Ψ_{ks} entre los entornos tubulares $T_{M_{ks}}$ y $\tilde{T}_{\tilde{M}_{ks}}$ del segmento de equilibrios \bar{L}_{ksj} que deja invariante la frontera de conmutación π y lleva órbitas del sistema no suave (2.1) en órbitas del sistema no suave (4.2) preservando su orientación. Del Corolario 99, la aplicación $\widehat{T}_k : Z \rightarrow \tilde{T}_{\tilde{M}_k}$ es homeomorfismo y la vecindad $\tilde{V}_{\tilde{m}(s)} = \{ \widehat{T}_k(y_1, y_2, p) \in \text{Im } \widehat{T}_k : (y_1, y_2, p) \in Z_1; p = s \} \cup \{ \widehat{T}_k(y_1, y_2, p) \in \text{Im } \widehat{T}_k : (y_1, y_2, q) \in Z_2; q = \phi_{k2} \circ \phi_{k1}^{-1}(s) \}$, es un vecindad de la variedad invariante estable del sistema perturbado (4.2) que contiene el punto $\tilde{m}(S) = (\lambda, \xi_{1js}(k), \xi_{2js}(k))$, donde ϕ_{kj} es la parametrización (4.21) y el término *variedad invariante estable* significa en el caso del sistema no suave (4.2) que en el punto de equilibrio asociado a dicha variedad $\frac{a_1(\xi_1, k)}{b_1(\xi_1, k)} + \frac{a_2(\xi_1, k)}{b_2(\xi_{10}, k)} < 0$). Por lo tanto para establecer el homeomorfismo Ψ_{ks} basta con construir un homeomorfismo $\Gamma_{m(S)} : V_{m(S)} \rightarrow \tilde{V}_{\tilde{m}(S)}$ por cada $S \in [0, S_0]$, donde $V_{m(S)}$ es una vecindad de la variedad invariante estable del sistema no suave (2.1) que contiene el punto $m(S) = \tilde{m}(S) = (\lambda, \xi_{1js}(k), \xi_{2js}(k))$, ya que la aplicación $\Psi_k : V_{m(S)} \times [0, S_0] = T_{M_{ks}} \rightarrow \tilde{V}_{\tilde{m}(S)} \times [0, S_0] = \tilde{T}_{\tilde{M}_{ks}}$ definida por $\Psi_{ks}((s, x_1, x_2), S) = (\Gamma_{m(S)}(s, x_1, x_2), I_S(S))$, donde I_S es la función identidad, es claramente un homeomorfismo porque Γ_S e I_S son homeomorfismos. A continuación se construye el homeomorfismo $\Gamma_{m(S)} : V_{m(S)} \rightarrow \tilde{V}_{\tilde{m}(S)}$ el cual deja invariante la frontera de conmutación π y lleva órbitas del sistema no suave (2.1) en órbitas del sistema no suave (4.2) preservando su orientación. Si $a(\pi_1(m(S_{i_0})), k) < 0, S_{i_0} \in [0, S_0]$ entonces por la dependencia continua de los valores propios de la linealización de los

subsistemas del sistema no suave (4.2), véase Jacob Palis & Welington de Melo [50, Proposición 2.18], existe un entorno $V_{L_m(S_{i_0})}$ del punto $m(S_{i_0})$ con la topología inducida de L_k en la cual se tiene que $a(\pi_1(x), k) < 0$, con $x \in V_{L_m(S_{i_0})}$ y las singularidades $x \in V_{L_m(S_{i_0})}$ son del tipo hiperbólico excepto en un conjunto de medida cero (es decir, excepto en los puntos de L_k que satisfacen $a_1(\xi_1, k) = 0$, o $a_2(\xi_1, k) = 0$) con respecto a las variedades invariantes estables o inestables asociadas a estas singularidades en cada subsistema del sistema no suave (4.2), con lo cual los índices de los campos asociados a estos subsistemas del sistema no suave (4.2) sobre las variedades invariantes estables son iguales. Por consiguiente de Jacob Palis & Welington de Melo [50, Proposición 2.15] se tiene que los campos asociados a estos subsistemas perturbados sobre estas variedades invariantes estables son topológicamente equivalentes y también los campos del sistema no suave (4.2) perturbado sobre estas variedades invariantes estables como una consecuencia del Corolario 99. Luego existe $\forall m(S_1), m(S_2) \in V_{L_m(S_{i_0})}$ un homeomorfismo $T_{m(S_1)-m(S_2)} : \tilde{V}_{\tilde{m}(S_1)} \rightarrow \tilde{V}_{\tilde{m}(S_2)}$ llevando órbitas de $\tilde{V}_{\tilde{m}(S_1)}$ en órbitas de $\tilde{V}_{\tilde{m}(S_2)}$ del sistema (4.2) preservando su orientación. Además de la Proposición 98 y del Corolario 99, se tiene que las aplicaciones:

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{T}}_{k,m(s),j} & : (V_{j,m(s)}/T_{kj}(Z_{j,S})) = T_j(Z_{j,S}) \rightarrow (\tilde{V}_{j,\tilde{m}(s)}/\tilde{T}_{kj}(\tilde{Z}_{j,S})) = \tilde{T}_{kj}(\tilde{Z}_{j,S}), \\ \tilde{\tilde{T}}_{k,m(s),j} & = \tilde{\tilde{T}}_k/T_{kj}(Z_{j,S}); j = 1, 2, \end{aligned}$$

son también homeomorfismos entre los subdominios $T_{kj}(Z_{j,S})$ de $V_{j,m(s)}$ y $\tilde{T}_{kj}(\tilde{Z}_{j,S})$ de $\tilde{V}_{j,\tilde{m}(s)}$, ya que son la restricciones del homeomorfismo $\tilde{\tilde{T}}_k = (\tilde{\tilde{T}}_k \circ \hat{T}_k^{-1})$ a los subdominios cerrados $T_{kj}(Z_{j,S}); j = 1, 2$, donde $V_{j,m(s)}, \tilde{V}_{j,\tilde{m}(s)}$ son vecindades de las invariantes estables o inestables del subsistema del sistema no suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$ y del subsistema del sistema no suave (4.2) asociado al campo $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ respectivamente, que contienen el punto $m(S) = (\lambda, \xi_{1j_s}(k), \xi_{2j_s}(k)) \in V_{L_m(S_{i_0})}; j = 1, 2$, con

$$\begin{aligned} Z_{1,S} & = \{(y_1, y_2, p) \in Z : p = S; \pi_1 \circ T_{k1}(y_1, y_2, S) \leq \lambda\}, \\ Z_{2,S} & = \{(y_1, y_2, p) \in Z : p = S; \pi_1 \circ T_{k2}(y_1, y_2, S) \geq \lambda\}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_{1,S} &= \left\{ (y_1, y_2, p) \in Z : p = S; \pi_1 \circ \tilde{T}_{k1}(y_1, y_2, S) \leq \lambda \right\}, \\ \tilde{Z}_{2,j,S} &= \left\{ (y_1, y_2, p) \in Z : p = S; \pi_1 \circ \tilde{T}_{k2}(y_1, y_2, S) \geq \lambda \right\}.\end{aligned}$$

Además sobre estos subdominios $T_{kj}(Z_{j,S}); j = 1, 2$, los campos f_j y \tilde{f}_j son diferenciables y no conmutan sobre plano de discontinuidad π . Finalmente se define para $S_{i_0} \in [0, S_0]$ la aplicación $\Gamma_{k,m(S_{i_0})} : V_{m(S_{i_0})} \rightarrow \tilde{V}_{\tilde{m}(S_{i_0})}$ a partir de homeomorfismos del tipo $T_{m(S(x))-m(S_{i_0})}$ y $\tilde{T}_{k,m(s),j}$ definidos arriba, tal como sigue:

$$\begin{aligned}\Gamma_{k,m(S_{i_0})}(x) &= T_{k,m(S(x))-m(S_{i_0})} \circ \tilde{T}_{k,m(s(x)),j(x)}(x), \text{ donde} \\ j(x) &= \begin{cases} 1, & \text{si } \pi_1(x) \leq \lambda \\ 2, & \text{si } \pi_1(x) > \lambda, \end{cases} \\ m(S(x)) &= V_{m(S(x))} \cap L_k = \tilde{V}_{\tilde{m}(S(x))} \cap L_k.\end{aligned}$$

La aplicación $m(S(x))$ esta bien definida porque la variedad estable o inestable que contiene al punto x intersecta al segmento de equilibrios L_k en un único punto $m(S(x))$, ya que ésta es transversal a L_k . En lo que resta se demuestra que $\Gamma_{k,m(S_{i_0})}$ es un homeomorfismo con $S_{i_0} \in [0, S_0]$; para ello se demuestra en primer lugar que $\Gamma_{k,m(S_{i_0})}$ lleva las órbitas γ contenidas en el entorno $V_{m(S_{i_0})}$ del sistema no suave (2.1) en órbitas $\tilde{\gamma}$ contenidas en el entorno $\tilde{V}_{\tilde{m}(S_{i_0})}$ del sistema no suave (4.2) preservando su orientación. Como $V_{m(S_{i_0})}$ es una vecindad de la variedad invariante estable del sistema no suave (2.1) que contiene el punto $m(S_{i_0}) = \tilde{m}(S_{i_0}) = (\lambda, \xi_{1jS_{i_0}}(k), \xi_{2jS_{i_0}}(k))$, entonces $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = m(S_{i_0})$, donde x_i son las intersecciones sucesivas con el plano de discontinuidad π de la solución γ del sistema no suave (2.1) con condiciones iniciales en x_0 , luego $\gamma = \lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_n = \lim_{i \rightarrow \infty} \bigcup_{i=0}^n \gamma_{x_i, x_{i+1}} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \gamma_{x_i, x_{i+1}}$.

Además

$$\begin{aligned}\Gamma_{k,m(S_{i_0})}(\gamma_n) &= \Gamma_{k,m(S_{i_0})}\left(\bigcup_{i=0}^n \gamma_{x_i, x_{i+1}}\right) = \bigcup_{i=1}^n \Gamma_{k,m(S_{i_0})}(\gamma_{x_i, x_{i+1}}), \quad (4.36) \\ &= \bigcup_{i=1}^n T_{k,m(S(x_i)),j(x_i)-m(S_{i_0})} \circ \tilde{T}_{k,m(s(x_i)),j(x_i)}(\gamma_{x_i, x_{i+1}}), \\ \text{con } S_{i_0} &\in [0, S_0],\end{aligned}$$

ya que en $\gamma_{x_i, x_{i+1}}$ las funciones $m(S(x))$ y $j(x)$ son constantes, por consiguiente

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{k,m(S_{i_0})}(\gamma_n) &= \bigcup_{i=1}^n T_{k,m(S(x_i)),j(x_i)-m(S_{i_0})} \circ \tilde{\tilde{T}}_{k,m(s(x_i)),j(x_i)}(\gamma_{x_i, x_{i+1}}), \\
 &= \bigcup_{i=1}^n \gamma_{[T_{k,m(S(x_i)),j(x_i)-m(S_{i_0})} \circ \tilde{\tilde{T}}_{k,m(s(x_i)),j(x_i)}(\gamma_{x_i}), T_{k,m(S(x_{i+1})),j(x_{i+1})-m(S_{i_0})} \\
 &\quad \circ \tilde{\tilde{T}}_{k,m(s(x_{i+1})),j(x_{i+1})}(\gamma_{x_{i+1}})]}, \\
 &= \bigcup_{i=1}^n \gamma_{\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}} = \tilde{\gamma},
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

dado que $T_{k,m(S(x_i)),j(x_i)-m(S_{i_0})} \circ \tilde{\tilde{T}}_{k,m(s(x_i)),j(x_i)}(\gamma_{x_i, x_{i+1}})$ es la imagen de la curva $\gamma_{x_i, x_{i+1}}$ sobre el entorno del sistema perturbado $\tilde{V}_{\tilde{m}}(S_{i_0})$. Luego

$$\begin{aligned}
 \lim_{i \rightarrow \infty} \Gamma_{k,m(S_{i_0})}(\gamma_n) &= \lim_{i \rightarrow \infty} \bigcup_{i=1}^n T_{k,m(S(x_i)),j(x_i)-m(S_{i_0})} \circ \tilde{\tilde{T}}_{k,m(s(x_i)),j(x_i)}(\gamma_{x_i, x_{i+1}}) \\
 \Gamma_{k,m(S_{i_0})}(\text{Lim } \gamma_n) &= \lim_{i \rightarrow \infty} \bigcup_{i=1}^n \gamma_{[\alpha, \beta]} \\
 \Gamma_{m(S_{i_0})}(\gamma) &= \lim_{i \rightarrow \infty} \bigcup_{i=1}^n \gamma_{\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \gamma_{\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}} = \tilde{\gamma}, \text{ donde} \\
 \alpha &= T_{k,m(S(x_i)),j(x_i)-m(S_{i_0})} \circ \tilde{\tilde{T}}_{k,m(s(x_i)),j(x_i)}(\gamma_{x_i}), \\
 \beta &= T_{k,m(S(x_{i+1})),j(x_{i+1})-m(S_{i_0})} \circ \tilde{\tilde{T}}_{k,m(s(x_{i+1})),j(x_{i+1})}(\gamma_{x_{i+1}}),
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

ya que $\lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{x}_i = m(S_{i_0}) = \tilde{m}(S)$ existe por las mismas razones dadas arriba.

De (4.38) se observa que $T_{k,m(S_{i_0})}$ lleva las órbitas γ contenidas en el entorno $V_{m(S_{i_0})}$ del sistema no suave (2.1) en órbitas $\tilde{\gamma}$ contenidas en el entorno $\tilde{V}_{\tilde{m}}(S_{i_0})$ del sistema no suave (4.2) preservando su orientación. Además las órbitas γ particionan el entorno $V_{m(S_{i_0})}$ y también las órbitas $\tilde{\gamma}$ particionan el entorno $\tilde{V}_{\tilde{m}}(S_{i_0})$, luego de las observaciones anteriores se tiene que si $\gamma_1 \neq \gamma_2$, entonces $\Gamma_{k,m(S_{i_0})}(\gamma_1) \neq \Gamma_{k,m(S_{i_0})}(\gamma_2)$. Por lo tanto la inyectividad de la aplicación $\Gamma_{k,m(S_{i_0})}$ se tiene, si para cada órbita γ , la restricción $\Gamma_{k,m(S_{i_0})}|_{\gamma}$ es inyectiva; pero esto claramente se tiene por la condición $a(\pi_1(x), k) < 0$, ya que con cada conmutación el radio de la órbita γ decrece con respecto al segmento de equilibrios L_k , luego el radio de la órbita $\Gamma_{k,m(S_{i_0})}(\gamma) = \tilde{\gamma}$ decrece también con cada conmutación en cada entorno del sistemas perturbado, en particular sobre el entorno $V_{m(S_{i_0})}$ como consecuencia de los homeomorfismos

$T_{k,m(S_1)-m(S_2)}$, con lo cual la órbita $\tilde{\gamma}$ no tiene puntos en común sobre el entorno $V_{m(S_{i_0})}$, es decir $\Gamma_{k,m(S_{i_0})}(\gamma(t_1) = x_1) \neq \Gamma_{k,m(S_{i_0})}(\gamma(t_2) = x_2)$ si $\tilde{\gamma}(x_1) \neq \tilde{\gamma}(x_2)$. Dado que $T_{k,m(S_{i_0})}$ lleva las órbitas γ contenidas en el entorno $V_{m(S_{i_0})}$ del sistema no suave (2.1) en órbitas $\tilde{\gamma}$ contenidas en el entorno $\tilde{V}_{m(S_{i_0})}$ del sistema no suave (4.2). Para verificar la sobreyectividad basta mostrar que si $y \in \tilde{\gamma} \subset \tilde{V}_{\tilde{m}(S_{i_0})}$, entonces existe $x \in \gamma \subset V_{m(S_{i_0})}$ tal que $\Gamma_{k,m(S_{i_0})}(x) = y$. Sin pérdida de generalidad suponemos $y \in \tilde{\gamma} \cap \pi$ y $y \neq m(S_{i_0})$. Luego $\beta(s) = \tilde{T}_{k,m(S),j(y)}^{-1} \circ T_{k,m(S),j(y)-m(S_{i_0})}^{-1}(y)$ con $s \in [0, S_0]$ describe una curva continua contenida en un semiplano π_j de π , cuya distancia a L_k varía en el intervalo $[r_{y \min}, r_{y \max}]$, con $r_{y \min}, r_{y \max} > 0$, ya que por la Proposición 98, existen foliaciones continuas de los entornos tubulares $T_{M_{k_j}}$ y $\tilde{T}_{\tilde{M}_{k_j}}$ del segmento de equilibrios L_k de los sistemas generados por los campos f_j y \tilde{f}_j respectivamente, por variedades invariantes estables e inestables. También $\alpha = V_{m(S_{i_0})} \cap \pi_j$ es una curva continua creciente contenida en el plano π_j , cuya distancia a L_k varía en el intervalo $[0, r_{\max}]$, con $r_{\max} > r_{y \max}$, cuando $s \in [0, S_0]$, puesto que $\beta(s)$ es un punto interior de $\tilde{V}_{\tilde{m}(S)}$, con $s \in [0, S_0]$. Luego por continuidad existe un único $x \in \alpha \cap \beta$, teniéndose que $\Gamma_{k,m(S_{i_0})}(x) = y$ por construcción, con lo cual termina la prueba de que $\Gamma_{m(S_{i_0})}$ es sobre.

Finalmente se muestra que la aplicación $\Gamma_{k,m(S_{i_0})} : V_{m(S_{i_0})} \rightarrow \tilde{V}_{\tilde{m}(S_{i_0})}$ es continua con inversa continua como consecuencia del Lema de Encolado (Glueing Lemma), véase Armstrong [3, pp 79]. Como $V_{m(S_{i_0})} = \bigcup_{\gamma \in V_{m(S_{i_0})}} \gamma_{x_i, x_{i+1}}$, entonces

$$\Gamma_{k,m(S_{i_0})} : V_{m(S_{i_0})} = \bigcup_{\gamma \in V_{m(S_{i_0})}} \gamma_{x_i, x_{i+1}} \rightarrow \tilde{V}_{\tilde{m}(S_{i_0})},$$

luego la aplicación $\Gamma_{k,m(S_{i_0})}$ se puede descomponer en

$$\Gamma_{k,m(S_{i_0})} = \bigcup_{\gamma \in V_{m(S_{i_0})}} \Gamma_{k,m(S_{i_0})}|_{\gamma_{x_i, x_{i+1}}},$$

satisfaciendo la condición de pegado

$$\Gamma_{k,m(S_{i_0})}|_{\gamma_{x_i, x_{i+1}}}(x_{i+1}) = \Gamma_{m(S_{i_0})}|_{\gamma_{x_{i+1}, x_{i+2}}}(x_{i+1});$$

además las restricciones $\Gamma_{k,m(S_{i_0})}|_{\gamma_{x_i, x_{i+1}}}$ son homeomorfismos por ser composición de homeomorfismos. Sea $j : \bigoplus \gamma_{x_i, x_{i+1}} \rightarrow \bigcup_{\gamma \in V_{m(S_{i_0})}} \gamma_{x_i, x_{i+1}}$, la aplicación que restringida

a cada $\gamma_{x_i, x_{i+1}}$ es la inclusión en $\bigcup_{\gamma \in V_m(S_{i_0})} \gamma_{x_i, x_{i+1}}$, donde $\bigoplus \gamma_{x_i, x_{i+1}}$ es la unión disyunta de los espacios $\gamma_{x_i, x_{i+1}}$ con la topología de la identificación para las inclusiones $i_{x_i, x_{i+1}} : \gamma_{x_i, x_{i+1}} \rightarrow \bigoplus \gamma_{x_i, x_{i+1}}$, es una aplicación de identificación por ser j una función continua sobreyectiva y cerrada, véase Armstrong [3, Teorema 4.3, pp 76]. A continuación se justifica la afirmación anterior; como $j \circ i_{x_i, x_{i+1}} = \Gamma_{m(S_{i_0})}|_{\gamma_{x_i, x_{i+1}}}$ para todo $i \in I$, entonces la función j es continua por ser, la familia de funciones $\Gamma_{m(S_{i_0})}|_{\gamma_{x_i, x_{i+1}}}$ continuas. La función j es cerrada, ya que si $C = \sum_{k \in I} c_k$ es un cerrado de $\bigoplus \gamma_{x_i, x_{i+1}}$, donde c_k es cerrado con la topología inducida, entonces $j(C) \cap \gamma_{x_k, x_{k+1}} = \bigcup_{i \in I} (C_i \cap \gamma_{x_i, x_{i+1}} \cap \gamma_{x_k, x_{k+1}})$, donde C_i es un cerrado de $\bigcup_{\gamma \in V_m(S_{i_0})} \gamma_{x_i, x_{i+1}}$. Dado que $\gamma_{x_k, x_{k+1}}$ sólo intersecta a $\gamma_{x_k, x_{k+1}}$ y $\gamma_{x_{k+1}, x_{k+2}}$ en $\bigcup_{\gamma \in V_m(S_{i_0})} \gamma_{x_i, x_{i+1}}$, entonces

$$\begin{aligned} j(C) \cap \gamma_{x_k, x_{k+1}} &= \bigcup_{i \in I} (C_i \cap \gamma_{x_i, x_{i+1}} \cap \gamma_{x_k, x_{k+1}}) \\ &= (\gamma_{x_k, x_{k+1}} \cap \gamma_{x_k, x_{k+1}}) \cup (\gamma_{x_{k-1}, x_k} \cap \gamma_{x_k, x_{k+1}}) \cup (\gamma_{x_{k+1}, x_{k+2}} \cap \gamma_{x_k, x_{k+1}}) \\ &= \gamma_{x_k, x_{k+1}} \cup \{x_k\} \cup \{x_{k+1}\}. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Como $\gamma_{x_k, x_{k+1}}$, $k \in I$ es un espacio Hausdorff, por lo tanto $\{x_k\} \cup \{x_{k+1}\}$ es un cerrado de $\gamma_{x_k, x_{k+1}}$ para todo $k \in I$, luego se concluye que $j(C)$ es un cerrado de $\bigcup_{\gamma \in V_m(S_{i_0})} \gamma_{x_i, x_{i+1}}$, lo cual demuestra que la aplicación j es una aplicación cerrada. Por consiguiente se concluye que la aplicación $\Gamma_{k, m(S_{i_0})}$ es continua como consecuencia del Lema del Encolado (Glueing Lemma), ver Armstrong [3, pp 79]. De manera análoga se verifica la continuidad de la aplicación inversa de $\Gamma_{k, m(S_{i_0})}$ y por lo tanto $\Gamma_{k, m(S_{i_0})}$ es un homeomorfismo, y se completa la prueba de que $\Psi_{ks} : V_m(S) \times [0, S_0] = T_{M_k} \rightarrow \tilde{V}_{\tilde{m}(S)} \times [0, S_0] = \tilde{T}_{\tilde{M}_k}$ es homeomorfismo.

El homeomorfismo Ψ_{ku} en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k , donde es válida la condición $a(\xi_1, k) = \frac{a_1(\xi_1, k)}{b_1(\xi_1, k)} + \frac{a_2(\xi_1, k)}{b_2(\xi_1, k)} > 0$, se construye de forma similar al caso anterior como consecuencia del Corolario 96 y la Proposición 98, teniendo en cuenta la existencia de los flujo reversos $\varphi_k(-t, x)$ y $\tilde{\varphi}_k(-t, x)$ del sistema no suave (2.1) y del sistema no suave (4.2) en cada una de las variedades invariantes inestable de L_k , ya que $\lim_{i \rightarrow -\infty} \varphi_k(-t, x) = \tilde{\varphi}_k(-t, \tilde{x}) = \lim_{i \rightarrow -\infty} x_i = \lim_{i \rightarrow -\infty} \tilde{x}_i = m(S_{i_0})$ como

consecuencia de que los campos son continuos a tramos en t , localmente Lipschitz en x para $t \in (-\infty, 0]$, y además para toda $x \in T_{M_k}$ y $\tilde{x} \in \tilde{T}_{\tilde{M}_k}$ se tiene que las órbitas x_i, \tilde{x}_i permanecen enteramente en los compactos T_{M_k} y $\tilde{T}_{\tilde{M}_k}$ respectivamente, véase Hassan K. [42, Teorema 3.3]. Finalmente dado que para $k > k_{\min}$, sólo existe a lo sumo un punto x sobre L_k , donde $a(\xi_1, k) = 0$, siguiendo un procedimiento análogo al utilizado en la Proposición 98, en cuanto a la construcción de los conjuntos de medida arbitrariamente pequeña $T_{M_{j_\varepsilon}}, \tilde{T}_{\tilde{M}_{j_\varepsilon}}$, se tiene la afirmación de la equivalencia topológica $\Psi_k : V_{m(S)} \times [0, S_0] = T_{M_k} \rightarrow \tilde{V}_{\tilde{m}(S)} \times [0, S_0] = \tilde{T}_{\tilde{M}_k}$ entre los dos sistemas restringidos a los entornos tubulares de T_{M_k} del espacio de estados del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$ y del entorno tubular $\tilde{T}_{\tilde{M}_k}$ del espacio de estados del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(\bar{s}, \bar{x}_1, \bar{x}_2)$ alrededor del segmento de equilibrios de L_k , excepto en un conjunto de medida cero. \square

4.4 Pérdida de atractividad y estabilidad del segmento de equilibrios L_k

En esta sección se trata la pérdida de atractividad del segmento de equilibrios L_k con $k \in (k_{\min}, k_{\max})$ del sistema no suave (2.1) generado por los campos $f_j, j = 1, 2$, la cual depende de la evolución de las componentes real e imaginaria de los valores propios u_{1j} y u_{2j} (ver Definición 3.6) de los subsistemas del sistema no suave (2.1) asociados a los campos $f_j(s, x_1, x_2), j = 1, 2$, linealizados en puntos de L_k , la cual puede ser expresada por la evolución de la *función de estabilidad* $a(\xi_1, k) = \frac{a_1(\xi_1, k)}{b_1(\xi_1, k)} + \frac{a_2(\xi_1, k)}{b_2(\xi_1, k)}$, como consecuencia del Teorema 27 (véase Freire E. Ponce E. & Torres F. [38]; Camlibel [8], Olivar & Angulo [77]); La Proposición 98 y los Corolarios 96, 99, 101.

Antes de abordar el estudio analítico de la función $a(\xi_1, k)$ nosotros imponemos la restricción de que los subsistemas del sistema no suave (2.1) asociados a los campos $f_j(s, x_1, x_2), j = 1, 2$, sean del mismo tipo o parcialmente del mismo tipo en el sentido de la Definición 48, lo cual viene sugerido por los resultados de las simulaciones

realizadas, ya que estos sistemas presentan mejor comportamiento en cuanto a la formación de la bifurcación zip. La restricción anterior forma parte de las condiciones suficientes que se imponen al sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, $j = 1, 2$, para demostrar la ocurrencia de la bifurcación de zip. Las observaciones anteriores motivan las siguientes definiciones.

Definición 102 *Asuma que el sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$; $j=1,2$, satisface las condiciones (2.8) a (2.15a) y (2.20) a (2.23), y adicionalmente que sus subsistemas satisfacen los productos $m_1m_2 > 0$, y $A_1A_2 > 0$, entonces se dice que el sistema no suave (2.1) es **parcialmente del mismo tipo**.*

Definición 103 *Si el sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, $j = 1, 2$, satisface las condiciones (2.8) a (2.19) y (2.20) a (2.23), y adicionalmente que sus subsistemas satisfacen el producto $m_1m_2 > 0$, entonces se dice que es un sistema no suave **natural, artificial o degenerado** si y sólo si $m_j > 0, m_j < 0$, o $m_j = 0$, respectivamente.*

Definición 104 *Si el sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, $j = 1, 2$, satisface las condiciones (2.8) a (2.15a) y (2.20) a (2.23), y adicionalmente sus subsistemas son del tipo 1A, 1B, 2, 3 o 4 de acuerdo con la Definición 48, entonces se dice que el sistema no suave (2.1) es **completamente del tipo (o del tipo) 1A, 1B, 2, 3 o 4**, respectivamente.*

A continuación se establecen condiciones para que el sistema no suave (2.1) generado por los campos f_j , $j = 1, 2$, sea **parcialmente del mismo tipo** en el sentido de la Definición 48 y también se presentan condiciones para determinar el orden relativo de los puntos de bifurcación k_{cij} , $c = a, b; i, j = 1, 2$, que son homólogos en los subsistemas del sistema no suave (2.1) asociados a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, $j = 1, 2$, entendiéndose por puntos de bifurcación homólogos aquellos que poseen los dos primeros subíndices iguales y el tercero diferente.

Lema 105 Si los subsistemas del sistema no suave (2.1) asociados a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$ satisfacen la condición (4.7) de la Proposición 86, entonces se tiene:

i) $m_1 = \frac{\partial_s p_1(\lambda, a_1)}{\partial_s p_2(\lambda, a_1)} m_2.$

ii) $A_1 = \frac{\partial_s p_1(\lambda, a_1)}{\partial_s p_2(\lambda, a_1)} A_2.$

iii) Si $\partial_s p_1(\lambda, a_1) < \partial_s p_2(\lambda, a_1)$, entonces $c_2(k, a_2) < c_1(k, a_2)$, y $k_{a21} < k_{a22}$.

iv) Si $\partial_s p_2(\lambda, a_1) < \partial_s p_1(\lambda, a_1)$, entonces $c_1(k, a_2) < c_2(k, a_2)$, y $k_{a22} < k_{a21}$.

v) Si $\partial_s p_1(\lambda, a_1) < \partial_s p_2(\lambda, a_1)$, y $\left(\frac{c_1(k_{b21}) + c_2(k_{b21})}{2p(\lambda, a_2)} + 1\right) > 0$, entonces $k_{b22} < k_{b21}$.

vi) Si $\partial_s p_2(\lambda, a_1) < \partial_s p_1(\lambda, a_1)$, y $\left(\frac{c_1(k_{b21}) + c_2(k_{b21})}{2p(\lambda, a_2)} + 1\right) > 0$, entonces $k_{b21} < k_{b22}$.

Prueba: i) Por la definición de m_j se tiene

$$m_j = \frac{p(\lambda, a_1) \partial_s p_j(\lambda, a_2) - p(\lambda, a_2) \partial_s p_j(\lambda, a_1)}{2p(\lambda, a_2)}. \quad (4.40)$$

Sustituyendo (4.7) en (4.40) se obtiene la afirmación i), ya que

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{p(\lambda, a_1) \partial_s p_2(\lambda, a_2) \partial_s p_1(\lambda, a_1) - p(\lambda, a_2) \partial_s p_2(\lambda, a_1) \partial_s p_1(\lambda, a_1)}{2p(\lambda, a_2) \partial_s p_2(\lambda, a_1)} \\ &= \frac{\partial_s p_1(\lambda, a_1)}{\partial_s p_2(\lambda, a_1)} \left(\frac{p(\lambda, a_1) \partial_s p_2(\lambda, a_2) - p(\lambda, a_2) \partial_s p_2(\lambda, a_1)}{2p(\lambda, a_2) \partial_s p_2(\lambda, a_1)} \right) \\ &= \frac{\partial_s p_1(\lambda, a_1)}{\partial_s p_2(\lambda, a_1)} m_2. \end{aligned}$$

ii) Por la definición de A_j se tiene

$$A_j = p(\lambda, a_1) (\partial_s p_j(\lambda, a_1) - \partial_s p_j(\lambda, a_2)). \quad (4.41)$$

Sustituyendo (4.7) en (4.41) se tiene

$$\begin{aligned} A_1 &= p(\lambda, a_1) \left(\frac{\partial_s p_2(\lambda, a_1) \partial_s p_1(\lambda, a_2)}{\partial_s p_2(\lambda, a_2)} - \partial_s p_1(\lambda, a_2) \right) \\ &= \frac{p(\lambda, a_1) (\partial_s p_2(\lambda, a_1) \partial_s p_1(\lambda, a_2) - \partial_s p_2(\lambda, a_2) \partial_s p_1(\lambda, a_2))}{\partial_s p_2(\lambda, a_2)} \\ &= \frac{\partial_s p_1(\lambda, a_2) (p(\lambda, a_1) (\partial_s p_2(\lambda, a_1) - \partial_s p_2(\lambda, a_2)))}{\partial_s p_2(\lambda, a_2)} \\ &= \frac{\partial_s p_1(\lambda, a_1)}{\partial_s p_2(\lambda, a_1)} A_2, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene aplicando la condición (4.7) de nuevo.

iii) Teniendo en cuenta la Definición 3.8, se tiene

$$c_2(k, a_2) - c_1(k, a_2) = \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)(\partial_s p_1(\lambda, a_2) - \partial_s p_2(\lambda, a_2))}{2p(\lambda, a_2)} < 0; \quad (4.42)$$

ya que $\partial_s p_1(\lambda, a_2) < \partial_s p_2(\lambda, a_2)$ por hipótesis, por lo tanto $c_2(k, a_2) < c_1(k, a_2)$ y $c_2(k_{a21}, a_2) < c_1(k_{a21}, a_2) = 0$. De la desigualdad anterior se concluye que $k_{a21} < k_{a22}$, ya que $c_j(k, a_2)$ es creciente en la variable k .

iv) De la expresión (4.42) se tiene $c_1(k, a_2) < c_2(k, a_2)$, porque $\partial_s p_2(\lambda, a_2) < \partial_s p_1(\lambda, a_2)$ por hipótesis. Como

$$c_1(k_{a22}, a_2) < c_2(k_{a22}, a_2) = 0,$$

entonces $k_{a22} < k_{a21}$, ya que $c_j(k, a_2)$ es creciente en la variable k .

v) De (3.13) y (3.14) se obtiene

$$b_2(0, k) - b_1(0, k) = c_1^2(k) - c_2^2(k) + \gamma \lambda g(\lambda, k)(\partial_s p_2(\lambda, a_2) - \partial_s p_1(\lambda, a_2)), \quad (4.43)$$

sustituyendo (4.42) en (4.43) se obtiene

$$b_2(0, k) - b_1(0, k) = \gamma \lambda g(\lambda, k)(\partial_s p_2(\lambda, a_2) - \partial_s p_1(\lambda, a_2)) \left(\frac{c_1(k) + c_2(k)}{2p(\lambda, a_2)} - 1 \right), \quad (4.44)$$

y teniendo en cuenta la hipótesis se tiene

$$\begin{aligned} b_2(0, k_{b21}) - b_1(0, k_{b21}) &= \gamma \lambda g(\lambda, k_{b21})(\partial_s p_2(\lambda, a_2) - \partial_s p_1(\lambda, a_2)) \\ &\quad \left(\frac{c_1(k_{b21}) + c_2(k_{b21})}{2p(\lambda, a_2)} - 1 \right) > 0. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Como $b_1(0, k_{b21}) = 0$, luego se deduce de (4.44) que $b_2(0, k_{b21}) > 0$. Como b_2 es creciente en k y $b_2(0, k_{b22}) = 0$, por la Definición 41, entonces $k_{b22} < k_{b21}$.

vi) Es consecuencia inmediata de v). \square

Observación 106 *Note que si el sistema no suave (2.1) satisface la condición de existencia de la variedad invariante (4.7) y el subsistema del sistema no suave (2.1) asociado al campo $f_1(s, x_1, x_2)$, es natural, artificial o degenerado entonces el subsistema del sistema (2.1) asociado al campo $f_2(s, x_1, x_2)$, es natural, artificial o degenerado respectivamente como consecuencia de la parte i) del Lema 105.*

Observación 107 De la parte i) y ii) del Lema 105, se sigue que si el sistema no suave (2.1) satisface la condición de existencia de la variedad invariante (4.7), entonces sus subsistemas son **parcialmente del mismo tipo**; sin embargo existen sistemas no suaves que tienen sus subsistemas son **parcialmente del mismo tipo** y no satisfacen la condición de la variedad invariante (4.7), los cuales serán tratados en el Capítulo 5.

Observación 108 De la Definición 104, se sigue que los sistemas no suaves (2.1) del tipo 1B y del tipo 3 son, **parcialmente del mismo tipo**, así mismo, los sistemas no suaves (2.1) del tipo 2 y del tipo 4 son **parcialmente del mismo tipo**.

A continuación se establecen condiciones para que el sistema no suave (2.1) generado por los campos f_j , $j = 1, 2$, sea **completamente del tipo 1A, 1B, 2, 3** o 4, respectivamente en el sentido de la Definición 48. Los ejemplos presentados en el Capítulo de simulación numérica que exhiben bifurcación de zip no suave tienen de hecho sus subsistemas del **mismo tipo**.

Proposición 109 Si los subsistemas del sistema no suave (2.1) asociados a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, $j = 1, 2$, satisfacen la condición (4.7) de la Proposición 86, entonces se tienen las siguientes afirmaciones:

i) Si el subsistema del sistema no suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$, es del tipo 1A, entonces el subsistema del sistema no suave (2.1) asociado al campo $f_i(s, x_1, x_2)$ es del tipo 1A, donde $i, j = 1, 2; i \neq j$.

ii) Asuma que $\partial_s p_j(\lambda, a_1) < \partial_s p_i(\lambda, a_1)$ y $\left(\frac{c_1(kb_{2j}) + c_2(kb_{2j})}{2p(\lambda, a_2)} + 1 \right) > 0$, donde $i, j = 1, 2; i \neq j$. Si el subsistema del sistema no suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$, es del tipo 1B, entonces el subsistema del sistema no suave (2.1) asociado al campo $f_i(s, x_1, x_2)$, es del tipo 1B.

iii) Asuma que $\partial_s p_i(\lambda, a_1) < \partial_s p_j(\lambda, a_1)$ y $\left(\frac{c_1(kb_{2j}) + c_2(kb_{2j})}{2p(\lambda, a_2)} + 1 \right) > 0$, donde $i, j = 1, 2; i \neq j$. Si el subsistema del sistema no suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$,

es del tipo 2, entonces el subsistema del sistema no suave (2.1) asociado al campo $f_i(s, x_1, x_2)$, es del tipo 2.

iv) Asuma que $\partial_s p_i(\lambda, a_1) < \partial_s p_j(\lambda, a_1)$ y $\left(\frac{c_1(kb_{2j})+c_2(kb_{2j})}{2p(\lambda, a_2)} + 1\right) > 0$, donde $i, j = 1, 2; i \neq j$. Si el subsistema del sistema no suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$, es del tipo 3, entonces el subsistema del sistema no suave (2.1) asociado al campo $f_i(s, x_1, x_2)$, es del tipo 3.

v) Asuma que $\partial_s p_j(\lambda, a_1) < \partial_s p_i(\lambda, a_1)$ y $\left(\frac{c_1(kb_{2j})+c_2(kb_{2j})}{2p(\lambda, a_2)} + 1\right) > 0$, donde $i, j = 1, 2; i \neq j$. Si el subsistema del sistema no suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$, es del tipo 4, entonces el subsistema del sistema no suave (2.1) asociado al campo $f_i(s, x_1, x_2)$, es del tipo 4.

Prueba: i) Por hipótesis $A_j < 0, m_j < 0$, y $A_j - 2m_j c_j(kb_{2j}, a_2) < 0$. Así de la parte i) y ii) del Lema 105, se tiene que $A_i < 0, m_i < 0$. Sólo resta mostrar que $A_i - 2m_i c_i(kb_{2i}, a_2) < 0$. De la Observación 43, se tiene que $k_{b_{2i}} < k_{a_{2i}}$ por lo cual $c_i(k_{b_{2i}}, a_2) < 0$, ya que $c_i(k, a_2)$ es creciente en la variable k y $c_i(k_{a_{2i}}, a_2) = 0$, por la Definición 37. Así que $A_i - 2m_i c_i(kb_{2i}, a_2) < 0$, con lo cual se tiene la afirmación i).

ii) Por hipótesis $A_j > 0, m_j < 0$, y $A_j - 2m_j c_j(kb_{2j}, a_2) < 0$. Así de la parte i) y ii) del Lema 105, se tiene que $A_i > 0, m_i < 0$, y

$$A_i - 2m_i c_i(k, a_2) = \frac{\partial_s p_i(k, a_1)}{\partial_s p_j(k, a_1)} (A_j - 2m_j c_j(k, a_2)). \quad (4.46)$$

Sólo resta mostrar que $A_i - 2m_i c_i(kb_{2i}, a_2) < 0$. De la parte iii) del Lema 105, y la igualdad (4.46) se tiene que

$$\begin{aligned} A_i - 2m_i c_i(kb_{2i}, a_2) &= \frac{\partial_s p_i(\lambda, a_1)}{\partial_s p_j(\lambda, a_1)} (A_j - 2m_j c_j(kb_{2i}, a_2)) \\ &< \frac{\partial_s p_i(\lambda, a_1)}{\partial_s p_j(\lambda, a_1)} (A_j - 2m_j c_j(kb_{2i}, a_2)). \end{aligned} \quad (4.47)$$

De la parte vi) del Lema 105, se tiene $k_{b_{2i}} < k_{b_{2j}}$, lo que implica que

$$A_i - 2m_i c_i(kb_{2i}, a_2) < \frac{\partial_s p_i(\lambda, a_1)}{\partial_s p_j(\lambda, a_1)} (A_j - 2m_j c_j(kb_{2j}, a_2)), \quad (4.48)$$

luego de (4.48) se tiene $A_i - 2m_i c_i(kb_{2i}, a_2) < 0$, ya que $\partial_s p_j(k, a_1), \partial_s p_i(k, a_1) > 0$, y $(A_j - 2m_j c_j(kb_{2j}, a_2)) < 0$, con lo cual queda probado iii).

iii) Por hipótesis $A_j < 0, m_j > 0$, y $A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2) < 0$. Así de la parte i) y ii) del Lema 105, se tiene que $A_i < 0, m_i > 0$, y

$$A_i - 2m_i c_i(k, a_2) = \frac{\partial_s p_i(k, a_1)}{\partial_s p_j(k, a_1)} (A_j - 2m_j c_j(k, a_2)). \quad (4.49)$$

Sólo resta mostrar que $A_i - 2m_i c_i(k_{b2i}, a_2) < 0$. De la parte iii) del Lema 105, y de la igualdad (4.49) se obtiene

$$\begin{aligned} A_i - 2m_i c_i(k_{b2i}, a_2) &= \frac{\partial_s p_i(\lambda, a_1)}{\partial_s p_j(\lambda, a_1)} (A_j - 2m_j c_j(k_{b2i}, a_2)) \\ &< \frac{\partial_s p_i(\lambda, a_1)}{\partial_s p_j(\lambda, a_1)} (A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2)). \end{aligned} \quad (4.50)$$

Por la parte vi) del Lema 105, se tiene $k_{b2j} < k_{b2i}$, lo que implica que

$$A_i - 2m_i c_i(k_{b2i}, a_2) < \frac{\partial_s p_i(\lambda, a_1)}{\partial_s p_j(\lambda, a_1)} (A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2)), \quad (4.51)$$

luego de (4.51) se tiene $A_i - 2m_i c_i(k_{b2i}, a_2) < 0$, ya que $\partial_s p_j(\lambda, a_1), \partial_s p_i(\lambda, a_1) > 0$, y $(A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2)) < 0$, con lo cual queda probado v).

iv) Por hipótesis $A_j > 0, m_j < 0$, y $A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2) > 0$. Así de la parte i) y ii) del Lema 105, se tiene que $A_i > 0, m_i < 0$, y

$$A_i - 2m_i c_i(k, a_2) = \frac{\partial_s p_i(k, a_1)}{\partial_s p_j(k, a_1)} (A_j - 2m_j c_j(k, a_2)). \quad (4.52)$$

Sólo resta mostrar que $A_i - 2m_i c_i(k_{b2i}, a_2) > 0$. De la parte iv) del Lema 105, y de la igualdad (4.52) se tiene que

$$\begin{aligned} A_i - 2m_i c_i(k_{b2i}, a_2) &= \frac{\partial_s p_i(\lambda, a_1)}{\partial_s p_j(\lambda, a_1)} (A_j - 2m_j c_j(k_{b2i}, a_2)) \\ &> \frac{\partial_s p_i(\lambda, a_1)}{\partial_s p_j(\lambda, a_1)} (A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2)). \end{aligned} \quad (4.53)$$

Por la parte vi) del Lema 105 se tiene $k_{b2j} < k_{b2i}$, lo que implica que

$$A_i - 2m_i c_i(k_{b2i}, a_2) > \frac{\partial_s p_i(\lambda, a_1)}{\partial_s p_j(\lambda, a_1)} (A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2)), \quad (4.54)$$

luego de (4.54) se tiene $A_i - 2m_i c_i(k_{b2i}, a_2) > 0$, ya que $\partial_s p_j(\lambda, a_1), \partial_s p_i(\lambda, a_1) > 0$, y $(A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2)) > 0$, con lo cual se tiene la afirmación vii).

v) Por hipótesis $A_j < 0, m_j > 0$, y $A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2) > 0$. Así de la parte i) y ii) del Lema 105, se tiene que $A_i < 0, m_i > 0$, y

$$A_i - 2m_i c_i(k, a_2) = \frac{\partial_s p_i(k, a_1)}{\partial_s p_j(k, a_1)} (A_j - 2m_j c_j(k, a_2)). \quad (4.55)$$

Sólo resta mostrar que $A_i - 2m_i c_i(k_{b2i}, a_2) > 0$. De la parte iii) del Lema 105, y de (4.55), se tiene que

$$\begin{aligned} A_i - 2m_i c_i(k_{b2i}, a_2) &= \frac{\partial_s p_i(\lambda, a_1)}{\partial_s p_j(\lambda, a_1)} (A_j - 2m_j c_j(k_{b2i}, a_2)) \\ &> \frac{\partial_s p_i(\lambda, a_1)}{\partial_s p_j(\lambda, a_1)} (A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2)). \end{aligned} \quad (4.56)$$

Por la parte v) del Lema 105 se tiene $k_{b2i} < k_{b2j}$, lo que implica que

$$A_i - 2m_i c_i(k_{b2i}, a_2) > \frac{\partial_s p_i(\lambda, a_1)}{\partial_s p_j(\lambda, a_1)} (A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2)), \quad (4.57)$$

luego de (4.57) se tiene $A_i - 2m_i c_i(k_{b2i}, a_2) > 0$, ya que $\partial_s p_j(\lambda, a_1), \partial_s p_i(\lambda, a_1) > 0$, y $(A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2)) > 0$, con lo cual se prueba ix). \square

A continuación se establece condiciones de *compatibilidad entre los dominios de bifurcación* $(k_{a \min j}, k_{a \max j})$, de los subsistemas del sistema no suave (2.1) asociados a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, $j = 1, 2$, para garantizar un comportamiento monótono de la función $a(\xi_1, k)$ con respecto a la variable ξ_1 , en el sistema no suave (2.1) asociados a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, $j = 1, 2$, para $k \in (\bar{k}_{\min}, \bar{k}_{a \max})$. Se observa que estas condiciones son necesarias en el sentido que existen sistemas del tipo no suave (2.1) que no satisfacen dicha propiedad de monotonía para la función $a(\xi_1, k)$.

Definición 110 *Asuma que el sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$ es parcialmente del mismo tipo de acuerdo a la Definición 102, satisface las condiciones (2.8) a (2.15a) y (2.20) a (2.23), y verifica las siguientes condiciones*

$$\begin{aligned} \partial_s p_i(\lambda, a_2) &< \partial_s p_j(\lambda, a_2); \quad i, j = 1, 2; i \neq j, \\ \bar{k}_{b \max} &< \bar{k}_{a \min}. \end{aligned}$$

Entonces si el sistema no suave (2.1) es un:

$$\frac{c_i(k_{a \max}, a_2)}{m_i} + \frac{2\gamma\lambda g(\lambda, k_{a \max})}{p_i(\lambda, a_1)} \frac{1}{1 - \frac{\partial_s p_i(\lambda, a_1)}{\partial_s p_i(\lambda, a_2)}} > \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k_{a \max})}{p_i(\lambda, a_1)},$$

o un modelo del tipo 1B o 3 y satisface la condición

$$\frac{c_j(k_{a \min}, a_2)}{m_j} + \frac{2\gamma\lambda g(\lambda, k_{a \min})}{p_j(\lambda, a_1)} \frac{1}{1 - \frac{\partial_s p_j(\lambda, a_1)}{\partial_s p_j(\lambda, a_2)}} < 0,$$

o un modelo es del tipo 2 o 4 y satisface la condición

$$\frac{c_j(k_{a \min}, a_2)}{m_j} + \frac{2\gamma\lambda g(\lambda, k_{a \min})}{p_j(\lambda, a_1)} \frac{1}{1 - \frac{\partial_s p_j(\lambda, a_1)}{\partial_s p_j(\lambda, a_2)}} > \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k_{a \min})}{p_j(\lambda, a_1)},$$

se dice que él satisface la **condición de compatibilidad de dominios**.

A continuación se demuestran las propiedades de monotonía de la función $a(\xi_1, k)$ las cuales serán utilizadas más adelante en la prueba del teorema de existencia de bifurcación de zip no suave y de Hopf-Zou & Küpper en el sistema no suave (2.1).

Lema 111 Si el sistema no suave (2.1) asociados a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$ satisface la condición de compatibilidad de dominios de la Definición 110, entonces:

i) $a(\xi_1, k) = \frac{a_1(\xi_1, k)}{b_1(\xi_1, k)} + \frac{a_2(\xi_1, k)}{b_2(\xi_1, k)}$ es creciente o decreciente con respecto a la variable ξ_1 , para $(\xi_1, k) \in [0, \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}] \times (k_{a \min}, k_{a \max})$, si $m_j > 0$, o $m_j < 0$, respectivamente. Si $m_j = 0$, y $A_j = 0$, entonces $a(\xi_1, k)$ es constante con respecto de la variable ξ_1 .

ii) $a(\xi_1, k)$ es creciente con respecto al parámetro k , para $(\xi_1, k) \in \overline{D}(a) \cap [0, \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}] \times (k_{\min}, k_{\max})$ de acuerdo con la Definición 89. Además para cada $\xi_1 \in [0, \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}]$, existe un único $\overline{\overline{k}}(\xi_1) \in (\overline{k}_{a \min}(\xi_1), \overline{k}_{a \max}(\xi_1))$, tal que $a(\xi_1, \overline{\overline{k}}(\xi_1)) = 0$.

Prueba i) Como

$$\begin{aligned} \partial_{\xi_1} a(\xi_1, k) &= \partial_{\xi_1} \left(\frac{a_1(\xi_1, k)b_2(\xi_1, k) + a_2(\xi_1, k)b_1(\xi_1, k)}{b_1(\xi_1, k)b_2(\xi_1, k)} \right) \\ &= \left[\begin{array}{c} b_1 b_2 (a_1 \partial_{\xi_1} b_2 + b_2 \partial_{\xi_1} a_1 + a_2 \partial_{\xi_1} b_1 + b_1 \partial_{\xi_1} a_2) \\ - (a_1 b_2 + a_2 b_1) (b_1 \partial_{\xi_1} b_2 + b_2 \partial_{\xi_1} b_1) \end{array} \right] \div (b_1 b_2)^2 \\ &= [b_2 b_2 (b_1 \partial_{\xi_1} a_1 - a_1 \partial_{\xi_1} b_1) + b_1 b_1 (b_2 \partial_{\xi_1} a_2 - a_2 \partial_{\xi_1} b_2)] \div (b_1 b_2)^2, \end{aligned}$$

y además $b_2(\xi_1, k) > 0$, y $b_1(\xi_1, k) > 0$, entonces se concluye la afirmación i) si se tiene que

$$\partial_{\xi_1} a(\xi_1, k) \leq 0, \text{ si } (b_j \partial_{\xi_1} a_j - a_j \partial_{\xi_1} b_j) \leq 0, j = 1, 2. \quad (4.58)$$

Para la demostración de la afirmación (4.58) se divide en dos casos. El caso $m_j \neq 0$, y el caso $m_j = 0$.

Caso $m_j \neq 0$: En este caso se procede demostrando que la afirmación (4.58) se tiene para cada uno de los modelos en que se ha dividido la dinámica del sistema de acuerdo con la Definición 48.

De las expresiones (3.6), (3.14) y la Proposición 35, se tiene para $j = 1, 2$, que

$$\begin{aligned} a_j(\xi_1, k) &= m_j \xi_1 + c_j(k, a_2) \\ \partial_{\xi_1} a_j(\xi_1, k) &= m_j, \\ b_j(\xi, k) &= \sqrt{-m_j^2 \xi_1^2 + (A_j - 2m_j c_j(k, a_2)) \xi_1 + D_j(k) - c_j^2(k, a_2)} \\ \partial_{\xi_1} b_j(\xi, k) &= \frac{-2m_j^2 \xi_1 + A_j - 2m_j c_j(k, a_2)}{2\sqrt{-m_j^2 \xi_1^2 + (A_j - 2m_j c_j(k, a_2)) \xi_1 + D_j(k) - c_j^2(k, a_2)}}, \end{aligned} \quad (4.59)$$

y de las expresiones de (4.59), se obtiene

$$\begin{aligned} (b_j \partial_{\xi_1} a_j - a_j \partial_{\xi_1} b_j)(\xi_1, k) &= b_j(\xi_1, k) m_j - (m_j \xi_1 + c_j(k, a_2)) W; \\ W &= \frac{-2m_j^2 \xi_1 + A_j - 2m_j c_j(k, a_2)}{2b_j(\xi_1, k)} \\ (b_j \partial_{\xi_1} a_j - a_j \partial_{\xi_1} b_j)(\xi_1, k) &= \frac{m_j A_j \xi_1 + 2m_j D_j(k) - A_j c_j(k, a_2)}{2\sqrt{-m_j^2 \xi_1^2 + (A_j - 2m_j c_j(k, a_2)) \xi_1 + D_j(k) - c_j^2(k, a_2)}}, \end{aligned} \quad (4.60)$$

por lo tanto

$$(b_j \partial_{\xi_1} a_j - a_j \partial_{\xi_1} b_j)(\bar{\xi}_1, k) = 0,$$

si

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_{1j} &= \frac{A_j c_j(k, a_2) - 2m_j D_j(k)}{m_j A_j} \\ &= \frac{c_j(k, a_2)}{m_j} + \frac{2\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)} \frac{1}{1 - \frac{\partial_s p_j(\lambda, a_1)}{\partial_s p_j(\lambda, a_2)}}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Si $k \in (k_{a \min j}, k_{a \max j})$, entonces

$$0 \leq -\frac{c_j(k, a_2)}{m_j} \leq \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}. \quad (4.62)$$

En lo que resta de la prueba de i) se supone que

$$\partial_s p_i(\lambda, a_2) < \partial_s p_j(\lambda, a_2); i, j = 1, 2; i \neq j. \quad (4.63)$$

Si se tiene un modelo del tipo 1A, entonces por hipótesis se satisface la condición

$$\frac{c_i(k_{a \max}, a_2)}{m_i} + \frac{2\gamma\lambda g(\lambda, k_{a \max})}{p_i(\lambda, a_1)} \frac{1}{1 - \frac{\partial_s p_i(\lambda, a_1)}{\partial_s p_i(\lambda, a_2)}} > \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k_{a \max})}{p_i(\lambda, a_1)}. \quad (4.64)$$

De la desigualdad (4.63), se tiene

$$k_{a2i} < k_{a2j}; k_{a1i} < k_{a1j},$$

por la parte iii) y iv) del Lema 105. Como $A_j < 0$, $(\partial_s p_j(\lambda, a_1) < \partial_s p_j(\lambda, a_2))$, y $m_j < 0$, de las desigualdades (4.62) y (4.61) se tiene que para $k \in (k_{a \min}, k_{a \max})$, $\bar{\xi}_{1j}(k) > \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)}$, luego se sigue de (4.60), que

$$(b_j \partial_{\xi_1} a_j - a_j \partial_{\xi_1} b_j) < 0, \text{ con } \xi_1 \in [0, \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)}], k \in (k_{a \min}, k_{a \max}) \quad (4.65)$$

si $m_j A_j > 0, (m_j < 0)$.

Sólo resta mostrar que para $k \in (k_{a \min}, k_{a \max})$ se tiene que $(b_i \partial_{\xi_1} a_i - a_i \partial_{\xi_1} b_i) < 0$, si $m_i A_i > 0, (m_i < 0)$. De la desigualdad (4.64) se tiene que $\bar{\xi}_{1i}(k_{a \max}) > \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k_{a \max})}{p_i(\lambda, a_1)}$, luego se sigue de (4.60), que

$$(b_i \partial_{\xi_1} a_i - a_i \partial_{\xi_1} b_i) < 0, \xi_1 \in [0, \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k_{a \max})}{p_i(\lambda, a_1)}], k = k_{a \max}, \text{ si } m_i A_i > 0, (m_i < 0).$$

Como $\bar{\xi}_{1i}(k)$ decrece con k para $k \in (k_{a2}, k_{a1})$, entonces $\bar{\xi}_1(k) > \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)}$, luego se sigue de (4.60), que

$$(b_i \partial_{\xi_1} a_i - a_i \partial_{\xi_1} b_i) < 0, \xi_1 \in [0, \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)}], k \in (k_{a \min}, k_{a \max}) \text{ si } m_i A_i > 0, (m_i < 0). \quad (4.66)$$

Ahora si se tiene un modelo del tipo 1B o 3, entonces por hipótesis se satisface la condición

$$\frac{c_j(k_{a \min}, a_2)}{m_j} + \frac{2\gamma\lambda g(\lambda, k_{a \min})}{p_j(\lambda, a_1)} \frac{1}{1 - \frac{\partial_s p_j(\lambda, a_1)}{\partial_s p_j(\lambda, a_2)}} < 0. \quad (4.67)$$

De la desigualdad (4.63), se tiene

$$k_{a2i} < k_{a2j}; k_{a1i} < k_{a1j},$$

por la parte iii) y iv) del Lema 105. Como $A_i > 0$, $(\partial_s p_i(\lambda, a_2) < \partial_s p_i(\lambda, a_1))$ y $m_i < 0$, de las desigualdades (4.62) y (4.61) se tiene que para $k \in (k_{a \min}, k_{a \max})$, $\bar{\xi}_{1i}(k) > \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_i(\lambda, a_1)}$, luego se tiene que

$$(b_i \partial_{\xi_1} a_i - a_i \partial_{\xi_1} b_i) < 0, \xi_1 \in [0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)}], k \in (k_{a \min}, k_{a \max}) \text{ si } m_i A_i < 0, (m_i < 0). \quad (4.68)$$

Veamos que para $k \in (k_{a \min}, k_{a \max})$ se tiene que $(b_j \partial_{\xi_1} a_j - a_j \partial_{\xi_1} b_j) < 0$, si $m_j A_j < 0$, $(m_j < 0)$. De la desigualdad (4.67) se tiene que $\bar{\xi}_{1j}(k_{a \max}) < 0$, luego

$$(b_j \partial_{\xi_1} a_j - a_j \partial_{\xi_1} b_j) < 0, \xi_1 \in [0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k_{a2})}{p_j(\lambda, a_1)}], k = k_{a \max} \text{ si } m_j A_j < 0, (m_j < 0).$$

Como $\bar{\xi}_{1j}(k)$ decrece con k para $k \in (k_{a \min}, k_{a \max})$, entonces $\bar{\xi}_{1j}(k) < 0$, por lo tanto

$$(b_j \partial_{\xi_1} a_j - a_j \partial_{\xi_1} b_j) < 0, \xi_1 \in [0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)}], k \in (k_{a \max}) \text{ si } m_j A_j < 0, (m_j < 0). \quad (4.69)$$

Si se tiene un modelo del tipo 2 o 4, entonces por hipótesis se satisface la condición

$$\frac{c_j(k_{a \min}, a_2)}{m_j} + \frac{2\gamma \lambda g(\lambda, k_{a \min})}{p_j(\lambda, a_1)} \frac{1}{1 - \frac{\partial_s p_j(\lambda, a_1)}{\partial_s p_j(\lambda, a_2)}} > \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k_{a \min})}{p_j(\lambda, a_1)}. \quad (4.70)$$

De la desigualdad (4.63) se tiene

$$k_{a2i} < k_{a2j}; k_{a1i} < k_{a1j},$$

por la parte iii) y iv) del Lema 105. Como $A_i < 0$, $(\partial_s p_i(\lambda, a_1) < \partial_s p_i(\lambda, a_2))$ y $m_i > 0$, de las desigualdades (4.62) y (4.61) se tiene que para $k \in (k_{a \min}, k_{a \max})$, $\bar{\xi}_{1i}(k) > \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_i(\lambda, a_1)}$, por lo tanto

$$(b_i \partial_{\xi_1} a_i - a_i \partial_{\xi_1} b_i) > 0, \xi_1 \in [0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_i(\lambda, a_1)}], k \in (k_{a \min}, k_{a \max}) \text{ si } m_i A_i < 0, (m_i > 0). \quad (4.71)$$

Veamos que si $k \in (k_{a \min}, k_{a \max})$ y $m_j A_j < 0$, con $(m_j > 0)$, entonces $b_j \partial_{\xi_1} a_j - a_j \partial_{\xi_1} b_j > 0$. De la desigualdad (4.70) se tiene que $\bar{\xi}_{1j}(k_{a \min}) > \frac{\gamma \lambda g(\lambda, \bar{k}_{a1})}{p_j(\lambda, a_1)}$, luego

$$(b_j \partial_{\xi_1} a_j - a_j \partial_{\xi_1} b_j) > 0, \xi_1 \in [0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, \bar{k}_{a2})}{p_j(\lambda, a_1)}], k = k_{a \min}, \text{ si } m_j A_j < 0, (m_j > 0).$$

Como $\bar{\xi}_{1j}(k)$ crece con k , para $k \in (k_{a \min}, k_{a \max})$, entonces $\bar{\xi}_{1j}(k) > \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)}$, por lo tanto

$$(b_j \partial_{\xi_1} a_j - a_j \partial_{\xi_1} b_j) > 0, \xi_1 \in [0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)}], k \in (k_{a \min}, k_{a \max}) \text{ si } m_j A_j < 0, (m_j > 0). \quad (4.72)$$

Caso $m_j = 0$: Si $m_j = 0$ y $A_j = 0$, entonces para $k \in (k_{a \min}, k_{a \max})$

$$(b_j \partial_{\xi_1} a_j - a_j \partial_{\xi_1} b_j) = 0, (b_i \partial_{\xi_1} a_i - a_i \partial_{\xi_1} b_i) = 0, \quad (4.73)$$

por (4.60) con lo cual se concluye que $a(\xi_1, k)$ es constante con respecto de la variable ξ_1 .

Finalmente de las expresiones (4.65) a (4.73) y de la parte i) y ii) del Lema 105 se tiene la primera afirmación.

Prueba ii) Inicialmente se demuestra que $a(\xi_1, k)$ es creciente con respecto al parámetro k , con $(\xi_1, k) \in \bar{D}(a) \cap [0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}] \times (k_{\min}, k_{\max})$, verificando la proposición para los casos $\xi_1 = \xi_{10}$, $\xi_1 = \xi_{11}$ y $\xi_1 \in (0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)})$, y finalmente se muestra que para cada $\xi_1 \in [0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)}]$ existe un único $\bar{\bar{k}}(\xi_1) \in (\bar{k}_{a \min}(\xi_1), \bar{k}_{a \max}(\xi_1))$ tal que $a(\xi_1, \bar{\bar{k}}(\xi_1)) = 0$.

Caso $\xi_1 = \xi_{10}$, y $\xi_1 = \xi_{11}$: Como

$$\begin{aligned} \partial_k a(\xi_1, k) &= \partial_k \left(\frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 b_2} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c} b_1 b_2 (a \partial_k b_2 + b_2 \partial_k a_1 + a_2 \partial_k b_1 + b_1 \partial_k a_2) \\ - (a_1 b_2 + a_2 b_1) (b_1 \partial_k b_2 + b_2 \partial_k b_1) \end{array} \right) \div (b_1 b_2)^2 \\ &= [b_2 b_2 (b_1 \partial_k a_1 - a_1 \partial_k b_1) + b_1 b_1 (b_2 \partial_k a_2 - a_2 \partial_k b_2)] \div (b_1 b_2)^2, \end{aligned} \quad (4.74)$$

y además $b_2(\xi_1, k) > 0$, y $b_1(\xi_1, k) > 0$, entonces $\partial_k a(\xi_1, k) > 0$, si se tiene que $(b_j \partial_k a_j - a_j \partial_k b_j) > 0$, $j = 1, 2$. Veamos que $(b_j \partial_k a_j - a_j \partial_k b_j)(\xi_{10}, k) > 0$. Teniendo

en cuenta las expresiones (3.6), (3.14) y la Proposición 35, se tiene

$$\begin{aligned}
 a_j(\xi_{10}, k) &= c_j(k, a_2) = \frac{\gamma \lambda g_s(\lambda, k)}{2} + \frac{\gamma g(\lambda, k)(p(\lambda, a_2) - \lambda \partial_s p_j(\lambda, a_2))}{2p(\lambda, a_2)}, \\
 \partial_k a_j(\xi_{10}, \lambda) &= \frac{\gamma \lambda \partial_{ks} g(\lambda, k)}{2} + \frac{\gamma \partial_k g(\lambda, k)(p(\lambda, a_2) - \lambda \partial_s p_j(\lambda, a_2))}{2p(\lambda, a_2)}, \\
 b_j(\xi_{10}, k) &= \sqrt{-c_j^2(\xi_1, k) + \gamma \lambda g(\lambda, k) \partial_s p_j(\lambda, a_2)}, \\
 \frac{\partial b_j(\xi_{10}, k)}{\partial k} &= \frac{-2c_j(\xi_1, k) \partial_k c_j(\xi_1, k) + \gamma \lambda \partial_k g(\lambda, k) \partial_s p_j(\lambda, a_2)}{2\sqrt{-c_j^2(\xi_1, k) + \gamma \lambda g(\lambda, k) \partial_s p_j(\lambda, a_2)}},
 \end{aligned} \tag{4.75}$$

y de las expresiones de (4.75), se obtiene

$$(b_j \partial_k a_j - a_j \partial_k b_j)(\xi_{10}, k) = b_j(\xi_{10}, k) \partial_k c_j(k, a_2) - c_j(k, a_2) W = P,$$

donde

$$W = \frac{-2c_j(\xi_{10}, k) \partial_k c_j(k, a_2) + \gamma \lambda \partial_k g(\lambda, k) \partial_s p_j(\lambda, a_2)}{2\sqrt{-c_j^2(\xi_1, k) + \gamma \lambda g(\lambda, k) \partial_s p_j(\lambda, a_2)}},$$

y

$$P = \frac{\gamma^2 \lambda^2 g(\lambda, k) \partial_{ks} g(\lambda, k) \partial_s p_j(\lambda, a_2) + \frac{\lambda \gamma^2 g(\lambda, k) \partial_k g(\lambda, k) (p(\lambda, a_2) - \lambda \partial_s p_j(\lambda, a_2)) \partial_s p_j(\lambda, a_2)}{2p(\lambda, a_2)} - \frac{\gamma^2 \lambda^2 \partial_s g(\lambda, k) \partial_k g(\lambda, k) \partial_s p_j(\lambda, a_2)}{2}}{2\sqrt{-c_j^2(\xi_1, k) + \gamma \lambda g(\lambda, k) \partial_s p_j(\lambda, a_2)}},$$

luego $(b_j \partial_k a_j - a_j \partial_k b_j)(\xi_{10}, k) > 0$, ya que por la condiciones (2.8) y (2.10) se tiene que $\partial_{ks} g(\lambda, k) > 0$, $\partial_s g(\lambda, k) < 0$, $\partial_k g(\lambda, k) > 0$, y $g(\lambda, k) > 0$, y además por la condición (2.17) y la condición de Krasonskij (2.18) se tiene que $p_j(\lambda, a_2) > 0$, y $(p(\lambda, a_2) - \lambda \partial_s p_j(\lambda, a_2)) > 0$, respectivamente. Por simetría (Proposiciones 35 y 39), se tiene que $(b_j \partial_k a_j - a_j \partial_k b_j)(\xi_{11}, k) > 0$, con lo cual se concluye que $a(\xi_{10}, k)$ y $a(\xi_{11}, k)$ es creciente con respecto al parámetro k .

Caso $\xi_1 \in (0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)})$: Ahora se muestra el caso en que $a(\xi_1, k)$ es creciente con respecto al parámetro k , para $\xi_1 \in (0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)})$, con lo cual se concluye la primera parte de la afirmación. Teniendo en cuenta las expresiones (3.6), (3.14) y la Proposición 35, se tiene

$$\begin{aligned}
 a_j(\xi_1, k) &= m_j \xi_1 + c_j(k, a_2), \\
 \partial_k a_j(\xi_{10}, k) &= \partial_k c_j(k, a_2), \\
 \partial_k b_j(\xi_{10}, k) &= \frac{-2a_j(\xi_1, k) \partial_k c_j(\xi_1, k) + \gamma \lambda \partial_k g(\lambda, k) \partial_s p_j(\lambda, a_2)}{2b_j(\xi_{10}, k)}.
 \end{aligned} \tag{4.76}$$

Además de las expresiones de (4.76) se obtiene después de simplificar que

$$(b_j \partial_k a_j - a_j \partial_k b_j) (\xi_1, k) = \frac{P + W}{2b_j(\xi_1, k)}$$

con

$$\begin{aligned} P &= (2\xi_1 \partial_s p_j(\lambda, a_1)(\partial_s p_j(\lambda, a_1) - \partial_s p_j(\lambda, a_2)) + 2\gamma \lambda g(\lambda, k) \partial_s p_j(\lambda, a_2)) \partial_k c_j(k, a_2), \\ W &= -m_j \xi_1 \gamma \lambda \partial_k g(\lambda, k) \partial_k p_j(\lambda, a_2) - c_j(k, a_2) \gamma \lambda g_k(\lambda, k) \partial_s p_j(\lambda, a_2). \end{aligned}$$

Si el numerador de $(b_j \partial_k a_j - a_j \partial_k b_j) (\xi_1, k)$ es positivo con k fijo y $\xi_1 \in [0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)}]$, entonces se concluye la afirmación, es decir $(b_j \partial_k a_j - a_j \partial_k b_j) (\xi_1, k) > 0$, ya que $b_j(\xi_1, k) > 0$. Como $(b_j \partial_k a_j - a_j \partial_k b_j) (\xi_{10}, k) > 0$ y $(b_j \partial_k a_j - a_j \partial_k b_j) (\xi_{11}, k) > 0$, y

$$\partial_{\xi_1} (P + W) = \begin{pmatrix} 2\partial_s p_j(\lambda, a_1)(\partial_s p_j(\lambda, a_1) - \partial_s p_j(\lambda, a_2)) \partial_k c_j(k, a_2) \\ -m_j \gamma \lambda \partial_k g(\lambda, k) \partial_s p_j(\lambda, a_2) \end{pmatrix},$$

es constante con respecto a la variable ξ_1 con k fijo, entonces finalmente se concluye que $\partial_{\xi_1} (b_j \partial_k a_j - a_j \partial_k b_j) (\xi_1, k) > 0$, para $(\xi_1, k) \in \overline{D}(a) \cap [0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}] \times (k_{\min}, k_{\max})$.

Ahora se comprueba la existencia de un único $\overline{\overline{k}}(\xi_1)$ tal que $a(\xi_1, \overline{\overline{k}}(\xi_1)) = 0$, $\xi_1 \in [0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)}]$, verificando la proposición para los casos en que $\xi_1 = \xi_{10}$, $\xi_1 = \xi_{11}$ y $\xi_1 \in (0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)})$.

Si $m_j < 0$, entonces por el Lema 36, las Definiciones 37 y 92, existe $k = \overline{k}_{a \min}(\xi_{10}) \in (k_{b \max}, k_{\max})$ tal que $(a_1(\xi_{10}, \overline{k}_{a \min}(\xi_{10})) = 0$, y $a_2(\xi_{10}, \overline{k}_{a \min}(\xi_{10})) < 0$,

o $(a_2(\xi_{10}, \overline{k}_{a \min}(\xi_{10})) = 0$, y $a_1(\xi_{10}, \overline{k}_{a \min}(\xi_{10})) < 0$), luego

$$\frac{a_1(\xi_{10}, \overline{k}_{a \min}(\xi_{10}))}{b_1(\xi_{10}, \overline{k}_{a \min}(\xi_{10}))} + \frac{a_2(\xi_{10}, \overline{k}_{a \min}(\xi_{10}))}{b_2(\xi_{10}, \overline{k}_{a \min}(\xi_{10}))} < 0. \quad (4.77)$$

También por el Lema 36, las Definiciones 37 y 92, se tiene que existe $k = \overline{k}_{a \max}(\xi_{10}) \in (k_{b \max}, k_{\max})$ tal que $(a_1(\xi_{10}, \overline{k}_{a \max}(\xi_{10})) = 0$, y $a_2(\xi_{10}, \overline{k}_{a \max}(\xi_{10})) > 0$) o $(a_2(\xi_{10}, \overline{k}_{a \max}(\xi_{10})) = 0$, y $a_1(\xi_{10}, \overline{k}_{a \max}(\xi_{10})) > 0$), luego

$$\frac{a_1(\xi_{10}, \overline{k}_{a \max}(\xi_{10}))}{b_1(\xi_{10}, \overline{k}_{a \max}(\xi_{10}))} + \frac{a_2(\xi_{10}, \overline{k}_{a \max}(\xi_{10}))}{b_2(\xi_{10}, \overline{k}_{a \max}(\xi_{10}))} > 0. \quad (4.78)$$

Por lo tanto de (4.77), (4.78) y por ser la función $(b_j \partial_k a_j - a_j \partial_k b_j) (\xi_{10}, k)$ monótona creciente en la variable k , existe un único $\overline{\overline{k}}(\xi_{10}) \in (\overline{k}_{a \min}(\xi_{10}), \overline{k}_{a \max}(\xi_{10}))$ tal que

$(b_j \partial_k a_j - a_j \partial_k b_j)(\xi_{10}, \bar{\bar{k}}(\xi_{10})) = 0$. También por la Proposición 35 se tiene que existe único $\bar{\bar{k}}(\xi_{11}) \in (\bar{k}_{a \min}(\xi_{11}), \bar{k}_{a \max}(\xi_{11}))$ tal que $(b_j \partial_k a_j - a_j \partial_k b_j)(\xi_{11}, \bar{\bar{k}}(\xi_{11})) = 0$.

Si $m_j > 0$, se sigue formalmente el mismo procedimiento que en el caso $m_j < 0$, sólo que ahora se toma en las expresiones $\xi = \xi_{11}$ en vez de $\xi = \xi_{10}$.

Sólo resta mostrar la existencia de un único $\bar{\bar{k}}(\xi_1)$ para el caso $\xi_1 \in (0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)})$, con lo cual se concluye la prueba.

Si $m_j = 0$ y $A_j = 0$, se tiene que $a(\xi_1, k)$ es una función constante de la variable ξ_1 por la primera parte de Lema 111. Como $a(\xi_{10}, k(\xi_{10})) = 0$, entonces $a(\xi_1, k(\xi_{10})) = 0$, para cada $\xi_1 \in (0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)})$. La unicidad se sigue del hecho de que $a(\xi_1, k(\xi_{10}))$ se incrementa con k .

Si $m_j > 0$, se tiene por la parte i) que

$$\begin{aligned} a(\xi_{10}, k) &< a(\xi_1, k) < a(\xi_{11}, k), \\ \xi_1 &\in [0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)}], \quad k \in (k_{b \max}, k_{\max}), \end{aligned}$$

si se toma k_0 tal que $a(\xi_{11}(k), k_0) < 0$, se tiene que $a(\xi_1, k_0) < 0$. Si además se toma k_1 tal que $a(\xi_{10}, k_1) > 0$, entonces $a(\xi_1, k_1) > 0$. Luego existe $\bar{\bar{k}}(\xi_1)$ único tal que $a(\xi_1, \bar{\bar{k}}(\xi_1)) = 0$, $\xi_1 \in [0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)}]$. El caso $m_j < 0$, se tiene por simetría en el procedimiento anterior con lo cual se concluye la prueba \square .

Claramente la Definición 90, tiene sentido por el Lema 111.

A continuación se establece una relación un orden entre los valores de bifurcación k_{a2} y k_{a1} del sistema no suave (2.1) de acuerdo a si el modelo es natural, artificial o degenerado.

Proposición 112 *Considere los puntos de bifurcación k_{a2} y k_{a1} del sistema no suave (2.1) considerados en la Definición 90, entonces se tiene que*

$$\begin{aligned} k_{a2} &< k_{a1} \text{ si } m_j < 0, \\ k_{a2} &= k_{a1} \text{ si } m_j = 0, \\ k_{a1} &< k_{a2} \text{ si } m_j > 0. \end{aligned}$$

Prueba: De (111), se tiene que

$$\partial_{\xi_1} a(\xi_1, k) = \begin{cases} < 0, & \text{si } m_j < 0, \\ \leq 0, & \text{si } m_j = 0, \\ > 0, & \text{si } m_j > 0, \end{cases}$$

como $a(\xi_{10}, k_{a2}) = 0$, luego

$$a(\xi_{11}, k_{a2}) = \begin{cases} < 0, & \text{si } m_j < 0, \\ \leq 0, & \text{si } m_j = 0, \\ > 0, & \text{si } m_j > 0, \end{cases}$$

como $\partial_k a(\xi_1, k) > 0$, y $\xi_1 \in [0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)}]$, entonces

$$a(\xi_{11}, k_{a1j}) = 0, \text{ implica que } \begin{cases} k_{a2} < k_{a1}, & \text{si } m_j < 0, \\ k_{a2} \leq k_{a1}, & \text{si } m_j = 0, \\ k_{a2} > k_{a1}, & \text{si } m_j > 0, \end{cases}$$

con lo cual se termina la prueba \square .

A continuación se muestra la ocurrencia de la bifurcación zip a lo largo del segmento de equilibrios L_k en el sistema no suave (2.1). La demostraciones en esta parte siguen procedimientos semejantes a los presentados para la componente real de los valores propios a_j en el sistema suave, sólo que ahora la función $a(\xi_1, k)$ es quién determina la estabilidad del segmento de equilibrios L_k como consecuencia del Teorema 27, la Proposición 98, y los Corolarios 96, 99, 101.

Los puntos del segmento de equilibrios son estables, si y únicamente si $a(\xi_1, k) < 0$, es decir

$$\frac{a_1(\xi_1, k)}{b_1(\xi_1, k)} + \frac{a_2(\xi_1, k)}{b_2(\xi_1, k)} < 0. \quad (4.79)$$

Se considera el siguiente trozo de curva La_k

$$La_k = \left\{ (s, \xi_1, a(\xi_1, k)) : a(\xi_1, k) = \frac{a_1(\xi_1, k)}{b_1(\xi_1, k)} + \frac{a_2(\xi_1, k)}{b_2(\xi_1, k)}, \right. \\ \left. s = \lambda, 0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)} \right\}. \quad (4.80)$$

Fijando k , se puede determinar el punto $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k), \widehat{\xi}_2(k)) \in L_k$ en que la linealización de los subsistemas asociados a los campos $f_j = 1, 2$, del sistema (2.1) tiene valores

propios cuya suma de los cocientes de las partes reales en las partes imaginarias asociadas a cada subsistema es cero, es decir $a(\xi_1, k) = 0$. Por lo tanto el punto $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k), \widehat{\xi}_2(k)) \in L_k$ se obtiene resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones (véase (3.1) y la Nota 34).

$$\begin{aligned} \frac{a_1(\xi_1, k)}{b_1(\xi_1, k)} + \frac{a_2(\xi_1, k)}{b_2(\xi_1, k)} &= 0, \\ p(\lambda, a_1)\xi_1 + p(\lambda, a_2)\xi_2 &= \gamma\lambda g(\lambda, k), \text{ con } \xi_1, \xi_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Como una preparación al teorema siguiente, se muestra la siguiente propiedad de la función $\widehat{\xi}_1(k)$.

Proposición 113 *Considere $\widehat{\xi}_1(k)$ solución del sistema (4.81), entonces $\widehat{\xi}_1(k)$ es estrictamente creciente, si se considera que el modelo es natural; y estrictamente decreciente si se considera que el modelo es artificial.*

Prueba: Si $\widehat{\xi}_1(k) \in [0, \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}]$, por la parte ii) del Lema 111, existe $\overline{\overline{k}}(\widehat{\xi}_1)$, tal que

$$\frac{a_1(\widehat{\xi}_1, \overline{\overline{k}}(\widehat{\xi}_1))}{b_1(\widehat{\xi}_1, \overline{\overline{k}}(\widehat{\xi}_1))} + \frac{a_2(\widehat{\xi}_1, \overline{\overline{k}}(\widehat{\xi}_1))}{b_2(\widehat{\xi}_1, \overline{\overline{k}}(\widehat{\xi}_1))} = 0, \quad (4.82)$$

por lo tanto la ecuación (4.82) define una o varias ramas implícitamente de $\widehat{\xi}_1(\overline{\overline{k}})$; particularmente se está interesado en la rama en la cual $\widehat{\xi}_1(k) \in [0, \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}]$. A continuación se halla el signo del $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\Delta \widehat{\xi}_1}{\Delta k}$, determinando el signo de $\Delta \widehat{\xi}_1$ a partir de la ecuación implícita (4.82) cuando se incrementa $\Delta \overline{\overline{k}}(\widehat{\xi}_1)$, con lo cual se termina la prueba.

Si se incrementa $\overline{\overline{k}}(\widehat{\xi}_1)$, se obtiene

$$\frac{a_1(\widehat{\xi}_1, \overline{\overline{k}}(\widehat{\xi}_1) + \Delta \overline{\overline{k}}(\widehat{\xi}_1))}{b_1(\widehat{\xi}_1, \overline{\overline{k}}(\widehat{\xi}_1) + \Delta \overline{\overline{k}}(\widehat{\xi}_1))} + \frac{a_2(\widehat{\xi}_1, \overline{\overline{k}}(\widehat{\xi}_1) + \Delta \overline{\overline{k}}(\widehat{\xi}_1))}{b_2(\widehat{\xi}_1, \overline{\overline{k}}(\widehat{\xi}_1) + \Delta \overline{\overline{k}}(\widehat{\xi}_1))} > 0, \quad (4.83)$$

ya que por el Lema 111

$$\partial_k \left(\frac{a_1(\xi_1, k)}{b_1(\xi_1, k)} + \frac{a_2(\xi_1, k)}{b_2(\xi_1, k)} \right) > 0, \text{ con } \widehat{\xi}_1(k) \in [0, \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}].$$

Luego por el Lema 111, y por continuidad de la función $\widehat{\xi}_1(k)$, existe un único $\widehat{\xi}_1 + \Delta\widehat{\xi}_1$ en la desigualdad (4.83), tal que

$$\frac{a_1(\widehat{\xi}_1 + \Delta\widehat{\xi}_1, \overline{\overline{k}}(\widehat{\xi}_1) + \Delta\overline{\overline{k}}(\widehat{\xi}_1))}{b_1(\widehat{\xi}_1 + \Delta\widehat{\xi}_1, \overline{\overline{k}}(\widehat{\xi}_1) + \Delta\overline{\overline{k}}(\widehat{\xi}_1))} + \frac{a_2(\widehat{\xi}_1 + \Delta\widehat{\xi}_1, \overline{\overline{k}}(\widehat{\xi}_1) + \Delta\overline{\overline{k}}(\widehat{\xi}_1))}{b_2(\widehat{\xi}_1 + \Delta\widehat{\xi}_1, \overline{\overline{k}}(\widehat{\xi}_1) + \Delta\overline{\overline{k}}(\widehat{\xi}_1))} = 0.$$

Por lo tanto

$$\Delta\widehat{\xi}_1 = \begin{cases} > 0, & \text{si } m_j < 0 \\ < 0, & \text{si } m_j > 0 \end{cases},$$

ya que por el Lema 111

$$\partial_{\xi_1} a(\xi_1, k) = \begin{cases} < 0, & \text{si } m_j < 0 \\ > 0, & \text{si } m_j > 0 \end{cases},$$

y se concluye que

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\Delta\widehat{\xi}_1}{\Delta k} = \begin{cases} > 0, & \text{si } m_j < 0 \\ < 0, & \text{si } m_j > 0 \end{cases},$$

pues $\widehat{\xi}_1(k)$ no es la función constante. \square

La función $\widehat{\xi}_1(k)$ presenta variación de signo en el intervalo (k_{\min}, k_{\max}) como consecuencia inmediata de la Proposición 113, y la igualdad $\widehat{\xi}_1(k_{a2}) = 0$.

Teorema 114 *Si los subsistemas del sistema no suave (2.1) asociados a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, $j = 1, 2$, son naturales, satisfacen las condiciones (2.8) a (2.15a) y (2.20) a (2.23), la condición de la variedad invariante (4.7) y la condición de compatibilidad de dominios de la Definición 110, entonces existen k_{a2}, k_{a1} únicos, con $k_{\min} < k_{a2} < k_{a1} < k_{\max}$, tal que, para todo $k \in (k_{\min}, k_{a2})$, todos los puntos del segmento L_k son estables en el sentido de Lyapunov, y L_k es un atractor del sistema en el sentido que existe una vecindad del segmento de equilibrios para el cual las soluciones con condiciones iniciales en esta vecindad tienden a un punto del segmento L_k cuando t tiende a infinito. Para $k \in (k_{a2}, k_{a1})$, el punto $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k), \widehat{\xi}_2(k))$ divide L_k en dos partes (una de las cuales puede ser vacía), donde $\widehat{\xi}_1(k)$ y $\widehat{\xi}_2(k)$ vienen determinados implícitamente por el sistema (4.81). Los puntos de L_k a la izquierda del punto $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k), \widehat{\xi}_2(k))$ son inestables y los puntos a la derecha son estables en el sentido de*

Capítulo 4. Extensión de la bifurcación zip en modelos suave por tramos 196
 Lyapunov y forman un atractor del sistema. Para $k \in (k_{a1}, k_{\max})$, el sistema no tiene puntos de equilibrios estables en el octante positivo del espacio cerrado s, x_1, x_2 .

Prueba: Por hipótesis nuestro modelo es natural. Así, como por el Lema 111, $a(\xi_1, k)$ es continua, estrictamente creciente con respecto al parámetro k para $(\xi_1, k) \in \overline{D}(a) \cap [0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}] \times (k_{\min}, k_{\max})$, y presenta cambio de signo en el intervalo $(\bar{k}_{a \min}(\xi_1), \bar{k}_{a \max}(\xi_1))$ con $\xi_1 \in [0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}]$ fijo. Luego existe un único $\bar{k} > \bar{k}_{a \min}(\xi_{10})$ en el cual $a(\xi_{10}, \bar{k}) = 0$, y de la Definición 90, se tiene que

$$a(\xi_{10}, k_{a2}) = 0, \quad (4.84)$$

con lo cual $\bar{k} = k_{a2}$ de acuerdo con el Lema 111. De la igualdad (4.84) y la parte i) del Lema 111, se tiene

$$a(\xi_1, k_{a2}) < 0, \text{ si } \xi_1 \in [0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}]. \quad (4.85)$$

Similarmente de la desigualdad (4.85) y la parte ii) del Lema 111, se tiene que

$$a(\xi_1, k) < 0, \text{ si } (\xi_1, k) \in \overline{D}(a) \cap [0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}] \times (k_{\min}, k_{a2}). \quad (4.86)$$

Además si $(\xi_1, k) \in [0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}] \times (k_{\min}, k_{a2}) - \overline{D}(a)$, entonces los puntos de equilibrios del segmento L_k respecto a cada subsistema son del tipo nodo-foco o del tipo nodo-nodo estables, ya que $k \leq k_{a21}, k_{a22}, \bar{k}_{b \min}$. Sin embargo de lo anterior y de (4.86) se tiene que los puntos de L_k tienen una variedad estable bidimensional como consecuencia del Teorema 27, la Proposición 98, y los Corolarios 96, 99, 101. Por lo tanto si $k \in (k_{\min}, k_{a2})$ el segmento de equilibrios L_k es un atractor del sistema.

De la Proposición 113, $\widehat{\xi}_1(k)$, es continua, estrictamente creciente y presenta cambio de signo en el intervalo $(\bar{k}_{a \min}(\xi_{10}), \bar{k}_{a \max}(\xi_{10}))$. De la igualdad (4.84), la Definición 90, y la relación de $\widehat{\xi}_1(k)$ en el sistema (4.81), se tiene que

$$\widehat{\xi}_1(k_{a2}) = 0. \quad (4.87)$$

Sin embargo, de la segunda ecuación del sistema (4.81), se tiene

$$\widehat{\xi}_2(k) = \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k) - \widehat{\xi}_1(k) p(\lambda, a_1)}{p(\lambda, a_2)},$$

luego la línea \hat{L}_k (ver Notación 34) intercepta el eje ξ_2 en un punto de coordenada positiva para $k = k_{a2}$, es decir $\hat{\xi}_2(k_{a2}) > 0$. Similarmente por el Lema 111, la Proposición 112 y la Definición 90, existe un $k_{a1} > k_{a2}$, en la cual

$$\hat{\xi}_2(k_{a1}) = 0. \quad (4.88)$$

En conclusión, los puntos $(\lambda, \hat{\xi}_1(k), \hat{\xi}_2(k)) \in L_k$ para (k_{a2}, k_{a1}) , donde la suma de los cocientes de las partes reales e imaginarias de los valores propios de la linealización de los subsistemas del sistema no suave (2.1) asociados a los campos $f_j = 1, 2$, se anula, es decir $a(\xi_1, k) = 0$, se localiza en el primer cuadrante del plano ξ_1, ξ_2 con $s = \lambda$, fijo.

De la igualdad (4.88) y la parte i) del Lema 111, se tiene que

$$a(\xi_1, k_{a1}) > 0, \text{ si } \xi_1 \in [0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}].$$

Como $[0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}] \times (k_{a1}, k_{\max}) \subset \bar{D}(a)$, entonces $\bar{D}(a) \cap [0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}] \times (k_{a1}, k_{\max}) = [0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}] \times (k_{a1}, k_{\max})$, luego de la desigualdad (4.88) y la parte ii) del Lema 111, se tiene que

$$a(\xi_1, k) > 0, \text{ si } (\xi_1, k) \in [0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}] \times (k_{a1}, k_{\max}). \quad (4.89)$$

Por lo tanto si $k \in (k_{a1}, k_{\max})$, (4.89) implica que en los puntos de L_k se tiene una variedad inestable bidimensional como consecuencia del Teorema 27, la Proposición 98, y los Corolarios 96, 99, 101.

Si $k \in (k_{a2}, k_{a1})$, el punto de intersección $(\lambda, \hat{\xi}_1(k), \hat{\xi}_2(k))$ divide a L_k en dos partes; en la parte izquierda de L_k la condición (4.90) es válida

$$a(\xi_1, k) > 0, \text{ si } 0 \leq \xi_1 \leq \hat{\xi}_1(k); \quad (4.90)$$

esto significa que los puntos de esta parte de L_k son inestables; por otro lado, en la parte derecha de L_k la condición (4.91) es válida

$$a(\xi_1, k) < 0, \text{ si } \hat{\xi}_1(k) \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}, \quad (4.91)$$

es decir en cada punto de esta parte de L_k los puntos son estables. La prueba de la atractividad del lado derecho del segmento de equilibrios L_k es consecuencia directa

de la prueba dada por Farkas [24, Teorema 3.1], del Teorema 27, la Proposición 98, y los Corolarios 96, 99, 101. Resaltamos en esta parte que como $g(\lambda, \cdot)$ es una función no decreciente, y $\left(\widehat{\xi}_2(k) - \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_2)}\right)$ es una función monótona decreciente, ya que de la segunda ecuación del sistema (4.81), se tiene

$$\partial_k \left(\widehat{\xi}_2(k) - \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_2)} \right) = -\partial_k \widehat{\xi}_1(k) \frac{p(\lambda, a_1)}{p(\lambda, a_2)},$$

y $\widehat{\xi}_1(k)$ es una función monótona creciente para $k \in (k_{a_2}, k_{a_1})$ por la Proposición 113. Entonces si k es incrementado de k_{a_2} a k_{a_1} el punto $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k), \widehat{\xi}_2(k))$ se mueve constantemente a lo largo de L_k del extremo del lado izquierdo, es decir $\widehat{\xi}_1(k_{a_2}) = 0$, al extremo del lado derecho o sea $\widehat{\xi}_2(k_{a_1}) = 0$; además el segmento L_k sufre un desplazamiento paralelo hacia arriba. En este proceso los puntos que se quedan detrás del punto $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k), \widehat{\xi}_2(k))$ pierden su estabilidad. Nosotros llamamos a este fenómeno de *bifurcación de zip no suave* recordando a Farkas al referirse al caso de bifurcación zip en sistemas suaves. \square

Un modelo artificial no suave (es decir $m_j > 0$), se comporta de forma similar a un modelo natural no suave, excepto en que la dirección del zip va en sentido contrario. La prueba del siguiente teorema es análoga a la del teorema anterior motivo por el cual sólo se presentará su enunciado.

Proposición 115 *Si los subsistemas del sistema no suave (2.1) asociados a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, $j = 1, 2$, son artificiales, y satisfacen las condiciones (2.8) a (2.15a) y (2.20) a (2.23), la condición de la variedad invariante (4.7) y la condición de compatibilidad de dominios (110); entonces existen k_{a_1} , k_{a_2} únicos, con $k_{\min} < k_{a_1} < k_{a_2} < k_{\max}$ tal que para todo $k \in (k_{\min}, k_{a_1})$ todos los puntos del segmento L_k son estables en el sentido de Lyapunov, y L_k es un atractor del sistema, en el sentido que existe una vecindad del segmento de equilibrios para el cual las soluciones con condiciones iniciales en esta vecindad tiende a un punto del segmento L_k cuando t tiende a infinito. Para $k \in (k_{a_1}, k_{a_2})$ el punto $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k), \widehat{\xi}_2(k))$, divide L_k en dos partes (una de las cuales puede ser vacía), donde $\widehat{\xi}_1(k)$ y $\widehat{\xi}_2(k)$ vienen dados por (4.81). Los puntos de L_k a la derecha del punto $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k), \widehat{\xi}_2(k))$ son inestables, los puntos a la izquierda son estables en el sentido de Lyapunov y forman un atractor*

Capítulo 4. Extensión de la bifurcación zip en modelos suave por tramos 199
del sistema. Para $k \in (k_{a_2}, k_{\max})$, el sistema no tiene puntos de equilibrios estables en el octante positivo del espacio cerrado s, x_1, x_2 .

A continuación se establece una clasificación de bifurcaciones en sistemas no suaves del tipo (2.1) cuando existen variedades invariantes de acuerdo al criterio de equivalencia geométrica dado en la Definición 14, las cuales denominamos *bifurcaciones geométricas de zip no suaves* o simplemente *bifurcaciones de zip no suaves*. Ahora las cadenas ascendentes de bifurcación no suaves son de la forma $k_1 \leq k_2 \leq k_3 \leq k_4 \leq k_5 \leq k_6$, para $k_i \in \{\bar{k}_{a_1}, \bar{k}_{a_2}, k_{b_{12}}, k_{b_{22}}, k_{b_{11}}, k_{b_{21}}\}$; $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, como consecuencia del Teorema 27 y las Proposiciones 38, 41, 61.

Es claro que la conmutación de índices en una cadena ascendente de bifurcación no-suave equivale a conmutar los subsistemas que componen el sistema no suave (2.1), por consiguiente se considera que ambas cadenas representan la misma clase de bifurcación del sistema no-suave (2.1), lo cual nos lleva a la siguiente observación.

Observación 116 *Dos cadenas de bifurcación no-suaves son equivalentes si al conmutar el último índice ($1 \leftrightarrow 2$) de una de ellas se obtiene la otra cadena.*

Es posible tener dos bifurcaciones no suaves distintas teniendo la misma cadena de bifurcación de representación asociada, como consecuencia de la Proposición 3.55, lo cual motiva la siguiente definición, que es tenida en cuenta en la demostración del teorema de clasificación de zip-no suave más adelante.

Definición 117 *Se denotan por \langle_1^j las cadenas de bifurcación zip del subsistema generado por el campo f_j con respecto a la componente imaginaria de los valores propios a lo largo del segmento de equilibrios que son del tipo*

$$k_{b_{2j}} \leq k_{b_{1j}},$$

por \langle_2^j las cadenas de bifurcación zip del subsistema generado por el campo f_j con respecto a la componente imaginaria de los valores propios a lo largo del segmento de equilibrios que son del tipo

$$k_{b_{1j}} \leq k_{b_{2j}},$$

por \langle_{11}^j las cadenas de bifurcación zip que pertenecen a \langle_1^j , satisfacen (3.55) y son del tipo

$$k_{b2j} \leq k_{b1j},$$

por \langle_{12}^j las cadenas de bifurcación zip que pertenecen a \langle_1^j , satisfacen (3.57) y son del tipo

$$k_{b2j} \leq k_{b1j},$$

por \langle_{21}^j las cadenas de bifurcación zip que pertenecen a \langle_2^j , satisfacen (3.56) y son del tipo

$$k_{b1j} \leq k_{b2j},$$

por \langle_{22}^j las cadenas de bifurcación zip que pertenecen a \langle_2^j , satisfacen (3.58) y son del tipo

$$k_{b1j} \leq k_{b2j}.$$

Observación 118 Por la Proposición 59, con $m_j \neq 0$, cada una de las cadenas de \langle_1^j o \langle_2^j pueden provenir de dos bifurcaciones tipo-zip distintas y si consideramos el par ordenado $(\langle_k^1, \langle_l^2)$ como representación de una bifurcación de tipo-zip del sistema no suave (2.1), entonces por la Observación 116, los pares del tipo $(\langle_1^1, \langle_1^2)$ o $(\langle_2^1, \langle_2^2)$ pueden originarse de tres bifurcaciones distintas de tipo-zip no suave (2.1) por la Definición 117, los cuales se corresponden con los pares siguientes

$$\begin{aligned} & \{(\langle_{11}^1, \langle_{11}^2), (\langle_{12}^1, \langle_{12}^2), (\langle_{11}^1, \langle_{12}^2)\}, \\ & \{(\langle_{21}^1, \langle_{21}^2), (\langle_{22}^1, \langle_{22}^2), (\langle_{21}^1, \langle_{22}^2)\}, \end{aligned}$$

respectivamente. También los pares del tipo $(\langle_1^j, \langle_2^j)$ o $(\langle_2^j, \langle_1^j)$ pueden originarse de cuatro bifurcaciones distintas de zip no suave (2.1) por la Definición 117, los cuales se corresponden con los pares siguientes

$$\begin{aligned} & \{(\langle_{11}^1, \langle_{11}^2), (\langle_{12}^1, \langle_{12}^2), (\langle_{11}^1, \langle_{12}^2), (\langle_{12}^1, \langle_{11}^2)\}, \\ & \{(\langle_{21}^1, \langle_{21}^2), (\langle_{22}^1, \langle_{22}^2), (\langle_{21}^1, \langle_{22}^2), (\langle_{22}^1, \langle_{21}^2)\} \end{aligned}$$

respectivamente.

Proposición 119 Si los subsistemas del sistema no suave (2.1) asociados a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, $j = 1, 2$, son no degenerados ($m_j \neq 0$ y $A_j - 2m_j c_j(k_{b2j}, a_2) \neq 0$), satisfacen las condiciones (2.8)-(2.15a), y (2.20)-(2.23), y la condición de la variedad invariante (4.7), entonces existen puntos de bifurcación $k_{b1j}, k_{b2j}, k_{a2j}, k_{a1j}, \in (k_{\min}, k_{\max})$ que forman una de las 40 cadenas ascendente de bifurcación zip no suave básicas en total, distribuidas en los catorce casos siguientes:

.i) Si $A_1 - 2m_1 c_1(k_{b21}, a_2) < 0$, $A_2 - 2m_2 c_2(k_{b22}, a_2) < 0$, $m_j < 0$, entonces se pueden presentar las siguientes cadenas de bifurcación zip

$$\begin{aligned} k_{b21} &\leq k_{b22} \leq \bar{k}_{a2} \leq k_{b12} \leq k_{b11} \leq \bar{k}_{a1}, \\ k_{b21} &\leq k_{b22} \leq k_{b12} \leq \bar{k}_{a2} \leq k_{b11} \leq \bar{k}_{a1}. \end{aligned}$$

ii) Si $A_1 - 2m_1 c_1(k_{b21}, a_2) < 0$, $A_2 - 2m_2 c_2(k_{b22}, a_2) < 0$, $m_j > 0$, entonces se pueden presentar las siguientes cadenas de bifurcación zip

$$\begin{aligned} k_{b21} &\leq k_{b22} \leq k_{b12} \leq k_{b11} \leq \bar{k}_{a2} \leq \bar{k}_{a1}, \\ k_{b21} &\leq k_{b22} \leq k_{b12} \leq k_{b11} \leq \bar{k}_{a1} \leq \bar{k}_{a2}. \end{aligned}$$

iii) Si $A_1 - 2m_1 c_1(k_{b21}, a_2) > 0$, $A_2 - 2m_2 c_2(k_{b22}, a_2) > 0$, $m_j < 0$, entonces se pueden presentar las siguientes cadenas de bifurcación zip

$$\begin{aligned} k_{b12} &\leq k_{b11} \leq k_{b21} \leq k_{b22} \leq \bar{k}_{a2} \leq \bar{k}_{a1}, \\ k_{b12} &\leq k_{b11} \leq k_{b21} \leq \bar{k}_{a1} \leq k_{b22} \leq \bar{k}_{a2}. \end{aligned}$$

vi) Si $A_1 - 2m_1 c_1(k_{b21}, a_2) > 0$, $A_2 - 2m_2 c_2(k_{b22}, a_2) > 0$, $m_j > 0$, entonces se pueden presentar las siguientes cadenas de bifurcación zip

$$\begin{aligned} k_{b12} &\leq k_{b11} \leq k_{b21} \leq k_{b22} \leq \bar{k}_{a1} \leq \bar{k}_{a2}, \\ k_{b12} &\leq k_{b11} \leq k_{b21} \leq \bar{k}_{a1} \leq k_{b22} \leq \bar{k}_{a2}. \end{aligned}$$

v) Si $A_1 - 2m_1 c_1(k_{b21}, a_2) < 0$, $A_2 - 2m_2 c_2(k_{b22}, a_2) > 0$, $m_j < 0$, entonces se pueden

presentar las siguientes cadenas de bifurcación zip

$$\begin{aligned}
 k_{b21} &\leq k_{b12} \leq k_{b22} \leq \bar{k}_{a2} \leq k_{b11} \leq \bar{k}_{a1}, \\
 k_{b12} &\leq k_{b21} \leq k_{b22} \leq \bar{k}_{a2} \leq k_{b11} \leq \bar{k}_{a1}, \\
 k_{b21} &\leq k_{b12} \leq k_{b22} \leq k_{b11} \leq \bar{k}_{a2} \leq \bar{k}_{a1}, \\
 k_{b12} &\leq k_{b21} \leq k_{b22} \leq k_{b11} \leq \bar{k}_{a2} \leq \bar{k}_{a1}, \\
 k_{b21} &\leq k_{b12} \leq k_{b11} \leq k_{b22} \leq \bar{k}_{a2} \leq \bar{k}_{a1}, \\
 k_{b12} &\leq k_{b21} \leq k_{b11} \leq k_{b22} \leq \bar{k}_{a2} \leq \bar{k}_{a1},
 \end{aligned}$$

vi) Si $A_1 - 2m_1c_1(k_{b21}, a_2) < 0$, $A_2 - 2m_2c_2(k_{b22}, a_2) > 0$, $m_j > 0$, entonces se pueden presentar las siguientes cadenas de bifurcación zip

$$\begin{aligned}
 k_{b21} &\leq k_{b12} \leq k_{b22} \leq k_{b11} \leq \bar{k}_{a1} \leq \bar{k}_{a2}, \\
 k_{b12} &\leq k_{b21} \leq k_{b22} \leq k_{b11} \leq \bar{k}_{a1} \leq \bar{k}_{a2}, \\
 k_{b21} &\leq k_{b12} \leq k_{b11} \leq k_{b22} \leq \bar{k}_{a1} \leq \bar{k}_{a2}, \\
 k_{b12} &\leq k_{b21} \leq k_{b11} \leq k_{b22} \leq \bar{k}_{a1} \leq \bar{k}_{a2}, \\
 k_{b21} &\leq k_{b12} \leq k_{b11} \leq \bar{k}_{a1} \leq k_{b22} \leq \bar{k}_{a2}, \\
 k_{b12} &\leq k_{b21} \leq k_{b11} \leq \bar{k}_{a1} \leq k_{b22} \leq \bar{k}_{a2}.
 \end{aligned}$$

vii) Si $A_1 - 2m_1c_1(k_{b21}, a_2) < 0$, $A_2 - 2m_2c_2(k_{b22}, a_2) < 0$, $m_j < 0$, entonces se pueden presentar las siguientes cadenas de bifurcación zip

$$\begin{aligned}
 k_{b22} &\leq k_{b21} \leq \bar{k}_{a2} \leq k_{b12} \leq k_{b11} \leq \bar{k}_{a1}, \\
 k_{b22} &\leq k_{b21} \leq k_{b12} \leq \bar{k}_{a2} \leq k_{b11} \leq \bar{k}_{a1}, \\
 k_{b22} &\leq k_{b12} \leq k_{b21} \leq \bar{k}_{a2} \leq k_{b11} \leq \bar{k}_{a1}, \\
 k_{b22} &\leq k_{b12} \leq k_{b21} \leq k_{b11} \leq \bar{k}_{a2} \leq \bar{k}_{a1}, \\
 k_{b22} &\leq k_{b21} \leq k_{b12} \leq k_{b11} \leq \bar{k}_{a2} \leq \bar{k}_{a1}.
 \end{aligned}$$

viii) Si $A_1 - 2m_1c_1(k_{b21}, a_2) < 0$, $A_2 - 2m_2c_2(k_{b22}, a_2) < 0$, $m_j > 0$, entonces se pueden presentar las siguientes cadenas de bifurcación zip

$$\begin{aligned}
 k_{b22} &\leq k_{b21} \leq k_{b12} \leq k_{b11} \leq \bar{k}_{a1} \leq \bar{k}_{a2}, \\
 k_{b22} &\leq k_{b12} \leq k_{b21} \leq k_{b11} \leq \bar{k}_{a1} \leq \bar{k}_{a2}.
 \end{aligned}$$

ix) Si $A_1 - 2m_1c_1(k_{b_{21}}, a_2) > 0$, $A_2 - 2m_2c_2(k_{b_{22}}, a_2) > 0$, $m_j < 0$, entonces se pueden presentar las siguientes cadenas de bifurcación zip

$$\begin{aligned} k_{b_{12}} &\leq k_{b_{11}} \leq k_{b_{22}} \leq k_{b_{21}} \leq \bar{k}_{a_2} \leq \bar{k}_{a_1}, \\ k_{b_{12}} &\leq k_{b_{22}} \leq k_{b_{11}} \leq k_{b_{21}} \leq \bar{k}_{a_2} \leq \bar{k}_{a_1}. \end{aligned}$$

x) Si $A_1 - 2m_1c_1(k_{b_{21}}, a_2) > 0$, $A_2 - 2m_2c_2(k_{b_{22}}, a_2) > 0$, $m_j > 0$, entonces se pueden presentar las siguientes cadenas de bifurcación zip

$$\begin{aligned} k_{b_{12}} &\leq k_{b_{11}} \leq k_{b_{22}} \leq k_{b_{21}} \leq \bar{k}_{a_1} \leq \bar{k}_{a_2}, \\ k_{b_{12}} &\leq k_{b_{11}} \leq k_{b_{22}} \leq \bar{k}_{a_1} \leq k_{b_{21}} \leq \bar{k}_{a_2}, \\ k_{b_{12}} &\leq k_{b_{22}} \leq k_{b_{11}} \leq k_{b_{21}} \leq \bar{k}_{a_1} \leq \bar{k}_{a_2}, \\ k_{b_{12}} &\leq k_{b_{22}} \leq k_{b_{11}} \leq \bar{k}_{a_1} \leq k_{b_{21}} \leq \bar{k}_{a_2}, \\ k_{b_{12}} &\leq k_{b_{11}} \leq \bar{k}_{a_1} \leq k_{b_{22}} \leq k_{b_{21}} \leq \bar{k}_{a_2}. \end{aligned}$$

xi) Si $A_1 - 2m_1c_1(k_{b_{21}}, a_2) < 0$, $A_2 - 2m_2c_2(k_{b_{22}}, a_2) > 0$, $m_j < 0$, entonces se pueden presentar las siguientes cadenas de bifurcación zip

$$\begin{aligned} k_{b_{12}} &\leq k_{b_{22}} \leq k_{b_{21}} \leq \bar{k}_{a_2} \leq k_{b_{11}} \leq \bar{k}_{a_1}, \\ k_{b_{12}} &\leq k_{b_{22}} \leq k_{b_{21}} \leq k_{b_{11}} \leq \bar{k}_{a_2} \leq \bar{k}_{a_1}. \end{aligned}$$

xii) Si $A_1 - 2m_1c_1(k_{b_{21}}, a_2) < 0$, $A_2 - 2m_2c_2(k_{b_{22}}, a_2) > 0$, $m_j > 0$, entonces se pueden presentar las siguientes cadenas de bifurcación zip

$$k_{b_{12}} \leq k_{b_{22}} \leq k_{b_{21}} \leq k_{b_{11}} \leq \bar{k}_{a_1} \leq \bar{k}_{a_2}.$$

xiii) Si $A_1 - 2m_1c_1(k_{b_{21}}, a_2) > 0$, $A_2 - 2m_2c_2(k_{b_{22}}, a_2) < 0$, $m_j < 0$, entonces se pueden presentar las siguientes cadenas de bifurcación zip

$$k_{b_{22}} \leq k_{b_{12}} \leq k_{b_{11}} \leq k_{b_{21}} \leq \bar{k}_{a_2} \leq \bar{k}_{a_1}.$$

xiv) Si $A_1 - 2m_1c_1(k_{b_{21}}, a_2) > 0$, $A_2 - 2m_2c_2(k_{b_{22}}, a_2) < 0$, $m_j > 0$, entonces se pueden presentar las siguientes cadenas de bifurcación zip

$$\begin{aligned} k_{b_{22}} &\leq k_{b_{12}} \leq k_{b_{11}} \leq k_{b_{21}} \leq \bar{k}_{a_1} \leq \bar{k}_{a_2}, \\ k_{b_{22}} &\leq k_{b_{12}} \leq k_{b_{11}} \leq \bar{k}_{a_1} \leq k_{b_{21}} \leq \bar{k}_{a_2}. \end{aligned}$$

Además por la Observación 118, éstas 40 cadenas de bifurcación zip no-suave se originan de un escenario de bifurcaciones geométricas del tipo zip de naturaleza no-suave, el cual está conformado por un total de 142 casos de bifurcación.

Prueba: Como consecuencia directa de las Proposiciones 38, 41, 61 y del Teorema 27, se tiene que toda cadena de bifurcación zip no-suave del sistema no suave (2.1) es determinada por los siguientes 6 parámetros de bifurcación

$$k_{b21}, k_{b12}, k_{b22}, k_{b11}, \bar{k}_{a1}, \bar{k}_{a2}.$$

De las Definiciones 41, 90, y el Lema 111, se tiene que toda cadena de bifurcación zip del sistema no-suave (2.1) satisface una de las siguientes desigualdades

$$(k_{b21} \leq k_{b22} \leq \bar{k}_{a2} \text{ y } k_{b12} \leq k_{b11} \leq \bar{k}_{a1}), \quad (4.92)$$

$$(k_{b22} \leq k_{b21} \leq \bar{k}_{a2} \text{ y } k_{b12} \leq k_{b11} \leq \bar{k}_{a1}), \quad (4.93)$$

$$(k_{b22} \leq k_{b21} \leq \bar{k}_{a2} \text{ y } k_{b11} \leq k_{b12} \leq \bar{k}_{a1}), \quad (4.94)$$

$$(k_{b21} \leq k_{b22} \leq \bar{k}_{a2} \text{ y } k_{b11} \leq k_{b12} \leq \bar{k}_{a1}). \quad (4.95)$$

Sin pérdida de generalidad se supone inicialmente las cadenas de bifurcación de la condición (4.92). Pero el conjunto de cadenas de bifurcación zip satisfaciendo la condición (4.92) se corresponde mediante la siguiente asignación

$$k_{b21} = 1; k_{b22} = 2; \bar{k}_{a2} = 3,$$

$$k_{b12} = 4; k_{b11} = 5; \bar{k}_{a1} = 6,$$

con el conjunto de tripletas (k_1, k_2, k_3) formadas con los números del uno al seis tal que

$$k_1 < k_2 < k_3;$$

cuyo número viene expresado por la siguiente fórmula

$$\sum_{m=1}^4 m(6 - m - 1) = 20,$$

donde m es el número de posibilidades de escoger la primera de las tres casillas posibles y $(6 - m - 1)$ es el número de posibilidades de escoger la segunda de las dos

casillas restantes. El conjunto de las 20 cadenas de bifurcación zip que satisfacen la condición (4.92) coinciden con las presentadas arriba en los numerales de i) al vi) de las cuales 8 corresponden a cadenas de bifurcación zip del tipo $(\langle_1^j, \langle_1^j)$ o $(\langle_2^j, \langle_2^j)$ y pueden originarse de un total de veinte cuatro tipos de bifurcación zip no suave. Las 12 cadenas restantes corresponden a cadenas de bifurcación zip no-suave del tipo $(\langle_1^j, \langle_2^j)$ o $(\langle_2^j, \langle_1^j)$ y pueden originarse de un total de treinta seis tipos de bifurcación zip no-suave. Luego el número de tipos de bifurcación zip no suave que se corresponde con la condición (4.92) en el sistema no suave (2.1) es de setenta y dos. Siguiendo un procedimiento similar al realizado para la condición (4.92), obtenemos para la condición (4.93) las cadenas presentadas en los numerales de vii) al xii) de las cuales 10 corresponden a cadenas de bifurcación zip no-suave del tipo $(\langle_1^j, \langle_1^j)$ o $(\langle_2^j, \langle_2^j)$ y pueden originarse de un total de treinta tipos de bifurcación zip no-suave. Las 10 cadenas restantes corresponden a cadenas de bifurcación zip no-suave del tipo $(\langle_1^j, \langle_2^j)$ o $(\langle_2^j, \langle_1^j)$ y pueden originarse de un total de cuarenta tipos de bifurcación zip no-suave, luego el número de tipos de bifurcaciones zip no-suave que se corresponde con la condición (4.93) en el sistema no suave (2.1) es de setenta. Sumando el número de tipos de bifurcaciones zip no suave que se corresponde con las condiciones (4.92) y (4.93) en el sistema no suave se tiene un total de ciento cuarenta y dos tipos de bifurcaciones zip no-suave por lo cual sólo resta mostrar que las cadenas de bifurcación zip no-suave obtenidas por las condiciones (4.92) y (4.93) son diferentes entre sí y que además no existe nuevas cadenas de bifurcación zip no-suave generadas por las condiciones (4.94) y (4.95) salvo equivalencias. Como las cadenas de bifurcación zip generadas por la condición (4.93) no pueden ser obtenidas por conmutación de los últimos índices ($1 \leftrightarrow 2$) de las cadenas de bifurcación zip no-suave obtenidas de la condición (4.92) se concluyen que estas no pueden ser equivalentes con lo cual sólo falta mostrar por la simetría del procedimiento, que las cadenas de bifurcación zip no-suave generadas por la condición (4.92) son diferentes entre sí, pero esto es cierto, ya que al conmutar los últimos índices de una de las cadenas ($1 \leftrightarrow 2$) generadas por la condición (4.92) no puede obtenerse una cadena de bifurcación zip que satisfaga la condición (4.92) porque la desigualdad $k_{b22} \leq k_{b21}$ cambia de sentido con lo cual se concluye que las cadenas de bifurcación de zip generadas por las condiciones (4.92)

y (4.93) son diferentes entre sí. También se observa por conmutación de los últimos índices de las cadenas, que las cadenas de bifurcación zip no-suave generadas por las condiciones (4.92) y (4.94) son equivalentes, así mismo las cadenas de bifurcación zip no-suave generadas por las condiciones (4.93) y (4.95) son equivalentes con lo cual se concluye el enunciado. \square

4.5 Bifurcación Hopf en el sistema perturbado

4.5.1 Planteamiento del sistema

Se considera ahora el sistema de ecuaciones diferenciales tridimensional no suave (4.2) con el objetivo de determinar la existencia de la bifurcación de Hopf en cada una de las variedades invariantes bidimensionales que intersectan transversalmente el segmento de equilibrios L_k . La dificultad para determinar la existencia de la bifurcación de Hopf tanto en sistemas suaves como no-suaves, está en la determinación de la forma analítica de las variedades invariantes que intersectan el segmento de equilibrios L_k ; sin embargo en el sistema perturbado (4.2) si es posible; desde luego nos permite establecer la existencia de la bifurcación de Hopf en el sistema suave (4.2) (el perturbado suave de modelos naturales y artificiales) y la existencia de la bifurcación de Hopf-Zou & Küpper en el sistema no suave (4.2) (el perturbado no suave de modelos naturales y artificiales) en cada una de las variedades invariantes que intersectan transversalmente el segmento de equilibrios L_k , como consecuencia directa del Corolario 99. Respecto de la existencia de la bifurcación de Hopf en el sistema suave (2.1) (modelos naturales y artificiales suaves) y la existencia de la bifurcación de Hopf-Zou & Küpper en el sistema no suave (2.1) (modelos naturales y artificiales no suaves) en cada una de las variedades invariantes que intersectan transversalmente el segmento de equilibrios L_k se establece la hipótesis de que la conjetura sigue siendo válida si el sistema no suave (2.1) preserva las variedades invariantes bidimensionales bajo variación del parámetro k , como consecuencia directa del Corolario 99, como ocurre en los sistemas degenerados no suaves del tipo (2.1)

Antes de considerar la existencia de la bifurcación de Hopf en el sistema no suave (4.2) se considera en primer lugar la demostración del caso suave no degenerado. En este caso las hipótesis adoptadas implican que los subsistemas del sistema no suave (4.2) generado por los campos perturbados $\tilde{f}_j, j = 1, 2$, adoptan las formas siguientes

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \gamma s g(s, k) - x_1 (p_j(\lambda, a_1) + z_{1j}(s - \lambda)) - x_2 (p_j(\lambda, a_2) + z_{2j}(s - \lambda)) \\ \dot{x}_1 &= x_1 z_{1j}(s - \lambda) \\ \dot{x}_2 &= x_2 z_{2j}(s - \lambda). \end{aligned} \tag{4.96}$$

4.5.2 Equilibrios del sistema

Los equilibrios del sistema (4.96) son $Q_1(0, 0, 0)$, $Q_2(k, 0, 0)$, y los puntos del segmento de línea recta L_k en el octante positivo del espacio dado por

$$\begin{aligned} L_k &= \{(s, x_1, x_2) \in R^3 : p_j(\lambda, a_1)x_1 + p_j(\lambda, a_2)x_2 = \gamma \lambda g(\lambda, k), \\ & \quad s = \lambda, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}. \end{aligned} \tag{4.97}$$

Los puntos que pertenecen a L_k se denotan con (λ, ξ_1, ξ_2) . Los puntos extremos del segmento de línea L_k , es decir, los equilibrios en los planos $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$, respectivamente, son:

$$\begin{aligned} P_1 &= (\lambda, 0, \xi_2) = \left(\lambda, 0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_2)}\right) \\ P_2 &= (\lambda, \xi_1, 0) = \left(\lambda, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)}, 0\right). \end{aligned} \tag{4.98}$$

Por linealización se observa que Q_1 es inestable y que Q_2 es asintóticamente estable para $k < \lambda$, e inestable para $k > \lambda$. Se conoce de Hsu et ál. [47] y Butler [7] que $k > \lambda$, es una condición necesaria para la supervivencia de cada predador. Además en lo que sigue se considera el sistema (4.96) satisface las condiciones Butler [7] y Farkas [27] y que la siguiente desigualdad se tiene

$$0 < \lambda = \lambda_1 = \lambda_2 < k. \tag{4.99}$$

Por la condición (2.10), si k es menor que λ , entonces L_k es vacío, y si $k = \lambda$, entonces L_k consta sólo del origen Q_1 . Por lo tanto nos limitaremos al estudio de los puntos sobre el segmento de línea recta L_k .

Al dividir la tercera ecuación por la segunda ecuación del sistema (4.96) se obtienen las ecuaciones de las trayectorias que satisfacen la ecuación diferencial $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2 z_{2j}}{x_1 z_{1j}}$.

Por lo tanto se sigue que la función $f_j(x_2, x_1) = c_j (x_1)^{\frac{z_{2j}}{z_{1j}}}$ es una integral primera del sistema (4.96). Como una consecuencia, las superficies:

$$x_2 = c_j (x_1)^{\frac{z_{2j}}{z_{1j}}}, \quad c_j \geq 0, \quad (4.100)$$

son variedades invariantes del sistema (4.96), donde c_j es una constante arbitraria no negativa; es claro que estas superficies particionan completamente el octante positivo es decir a través de cada punto en este octante pasa una y sólo una superficie de la familia (4.100). Se fija el valor de c_j y se considera la restricción del sistema (4.96) a la variedad invariante (4.100) parametrizada por s y x_1

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \gamma s g(s, k) - x_1 p_j(s, a_1) - c_j (x_1)^{\frac{z_{2j}}{z_{1j}}} p_j(s, a_2) \\ \dot{x}_1 &= x_1 p_j(s, a) - p_j(\lambda, a) x_1. \end{aligned} \quad (4.101)$$

Los equilibrios de (4.101) son $(s, x_1) = (0, 0)$, $(s, x_1) = (k, 0)$ y el punto singular en el cual la línea L_k intercepta (4.100). Así el punto de intersección se denota con (λ, ξ_1, ξ_2) , donde $\xi_2 = c_j (\xi_1)^{\frac{z_{2j}}{z_{1j}}}$, y ξ_1 viene dado implícitamente por

$$\gamma \lambda g(\lambda, k) - \xi_1 p_j(\lambda, a_1) - c_j \xi_1^{\frac{z_{2j}}{z_{1j}}} p_j(\lambda, a_2) = 0. \quad (4.102)$$

Igualmente podemos ver que los equilibrios $(0, 0)$ y $(k, 0)$ son inestables. Si se estudia la estabilidad del equilibrio $P(c_j, k) = (\lambda, \xi_1(c_j, k))$ del sistema (4.101), donde ξ_1 es la solución positiva de (4.102), la capacidad de carga k puede ser considerada como un parámetro de bifurcación. Al variar $k > \lambda$, la línea de equilibrios L_k se mueve paralelamente y corta los planos (4.100) en diferentes puntos $(\xi_1(c_j, k), \xi_2(c_j, k))$. Se usa la notación abreviada $\xi_1 = \xi_1(c_j, k)$ en algunas ocasiones. El siguiente teorema está relacionado con el sistema (4.101) sobre la variedad definida por (4.100).

Teorema 120 *Existe un único $k_0 > k$ tal que si $\lambda < k < k_0$, el equilibrio $(\lambda, \xi_1(c, k))$ del sistema (4.101) es asintóticamente estable con región de atractividad $\{(s, x_1) : s > 0, x_1 > 0\}$; en k_0 el sistema está bajo una bifurcación de Hopf supercrítica o subcrítica, dependiendo del signo de la constante de Poincaré-Lyapunov. Si la bifurcación de Hopf es supercrítica, existe un $\delta > 0$ tal que para $k_0 < k < k_0 + \delta$, en el sistema (4.101) tiene una única trayectoria cerrada dentro de una vecindad de $(\lambda, \xi_1(c, k))$ rodeando este punto de equilibrio. Esta trayectoria cerrada es orbital asintóticamente estable.*

Prueba: Se mueve el origen al punto de equilibrio $(s, x_1) = (\lambda, \xi_1)$ del sistema (4.101) por la transformación de coordenadas $y_1 = s - \lambda$, $y_2 = x_1 - \xi_1$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \gamma(y_1 + \lambda)g(y_1 + \lambda, k) - (y_2 + \xi_1)p_j(y_1 + \lambda, a_1) - c_j(y_2 + \xi_1)^{\frac{z_{2j}}{z_{1j}}} p_j(y_1 + \lambda, a_2) \\ \dot{y}_2 &= (y_2 + \xi_1)p_j(y_1 + \lambda, a_1) - p_j(\lambda, a_1)(y_2 + \xi_1), \end{aligned} \quad (4.103)$$

donde ξ_1 ha sido expresado en función de c_j , en la expresión (4.102). El sistema (4.103) tiene al punto $(0, 0)$ como un punto de equilibrio para $\xi_1 \geq 0$, y $k > \lambda$. Si se linealiza el sistema (4.103) en el origen, el polinomio característico del sistema linealizado será:

$$\begin{aligned} D(\mu, k)I &= \mu^2 + \mu(-\gamma g(\lambda, k) - \gamma \lambda \partial_s g(\lambda, k) + \xi_1 \partial_s p_j(\lambda, a_1) + c_j \xi_1^{\frac{z_{2j}}{z_{1j}}} \partial_s p_j(\lambda, a_2)) \\ &+ \xi_1 p_j(\lambda, a_1) \partial_s p_j(\lambda, a_1) + c_j \xi_1^{\frac{z_{2j}}{z_{1j}}} p_j(\lambda, a_2) \partial_s p_j(\lambda, a_2). \end{aligned} \quad (4.104)$$

Sobre la linealización del sistema (4.103) en $P(0, 0)$, los valores propios $u_{1,2}(k_0)$ llegan a ser de la forma:

$$\begin{aligned} u_{1,2}(k_0) &= \alpha_j(k) \pm i\beta_j \\ \alpha_j(\xi_1, k) &= \frac{1}{2} \left(\gamma g(\lambda, k) + \gamma \lambda \partial_s g(\lambda, k) + \xi_1 \partial_s p_j(\lambda, a_1) + c_j \xi_1^{\frac{z_{2j}}{z_{1j}}} \partial_s p_j(\lambda, a_2) \right) \\ \beta_j(\xi_1, k) &= \sqrt{\left(\xi_1 p_j(\lambda, a_1) \partial_s p_j(\lambda, a_1) + c_j \xi_1^{\frac{z_{2j}}{z_{1j}}} p_j(\lambda, a_2) \partial_s p_j(\lambda, a_2) \right) - \alpha_j(k)^2} \end{aligned}$$

En lo que sigue, se muestra que existe un punto singular $k_0 > \lambda$, para el cual se cumple que la parte real de los valores propios es negativa, si y sólo si $k < k_0$. Así

que el origen es *asintóticamente estable* para $\lambda < k < k_0$, e inestable si $k > k_0$. La *atractividad global* se sigue de Hsu [47] y Wilken [96].

El siguiente argumento muestra la existencia y unicidad de k :

Sea la función $\alpha_j(\xi_1, k)$ la parte real de los valores propios conjugados del polinomio característico (4.104) como una función de k , con c_j fijo, es decir

$$\alpha_j(\xi_1, k) = (-\gamma g(\lambda, k) - \gamma \lambda g_s(\lambda, k) + \xi_1 p_s(\lambda, a_1) + c_j \xi_1^{\frac{z_{2j}}{z_{1j}}} p_s(\lambda, a_2)), \quad (4.105)$$

se ve en primer lugar que $\alpha_j(\xi_1, k)$ es una función estrictamente creciente, en efecto teniendo en cuenta la igualdad (4.102) en (4.105) se tiene que

$$\begin{aligned} \alpha_j(\xi_1, k) &= a_j(\xi_1, k) = \frac{p_j(\lambda, a_1) \partial_s p_j(\lambda, a_2) - p_j(\lambda, a_2) \partial_s p_j(\lambda, a_1)}{2p_j(\lambda, a_2)} \xi_1 \\ &\quad + \frac{\gamma \lambda \partial_s g(\lambda, k)}{2} + \frac{\gamma g(\lambda, k)(p_j(\lambda, a_2) - \lambda \partial_s p_j(\lambda, a_2))}{2p_j(\lambda, a_2)}, \end{aligned}$$

además por el Lema 36, $\alpha_j(\xi_1, k)$ es creciente y existe único $\bar{k}(\xi_1) = k_0$ tal que $\alpha_j(\xi_1, k_0) = 0$, $\xi_1 \in [0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)}]$, luego se tiene que $\lambda < k < k_0$, $\alpha_j(k) < 0$. A continuación se verifican las condiciones para la existencia de la bifurcación de Hopf supercrítica o subcrítica, dependiendo del signo de la constante de Poincaré-Lyapunov.

En k_0 , se satisface la ecuación

$$\alpha_j(\xi_1, k_0) = 0, \quad (4.106)$$

sustituyendo el valor de $\alpha(\xi_1, k_0) = 0$ en la expresión de $\beta_j(\xi_1, k)$ se tiene:

$$\beta_j(\xi_1, k) = \sqrt{\left(\xi_1 p_j(\lambda, a_1) \partial_s p_j(\lambda, a_1) + c_j \xi_1^{\frac{z_{2j}}{z_{1j}}} p_j(\lambda, a_2) \partial_s p_j(\lambda, a_2) \right)} > 0, \quad (4.107)$$

ya que $c_j > 0$, $\frac{z_{2j}}{z_{1j}} > 0$ y $\partial_s p_j(\lambda, a_j) > 0$.

Además por el Lema 36, $\alpha_j(\xi_1, k)$ es creciente en la variable k en particular

$$\partial_k \alpha_j(\xi_1, k_0) > 0; \quad (4.108)$$

así, las condiciones (4.106), (4.107) y (4.108) del Teorema de bifurcación de Andronov Hopf se cumplen según Hassard [43]. \square

A continuación se muestra la existencia de la bifurcación de hopf en el sistema no suave (2.1). Se considera que se tiene el análisis anterior para cada subsistema del sistema no suave (4.3) generado por el campo perturbado \tilde{f}_j . Adicionalmente se asume que se satisface la condición de la variedad invariante (4.7) para el sistema no suave (4.3). Por lo tanto se tiene

$$\begin{aligned} c_1 &= c_2 = c, \\ \frac{z_{21}}{z_{11}} &= \frac{z_{22}}{z_{12}} = \frac{z_{2j}}{z_{1j}}, \end{aligned}$$

y además que las fronteras de las superficies invariantes a cada lado de la superficie de conmutación del sistema (4.3) coinciden y vienen dadas por

$$x_2 = c(x_1)^{\frac{z_{2j}}{z_{1j}}}, \quad c \geq 0, \quad (4.109)$$

donde c es una constante arbitraria no negativa; es claro que estas superficies particionan completamente el octante positivo es decir a través de cada punto en este octante pasa una y sólo una superficie de la familia (4.100). Se fija el valor de c y se considera la restricción del sistema no suave (4.96) a la variedad invariante (4.100) parametrizada por s y x_1

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \gamma s g(s, k) - x_1 p_j(s, a_1) - c(x_1)^{\frac{z_{2j}}{z_{1j}}} p_j(s, a_2) \\ \dot{x}_1 &= x_1 p_j(s, a) - p_j(\lambda, a) x_1. \end{aligned} \quad (4.110)$$

Los equilibrios de (4.110) son $(s, x_1) = (0, 0)$, $(s, x_1) = (k, 0)$ y el punto singular en el cualla línea L_k intercepta la variedad dada en (4.109). Así el punto de intersección se denota con (λ, ξ_1, ξ_2) donde $\xi_2 = c(\xi_1)^{\frac{z_{2j}}{z_{1j}}}$, y ξ_1 viene dado implícitamente por

$$\gamma \lambda g(\lambda, k) - \xi_1 p(\lambda, a_1) - c \xi_1^{\frac{z_{2j}}{z_{1j}}} p(\lambda, a_2) = 0. \quad (4.111)$$

Igualmente podemos ver que los equilibrios $(0, 0)$ y $(k, 0)$ son inestables. Si se estudia la estabilidad del equilibrio $P(c, k) = (\lambda, \xi_1(c, k))$ del sistema (4.101), donde ξ_1 es la solución positiva de (4.111), la capacidad de carga k puede ser considerada como un parámetro de bifurcación. Al variar $k > \lambda$, la línea de equilibrios L_k se mueve paralelamente y corta los planos (4.100) en diferentes puntos $(\xi_1(c, k), \xi_2(c, k))$. Se usa la notación abreviada $\xi_1 = \xi_1(c, k)$ en algunas ocasiones. El siguiente teorema está relacionado con el sistema no suave (4.110) sobre la variedad definida por (4.109).

Teorema 121 *Existe un único $\bar{k}_0 > k$ tal que si $\lambda < k < \bar{k}_0$, el equilibrio $(\lambda, \xi_1(c, k))$ del sistema (4.110) es asintóticamente estable con región de atractividad $\{(s, x_1) : s > 0, x_1 > 0\}$; en \bar{k}_0 el sistema está bajo una bifurcación de Hopf no suave supercrítica o subcrítica, dependiendo del signo de la constante de Poincaré-Lyapunov. Si la bifurcación de Hopf es supercrítica, existe un $\delta > 0$, tal que para $\bar{k}_0 < k < \bar{k}_0 + \delta$, en el sistema (4.110) tiene una única trayectoria cerrada dentro de una vecindad de $(\lambda, \xi_1(c, k))$ rodeando este punto de equilibrio. Esta trayectoria cerrada es orbital asintóticamente estable.*

Prueba: Se mueve el origen al punto de equilibrio $(s, x_1) = (\lambda, \xi_1)$ del sistema (4.110) por la transformación de coordenadas $y_1 = s - \lambda$, $y_2 = x_1 - \xi_1$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \gamma(y_1 + \lambda)g(y_1 + \lambda, k) - (y_2 + \xi_1)p_j(y_1 + \lambda, a_1) - c(y_2 + \xi_1)^{\frac{z_{2j}}{z_{1j}}} p_j(y_1 + \lambda, a_2) \\ \dot{y}_2 &= (y_2 + \xi_1)p_j(y_1 + \lambda, a_1) - p_j(\lambda, a_1)(y_2 + \xi_1), \end{aligned} \quad (4.112)$$

donde ξ_1 ha sido expresado en función de c , en la expresión (4.111). El sistema (4.112) tiene a $(0, 0)$ como un punto de equilibrio para $\xi_1 \geq 0$, y $k > \lambda$. Si se linealiza cada subsistema del sistema (4.112) asociado a los campos f_j , $j = 1, 2$, en el origen, los polinomios característico serán:

$$\begin{aligned} D(\mu, k)I &= \mu^2 + \mu(-\gamma g(\lambda, k) - \gamma \lambda \partial_s g(\lambda, k) + \xi_1 \partial_s p_j(\lambda, a_1) + c_j \xi_1^{\frac{z_{2j}}{z_{1j}}} \partial_s p_j(\lambda, a_2)) \\ &+ \xi_1 p_j(\lambda, a_1) \partial_s p_j(\lambda, a_1) + c_j \xi_1^{\frac{z_{2j}}{z_{1j}}} p_j(\lambda, a_2) \partial_s p_j(\lambda, a_2), \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (4.113)$$

Sobre la linealización del sistema (4.112) en $P(0, 0)$, los valores propios $u_{1,2}(k_0)$ llegan a ser de la forma:

$$\begin{aligned} u_{1,2}(k_0) &= \alpha_j(k) \pm i\beta_j \\ \alpha_j(\xi_1, k) &= -\frac{1}{2} \left(-\gamma g(\lambda, k) - \gamma \lambda \partial_s g(\lambda, k) + \xi_1 \partial_s p_j(\lambda, a_1) + c \xi_1^{\frac{z_{2j}}{z_{1j}}} \partial_s p_j(\lambda, a_2) \right) \end{aligned} \quad (4.114)$$

$$\beta_j(\xi_1, k) = \sqrt{\left(\xi_1 p(\lambda, a_1) \partial_s p_j(\lambda, a_1) + c \xi_1^{\frac{z_{2j}}{z_{1j}}} p_j(\lambda, a_2) \partial_s p_j(\lambda, a_2) \right) - \alpha(k)^2} \quad (4.115)$$

En lo que sigue, se muestra que existe un punto singular $k_0 > \lambda$, para el cual se cumple que los valores propios de la linealización de los subsistemas del sistema (4.112) tienen como suma de cocientes de la parte real e imaginaria valor negativo, es decir $(\alpha(\xi_1, k) = \frac{a_1(\xi_1, k)}{b_1(\xi_1, k)} + \frac{a_2(\xi_1, k)}{b_2(\xi_1, k)} < 0)$, si y sólo si $k < k_0$. Así que el origen es *asintóticamente estable* para $\lambda < k < k_0$, e inestable si $k > k_0$. La *atractividad global* se sigue como consecuencia del Teorema 27, y el Corolario 99.

Para demostrar la existencia y unicidad de \bar{k}_0 se demuestra en primer lugar que

$$\begin{aligned}\alpha_j(\xi_1, k) &= a_j(\xi_1, k), \\ \beta_j(\xi_1, k) &= b_j(\xi_1, k).\end{aligned}$$

En efecto teniendo en cuenta la igualdad (4.111) en (4.114), se tiene

$$\begin{aligned}\alpha_j(\xi_1, k) &= a_j(\xi_1, k) = \frac{p_j(\lambda, a_1)\partial_s p_j(\lambda, a_2) - p_j(\lambda, a_2)\partial_s p_j(\lambda, a_1)}{2p_j(\lambda, a_2)}\xi_1 \\ &+ \frac{\gamma\lambda\partial_s g(\lambda, k)}{2} + \frac{\gamma g(\lambda, k)(p_j(\lambda, a_2) - \lambda\partial_s p_j(\lambda, a_2))}{2p_j(\lambda, a_2)}.\end{aligned}\quad (4.116)$$

Además sustituyendo la igualdad (4.116), junto con la expresión de las superficies invariantes (4.109) en la expresión (4.115) se obtiene

$$\beta_j(\xi_1, k) = \sqrt{-a_j^2(\xi_1, k) + \xi_1 p_j(\lambda, a_1)\partial_s p_j(\lambda, a_1) + \xi_2 p_j(\lambda, a_2)\partial_s p_j(\lambda, a_2)}, \quad (4.117)$$

y substituyendo ξ_2 de la igualdad (4.111) en (4.117), se obtiene

$$\beta_j(\xi_1, k) = b_j(\xi_1, k), \quad (4.118)$$

donde

$$b_j(\xi_1, k) = \sqrt{-a_j^2(\xi_1, k) + \xi_1 p_j(\lambda, a_1)(\partial_s p_j(\lambda, a_1) - \partial_s p_j(\lambda, a_2)) + \gamma\lambda g(\lambda, k)\partial_s p_j(\lambda, a_2)}$$

Además de (4.116), (4.118) y el Lema 111, se tiene finalmente que $a(\xi_1, k)$ es creciente y existe único $\bar{k}(\xi_1) = \bar{k}_0$, tal que $\alpha(\xi_1, \bar{k}_0) = 0$, y $\xi_1 \in [0, \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)}]$, y $a(\xi_1, k) < 0$, sólo si $k_{\min} < k < \bar{k}_0$. A continuación se verifican las condiciones para la existencia de la bifurcación de Hopf-Zou & Küpper no-suave supercrítica o subcrítica dadas en el Teorema 25, dependiendo del signo de la constante de Poincaré-Lyapunov..

En \bar{k}_0 se satisface la ecuación

$$\alpha(\xi_1, \bar{k}_0) = 0. \quad (4.119)$$

Como consecuencia del Lema 40, la parte ii) del Lema 111, y la Definición 92, se tiene que

$$\bar{k}_0 > k_{a \min} > \bar{k}_{b \max}(\xi_1) \geq \bar{k}_1(\xi_1), \bar{k}_2(\xi_1). \quad (4.120)$$

Además por el Lema (40) $\beta_j(\xi_j, \bar{k}_j(\xi_1)) = 0$, luego

$$0 < \beta_j(\xi_1, \bar{k}_{b \max}(\xi_1)), \beta_j(\xi_1, \bar{k}_{b \max}(\xi_1)) \text{ con } \xi_1 \in [0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)}]. \quad (4.121)$$

De la parte ii) del Lema 111 $\alpha(\xi_1, \bar{k}_0)$ es creciente con k , luego de (4.120) y (4.121), se tiene que

$$\beta_j(\xi_1, \bar{k}_0) > 0, j = 1, 2. \quad (4.122)$$

También por el Lema 40, y la igualdad (4.119), $\alpha(\xi_1, k)$ es creciente en la variable k , en particular

$$\partial_k \alpha(\xi_1, k_0) > 0; \quad (4.123)$$

así, las condiciones (4.119), (4.122) y (4.123) del Teorema 25 de bifurcación de Hopf-Zou & Küpper no suave se cumplen. \square

Capítulo 5

Persistencia de la atractividad del zip en sistemas no suaves

En este capítulo se analiza la dinámica del sistema no suave (2.1) cuando los subsistemas del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$ no satisfacen la condición de la variedad invariante (4.7). En este caso las fronteras de las variedades invariantes bidimensionales de cada subsistema del sistema (2.1) no coinciden sobre la superficie de conmutación, como consecuencia de ello se tiene que las únicas variedades invariantes bidimensionales del sistema son los planos coordenados por lo cual el método para determinar la estabilidad de los puntos del segmento de equilibrios a partir de la linealización de los subsistemas del sistema no suave (2.1) generado por los campos f_j , $j = 1, 2$, no es aplicable y se requiere entonces conocer la forma como estas variedades cortan transversalmente la superficie de conmutación para así determinar una regla decaimiento de la órbita, esta vez no con respecto al equilibrio asociado a la variedad, si no con respecto al segmento de equilibrios L_k .

Ahora con cada conmutación la órbita en cada lado de la superficie de conmutación sobre las subvariedades bidimensionales respectivas van cambiando sus centros de equilibrio en la dirección del zip. Sin embargo se puede demostrar que la atractividad del segmento de equilibrios L_k persiste a pesar de la conmutación de las órbitas del sistema no suave (2.1). Dado que la condición de la variedad invariante (4.7) no se

tiene más, se restringe el siguiente análisis a sistemas en los cuales los subsistemas del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$ son parcialmente del mismo tipo, véase Definición 102.

A continuación se considera una notación preliminar de los elementos geométricos de interés de las intersecciones de las variedades invariantes con la superficie de discontinuidad π , véase Figura 5.1.

Definición 122 *Considere las variedades invariantes*

$$x_2 = c_j(x_1)^{\frac{z_{2j}}{z_{1j}}}, \quad c_j \geq 0, \frac{z_{2j}}{z_{1j}} = \bar{c}_j, \quad j = 1, 2, \quad (5.1)$$

donde z_{1j} y z_{2j} vienen dados por (4.1) y los siguientes elementos geométricos:

- $(\lambda, x_{11}, x_{21})$ es la condición inicial de la órbita que pertenece a los entornos tubulares $T_{M_{k1}} \subset T_{M_{k2}}$ del segmento de equilibrios L_k de los subsistemas 1 y 2 del sistema no suave (2.1) respectivamente, los cuales satisfacen las condiciones de la Proposición 98.
- $(\lambda, x_{11q}, x_{21q})$ es el punto de equilibrio contenido en la variedad invariante definida por la condición inicial $(\lambda, x_{11}, x_{21})$.
- \bar{x}_{11} es la distancia entre la condición inicial $(\lambda, x_{11}, x_{21})$ y el punto de equilibrio $(\lambda, x_{11q}, x_{21q})$.
- $(\lambda, x_{12}, x_{22})$ es el segundo punto de intersección de la órbita con condiciones iniciales en $(\lambda, x_{11}, x_{21})$ con el plano de discontinuidad π .
- \bar{x}_{21} es la distancia entre el punto $(\lambda, x_{12}, x_{22})$ y el punto de equilibrio $(\lambda, x_{11q}, x_{21q})$.
- $(\lambda, x_{12q}, x_{22q})$ es el punto de equilibrio contenido en la variedad invariante definida por la condición inicial $(\lambda, x_{12}, x_{22})$.
- \bar{x}_{22} es la distancia entre la condición inicial $(\lambda, x_{12}, x_{22})$ y el punto de equilibrio $(\lambda, x_{12q}, x_{22q})$.
- $(\lambda, x_{13}, x_{23})$ es el tercer punto de intersección de la órbita con condiciones iniciales en $(\lambda, x_{11}, x_{21})$ con el plano de discontinuidad π .

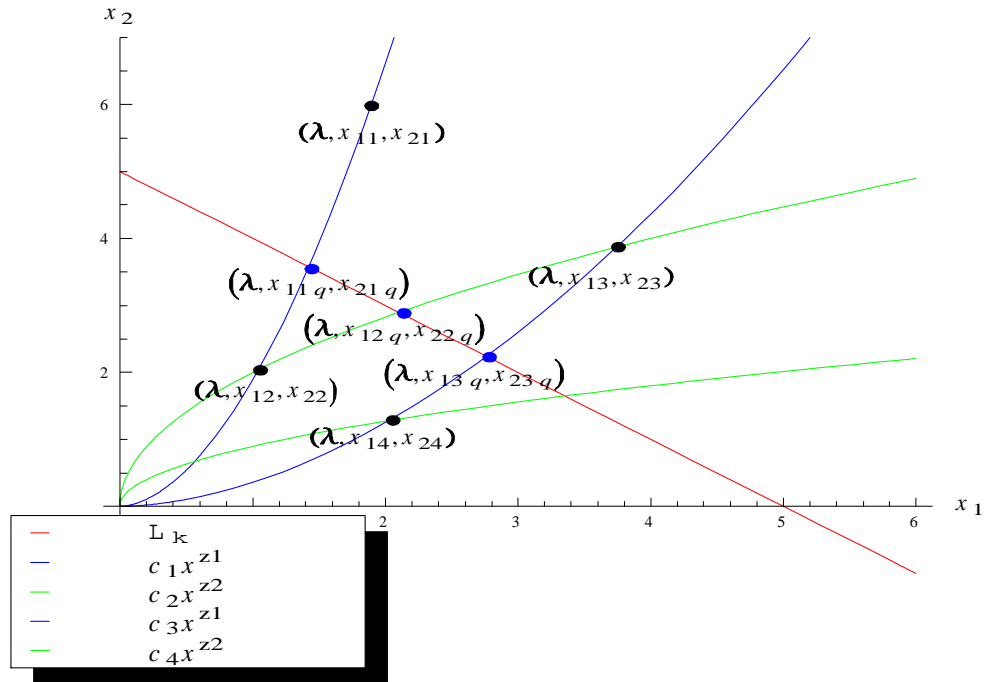


Figura 5.1: Gráfica que muestra la intersección de las variedades invariantes de cada subsistema con el plano de discontinuidad π , curvas azules y verdes, y la conmutación de la órbita del sistema no suave con condiciones iniciales en el punto $(\lambda, x_{11}, x_{12})$, puntos negros. Los puntos azules corresponden a puntos de intersección de las variedades invariantes con los puntos de equilibrio L_k del sistema.

Proposición 123 Sea \bar{x}_{21} y \bar{x}_{22} las distancias dadas en la Definición 122, entonces la razón entre las distancias \bar{x}_{21} y \bar{x}_{22} están acotadas por

$$\frac{p(\lambda, a_1)}{\sqrt{p(\lambda, a_1)^2 + p(\lambda, a_2)^2}} \leq \frac{\bar{x}_{22}}{\bar{x}_{21}} \leq \frac{\sqrt{p(\lambda, a_1)^2 + p(\lambda, a_2)^2}}{p(\lambda, a_1)}$$

Prueba: Considere la recta

$$y = c_1 z_1 x_{11q}^{z_1-1} x + c_1 x_{11q}^{z_1} (1 - z_1), \tag{5.2}$$

que pasa por el punto $(\lambda, x_{11q}, x_{21q})$, y el punto $(\lambda, x_{12}, x_{22})$; y la recta

$$y = c_2 z_2 x_{11q}^{z_2-1} x + c_2 x_{11q}^{z_2} (1 - z_2), \tag{5.3}$$

que pasa por el punto $(\lambda, x_{12q}, x_{22q})$, y el punto $(\lambda, x_{12}, x_{22})$. Igualando las ecuaciones (5.2) y (5.3), se obtiene

$$x = x_{12} = \frac{c_1(1 - z_1)x_{11q} - c_2(1 - z_2)x_{12q}}{c_1 z_1 x_{11q}^{z_1 - 1} - c_2 z_2 x_{12q}^{z_2 - 1}}. \quad (5.4)$$

Si se evalúa la ecuación que define L_k (4.97) en el punto (x_{1jq}, x_{2jq}) y se tiene en cuenta la igualdad (5.1) se tiene que c_j viene dado por

$$c_j = \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k) - x_{1jq} p(\lambda, a_1)}{x_{1jq}^{z_j} p(\lambda, a_2)}. \quad (5.5)$$

Sustituyendo (5.5) en (5.4), se obtiene

$$x_{12} = \frac{x_{11q} x_{12q} (\gamma \lambda g(\lambda, k)(z_1 - z_2) + (-(z_1 - 1)x_{11q} + (z_2 - 1)x_{12q}) p(\lambda, a_1))}{(z_1 x_{12q} - z_2 x_{11q}) \gamma \lambda g(\lambda, k) + x_{11q} x_{12q} (z_2 - z_1) p(\lambda, a_1)}. \quad (5.6)$$

Ahora si se despeja \bar{x}_{21} de la primera componente de la ecuación vectorial siguiente

$$\bar{x}_{21} \frac{(1, \frac{\partial x_2}{\partial x_1}(x_{11q}))}{\sqrt{1 + \frac{\partial x_2}{\partial x_1}(x_{11q})^2}} + (x_{12}, x_{22}) = (x_{11q}, x_{21q}),$$

que resulta de considerar el vector tangente a la curva $c_1(x_1)^{z_1}$ en el punto $(\lambda, x_{11q}, x_{21q})$, se tiene

$$\bar{x}_{21} = -(x_{12} - x_{11q}) \sqrt{1 + (c_1 z_1 x_{11q}^{z_1 - 1})^2}. \quad (5.7)$$

Sustituyendo (5.5), y (5.6), en (5.7), se obtiene

$$\begin{aligned} \bar{x}_{21} = & (x_{11q} - x_{12q}) (-z_2 \lambda \gamma g(\lambda, k) + x_{12q} (z_2 - 1) p(\lambda, a_1)) \\ & \sqrt{p(\lambda, a_2)^2 + z_1^2 (\lambda \gamma g(\lambda, k) - x_{11q} p(\lambda, a_1))^2} \\ & \times \frac{1}{p(\lambda, a_2) (x_{11q} z_2 - x_{12q} z_1) \lambda \gamma g(\lambda, k) + x_{11q} x_{12q} (z_1 - z_2) p(\lambda, a_1)}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Si se despeja \bar{x}_{22} de la primera componente de la ecuación vectorial

$$\bar{x}_{22} \frac{(1, \frac{\partial x_2}{\partial x_1}(x_{12q}))}{\sqrt{1 + \frac{\partial x_2}{\partial x_1}(x_{12q})^2}} + (x_{12}, x_{22}) = (x_{12q}, x_{22q}),$$

la cual resulta de considerar el vector tangente a la curva $c_2(x_1)^{z_2}$ en el punto $(\lambda, x_{12q}, x_{22q})$, se obtiene

$$\bar{x}_{22} = -(x_{12} - x_{12q}) \sqrt{1 + (c_2 z_2 x_{12q}^{z_2 - 1})^2}. \quad (5.9)$$

Sustituyendo (5.5), y (5.6), en (5.9), se tiene

$$\begin{aligned} \bar{x}_{22} &= (x_{11q} - x_{12q}) (-z_1 \lambda \gamma g(\lambda, k) + x_{11q}(z_1 - 1)p(\lambda, a_1)) \\ &\times \frac{\sqrt{x_{12q}^2 p(\lambda, a_2)^2 + z_2^2 (\lambda \gamma g(\lambda, k) - x_{12q} p(\lambda, a_1))^2}}{p(\lambda, a_2)((x_{12q} z_1 - x_{11q} z_2) \lambda \gamma g(\lambda, k) + x_{11q} x_{12q} (z_2 - z_1) p(\lambda, a_1))}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Derivando parcialmente la razón entre \bar{x}_{22} y \bar{x}_{21} con respecto a la variable x_{11q} y x_{12q} respectivamente, se tiene que

$$\begin{aligned} \partial_{x_{12q}} \left(\frac{\bar{x}_{22}}{\bar{x}_{21}} \right) &= \frac{P \times Q}{R \times S} \\ P &= -x_{11q} z_2 \gamma \lambda g(\lambda, k) p(\lambda, a_2) \sqrt{x_{11q}^2 p(\lambda, a_2)^2 + z_1^2 (\lambda \gamma g(\lambda, k) - x_{11q} p(\lambda, a_1))^2} \\ Q &= (z_2 \gamma \lambda g(\lambda, k) p(\lambda, a_1) + x_{12q} (z_2 p(\lambda, a_1)^2 + p(\lambda, a_2)^2)) \\ R &= (z_1 \gamma \lambda g(\lambda, k) - x_{11q} (z_1 - 1) p(\lambda, a_1)) \\ S &= \left(\begin{array}{c} z_2^2 (\gamma \lambda g(\lambda, k) - x_{12q} p(\lambda, a_1))^2 \\ + x_{12q}^2 p(\lambda, a_2)^2 \end{array} \right)^{\frac{3}{2}}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \partial_{x_{11q}} \left(\frac{\bar{x}_{22}}{\bar{x}_{21}} \right) &= \frac{\bar{P} \times \bar{Q}}{\bar{R} \times \bar{S} \times \bar{T}} \\ \bar{P} &= -(z_1 \gamma \lambda g(\lambda, k) (z_2 \gamma \lambda g(\lambda, k) - x_{12q} (z_2 - 1) p(\lambda, a_1))) \\ \bar{Q} &= (z_1 \gamma \lambda g(\lambda, k) p(\lambda, a_1) - x_{11q} (z_1 p(\lambda, a_1)^2 + p(\lambda, a_1)^2)) \\ \bar{R} &= (z_1 \gamma \lambda g(\lambda, k) - x_{11q} (z_1 - 1) p(\lambda, a_1))^2 \\ \bar{S} &= \sqrt{(z_2^2 (\gamma \lambda g(\lambda, k) - x_{12q} p(\lambda, a_1))^2 + x_{12q}^2 p(\lambda, a_1)^2)} \\ \bar{T} &= \sqrt{z_1^2 (\gamma (\lambda g(\lambda, k) - x_{11q} p(\lambda, a_1))^2 + x_{11q}^2 p(\lambda, a_2)^2)}, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \partial_{x_{11q}} \left(\frac{\bar{x}_{22}}{\bar{x}_{21}} \right) (x_{11q}) &= 0, \text{ si } x_{11q} = \frac{z_1 \gamma \lambda g(\lambda, k) p(\lambda, a_1)}{(z_1 p(\lambda, a_1)^2 + p(\lambda, a_2)^2)}, \\ \partial_{x_{12q}} \left(\frac{\bar{x}_{22}}{\bar{x}_{21}} \right) (x_{12q}) &= 0, \text{ si } x_{12q} = \frac{z_2 \gamma \lambda g(\lambda, k) p(\lambda, a_1)}{(z_2 p(\lambda, a_1)^2 + p(\lambda, a_2)^2)}, \end{aligned}$$

lo cual implica que la gráfica de la función $\frac{\bar{x}_{22}}{\bar{x}_{21}}(x_{11q}, x_{12q})$ tiene forma de silla, ya que los puntos críticos de las curvas $\frac{\bar{x}_{22}}{\bar{x}_{21}}(x_{11q}, x_{12q})$, con x_{12q} constante no depende de x_{12q} , y las curvas $\frac{\bar{x}_{22}}{\bar{x}_{21}}(x_{11q}, x_{12q})$, con x_{11q} constante, no depende de x_{11q} . En este

caso el máximo absoluto de la función $\frac{\bar{x}_{22}}{\bar{x}_{21}}(x_{11q}, x_{12q})$ se encuentra en el extremo de la curva crítica $\frac{\bar{x}_{22}}{\bar{x}_{21}}(x_{11q}, x_{12q})$, con x_{12q} constante, es decir en el punto $(x_{11q}, x_{12q}) = (\bar{x}_{11q}, \bar{x}_{12q})$, donde

$$\begin{aligned}\bar{x}_{11q} &= \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)} \\ \bar{x}_{12q} &= \frac{z_2\gamma\lambda g(\lambda, k)p(\lambda, a_1)}{(z_2p(\lambda, a_1)^2 + p(\lambda, a_2)^2)},\end{aligned}$$

y su máximo viene dado por

$$\frac{\bar{x}_{22}}{\bar{x}_{21}}(\bar{x}_{11q}, \bar{x}_{12q}) = \frac{\sqrt{p(\lambda, a_1)^2 + p(\lambda, a_2)^2}}{p(\lambda, a_1)} \geq \sqrt{2}.$$

El mínimo absoluto de la función $\frac{\bar{x}_{22}}{\bar{x}_{21}}(x_{11q}, x_{12q})$ se encuentra en el extremo de la curva crítica $\frac{\bar{x}_{22}}{\bar{x}_{21}}(x_{11q}, x_{12q})$, con x_{11q} constante, es decir en el punto $(x_{11q}, x_{12q}) = (\bar{x}_{11q}, \bar{x}_{12q})$, donde

$$\begin{aligned}\bar{x}_{11q} &= \frac{z_1\gamma\lambda g(\lambda, k)p(\lambda, a_1)}{(z_1p(\lambda, a_1)^2 + p(\lambda, a_2)^2)} \\ \bar{x}_{12q} &= \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)},\end{aligned}$$

luego su mínimo viene dado por

$$\frac{\bar{x}_{22}}{\bar{x}_{21}}(\bar{x}_{11q}, \bar{x}_{12q}) = \frac{p(\lambda, a_1)}{\sqrt{p(\lambda, a_1)^2 + p(\lambda, a_2)^2}} \leq 1,$$

con lo cual se termina la prueba. \square

A continuación se presenta una interpretación geométrica de los valores de los puntos críticos y de los máximos y mínimos absolutos obtenidos en la proposición anterior.

Proposición 124 *Considere las variedades invariantes*

$$x_2 = c_j (x_1)^{\frac{z_{2j}}{z_{1j}}}, \quad c_j \geq 0, \quad \frac{z_{2j}}{z_{1j}} = z_j, \quad j = 1, 2, \quad (5.11)$$

donde z_{1j} y z_{2j} son dados en (4.1); entonces las abscisas de los puntos de intersección donde las curvas de intersección de las variedades invariantes (5.11) con el plano de discontinuidad π , intersectan ortogonalmente el segmento de equilibrios L_k , son los valores críticos obtenidos en la Proposición 123. Además el máximo y el mínimo

absoluto de la función $\frac{\bar{x}_{22}}{\bar{x}_{21}}(x_{11q}, x_{12q})$ corresponden a la cosecante del ángulo formado por la recta L_k , y el eje x_1 , y al seno del ángulo formado por la recta L_k y el eje x_1 , respectivamente.

Prueba: Por hipótesis la pendiente de la recta L_k y la curva de intersección de la variedad invariante (5.11) con el plano de discontinuidad π del subsistema generado por el campo f_j son ortogonales en el punto de intersección, por lo tanto de la igualdad (5.11) y la igualdad (4.97), se tiene que el producto de sus pendientes viene dado por

$$c_j z_j (x_{1jq})^{z_j-1} \frac{p(\lambda, a_1)}{p(\lambda, a_2)} = -1. \quad (5.12)$$

Como el punto (x_{11q}, x_{12q}) está en la intersección de la recta L_k y la superficie invariante (5.11), entonces se tiene la siguiente igualdad

$$\gamma \lambda g(\lambda, k) - p(\lambda, a_1) x_{1jq} - c_j p(\lambda, a_2) x_{1jq}^{z_j} = 0. \quad (5.13)$$

De la ecuaciones (5.12) y (5.13) se tiene que

$$x_{1jq} = \frac{z_j \gamma \lambda g(\lambda, k) p(\lambda, a_1)}{(z_j p(\lambda, a_1))^2 + p(\lambda, a_2)^2},$$

con lo cual se obtiene la primera parte de la afirmación.

Los interceptos de la recta L_k con los ejes x_1 y x_2 son $\frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}$ y $\frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_2)}$, respectivamente, luego la cosecante del ángulo formado por la recta L_k y eje x_1 viene dado por

$$\frac{\sqrt{\frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)^2}{p(\lambda, a_1)^2} + \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)^2}{p(\lambda, a_2)^2}}}{\frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_2)}} = \frac{\sqrt{p(\lambda, a_1)^2 + p(\lambda, a_2)^2}}{p(\lambda, a_1)},$$

y el seno del ángulo formado por la recta L_k y eje x_1 viene dado por

$$\frac{\frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_2)}}{\sqrt{\frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)^2}{p(\lambda, a_1)^2} + \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)^2}{p(\lambda, a_2)^2}}} = \frac{p(\lambda, a_1)}{\sqrt{p(\lambda, a_1)^2 + p(\lambda, a_2)^2}},$$

con lo cual se termina la prueba. \square

Ahora se define las funciones $\underline{a}(\xi_1, k)$ y $\underline{a}(\xi_1, k)$ que determinan la atractividad del segmento de equilibrios L_k por la Proposición 137, la cual se demuestra más adelante.

Definición 125 Se definen las funciones $\underline{a}(\xi_1, k)$ y $\underline{\underline{a}}(\xi_1, k)$, como

$$\begin{aligned}\underline{a}(\xi_1, k) &= \frac{a_1(\xi_1, k)}{b_1(\xi_1, k)} + \frac{a_2(\xi_1, k)}{b_2(\xi_1, k)} - \frac{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{p_j(\lambda, a_1)^2}{p_j(\lambda, a_2)^2}}}\right)}{\pi}, \\ \underline{\underline{a}}(\xi_1, k) &= \frac{a_1(\xi_1, k)}{b_1(\xi_1, k)} + \frac{a_2(\xi_1, k)}{b_2(\xi_1, k)} - \frac{\ln\left(\sqrt{1 + \frac{p_j(\lambda, a_1)^2}{p_j(\lambda, a_2)^2}}\right)}{\pi},\end{aligned}$$

Observación 126 Las funciones $\underline{a}(\xi_1, k)$ y $\underline{\underline{a}}(\xi_1, k)$ juegan un papel semejante al de la función $a(\xi_1, k)$ con respecto de la estabilidad de los puntos del segmento L_k y son utilizadas en la determinación de la atractividad del segmento de equilibrios L_k en el sistema no suave (2.1), el cual no satisface la condición de la variedad invariante (4.7).

Definición 127 Se define como puntos **cercanos de bifurcación** $k_{\underline{a}2}$, $k_{\underline{a}1}$, $k_{\underline{\underline{a}2}}$, $k_{\underline{\underline{a}1}}$ del sistema no suave (2.1) con respecto al segmento de equilibrios L_k , aquellos puntos que satisfacen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}\underline{a}(\xi_{10}, k_{\underline{a}2}) &= 0, \\ \underline{a}(\xi_{11}(k_{\underline{a}1}), k_{\underline{a}1}) &= 0, \\ \underline{\underline{a}}(\xi_{10}, k_{\underline{\underline{a}2}}) &= 0, \\ \underline{\underline{a}}(\xi_{11}(k_{\underline{\underline{a}1}}), k_{\underline{\underline{a}1}}) &= 0,\end{aligned}$$

se entenderá ξ_{11} como $\xi_{11}(k_{\underline{\underline{a}1}})$ o $\xi_{11}(k_{\underline{a}1})$ según sea el caso si se omite la variable k .

La Definición 127, motiva la siguiente definición.

Definición 128 Los puntos asociados a los puntos cercanos de bifurcación del sistema no suave (2.1) son los siguientes:

$$\begin{aligned}k_{\underline{a}\min} &= \min\{k_{\underline{a}1}, k_{\underline{a}2}\}, \\ k_{\underline{\underline{a}}\max} &= \max\{k_{\underline{\underline{a}1}}, k_{\underline{\underline{a}2}}\},\end{aligned}$$

- $k_{\underline{a}\min}$ y $k_{\underline{a}\max}$ tienen el siguiente significado: (si $m_j < 0$, entonces $\bar{k}_{\underline{a}\min} = k_{\underline{a}2}$ y $k_{\underline{a}\max} = k_{\underline{a}1}$) o (si $m_j > 0$, entonces $k_{\underline{a}\min} = k_{\underline{a}1}$ y $k_{\underline{a}\max} = k_{\underline{a}2}$); donde $k_{\underline{a}1}$, $k_{\underline{a}2}$ y $k_{\underline{a}1}$, $k_{\underline{a}2}$ son considerados en la Definición 127.

Observación 129 De la Definición 128, se tiene que $k_{\underline{a}j} < k_{\underline{a}j} < k_{\underline{a}j}$, entonces $(k_{\underline{a}\min}, k_{\underline{a}\max}) \subset (k_{\underline{a}\min}, k_{\underline{a}\max})$, por consiguiente el Lema 111, puede no tenerse si $k \in (k_{\underline{a}\min}, k_{\underline{a}\max})$, por lo cual es necesario imponer condiciones de compatibilidad de dominios más exigentes que la presentada en la Definición 110 al sistema no suave (2.1) para garantizar la validez del Lema 111, en el caso en que no se satisface la condición de la variedad invariante (4.7).

La observación anterior motiva la siguiente Definición 110.

Definición 130 Asuma que el sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2), j = 1, 2$, es parcialmente del mismo tipo de acuerdo a la Definición 102, satisface las condiciones (2.8) a (2.15a) y (2.20) a (2.23), no se satisface la condición de la variedad invariante (4.7), y verifica la siguiente condición

$$\bar{k}_{b\max} < \bar{k}_{a\min}.$$

Entonces si el sistema no suave (2.1) es un:

modelo del tipo 1A y satisface la condición

$$\frac{c_j(k_{\underline{a}\max}, a_2)}{m_j} + \frac{2\gamma\lambda g(\lambda, k_{\underline{a}\max})}{p_j(\lambda, a_1)} \frac{1}{1 - \frac{\partial_s p_j(\lambda, a_1)}{\partial_s p_j(\lambda, a_2)}} > \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k_{\underline{a}\max})}{p_j(\lambda, a_1)},$$

o un modelo del tipo 1B o 3 y satisface la condición

$$\frac{c_j(k_{\underline{a}\min}, a_2)}{m_j} + \frac{2\gamma\lambda g(\lambda, k_{\underline{a}\min})}{p_j(\lambda, a_1)} \frac{1}{1 - \frac{\partial_s p_j(\lambda, a_1)}{\partial_s p_j(\lambda, a_2)}} < 0,$$

o un modelo es del tipo 2 o 4 y satisface la condición

$$\frac{c_j(k_{\underline{a}\min}, a_2)}{m_j} + \frac{2\gamma\lambda g(\lambda, k_{\underline{a}\min})}{p_j(\lambda, a_1)} \frac{1}{1 - \frac{\partial_s p_j(\lambda, a_1)}{\partial_s p_j(\lambda, a_2)}} > \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k_{\underline{a}\min})}{p_j(\lambda, a_1)},$$

se dice que él satisface la **condición de compatibilidad de dominios extendida** de los subsistemas considerados.

Antes de demostrar las propiedades de monotonía de la función $\underline{a}(\xi_1, k)$ y $\underline{\underline{a}}(\xi_1, k)$ las cuales son útiles más adelante en la prueba del teorema de la persistencia de la atractividad de la bifurcación de zip no suave para el caso en que no existen variedades invariantes bidimensionales asociadas a los puntos del interior del segmento L_k (con la topología inducida de L_k) en el sistema no suave (2.1), se presentan las propiedades de monotonía de la función $a(\xi_1, k)$ las cuales son consecuencia inmediata de la Definición 130, y del Lema 111.

Corolario 131 *Si el sistema no suave (2.1) asociados a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$ satisface la condición de compatibilidad de dominios de la Definición 130, entonces:*

i) $a(\xi_1, k) = \frac{a_1(\xi_1, k)}{b_1(\xi_1, k)} + \frac{a_2(\xi_1, k)}{b_2(\xi_1, k)}$ es creciente o decreciente con respecto a la variable ξ_1 , para $(\xi_1, k) \in [0, \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}] \times (k_{\underline{a}\min}, k_{\underline{\underline{a}}\max})$, si $m_j > 0$, o $m_j < 0$, respectivamente. Si $m_j = 0$, y $A_j = 0$, entonces $a(\xi_1, k)$ es constante con respecto de la variable ξ_1 .

ii) $a(\xi_1, k)$ es creciente con respecto al parámetro k , para $(\xi_1, k) \in \overline{D}(a) \cap [0, \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}] \times (k_{\min}, k_{\max})$ de acuerdo con la Definición 89. Además para cada $\xi_1 \in [0, \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)}]$, existe un único $\overline{\overline{k}}(\xi_1) \in (\overline{k}_{\underline{a}\min}(\xi_1), \overline{k}_{\underline{\underline{a}}\max}(\xi_1))$, tal que $a(\xi_1, \overline{\overline{k}}(\xi_1)) = 0$.

Ahora utilizamos el Corolario 131, en la demostración de lema siguiente.

Lema 132 *Si el sistema no suave (2.1) asociados a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$ satisface la condición de compatibilidad de dominios de la Definición 130, y la condición*

$$\underline{\underline{a}}(\xi_{11}, k_{\max}) > 0, \text{ si } m_j < 0, \text{ o } \underline{\underline{a}}(\xi_{10}, k_{\max}) > 0, \text{ si } m_j > 0, \quad (5.14)$$

entonces:

i) $\underline{\underline{a}}(\xi_1, k) = \frac{a_1(\xi_1, k)}{b_1(\xi_1, k)} + \frac{a_2(\xi_1, k)}{b_2(\xi_1, k)} - \frac{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{p_j(\lambda, a_1)^2}{p_j(\lambda, a_2)}}}\right)}{\pi}$ es creciente o decreciente con respecto a la variable ξ_1 , para $(\xi_1, k) \in [0, \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}] \times (k_{\underline{a}\min}, k_{\underline{\underline{a}}\max})$, si $m_j > 0$, o $m_j < 0$, respectivamente. Si $m_j = 0$, y $A_j = 0$, entonces $\underline{\underline{a}}(\xi_1, k)$ es constante con respecto de la variable ξ_1 .

ii) $\underline{a}(\xi_1, k) = \frac{a_1(\xi_1, k)}{b_1(\xi_1, k)} + \frac{a_2(\xi_1, k)}{b_2(\xi_1, k)} - \frac{\ln\left(\sqrt{1 + \frac{p_j(\lambda, a_1)^2}{p_j(\lambda, a_2)}}\right)}{\pi}$ es creciente o decreciente con respecto a la variable ξ_1 , para $(\xi_1, k) \in [0, \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}] \times (k_{\underline{a}\min}, k_{\underline{a}\max})$, si $m_j > 0$, o $m_j < 0$, respectivamente. Si $m_j = 0$, y $A_j = 0$, entonces $\underline{a}(\xi_1, k)$ es constante con respecto de la variable ξ_1 .

iii) $\underline{a}(\xi_1, k)$ y $\underline{\underline{a}}(\xi_1, k)$ son crecientes con respecto al parámetro k , para $(\xi_1, k) \in \overline{D}(a) \cap [0, \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}] \times (k_{\min}, k_{\max})$ de acuerdo con la Definición 89. Además para cada $\xi_1 \in [0, \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)}]$, existen únicos $\underline{k}(\xi_1)$, $\underline{\underline{k}}(\xi_1)$ y $\overline{\overline{k}}(\xi_1)$ pertenecientes al intervalo $(\overline{k}_{\underline{a}\min}(\xi_1), \overline{k}_{\underline{a}\max}(\xi_1))$ tal que $\underline{a}(\xi_1, \underline{k}(\xi_1)) = 0$, $\underline{\underline{a}}(\xi_1, \underline{\underline{k}}(\xi_1)) = 0$, y $a(\xi_1, \overline{\overline{k}}(\xi_1)) = 0$, con $\underline{k}(\xi_1) \leq \underline{\underline{k}}(\xi_1)$, y $\overline{\overline{k}}(\xi_1) \leq \underline{\underline{k}}(\xi_1)$.

Prueba: Los numerales i), ii), y iii) son consecuencia directa del Lema 111, y de las siguientes relaciones

$$\underline{a}(\xi_1, k) = a(\xi_1, k) - \frac{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{p_j(\lambda, a_1)^2}{p_j(\lambda, a_2)}}}\right)}{\pi},$$

$$\underline{\underline{a}}(\xi_1, k) = a(\xi_1, k) - \frac{\ln\left(\sqrt{1 + \frac{p_j(\lambda, a_1)^2}{p_j(\lambda, a_2)}}\right)}{\pi},$$

$$\frac{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{p_j(\lambda, a_1)^2}{p_j(\lambda, a_2)}}}\right)}{\pi} < 0, \frac{\ln\left(\sqrt{1 + \frac{p_j(\lambda, a_1)^2}{p_j(\lambda, a_2)}}\right)}{\pi} > 0,$$

$$\lim_{k \rightarrow k_{b\max}(\xi_1)} \underline{a}(\xi_1, k) = -\infty, a(\xi_1, \overline{\overline{k}}(\xi_1)) = 0,$$

ya que las derivadas parciales de las funciones $\underline{a}(\xi_1, k)$ y $\underline{\underline{a}}(\xi_1, k)$ con respecto de las variables ξ_1 o k son iguales con las de la función $a(\xi_1, k)$ con respecto de las variables ξ_1 o k respectivamente. Además para cada $\xi_1 \in [0, \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)}]$ se tiene que $\lim_{k \rightarrow k_{b\max}(\xi_1)} \underline{a}(\xi_1, k) = -\infty$, y $\underline{\underline{a}}(\xi_1, \overline{\overline{k}}(\xi_1)) > 0$, donde $\overline{\overline{k}}(\xi_1)$ es considerado en el Corolario 131. Lo anterior implica que existe un único $\underline{k}(\xi_1)$ tal que $\underline{a}(\xi_1, \underline{k}(\xi_1)) = 0$, y que $\underline{k}(\xi_1) < \overline{\overline{k}}(\xi_1)$, ya que $\underline{a}(\xi_1, k)$ es creciente con respecto de la variable k , con $\xi_1 \in [0, \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)}]$ fijo. De la parte i) del Corolario 131 y la condición 5.14, se tiene

que para cada $\xi_1 \in [0, \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)}]$ el $\lim_{k \rightarrow k_{\max}} \underline{a}(\xi_1, k) > 0$, y $\underline{a}(\xi_1, \overline{\overline{k}}(\xi_1)) < 0$. Lo anterior implica que existe un único $\underline{k}(\xi_1)$ tal que $\underline{a}(\xi_1, \underline{k}(\xi_1)) = 0$, y $\overline{\overline{k}}(\xi_1) < \underline{k}(\xi_1)$, ya que $\underline{a}(\xi_1, k)$ es creciente con respecto de la variable k , con $\xi_1 \in [0, \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)}]$ fijo, con lo cual se concluye la prueba. \square

Claramente la Definición 127, tiene sentido por el Lema 132.

A continuación se establece una relación de orden entre los valores de bifurcación cercanos \underline{k}_{a2} , \underline{k}_{a1} , $\underline{\underline{k}}_{a2}$, $\underline{\underline{k}}_{a1}$ del sistema no suave (2.1) de acuerdo a si el modelo es natural, artificial o degenerado.

Proposición 133 *Sea \underline{k}_{a2} , \underline{k}_{a1} , $\underline{\underline{k}}_{a1}$, y $\underline{\underline{k}}_{a2}$ los puntos cercanos de bifurcación del sistema no suave (2.1) de la Definición 127, entonces se tiene que*

$$\begin{aligned} \underline{k}_{a2} &< \underline{k}_{a1} < \underline{\underline{k}}_{a1} \text{ si } m_j < 0, \\ \underline{k}_{a2} &= \underline{k}_{a1} = \underline{\underline{k}}_{a1} \text{ si } m_j = 0, \\ \underline{k}_{a1} &< \underline{k}_{a2} < \underline{\underline{k}}_{a2} \text{ si } m_j > 0. \end{aligned}$$

Prueba: De Lema 132, se tiene que

$$\partial_{\xi_1} \underline{a}(\xi_1, k) = \begin{cases} < 0, & \text{si } m_j < 0 \\ \leq 0, & \text{si } m_j = 0 \\ > 0, & \text{si } m_j > 0, \end{cases} ,$$

además $\underline{a}(\xi_{10}, \underline{k}_{a2}) = 0$, por la Definición 127, luego de la igualdad (5.47) y la parte ii) del Lema 111, se tiene que

$$\underline{a}(\xi_{11}, \underline{k}_{a2}) = \begin{cases} < 0, & \text{si } m_j < 0 \\ \leq 0, & \text{si } m_j = 0 \\ > 0, & \text{si } m_j > 0, \end{cases} .$$

Como $\partial_k \underline{a}(\xi_1, k) > 0$, con $\xi_1 \in [0, \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)}]$ y $\underline{a}(\xi_1, k) < \underline{a}(\xi_1, k)$, entonces si

$$\underline{a}(\xi_{11}, \overline{\overline{k}}_{a1}) = 0, \text{ implica que } \begin{cases} \underline{k}_{a2} < \underline{k}_{a1} < \underline{\underline{k}}_{a1} & \text{si } m_j < 0 \\ \underline{k}_{a2} = \underline{k}_{a1} = \underline{\underline{k}}_{a1} & \text{si } m_j = 0 \\ \underline{k}_{a1} < \underline{k}_{a2} < \underline{\underline{k}}_{a2} & \text{si } m_j > 0 \end{cases} ,$$

con lo cual se termina la prueba \square .

Más adelante se demuestran algunas propiedades de atractividad del segmento de equilibrios L_k utilizando las propiedades analíticas de las funciones $\underline{a}(\xi_1.k)$ y $\underline{a}(\xi_1.k)$ tratadas anteriormente. Se demuestra que las órbitas del sistema no suave (2.1) con condiciones iniciales (λ, ξ_1, ξ_2) en un entorno tubular suficientemente pequeño del segmento L_k , se acercan a un punto del segmento L_k , si $\underline{a}(\xi_1.k) < 0$, es decir

$$\frac{a_1(\xi_1,k)}{b_1(\xi_1,k)} + \frac{a_2(\xi_1,k)}{b_2(\xi_1,k)} - \frac{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{p_j(\lambda,a_1)^2}{p_j(\lambda,a_2)^2}}}\right)}{\pi} < 0. \quad (5.15)$$

Se considera el trozo de curva $L_{\underline{a}k}$ siguiente

$$L_{\underline{a}k} = \left\{ (s, \xi_1, a(\xi_1, k)) : \underline{a}(\xi_1, k) = \frac{a_1(\xi_1,k)}{b_1(\xi_1,k)} + \frac{a_2(\xi_1,k)}{b_2(\xi_1,k)} - \frac{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{p_j(\lambda,a_1)^2}{p_j(\lambda,a_2)^2}}}\right)}{\pi}, \right. \\ \left. s = \lambda, \xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0 \right\}. \quad (5.16)$$

Fijando k , se puede determinar el punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k), \tilde{\xi}_2(k)) \in L_k$ en que la linealización de los subsistemas del sistema no suave (2.1) asociados a los campos $f_j = 1, 2$, tiene valores propios cuya suma de los cocientes de las partes reales e imaginarias menos

la constante $\frac{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{p_j(\lambda,a_1)^2}{p_j(\lambda,a_2)^2}}}\right)}{\pi}$ toma el valor cero, es decir $\underline{a}(\xi_1.k) = 0$. Dicho punto se obtiene resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{a_1(\xi_1, k)}{b_1(\xi_1, k)} + \frac{a_2(\xi_1, k)}{b_2(\xi_1, k)} - \frac{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{p_j(\lambda,a_1)^2}{p_j(\lambda,a_2)^2}}}\right)}{\pi} = 0, \quad (5.17) \\ p(\lambda, a_1)\xi_1 + p(\lambda, a_2)\xi_2 = \gamma\lambda g(\lambda, k), \text{ con } \xi_1, \xi_2 \geq 0,$$

(véase (3.1) y la Nota 34). De forma semejante se tiene que las órbitas del sistema no suave (2.1) con condiciones iniciales (λ, ξ_1, ξ_2) en un entorno tubular suficientemente pequeño del segmento L_k se alejan del segmento L_k si $\underline{a}(\xi_1.k) > 0$, es decir

$$\frac{a_1(\xi_1,k)}{b_1(\xi_1,k)} + \frac{a_2(\xi_1,k)}{b_2(\xi_1,k)} - \frac{\ln\left(\sqrt{1+\frac{p_j(\lambda,a_1)^2}{p_j(\lambda,a_2)^2}}\right)}{\pi} > 0. \quad (5.18)$$

Se considera el trozo de curva $L_{\underline{a}k}$ siguiente

$$L_{\underline{a}k} = \left\{ (s, \xi_1, a(\xi_1, k)) : \underline{a}(\xi_1, k) = \frac{a_1(\xi_1, k)}{b_1(\xi_1, k)} + \frac{a_2(\xi_1, k)}{b_2(\xi_1, k)} - \frac{\ln\left(\sqrt{1 + \frac{p_j(\lambda, a_1)^2}{p_j(\lambda, a_2)}}\right)}{\pi}, \right. \\ \left. s = \lambda, \xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0 \right\}.$$

Fijando k , se puede determinar el punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k), \tilde{\xi}_2(k)) \in L_k$ en que la linealización de los subsistemas del sistema no suave (2.1) asociados a los campos $f_j = 1, 2$, tiene valores propios cuya suma de los cocientes de las partes reales e imaginarias menos la constante $\frac{\ln\left(\sqrt{1 + \frac{p_j(\lambda, a_1)^2}{p_j(\lambda, a_2)}}\right)}{\pi}$ toma el valor cero, es decir $\underline{a}(\xi_1, k) = 0$. Dicho punto se obtiene resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones (véase (3.1) y la Nota 34).

$$\frac{a_1(\xi_1, k)}{b_1(\xi_1, k)} + \frac{a_2(\xi_1, k)}{b_2(\xi_1, k)} - \frac{\ln\left(\sqrt{1 + \frac{p_j(\lambda, a_1)^2}{p_j(\lambda, a_2)}}\right)}{\pi} = 0, \quad (5.19) \\ p(\lambda, a_1)\xi_1 + p(\lambda, a_2)\xi_2 = \gamma\lambda g(\lambda, k), \text{ con } \xi_1, \xi_2 \geq 0.$$

En general la dirección del decaimiento de la órbita del sistema no suave (2.1) con respecto del segmento de equilibrios L_k depende del signo de la condición de la variedad invariante (4.7). Por lo tanto se establece el convenio de que las órbitas con condiciones iniciales arriba del segmento de equilibrios entran al subsistema generado por el campo f_1 en caso contrario se tienen desigualdades de sentido contrario en la siguiente observación.

Observación 134 *Considere las variedades invariantes*

$$x_2 = c_j (x_1)^{\frac{z_{2j}}{z_{1j}}}, \quad c \geq 0, \quad j = 1, 2, \quad (5.20)$$

donde z_{2j} es dada en (4.1), entonces:

- i) Si $\frac{\partial_s p_2(\lambda, a_2)}{\partial_s p_2(\lambda, a_1)} - \frac{\partial_s p_1(\lambda, a_2)}{\partial_s p_1(\lambda, a_1)} < 0$, las órbitas con condiciones iniciales cercanas al segmento de equilibrios L_k desciende a lo largo del segmento de equilibrios L_k
- ii) Si $\frac{\partial_s p_2(\lambda, a_2)}{\partial_s p_2(\lambda, a_1)} - \frac{\partial_s p_1(\lambda, a_2)}{\partial_s p_1(\lambda, a_1)} > 0$, las órbitas con condiciones iniciales cercanas al segmento de equilibrios L_k asciende a lo largo del segmento de equilibrios L_k .

Observación 135 *Si el sistemas suave (2.1) es del tipo hiperbólico o del tipo elíptico de acuerdo con la Definición 19, la dirección del decaimiento de la órbita viene determinada aproximadamente por la curvatura de las variedades invariantes del sistema perturbado asociado, es decir si las variedades del perturbado curvan hacia arriba $(\frac{z_{2i}}{z_{1j}}) > 1$, y el modelo es natural (artificial) el sistema es de tipo hiperbólico (elíptico) respectivamente y si curvan hacia abajo $(\frac{z_{2i}}{z_{1j}}) < 1$, y el modelo es natural (artificial) el sistema es de tipo elíptico (hiperbólico) respectivamente.*

La Observación 134, es consecuencia directa de que las pendientes de las variedades invariantes del sistema generado por el campo f_1 son mayores que las pendientes de la variedades invariantes del sistema generado por el campo f_2 en los puntos de intersección entre las variedades invariantes asociadas a cada uno de los subsistemas que conforman el sistema no suave (2.1) en el caso i) y de sentido contrario en el caso ii), véase la Figura (5.1).

A continuación se presenta el criterio (Proposición 139), que determina si una órbita es atraída o repelida en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k el cual es similar al presentado por varios autores respecto de un punto de equilibrio en sistemas no suave planares, véase Freire E., Ponce E. & Torres F. [38]; Camlibel [8], Olivar & Angulo [77]; Carmona V., Freire E., Ponce E. & Torres F. [11].

Definición 136 *Considere el sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, $j = 1, 2$, satisfaciendo las condiciones (2.8) a (2.15a) y (2.20) a (2.23). Para efectos de considerar la atractividad del segmento L_k para $k \in (k_{\min}, k_{\max})$, se introduce la siguiente notación para los conjuntos atractivos y repulsivos de L_k . Sean $(\lambda, \xi_1(k), \xi_2(k)) = p_0(\lambda, \tilde{\xi}_1(k), \tilde{\xi}_2(k)) \in L_k$ y $(\lambda, \xi_1(k), \xi_2(k)) = \bar{p}_0(\lambda, \tilde{\xi}_1(k), \tilde{\xi}_2(k)) \in L_k$ los puntos en que la linealización del sistema no suave (2.1) asociado a los campo f_j tienen valores propios con componentes reales e imaginarias satisfaciendo la ecuaciones $\underline{a}(\tilde{\xi}_1(k), k) = 0$ y $\underline{\underline{a}}(\tilde{\xi}_1(k), k) = 0$, respectivamente (véase Definición 125), y $p_1\left(\lambda, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)}, 0\right)$, $p_2\left(\lambda, 0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_2)}\right)$ los puntos extremos del segmento de equilibrios L_k . Para $k \in (k_{\min}, k_{\max})$ los puntos $p_0(\lambda, \tilde{\xi}_1(k), \tilde{\xi}_2(k))$ y $\bar{p}_0(\lambda, \tilde{\xi}_1(k), \tilde{\xi}_2(k))$ dividen la recta L_k en tres, los equilibrios del sistema no suave (2.1) asociado a los campo*

$f_j(s, x_1, x_2)$, $j = 1, 2$, en el conjunto

$$\tilde{L}_{ku} = \{(\lambda, \xi_1, \xi_2) \in L_k : \xi_1 \leq \tilde{\xi}_1(k)\}; \text{ si } m_j \leq 0,$$

que son repulsivos; los equilibrios en el conjunto

$$\tilde{L}_{ks} = \{(\lambda, \xi_1, \xi_2) \in L_k : \tilde{\xi}_1(k) \leq \xi_1\}; \text{ si } m_j \leq 0\}, \quad (5.21a)$$

que son atractivos y los equilibrios en el conjunto

$$\tilde{L}_{ksu} = \{(\lambda, \xi_1, \xi_2) \in L_k : \tilde{\xi}_1(k) \leq \xi_1 \leq \tilde{\xi}_1(k)\}; \text{ si } m_j \leq 0\}, \quad (5.22a)$$

comprendida entre la zona atractiva y la repulsiva de L_k la cual denominamos de transición.

Considere la siguiente relaciones

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_1(k) &< \tilde{\xi}_{1s}(k) < \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k_2)}{p_j(\lambda, a_1)}; \quad 0 < \tilde{\xi}_{1u}(k) < \tilde{\xi}_1(k), \quad \text{si } m_j < 0, \\ \tilde{\xi}_1(k) &< \tilde{\xi}_{1u}(k) < \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k_2)}{p_j(\lambda, a_1)}; \quad 0 < \tilde{\xi}_{1s}(k) < \tilde{\xi}_1(k), \quad \text{si } m_j > 0, \end{aligned} \quad (5.23)$$

y los subconjuntos propios de L_{ks} y L_{ku} cerrados, siguientes

$$\overline{\tilde{L}}_{ks} = \{(\lambda, \xi_1, \xi_2) \in L_k : \xi_1 \geq \tilde{\xi}_{1s}(k)\}; \text{ si } m_j \leq 0, \quad (5.24)$$

$$\overline{\tilde{L}}_{ku} = \{(\lambda, \xi_1, \xi_2) \in L_k : \tilde{\xi}_{1u}(k) \geq \xi_1\}; \text{ si } m_j \leq 0, \quad (5.25)$$

donde $\tilde{\xi}_1(k)$ satisface la ecuación $\underline{a}(\tilde{\xi}_1(k), k) = 0$, y $\tilde{\xi}_1(k)$ satisface la ecuación $\underline{a}(\tilde{\xi}_1(k), k) = 0$, respectivamente.

Sea M_{kj} una superficie suave interceptando L_k transversalmente en $(\lambda, \tilde{\xi}_{1s}(k), \tilde{\xi}_{2s}(k)) \in L_k$ en el sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, $j = 1, 2$. Se denota como $T_{M_{ksj}}$ y se denomina entorno tubular de $\overline{\tilde{L}}_{ks}$ de radio ρ , al conjunto compacto acotado por la parte de M_{kj} dentro de la superficie que define el siguiente conjunto

$$\{(s, x_1, x_2) \in R^3 : d((s, x_1, x_2), \overline{\tilde{L}}_{ks}) = \rho\}, \quad (5.26)$$

con $\rho > 0$, d la distancia Euclidiana, la parte de la superficie de (5.26) entre M_{kj} y el plano s, x_1 y la parte del plano s, x_1 dentro de la superficie (4.22). Claramente si

$\rho > 0$, es suficientemente pequeño, la intersección de M_{kj} con la superficie (5.26) es una curva de Jordan simple c_{kj} , $\widetilde{L}_{ks} \subset T_{M_{ksj}}$ y el interior del segmento de línea \widetilde{L}_{ks} está en el interior de $T_{M_{ksj}}$. En forma análoga se define el entorno tubulares de \widetilde{L}_{ku} de radio ρ , denominado $T_{M_{kuj}}$.

Proposición 137 *Considere los subsistemas del sistema no suave (2.1) asociados a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, $j = 1, 2$, naturales, satisfaciendo las condiciones (2.8) a (2.15a) y (2.20) a (2.23), así como la condición de compatibilidad de dominios (130) entonces:*

i) Si $\left(\frac{\partial_s p_2(\lambda, a_2)}{\partial_s p_2(\lambda, a_1)} - \frac{\partial_s p_1(\lambda, a_2)}{\partial_s p_1(\lambda, a_1)} \right) < 0$, existe un entorno tubular $T_{M_{ksj}}$ del segmento de equilibrios $\widetilde{L}_{ks} \subset L_k$ en el cual las soluciones con condiciones iniciales en esta vecindad tiende a un punto del segmento $\widetilde{L}_{ks} \subset L_k$ cuando t tiende a infinito.

ii) Si $\left(\frac{\partial_s p_2(\lambda, a_2)}{\partial_s p_2(\lambda, a_1)} - \frac{\partial_s p_1(\lambda, a_2)}{\partial_s p_1(\lambda, a_1)} \right) > 0$, existe un entorno tubular $T_{M_{ksj}}$ del segmento de equilibrios $\widetilde{L}_{ks} \subset L_k$ en el cual las soluciones con condiciones iniciales en esta vecindad tiende a un punto del segmento $\widetilde{L}_{ks} \subset L_k$ cuando t tiende a infinito.

iii) Si $\left(\frac{\partial_s p_2(\lambda, a_2)}{\partial_s p_2(\lambda, a_1)} - \frac{\partial_s p_1(\lambda, a_2)}{\partial_s p_1(\lambda, a_1)} \right) > 0$, existe un entorno tubular $T_{M_{kuj}}$ del segmento de equilibrios $\widetilde{L}_{ku} \subset L_k$ en el cual las soluciones con condiciones iniciales en esta vecindad divergen del segmento $\widetilde{L}_{ku} \subset L_k$ cuando t tiende a infinito.

iv) Si $\left(\frac{\partial_s p_2(\lambda, a_2)}{\partial_s p_2(\lambda, a_1)} - \frac{\partial_s p_1(\lambda, a_2)}{\partial_s p_1(\lambda, a_1)} \right) < 0$, existe un entorno tubular $T_{M_{kuj}}$ del segmento de equilibrios $\widetilde{L}_{ku} \subset L_k$ en el cual las soluciones con condiciones iniciales en esta vecindad divergen del segmento $\widetilde{L}_{ku} \subset L_k$ cuando t tiende a infinito.

Prueba i) Se considera ahora la atractividad del segmento \widetilde{L}_{ks}

$$\widetilde{L}_{ks} = \{(\lambda, \xi_1, \xi_2) \in L_k : \xi_1 \geq \xi_{1s}(k)\}; \text{ si } m_j \leq 0.$$

Teniendo en cuenta la notación introducida en la Definición 136, sea $T_{M_{ks1}} \subset T_{M_{ks2}}$ (el caso $T_{M_{ks2}} \subset T_{M_{ks1}}$ es análogo) dos entornos tubulares del segmento \widetilde{L}_{ks} de radios ρ_1 y ρ_2 de los subsistemas 1 y 2 en el sistema no suave (2.1) asociados a los campos

$f_j(s, x_1, x_2)$, $j = 1, 2$, conteniendo el punto inicial de la órbita $(\lambda, x_{11}, x_{21})$, respectivamente; y satisfaciendo las condiciones del Corolario 99. Por consiguiente si se considera la linealización del subsistema generado por el campo f_1 , se tiene

$$\bar{x}_{21} = -\bar{x}_{11} e^{\pi \left(\frac{a_1}{b_1}\right)(x_{11q})}, \quad (5.27)$$

y

$$\bar{x}_{22} = \frac{\bar{x}_{22}}{\bar{x}_{21}}(x_{11q}, x_{12q}) \bar{x}_{21}. \quad (5.28)$$

Sustituyendo la expresión (5.27) en (5.28), se obtiene

$$\bar{x}_{22} = \frac{\bar{x}_{22}}{\bar{x}_{21}}(x_{11q}, x_{12q}) \left(-\bar{x}_{11} e^{\pi \left(\frac{a_1}{b_1}\right)(x_{11q})} \right). \quad (5.29)$$

Si se considera la linealización del subsistema generado por el campo f_2 , se tiene

$$\bar{x}_{12} = -\bar{x}_{22} e^{\pi \left(\frac{a_2}{b_2}\right)(x_{12q})}. \quad (5.30)$$

Sustituyendo la expresión (5.29) en (5.30), se tiene

$$\begin{aligned} \bar{x}_{12} &= -\frac{\bar{x}_{22}}{\bar{x}_{21}}(x_{11q}, x_{12q}) \left(-\bar{x}_{11} e^{\pi \left(\frac{a_1}{b_1}\right)(x_{11q})} \right) e^{\pi \left(\frac{a_2}{b_2}\right)(x_{12q})} \\ &= \bar{x}_{11} \frac{\bar{x}_{22}}{\bar{x}_{21}}(x_{11q}, x_{12q}) e^{\pi \left(\left(\frac{a_1}{b_1}\right)(x_{11q}) + \left(\frac{a_2}{b_2}\right)(x_{12q})\right)}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

La órbita decae en cada ciclo respecto al segmento de equilibrios L_k , si

$$\bar{x}_{12} < \bar{x}_{11}. \quad (5.32)$$

Sustituyendo la expresión (5.31) en la expresión (5.32), se tiene

$$\begin{aligned} \bar{x}_{11} \frac{\bar{x}_{22}}{\bar{x}_{21}}(x_{11q}, x_{12q}) e^{\pi \left(\left(\frac{a_1}{b_1}\right)(x_{11q}) + \left(\frac{a_2}{b_2}\right)(x_{12q})\right)} &< \bar{x}_{11} \\ e^{\pi \left(\left(\frac{a_1}{b_1}\right)(x_{11q}) + \left(\frac{a_2}{b_2}\right)(x_{12q})\right)} &< \frac{\bar{x}_{21}}{\bar{x}_{22}}(x_{11q}, x_{12q}). \end{aligned} \quad (5.33)$$

Además por la Proposición 123, se tiene que

$$\frac{p(\lambda, a_1)}{\sqrt{p(\lambda, a_1)^2 + p(\lambda, a_2)^2}} \leq \frac{\bar{x}_{21}}{\bar{x}_{22}}(x_{11q}, x_{12q}). \quad (5.34)$$

De la desigualdad (5.34) y la desigualdad (5.33), se tiene que si

$$e^{\pi \left(\left(\frac{a_1}{b_1}\right)(x_{11q,k}) + \left(\frac{a_2}{b_2}\right)(x_{12q,k})\right)} \leq \frac{p(\lambda, a_1)}{\sqrt{p(\lambda, a_1)^2 + p(\lambda, a_2)^2}},$$

entonces $\bar{x}_{12} < \bar{x}_{11}$ siempre que

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)(x_{11q}, k) + \left(\frac{a_2}{b_2}\right)(x_{12q}, k) < -0.114 \leq \frac{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{p_j(\lambda, a_1)^2}{p_j(\lambda, a_2)^2}}}\right)}{\pi} \simeq -0.114, \quad (5.35)$$

además como $\frac{p_{2s}(\lambda, a_2)}{p_{2s}(\lambda, a_1)} - \frac{p_{1s}(\lambda, a_2)}{p_{1s}(\lambda, a_1)} < 0$, luego $x_{12q} > x_{11q}$, por la Observación 134. Para un radio de la órbita ρ suficientemente pequeño

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} x_{12q}(\rho) \rightarrow x_{11q}(\rho) = \xi_1,$$

la órbita decrece de izquierda a derecha en el punto (λ, ξ_1, ξ_2) si

$$\frac{a_1(\xi_1, k)}{b_1(\xi_1, k)} + \frac{a_2(\xi_1, k)}{b_2(\xi_1, k)} < -0.114 \leq \frac{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{p_j(\lambda, a_1)^2}{p_j(\lambda, a_2)^2}}}\right)}{\pi} \simeq -0.114.$$

Por lo tanto

$$\frac{a_1(\xi_1, k)}{b_1(\xi_1, k)} + \frac{a_2(\xi_1, k)}{b_2(\xi_1, k)} < -0.114 \leq \frac{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{p_j(\lambda, a_1)^2}{p_j(\lambda, a_2)^2}}}\right)}{\pi} \simeq -0.114$$

$$\text{si } 0 \leq \tilde{\xi}_1(k) \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)},$$

ya que $\underline{a}(\xi_1, k)$ es decreciente y $\underline{a}(\tilde{\xi}_1(k), k) = 0$. Entonces la órbita decrece de izquierda a derecha y las soluciones con condiciones iniciales en este entorno tubular tiende a un punto interior del segmento \tilde{L}_{ks} o intersectan el plano $x_2 = 0$, cuando t tiende a infinito. En este último caso el plano $x_2 = 0$, es una variedad invariante del sistema y el punto $(\lambda, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)}, 0)$ es el único punto de equilibrio el cual es estable con respecto a dicha variedad, luego la órbita tiende asintóticamente a él cuando t tiende a infinito, con lo cual se tiene la afirmación de la parte i).

Prueba ii) Por la parte 1) se tiene que $\bar{x}_{12} < \bar{x}_{11}$, siempre que

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)(x_{11q}, k) + \left(\frac{a_2}{b_2}\right)(x_{12q}, k) < -0.114 \leq \frac{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{p_j(\lambda, a_1)^2}{p_j(\lambda, a_2)^2}}}\right)}{\pi} \simeq -0.114, \quad (5.36)$$

además como $\frac{p_{2s}(\lambda, a_2)}{p_{2s}(\lambda, a_1)} - \frac{p_{1s}(\lambda, a_2)}{p_{1s}(\lambda, a_1)} > 0$, entonces $x_{12q} < x_{11q}$, por la Observación 134.

Para un radio de la órbita ρ suficientemente pequeño

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} x_{12q}(\rho) \rightarrow x_{11q}(\rho),$$

la órbita decrece de derecha a izquierda en (λ, ξ_1, ξ_2) si

$$\frac{a_1(\xi_1, k)}{b_1(\xi_1, k)} + \frac{a_2(\xi_1, k)}{b_2(\xi_1, k)} < -0.114 \leq \frac{\ln \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{p_j(\lambda, a_1)^2}{p_j(\lambda, a_2)^2}}} \right)}{\pi} \simeq -0.114,$$

por lo tanto

$$\frac{a_1(\xi_1, k)}{b_1(\xi_1, k)} + \frac{a_2(\xi_1, k)}{b_2(\xi_1, k)} < -0.114 \leq \frac{\ln \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{p_j(\lambda, a_1)^2}{p_j(\lambda, a_2)^2}}} \right)}{\pi} \simeq -0.114$$

$$\text{si } 0 \leq \tilde{\xi}_1(k) \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)},$$

ya que por la parte i) del Lema 132, $\underline{a}(\xi_1, k)$ es decreciente y $\underline{a}(\tilde{\xi}_1(k), k) = 0$. Entonces las soluciones con condiciones iniciales en esta vecindad tiende a un punto interior del segmento \tilde{L}_{ks} o interseca las variedades invariantes de cada subsistema asociadas a los puntos $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k), \tilde{\xi}_2(k))$ que no pertenece al segmento \tilde{L}_{ks} cuando t tiende a infinito, es decir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{1nq}(\rho) > \tilde{\xi}_{1s}(k),$$

en este caso, como estas variedades no son variedades invariantes del sistema no suave, la órbita puede ingresar a la zona inestable y allí diverger. Por lo tanto, la órbita con condiciones iniales x_{11q} podría no tender a un punto del segmento \tilde{L}_{ks} con el ρ escogido, sin embargo como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{1nq}(0) = x_{11q}(0),$$

por continuidad existe ρ_1 tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{1nq}(\rho_1) = \tilde{\xi}_1(k),$$

luego tomando un entorno tubular con

$$\tilde{\xi}_{1s}(k) < x_{11q}(\rho_1),$$

se garantiza que la órbita con condiciones iniciales en este entorno tubular tiende a un punto del segmento \tilde{L}_{ks} cuando t tiende a infinito con lo cual se concluye la afirmación ii).

Prueba iii) Se considera ahora la atractividad del segmento \tilde{L}_{ku}

$$\tilde{L}_{ku} = \{(\lambda, \xi_1, \xi_2) \in L_k : \tilde{\xi}_{1u}(k) \underset{\cong}{\geq} \xi_1\}; \text{ si } m_j \leq 0.$$

Teniendo en cuenta la notación introducida en la Definición 136, sea $T_{M_{ku1}} \subset T_{M_{ku2}}$ (el caso $T_{M_{ks2}} \subset T_{M_{ks1}}$ es análogo) dos entornos tubulares del segmento \tilde{L}_{ku} de radios ρ_1 y ρ_2 de los subsistemas 1 y 2 en el sistema no suave (2.1) asociados a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, $j = 1, 2$, conteniendo el punto inicial de la órbita $(\lambda, x_{11}, x_{21})$, respectivamente; y satisfaciendo las condiciones del Corolario 99. Por consiguiente si se considera la linealización del subsistema generado por el campo f_1 , se tiene

$$\bar{x}_{21} = -\bar{x}_{11} e^{\pi \left(\frac{a_1}{b_1}\right)(x_{11q})} \tag{5.37}$$

y

$$\bar{x}_{22} = \frac{\bar{x}_{22}}{\bar{x}_{21}} (x_{11q}, x_{12q}) \bar{x}_{21}. \tag{5.38}$$

Sustituyendo (5.37) en (5.38), se tiene

$$\bar{x}_{22} = \frac{\bar{x}_{22}}{\bar{x}_{21}} (x_{11q}, x_{12q}) \left(-\bar{x}_{11} e^{\pi \left(\frac{a_1}{b_1}\right)(x_{11q})} \right). \tag{5.39}$$

Ahora considerando la linealización del subsistema generado por el campo f_2 , se tiene

$$\bar{x}_{12} = -\bar{x}_{22} e^{\pi \left(\frac{a_2}{b_2}\right)(x_{12q})}. \tag{5.40}$$

Sustituyendo la expresión (5.39) en (5.40), se tiene

$$\begin{aligned} \bar{x}_{12} &= -\frac{\bar{x}_{22}}{\bar{x}_{21}} (x_{11q}, x_{12q}) \left(-\bar{x}_{11} e^{\pi \left(\frac{a_1}{b_1}\right)(x_{11q})} \right) e^{\pi \left(\frac{a_2}{b_2}\right)(x_{12q})} \\ &= \bar{x}_{11} \frac{\bar{x}_{22}}{\bar{x}_{21}} (x_{11q}, x_{12q}) e^{\pi \left(\left(\frac{a_1}{b_1}\right)(x_{11q}) + \left(\frac{a_2}{b_2}\right)(x_{12q})\right)}. \end{aligned} \tag{5.41}$$

Ahora la órbita crece en cada ciclo respecto al segmento de equilibrios L_k sii

$$\bar{x}_{12} > \bar{x}_{11}. \tag{5.42}$$

Sustituyendo la expresión (5.41) en la expresión (5.42), se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\bar{x}_{22}}{\bar{x}_{21}} (x_{11q}, x_{12q}) e^{\pi \left(\left(\frac{a_1}{b_1} \right) (x_{11q}) + \left(\frac{a_2}{b_2} \right) (x_{12q}) \right)} &> \bar{x}_{11} \\ e^{\pi \left(\left(\frac{a_1}{b_1} \right) (x_{11q}) + \left(\frac{a_2}{b_2} \right) (x_{12q}) \right)} &> \frac{\bar{x}_{21}}{\bar{x}_{22}} (x_{11q}, x_{12q}). \end{aligned} \quad (5.43)$$

Además por la Proposición 123, se tiene que

$$\frac{\sqrt{p(\lambda, a_1)^2 + p(\lambda, a_2)^2}}{p(\lambda, a_2)} \geq \frac{\bar{x}_{21}}{\bar{x}_{22}} (x_{11q}, x_{12q}), \quad (5.44)$$

De la desigualdad (5.44) y la desigualdad (5.43), se tiene que si

$$e^{\pi \left(\left(\frac{a_1}{b_1} \right) (x_{11q, k}) + \left(\frac{a_2}{b_2} \right) (x_{12q, k}) \right)} \geq \frac{\sqrt{p(\lambda, a_1)^2 + p(\lambda, a_2)^2}}{p(\lambda, a_2)},$$

entonces $\bar{x}_{12} > \bar{x}_{11}$, siempre que

$$\left(\frac{a_1}{b_1} \right) (x_{11q}, k) + \left(\frac{a_2}{b_2} \right) (x_{12q}, k) > 0.114 \geq \frac{\ln \left(\sqrt{1 + \frac{p_j(\lambda, a_1)^2}{p_j(\lambda, a_2)^2}} \right)}{\pi} \simeq 0.114.$$

Como $\frac{p_{2s}(\lambda, a_2)}{p_{2s}(\lambda, a_1)} - \frac{p_{1s}(\lambda, a_2)}{p_{1s}(\lambda, a_1)} < 0$, luego $x_{12q} < x_{11q}$, por la Observación 134. Para un radio de la órbita ρ suficientemente pequeño

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} x_{12q}(\rho) \rightarrow x_{11q}(\rho) = \xi_1,$$

la órbita crece de derecha a izquierda en cada ciclo si

$$\frac{a_1(\xi_1, k)}{b_1(\xi_1, k)} + \frac{a_2(\xi_1, k)}{b_2(\xi_1, k)} > 0.114 \geq \ln \left(\sqrt{1 + \frac{p_j(\lambda, a_1)^2}{p_j(\lambda, a_2)^2}} \right) \simeq 0.114.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{a_1(\xi_1, k)}{b_1(\xi_1, k)} + \frac{a_2(\xi_1, k)}{b_2(\xi_1, k)} &> 0.114 \geq \ln \left(\sqrt{1 + \frac{p_j(\lambda, a_1)^2}{p_j(\lambda, a_2)^2}} \right) \simeq 0.114 \\ \text{si } 0 &\leq \xi_1 < \tilde{\xi}_1(k) \leq \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)}, \end{aligned}$$

ya que por la parte i) del Lema 132, $\underline{a}(\xi_1, k)$ es decreciente y $\underline{a}(\tilde{\xi}_1(k), k) = 0$. Entonces la órbita decrece de izquierda a derecha, luego las soluciones con condiciones iniciales en esta vecindad intersectan el plano $x_1 = 0$, cuando t tiende a infinito, en este último caso el plano $x_1 = 0$, es una variedad invariante del sistema y el punto $(\lambda, 0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_2)})$ es

su único punto de equilibrio el cuales es inestable, por lo tanto como las variedades invariantes sufren una bifurcación de Hopf no suave por el Teorema 120, luego la órbita tiende asintóticamente a un ciclo límite cuando t tiende a infinito, con lo cual se tiene la afirmación de la parte iii).

Prueba iv) Por la parte 1) se tiene que $\bar{x}_{12} < \bar{x}_{11}$, siempre que

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)(x_{11q}, k) + \left(\frac{a_2}{b_2}\right)(x_{12q}, k) > 0.114 \geq \frac{\ln\left(\sqrt{1 + \frac{p_j(\lambda, a_1)^2}{p_j(\lambda, a_2)}}\right)}{\pi} \simeq 0.114.$$

Como $\frac{p_{2s}(\lambda, a_2)}{p_{2s}(\lambda, a_1)} - \frac{p_{1s}(\lambda, a_2)}{p_{1s}(\lambda, a_1)} < 0$, entonces $x_{12q} > x_{11q}$, por la Observación 134. Para un radio de la órbita ρ suficientemente pequeño

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} x_{12q}(\rho) \rightarrow x_{11q}(\rho),$$

la órbita crece de izquierda a derecha en cada ciclo si

$$\frac{a_1(\xi_1, k)}{b_1(\xi_1, k)} + \frac{a_2(\xi_1, k)}{b_2(\xi_1, k)} > 0.114 \geq \frac{\ln\left(\sqrt{1 + \frac{p_j(\lambda, a_1)^2}{p_j(\lambda, a_2)}}\right)}{\pi} \simeq 0.114,$$

por lo tanto

$$\frac{a_1(\xi_1, k)}{b_1(\xi_1, k)} + \frac{a_2(\xi_1, k)}{b_2(\xi_1, k)} > 0.114 \geq \frac{\ln\left(\sqrt{1 + \frac{p_j(\lambda, a_1)^2}{p_j(\lambda, a_2)}}\right)}{\pi} \simeq 0.114$$

$$\text{si } 0 \leq \xi_1 < \tilde{\xi}_1(k) \leq \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p_j(\lambda, a_1)},$$

ya que por la parte i) del Lema 132, $\underline{a}(\xi_1, k)$ es decreciente y $\underline{a}(\tilde{\xi}_1(k), k) = 0$. Entonces las soluciones con condiciones iniciales en esta vecindad se alejan del segmento $\tilde{\tilde{L}}_k$ lo que significa que $\tilde{\tilde{L}}_k$ es un repulsor del sistema no suave (2.1). Debido a que las órbitas se alejan del segmento $\tilde{\tilde{L}}_k$ de izquierda a derecha intersectan variedades invariantes de cada subsistema asociadas a los puntos $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k), \tilde{\xi}_2(k))$ que no pertenece al segmento $\tilde{\tilde{L}}_k$ cuando t tiende a infinito, es decir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{1nq}(\rho) > \tilde{\xi}_1(k).$$

Como estas variedades no son variedades invariantes para el sistema no suave, luego la órbita ingresa a la zona atractiva y converge a un punto del segmento L_k .

□

Un resultado semejante a la Proposición 137, se tiene en el caso de sistemas artificiales por lo cual sólo se presenta su enunciado sin prueba a continuación.

Proposición 138 *Si los subsistemas del sistema no suave (2.1) asociados a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, $j = 1, 2$, son artificiales y satisfacen las condiciones (2.8) a (2.15a) y (2.20) a (2.23), así como la condición de compatibilidad de dominios (110), entonces se tiene que si*

i) $\left(\frac{\partial_s p_2(\lambda, a_2)}{\partial_s p_2(\lambda, a_1)} - \frac{\partial_s p_1(\lambda, a_2)}{\partial_s p_1(\lambda, a_1)} \right) < 0$, existe un entorno tubular $T_{M_{kuj}}$ del segmento de equilibrios $\widetilde{L}_{ku} \subset L_k$ en el cual las soluciones con condiciones iniciales en esta vecindad divergen del segmento $\widetilde{L}_{ku} \subset L_k$ cuando t tiende a infinito

ii) $\left(\frac{\partial_s p_2(\lambda, a_2)}{\partial_s p_2(\lambda, a_1)} - \frac{\partial_s p_1(\lambda, a_2)}{\partial_s p_1(\lambda, a_1)} \right) > 0$, existe un entorno tubular $T_{M_{kuj}}$ del segmento de equilibrios $\widetilde{L}_{ku} \subset L_k$ en el cual las soluciones con condiciones iniciales en esta vecindad divergen del segmento $\widetilde{L}_{ku} \subset L_k$ cuando t tiende a infinito

iii) $\left(\frac{\partial_s p_2(\lambda, a_2)}{\partial_s p_2(\lambda, a_1)} - \frac{\partial_s p_1(\lambda, a_2)}{\partial_s p_1(\lambda, a_1)} \right) > 0$, existe un entorno tubular $T_{M_{ksj}}$ del segmento de equilibrios $\widetilde{L}_{ks} \subset L_k$ en el cual las soluciones con condiciones iniciales en esta vecindad tiende a un punto del segmento $\widetilde{L}_{ks} \subset L_k$ cuando t tiende a infinito.

iv) $\left(\frac{\partial_s p_2(\lambda, a_2)}{\partial_s p_2(\lambda, a_1)} - \frac{\partial_s p_1(\lambda, a_2)}{\partial_s p_1(\lambda, a_1)} \right) < 0$, existe un entorno tubular $T_{M_{ksj}}$ del segmento de equilibrios $\widetilde{L}_{ks} \subset L_k$ en el cual las soluciones con condiciones iniciales en esta vecindad tiende a un punto del segmento $\widetilde{L}_{ks} \subset L_k$ cuando t tiende a infinito.

Como una preparación al Teorema 141, más adelante se demuestra la siguiente propiedad de las funciones $\widetilde{\xi}_1(k)$.

Proposición 139 *Considere $\widetilde{\xi}_1(k)$ solución del sistema (5.17), entonces $\widetilde{\xi}_1(k)$ es estrictamente creciente, si consideramos que el modelo es natural; y estrictamente decreciente si se considera que el modelo es artificial.*

Prueba: Sea $\widetilde{\xi}_1(k) \in [0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}]$, por el Lema 132, existe $\overline{\overline{k}}(\widetilde{\xi}_1)$, tal que

$$\frac{a_1(\tilde{\xi}_1, \bar{\bar{k}}(\tilde{\xi}_1))}{b_1(\tilde{\xi}_1, \bar{\bar{k}}(\tilde{\xi}_1))} + \frac{a_2(\tilde{\xi}_1, \bar{\bar{k}}(\tilde{\xi}_1))}{b_2(\tilde{\xi}_1, \bar{\bar{k}}(\tilde{\xi}_1))} - \frac{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{p_j(\lambda, a_1)^2}{p_j(\lambda, a_2)^2}}}\right)}{\pi} = 0, \quad (5.45)$$

por lo tanto la ecuación (5.45), define una o varias ramas implícitamente de $\tilde{\xi}_1(\bar{\bar{k}})$, particularmente se está interesado en la rama de (5.45) en la que $\hat{\xi}_1(k) \in [0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}]$. A continuación se halla el signo del $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\Delta \tilde{\xi}_1}{\Delta \bar{\bar{k}}}$, determinando el signo de $\Delta \tilde{\xi}_1$ a partir de la ecuación implícita (5.45) cuando se incrementa $\Delta \bar{\bar{k}}(\tilde{\xi}_1)$, con lo cual se termina la prueba.

Si se incrementa $\bar{\bar{k}}(\tilde{\xi}_1)$, se obtiene

$$\frac{a_1(\tilde{\xi}_1, \bar{\bar{k}}(\tilde{\xi}_1) + \Delta \bar{\bar{k}}(\tilde{\xi}_1))}{b_1(\tilde{\xi}_1, \bar{\bar{k}}(\tilde{\xi}_1) + \Delta \bar{\bar{k}}(\tilde{\xi}_1))} + \frac{a_2(\tilde{\xi}_1, \bar{\bar{k}}(\tilde{\xi}_1) + \Delta \bar{\bar{k}}(\tilde{\xi}_1))}{b_2(\tilde{\xi}_1, \bar{\bar{k}}(\tilde{\xi}_1) + \Delta \bar{\bar{k}}(\tilde{\xi}_1))} - \frac{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{p_j(\lambda, a_1)^2}{p_j(\lambda, a_2)^2}}}\right)}{\pi} > 0, \quad (5.46)$$

ya que por el Lema 132

$$\partial_k \left(\underline{a}(\tilde{\xi}_1(k), k) \right) > 0, \text{ con } \tilde{\xi}_1(k) \in [0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}],$$

luego por el Lema 132, y por continuidad de la función $\tilde{\xi}_1(k)$ existe un único $\tilde{\xi}_1 + \Delta \tilde{\xi}_1$ en la desigualdad (5.46), tal que

$$\frac{a_1(\tilde{\xi}_1 + \Delta \tilde{\xi}_1, \bar{\bar{k}}(\tilde{\xi}_1) + \Delta \bar{\bar{k}}(\tilde{\xi}_1))}{b_1(\tilde{\xi}_1 + \Delta \tilde{\xi}_1, \bar{\bar{k}}(\tilde{\xi}_1) + \Delta \bar{\bar{k}}(\tilde{\xi}_1))} + \frac{a_2(\tilde{\xi}_1 + \Delta \tilde{\xi}_1, \bar{\bar{k}}(\tilde{\xi}_1) + \Delta \bar{\bar{k}}(\tilde{\xi}_1))}{b_2(\tilde{\xi}_1 + \Delta \tilde{\xi}_1, \bar{\bar{k}}(\tilde{\xi}_1) + \Delta \bar{\bar{k}}(\tilde{\xi}_1))} - \frac{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{p_j(\lambda, a_1)^2}{p_j(\lambda, a_2)^2}}}\right)}{\pi} = 0,$$

entonces

$$\Delta \tilde{\xi}_1 = \begin{cases} > 0, & \text{si } m_j < 0 \\ < 0, & \text{si } m_j > 0 \end{cases},$$

ya que por el Lema 132

$$\partial_{\xi_1} \underline{a}(\xi_1, k) = \begin{cases} < 0, & \text{si } m_j < 0 \\ > 0, & \text{si } m_j > 0 \end{cases},$$

por lo tanto se concluye que

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\Delta \widehat{\xi}_1}{\Delta k} = \begin{cases} > 0, & \text{si } m_j < 0 \\ < 0, & \text{si } m_j > 0 \end{cases},$$

ya que $\widehat{\xi}_1(k)$ no es la función constante. \square

Una demostración semejante a la Proposición 139, se tiene para la función $\widetilde{\xi}_1(k)$ por lo cual sólo se presenta su enunciado.

Proposición 140 *Considere $\widetilde{\xi}_1(k)$ solución del sistema (5.19), entonces $\widetilde{\xi}_1(k)$ es estrictamente creciente si consideramos que el modelo es natural; y estrictamente decreciente si consideramos que el modelo es artificial.*

Observación: La función $\widetilde{\xi}_1(k)$ presenta variación de signo en el intervalo (k_{\min}, k_{\max}) como consecuencia de la Proposición 139, y de la igualdad $\widetilde{\xi}_1(\bar{k}_{\underline{a}2}) = 0$. Igualmente la función $\widetilde{\xi}_1(k)$ presenta variación de signo en el intervalo (k_{\min}, k_{\max}) como consecuencia inmediata de la Proposición 140, y de la igualdad $\widetilde{\xi}_1(\bar{k}_{\underline{a}2}) = 0$, (véase Definición 127).

Finalmente se presenta el Teorema 141, que demuestra la persistencia del fenómeno de atractividad de zip en el caso en que no existen variedades invariantes en el sistema no suave (2.1) en el interior del segmento L_k (con la topología inducida de L_k).

Teorema 141 *Si los subsistemas del sistema no suave (2.1) asociados a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, $j = 1, 2$ son naturales, satisfacen las condiciones (2.8) a (2.15a) y (2.20) a (2.23), así como la condición de compatibilidad de dominios (130) con $\left(\frac{p_{2s}(\lambda, a_2)}{p_{2s}(\lambda, a_1)} - \frac{p_{1s}(\lambda, a_2)}{p_{1s}(\lambda, a_1)} \right) < 0$. Entonces existen $k_{\underline{a}2}$ y $k_{\underline{a}1}$ únicos, con $k_{\min} < k_{\underline{a}2} < k_{\underline{a}1} < k_{\max}$ y $k_{\underline{a}2} < k_{a2}$; $k_{a1} < k_{\underline{a}1}$ tal que para todo $k \in (k_{\min}, k_{\underline{a}2})$, L_k es un atractor del sistema en el sentido que existe una vecindad del segmento de equilibrios para el cual las soluciones con condiciones iniciales en esta vecindad tiende a un punto del segmento L_k cuando t tiende a infinito. Para $k \in (k_{\underline{a}2}, k_{\underline{a}1})$ los puntos $(\lambda, \widetilde{\xi}_1(k), \widetilde{\xi}_2(k))$ y $(\lambda, \widetilde{\xi}_1(k), \widetilde{\xi}_2(k))$ determinados implícitamente por los sistemas (5.17) y (5.19) respectivamente, dividen L_k en tres partes (una de las cuales puede ser vacía). Además*

existe un entorno tubular del segmento de equilibrios $\widetilde{L}_{ku} \subset L_k$ a la izquierda del punto $(\lambda, \widetilde{\xi}_1(k), \widetilde{\xi}_2(k))$ en el cual las soluciones con condición iniciales en esta vecindad se alejan del segmento \widetilde{L}_{ku} cuando t crece, es decir la parte de L_k a la izquierda del punto $(\lambda, \widetilde{\xi}_1(k), \widetilde{\xi}_2(k))$ es un repulsor del sistema; y un entorno tubular del segmento de equilibrios $\widetilde{L}_{ks} \subset L_k$ a la derecha del punto $(\lambda, \widetilde{\xi}_1(k), \widetilde{\xi}_2(k))$ en el cual las soluciones con condición iniciales en esta vecindad tiende a un punto del segmento equilibrios \widetilde{L}_{ks} cuando t crece, es decir la parte de L_k a la derecha del punto $(\lambda, \widetilde{\xi}_1(k), \widetilde{\xi}_2(k))$ es un atractor del sistema. Para $k \in (k_{\underline{a}1}, k_{\max})$, el sistema no tiene puntos de equilibrios estables en el octante positivo del espacio cerrado s, x_1, x_2 , y L_k es un conjunto repulsor del sistema, en el sentido que existe un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k para el cual las soluciones con condiciones iniciales en esta vecindad se alejan del segmento L_k .

Prueba: Por hipótesis nuestro modelo es natural. Así, como por el Lema 132, $\underline{a}(\xi_1, k)$, es continua, estrictamente creciente con respecto al parámetro k para $(\xi_1, k) \in \overline{D}(a) \cap [0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}] \times (k_{\min}, k_{\max})$, y presenta cambio de signo en el intervalo $(\overline{k}_{\underline{a}\min}(\xi_1), \overline{k}_{\underline{a}\max}(\xi_1))$, con $\xi_1 \in [0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}]$ fijo. Luego existe un único $\overline{k} > \overline{k}_{\underline{a}\min}(\xi_{10})$ en el cual $\underline{a}(\xi_{10}, \overline{k}) = 0$, luego por la Definición 127, se tiene que

$$\underline{a}(\xi_{10}, k_{\underline{a}2}) = 0, \tag{5.47}$$

con lo cual $\overline{k} = k_{\underline{a}2}$ de acuerdo con el Lema 132. De la igualdad (5.47) y la parte i) del Lema 132, se tiene que

$$\underline{a}(\xi_1, k_{\underline{a}2}) < 0, \text{ si } \xi_1 \in [0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}]. \tag{5.48}$$

Similarmente de la desigualdad (5.48) y la parte ii) del Lema 132, se tiene que

$$\underline{a}(\xi_1, k) < 0, \text{ si } (\xi_1, k) \in \overline{D}(a) \cap [0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}] \times (k_{\min}, k_{\underline{a}2}). \tag{5.49}$$

Además si $(\xi_1, k) \in [0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}] \times (k_{\min}, k_{\underline{a}2}) - \overline{D}(a)$, entonces los puntos de equilibrios del segmento L_k respecto a cada subsistema son del tipo nodo-foco o del tipo nodo-nodo estables, ya que $k \leq k_{a21}, k_{a22}, \overline{k}_{b\min}$. Sin embargo de lo anterior y de (5.49), se tiene que L_k es un atractor del sistema no suave (2.1) en el sentido de que existe

un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k , para el cual las soluciones con condiciones iniciales en esta vecindad tiende a un punto del segmento L_k cuando t tiende a infinito, como consecuencia del Teorema 27, la Proposición 98, y la parte i) de la Proposición 137. Por lo tanto si $k \in (k_{\min}, k_{\underline{a}2})$ el segmento de equilibrios L_k es un atractor del sistema.

De la Proposición 139, se tiene que $\tilde{\xi}_1(k)$ es continua, estrictamente creciente y presenta cambio de signo en el intervalo $(\bar{k}_{\underline{a}\min}(\xi_{10}), \bar{k}_{\underline{a}\max}(\xi_{10}))$. De la igualdad (5.47), la Definición 127, y la relación de $\tilde{\xi}_1(k)$ en el sistema (5.17), se tiene que

$$\tilde{\xi}_1(\bar{k}_{\underline{a}2}) = 0. \tag{5.50}$$

Sin embargo, de la segunda ecuación del sistema (5.17), se tiene que

$$\tilde{\xi}_2(k) = \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k) - \tilde{\xi}_1(k)p(\lambda, a_1)}{p(\lambda, a_2)},$$

luego la línea \hat{L}_k (ver Notación 34) intercepta el eje ξ_2 en un punto de coordenada positiva para $k = k_{\underline{a}2} > k_{b\max}$, es decir $\hat{\xi}_2(k_{\underline{a}2}) > 0$. Similarmente por el Lema 132, la Proposición 133, y la Definición 127, existe un $k_{\underline{a}1} > k_{\underline{a}2}$, en la cual

$$\tilde{\xi}_2(k_{\underline{a}1}) = 0. \tag{5.51}$$

En conclusión, los puntos $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k), \tilde{\xi}_2(k)) \in L_k$ para $(k_{\underline{a}2}, k_{\underline{a}1})$ en que la linealización de los subsistemas del sistema no suave (2.1) asociados a los campos $f_j = 1, 2$, tiene valores propios cuya suma de los cocientes de las partes reales e imaginarias menos

la constante $\frac{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{p_j(\lambda, a_1)^2}{p_j(\lambda, a_2)}}}\right)}{\pi}$ es cero, es decir $\underline{a}(\xi_1, k) = 0$, se localiza en el segundo cuadrante del plano x_1, x_2 con $s = \lambda$, fijo.

De la igualdad (5.51) y la parte ii) del Lema 132, se tiene que

$$\underline{a}(\xi_1, k_{\underline{a}1}) > 0, \text{ si } \xi_1 \in [0, \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}], \tag{5.52}$$

Como $[0, \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}] \times (k_{\underline{a}1}, k_{\max}) \subset \overline{D}(a)$, entonces $\overline{D}(a) \cap [0, \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}] \times (k_{\underline{a}1}, k_{\max}) = [0, \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}] \times (k_{\underline{a}1}, k_{\max})$, luego de la desigualdad (5.52) y la parte ii) del Lema 132, se tiene que

$$\underline{a}(\xi_1, k) > 0, \text{ si } (\xi_1, k) \in [0, \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}] \times (k_{\underline{a}1}, k_{\max}). \tag{5.53}$$

Por lo tanto para $k \in (k_{\underline{a}1}, k_{\max})$, (5.53), implica que el segmento de equilibrios L_k es un repelor del sistema, en el sentido que existe un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k para el cual las soluciones con condiciones iniciales en esta vecindad se alejan del segmento L_k cuando t tiende a infinito, como consecuencia del Teorema 27, la Proposición 98, y la parte iv) de la Proposición 137, y pueden alcanzar el plano $x_2 = 0$ (véase la parte ii) de la Observación 134), el cual es una variedad invariante, formando allí un ciclo límite no suave por el Teorema 121.

Si $k \in (k_{\underline{a}2}, k_{\underline{a}1})$, los puntos $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k), \tilde{\xi}_2(k))$ y $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k), \tilde{\xi}_2(k))$ dividen L_k en tres partes (*dos de las cuales puede ser vacías*); en la parte izquierda la condición (5.54) es válida

$$\underline{a}(\xi_1, k) > 0, \text{ si } 0 \leq \xi_1 \leq \tilde{\xi}_1(k). \quad (5.54)$$

Luego, de (5.54), y de la parte iv) de la Proposición 137, se deduce que el segmento de equilibrios L_k es un repelor del sistema, en el sentido que existe un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k para el cual las soluciones con condiciones iniciales en esta vecindad se alejan del segmento L_k cuando t tiende a infinito. Como la órbita es inestable puede ingresar a la zona estable (véase la parte i) de la Observación 134) y allí converger a un punto del segmento L_k . Por otro lado, en la parte derecha la condición (5.55) es válida

$$\underline{a}(\xi_1, k) < 0, \text{ si } \tilde{\xi}_1(k) \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}. \quad (5.55)$$

Sin embargo, de (5.55), y de la parte i) de la Proposición 137 se implica que el segmento de equilibrios L_k es un atractor del sistema, en el sentido que existe un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k , para el cual las soluciones con condiciones iniciales en esta vecindad tiende a un punto del segmento L_k cuando t tiende a infinito.

Las funciones $\left(\tilde{\xi}_2(k) - \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_2)}\right); \left(\tilde{\xi}_2(k) - \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_2)}\right)$ son funciones monótonas decrecientes, ya que por las segundas ecuaciones de los sistemas (5.17) y (5.19), se tiene

respectivamente que

$$\begin{aligned}\partial_k \left(\tilde{\xi}_2(k) - \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_2)} \right) &= -\partial_k \tilde{\xi}_1(k) \frac{p(\lambda, a_1)}{p(\lambda, a_2)}, \\ \partial_k \left(\tilde{\xi}_2(k) - \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_2)} \right) &= -\partial_k \tilde{\xi}_1(k) \frac{p(\lambda, a_1)}{p(\lambda, a_2)},\end{aligned}$$

y además por ser $\tilde{\xi}_1(k)$, $\tilde{\xi}_1(k)$ monótonas crecientes para $k \in (\bar{k}_{a_2}, \bar{k}_{a_1})$ por la Proposición 139, y 140. Resaltamos en esta parte que como $g(\lambda, \cdot)$ es una función no decreciente, y las funciones $\left(\tilde{\xi}_2(k) - \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_2)} \right)$, $\left(\tilde{\xi}_2(k) - \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_2)} \right)$, funciones monótonas decrecientes. Entonces si k es incrementado de \bar{k}_{a_2} a \bar{k}_{a_1} los puntos $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k), \tilde{\xi}_2(k))$ y $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k), \tilde{\xi}_2(k))$ se mueven continuamente a lo largo de L_k del extremo del lado izquierdo, es decir $\tilde{\xi}_1(\bar{k}_{a_2}), \tilde{\xi}_1(\bar{k}_{a_2}) = 0$, al extremo del lado derecho o sea $\tilde{\xi}_2(\bar{k}_{a_1}), \tilde{\xi}_2(\bar{k}_{a_1}) = 0$; además el segmento L_k sufre un desplazamiento paralelo hacia arriba. En este proceso los puntos que se quedan detrás del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k), \tilde{\xi}_2(k))$ pierden su *atractividad*. Se observa por lo anterior que a pesar de que no existen variedades invariantes en el interior del segmento de equilibrios L_k ; sin embargo si ocurre un fenómeno que puede tipificarse como de *pérdida de la atractividad del segmento de equilibrios L_k en el fenómeno de la bifurcación zip no suave* en el caso en que no existen variedades invariantes en el interior del segmento L_k , y esto nos recuerda al profesor Farkas cuando se refiere al caso de pérdida de estabilidad de los puntos $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k), \tilde{\xi}_2(k))$ en la bifurcación zip suave. \square

Un modelo artificial no suave en el que no existen variedades invariantes en el interior del segmento L_k con $m_j > 0$, se comporta de forma similar a un modelo natural no suave en el que no existen variedades invariantes en el interior del segmento L_k , excepto en que la dirección de la pérdida de atractividad del zip va en sentido contrario. La prueba del siguiente teorema es análoga a la del teorema anterior motivo por el cual sólo se presentará su enunciado.

Teorema 142 *Si los subsistemas del sistema no suave (2.1) asociados a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, $j = 1, 2$, son artificiales, satisfacen las condiciones (2.8) a (2.15a) y (2.20) a (2.23), así como la condición de compatibilidad de dominios (130) con $\left(\frac{p_{2s}(\lambda, a_2)}{p_{2s}(\lambda, a_1)} - \frac{p_{1s}(\lambda, a_2)}{p_{1s}(\lambda, a_1)} \right) < 0$. Entonces existen k_{a_2} y k_{a_1} únicos, con $k_{\min} < k_{a_1} <$*

$k_{\underline{a}2} < k_{\max}$ y $k_{\underline{a}2} < k_{\underline{a}2}$; $k_{\underline{a}1} < k_{\underline{a}1}$ tal que para todo $k \in (k_{\min}, k_{\underline{a}1})$, L_k es un atractor del sistema, en el sentido que existe una vecindad del segmento de equilibrios para el cual las soluciones con condiciones iniciales en esta vecindad tiende a un punto del segmento L_k cuando t tiende a infinito. Para $k \in (k_{\underline{a}1}, k_{\underline{a}2})$ los puntos $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k), \tilde{\xi}_2(k))$ y $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k), \tilde{\xi}_2(k))$ determinados implícitamente por los sistemas (5.17) y (5.19), respectivamente, dividen L_k en tres partes (dos de las cuales puede ser vacía). Además existe un entorno tubular del segmento de equilibrios $\tilde{L}_{ku} \subset L_k$ a la derecha del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k), \tilde{\xi}_2(k))$ en el cual las soluciones con condición iniciales en esta vecindad se alejan del segmento \tilde{L}_{ku} cuando t crece, es decir la parte de L_k a la derecha del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k), \tilde{\xi}_2(k))$ es un repulsor del sistema; y un entorno tubular del segmento de equilibrios $\tilde{L}_{su} \subset L_k$ a la izquierda del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k), \tilde{\xi}_2(k))$ en el cual las soluciones con condición iniciales en esta vecindad tiende a un punto del segmento equilibrios \tilde{L}_{su} cuando t crece, es decir la parte de L_k a la izquierda del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k), \tilde{\xi}_2(k))$ es un atractor del sistema. Para $k \in (k_{\underline{a}2}, k_{\max})$, el sistema no tiene puntos de equilibrios estables en el octante positivo del espacio cerrado s, x_1, x_2 , y L_k es un conjunto repulsor del sistema, en el sentido que existe un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k para el cual las soluciones con condiciones iniciales en esta vecindad se alejan del segmento L_k .

Capítulo 6

Conclusiones

En este capítulo se presenta una mirada de la tesis, capítulo por capítulo, subrayando las ideas centrales y los aportes respectivos. También se sugiere algunos temas de posibles líneas de investigación. El presente trabajo contribuye al estudio de la dinámica de sistemas no suaves con especial aplicación a la dinámica de poblaciones.

Las bifurcaciones de equilibrios aislados en sistemas suaves son asociadas con un valor propio o (un par de valores propios complejos) que cruza el eje imaginario bajo variación de parámetros. Por lo tanto el análisis de la bifurcación del sistema dinámico depende de su matriz jacobiana (y sus valores propios) en el sistema de parámetros considerado. Sistemas no suaves continuos poseen fronteras de discontinuidad sobre el cual el campo vectorial es no suave y la matriz jacobiana no puede ser obtenida. En el presente trabajo de investigación se prueba a extender el concepto de bifurcación zip en una clase de sistemas no suaves el cual posee un conjunto continuo de equilibrios a lo largo del cual la matriz jacobiana del sistema es discontinua. El concepto de la bifurcación zip fue introducida por el profesor Miklós Farkas en [24] en el sistema suave (0.1) de competición de dos predadores por una presa que se regenera para denotar el siguiente fenómeno. "A bajos valores de la capacidad de carga del ecosistema k con respecto a la presa, una línea de equilibrios es un atractor del sistema, ella representa coexistencia estable de las tres especies. Si k es incrementado los equilibrios son continuamente desestabilizados, empezando por aquellos,

que representan la dominancia del k -estratega sobre el r -estratega. Arriba de cierto valor de k , el sistema no tiene más equilibrios estables que representen coexistencia; sin embargo, un ciclo límite permanece representando la oscilación de coexistencia del r -estratega y la presa “.

En el Capítulo uno se presentan algunos conceptos y teoremas relacionados con estabilidad y bifurcación de naturaleza tanto suave como no-suave tratadas desde el marco de la equivalencia topológica y también geométrica que nos sirven de marco teórico para el desarrollo de los resultados en los capítulos subsiguientes.

En el Capítulo dos se propone el sistema no-suave (continuo por tramos) a partir de la composición de dos subsistemas suaves los cuales satisfacen las condiciones de Butler-Farkas, se determinan condiciones de continuidad (2.5) y de compatibilidad (2.26), (2.27), entre los subsistemas para garantizar la existencia de la bifurcación de zip no-suave. También se construye un modelo concreto original el cual satisface las condiciones generales del modelo propuesto, el cual nos sirve para ilustrar la existencia de los distintos comportamientos de la dinámica de la bifurcación de zip no-suave.

En Capítulo tres se presenta un completo análisis del comportamiento dinámico y asintótico tanto de la componente real como imaginaria de los valores propios asociados a la linealización de los subsistemas del sistema no suave (2.1) a lo largo de su conjunto de equilibrios, ya que en el análisis de la bifurcación zip en sistemas no suaves del tipo (2.1), la estabilidad de cada punto de equilibrio del segmento L_k sobre la variedad invariante asociada al él, es determinada tanto por la componente real como por la componente imaginaria de los valores propios a lo largo del segmento de equilibrios L_k , véase Freire E., Ponce E. & Torres F. [38]; Camlibel [8], Olivar & Angulo [77]; Carmona V., Freire E., Ponce E. & Torres F. [11]. También se establece un nuevo criterio de clasificación geométrico de las bifurcaciones en sistemas suaves de clase C^2 del tipo (2.1) el cual preserva información sobre el número, estabilidad, topología de los conjuntos invariantes y también de las formas geométricas de nodos y focos alrededor de puntos de equilibrios hiperbólicos aislados. Se observa que este criterio de equivalencia geométrica dado en la Definición 14, permite tratar

los cruces de ambos ejes coordenados por los valores propios de la linealización del sistema al variar el parámetro, como bifurcaciones geométricas del sistema. Así un cambio del retrato de fase de un nodo a un foco (cruce del eje real) se considera una bifurcación geométrica. Desde este punto de vista el tratamiento de los distintos escenarios reciben un tratamiento más simétrico con respecto a la dinámica de los valores propios, ya que en este caso el eje imaginario no es privilegiado. Con base en los resultados obtenidos en el análisis de la componentes de los valores propios y del criterio de clasificación geométrico antes mencionado se demuestra que la bifurcación de zip descubierta por Farkas [24] al estudiar la componente real de los valores propios con base en el criterio de equivalencia topológica es también una bifurcación con el criterio de clasificación geométrico antes mencionado así como la existencia de una bifurcación geométrica a lo largo del segmento de equilibrios equilibrio L_k del tipo zip causada por la acción de la componente imaginaria. Además se demuestra que el fenómeno de bifurcación de zip forma parte de un fenómeno más complejo el cual viene dado por la combinación de dos tipos de bifurcación geométrica, causadas por la acción simultánea de la componente real y la componente imaginaria de los valores propios a lo largo del segmento de equilibrios L_k ; el cual da lugar a un escenario de bifurcaciones conformado por 11 tipos de zip geométrico en total. Como trabajo futuro se propone generalizar el concepto de equivalencia topológica en sistemas n-dimensionales.

En el Capítulo cuatro se demuestra la existencia de un sistema aproximado (perturbado) y topológicamente equivalente del sistema no suave (2.1) el cual es construido a partir de los subsistemas generados por campos \tilde{f}_j que son aproximaciones topológicamente equivalentes de los campos f_j que generan los subsistemas del sistema no suave (2.1) en un entorno tubular alrededor del segmento de equilibrios L_k salvo en un conjunto de medida cero. Además como a las variedades invariantes que intersectan transversalmente el segmento de equilibrios L_k de los subsistemas generados por los campos \tilde{f}_j se les conoce su integral primera, entonces se puede determinar que en el sistema no suave (4.2) la condición (4.7) es condición necesaria y suficiente para la existencia de variedades invariantes que intersecten transversalmente

el segmento de equilibrios L_k . Adicionalmente a las condiciones de continuidad (2.5), y de compatibilidad (2.26), (2.27), para garantizar que se satisfacen las condiciones Butler-Farkas en el modelo no suave 2.1) se imponen condiciones de compatibilidad de dominios (Definición 110) entre los subsistemas que componen el sistema no suave (2.1) que garantiza un comportamiento monótono de la función $a(\xi_1, k)$ respecto de las variables ξ_1, k , la cual determina la estabilidad de los puntos del segmento de equilibrios del segmento L_k . Bajo las condiciones (4.7), (2.5), (2.26), (2.27) y 110 antes mencionadas y el Corolario 99, se demuestra finalmente el Teorema 114, a cerca de la existencia de la bifurcación de zip del sistema suave por tramos (2.1) y la proposición de clasificación de estas bifurcaciones, el cual afirma que bajo acción posible de los 11 tipos de bifurcaciones geométricas que actúan a lo largo del segmento de equilibrios L_k inducidas por la evolución de cada uno de los campos f_1 y f_2 se produce un escenario de bifurcaciones de naturaleza no suave conformado por 142 tipos de zip geométrico en total.

Los métodos obtenidos para clasificar y determinar la existencia de bifurcaciones inducidas por la discontinuidad en sistemas no suaves en codimensión uno tienen su importancia para detectar la ocurrencia de C-bifurcaciones, predecir los escenarios dinámicos que le sigue a su ocurrencia y mejorar así el control en las aplicaciones de estos sistemas en Ingeniería y en Ciencias Aplicadas.

En este capítulo también se trata la existencia de la bifurcación de Hopf en las variedades invariantes bidimensionales que intersectan transversalmente el segmento equilibrios L_k en sistemas no-suaves del tipo (2.1) no degenerados. En sistemas suaves del tipo (2.1) degenerados ($a_1 = a_2$) fue resuelta por Farkas [24]. Él también ha mostrado en [24] en el caso de sistemas suaves no degenerados (modelos naturales y artificiales) que en los planos coordenados se desarrolla una bifurcación de Hopf; sin embargo la existencia de la bifurcación de Hopf en las variedades invariantes que intersectan transversalmente el interior del segmento equilibrios L_k es una conjetura que no ha sido probada. La dificultad en la prueba de esta conjetura radica en la imposibilidad de determinar la integral primera del sistema que define estas variedades invariantes; sin embargo en el sistema perturbado (4.2) si es posible y de hecho

nos permite establecer la existencia de la bifurcación de Hopf en el sistema suave (4.2) (perturbado suave de modelos naturales y artificiales) y la existencia de la bifurcación de Hopf-Zou & Küpper en el sistema no suave (4.2) (perturbado no suave de modelos naturales y artificiales) en cada una de las variedades invariantes que intersectan transversalmente el segmento de equilibrios L_k bajo las hipótesis que se utilizaron para demostrar la existencia de la bifurcación de zip no-suave y de las caracterizaciones de la bifurcación Hopf no-suave debida a Zou & Küpper [99], así como de la atractividad de puntos de equilibrios aislados en sistemas suave por tramos planares, Freire E., Ponce E. & Torres F. [38]; Camlibel [8], Olivar & Angulo [77]; Carmona V., Freire E., Ponce E. & Torres F. [11].

Respecto de la existencia de la bifurcación de Hopf en el sistema suave (2.1) (modelos naturales y artificiales suaves) y la existencia de la bifurcación de Hopf-Zou & Küpper en el sistema no suave (2.1) (modelos naturales y artificiales no suaves) en cada una de las variedades invariantes que intersectan transversalmente el segmento de equilibrios L_k , se establece la hipótesis de que la conjetura sigue siendo válida si el sistema no suave (2.1) preserva las variedades invariantes bidimensionales bajo variación del parámetro k , como consecuencia directa del Corolario 101, como ocurre en los sistemas degenerados no suaves del tipo (2.1) con $(a_1 = a_2)$. En el caso en que las variedades invariantes bidimensionales no se preservan bajo variación del parámetro k , en sistemas no suaves hiperbólicos del tipo (2.1) (de acuerdo con la Definición 19) se ha observado que existe un entorno tubular del segmento de equilibrios $\bar{L}_{ku} \subset L_k$ inestable, para el cual las trayectorias con condiciones iniciales en esta vecindad tienden al mismo ciclo límite sobre el plano coordinado al cual derivan por tener pérdida de estabilidad del tipo hiperbólico. El ciclo límite crece en amplitud con el incremento del parámetro k desde el valor cero, el cual ocurre, donde el punto que degenerada en el segmento de equilibrios L_k intersecta el plano coordinado en consideración. En este caso no se puede afirmar que en las variedades invariantes que intersectan el segmento de equilibrios se desarrolla una bifurcación de Hopf, ya que estas variedades no se preservan por cambios en el parámetro de bifurcación k ; sin embargo los ciclos límites que se desarrollan en ellas, están asociadas a la bifurcación

de Hopf que se desarrolla en el plano coordinado del sistema al cual derivan sus órbitas.

En Escobar [22] se demuestra que los modelos degenerados presenta el mismo tipo crítico de bifurcación de Hopf en todas las variedades que intersectan transversalmente el segmento de equilibrios L_k mediante la generalización de la fórmula para calcular el exponente de Lyapunov-Farkas; como trabajo futuro está determinar si en el caso de modelos no degenerados del sistema perturbado (4.2) esta característica aún persiste. Esta caracterización es importante porque mejora el conocimiento que se tiene de la "paradox of enrichment" en dinámica de poblaciones.

En el Capítulo cinco se analiza la dinámica del sistema no-suaves (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$ cuando sus subsistemas no satisfacen la condición de la variedad invariante (4.7). Como consecuencia de ello se puede demostrar que las únicas variedades invariante bidimensionales del sistema son los planos coordinados, ahora la estabilidad de los puntos interiores del segmento de equilibrios L_k no se puede determinar por la linealización del sistema, ya que con cada conmutación, la órbitas a cada lado de la superficie de discontinuidad sobre las subvariedades bidimensionales respectivas van cambiando sus centros de equilibrios en la dirección del "zip no-suave". Sin embargo se puede demostrar que la pérdida de atractividad del segmento de equilibrios L_k se conserva a pesar de la conmutación de las órbitas del sistema no suave. En este caso es preciso conocer la forma en que estas variedades intersectan transversalmente la superficie de conmutación para poder determinar una regla decaimiento de las órbitas, esta vez no con respecto al equilibrio asociado a la variedad si no con respecto al segmento de equilibrios L_k . Dado que la condición de la variedad invariante (4.7) no se tiene más se restringe el análisis a sistemas no suaves en los cuales sus subsistemas asociados son parcialmente del mismo tipo tipo, véase Definición 102. Bajo estas premisas finalmente se demuestra el Teorema 141, el cual muestra que el fenómeno de *pérdida de atractividad del segmento de equilibrios L_k* que se presenta en la bifurcación zip suave persiste aún en estos sistemas y nos recuerdan al Profesor Farkas al referirse al caso de pérdida de estabilidad de los puntos del segmento de equilibrios L_k en el desarrollo de la bifurcación de zip en

sistemas suaves.

Como trabajo futuro se propone estudiar la atractividad del segmento L_k del sistema no suave (2.1) cuando los campos $f_j(s, x_1, x_2)$ no son parcialmente del mismo tipo.

Finalmente en el anexo B se construyen cuatro ejemplos numéricos de modelos no-suaves mediante el programa Mathematica que preservan las variedades invariantes locales dos-dimensionales del sistema perturbado, y cuatro ejemplos más de modelos no-suave que preservan sólo atractividad del segmento de equilibrios L_k los cuales representan modelos naturales y artificiales del tipo exponencial algebraico, generalizan el modelo de crecimiento logístico de Gilpin para la tasa de reproducción de la presa, así como los modelos del tipo Holling III y Rosenzweig para la respuesta funcional del depredador. Los modelos hallados satisfacen las condiciones necesarias planteadas por Butler [7] y Farkas [24] en cada una de los subsistemas del sistema no-suave así como las condiciones de compatibilidad entre ellas. Como consecuencia de lo anterior el modelo de Hsu y otros se generaliza a sistemas no-suaves (continuos por tramos) en el caso tratado por Wilken [96] y Farkas [24], es decir para el caso tridimensional, $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ con $a_1 > a_2$, y el caso bidimensional $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ con $a_1 = a_2 = a$, en dinámica de poblaciones, y nos muestran la existencia, diversidad de dinámicas, del fenómeno de bifurcación de zip-no-suave.

Se propone como trabajo futuro desarrollar procedimientos de composición, concate-nación de retratos de fase y continuación de órbitas del sistema no suave (2.1) cuando los campos $f_j(s, x_1, x_2)$ son del tipo Filippov.

El modelo propuesto puede ser generalizado a mayor dimensión y más alta codi-mensión, así como a modelos no suaves de mayor complejidad como los sistemas de Filippov que presentan deslizamiento y los sistemas con impacto y fricción, lo cual es muy conveniente ya que el uso de estos sistemas se ha incrementado en Inge-niería y Ciencia Aplicada para el modelamiento de una variedad de sistemas físicos, biológicos y dispositivos tecnológicos caracterizados por eventos discontinuos. Ejem-plos pueden ser encontrados en la ocurrencia de impactos en sistemas mecánicos,

movimiento stick-slip en osciladores con fricción, switchings en circuitos eléctricos y electrónicos, caminata de robots, y dinámica híbrida en sistemas de control, manejo de recursos renovables en dinámica de Poblaciones, control biológico de plagas en Ecología. Específicamente los modelos analizados en este trabajo tiene su importancia teórica en biología, ya que ellos crean situaciones hipotéticas susceptibles de ser analizadas, situaciones que normalmente no pueden ser aisladas en el mundo real. Entre las múltiples preguntas que surgen de tales modelos una es ver en que medida pueden ellos ayudar a caracterizar la evolución de algunos ecosistemas reales sometidos a tasas de crecimiento de la presa y respuesta funcional de los predadores distinta a las ya conocidas, que se adapten mejor al complejo y diverso universo de las especies. Que cambios puede conllevar la introducción de una especie en un ecosistema simplificado en el control biológico de una especie determinada. Aunque estos modelos son modelos simplificados del complejo mundo de los ecosistemas, cada vez crece más su importancia teórica y práctica. La explicación se encuentra en que la revolución industrial y tecnológica ha desarrollado como uno de sus objetivos el control físico y biológico de los ecosistema y ha producido, en consecuencia modelos simplificados de los ecosistemas, como los cultivos hidropónicos, la agricultura de monocultivos y la pesca industrial de alto rendimiento etc... Conforme se ha elevado el costo del control físico y químico, conforme aumenta la resistencia de las plagas a los plaguicidas y conforme crece la amenaza de las sustancias químicas tóxicas de desecho que contaminan los alimentos, el agua y el aire, se está volviendo a considerar el control biológico, el control integral de plagas, sustitución de especies explotadas por especies competidoras que no estén sujetas a explotación; lo cual nos lleva de nuevo a considerar modelos simplificados del tipo depredador presa. Esperamos que estos trabajos en dinámica de población ayuden al ser humano como depredador que es, a convertirse en lo que Slobodkin [86] llama “depredador prudente” es decir, uno que no extermina a su presa por sobreconsumo.

Bibliografía

- [1] Andronov, A. A., Leontovich, E. A., Gordon and Maier, A. G. *Qualitative Theory of Second-Order Dynamical Systems*, John Wiley and Sons, New York, 1973.
- [2] Andronov, A. A., Pontryagin, L. *Systèmes grosseiers*. Dokl. Acad Nauk SSSR **14**, 247-251. In Russian. 1937.
- [3] Armstrong, M. A. *Topología Básica*, Editorial Reverté. Barcelona-Bogotá 1987.
- [4] Ballinger G., Liu X. Permanence of population growth models with impulsive effects. *Math Comput Model*; 26:59-72. 1997.
- [5] Blondel, V. D., and Tsitsiklis, J. N. Complexity of stability and controllability of elementary hybrid systems. *Automatica*, 35(3): 479-490, 1999.
- [6] Boukal, D. S., Křivan, V. Lyapunov functions for Lotka-Volterra predators-prey models with optimal foraging behaviour. *J. Math. Biol.* 39, 493-517. 1999.
- [7] Butler, G. J. Competitive predator-prey systems and coexistence, in *population Biology Proceedings*, Edmonton: Lecture Notes in Biomathematics. 52: 210-299. Berlin: Springer-Verlag. 1983.
- [8] Camlibel M. K., Heemels, W. P. M. H., & Schumacher, J. M. Stability and controllabilidad of planar bimodal complementarity systems. In *Proceedings IEEE Conference on Decision and Control*, 2003.
- [9] Carmona, V., Freire, E., Ponce, E., & Torres, F. On simplifying and classifying piecewise-linear systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, 49(5):609-620. May 2002.
- [10] Carmona, V., Freire, E., Ponce, E., & Torre, F. Invariant manifolds of periodic orbits for piecewise linear three-dimensional systems. *IMA Journal of applied Mathematics*, 69(1):71-91. February 2004.
- [11] Carmona, V., Freire, E., Ponce, E., & Torres, F. Bifurcation of invariant cones in Piecewise Linear Homogeneous System. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 15, No. 8: 2469–2484. 2005.

- [12] Darwin, C. *The Origin of Species by Means of Natural Selection, or the Preservation of Favoured Races in the Struggle for Life*. John Murray, London. 1859.
- [13] Davis, L. S., Johnson, K. N. *Forest Management*. Mcgraw-Hill, New York. 1987.
- [14] Dercole, F., Gragnani, A., Ferrière, R., Rinaldi, S. Coevolution of slow-fast populations: An application to prey-predator systems. *Proc. R. Soc. Lond. B.* 273, 983-990. 2006.
- [15] Devaney, R. L. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley, Redwood City, CA. 1989.
- [16] di Bernardo, M., Feigin, M. I., Hogan, S.J., Homer, M.E.: Local analysis of C-bifurcations in n-dimensional piecewise smooth dynamical systems. *Chaos Solitons Fract.*10(11), 1881–1908. 1999.
- [17] di Bernardo, M. Normal Forms of Border Collisions in high-dimensional Non-smooth Maps. *IEEE1803-7761-31031SII.000*. 2003.
- [18] di Bernardo, M., Budd, C. J., Champneys, A. R., and Kowalczyk, P. S. Nordmark, A., Olivar, G., and Piiroinen, P. T. *Bifurcations in nonsmooth dynamical systems*. SIAM Review, 2006.
- [19] di Bernardo, M., Nordmark, A., Olivar, G. Structural stability and bifurcations of equilibria in piecewise-smooth dynamical systems. Submitted to *Automatica*. 2007.
- [20] di Bernardo, M., Budd, C. J., Champneys, A. R., and Kowalczyk, P. *Piecewise-smooth Dynamical Systems. Theory and Applications*. Applied Mathematical Sciences 163. Springer-Verlag, Berlin. 2008.
- [21] di Bernardo, M., Nordmark A., Olivar, G. Discontinuity-induced bifurcations of equilibria in piecewise-smooth and impacting dynamical systems. *Physica D.* 237: 119–136. 2008.
- [22] Escobar, C. Modelo original de tipo exponencial algebraico que exhibe la bifurcación zip. Tesis Mg. Universidad de Antioquia, 2003.
- [23] Escobar, C. Solutions to the Lamé equation by the method of the complex variable, Thesis. university Nacional of Colombia, 2005.
- [24] Farkas, M. Zip bifurcation in a competition model, *Nonlinear analysis TMA*, 8: 1295-1309. 1984a.
- [25] ———. Stable Oscillations in a predator-prey model with time lag. *J. Math. Anal. Appl.*102: 175-188. 1984b.
- [26] ———. A zip bifurcation arising in population dynamics, in 10th Int. Conf. On, *Nonlinear Oscillations*, Varna 1984. 150-155. Sofia: Bugarian Academy of Science. 1985.

- [27] ———. Competitive exclusion by zip bifurcation, in : Dynamical Systems, IIAsa. Workshop, 1995, Sopron, Lecture notes in Econ. And Math. Systems 287: 165-178. Verlin: Spriger-Verlag, 1987.
- [28] ———. Motions. Periodic. New York: Springer-Verlag, 1994.
- [29] ———. Dynamical models in biology. San Diego: Academic Press Inc. Journal Division, 2001.
- [30] Farkas, M., Sáez, E., Szántó, I. Velcro Bifurcation in Competition Models with Generalized Holling Functional Response. Miskolc Mathematical Notes, Vol 6, N.2, pp.165-178, 2005.
- [31] Feigin, M. I. Doubling of the oscillations period with C-bifurcations in piecewise continuous systems. Journal Applied Mathematics and Mechanics (Prikladnaya Matematika i Mechanika), 34:861-869. 1970.
- [32] Feigin, M. I. On the generation of sets of subharmonic modes in a picewise continuous system. Journal Applied Mathematics and Mechanics (Prikladnaya Matematika i Mechanika), 38:810-818. 1974.
- [33] Feigin, M. I. Forced Oscilations in systems with discontinuous nonlinearities. Nauka, Moscow, in Russian. 1994.
- [34] Ferreira, J. D. Hopf and zip bifurcation in an specific $(n+1)$ - competitive system. Matematicas: Enseñanza Universitaria. 2007.
- [35] Ferreira, J. D, Oliveira, L. A. Zip bifurcation in a competitive system with diffusion. Differential Equations and Dynamical Systems. Vol. 17, Nos. 1 & 2, pp. 37–53, January & April 2009.
- [36] Fiedler B., Liescher S. Generic Hopf Bifurcation from lines of Equilibria without Parameters. Journal of Differential equations. 167, 16-35. 1999.
- [37] Fredericksen, T. S. Limitations of low-intensity selective logging for sustainable tropical forestry. Commun. For. Rev. 77, 262-266. 1998.
- [38] Freire, E., Ponce, E. Rodrigues, F. & Torres, F. Bifurcation sets of continuous Piecewise Linear systems with two zones. International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 8, No. 11: 2073-2097. 1998.
- [39] Genkai-Kato, M., Yamamura, N. Unpalatable prey resolves the paradox of enrichment. Proc. R. Soc. Lond. B. 266, 1215-1219. 1999.
- [40] Guckenheimer J., and Holmes, P. J. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations de Vector Fields. New York: Springer-Verlag, 1983.
- [41] Hartman, P. Orinary Differential Equations. New York: Wiley, 1964.
- [42] Hassan K. K. Nonlinear Systems. New Jersey: Prentice Hall, 2002.

- [43] Hassard, B. D., Kazarinoff, N. D. and Wan, Y. H. Theory and Applications of Hopf Bifurcation. Cambridge: Cambridge University Press, 1981.
- [44] Hilborn, R., Walters, C. Quantitative Fisheries Stock Assessment: Choice, Dynamics and Uncertainty. Chapman and Hall. 1992.
- [45] Hopf, E. Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines Differential systems, Ber. Verh. Sachs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.Nat., 95: 3-22. 1942.
- [46] Housner, G. W., Bergman, L. A., Caughey, T.K., Chassiakos, A. G., Claus, R. O., Masri, S. F., Skelton, R. E., Soong, T. T., Spencer, B. F., and Yau, J. T. P. Structural engineering: past, present and future. Journal of Engineering Mechanics. 123:117-134. 1997.
- [47] Hsu, S. B., Hubbell, S. P. & Waltman, P. Competing predators, SIAM J. appl. Math. 35: 617-625. 1978a.
- [48] ———. A contribution de la theory of competing predators. Ecological Monographs. 48: 337-349. 1978b.
- [49] Hutchinson, G. E., and Deevey E. S. Ecological Studies on Populations (Survey of Biol. Progress, Vol. I, 3: 25-359). New York: Academic Press, 1949.
- [50] Jacob Palis., Welington de Melo. Geometric Theory of Dynamical Systems. New York: Spriger-Verlag, 1982.
- [51] Kiss, K., Kovacs, Sando. Qualitative behavior of n-dimensional ratio-dependent predator-prey systems. Applied Mathematics and Computation 199 535–546. 2008.
- [52] Koch A. Coexistence resulting from an alteration of density dependent and density independent growth. J. theoret. Biol. 44: 373-386. 1974a.
- [53] ———. Competitive coexistence of two predators utilizing the same prey under constant environmental conditions, J. Theor. Biol., 44: 387-395. 1974b.
- [54] Křivan, V. Dynamical consequences of optimal host feeding on host-parasitoid population dynamics. Bull Math. Biol. 59 (5), 809-831. 1997a
- [55] Křivan, V. Dynamic ideal free distribution: effects of optimal path choice on predator-prey dynamics. Am. Nat. 149 (1), 164-178. 1997b.
- [56] Křivan, V. Effects of optimal antipredator behavior of prey on predator-prey dynamics: the role of refuges. Theor. Popul. Biol. 53, 131-142. 1998a.
- [57] Křivan, V. Competitive co-existence caused by adaptive predators. Evol. Ecol. Res. 5, 1163-1182. 1998b.

- [58] Křivan, V., Sikder, A. Optimal foraging and predator-prey dynamics, II. *Theor. Popul. Biol.* 55, 111-126. 1999.
- [59] Křivan, V. Competitive co-existence caused by adaptive predators. *Evol. Ecol. Res.* 5, 1163-1182. 2003a.
- [60] Křivan, V., Eisner, J. Optimal foraging and predator-prey dynamics, III. *Theor. Popul. Biol.* 63, 269-279. 2003b.
- [61] Křivan, V., Schmitz, O. J. Adaptive foraging and flexible food web topology. *Evol. Ecol. Res.* 5, 623-652. 2003c.
- [62] Křivan, V., Diehl, S. Adaptive omnivory and species coexistence in tri-trophic food webs. *Theor. Popul. Biol.* 67, 85-99. 2005.
- [63] Křivan, V., Sirot, E. Search food or host: the influence of parasitoids behaviour on host-parasitoid dynamics. *Theor. Popul. Biol.* 51, 201-209. 1997.
- [64] Kuznetsov, Yu. A. *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer Verlag, New York. 1995.
- [65] Kuznetsov, Yu. A., Rinaldi, S., & Gagnani A. One-parameter bifurcation in planar Filippov systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos* **13**, 2157-2188. 2003.
- [66] Lasota A. and Strauss A. Asymptotic behavior for differential equations which cannot be locally linearized. *J. Diff. Eq.*, 10:152-172, 1971.
- [67] Lakmeche A., Arino O. Bifurcation of non trivial periodic solutions of impulsive differential equations arising chemotherapeutic treatment *Dyn Contin Discrete Impulsive Syst*; 7:265-87. 2000.
- [68] Leine, R.I., Van de Campen D.H., Van De Vrande B.I. Bifurcations in nonlinear discontinuous systems. *Nonlinear Dynam*; 23:105-64. 2000.
- [69] Lyapunov, A M. *Problème générale de la stabilité de mouvement*, *Annals of Mathematics Studies* 17, Princeton, NJ, 1947 (originally: Kharkov, 1892, Russian). 1892.
- [70] Liu B., Zhang Y., Chen L. Dynamic complexities of a Holling I predator-prey model concerning periodic biological and chemical control. *Solitons & Fractals*; 22:123-34. 2004.
- [71] Lu Z., Chi X., Chen L. The effect of constant and pulse vaccination on SIR epidemic model with horizontal and vertical transmission. *Math Comput Model*; 36-1039-57. 2002.
- [72] Marsden, J. & McCracken, M. *Hopf Bifurcation and its Applications*. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin. 1976.

- [73] MAY, R. M. *Stability and Complexity in Model Ecosystems*. Princeton, N. J.: Princeton: University Press, 1974a
- [74] ———. *Theoretical Ecology*, 2nd edn., Sinauer. Sunderland, MA, 1974b.
- [75] Meza, M. E. M., Bhaya, A., Kaszkurewicz, E., da Silveira Costa, M. I. Threshold policies control for predator-prey systems using a control Lyapunov function approach. *Theor. Popul. Biol.* 67, 273-284. 2005.
- [76] Negrini P. & Salvadori L. Attractivity and Hopf bifurcation, *Nonlinear Analysis* 3: 87-99. 1979.
- [77] Olivar, G., Angulo, F., di Bernardo, M. Hopf-Like transitions in nonsmooth dynamical systems. In *Proceedings IEEE ISCAS*, vol. 4, pp. 693-696. ISBN 0-7803-8251-X. 2004.
- [78] Peixoto, M. M. On structural stability, *Annals of Mathematics*, 69: 199-222. 1959a.
- [79] ———. On structural stability on two dimensional manifolds. *Topology*, 1: 101-120. 1959b.
- [80] Perko, Lawrence. *Differential Equations and Dynamical Systems*. New York: Springer-Verlag, 2000.
- [81] Poincaré, H. Sur les courbes définies par les équations différentielles, *J. de Math.*, 7 (1881) 375-422. 8 (1882) 251-296. 1 (1885) 167-244. 2 (1886) 151-217. 1886.
- [82] Sansone, G., Conti, R. *Non-linear Differential Equations*, Pergamon, New York. 1964.
- [83] Simeonov PE, Bainov DD. Orbital stability of periodic solutions of autonomous systems with impulse effect. *Int J Syst Sci*; 19:2562-85. 1998.
- [84] Sirot, E., Krivan, V. Adaptive superparasitism and host-parasitoid dynamics. *Bull. Math. Biol.* 59(1), 23-41. 1997.
- [85] Shulgin B., Stone L., Agur Z. Theoretical examination of Pulse vaccination policy in the SIR epidemic model. *Math Comput Model*; 31:207-15. 2000.
- [86] Slobodkin, L. B. Prudent predation does not require group selection. *Amer. Nat.* 108: 665-678. 1974.
- [87] Smale, S. On gradient dynamical systems, *Ann. Math.*, 74: 199-206. 1961.
- [88] ———. Structurally stable systems are not dense, *Amer. J. Math.*, 88: 491-496. 1966.
- [89] ———. Differentiable dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73: 747-817. 1967.

- [90] Smith, H. L. The interaction of steady state and Hopf bifurcations in a two predator-one prey competition model, *SIAM J. appl. Math.* 42: 27-43. 1982.
- [91] Srinivasu, P. D. N., Gayatri, I. L. Influence of prey reserve capacity on predator-prey dynamics. *Ecol. Model.* 181, 191-202. 2005.
- [92] Tang, SY., Chen, LS. Density-dependent birth rate, birth pulses and their population dynamic consequences. *J Math Biol*; 44:185-99. 2002.
- [93] Thom, R. *Stabilité structurelle et morphogénèse*. New York: Benjamin, 1972.
- [94] Van de Wouv N. and Leine R. I. Attractivity of equilibrium sets of systems with dry friction. *Nonlinear Dynamics*, 35:19-39, 2004.
- [95] Van, Baalen, M., Krivan, V., Van, Rijn, P. C. J., Sabelis, M. W. Alternative food, switching predators, and the persistence of predators-prey systems. *Am. Nat.* 157(5), 512-524. 2001.
- [96] Wilken, D. R. Some remarks on a competing predators problem, *SIAM J. appl. Math.* 42: 895-902. 1982.
- [97] Zeeman, E. C. Stability of dynamical system, *Nonlinearity*, 1: 115-155. 1988.
- [98] Zhang, S., Dong, L., Chen, L. The study of predator-prey system with defensive ability of prey and impulsive perturbations on the predator. *Chaos, Solitons & Fractals*; 23:631-43. 2005.
- [99] Zou, Y., Küpper, T., Beyn, W.J.: Generalized Hopf Bifurcation for Planar Filippov Systems Continuous at the Origin. *J. Nonlinear Sci.* Vol. 16: pp. 159–177 (2006).

Apéndice A

Preliminares en estabilidad y bifurcaciones

Dedicamos este apéndice para complementar algunos conceptos y teoremas sobre estabilidad y bifurcaciones tanto de sistemas suaves como de sistemas no-suaves que fueron introducidos en el Capítulo de los Preliminares y que forman parte del marco teórico de las demostraciones de los principales teoremas que se realizan. La primera parte se dedica a las nociones básicas de estabilidad y bifurcaciones de sistemas suaves (campo diferenciable) haciendo especial énfasis en las bifurcaciones topológicas uniparamétricas más simples en sistemas dinámicos suaves a tiempo continuo, en las cuales se ha mostrado existe una contrapartida no suave Leine [68], véase Farkas [24] y Kuznetsov [64]. La segunda parte trata las bifurcaciones de equilibrio de frontera en sistemas suave por tramos (SST) a tiempo continuo, los cuales pueden clasificarse dependiendo de lo que suceda en su frontera de discontinuidad Σ , véase di Bernardo M., Nordmark A., Olivar G., [18]; di Bernardo M., Nordmark A., Olivar G. [19]; di Bernardo [20]; y di Bernardo M., Nordmark A., Olivar. G. [21].

A.1 Sistemas suaves

A continuación se formalizan estos conceptos y establecen algunas propiedades que resultan importantes en el desarrollo de este trabajo.

Definición 143 *Un sistema dinámico sobre el espacio de estados M se representa por la terna (M, φ, G) donde M es un espacio métrico completo y conexo, el flujo $\varphi : G \times M \mapsto M$ es una función continua y el conjunto de índices G forman un grupo topológico que satisface las siguientes propiedades:*

i) $\varphi(e, x) = x$, donde e es el elemento identidad de G

ii) $\varphi(t, \varphi(s, x)) = \varphi(s + t, x)$.

En este trabajo nos restringimos al caso $G = R$, caso continuo, es decir a sistemas dinámicos continuos o a tiempo continuo.

Definición 144 *En el sistema dinámico (M, φ, R) se llama movimiento del punto $x \in M$ por efecto del flujo φ , a la siguiente aplicación*

$$\begin{aligned} \varphi_x & : G \rightarrow M \\ t & \mapsto \varphi(t, x), \end{aligned}$$

y a su gráfica curva integral del punto x .

Definición 145 *En un sistema dinámico (M, φ, R) se define:*

la órbita o trayectoria $O(x)$ de $x \in M$, como

$$O(x) = \text{Im } \varphi_x = \{\varphi_x(t) : t \in R\},$$

la órbita futura de x , como

$$O^+(x) = \{\varphi(t, x) : t > 0, t \in R\},$$

y la órbita pasada de x , como

$$O^-(x) = \{\varphi(t, x) : t < 0, t \in R\}.$$

Definición 146 Sea (M, φ, R) sistema dinámico y $A \subset M$, se dice invariante sii

$$\varphi(t, x) \in A; \forall (x \in A \wedge t \in R).$$

Se observa que los conjuntos invariantes son aquellos que contienen todas sus órbitas.

Definición 147 Si (M, φ, R) es un sistema dinámico continuo:

Un punto $p \in M$ se dice de equilibrio sii

$$\varphi(t, p) = p, \forall t \in R,$$

un punto $p \in M$ se dice periódico sii

$$\exists \tau > 0, \text{ tal que } \varphi(t + \tau, p) = \varphi(t, p), \forall t \in R,$$

la órbita $\varphi(t, p)$ por p se dice de período τ sii

$$\exists \tau > 0, \text{ tal que } \tau = \inf\{\beta : \varphi(t + \beta, p) = \varphi(t, p), \forall t \in R\}.$$

Es evidente que si un conjunto invariante contiene un punto, entonces contiene toda la órbita de dicho punto. En particular, las órbitas periódicas y los puntos de equilibrio (así como cualquier otra órbita) son conjuntos invariantes.

Relacionado con el comportamiento a largo plazo o asintótico de las órbitas se definen los conceptos de conjunto α y ω límite, los cuales son también conjuntos invariante del flujo.

Definición 148 Sea (M, φ, G) sistema dinámico con $A \subset M$. Se denota el conjunto ω límite de A con respecto al flujo φ , como $w(A, \varphi)$ y se define como

$$w(A, \varphi) = \{y : \exists (t_k \rightarrow +\infty, x \in A) \text{ tal que } \varphi(t_k, x) \rightarrow y\}.$$

Definición 149 Sea (M, φ, G) sistema dinámico y $A \subset M$. Se denota el conjunto α límite de A con respecto al flujo φ , como $\alpha(A, \varphi)$ y se define como

$$\alpha(A, \varphi) = \{y : \exists n_t \rightarrow -\infty, x \in A \text{ tal que } \varphi(n_t, x) \rightarrow y\}.$$

Se observa que si (M, φ, G) es un sistema dinámico y x es un punto periódico, entonces

$$w(x, \varphi) = \alpha(x, \varphi).$$

Proposición 150 *Si (M, φ, G) sistema dinámico, entonces los conjuntos $w(x, \varphi)$ y $\alpha(x, \varphi)$ son cerrados e invariantes.*

Prueba: Se observa que $w(x, \varphi) = \bigcap_{k \geq 1} \overline{\{\varphi(t_k, x) : t_k > k\}}$, Luego, $w(x, \varphi)$ es cerrado. Si $y \in w(x, \varphi) \Rightarrow \exists t_k \rightarrow +\infty$ tal que $\varphi(t_k, x) \rightarrow y$. Sea $m \in \mathbb{Z}$, entonces $\varphi(t_k + m, x) \rightarrow \varphi(m, y)$, y por lo tanto $\varphi(m, y) \in w(x, \varphi)$. \square

La demostración para el conjunto $\alpha(A, \varphi)$ es semejante.

Proposición 151 *Si (M, φ, G) sistema dinámico y $\overline{\varphi(t_k, x)}$ es compacto, entonces $w(x, \varphi)$ es conexo.*

Prueba: $w(x, \varphi) = \bigcap_{t \geq 1} \overline{\varphi(t, x)}$ es una intersección decreciente de compactos conexos. Luego, es conexa. \square

Otra clase importante de conjuntos invariantes son las órbitas de conexión, las cuales tienden a otro conjunto invariante cuando $t \rightarrow \infty$ o $t \rightarrow -\infty$.

Definición 152 *Sea (M, φ, G) sistema dinámico y $p \in M$ punto de equilibrio. Una órbita homoclínica del punto de equilibrio p , es una órbita $O(x) \neq p$ tal que para todo $x_0 \in O(x)$, se tiene que*

$$\varphi(t, x_0) \rightarrow p \text{ cuando } t \rightarrow -\infty;$$

$$\varphi(t, x_0) \rightarrow p \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Definición 153 *Sea (M, φ, G) sistema dinámico y $p, q \in M$ puntos de equilibrio. Una órbita heteroclínica del punto de equilibrio p al punto de equilibrio q , es una órbita $O(x) \neq p, q$ tal que para todo $x_0 \in O(x)$, se tiene que*

$$\varphi(t, x_0) \rightarrow p \text{ cuando } t \rightarrow -\infty;$$

$$\varphi(t, x_0) \rightarrow q \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Las órbitas homoclínicas y heteroclínicas juegan un papel importante en la separación de las cuencas de atracción de otros conjuntos invariantes. Es posible que los sistemas dinámicos contengan ciertos subconjuntos geométricos simples del espacio de estados cuyas órbitas permanecen en ellos. La dinámica de estos conjuntos invariantes podría contener equilibrios, órbitas periódicas y otros tipos de atractores. Del mismo modo, los flujos pueden contener invariantes tori, esferas invariantes, cilindros, etc... conjuntos invariantes que están a nivel local descritos por un conjunto m -dimensional de coordenadas los cuales se denominan variedades invariantes. En este trabajo tienen especial importancia las variedades invariantes de dimensión dos que son transversales a un segmento de equilibrios, ya que ellas particionan el espacio de estados (octante positivo) y reducen la dimensión del espacio de estados simplificando el estudio de la dinámica de nuestro sistema.

Otros conjuntos invariantes los cuales aparecen en sistemas caóticos son los *atractores extraños* los cuales presentan topología fractal y presentan dinámicas muy complejas. A continuación se introduce la definición de sistema caótico.

Definición 154 Sea (M, φ, R) sistema dinámico, el conjunto $A \subset M$ es denso en M , sii para todo conjunto $B \supset A$ cerrado se tiene que $B = M$.

En pocas palabras, un subconjunto es denso si todo elemento del conjunto se puede aproximar por uno del subconjunto A de la definición anterior.

Definición 155 Si (M, φ, R) sistema dinámico continuo, el conjunto $A \subset M$ es topológicamente transitivo si dados dos conjuntos abiertos cualesquiera U y V , existe $t \in R$ tal que $\varphi(t, U) \cap V \neq \phi$.

Intuitivamente hablando, un sistema es topológicamente transitivo en un conjunto M si este no se puede separar en dos conjuntos invariantes. Se puede probar que un subconjunto compacto de la recta real o de la circunferencia es topológicamente transitivo si y sólo si tiene una órbita densa en él.

Definición 156 *Se dice que el sistema dinámico (M, φ, R) es sensible respecto a condiciones iniciales en un conjunto $A \subset M$, si existe una constante $\varepsilon > 0$, con la siguiente propiedad:*

para cada $x \in A$ y cada entorno abierto V_x de x , existe un punto z , y un $t \in R$ tales que $d(\varphi(t, x), \varphi(t, z)) \geq \varepsilon$.

Intuitivamente, un sistema dinámico manifiesta sensibilidad con respecto a condiciones iniciales si para cada punto x existen puntos arbitrariamente cercanos a x que acaban por separarse de x al menos una cantidad cuando ambos evolucionan por medio de t . Se Adopta la definición de sistema caótico de R. L. Devaney [15], por ser la más comúnmente aceptada.

Definición 157 *Se dice que el sistema dinámico (M, φ, R) es caótico, si se cumplen la siguientes condiciones*

1. *M es topológicamente transitivo.*
2. *El conjunto de puntos periódicos es denso en M .*
3. *Manifiesta sensibilidad respecto a condiciones iniciales en M .*

Sorprendentemente, salvo en casos patológicos (espacios finitos ó de generador discontinuo), la tercera condición, que parece expresar la esencia del caos, es consecuencia de las otras dos. En consecuencia, el caos genéricamente es una propiedad topológica, independiente de las propiedades métricas del espacio. En general, los sistemas dinámicos no son caóticos en todo su espacio de estados, sino en ciertas regiones de éste. Si A es un conjunto invariante, se dice que el sistema dinámico (M, φ, G) es caótico en A si su restricción a A es un sistema dinámico caótico. Para sistemas a tiempo continuo, no existen sistemas caóticos en dimensiones 1 y 2, mientras que para sistemas discretos no hay restricción en la dimensión.

Definición 158 *Sea (M, φ, R) sistema dinámico continuo. El conjunto invariante $A \subset M$ se dice que es estable en el sentido de Lyapunov si para todo abierto $U \supset A$,*

$$\varphi(t, x) \in U ; \forall (x \in V, t > 0).$$

Definición 159 Si (M, φ, G) sistema dinámico continuo. El conjunto invariante $A \subset M$, se dice que es un conjunto atractor si existe un abierto $V \supset A$ tal que

$$\forall x \in V; (\varphi(t, x) \rightarrow A \text{ cuando } t \rightarrow \infty).$$

En la definición anterior, si $V = M$, se dice que A es globalmente atractivo.

Definición 160 Sea (M, φ, G) sistema dinámico continuo y $A \subset M$, se dice que es un conjunto asintóticamente estable en el sentido Lyapunov, si es un conjunto invariante y cerrado con respecto a la topología definida en M y además satisface:

i) para todo abierto $U \supset A$, existe abierto $V \supset A$, tal que

$$\varphi(t, x) \in U ; \forall (x \in V, t > 0)$$

ii)

$$\forall x \in V; (\varphi(t, x) \rightarrow A \text{ cuando } t \rightarrow \infty).$$

En la definición anterior si $V = M$ se dice que A es globalmente asintóticamente estable. En el retrato de fase de la Figura A.1, se observa que el punto $(1, 0)$ es atractivo pero no es estable.

Definición 161 Sea (M, φ, G) sistema dinámico continuo y $A \subset M$ atractor. El dominio de atracción o cuenca de atracción $D(A)$ es el conjunto maximal U que satisface i) y ii) de la Definición 160.

La cuenca de atracción puede ser definida con mayor generalidad para conjuntos invariantes:

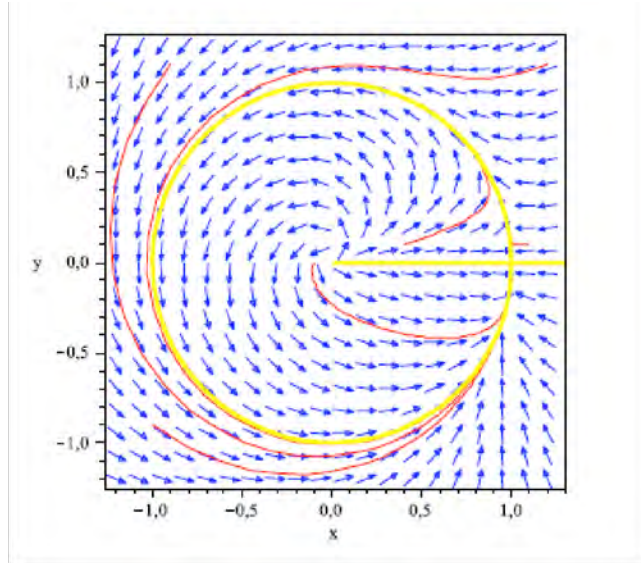


Figura A.1: Reatrato de fase el cual muestra que el punto $(1,0)$ es atractivo pero no estable.

Definición 162 Sea (M, φ, G) sistema dinámico continuo y $A \subset M$ un conjunto invariante. Se llama conjunto estable de A o también cuenca de atracción de A respecto del flujo φ al conjunto

$$w_s(A, \varphi) = \{x \in M : \lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, x), A) = 0 \}.$$

Si nuestro sistema dinámico es invertible, podemos definir también el conjunto inestable de A como

$$w_u(A, \varphi) = \{x \in M : \lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, x), A) = 0 \}.$$

Observe que el conjunto inestable de A para $\varphi(t, x)$ es el conjunto estable de A para el sistema inverso $\varphi(-t, x)$, por lo que ambos conjuntos tienen las mismas propiedades. Para un punto de equilibrio p los conjuntos estable e inestable del conjunto invariante $A = \{p\}$, se denota simplemente como $Ws(p)$ y $Wu(p)$; estos conjuntos son particularmente interesante en sistemas dinámicos definidos sobre variedades diferenciables.

Ahora se considera un sistema dinámico con flujo diferenciable $\varphi \in C^2(\mathbb{R} \times M)$ y M variedad diferenciable de \mathbb{R}^n para garantizar existencia y unicidad del campo de

velocidades sobre M . A continuación se define formalmente lo que entendemos por una variedad diferenciable y orientable M de R^n .

Definición 163 *El subconjunto M de R^n se dice que es una variedad diferenciable, m -dimensional de orden C^k ($1 \leq m \leq n, k \geq 1$) si existe una familia de pares (V_i, v_i) , ($i = 1, 2, \dots, N$), donde $V_i \subset M \subset R^n$ es un abierto relativo en M , y v_i es un C^k -difeomorfismo de V_i en un conjunto abierto de R^m tal que $M = \cup_{i=1}^N V_i$ y para cualquier par $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ si $V_i \cap V_j \neq \emptyset$, entonces esta intersección es un abierto relativo en M . El conjunto de pares (V_i, v_i) , ($i = 1, 2, \dots, N$) es llamado atlas de M , y V_i es una vecindad de cualquiera de sus puntos.*

Aquí un C^k -difeomorfismo es un mapeo uno-a-uno, el cual es k -veces continuamente diferenciable en el dominio con inversa continua. La definición implica que si $V_i \cap V_j \neq \emptyset$, entonces el mapeo:

$$v_j \circ v_i^{-1} : v_i(V_i \cap V_j) \rightarrow v_j(V_i \cap V_j), \tag{A.1}$$

es un C^k -difeomorfismo. Aquí $v_i(V_i \cap V_j) \subset R^m$ es la imagen de $V_i \cap V_j$ con el mapeo v_i , y similarmente para v_j . En la Definición 163, R^m se le llama espacio coordinado. Si un punto $x \in M$ es un elemento de un entorno de V_i , entonces $v_i = v_i(x) \in v_i(V_i) \subset R^m$ representa sus coordenadas $u_i = (u_i^1, \dots, u_i^m)$, ($i = 1, 2, \dots, N$). Con el objetivo de simplificar la representación del jacobiano de la transformación de coordenadas se supone en lo que sigue $V_i = V$ y $V_j = \tilde{V}$, en forma semejante $u_i = u$ y $u_j = \tilde{u}$. La derivada de la k -ésima coordenada de $v_j \circ v_i^{-1}$ con respecto de u^l se denota por:

$$\left[\frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial u^l} \right] \quad (k, l = 1, 2, \dots, m).$$

El concepto de variedad m -dimensional diferenciable de orden C^k es una generalización del concepto de curva y superficie suave en el espacio tridimensional Euclidiano.

Definición 164 *Sea el sistema dinámico diferenciable (M, φ, G) , es decir con un flujo diferenciable $\varphi \in C^2(R \times M)$; se denomina velocidad de fase $v(x)$ del flujo φ en el punto $x \in M$ al vector de velocidad del movimiento del punto x*

$$\frac{d\varphi_x}{dt}(0) = v(x). \quad (\text{A.2})$$

Se observa que el movimiento es una aplicación derivable en M de modo que la derivada esta bien definida y la expresión (A.2) define un campo de vectores sobre M , a tal campo se le denomina campo asociado al sistema dinámico o al flujo φ ; igualmente al sistema autónomo generado por el campo $v(x)$ sobre M

$$\dot{x} := f(x) := v(x), \quad (\text{A.3})$$

se le denomina ecuación diferencial autónoma asociada al sistema dinámico o al flujo φ , y esta ecuación genera el flujo φ en el sentido de la Definición 143 ya que

$$\dot{\varphi}(t, x) = \dot{\varphi}(t + \tau, x) = \dot{\varphi}(\tau, \varphi(t, x)) = \frac{d\varphi_{\varphi(t, x)}}{d\tau}(0) = f(\varphi(t, x)).$$

Así todo flujo C^2 genera un sistema autónomo de clase C^1 cuyas soluciones son los movimientos del flujo. Es fácil darse cuenta que el recíproco también es cierto, esto es, a cada sistema de ecuaciones diferenciales autónomas de la forma (A.3) se le puede asociar un campo de vectores, el cual se corresponde justamente con el campo de vectores tangentes a las curvas integrales del sistema en cada punto. Por lo tanto, tenemos la alternativa de considerarlo todo en el contexto de ecuaciones diferenciales o usar el lenguaje de los campos de vectores (en nuestro caso definidos sobre R^n). Ahora se considera las variedades invariantes locales y su linealización de flujos φ de clase C^{r+1} $r \geq 1$.

A.1.1 Estabilidad estructural y bifurcación en sistemas suaves

Si el sistema es estructuralmente estable en el sentido de la Definición 16, éste puede ser utilizado como un modelo matemático del mundo real, y por lo tanto puede esperarse resultados satisfactorios, ya que pequeñas perturbaciones no cambia el comportamiento cualitativo de la solución. Existen dos preguntas en conexión con el concepto de estabilidad estructural; primera: ¿Cómo puede un sistema estructuralmente estable ser caracterizado?, es decir ¿Cómo puede determinar si el sistema

es estable o no?. Segunda: ¿ Los sistemas estructuralmente estables forman un subconjunto suficientemente grande de $C^1(M, R^n)$? Ambas preguntas pueden ser resueltas positivamente en dimensión dos. La caracterización fue dada por Andronov y Pontriagin [1937] y Peixoto [1959a, 1959b] utilizando una definición mejorada.

Teorema 165 (Andronov and Pontriagin [2], Peixoto [78, 79]). *Considere el sistema $\dot{x} = f(x)$ tal que $f \in C^1(M, R^2)$, donde M denota una C^2 -variedad compacta orientable dos dimensional (o alternativamente $M \subset R^2$ es C^2 -difeomorfo a la bola unidad compacta y tiene la frontera ∂M transversalmente a f); el sistema es estructuralmente estable si y únicamente si:*

(i) *Si este tiene un número finito de puntos de equilibrios y todos estos son hiperbólicos, es decir, no tiene valores propios con parte real cero.*

(ii) *Todos los conjuntos alpha y omega límites consisten de equilibrios y órbitas cerradas únicamente.*

(iii) *Un camino no conecta un punto de silla con otro punto de silla, es decir, no hay caminos cuyo conjunto alpha límite y omega límite puedan ser ambos puntos de silla.*

(iv) *Si éste tiene un número finito de órbitas cerradas y todas estas son hiperbólicas, es decir el número 1 es un multiplicador característico para cada una.*

Las condiciones (i) y (iv) son intuitivamente claras; la condición (ii) excluye el caso de trayectorias homoclínicas y heteroclínicas.

La respuesta a la segunda pregunta la dan los dos teoremas siguientes, en los que se separa el caso en que M es una variedad compacta diferenciable del caso en que ésta es un subconjunto compacto de R^2 :

Teorema 166 (Peixoto [79]). *Sea M una C^2 – variedad compacta orientable bidimensional sin frontera; entonces el conjunto de sistemas estructuralmente estable definido sobre M forma un subconjunto abierto y denso de $C_T^1(M; R^2)$.*

Sea $M \subset \mathbb{R}^2$ un C^2 – difeomorfismo en el disco unidad, y se denota el campo vectorial definido sobre M de clase C^1 transversal a la frontera de ∂M con $C_T^1(M; \mathbb{R}^2)$

Teorema 167 (Peixoto [78]). *Los sistemas estructuralmente estables forman un subconjunto denso de $C_T^1(M; \mathbb{R}^2)$.*

Infortunadamente en dimensiones más altas que dos, no existe una caracterización similar a la de Andronov-Pontriagin-Peixoto (véase Definición 16). Mientras es evidente que los sistemas estructuralmente estables son abiertos, su densidad no ha sido probada; Smale [88, 89] ha descubierto la *transformación herradura* con la cual, el ha mostrado que esto no es verdadero. La *transformación herradura* de Smale es un sistema dinámico estructuralmente inestable que tiene una vecindad similarmente estructuralmente inestable.

Se dice intuitivamente que una propiedad es *genérica* si ésta es *abundante en la mayoría de los sistemas*. Formalmente, si un subconjunto abierto y denso del sistema tiene esta propiedad. Así que los sistemas estructuralmente estables son genéricos en dimensión dos; pero no lo son en dimensión mayor.

Se observa que la estabilidad estructural es un requerimiento bastante fuerte y tiene que reconsiderarse la posición que afirma que únicamente los sistemas estructuralmente estables, son modelos válidos del mundo real. Hay varios caminos para salvar la situación; es posible tratar este problema localmente en una vecindad de un punto de equilibrio u órbita periódica. En primer lugar, se pueden definir *distancias locales*, la *equivalencia local* y la *estabilidad estructural local* de flujos; en segundo lugar, hay una definición introducida por Zeman [97] que reduce el problema a la *estabilidad estructural* de funciones reales en varias variables. Una función $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ se dice que es una función de *Morse* si:

- (i) Si cualquier subconjunto compacto de \mathbb{R}^n tiene un número finito de puntos críticos, es decir, puntos donde el $\text{grad } f(x) = 0$.
- (ii) Todos los puntos críticos son no degenerados, es decir $\det[f''_{x_i x_k}(x)] \neq 0$, donde el $\text{grad } f(x) = 0$. La función de Morse es una propiedad estructuralmente estable,

igual toda función en un C^2 -vecindad de una función de Morse es una función de Morse. Además, las funciones de Morse son genéricas en $C^2(R^n, R)$.

En tercer lugar, podemos considerar sistemas y aceptar que son modelos realistas del mundo, si ellos tienen propiedades estructuralmente estables que son relevantes desde el punto de vista físico, (así que de acuerdo con la filosofía expuesta por Guckenheimer y Holmes [40, pp 259]) se puede decir que una propiedad es *relativa estructuralmente estable*, si pequeñas perturbaciones del sistema conservan esta propiedad; naturalmente se tiene que decir que perturbaciones son permitidas. Por ejemplo, si se consideran sistemas lineales homogéneos, entonces la propiedad de que el origen sea punto de equilibrio hiperbólico, (todos los valores propios tienen parte real diferente de cero), es una propiedad relativamente estable. En este caso, si los subespacios estables e inestables tienen dimensión s y u , respectivamente, $s + u = n$; claramente esto es verdadero para todo sistema lineal con coeficientes constantes, suficientemente cercano al sistema considerado.

En vez del estudio de la propiedad relativa estructuralmente estable para una perturbación arbitraria C^1 , es más ventajoso restringir el estudio a una familia parametrizada del sistema.

$$\dot{x} = f(x, \mu), \tag{A.4}$$

donde $\mu \in R^m, x \in R^n, f \in C^r(R^n \times R^m, R^n), r \geq 1$. Existen dos enfoques: el más ambicioso es preguntar cuáles son los valores de los parámetros μ , donde (A.4) es estructuralmente estable (o local estructuralmente estable) y en cuáles valores críticos la estabilidad se pierde. El enfoque menos ambicioso es tratar de encontrar algunos valores de los parámetros para los cuales el sistema tiene ciertas propiedades que prevalecen cuando los parámetros varían ligeramente es decir observar la estabilidad estructural de ciertas propiedades relativas a las familias del sistema (A.4), y encontrar los valores críticos de μ en el cual la propiedad se pierde al variar otra propiedad. El primer enfoque es de René Thom, *Teoría de catástrofes*, Thom [93]. El famoso Teorema de clasificación de Thom da una completa clasificación de los casos en que la estabilidad estructural puede ser pérdida para sistemas gradientes:

$$\dot{x} = -grad V(x, \mu), \tag{A.5}$$

donde $V \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$, probando que la dimensión m del espacio de parámetros es menor o igual a cinco. Citamos a continuación, sin prueba, el Teorema de Smale acerca de la caracterización de sistemas gradientes estructuralmente estables.

Teorema 168 (Smale [87]). *Los sistemas gradientes para los cuales todos los equilibrios son hiperbólicos y todas las intersecciones de variedades estables e inestables son transversales, son estructuralmente estables.*

Las propiedades de las funciones de Morse y la intersección transversal implican que los sistemas gradientes estructuralmente estables son genéricos en el espacio de sistemas gradientes. Un teorema referente a las soluciones periódicas de los sistemas gradientes es el siguiente.

Teorema 169 *Un sistema gradiente no puede tener ni órbitas periódicas no constantes, ni órbitas homoclínicas.*

Prueba: Sea $p(t)$ una solución no periódica no constante de (A.5) con período $\tau > 0$. Considere V a lo largo de la solución p y diferenciamos la función compuesta $V \circ p$ con respecto a t considerando μ fijo:

$$\frac{d}{dt}(V \circ p)(t) = \langle \text{gra}V(p(t)), \dot{p}(t) \rangle = -(\text{gra}V(p(t)))^2 \leq 0$$

en la expresión anterior la igualdad no puede ocurrir ya que el camino de p contendría un punto de equilibrio. Así la función composición $V \circ p$ es estrictamente decreciente, en particular $V(p(0)) > V(p(T)) = V(p(0))$ es una contradicción. La no existencia de una órbita homoclínica es probada análogamente. \square

El segundo enfoque que se restringe al estudio de una familia parametrizada del sistema (A.4) es el que usualmente llamamos *teoría de bifurcación*, las propiedades estudiadas son la existencia, el número y la estabilidad del conjunto *w-límite* (equilibrio y/o soluciones periódicas). Se espera que exista un subconjunto abierto del espacio de parámetros en el cual el número y la estabilidad de equilibrios y órbitas periódicas no cambien bajo la variación de parámetros, y que en la frontera

de dichos dominios ocurran cambios. Por ejemplo, la existencia de un punto singular estable que pierde su estabilidad y produce dos equilibrios estables (de aquí el término de bifurcación que probablemente fue introducido por Henri Poincaré); o en puntos donde no existían equilibrios bajo cierto valor de los parámetros μ se produce equilibrios (usualmente en pares), o bajo ciertos valores de los parámetros pueden aparecer órbitas periódicas alrededor de los puntos de equilibrios. Nosotros presentamos algunos resultados de la teoría de bifurcación local para sistemas que dependen de un parámetro singular μ . Aquí bifurcación local se refiere a bifurcaciones de equilibrios donde el fenómeno de interés ocurre en un entorno del punto singular. En este trabajo de investigación se analiza bajo este enfoque una clase de modelos especiales, los cuales presentan la *bifurcación zip*. En el desarrollo de esta bifurcación suele presentarse, para el caso en que se considera la restricción del sistema a ciertas variedades invariantes, la bifurcación de Andronov-Hopf. En los capítulos siguientes se trata ampliamente la *bifurcación zip*, por esta razón en esta sección se describen brevemente algunas características de la bifurcación de Hopf y se presenta el método de Salvadori-Negrini, el cual ayuda a su caracterización como una bifurcación de Hopf supercrítica o subcrítica dependiendo del signo de la constante de Poincaré-Lyapunov.

A.1.2 Bifurcaciones en sistemas dinámicos suaves a tiempo continuo

A continuación se presentan las bifurcaciones topológicas uniparamétricas más simples en sistemas dinámicos suaves a tiempo continuo en las cuales se ha mostrado existe una contrapartida no suave, Leine [68]. Se considera el sistema de ecuaciones diferenciales uniparamétrico (1.23) en lo que sigue:

Bifurcación tipo silla-nodo (fold): Este tipo de bifurcación se presenta cuando se verifica las condiciones:

- $D_x f(x_0, \mu_0)$ tiene un autovalor simple nulo, k autovalores con parte real negativa y

$(n - k - 1)$ autovalores con parte real positiva (contando multiplicidades).

- $D_x f(x_0, \mu_0) \neq 0$

- $D_x^2 f(x_0, \mu_0) \neq 0$.

La bifurcación silla-nodo está asociada a la aparición o desaparición simultánea de dos puntos singulares al cruzar el valor del parámetro y con el hecho de que uno de los autovalores “cruza” el valor cero, véase Figura A.2. Además el conjunto de campos vectoriales que satisfacen la bifurcación silla nodo es abierto y denso en la familia de campos vectoriales uníparamétricos de clase C^∞ con equilibrio en (x_0, μ_0) y con autovalor nulo. Un ejemplo de esta bifurcación se presenta en la ecuación diferencial siguiente

$$\dot{x} = \mu - x^2$$

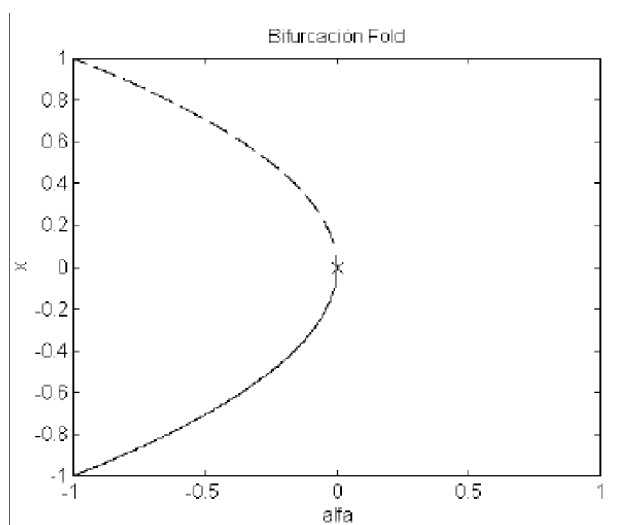


Figura A.2: Bifurcación silla-nodo (fold) en el espacio $\alpha - x$.

Bifurcación tipo transcritical: Este tipo de bifurcación sólo se presenta cuando el sistema tiene un punto singular que existe para todos los valores del parámetro. Cuando este punto singular “colisiona” con otro punto singular, ambos puntos intercambian sus estabildades respectivas, y continúan existiendo ambos después de la bifurcación. Se presenta cuando se verifica las condiciones:

- $D_x f(x_0, \mu_0)$ tiene un autovalor simple nulo, k autovalores con parte real negativa y $(n - k - 1)$ autovalores con parte real positiva (contando multiplicidades).

- $(\frac{\partial}{\partial \mu}) D_x f(x_0, \mu_0) \neq 0$

- $D_x^2 f(x_0, \mu_0) \neq 0$.

Un ejemplo de esta bifurcación se presenta en la ecuación diferencial siguiente

$$\dot{x} = \mu x - x^2$$

Bifurcación tipo tridente: Este tipo de bifurcación sólo existe cuando hay simetría del sistema con respecto de la variable x . Cuando es incrementado el parámetro μ a través de el equilibrio pierde estabilidad y dos nuevas ramas de equilibrio emergen. Verifica las condiciones:

- $D_x f(x_0, \mu_0)$ tiene un autovalor simple nulo, k autovalores con parte real negativa y $(n - k - 1)$ autovalores con parte real positiva (contando multiplicidades)

- $f(-x_0, \mu_0) = -f(x_0, \mu_0)$

- $\frac{\partial}{\partial \mu} (D_x f(x_0, \mu_0)) \neq 0$

- $(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3})(x_0, \mu_0) \neq 0$.

Un ejemplo de esta bifurcación se presenta en la ecuación diferencial siguiente

$$\dot{x} = \mu x \pm x^3,$$

cuando el término cúbico es $-x^3$ se presenta una bifurcación tipo tridente *super-crítica*, véase la Figura A.3; mientras que cuando es $+x^3$ se presenta una bifurcación tipo tridente *subcrítica*.

En lo que sigue por simplicidad nosotros consideramos que el sistema (A.4) es dos-dimensional para describir los aspectos esenciales de la *Bifurcación de Hopf*.

Bifurcación de Hopf: Esta bifurcación sólo puede aparecer cuando la dimensión del sistema es al menos dos. En este tipo de bifurcación un punto singular estable

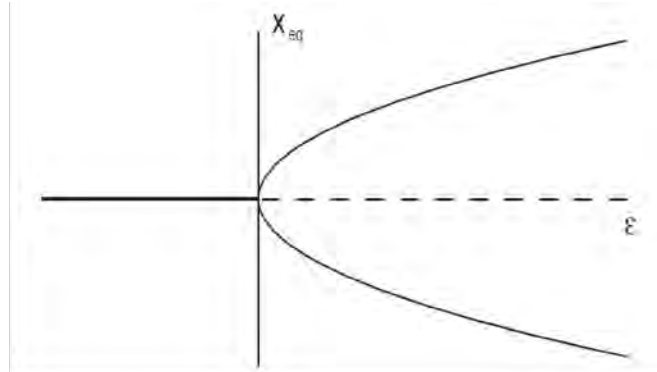


Figura A.3: Diagrama de bifurcación para la bifurcación tridente. Las curvas continuas representan los equilibrios estables y las discontinuas los equilibrios inestables.

cambia su estabilidad y aparece un ciclo límite estable rodeando el punto singular (caso supercrítico). Se presenta cuando se verifica las condiciones:

- $D_x f(x_0, \mu_0)$ tiene sólo un par de autovalores imaginarios puros, y no tiene otros autovalores con parte real nula.
- $\frac{d}{d\mu}(\text{Re } \lambda(\mu))|_{\mu=\mu_0} \neq 0$
- $G_2 \neq 0$, donde G_2 es el primer coeficiente de Poincaré-Lyapunov del punto equilibrio x_0 .

Entonces existe una curva de equilibrios $(x(\mu), \mu)$ con $x(\mu_0) = x_0$. Los autovalores $\lambda(\mu) = \alpha + \omega i, \bar{\lambda}(\mu) = \alpha - \omega i$ de $D_x f_{\mu_0}(x(\mu))$ que son imaginarios en $\mu = \mu_0$ varían diferenciablemente y existe una transformación de coordenadas invertible, un cambio de parámetros y una reparametrización del tiempo transformando (A.4) en

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \pm (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + O(\|y\|^4),$$

el cual puede demostrarse es topológicamente equivalente al sistema

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \pm (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

cerca del punto de equilibrio x_0 .

Como preparación a la Teorema de bifurcación de Andronov-Hopf se presenta el método de Salvadori-Negrini para el cálculo de la *constante de Poincaré-Lyapunov*, la cual es utilizada para determinar si el *centro* que se forma del sistema linealizado en el punto de equilibrio en el origen para un valor crítico del parámetro de bifurcación, es punto de espiral débil asintóticamente estable o un centro del sistema no-lineal. Para las demostraciones que siguen, véase artículo de Negrini-Salvadori [76].

Si un sistema analítico no-lineal tiene un punto de equilibrio aislado que es un centro para el sistema linealizado en ese punto, entonces se puede asumir sin pérdida de generalidad que el equilibrio está en el origen, y que las coordenadas del sistema han sido transformadas linealmente de tal manera que el sistema tiene la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -wy + f(x, y), \\ \dot{y} &= wx + g(x, y), \end{aligned} \tag{A.6}$$

con $w > 0$, $f, g \in C^{k+1}$, $k \geq 3$, denotamos los polinomios homogéneos de grado $i = 1, 2, \dots, k+1$ en los polinomios de MacLaurin de f y g con f_i y g_i , respectivamente, así:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{i=2}^k f_i(x, y) + \sigma((x^2 + y^2)^{\frac{k}{2}}), \\ g(x, y) &= \sum_{i=2}^k g_i(x, y) + \sigma((x^2 + y^2)^{\frac{k}{2}}), \end{aligned} \tag{A.7}$$

donde

$$\begin{aligned} f_i(x, y) &= \sum_{j+l=i} a_{ijl} x^j y^l, \quad (i = 2, 3, \dots, k), \\ g_i(x, y) &= \sum_{j+l=i} b_{ijl} x^j y^l, \quad (i = 2, 3, \dots, k). \end{aligned}$$

Escoja un entero positivo $m \geq 3$ y considérese la función de Lyapunov:

$$F(x, y) = x^2 + y^2 + \sum_{k=3}^m F_k(x, y), \tag{A.8}$$

donde F_k es un polinomio de grado $k = 3, 4, \dots, m$ a ser determinado. La derivada de F con respecto al sistema (A.6) es:

$$\dot{F}_{(A.6)}(x, y) = 2xf(x, y) + 2yg(x, y) - wyF'(x, y) + wxF'(x, y) + \sigma(x^i y^j), i + j \geq 4,$$

es decir $\dot{F}_{(A.6)}$ empieza con términos de orden tres; se escribe en la forma:

$$\dot{F}_{(A.6)}(x, y) = \sum_{k=3}^{\infty} \tilde{F}_k(x, y),$$

donde \tilde{F}_k es un polinomio homogéneo de grado $k = 3, 4, \dots$

El siguiente teorema fue probado en Poincaré [81].

Teorema 170 (Lyapunov [69]). *Suponga que F_k ($k = 3, \dots, m - 1$) ha sido escogido de tal manera que:*

$$\tilde{F}_3 = \tilde{F}_4 = \dots = \tilde{F}_{m-1} = 0.$$

Si m es impar, entonces F_m puede ser determinado de tal manera que $\tilde{F}_m = 0$; si m es par, entonces \tilde{F}_m puede ser determinado de tal manera que:

$$\tilde{F}_m(x, y) = G_m(x^2 + y^2)^{\frac{m}{2}},$$

donde $G_m \in R$ está unívocamente determinada (independientemente del F_m apropiado escogido). Dado que m fue escogido arbitrariamente, este teorema implica que la serie formal

$$F(x, y) = x^2 + y^2 + \sum_{k=3}^{\infty} F_k(x, y), \tag{A.9}$$

puede ser determinada, los F_k son polinomios homogéneos de grado $k = 3, 4, \dots$, tal que la derivada de F con respecto al sistema (A.6) es la serie formal:

$$\dot{F}_{(A.6)}(x, y) = G_{2k}(x^2 + y^2)^k + \sum_{k=2k+1}^{\infty} \tilde{F}_k(x, y).$$

Definición 171 *La constante G_{2k} es llamada el k -ésimo coeficiente de Poincaré-Lyapunov del equilibrio en $(0, 0)$; si $G_4 = \dots = G_{2k} = 0$, pero $G_{2k+2} \neq 0$, el origen es llamado un punto espiral débil de orden k (si $G_4 \neq 0$, entonces éste es un punto espiral débil de orden uno). Extendiendo la Definición 171 se tiene:*

Definición 172 *Sea:*

$$M := \{m \geq 3 : \text{existe } F_3, \dots, F_{m-1}, \text{ tal que, } \tilde{F}_j = 0, \quad (j = 3, \dots, m - 1)\},$$

donde \tilde{F}_j es un polinomio homogéneo de grado j en la expansión de $\dot{F}_{(A.6)}$, si este máximo existe; y $M := \infty$ si tal máximo no existe; M es llamado el índice del sistema (A.6); el número:

$$G := \begin{cases} 0 & \text{si } M = \infty \\ G_M & \text{si } M \in \mathbb{N} \end{cases},$$

se conoce como la constante de Poincaré-Lyapunov de (A.6). Si el índice M es un entero positivo, entonces, éste tiene que ser par y G_M es el primer coeficiente de Poincaré-Lyapunov no cero.

Teorema 173 Si el índice $M = \infty$, del sistema (A.6) admite una integral primera de la forma:

$$F(x, y) = x^2 + y^2 + \sum_{k=3}^{\infty} F_k(x, y),$$

el origen $(0, 0)$ es estable en el sentido de Lyapunov, pero no asintóticamente, y todas las soluciones en una vecindad suficientemente pequeña del origen son periódicas; si el índice $M \in \mathbb{N}$, entonces existe una función Lyapunov polinomial de la forma (A.8) con $m = M$ tal que:

$$\dot{F}_{(A.6)}(x, y) = G(x^2 + y^2)^{\frac{M}{2}} + \psi(x, y),$$

donde $G \neq 0$ y ψ es analítica, por consiguiente su expansión empieza con términos de grado mayores o iguales a $M + 1$. En este caso, si $G < 0$, entonces el origen es asintóticamente estable; si $G > 0$, entonces es un repulsor, es decir soluciones en un entorno tienden a este cuando $t \rightarrow -\infty$. Si regresamos al caso general (no analítico), se supone otra vez que $f, g \in C^{k+1}$, $k \geq 3$, en (A.6).

Definición 174 Sea h un entero entre 2 y k , es decir $2 \leq h \leq k$; se dice que el origen es estable h -asintóticamente (respectivamente h -repulsor) si para las funciones arbitrarias $\xi, \eta \in C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ tales que ambos ξ , y η son $\sigma((x^2 + y^2)^{\frac{k}{2}}$ para el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -wy + \sum_{i=2}^k f_i(x, y) + \xi(x, y), \\ \dot{y} &= wx + \sum_{i=2}^k g_i(x, y) + \eta(x, y), \end{aligned} \tag{A.10}$$

el origen es asintóticamente estable (respectivamente repulsor), y h es el menor entero entre 2 y k con esta propiedad.

La definición de estabilidad *h-asintótica* es una generalización obvia de la estabilidad lineal. Un punto de equilibrio de un sistema autónomo es linealmente estable si su linealización determina su estabilidad (es decir, si todos los valores propios tienen parte real negativa; es llamado estabilidad exponencial asintótica, en este caso la solución tiende al equilibrio exponencialmente cuando $t \rightarrow \infty$). Si este no es el caso en (A.6), entonces se puede probar a expandir el lado derecho en términos de grado h -ésimo, y el sistema del lado derecho truncado hasta este término, determina la estabilidad si se cumple que:

Teorema 175 (Negrini-Salvadori [76]). *Sea $2 \leq h \leq k$; el equilibrio $(x, y) = (0, 0)$ del sistema (A.6) es h -asintótica (respectivamente h -repulsor) si y únicamente si el índice del sistema:*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -wy + \sum_{i=2}^h f_i(x, y) \\ \dot{y} &= wx + \sum_{i=2}^h g_i(x, y) \end{aligned} \tag{A.11}$$

es igual a $h + 1$, y la constante de Poincaré-Lyapunov de (A.11) es negativa (respectivamente positiva). En este punto se resalta que si el origen es asintóticamente estable o h -repulsor, este es un punto espiral débil de orden $(h - 1)/2$.

En conclusión del segundo y tercer Teorema de Lyapunov, si $G_{2k+2} < 0$, entonces el origen es asintóticamente estable; si $G_{2k+2} > 0$, éste es inestable. Sansone-Conti [82] ha demostrado que si $G_{2k} = 0$, ($k = 1, 2, 3, \dots$), el origen es un centro. En este caso el sistema admite una integral primera de la forma (A.9). Finalmente, se cita sin prueba el Teorema de bifurcación de Andronov-Hopf.

Teorema 176 (Hopf [45], véase también Marsden-McCracken [72]). *Considere el sistema:*

$$\dot{x} = f(x, \mu), \tag{A.12}$$

donde $f \in C^{k+1}(R^n \times R)$, $k \geq 4$ y $f(0, \mu) \equiv 0$; supóngase que para un pequeño $|\mu|$ la matriz $f'(0, \mu)$ tiene un par de valores propios complejos conjugados $\alpha(\mu) \pm i\omega(\mu)$, $\omega(\mu) > 0$, $\alpha(0) = 0$, $\alpha'(\mu) > 0$ (la derivada de la parte real con respecto al parámetro μ es positiva) y los otros $n - 2$ valores propios tienen parte real negativa; entonces:

(i) Existe un $\delta > 0$ y una función $\mu \in C^{k-2}((-\delta, \delta), R)$ tal que para $\varepsilon \in (-\delta, \delta)$ el sistema $\dot{x} = f(x, \mu(\varepsilon))$ tiene una solución periódica $p(t, \varepsilon)$ con período $T(\varepsilon) > 0$, también $T \in C^{k-2}$, $\mu(0) = 0$, $T(0) = \frac{2\pi}{\omega(0)}$, $p(t, 0) = 0$, y la amplitud de esta solución periódica (la distancia de aproximación de la correspondiente órbita periódica desde el origen) es proporcional a $\sqrt[2]{|\mu(\varepsilon)|}$;

(ii) El origen $(x, \mu) = (0, 0)$ del espacio $R^n \times R$ tiene una vecindad $U \subset R^n \times R$ que no contiene órbitas periódicas de (A.12) pero cuyas familias $p(t, \varepsilon)$, $\varepsilon \in (-\delta, \delta)$;

(iii) Si el origen $x = 0$ es un h -asintóticamente estable (respectivamente h -inestable), o un h -equilibrio inestable del sistema $\dot{x} = f(x, 0)$, entonces $\mu(\varepsilon) > 0$, (respectivamente $\mu(\varepsilon) < 0$) para $\varepsilon \neq 0$, y las soluciones periódicas $p(t, \varepsilon)$ son asintóticamente orbitalmente estable (respectivamente inestable).

Las afirmaciones (i), (ii) y (iii) establecen la existencia, unicidad y la estabilidad de soluciones periódicas que bifurcan. La unicidad se entiende aquí tal como es expresada en (ii), se observa que no para toda μ pequeña existe una única órbita periódica. El punto es que la función $\mu(\varepsilon)$ puede asumir el mismo valor para distintos valores de ε cercanos a cero, resultando como consecuencia, varias órbitas periódicas correspondientes al mismo valor de μ , aún más podría tener éstas el valor de $\mu(\varepsilon) = 0$, véase la Figura A.4.

A.1.3 Bifurcaciones en sistemas dinámicos no-suaves a tiempo continuo

En general diferentes sistemas (SST) a tiempo continuo pueden clasificarse dependiendo de lo que suceda en la frontera Σ . Se considera una frontera de discontinuidad

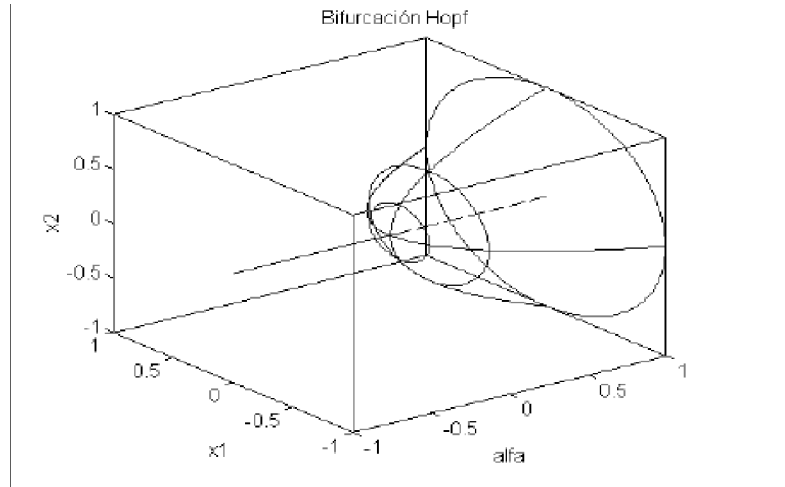


Figura A.4: Bifurcación de Hopf en el espacio $(\alpha - x)$.

Σ_{12} singular dado que las bifurcaciones de equilibrio de frontera consideradas en este trabajo son localizadas en un entorno del punto equilibrio. Pueden distinguirse tres clases de regiones:

1. No-deslizantes SSTC (Filippov continuos): Sea el sistema suave atramos

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \begin{cases} f_1(x, \mu), & \text{si } H(x, \mu) \geq 0 \\ f_2(x, \mu), & \text{si } H(x, \mu) < 0 \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

$$x \in M = M_1 \cup M_2 \cup \Sigma_{12}; \quad M_1 = \{x \in M : H > 0\};$$

$$M_2 = \{x \in M : H < 0\}; \quad \Sigma_{12} = \{x \in M : H(x, \mu) = 0\},$$

donde $x \in R^n, \mu \in R, f_i, f_j : R^{n+1} \mapsto R^n$ y $H : R^{n+1} \mapsto R$ son suficientemente suaves con respecto a sus argumentos en M .

Nosotros le llamamos como SSTC a un sistema del tipo (A.13) que satisfacen las siguientes condiciones de continuidad

$$f_2(x, \mu) = f_1(x, \mu) + G(x, \mu)H(x, \mu), \quad (\text{A.14})$$

para alguna función $G : R^{n+1} \mapsto R^n$, así cuando $H(x, \mu) = 0$, entonces $f_1(x, \mu) = f_2(x, \mu)$, por lo tanto la frontera Σ_{12} entre las dos regiones M_1 y M_2 nunca es atractor (o repelot) simultáneamente desde ambos lados bajo la dinámica del sistema, todas

las trayectorias cruzan Σ_{12} transversalmente o los campos vectoriales resbalan con éste. Por esto el movimiento deslizante restringido a Σ_{12} no tiene lugar. Estos sistemas incluyen el caso donde globalmente el campo vectorial f es continuo y tiene discontinuidades en sus derivadas de primer orden o de orden mayor a lo largo de la frontera Σ_{12} . Tales sistemas surgen naturalmente en modelos de osciladores de segundo orden bilineales. El siguiente es el modelo de un oscilador simple de un grado de libertad con forzamiento sinusoidal el cual es un sistema (SST) continuo

$$\ddot{u} + 2\zeta\dot{u} + k_i^2 u = \beta \cos(\omega t) + \Theta,$$

donde $i = 1$ si $u > 0$, y $i = 2$ si $u < 0$, ζ es el valor de amortiguamiento, k_i es la constante de resorte con $k_1 \neq k_2$, β amplitud de forzamiento y Θ el parámetro de compensación.

Tipos de equilibrios:

Los sistemas SSTC pueden exhibir distinto tipos de equilibrios.

Definición 177 *Un punto $x \in M$, es un equilibrio admisible, si x es tal que satisface*

$$\begin{aligned} f_1(x, \mu) &= 0 \text{ y } H(x, \mu) > 0, \text{ o} \\ f_2(x, \mu) &= 0 \text{ y } H(x, \mu) < 0, \end{aligned}$$

alternativamente, se dice que un punto $x \in M$ es un equilibrio virtual si x es tal que

$$\begin{aligned} f_1(x, \mu) &= 0 \text{ y } H(x, \mu) < 0, \text{ o} \\ f_2(x, \mu) &= 0 \text{ y } H(x, \mu) > 0, \end{aligned}$$

Definición 178 *Un punto $x \in M$, es un equilibrio de frontera, si x es tal que*

$$f_1(x, \mu) = 0 \text{ o } f_2(x, \mu) = 0, \text{ y } H(x, \mu) = 0. \tag{A.15}$$

A continuación se define una *bifurcación de equilibrio de frontera* (BEF) tal como sigue

Definición 179 Un sistema SSTC está bajo una bifurcación BEF en $\mu = \mu_0$, si allí existe un punto x_0 tal que, para $i=1,2$, se tiene:

1. $f_1(x_0, \mu_0) = 0$,
2. $H(x_0, \mu_0) = 0$,
3. $f_{1,x}(x_0, \mu_0)$ es invertible (o equivalentemente $\det(f_{i,x}) \neq 0$)
4. $H_\mu(x_0, \mu_0) - H_x(x_0, \mu_0)[f_{1,x}^{-1}f_{1,\mu}](x_0, \mu_0) \neq 0$.

Las dos primeras condiciones definen la existencia del punto equilibrio sobre la frontera de discontinuidad Σ_{12} . La tercera condición es de no-degeneramiento, la cual asegura que x_0 es un punto de equilibrio hiperbólico para ambos campos f_1 y f_2 . La cuarta condición asegura que la rama admisible de equilibrios, digamos $x^+(\mu)$ y $x^-(\mu)$ del campo f_1 y f_2 respectivamente cruzan a través del punto bifurcación en $\mu = \mu_0$. La condición se derivada del requerimiento de que la derivada total $\frac{dH}{d\mu}(x^\pm(\mu), \mu)$ es no cero en (x_0, μ_0) . Esta bifurcación es completamente análoga a la bifurcación de colisión de borde, con el equilibrio admisible jugando el papel de punto fijo admisible del mapeo. A continuación se presenta los posibles escenarios en la *bifurcación de equilibrio de frontera*. Sin pérdida de generalidad se asume en lo que sigue, que $x = 0$, es un equilibrio de frontera para $\mu = 0$. Específicamente bajo variación de μ a través de cero observamos una de los siguientes escenarios:

Persistencia (cruzamiento de borde): En el punto bifurcación, un equilibrio admisible yaciendo en la region M_1 llega al equilibrio de frontera y se convierte a un equilibrio virtual. Simultáneamente un equilibrio virtual yaciendo en la region M_2 llega a ser admisible. Así hay un equilibrio admisible sobre ambos lados, por esto es llamado *persistencia*.

Fold no suave: En el punto bifurcación, la colisión de los dos ramas de equilibrios admisibles es observada, llegando al equilibrio de frontera, antes de transformarse en dos ramas de equilibrio virtual pasado el punto de bifurcación.

Se presenta definiciones precisas de los escenarios de fold y persistencia no-suaves

introducidas arriba. Se asume que una bifurcación de equilibrio-frontera ocurre en $x = 0$ cuando $\mu = 0$, es decir $f_1(x, \mu) = 0$ o $f_2(x, \mu) = 0$, y $H(x, \mu) = 0$.

Definición 180 *Se dice que un sistema SSTC exhibe una bifurcación de cruzamiento de borde (persistencia) para $\mu = 0$, si cuando μ es variado en un entorno del origen, una rama de equilibrio regular, y una rama de equilibrios virtuales, cruza en un punto de equilibrio de frontera $x = 0$, cuando $\mu = 0$, intercambiando sus propiedades. Se asume que allí existe una rama de equilibrios $x^+(\mu)$ y $x^-(\mu)$ tal que $x^+(0) = x^-(0)$ y sin pérdida de generalidad (reversando el signo de μ si es necesario) que*

1. $f_1(x^+, \mu) = 0$, $H(x^+, \mu) > 0$ y $f_2(x^-, \mu) = 0$, $H(x^-, \mu) > 0$ para $\mu < 0$,
2. $f_1(x^+, \mu) = 0$, $H(x^+, \mu) < 0$ y $f_2(x^-, \mu) = 0$, $H(x^-, \mu) < 0$ para $\mu > 0$.

Este escenario describe como el único punto equilibrio regular x^+ para $\mu < 0$, choca la frontera cuando $\mu = 0$, y se transforma continuamente en el equilibrio x^- para $\mu > 0$.

Definición 181 *Se dice que un sistema SSTC exhibe una bifurcación fold para $\mu = 0$, si cuando μ es variado en un entorno del origen, dos ramas de equilibrio regular chocan en el equilibrio de frontera $x = 0, \mu = 0$, y se transforman en dos ramas de equilibrios virtuales pasado el punto de equilibrio de frontera. Se asume que allí existe una rama de equilibrios $x^+(\mu)$ y $x^-(\mu)$ tal que $x^+(0) = x^-(0)$, sin pérdida de generalidad (reversando el signo de μ si es necesario) se tiene*

1. $f_1(x^+, \mu) = 0$, $H(x^+, \mu) > 0$ y $f_2(x^-, \mu) = 0$, $H(x^-, \mu) < 0$ para $\mu < 0$,
2. $f_1(x^+, \mu) = 0$, $H(x^+, \mu) < 0$ y $f_2(x^-, \mu) = 0$, $H(x^-, \mu) > 0$ para $\mu > 0$.

Este escenario describe como los dos equilibrios regulares x^+ y x^- para $\mu < 0$, chocan en el equilibrio de frontera $x = 0, \mu = 0$, y se transforman continuamente en equilibrios virtuales para $\mu > 0$.

A continuacion se derivan condiciones para distinguir entre estos dos casos fundamentales en sistemas n-dimensionales. Se introduce la variable auxiliar λ^\pm para el valor de H en el punto de equilibrio. Específicamente, con el fin de que un punto x^+ sea un equilibrio admisible en una región M_1 se debe tener que

$$\begin{aligned} f_1(x^+, \mu) &= 0, \\ H(x^+, \mu) &= \lambda^+ > 0, \end{aligned} \tag{A.16}$$

similarmente, para que un punto x^- sea un equilibrio admisible en M_2 usando (A.26) se debe tener que

$$\begin{aligned} f_1(x, \mu) + G(x, \mu)\lambda^- &= 0, \\ H(x^-, \mu) &= \lambda^- < 0. \end{aligned}$$

Ahora linealizando alrededor del punto de equilibrio-frontera, $x = 0, \mu = 0$, se tiene

$$Ax^+ + P\mu = 0, \tag{A.17}$$

$$Cx^+ + N\mu = \lambda^+, \tag{A.18}$$

y

$$Ax^- + P\mu + B\lambda^- = 0, \tag{A.19}$$

$$Cx^- + N\mu = \lambda^- < 0, \tag{A.20}$$

donde $A = f_{1,x}, P = f_{1,\mu}, C = H_x, N = H_\mu$ y $B = G$ son todas evaluadas en $x = 0, \mu = 0$. Note que A es invertible por la condición de la Definición 179. Por lo tanto de (A.17) Se tiene

$$x^+ = -A^{-1}P\mu,$$

y sustituyendo en (A.18) se obtiene

$$\lambda^+ = (N - CA^{-1}P)\mu, \tag{A.21}$$

similarmente usando (A.19) y (A.20) se tiene

$$\lambda^- = \frac{(N - CA^{-1}P)\mu}{1 + CA^{-1}B} = \frac{\lambda^+}{1 + CA^{-1}B}, \tag{A.22}$$

por lo tanto podemos establecer el siguiente teorema.

Teorema 182 (*Puntos de equilibrio ramificando desde un equilibrio de frontera*). Se asume que el sistema (A.13) es SSTC con la matrices del sistema linealizado satisfaciendo las condiciones de (A.17)-(A.20) en $x = 0, \mu = 0$. Entonces si

$$\begin{aligned}\det(A) &\neq 0, \\ N - CA^{-1}P &\neq 0, \\ 1 + CA^{-1}B &\neq 0.\end{aligned}$$

1. Un escenario persistencia es observado en un punto de bifurcación de equilibrio de frontera si

$$1 + CA^{-1}B > 0, \quad (\text{A.23})$$

2. Un escenario fold no suave es observado en un punto de bifurcación de equilibrio de frontera si

$$1 + CA^{-1}B < 0. \quad (\text{A.24})$$

Observe que en el sistema linealizado de (A.21) y (A.22), λ^+ y λ^- tienen el mismo signo para el mismo valor de μ (persistencia) si la condición (A.23) es satisfecha, mientras ella tiene signo opuesta (fold no suave) si la condición (A.24) es enés satisfecha. Dado que las condiciones dadas arriba aseguran que el sistema linealizado es no singular, el Teorema de la función implícita nos dice que las conclusiones son todavía válidas para sistemas no-lineales, en un entorno del equilibrio de frontera.

Los resultados presentados en Freire et ál. [38] explican la dinámica de sistemas SSTC linealizados y planares. Bajo la condición del teorema siguiente, su análisis nos dice que existe a lo más un ciclo límite para sistemas negativamente o positivamente linealizados, y éste es siempre hiperbólico. Por lo tanto el mismo resultado aplica a sistemas SSTC no lineales cuando este proviene de la existencia de un ciclo límite cercanos a x^* cuya amplitud escala de forma $\mu - x^*$ para primer orden.

Teorema 183 Sea f_1, H, G definiendo un sistema SSTC y (x^*, μ^*) un equilibrio de frontera el cual satisface

$$f_1(x^*, \mu^*) = 0, H(x^*, \mu^*) = 0,$$

con

$$\begin{aligned} A &= f_{1,x}(x^*, \mu^*), P = f_{1,\mu}(x^*, \mu^*), C = H_x(x^*, \mu^*), N = H_\mu(x^*, \mu^*) \\ B &= G(x^*, \mu^*). \end{aligned}$$

Se asume que

$$\begin{aligned} \det(A) &\neq 0; N - CA^{-1}P \neq 0; 1 + CA^{-1}B \neq 0; \\ \operatorname{tr}(A + BC) &\neq 0, \det(A) \neq \frac{\operatorname{tr}(A)^2}{4}; \det(A + BC) \neq \frac{\operatorname{tr}(A + BC)^2}{4}, \end{aligned}$$

y además que si A y $A + BC$ tienen valores propios complejos, con valores que denotamos como $\alpha_1 \pm \beta_1$ y $\alpha_2 \pm \beta_2$ entonces se tiene que $e^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}\pi + \frac{\alpha_2}{\beta_2}\pi} \neq 1$. También se supone que las matrices son tales que se evita el caso de lazo homoclínico aislado, véase Freire et ál. [37, Proposición 26]. Con respecto a la existencia de ramas continuas de ciclos límite que tienen una amplitud de $O(\mu - \mu^*)$ se puede afirmar lo siguiente:

A lo más uno de tales ramas de ciclo límites existe, y ésta rodea una rama focos de estabilidad apuesta. Además:

1. Si $\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(A + BC) > 0$, entonces ninguna rama de tales ciclos existe

2. Si $\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(A + BC) < 0$, entonces:

(a) Si se tiene una BID con $1 + CA^{-1}B > 0$, (persistencia) entonces:

i) Si la transición de una rama de focos a una rama de nodos es observada entonces una rama de ciclos existe y es estable si $\operatorname{tr}(J) < 0$ (la rama de nodos es estable) e inestable si $\operatorname{tr}(J) > 0$, donde J es el jacobiano obtenido por linealización del sistema alrededor del nodo.

ii) Si se presenta la transición desde una rama de focos a una rama de focos, entonces la rama de ciclos límites existe y puede ser estable si $e^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}\pi + \frac{\alpha_2}{\beta_2}\pi} < 1$ e inestable si $e^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}\pi + \frac{\alpha_2}{\beta_2}\pi} > 1$.

(b) Si se tiene una BIF con $1 + CA^{-1}B < 0$ (fol no suave) entonces:

i. Si se tiene una bifurcación silla/foco, entonces:

A. Si el foco es inestable y la variedad inestable del punto de silla desenrolla dentro de la estable, entonces una rama de ciclos límites estable existe.

B. Si el foco es estable y la variedad estable del punto silla se desenrolla dentro la inestable, entonces un ciclo límite inestable existe.

C. Si la respectiva variedad desenrolla afuera en este caso, entonces no existe ninguna rama de ciclo límite.

De acuerdo con la exclusión de nodos degenerados en el teorema, se nota que el caso de foco a nodo degenerado tienen una respuesta concluyente desde la teoría lineal, pero los otros casos no. Así que se tiene que excluir los nodos degenerados.

Ejemplo: En todos los ejemplos se usa

$$C = (1 \ 0), \quad P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad N = 0.$$

En la Figura A.5 se muestra el diagrama de bifurcación del sistema planar satisfaciendo las condiciones de arriba con

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}; \quad A_2 = A + BC = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

En este ejemplo se espera que un foco estable choque la frontera y llega a ser inestable. Se observa que, cuando esto ocurre, un ciclo límite es de hecho generado en el punto de colisión-borde y que la amplitud del ciclo límite escala linealmente con el parámetro, véase Figura A.5.

Suponga que

$$A = \begin{pmatrix} -2.1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2.6 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Entonces $tr(A) = -2.1 < 0$, $tr(A + BC) = 0.5 > 0$, $1 + CA^{-1}B = 5 > 0$, y se tiene persistencia con un nodo estable para $\mu < 0$, y para $\mu > 0$, se tiene un foco inestable rodeado por un ciclo límite estable, véase Figura A.6.

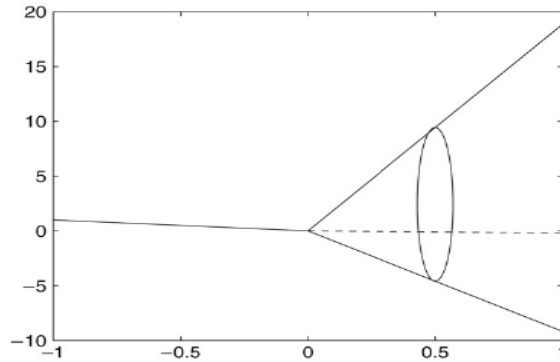


Figura A.5: Diagrama de bifurcación mostrando la ocurrencia de una bifurcación tipo Hopf en $\mu_1 = 0$.

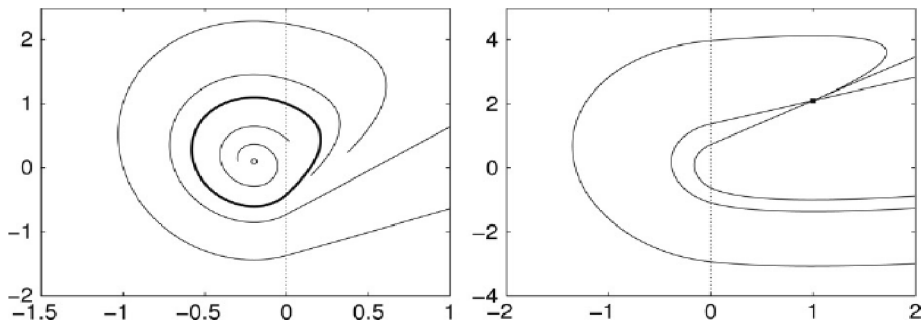


Figura A.6: Retrato de fase: a) foco inestable con un ciclo limite estable en $\mu = 1$ b) nodo estable en $\mu = -1$.

Suponga

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1.56 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Entonces $tr(A) = -1 < 0$, $tr(A + BC) = 0.5 > 0$, $1 + CA^{-1}B = 5 > 0$, $\frac{\alpha_1}{\beta_1}\pi + \frac{\alpha_2}{\beta_2}\pi < 1$, luego de tiene persistencia con un foco estable para $\mu < 0$, y para $\mu > 0$, se tiene un foco inestable rodeado por un ciclo límite, véase Figura A.7.

Suponga

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1.5 \\ -6 \end{pmatrix},$$

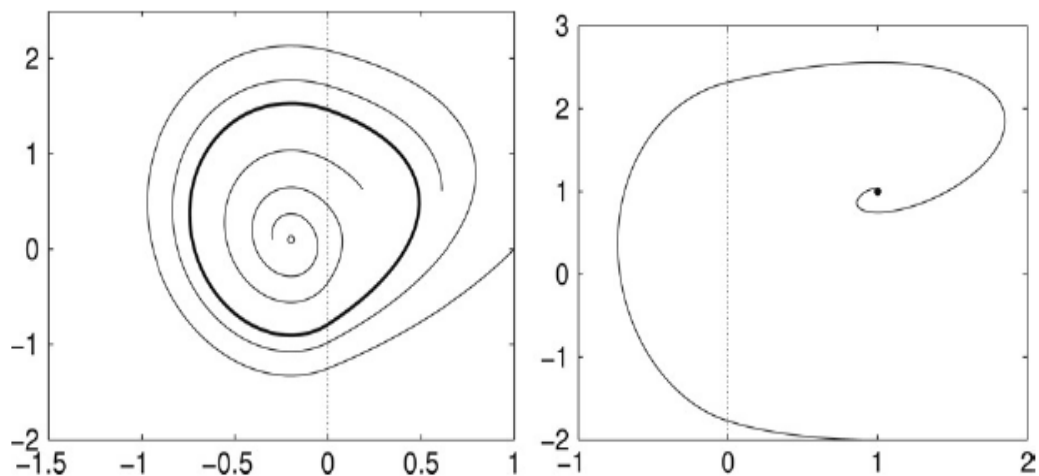


Figura A.7: Retrato de fase: a) foco inestable con un ciclo límite estable en $\mu = 1$ b) foco estable en $\mu = -1$.

luego $tr(A) = -1 < 0$, $tr(A+BC) = 0.5 > 0$, $1+CA^{-1}B = -5 < 0$, por consiguiente se tiene un fold no suave con un punto de silla, y un foco inestable rodeando por un ciclo límite para $\mu > 0$, véase la Figura A.8.

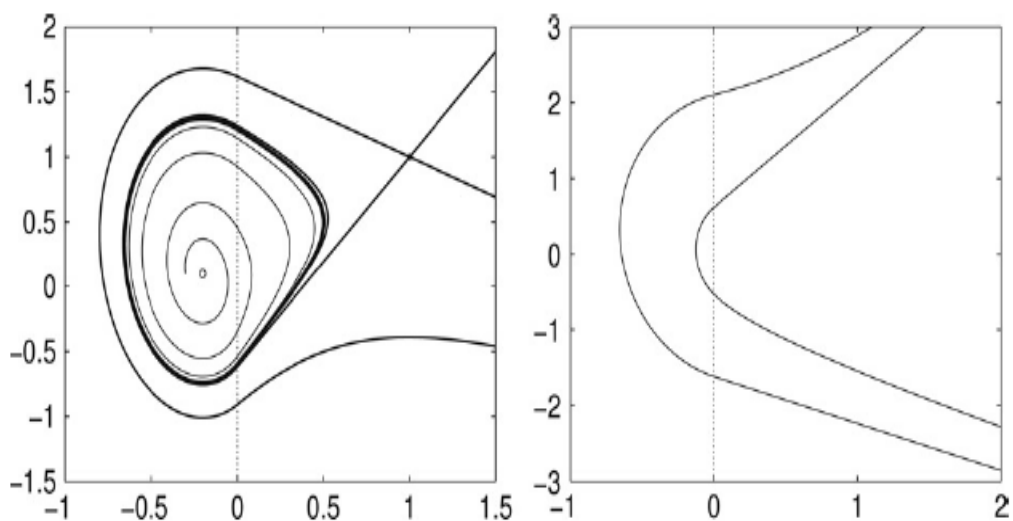


Figura A.8: Retrato de fase: a) foco inestable con un ciclo límite estable y un punto de silla en $\mu = 1$ b) ningún conjunto límite en $\mu = -1$.

2. Sistemas suave por tramos deslizantes SSTD (sistema de Filippov): Sea el sistema suave a tramos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, \mu) = \begin{cases} f_1(x, \mu), & \text{si } H(x, \mu) \geq 0 \\ f_2(x, \mu), & \text{si } H(x, \mu) < 0 \end{cases}, \\ x &\in M = M_1 \cup M_2; M_1 = \{x \in M : H > 0\}; \\ M_2 &= \{x \in M : H < 0\}, \Sigma_{12} = \{x \in M : H(x, \mu) = 0\}, \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

donde $x \in R^n$, $\mu \in R$, $f_i, f_j : R^{n+1} \mapsto R^n$ y $H : R^{n+1} \mapsto R$ son suficientemente suaves con respecto a sus argumentos en M . En este caso f es discontinuo a través de la frontera Σ_{ij} es decir $f_1(x, \mu) \neq f_2(x, \mu)$ cuando $x \in \Sigma_{12}$ y se permite la posibilidad de que ambos flujos en las regiones M_1 y M_2 tengan sus componentes normal a Σ_{12} de signo opuesto. Esto implica la existencia de un flujo deslizante dentro de la superficie de discontinuidad Σ_{ij} . Es bien conocido que si

$$H_x f_1 \cdot H_x f_2 < 0,$$

sobre algún subconjunto de Σ_{12} entonces estos sistemas pueden exhibir deslizamiento.

Nosotros llamamos como SSTD (Filippov) a un sistema del tipo (A.13) que satisfacen las siguientes condiciones

$$f_2(x, \mu) = f_1(x, \mu) + G(x, \mu), \quad (\text{A.26})$$

para alguna función $G : R^{n+1} \mapsto R^n$, donde G es típicamente no cero cuando $H(x, \mu) = 0$. Además se supone que $H_x G \neq 0$ en M . Movimiento deslizante puede ocurrir sobre la frontera de discontinuidad Σ_{12} cuando el sistema sigue el campo deslizante definido por

$$f_s(x, \mu) = f_1(x, \mu) + \lambda G(x, \mu), \quad (\text{A.27})$$

donde λ es escogido para mantener $H = 0$. Usando $H_x G \neq 0$, se puede resolver $H_x f_s = 0$, para obtener

$$\lambda = -\frac{H_x f_1}{H_x G}(x, \mu).$$

La condición para el deslizamiento (A.27) muestra que el deslizamiento es únicamente posible cuando $0 < \lambda < 1$. Por lo tanto se define la región deslizante como:

Definición 184 *La región deslizante de un sistema de Filippov Σ_s se define como*

$$\Sigma_s = \{x \in \Sigma_{12} : 0 < \lambda(x) < 1\},$$

y las fronteras de la región deslizante $\partial\Sigma_s^+$ y $\partial\Sigma_s^-$ como

$$\partial\Sigma_s^+ = \{x \in \Sigma_{12} : \lambda(x) = 1\},$$

$$\partial\Sigma_s^- = \{x \in \Sigma_{12} : \lambda(x) = 0\},$$

donde uno de los campos es tangente a Σ_{12} .

Para sistemas de Filippov y sistemas con impacto, es posible que el flujo deslizante posea uno o más equilibrios. A continuación damos las siguientes definiciones.

Definición 185 *Se dice que un punto $x \in M$ es un equilibrio regular del sistema filipov (A.25) si*

$$f_1(x, \mu) = 0; \lambda_1 := H(x, \mu) > 0, \text{ o}$$

$$f_2(x, \mu) = 0; \lambda_2 := H(x, \mu) < 0.$$

Definición 186 *Se dice que un punto \tilde{x} es un pseudo-equilibrio, si éste es un equilibrio del flujo deslizante, es decir*

$$f_1(\tilde{x}, \mu) + \lambda G(\tilde{x}, \mu) = 0,$$

$$H(\tilde{x}, \mu) = 0.$$

Para que un pseudo-equilibrio sea admisible, se tiene que verificar que λ esté en la región permitida.

Definición 187 *Se dice que un pseudo-equilibrio es admisible si*

$$0 < \lambda < 1,$$

o es virtual si

$$\lambda < 0, \text{ o } \lambda > 1.$$

Observación: Un equilibrio (real) y un pseudo-equilibrio pueden coincidir sobre Σ_{12} .

Definición 188 *Un punto x se dice es equilibrio-frontera sii*

$$\begin{aligned} f_1(x, \mu) &= 0, \quad H(x, \mu) = 0, \quad o \\ f_2(x, \mu) &= 0, \quad H(x, \mu) = 0. \end{aligned}$$

Note que un equilibrio de frontera es siempre localizado sobre la frontera de la región deslizante.

Sin pérdida de generalidad se asume que $x = 0$, es un equilibrio de frontera para $\mu = 0$. Escenarios similares a los presentados en sistemas SSTC son posible. Se puede observar persistencia, donde una rama de equilibrios regulares se transforma en una rama de pseudo-equilibrio, o alternativamente, un fold-no suave, donde una rama de equilibrios admisibles desaparece después de chocar con una rama de pseudo-equilibrios sobre la frontera.

Sea x un equilibrio admisible y \tilde{x} un pseudo-equilibrio, entonces

$$\begin{aligned} f_1(\tilde{x}, \mu) &= 0, \quad f_1(\tilde{x}, \mu) + \tilde{\lambda}G(\tilde{x}, \mu) = 0, \\ H(\tilde{x}, \mu) &= 0, \quad \tilde{\lambda} > 0. \end{aligned}$$

Linealizando alrededor del punto equilibrio de frontera en el origen, se tiene

$$\begin{aligned} Ax + P\mu &= 0, \\ Cx + N\mu &= \lambda > 0, \end{aligned} \tag{A.28}$$

y

$$\begin{aligned} A\tilde{x} + P\mu + B\tilde{\lambda} &= 0, \\ C\tilde{x} + N\mu &= 0, \\ \tilde{\lambda} &> 0, \end{aligned} \tag{A.29}$$

donde $A = f_{1,x}$, $P = f_{1,\mu}$, $C = H_x$, $N = H_\mu$ y $B = G$, son todos evaluados en $x = 0, \mu = 0$. Note que de (A.28) se tiene que

$$\begin{aligned} x &= -A^{-1}P\mu, \\ \lambda &= (N - CA^{-1}P)\mu. \end{aligned}$$

Además de (A.29), $\tilde{x} = A^{-1}P\mu - A^{-1}B\tilde{\lambda}$. Por lo tanto, se tiene

$$\tilde{\lambda} = \frac{(N - CA^{-1}P)\mu}{CA^{-1}B},$$

o equivalentemente

$$\tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{CA^{-1}B}. \quad (\text{A.30})$$

Con el objetivo que x y \tilde{x} existan para el mismo valor del parámetro μ , tanto $\tilde{\lambda}$ como λ tienen que tener el mismo signo. Mientras ellos existen para valores opuestos de μ , si $\tilde{\lambda}$ y λ tienen signo opuesto. Por lo tanto de (A.30) se sigue el siguiente teorema.

Teorema 189 (*Puntos de equilibrio ramificando desde un equilibrio de frontera*). Para el sistema de interés, sea $x = 0$, un punto de equilibrio de frontera cuando $\mu = 0$, y se define las matrices del sistema linealizado como en (A.28). Se asume

$$\det(A) \neq 0; N - CA^{-1}P \neq 0; 1 + CA^{-1}B \neq 0;$$

1. Persistencia es observado en punto de bifurcación de equilibrio-frontera sii

$$CA^{-1}B < 0.$$

2. Un fold no-suave es observado si

$$CA^{-1}B > 0.$$

A continuación se presenta un resumen de resultados correspondientes a la bifurcación equilibrio-frontera encontrada en Kuznetsov et ál. [65] el cual ilustra los retratos de fase distintos topológicamente genéricos cerca a bifurcaciones de codimensión uno. Es posible mostrar para pseudo-equilibrio que si $CB > 0$, se tiene un pseudo-valor propio real estable, o uno inestable si $CB < 0$. Junto con los valores propios reales no triviales del campo vectorial

$$\lambda_s = \frac{CA^{-1}B}{CB} \det(A),$$

se obtiene bajo las hipótesis del teorema siguiente un pseudo-nodo o un pseudo-silla.

Teorema 190 Sea f_1, H, G definiendo un sistema Filippov y (x^*, μ^*) un equilibrio de frontera el cual satisface

$$f_1(x^*, \mu^*) = 0, H(x^*, \mu^*) = 0,$$

con

$$\begin{aligned} A &= f_{1,x}(x^*, \mu^*), P = f_{1,\mu}(x^*, \mu^*), C = H_x(x^*, \mu^*), N = H_\mu(x^*, \mu^*), \\ B &= G(x^*, \mu^*). \end{aligned}$$

Se asume que

$$\begin{aligned} \det(A) &\neq 0; N - CA^{-1}P \neq 0; 1 + CA^{-1}B \neq 0; \\ \operatorname{tr}(A) &\neq 0, \det(A) \neq \frac{\operatorname{tr}(A)^2}{4}; CB \neq 0, \end{aligned}$$

y que además los valores de la matrices son tales que se evita el caso de un lazo homoclínico (focos de frontera degenerado). Conforme la existencia de ramas continuas de ciclos límites que tienen una amplitud de $O(\mu - \mu^*)$ se puede decir lo siguiente. Al menos uno de tales ramas de ciclo límite existe. Este contiene una parte de una región deslizante, y ésta rodea una rama de focos de estabilidad opuesta. La rama es estable si la región deslizante es atractiva ($CB > 0$) e inestable si es un repulsor ($CB < 0$) y además:

1. Si $\operatorname{tr}(A)CB < 0$ entonces ninguna rama de ciclo límite existe

2. Si $\operatorname{tr}(A)CB < 0$ entonces:

(a) Si se tiene una BIF con $CA^{-1}B < 0$ (persistencia) entonces:

i) Si la transición de una rama de pseudo-nodos a una rama de focos es observada entonces una rama de ciclos existe y es estable si $\operatorname{tr}(A) > 0$ (el foco es inestable) e inestable si $\operatorname{tr}(A) < 0$.

(b) Si se tiene una BIF con $CA^{-1}B > 0$ (fol no suave) entonces:

i. Si se tiene una bifurcación pseudo-silla/foco, entonces:

A. Si el foco es inestable ($\operatorname{tr}(A) > 0$) y la variedad inestable del punto de pseudo-silla desenrolla dentro de la estable, entonces una rama de ciclos límite estable existe.

B. Si el foco es estable y la variedad estable del punto pseudo-silla desenrolla dentro de inestable, entonces un ciclo límite inestable existe.

C. Si la variedad respectiva desenrolla afuera entonces ninguna rama de ciclos límite existe.

Note que las trayectorias no son más únicas en tiempo hacia adelante si la región es repelida, pero esto no excluye la posibilidad de tener una única rama de ciclos límite conteniendo parte de la región. Tales ciclos límites tienen que ser inestable infinitamente.

Ejemplo: En todos los ejemplos se usa

$$C = (1 \ 0), \quad P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad N = 0.$$

En la Figura A.9 se muestra el diagrama bifurcación del sistema planar satisfaciendo las condiciones de arriba con

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Entonces $tr(A) = 0.5 > 0$, $CB = 5 > 0$, $CA^{-1}B = -3 < 0$, y se tiene persistencia con un pseudo-nodo estable para $\mu > 0$, y para $\mu < 0$, se tiene un foco inestable rodeando por un ciclo límite estable. Véase la Figura A.9.

Suponga

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 10 \\ -2.6 \end{pmatrix}.$$

Entonces $tr(A) = 0.5 > 0$, $CB = 10 > 0$, $CA^{-1}B = 2.6 > 0$, y se tiene un fold no suave con un pseudo-silla y un foco inestable rodeando por un ciclo límite estable para $\mu > 0$, véase la Figura A.10.

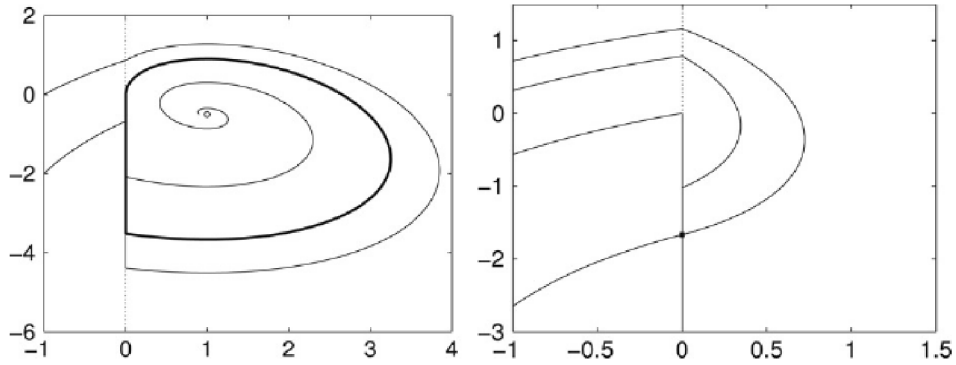


Figura A.9: Retrato de fase: a) foco inestable con un ciclo límite estable en $\mu = -1$ b) pseudo-nodo estable en $\mu = 1$.

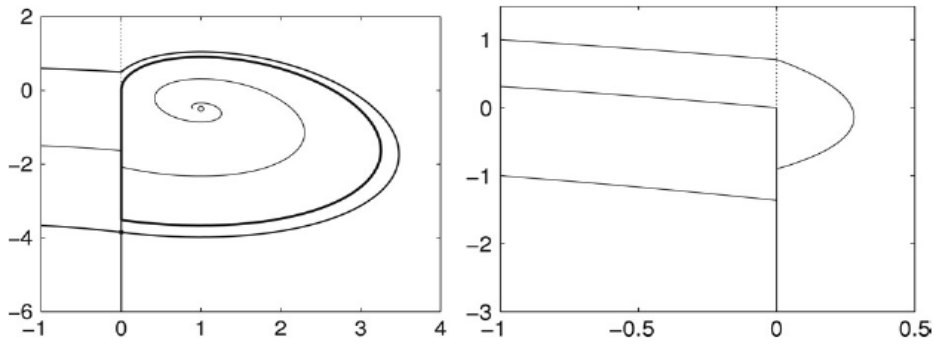


Figura A.10: Retrato de fase: a) foco inestable con un ciclo límite estable y una pseudo-silla en $\mu = -1$ b) ningún ciclo límite en $\mu = 1$.

3. Sistemas suave por tramos con impacto (SSTI): Sea el sistema suave por tramos el cual se asume sólo contiene una sólo región M_1

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, \mu) = \{f_1(x, \mu), \text{ si } H(x, \mu) > 0, \\ x &\in M = M_1 \cup \Sigma; M_1 = \{x \in M : H > 0\}; \\ \Sigma &= \{x \in M : H(x, \mu) = 0\}, \end{aligned} \tag{A.31}$$

donde $x \in R^n, \mu \in R, f_1 : R^{n+1} \mapsto R^n$ y $H : R^{n+1} \mapsto R$ son suficientemente suaves con respecto a sus argumentos en M . Por conveniencia, se llama la velocidad y la

aceleración (del campo vectorial f relativo a H) como

$$\begin{aligned} v(x, \mu) &= H_x f(x, \mu), \\ a(x, \mu) &= (H_x f)_x f(x, \mu). \end{aligned}$$

Se considera que Σ es una frontera irregular suficientemente suave, y que las órbitas del sistema no atraviezan la frontera Σ . Nosotros llamamos como **sistema con impacto** (SSTI) a un sistema del tipo (A.31) en el cual sobre la frontera Σ , el sistema dinámico continuo es reemplazado por un mapeo de restitución $R : \Sigma \rightarrow \Sigma$ o ley de impacto que se asume tiene la forma

$$R(x, \mu) = x - G(x, \mu)v(x, \mu).$$

Note que R se reduce al mapeo identidad cuando la velocidad de impacto $v(x, \mu) = 0$, el cual es razonablemente requerido para sistemas mecánicos con impacto donde la fricción está ausente. También se requiere que la ley de impacto R que mapea un punto x_i con $H(x_i, \mu) = 0$, y $v(x_i, \mu) < 0$, al punto $x_f = R(x_i, \mu)$ con $H(x_f, \mu) = 0$, y $v(x_f, \mu) \geq 0$. Esto es otra vez mecánicamente motivado, ya que H implica una restricción sobre la variable de posición, la cual no cambia durante el impacto. Escribiendo v_i por $v(x_i, \mu)$, esta última condición implica que

$$\begin{aligned} H(x_f, \mu) - H(x_i, \mu) &= -H_x G(x_i, \mu)v_i + O(v_i^2) = 0, \\ v(x_f, \mu) &= (1 - v_x G(x, \mu))v_i + O(v_i^2), \end{aligned}$$

y así se encuentra para los puntos con $H(x, \mu) = v(x, \mu) = 0$, que

$$\begin{aligned} H_x G(x_i, \mu) &= 0, \\ r(x, \mu) &= -(1 - v_x G(x, \mu)) \geq 0, \end{aligned} \tag{A.32}$$

con r actuando como un coeficiente de restitución en el límite de una velocidad de impacto pequeña. Estos sistemas también tienen la posibilidad de movimiento deslizando a través de los puntos satisfaciendo

$$\begin{aligned} H(x, \mu) &= 0, \\ v(x, \mu) &= 0, \\ a(x, \mu) &< 0, \end{aligned}$$

donde el mapeo de impacto es la identidad, pero todavía la continuación dentro de M_1 no es posible. Mirando la continuación del movimiento como continuación cambiando entre el campo vectorial f_1 y la velocidad impacto cero (la cual divide el estados en la dirección de G) se encuentra que el campo vectorial deslizante tiene que ser de la forma

$$f_s(x, \mu) = f_1(x, \mu) + \lambda G(x, \mu), \quad (\text{A.33})$$

donde $\lambda > 0$, es escogido para mantener $H = 0, v = 0$. Resolviendo $H_x f_s(x_i, \mu) = 0$, para λ se tiene la identidad, dado que sabemos que que ambos $v = H_x G(x_i, \mu) = 0$, en estos puntos. Resolviendo $v_x f_s = 0$, se obtiene

$$\lambda = -\frac{a(x, \mu)}{b(x)},$$

donde

$$b(x) = v_x G(x, \mu), \quad (\text{A.34})$$

y (A.32) muestra que el denominador nunca es cero.

Existencia de puntos de equilibrio: Además de equilibrios regulares x^* en un valor parámetro μ^* , con $f_1(x^*, \mu^*) = 0, H(x^*, \mu^*) > 0$, existe la posibilidad de tener puntos pseudo-equilibrios x^* y μ^* con $f_s(x^*, \mu^*) = f_1(x^*, \mu^*) + \lambda G(x^*, \mu^*) = 0, H(x^*, \mu^*) = 0, \lambda^* > 0$. Se asume que $(x^*, \mu^*) = (0, 0)$ y linealizando en el origen se tiene que

$$A\bar{x} + P\bar{\mu} = 0, \quad (\text{A.35})$$

$$C\bar{x} + N\bar{\mu} = \lambda > 0,$$

para un equilibrio regular, y

$$A\bar{x} + P\bar{\mu} + B\bar{\lambda} = 0, \quad (\text{A.36})$$

$$C\bar{x} + N\bar{\mu}^* = 0,$$

$$\bar{\lambda} > 0,$$

para un equilibrio de frontera, donde

$$A = f_{1,x}(x^*, \mu^*), P = f_{1,\mu}(x^*, \mu^*), C = H_x(x^*, \mu^*),$$

$$N = H_\mu(x^*, \mu^*), B = -G(x^*, \mu^*), CB = 0.$$

Si el sistema lineal es no degenerado, ello puede ser representativo de lo que se tiene localmente en el sistema no lineal. Se puede encontrar que

Teorema 191 (*Puntos equilibrio ramificando desde un equilibrio de frontera*) Para sistemas de impacto; si se asume que

$$\det(A) \neq 0; e=N - CA^{-1}P \neq 0, s = CA^{-1}B \neq 0,$$

entonces existe un único punto de equilibrio regular ramificando afuera desde x^* cuando $e(\bar{\mu} - \mu^*)$ es pequeño y positivo, un punto pseudo-equilibrio ramificando afuera desde x^* cuando $\frac{e}{s}(\bar{\mu} - \mu^*)$ es pequeño y positivo. La derivada de los puntos con respecto al parámetro existe y tiene límite cuando $\bar{\mu} \rightarrow \mu^*$ desde el lado donde el punto existe.

Note la similaridad con el Teorema 189, la prueba sigue líneas similares. Se nota además que si $s > 0$, los puntos regulares y pseudo-equilibrios están ambos presentes para uno de los signos de $(\bar{\mu} - \mu)$ y ninguno para el otro signo. Así se puede decir que los puntos se aniquilan cuando $\bar{\mu}$ cambia, en una bifurcación del tipo silla-nodo. Si $s < 0$, un punto equilibrio se presenta para cualquier valor suficientemente pequeño de $(\bar{\mu} - \mu)$, y el equilibrio regular persiste en un pseudo-punto cuando $\bar{\mu}$ varía.

Estabilidad local de los puntos de equilibrio bifurcando: La estabilidad local de un punto equilibrio regular en el límite $\bar{\mu} \rightarrow \mu^*$ es determinado por los valores propios de la matriz A . La pregunta por la estabilidad local de pseudo equilibrios puede ser dividida en la atractividad del segmento deslizante, y la estabilidad del campo vectorial deslizante cuando nos restringimos al deslizamiento, respectivamente, véase Van de Wouv N., and Leine R. I. [94]. Un cálculo simple muestra que la atractividad local del conjunto deslizante es garantizada si

$$-2 < b(x) \leq -1,$$

(esencialmente porque la expresión $-(1 + b)$ actúa como un "coeficiente de restitución"). Si esto es satisfecho una pequeña perturbación con condiciones iniciales puede decaer adelante del conjunto deslizante a través un número infinito de impactos en

tiempo finito ("chattering"). La linealización del campo vectorial deslizante (A.33) en μ^* y cerca de x^* es simplificado en

$$\lambda = f_1 = 0, G = B, b = CAB, a_x = CAA,$$

en (μ^*, x) , el resultado es

$$A_s = \left(I - \frac{BCA}{CAB}\right)A,$$

y se observa que existe un bloque de jordan de 2×2 correspondiente al valor propio cero con vector propio izquierdo CA y un vector propio generalizado izquierdo C . Esto corresponde a la invarianza de codimensión dos del conjunto deslizante. El resto de los valores propios de A_s corresponde a la dinámica con el conjunto deslizante, y si todos tienen parte real negativa, el pseudo-equilibrio es estable dentro del conjunto deslizante.

La prueba del siguiente teorema se puede obtener teniendo en cuenta que cualquier sistema con impacto puede ser aproximado linealmente por un sistema SSTC el cual es del mismo orden principal, cercano a éste. Para pseudo-equilibrios se nota que si $1 \leq CAB < 2$, se tiene dos pseudo valores propios complejos estables, o inestables si $CAB > 2$. El campo vectorial deslizante no tiene valores propios no triviales, así se consigue (bajo la hipótesis del teorema de siguiente) un pseudo-foco.

Teorema 192 *Sea f_1, H, G definiendo un sistema SSTC y (x^*, μ^*) es un equilibrio de frontera el cual satisface*

$$f_1(x^*, \mu^*) = 0, H(x^*, \mu^*) = 0,$$

y

$$\begin{aligned} A &= f_{1,x}(x^*, \mu^*), P = f_{1,\mu}(x^*, \mu^*), C = H_x(x^*, \mu^*), N = H_\mu(x^*, \mu^*), \\ B &= G(x^*, \mu^*). \end{aligned}$$

Se asume que

$$\begin{aligned} \det(A) &\neq 0; N - CA^{-1}P \neq 0; CA^{-1}B \neq 0; \\ \operatorname{tr}(A) &\neq 0, \det(A) \neq \frac{\operatorname{tr}(A)^2}{4}; r = CAB - 1 \geq 0, R \neq 1. \end{aligned}$$

Se supone además que si A tienen valores propios complejos, con valores que denotamos como $\alpha_1 + \beta_1$ y $\alpha_1 - \beta_1$ entonces se tiene que $re^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}\pi} \neq 1$. También se supone que si la matriz A tiene ambos valores propios positivos o negativos, con valores λ_1 y λ_2 tal que $tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 \neq \lambda_1(1 - r)$, así que se evita el caso de un lazo homoclínico aislado. Con respecto a la existencia de ramas continuas de ciclos límite que tienen una amplitud de $O(\mu - \mu^*)$ se puede afirmar lo siguiente: A lo más uno de tales ramas de ciclo límites existe, y este rodea una rama de focos o una rama de pseudo-focos de estabilidad opuesta. Esta contiene un impacto singular. Además

1. Si $tr(A)(r - 1) > 0$, entonces ninguno de tales ciclos existe

2. Si $tr(A)tr(r - 1) < 0$, entonces:

(a) Si se tiene una BID con $CA^{-1}B < 0$ (persistencia) entonces:

i) Si la transición de una rama de pseudo-focos a una rama de nodos es observada, entonces una rama de ciclos existe y es estable si $tr(A) < 0$ (el nodo es estable) e inestable si $tr(A) > 0$.

ii) Si se presenta la transición desde una rama de pseudo-focos a una rama de focos, entonces la rama de ciclos existe y puede ser estable si $re^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}\pi} < 1$, e inestable si $re^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}\pi} > 1$.

(b) Si se tiene una BIF con $CA^{-1}B > 0$ (fol no suave), entonces se tiene una bifurcación pseudo-foco/silla:

i. Si $tr(A) < \lambda_1(1 - r) < 0$, el pseudo-foco es inestable y la variedad inestable del punto silla desenrolla dentro de la estable, una rama de ciclos límite existe

ii. Si $tr(A) < \lambda_1(1 - r) > 0$, el pseudo-foco es estable y la variedad estable del punto silla desenrolla dentro de la inestable y una rama de ciclos límite inestable existe

iii. Si $\lambda_1(1 - r)/tr(A) > 1$, la variedad respectiva desenrolla afuera esta vez y ninguna rama de ciclos límite existe.

Ejemplo: En todos los ejemplos se usa

$$C = (1 \ 0), \quad P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad N = 0.$$

En la Figura A.11 se muestra el diagrama bifurcación del sistema planar satisfaciendo las condiciones de arriba con

$$A = \begin{pmatrix} -2.1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.5 \end{pmatrix}.$$

Entonces $tr(A) = -2.1 < 0$, $r = 1.5 > 1$, $CA^{-1}B = -2.5 < 0$, y se tiene persistencia con un nodo estable para $\mu < 0$, y para $\mu > 0$, se tiene un pseudo-foco inestable rodeando por un ciclo límite estable. Véase la Figura A.11.

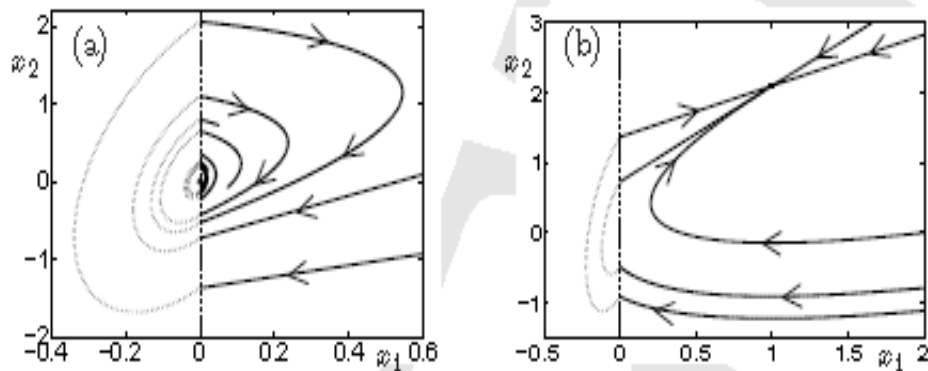


Figura A.11: Retrato fase: a) pseudo-foco inestable con ciclo límite estable en $\mu = 1$ b) nodo inestable en $\mu = -1$ (la curva sombreada a la izquierda de $x_1 = 0$ no forman parte de las trayectorias del sistema, ellas sólo indican como se conectan las trayectorias en el impacto).

Suponga

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.5 \end{pmatrix}.$$

Entonces $tr(A) = -1 < 0$, $r = 1.5 > 1$, $CA^{-1}B = -2.5 < 0$, $re^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}\pi} < 1$, y se tiene persistencia con un foco estable para $\mu < 0$, y para $\mu > 0$, se tiene un pseudo-foco inestable rodeando por un ciclo límite estable. Véase la Figura A.12.

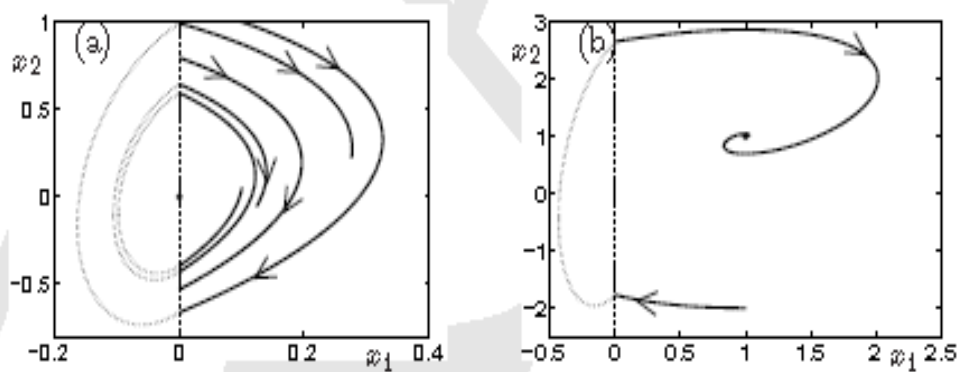


Figura A.12: Retrato fase: a) pseudo-foco inestable con ciclo límite estable en $\mu = 1$
 b) foco inestable en $\mu = -1$ (la curva sombreada a la izquierda de $x_1 = 0$ no forman parte de las trayectorias del sistema, ellas sólo indican como se conectan las trayectorias en el impacto).

Apéndice B

Modelos no suaves numéricos que exhiben bifurcación zip

B.1 Generalidades(4.2)

En este anexo se exponen resultados numéricos de modelos del sistema no suave (2.1) que se forman por la composición de modelos de los tipos definidos en (48), los cuales pueden satisfacer o no la condición de la variedad invariante (4.7) e ilustran los contenidos teóricos de los resultados obtenidos arriba con relación a las condiciones de existencia de la bifurcación de zip no suave, así como de la existencia de una familia uniparamétrica de bifurcaciones de Hopf-Zou & Küpper en desarrollo del fenómeno de la bifurcación de zip no-suave del sistema perturbado (4.2). También se ilustra la existencia de ciclos límites en sistemas no suaves del tipo (2.1) (modelos naturales y artificiales no suaves) que tienen pérdida de estabilidad del tipo hiperbólico, los cuales están asociados a la bifurcación de Hopf que se desarrolla en los planos coordenados del sistema. En el caso en que la condición de la variedad invariante (4.7) no se tiene, se ilustra que el fenómeno de la pérdida de la atractividad zip del segmento de equilibrios L_k se preserva a pesar de que se destruyen las variedades invariantes del sistema en el interior del segmento de equilibrios L_k .

Una vez elegidos los parámetros básicos de las especies en el sistema, éstos definen la escala de respuesta funcional de los predadores a_1, a_2 mediante la siguiente ecuación:

$$p(\lambda, a_i) = d_i, \quad i = 1, 2. \tag{B.1}$$

La ecuación (B.1) define en el modelo concreto hallado (2.29) la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} & -a_j^{r_j+1} B_j d_j - a_i d_i D_j - a_j^{r_j+v_j+1} d_j B_j F_j - a_j^{v_j+1} d_j D_j F_j + a_j^{r_j+v_j} \\ & B_j c_j q_j \lambda_j + a_j^{v_j} D_j c_j q_j \lambda - a_j^{r_j} B_j d_j q_j \lambda - D_j d_j q_j \lambda - a_j^{r_j+v_j} B_j d_j F_j q_j \lambda \\ & -a_j^{v_j} D_j d_j F_j q_j \lambda + A_j a_j \lambda^{n_j} + A_j a_j^{v_j+1} F_j \lambda^{n_j} + A_j q_j \lambda^{n_j+1} + A_j a_j^{v_j} \\ & F_j q \lambda^{n_j+1} = 0, \end{aligned} \tag{B.2}$$

la cual tiene solución si se cumple la condición (2.24), luego se evalúan los puntos de bifurcación $k_{b2j}, k_{b1j}, k_{a2j}, k_{a1j}$, para cada uno de los subsistemas del sistema no suave (2.1) generado por los campos $f_j, j = 1, 2$; los puntos restantes de bifurcación del sistema no suave (2.1) cuando se satisfacen la condición de la variedad invariante (4.7) $\bar{k}_{a2j}, \bar{k}_{a1j}$, y por último los puntos cercanos de bifurcación $\bar{k}_{a2j}, \bar{k}_{a1j}$, en el caso en que la condición de la variedad invariante (4.7) no se satisfacen.

En la presentación de los retratos de fase de los diferentes modelos se evalúa el parámetro de bifurcación k conforme ocurren cambios cualitativos del sistema es decir, en los puntos de bifurcación del sistema no suave (2.1) y en algunos otros puntos intermedio de interés, entre \bar{k}_{a1j} y \bar{k}_{a2j} que nos muestran mejor la evolución de la bifurcación de zip no suave.

Observación 193 Finalmente se observa que en la representación de los retratos de fase, el final de la órbita corresponde al extremo, donde se encuentra el punto de mayor tamaño.

B.2 Modelo con variedad invariante del tipo 1A

Los siguientes son los parámetros del modelo natural:

Parámetros de la respuesta funcional $p_1(s, a)$

$$\begin{aligned} A_1 &= 1; & B_1 &= 1; & D_1 &= 1; & c_1 &= 1; \\ d_{11} &= 2; & d_{21} &= 8; & F_1 &= 0; & m_1 &= 1; \\ n_1 &= 1; & q_1 &= 1; & r_1 &= \frac{1}{2}; & u_1 &= 1; \\ v_1 &= 0; & \lambda &= 9; & \gamma &= 1; & &.. \end{aligned}$$

Parámetros de la respuesta funcional $p_3(s, a)$

$$\begin{aligned} A_2 &= 1; & B_2 &= 1; & D_2 &= 1; & c_2 &= 1; \\ d_{12} &= 2; & d_{22} &= 8; & F_2 &= 0; & m_2 &= 1; \\ n_2 &= 1; & q_2 &= 1; & r_2 &= \frac{1}{2}; & u_2 &= 1; \\ v_2 &= 0; & \lambda &= 9; & \gamma &= 1; & &.. \end{aligned}$$

La resistencia ambiental g de la presa y la respuesta funcional p de los predadores adoptan la forma:

$$\begin{aligned} p(s, a) &= \begin{cases} \frac{s}{1+\sqrt{a}} + \frac{s}{s+a}, & \text{si } s \leq \lambda \\ \frac{1.20444}{1+\sqrt{a}} - \frac{6.3}{6.3+a} + \frac{9}{9+a} + \left(\frac{.9 s^{.982564}}{1+\sqrt{a}} \right) + \frac{.7s}{a+.7s}, & \text{si } s > \lambda, \end{cases} \\ g(s, k) &= 1 - \frac{(-1+e^s)s}{(-1+e^k)k}. \end{aligned}$$

La ecuación (B.2) para a_1 es de la forma:

$$\begin{aligned} 0 &= -2 + \frac{9}{1+\sqrt{a_1}} + \frac{9}{9+a_1} \\ a_1 &= 19.0185. \end{aligned}$$

La ecuación (B.2) para a_2 es de la forma:

$$\begin{aligned} 0 &= -8 + \frac{9}{1+\sqrt{a_2}} + \frac{9}{9+a_2} \\ a_2 &= 0.0807037. \end{aligned}$$

Además, se muestran las gráficas y las ecuaciones paramétricas de las curvas L_k ,

$$L_k = \{(s, \xi_1, \xi_2) : p(\lambda, a_1)\xi_1 + p(\lambda, a_2)\xi_2 = \gamma\lambda g(\lambda, k); \\ s = \lambda, \xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0\}, \quad (\text{B.3})$$

$$La_{k,j} = \{(s, \xi_1, a_j(\xi_1, k)) : s = \lambda, 0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}\}, \quad (\text{B.4})$$

$$Lb_{k,j} = \{(s, \xi_1, b_j(\xi_1, k)) : s = \lambda, 0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}\}, \quad (\text{B.5})$$

$$La_k = \{(s, \xi_1, a(\xi_1, k)) : a(\xi_1, k) = \frac{a_1(\xi_1, k)}{b_1(\xi_1, k)} + \frac{a_2(\xi_1, k)}{b_2(\xi_1, k)}; \\ s = \lambda, 0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}\}, \quad (\text{B.6})$$

así como los retratos de fase del sistema para los distintos valores del parámetro de bifurcación k_{bij} y k_{aij} para $i, j = 1, 2$, seleccionados con el propósito de mostrar los cambios cualitativos que ocurren en el sistema. Los parámetros de bifurcación k_{bij} y k_{aij} para $i, j = 1, 2$, están definidos por las ecuaciones

$$K_{bij}(k_{bij}) = \gamma\lambda g(\lambda, k) \partial_s p_j(\lambda, a_i) - \frac{1}{4} \gamma^2 \left(\lambda \partial_s(\lambda, k) + g(\lambda, k) \left(1 - \frac{\lambda \partial_s p_j(\lambda, a_i)}{p_j(\lambda, a_i)} \right) \right)^2 = 0, \\ K_{aij}(k_{aij}) = -\lambda p_j(\lambda, a_i) \partial_s g(\lambda, k) + g(\lambda, k) (\lambda \partial_s p_j(\lambda, a_i) - p_j(\lambda, a_i)) = 0,$$

por las Definiciones 37, 41 y la proposición 39. Los valores obtenidos para los puntos de bifurcación k_{bij} y k_{aij} en cada uno de los subsistemas son los siguientes:

subsistema 1

$$K_{b21}(k) = -\frac{1}{4} \left(0.122788 \left(1 - \frac{9(-1+e^9)}{(-1+e^k)k} \right) + 9 \left(-\frac{9e^9}{(-1+e^k)k} - \frac{(-1+e^9)}{(-1+e^k)k} \right) \right)^2 \\ + 7.0177 \left(1 - \frac{9(-1+e^9)}{(-1+e^k)k} \right) = 0. \\ k_{b21} = 9.79903. \\ K_{b11}(k) = -\frac{1}{4} \left(0.0515899 \left(1 - \frac{9(-1+e^9)}{(-1+e^k)k} \right) + 9 \left(-\frac{9e^9}{(-1+e^k)k} - \frac{(-1+e^9)}{(-1+e^k)k} \right) \right)^2 \\ + 1.89682 \left(1 - \frac{9(-1+e^9)}{(-1+e^k)k} \right) = 0. \\ k_{b11} = 10.2798. \\ K_{a21}(k) = -0.982304 \left(1 - \frac{9(-1+e^9)}{(-1+e^k)k} \right) - 72 \left(-\frac{9e^9}{(-1+e^k)k} - \frac{(-1+e^9)}{(-1+e^k)k} \right) = 0. \\ k_{a21} = 13.0412. \\ K_{a11}(k) = -0.10318 \left(1 - \frac{9(-1+e^9)}{(-1+e^k)k} \right) - 18 \left(-\frac{9e^9}{(-1+e^k)k} - \frac{(-1+e^9)}{(-1+e^k)k} \right) = 0. \\ k_{a11} = 13.8417.$$

$$\begin{aligned}
 K_{b22}(k) &= -\frac{1}{4} \left(0.252807 \left(1 - \frac{9(-1+e^9)}{(-1+e^k)k} \right) + 9 \left(-\frac{9e^9}{(-1+e^k)k} - \frac{(-1+e^9)}{(-1+e^k)k} \right) \right)^2 \\
 &\quad + 5.97755 \left(1 - \frac{9(-1+e^9)}{(-1+e^k)k} \right) = 0. \\
 k_{b22} &= 9.8386. \\
 K_{b12}(k) &= -\frac{1}{4} \left(0.192161 \left(1 - \frac{9(-1+e^9)}{(-1+e^k)k} \right) + 9 \left(-\frac{9e^9}{(-1+e^k)k} - \frac{(-1+e^9)}{(-1+e^k)k} \right) \right)^2 \\
 &\quad + 1.61568 \left(1 - \frac{9(-1+e^9)}{(-1+e^k)k} \right) = 0. \\
 k_{b12} &= 10.3053. \\
 K_{a22}(k) &= -2.02245 \left(1 - \frac{9(-1+e^9)}{(-1+e^k)k} \right) - 72 \left(-\frac{9e^9}{(-1+e^k)k} - \frac{(-1+e^9)}{(-1+e^k)k} \right) = 0. \\
 k_{a22} &= 12.3835. \\
 K_{a12}(k) &= -0.384323 \left(1 - \frac{9(-1+e^9)}{(-1+e^k)k} \right) - 18 \left(-\frac{9e^9}{(-1+e^k)k} - \frac{(-1+e^9)}{(-1+e^k)k} \right) = 0. \\
 k_{a12} &= 12.632.
 \end{aligned}$$

Condición para $k_{b21} = 9.79903$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$L_k \leftrightarrow \xi_2 = 0.125(5.28242 - 2\xi_1).$$

$$La_{k1} \leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.0625(-32.4723 - 0.126574\xi_1).$$

$$La_{k2} \leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.0625(-31.8618 - 0.107814\xi_1).$$

$$Lb_{k1} \leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.0625\sqrt{32.(32.9515 - 9.1038\xi_1) - (-32.4723 - 0.126574\xi_1)^2}.$$

$$Lb_{k2} \leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.0625\sqrt{32.(28.0675 - 7.75443\xi_1) - (-31.862 - 0.107814\xi_1)^2}.$$

$$\begin{aligned}
 La_k \leftrightarrow a(\xi_1, k) &= \frac{-32.4723 - 0.1265744\xi_1}{\sqrt{32.(32.9515 - 9.10378\xi_1) - (-32.4723 - 0.126574\xi_1)^2}} \\
 &\quad + \frac{-31.8618 - 0.107814\xi_1}{\sqrt{32.(28.0675 - 7.75443\xi_1) - (-31.8618 - 0.107814\xi_1)^2}}.
 \end{aligned}$$

$$0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.$$

En la Figura B.1 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k . Como los segmentos Lb_{k1} , Lb_{k2} no están definidos debajo del segmento de equilibrios L_k , y los segmentos La_{k1} , La_{k2} se encuentran debajo del eje ξ_1 en el

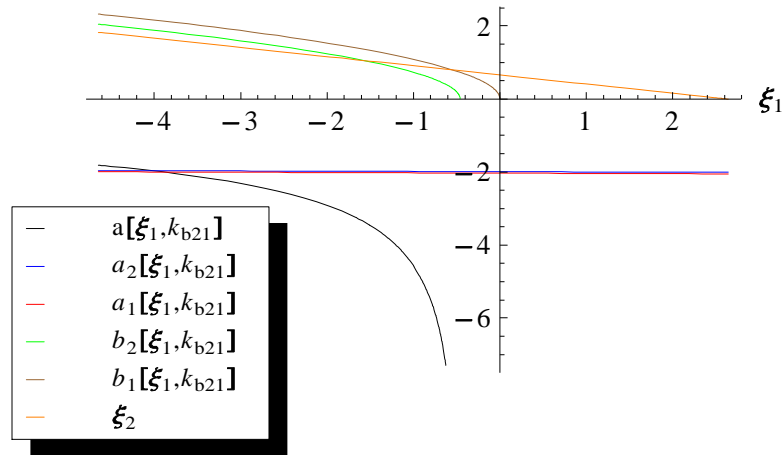


Figura B.1: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , para $k_{b21} = 9.79903$.

dominio de L_k , entonces los puntos del segmento de equilibrios L_k se comportan como nodos estables en cada subsistema del sistema no suave (2.1) asociado a los campos

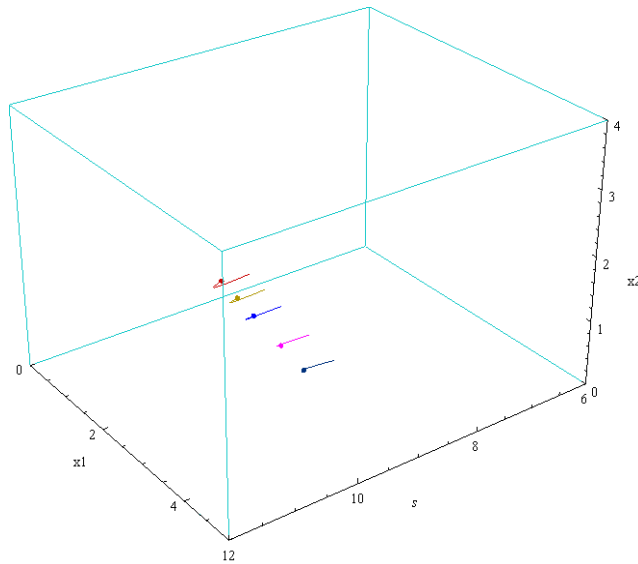


Figura B.2: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b21} = 9.79903$ y campo f_j .

$f_j(s, x_1, x_2)$, Corolario 78, y como equilibrios del tipo *nodo-nodo* asintóticamente estable en el sistema no suave (2.1), por el Teorema 114, tal como se puede observar

en la Figura B.2. Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales en el octante positivo permanecen en éste, son acotadas y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios L_k ; por lo tanto el segmento L_k es a un *atractor* del sistema y su cuenca de atractividad es el octante positivo, Teorema 114. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el k -estratega, el r -estratega y la presa.

Un comportamiento semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.3, se presenta el retrato de fase para este sistema con condiciones iniciales idénticas del parámetro de bifurcación $k = k_{b21}$. Tal como se puede observar en las Figuras B.2 y B.3, los retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$ y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k , como se demuestra en el Corolario 101.

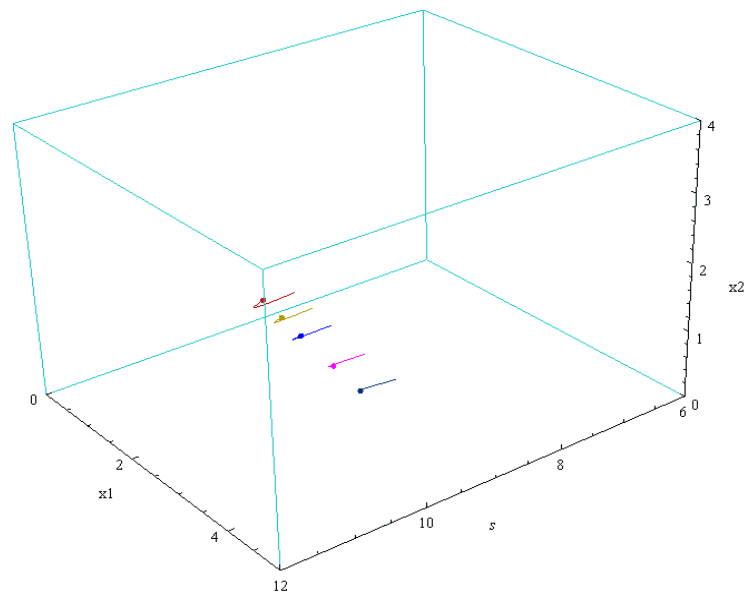


Figura B.3: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b21} = 9.79903$ y campo \tilde{f}_j .

Condición para $k_{b22} = 9.8386$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el

$$\begin{aligned}
 L_k &\leftrightarrow \xi_2 = 0.125(5.44105 - 2\xi_1). \\
 La_{k1} &\leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.0625(-31.0448 - 0.126574\xi_1). \\
 La_{k2} &\leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.0625(-30.416 - 0.107814\xi_1). \\
 Lb_{k1} &\leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.0625\sqrt{32.(33.941 - 9.10378\xi_1) - (-31.0448 - 0.126574\xi_1)^2}. \\
 Lb_{k2} &\leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.0625\sqrt{32.(28.9103 - 7.75443\xi_1) - (-30.416 - 0.107814\xi_1)^2}. \\
 La_k &\leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{(-31.0448 - 0.126574\xi_1)}{\sqrt{32.(33.941 - 9.10378\xi_1) - (-31.0448 - 0.126574\xi_1)^2}} \\
 &\quad + \frac{(-30.416 - 0.107814\xi_1)}{\sqrt{32.(28.9103 - 7.75443\xi_1) - (-30.416 - 0.107814\xi_1)^2}}. \\
 0 &\leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.
 \end{aligned}$$

En la Figura B.4 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k . Como el segmento de curva Lb_{k2} no está definido debajo del seg-

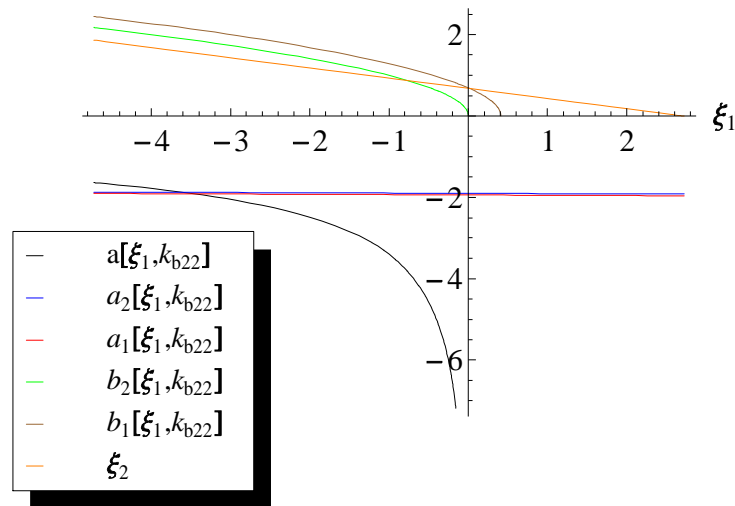


Figura B.4: Gráfica, de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$ y La_k para $k_{b22} = 9.8386$.

mento de equilibrios L_k y el segmento de curva La_{k2} se encuentran debajo del eje ξ_1 en el dominio de L_k , entonces en el subsistema del sistema no suave (2.1) asociado al

campo $f_2(s, x_1, x_2)$ cada punto del segmento de equilibrios L_k en la variedad invariante que lo contiene se comporta como nodo estable, Corolario 78. También La_{k1}

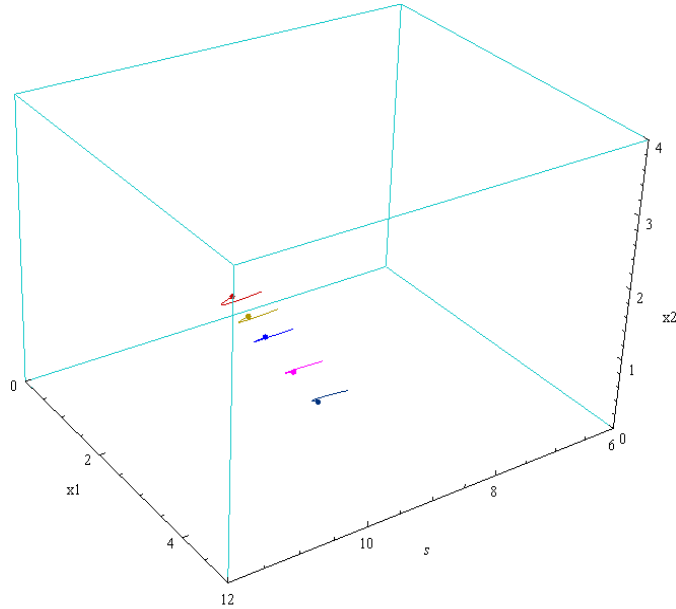


Figura B.5: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b22} = 9.8386$ y campo f_j .

se encuentra debajo del eje ξ_1 en el dominio de L_k , el segmento de curva Lb_{k1} intersecta el eje ξ_1 en el punto $\xi_1 = \bar{\bar{\xi}}_{11}(k_{b22})$, por lo cual el punto $(\lambda, \bar{\bar{\xi}}_{11}(k_{b22}), \bar{\bar{\xi}}_{21}(k_{b22}))$ divide L_k en dos partes (*una de las cuales puede ser vacía*) y en el subsistema del sistema no suave (2.1) asociado al campo $f_1(s, x_1, x_2)$ los puntos de L_k a la izquierda de $(\lambda, \bar{\bar{\xi}}_{11}(k_{b22}), \bar{\bar{\xi}}_{21}(k_{b22}))$ son focos estables, los puntos a la derecha son nodos estables. Por consiguiente cada punto del segmento de equilibrios L_k a la izquierda de el punto $(\lambda, \bar{\bar{\xi}}_{11}(k_{b22}), \bar{\bar{\xi}}_{21}(k_{b22}))$ se comporta como nodo-foco estable y cada punto del segmento de equilibrios L_k a la derecha de el punto $(\lambda, \bar{\bar{\xi}}_{11}(k_{b22}), \bar{\bar{\xi}}_{21}(k_{b22}))$ se comporta como nodo-nodo asintóticamente estable en el sistema no suave (2.1) en la variedad invariante local que lo contiene, Teorema 114, tal como se puede observar en la Figura B.5. En este caso la variación media del radio de oscilación es alta debido a los valores relativamente altos de las componentes reales de sus valores propios μ_{1j} y μ_{2j} (véase Definición 3.6). Entonces en el retrato de fase los puntos del segmento de equilibrios L_k a la izquierda de el punto $(\lambda, \bar{\bar{\xi}}_{11}(k_{b22}), \bar{\bar{\xi}}_{21}(k_{b22}))$ que son del tipo

nodo-foco estable dan la falsa impresión de tener el comportamiento de los puntos del segmento de equilibrios L_k del tipo nodo-nodo asintóticamente estable como se observa en el retrato de fase de la Figura B.5. Además el retrato de fase de la Figura B.5, luce semejante al retrato de fase de la Figura B.2; sin embargo son geométricamente no equivalentes. Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales en el octante positivo permanecen en éste, son acotadas y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios L_k ; por lo tanto el segmento L_k es a un *atractor* del sistema y su cuenca de atractividad es el octante positivo. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el k -estratega, el r -estratega y la presa.

Un análisis semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado al campo aproximado $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.6, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{b22}$. Como se puede observar en las Figuras B.5 y B.6, los retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k , como se demuestra en el Corolario 101.

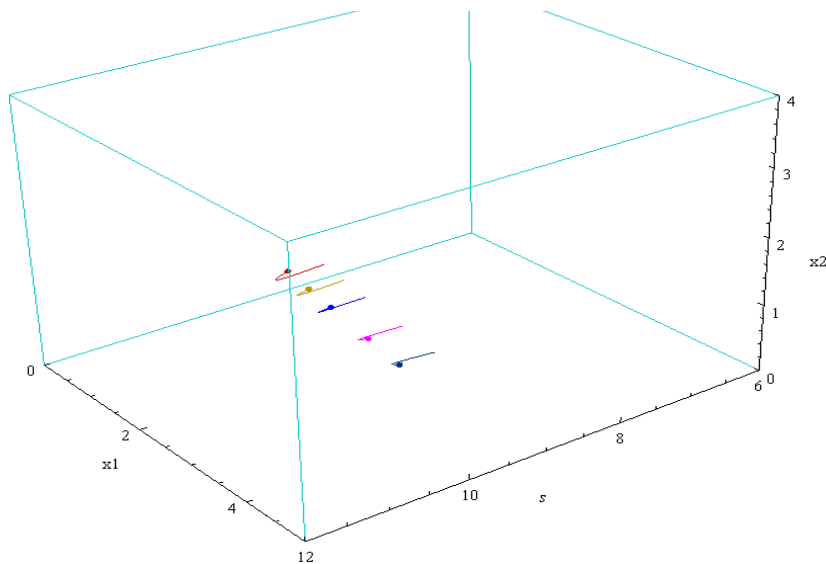


Figura B.6: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b22} = 9.8386$ y campo aproximado \tilde{f}_j .

Condición para $k_{b11} = 10.2798$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$L_k \leftrightarrow \xi_2 = 0.125(6.80886 - 2\xi_1).$$

$$La_{k1} \leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.0625(-18.7359 - 0.126574\xi_1).$$

$$La_{k2} \leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.0625(-17.9489 - 0.107814\xi_1).$$

$$Lb_{k1} \leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = \sqrt{0.0625(42.4733 - 9.10378\xi_1) - (-18.7359 - 0.1265\xi_1)^2}.$$

$$Lb_{k2} \leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = \sqrt{0.0625(36.178 - 7.75443\xi_1) - (-17.9489 - 0.1078\xi_1)^2}.$$

$$La_k \leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{(-18.7359 - 0.1265\xi_1)}{\sqrt{32.(42.4733 - 9.10378\xi_1) - (-18.7359 - 0.126574\xi_1)^2}} + \frac{(-30.416 - 0.107814\xi_1)}{\sqrt{32(36.178 - 7.75443\xi_1) - (-17.9489 - 0.107814\xi_1)^2}}.$$

$$0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.$$

En la Figura B.7 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k .

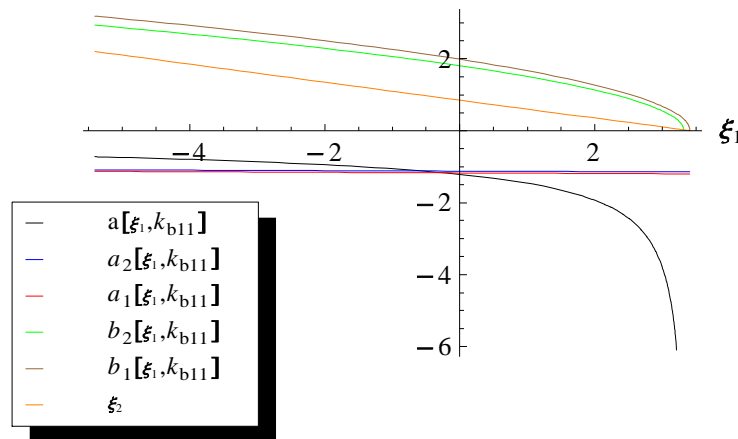


Figura B.7: Gráfica, de la línea de equilibrio L_k y de los trozos de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k para $k_{b11} = 10.2798$.

Como el segmento de curva Lb_{k_1} está definido en el dominio de L_k , y el segmento de curva La_{k_1} se encuentran debajo del eje ξ_1 , entonces en el subsistema del sistema no suave (2.1) asociado al campo $f_1(s, x_1, x_2)$ cada punto del segmento de equilibrios L_k en la variedad invariante que lo contiene se comporta como nodo estable; La_{k_2} se encuentran debajo del eje ξ_1 , y el segmento de curva Lb_{k_2} intersecta el eje ξ_1 en el punto $\xi_1 = \bar{\bar{\xi}}_{12}(k_{b11})$ por lo cual el punto $(\lambda, \bar{\bar{\xi}}_{12}(k_{b11}), \bar{\bar{\xi}}_{22}(k_{b11}))$, divide L_k en dos partes (*una de las cuales puede ser vacía*). Entonces en el subsistema del sistema

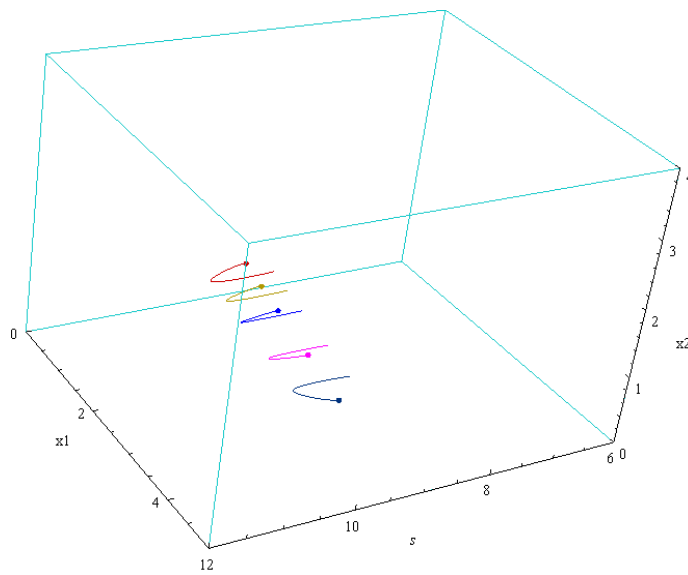


Figura B.8: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b11} = 10.2798$ y campo f_j .

no suave (2.1) asociado al campo $f_2(s, x_1, x_2)$ cada punto de L_k a la izquierda de este punto se comporta como foco estable, y cada punto a la derecha se comportan como nodo estable, Corolario 78. Por consiguiente cada punto del segmento de equilibrios L_k a la izquierda de el punto $(\lambda, \bar{\bar{\xi}}_{12}(k_{b11}), \bar{\bar{\xi}}_{22}(k_{b11}))$ se comporta como un foco-foco estable y cada punto del segmento de equilibrios L_k a la derecha de el punto $(\lambda, \bar{\bar{\xi}}_{12}(k_{b11}), \bar{\bar{\xi}}_{22}(k_{b11}))$ se comporta como un foco-nodo asintóticamente estable en el sistema no suave (2.1) en la variedad invariante local estable que lo contiene, Teorema 114. También en este caso la variación media del radio de oscilación es alta debido a los valores relativamente altos de las componentes reales de sus valores

propios, por consiguiente el retrato de fase da la falsa impresión de tener los puntos del segmento de equilibrios L_k del tipo nodo-nodo asintóticamente estable, como se observa en el retrato de fase de la Figura B.8. El retrato de fase de la Figura B.8, luce semejante al retrato de fase al de la Figura B.2; sin embargo son geoméricamente no equivalentes. Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales en el octante positivo siguen permaneciendo en éste, son acotadas y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios L_k ; por lo tanto el segmento L_k es a un *atractor* del sistema y su cuenca de atractividad es el octante positivo. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el k -estratega, el r -estratega y la presa.

Un análisis semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.9, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{b11}$. Como se puede observar en las Figuras B.8 y B.9, los retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k como se muestra en el Corolario 101.

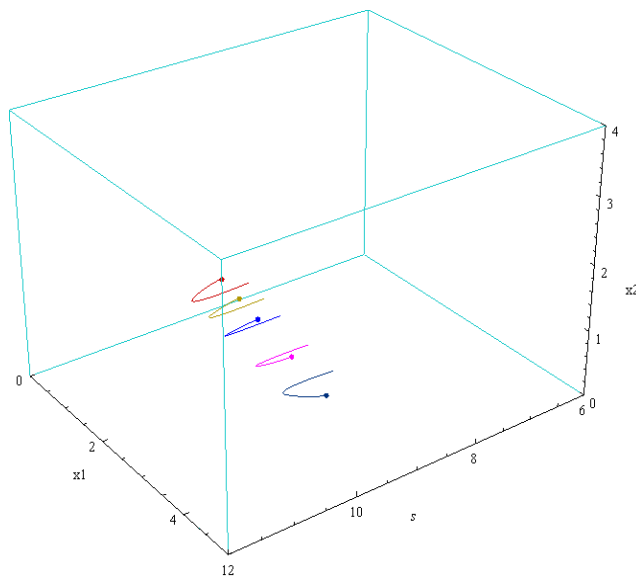


Figura B.9: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b11} = 10.2798$ y campo aproximado \tilde{f}_j .

Condición para $k_{b12} = 10.3053$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$L_k \leftrightarrow \xi_2 = 0.125(6.8693 - 2\xi_1).$$

$$La_{k1} \leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.0625(-18.1914 - 0.1265\xi_1).$$

$$La_{k2} \leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.0625(-17.3975 - 0.1078\xi_1).$$

$$Lb_{k1} \leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.0625(42.8507 - 9.10378\xi_1) - (-18.1914 - 0.1265\xi_1)^2.$$

$$Lb_{k2} \leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.0625\sqrt{32.(36.4995 - 7.7544\xi_1) - (-17.3975 - 0.1078\xi_1)^2}.$$

$$La_k \leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{(-18.1914 - 0.12657\xi_1)}{\sqrt{32.(42.8507 - 9.10378\xi_1) - (-18.1914 - 0.1265\xi_1)^2}} + \frac{(-17.3975 - 0.1078\xi_1)}{\sqrt{32(36.4995 - 7.7544\xi_1) - (-17.3975 - 0.1078\xi_1)^2}}.$$

$$0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.$$

En la Figura B.10 se presenta la línea de equilibrios L_k y los trozos de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k .

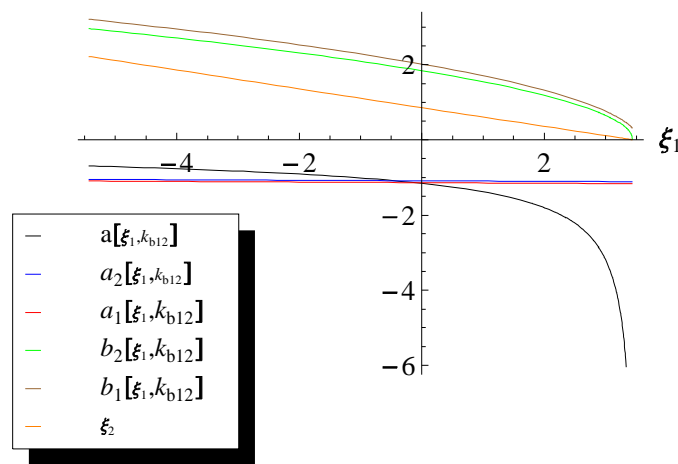


Figura B.10: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k para $k_{b12} = 10.3053$.

Como los segmentos de curva $L_{b_{k_1}}$, $L_{b_{k_2}}$ están definidos en el dominio de L_k y el segmento de curva L_{a_k} se encuentran debajo del eje ξ_1 , entonces cada punto del segmento de equilibrios L_k se comporta como foco-foco asintóticamente estable en el sistema no suave (2.1) sobre la variedad invariante estable local que lo contiene, Teorema 114. En este caso como la variación media del radio de oscilación es alta debido a los valores relativamente altos de las componentes reales de sus valores propios, el retrato de fase da la falsa impresión de tener el comportamiento de los puntos del segmento de equilibrios L_k del tipo nodo-nodo asintóticamente estable, como se observa en el retrato de fase correspondiente al parámetro de bifurcación $k = k_{b_{12}}$, Figura B.11. El retrato de fase de la Figura B.11, luce semejante al retrato de fase de la Figura B.2; sin embargo son geoméricamente no equivalentes. Las

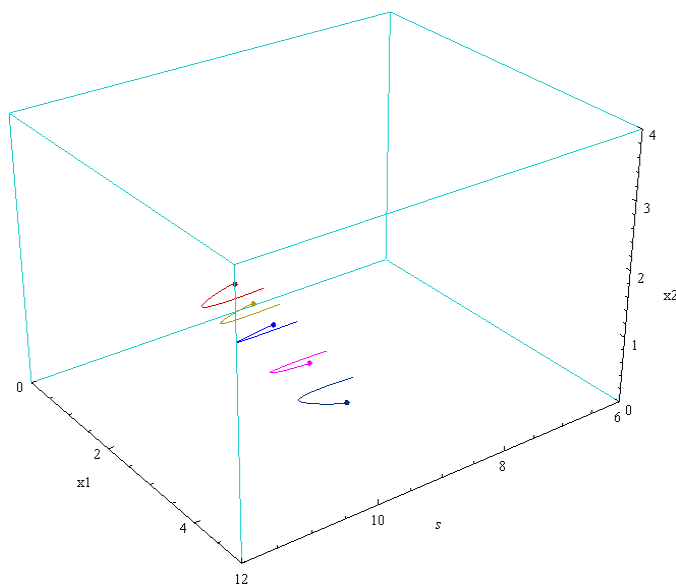


Figura B.11: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b_{12}} = 10.3053$ y campo f_j .

trayectorias del sistema con condiciones iniciales en el octante positivo permanecen en éste, son acotadas y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios L_k ; por lo tanto el segmento L_k es a un *atractor* del sistema y su cuenca de atractividad es el octante positivo. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el k -estratega, el r -estratega y la presa.

Un análisis semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ dado en (4.2). En la Figura B.12, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{b11}$. Como se puede observar en las Figuras B.11 y B.12, los retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$ y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k como se muestra en el Corolario 101.

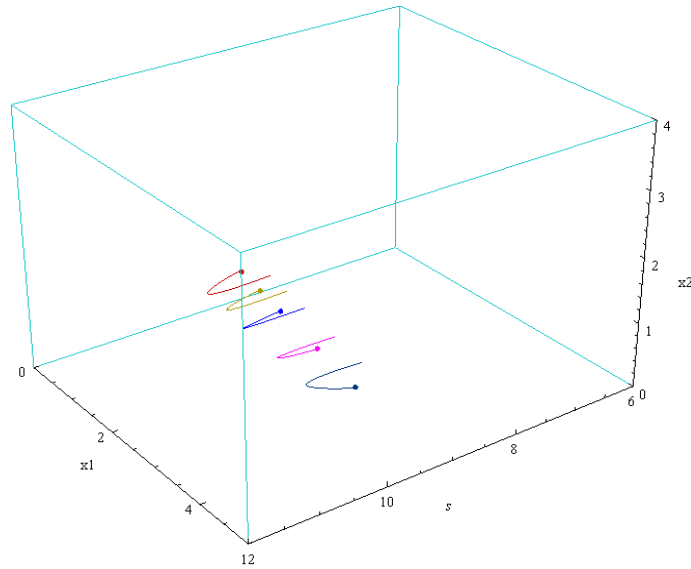


Figura B.12: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b12} = 10.3053$ y campo \tilde{f}_j .

Condición para $k_{a22} = 12.3835$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$L_k \leftrightarrow \xi_2 = 0.125(8.77811 - 2\xi_1).$$

$$La_{k1} \leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.0625(-1.0145 - 0.126574\xi_1).$$

$$La_{k2} \leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.0625(-1.77636 \times 10^{-15} - 0.107814\xi_1).$$

$$Lb_{k1} \leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.06253(42.8507 - 9.10378\xi_1) - (-18.1914 - 0.12657\xi_1)^2.$$

$$\begin{aligned}
 Lb_{k_2} &\leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.0625 \sqrt{32.(46.641 - 7.754\xi_1) - (-1.776 \times 10^{-15} - 0.1078\xi_1)^2}. \\
 La_k &\leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{(-1.0145 - 0.12657\xi_1)}{\sqrt{32.(54.7574 - 9.1037\xi_1) - (-1.0145 - 0.1265\xi_1)^2}} \\
 &\quad + \frac{(-1.77636 \times 10^{-15} - 0.107814\xi_1)}{\sqrt{32(46.6414 - 7.7544\xi_1) - (-1.77636 \times 10^{-15} - 0.1078\xi_1)^2}}. \\
 0 &\leq \xi_1 \leq \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.
 \end{aligned}$$

En la Figura B.13 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k . Como los segmentos de curva Lb_{k_1} , Lb_{k_2} están definidos en el dominio

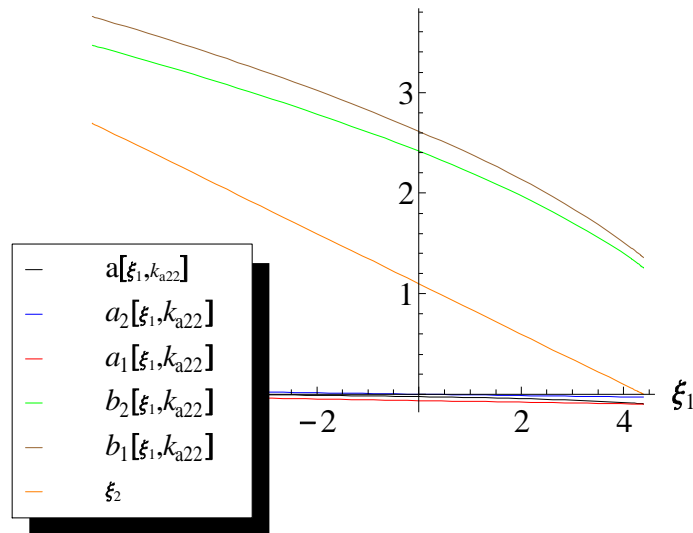


Figura B.13: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , con $k_{a22} = 12.3835$.

de L_k y el segmento de curva La_k se encuentran debajo del eje ξ_1 , entonces cada punto del segmento de equilibrios L_k se comporta como foco-foco asintóticamente estable en el sistema no suave (2.1) sobre la variedad invariante estable local que lo contiene, Teorema 114. En este caso como la variación media del radio de oscilación es baja debido a los valores relativamente bajos de las componentes reales de sus valores propios μ_{1j} y μ_{2j} (véase Definición 3.6), entonces en el retrato de fase los puntos

del segmento de equilibrios L_k dan la impresión de ser del tipo foco asintóticamente estable de los sistemas suaves como se observa en el retrato de fase correspondiente al parámetro de bifurcación $k = k_{a22}$, Figura B.14.

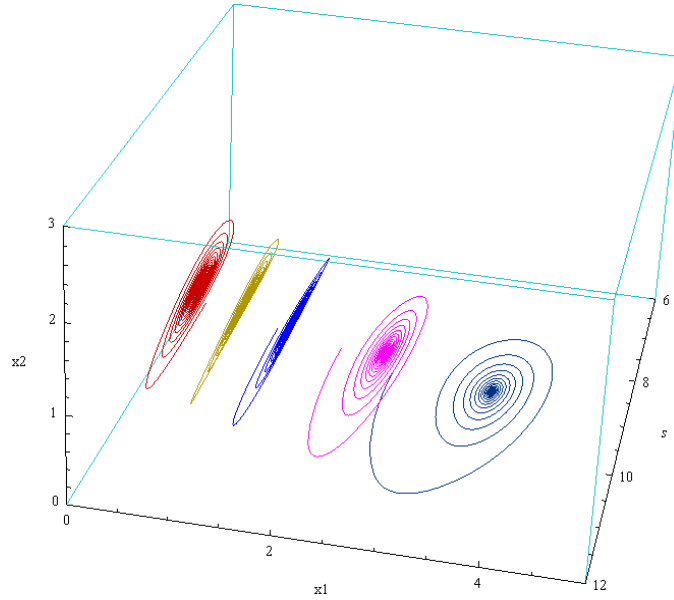


Figura B.14: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a22} = 12.3835$ y campo f_j .

Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales en el octante positivo permanecen en éste, son acotadas y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios L_k ; por lo tanto el segmento L_k es a un *atractor* del sistema y su cuenca de atracción es el octante positivo. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el k -estratega, el r -estratega y la presa.

Un análisis semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.15, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{a22}$. Como se puede observar en las Figuras B.14 y B.15, los retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$ y los del del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k como se muestra en el Corolario 101.

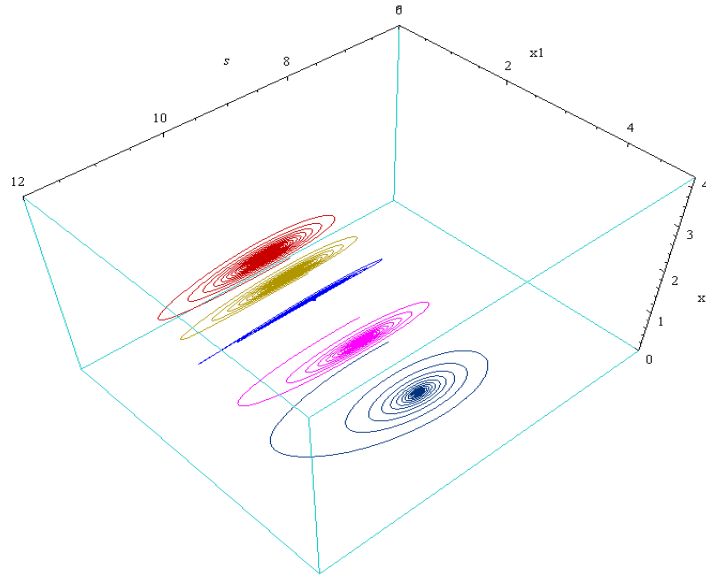


Figura B.15: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a22} = 12.3835$ y campo \tilde{f}_j .

Condición para $k_{a12} = 12.632$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$L_k \leftrightarrow \xi_2 = 0.125(8.83033 - 2\xi_1).$$

$$La_{k1} \leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.0625(-0.544525 - 0.126574\xi_1).$$

$$La_{k2} \leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.0625(0.476016 - 0.107814\xi_1).$$

$$Lb_{k1} \leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.0625\sqrt{32.(55.0832 - 9.1037\xi_1) - (-0.5445 - 0.1265\xi_1)^2}.$$

$$Lb_{k2} \leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.0625\sqrt{32.(46.9189 - 7.7544\xi_1) - (0.476016 - 0.1078\xi_1)^2}.$$

$$La_k \leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{(-0.544525 - 0.126574\xi_1)}{\sqrt{32.(55.0832 - 9.1037\xi_1) - (-0.5445 - 0.1265\xi_1)^2}} + \frac{(0.476016 - 0.107814\xi_1)}{\sqrt{32(46.9189 - 7.7544\xi_1) - (0.476016 - 0.1078\xi_1)^2}}.$$

$$0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.$$

En la Figura B.16 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento

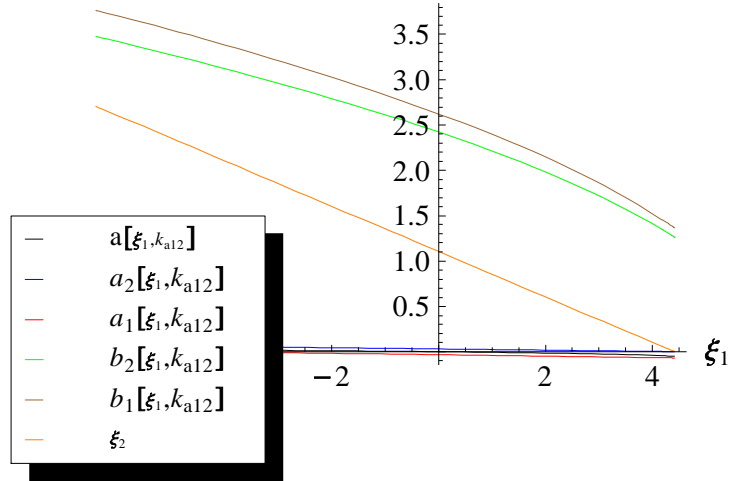


Figura B.16: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , para $k_{a12} = 12.632$.

Como los segmentos de curva Lb_{k1} , Lb_{k2} están definidos en el dominio de L_k , y el segmento de curva La_k se encuentran debajo del eje x_1 , entonces cada punto del

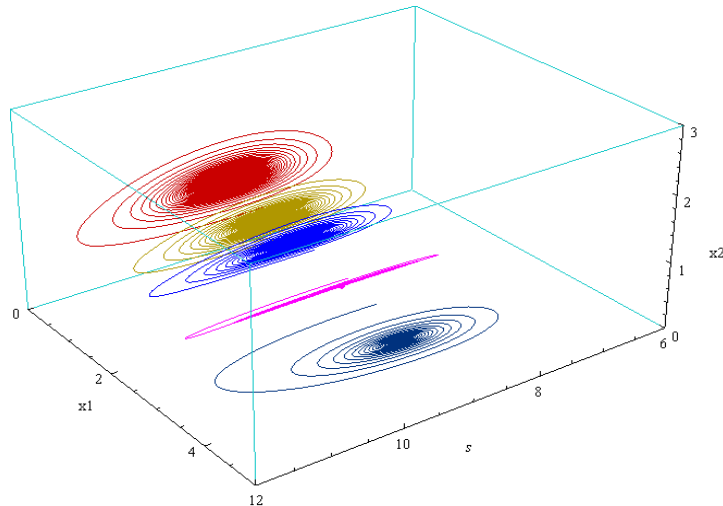


Figura B.17: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a12} = 12.632$ y campo f_j .

segmento de equilibrios L_k se comporta como foco-foco asintóticamente estable en el

sistema no suave (2.1) sobre la variedad invariante estable local que lo contiene, Teorema 114. En este caso como la variación media del radio de oscilación es baja debido a los valores relativamente bajos de las componentes reales de sus valores propios μ_{1j} y μ_{2j} (véase Definición 3.6), entonces en el retrato de fase los puntos del segmento de equilibrios L_k dan la impresión de ser del tipo foco asintóticamente estable de los sistemas suaves, como se puede observar en el retrato de fase correspondiente al parámetro de bifurcación $k = k_{a12}$, Figura B.17. Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales en el octante positivo permanecen en éste, son acotadas y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios L_k ; por lo tanto el segmento L_k es un *atractor* del sistema y su cuenca de atractividad es el octante positivo. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el k -estratega, el r -estratega y la presa.

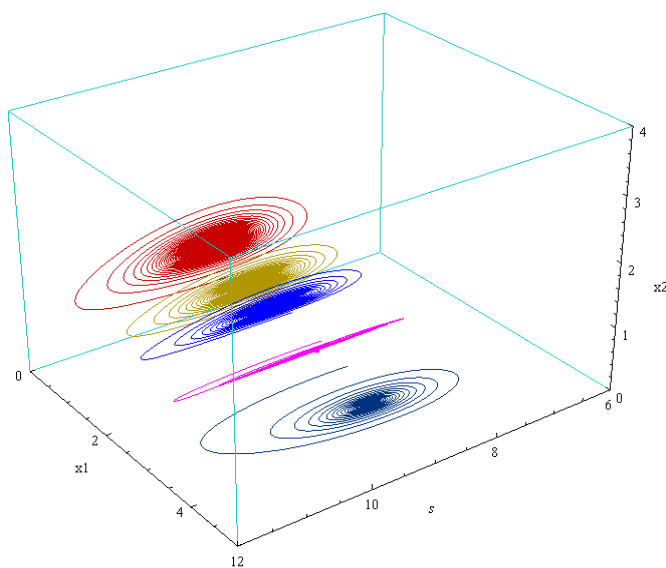


Figura B.18: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a12} = 12.632$ y campo \tilde{f}_j .

Un análisis semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximado $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.18, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{a12}$. Como se puede observar en las Figuras B.17 y B.18, los retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$ y los del sistema no

suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k , como se muestra en el Corolario 101.

Condición para $k_{api} = 12.8$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned}
 L_k &\leftrightarrow \xi_2 = 0.125(8.85845 - 2\xi_1). \\
 La_{k1} &\leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.0625(-0.291489 - 0.126574\xi_1). \\
 La_{k2} &\leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.0625(0.732302 - 0.107814\xi_1). \\
 Lb_{k1} &\leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.0625\sqrt{32.(55.2586 - 9.1037\xi_1) - (-0.2914 - 0.1265\xi_1)^2}. \\
 Lb_{k2} &\leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.0625\sqrt{32.(47.0683 - 7.7544\xi_1) - (0.7323 - 0.1078\xi_1)^2}. \\
 La_k &\leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{(-0.291489 - 0.126574\xi_1)}{\sqrt{32.(55.2586 - 9.1037\xi_1) - (-0.2914 - 0.1265\xi_1)^2}} \\
 &\quad + \frac{(0.732302 - 0.107814\xi_1)}{\sqrt{32(47.0683 - 7.7544\xi_1) - (0.7323 - 0.1078\xi_1)^2}}. \\
 0 &\leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.
 \end{aligned}$$

En la Figura B.19 se presenta la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k . Como los segmentos de curva Lb_{k1} , Lb_{k2} están definidos en el dominio de L_k , y la curva La_k , decrece por el Lema 111, e intersecta el eje ξ_1 en el punto $\xi_1 = \hat{\xi}_1(k_{api})$, por lo cual el punto $(\lambda, \hat{\xi}_1(k_{api}), \hat{\xi}_2(k_{api}))$ divide L_k en dos partes (*una de las cuales puede ser vacía*). Luego cada punto del segmento de equilibrios L_k a la izquierda del punto $(\lambda, \hat{\xi}_1(k_{api}), \hat{\xi}_2(k_{api}))$ se comporta como un foco-foco inestable y cada punto del segmento de equilibrios L_k a la derecha de el punto $(\lambda, \hat{\xi}_1(k_{api}), \hat{\xi}_2(k_{api}))$ se comporta como focos-foco asintóticamente estable en el sistema no suave (2.1) sobre las variedades invariantes inestables y estables que los contienen respectivamente, Teorema 114. A medida que se aumenta el parámetro k , crece la inestabilidad del segmento L_k , significando la pérdida de terreno del predador dos con respecto al predador uno hasta su extinción a valores mayores del

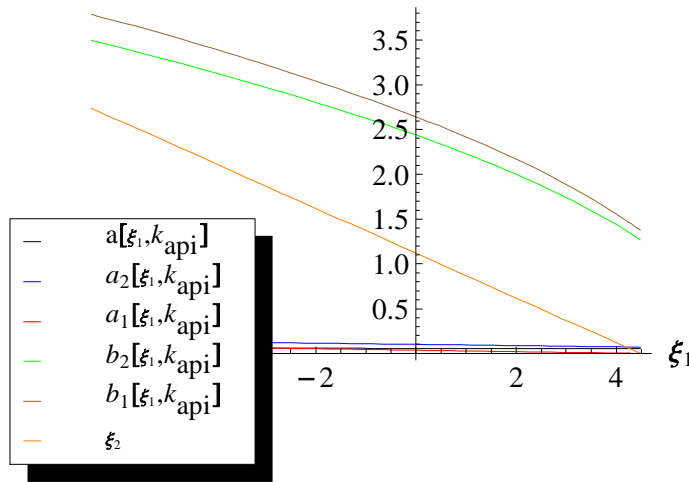


Figura B.19: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k para $k_{api} = 12.8$.

parámetro k_{a1} , como se observa en el retrato de fase correspondiente al parámetro de bifurcación $k = k_{api}$, Figura B.20. Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales en un entorno tubular suficientemente pequeño de los puntos de L_k a la derecha del punto $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k_{api}), \widehat{\xi}_2(k_{api}))$, en el octante positivo permanecen en éste, son acotadas y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios L_k ; por lo tanto la parte del segmento L_k a la derecha del punto $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k_{api}), \widehat{\xi}_2(k_{api}))$ es a un *atractor* del sistema. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el k -estratega, el r -estratega y la presa. Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales en un entorno tubular suficientemente pequeño de los puntos de L_k a la izquierda del punto $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k_{api}), \widehat{\xi}_2(k_{api}))$, en el octante positivo se alejan del segmento de equilibrios L_k e intersectan el plano coordenado $s - x_2$ por ser el sistema de tipo hiperbólico $\left(\frac{\partial_s p_2(\lambda, a_2)}{\partial_s p_2(\lambda, a_1)} - \frac{\partial_s p_1(\lambda, a_2)}{\partial_s p_1(\lambda, a_1)} = 4.32942 \times 10^{-16} \right) > 0$, ver Teorema 21 y Observación 135. Además como el plano coordenado $s - x_2$, es una variedad invariante las trayectorias tienden a formar un ciclo límite allí, en desarrollo de la bifurcación de Hopf-Zou & Küpper no suave de acuerdo al Teorema 121. Por lo tanto la parte del segmento L_k a la izquierda del punto $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k_{api}), \widehat{\xi}_2(k_{api}))$ es un *repulsor* del sistema. Los equilibrios en este caso no representan coexistencia estable

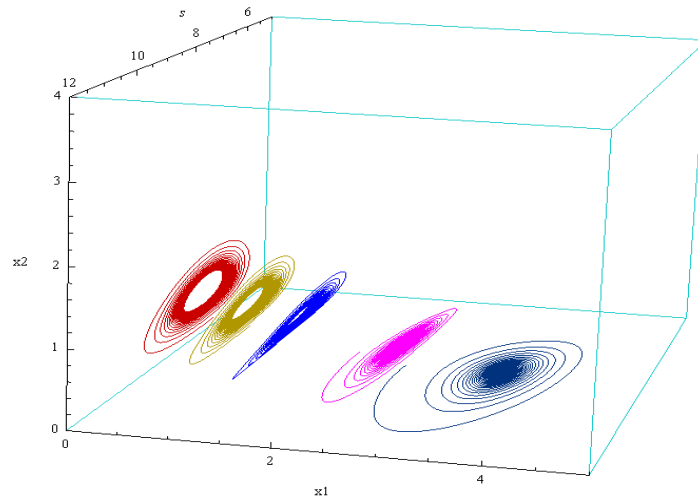


Figura B.20: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{api} = 12.8$ y campo f_j .

entre el k -estratega, el r -estratega y la presa, ya que los equilibrios del sistema ahora no son estable desde el punto de vista de Lyapunov; sin embargo el ciclo límite es orbitalmente asintóticamente estable, significando la oscilación de coexistencia entre el k -estratega y la presa, así como la pérdida de terreno de r -estratega frente al k -estratega en la región del espacio fase considerada.

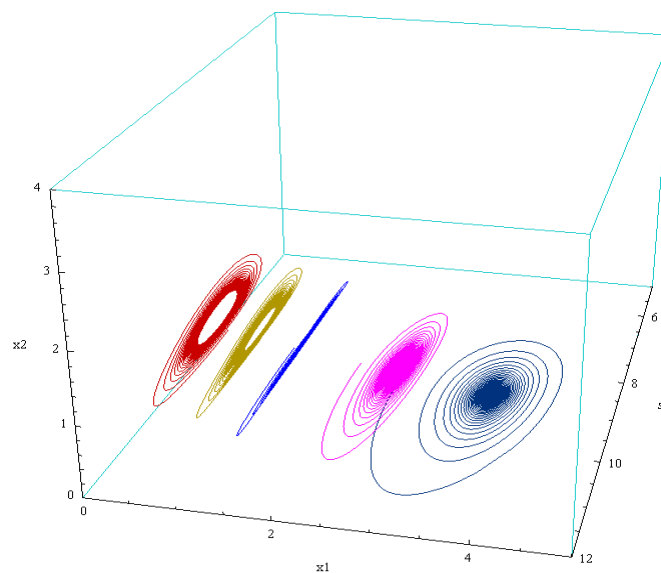


Figura B.21: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{api} = 12.8$ y campo \tilde{f}_j .

Un análisis semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.21, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{api}$. Como se puede observar en las Figuras B.20 y B.21, los retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$ y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k como se demuestra en el Corolario 101.

Condición para $k_{a21} = 13.0412$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el

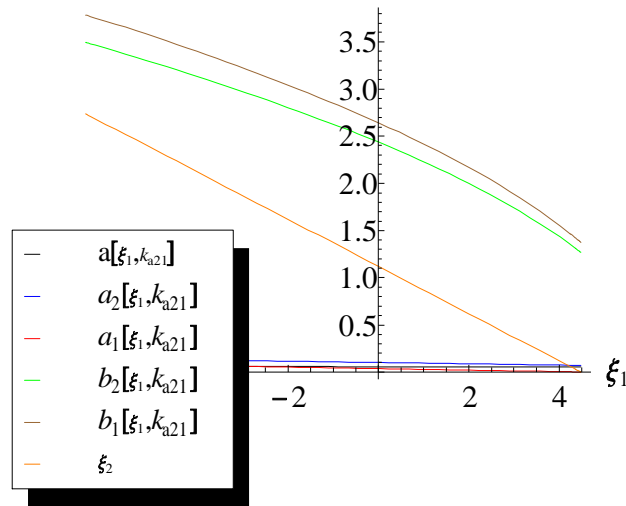


Figura B.22: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k para $k_{a21} = 13.0412$.

plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$L_k \leftrightarrow \xi_2 = 0.125(8.8908 - 2\xi_1).$$

$$La_{k1} \leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.0625(-8.88178 \times 10^{-16} - 0.1265\xi_1).$$

$$La_{k2} \leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.0625(1.02753 - 0.107814\xi_1).$$

$$\begin{aligned}
 Lb_{k1} &\leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.0625\sqrt{32.(55.460 - 9.1037\xi_1) - (-8.88 \times 10^{-16} - 0.1265\xi_1)^2}. \\
 Lb_{k2} &\leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.0625\sqrt{32.(47.2404 - 7.75443\xi_1) - (1.02753 - 0.10781\xi_1)^2}. \\
 La_k &\leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{(-8.88178 \times 10^{-16} - 0.126574\xi_1)}{\sqrt{32.(55.4607 - 9.1037\xi_1) - (-8.8817 \times 10^{-16} - 0.1265\xi_1)^2}} \\
 &\quad + \frac{(1.02753 - 0.107814\xi_1)}{\sqrt{32(47.2404 - 7.7544\xi_1) - (1.0275 - 0.1078\xi_1)^2}}. \\
 0 &\leq x_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.
 \end{aligned}$$

En la Figura B.22 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k . Como los segmentos de curva Lb_{k1} , Lb_{k2} están definidos en el dominio de L_k , y el segmento de curva La_k se encuentran encima del eje x_1 , entonces cada punto del segmento de equilibrios L_k se comporta como foco-foco asintóticamente inestable en el sistema no suave (2.1). Las trayectorias del sistema con

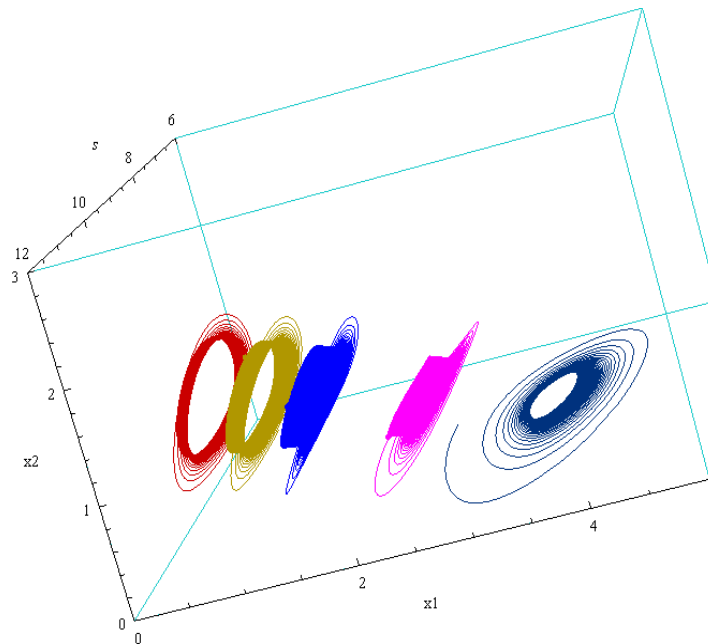


Figura B.23: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a21} = 13.0412$ y campo f_j .

condiciones iniciales cercanas a la línea de equilibrios L_k se alejan de él por lo cual el

segmento L_k es a un conjunto *repulsor* del sistema no suave (2.1) y tiende a formar un ciclo límite en el plano coordinado $s - x_2$, orbitalmente asintóticamente estable en desarrollo de la bifurcación de Hopf-Zou & Küpper no suave de acuerdo a los Teoremas 21 y 121, significando la oscilación de coexistencia entre el el k -estratega y la presa, como se puede apreciar en el retrato de fase correspondiente al parámetro de bifurcación $k = k_{a21}$, Figura B.23.

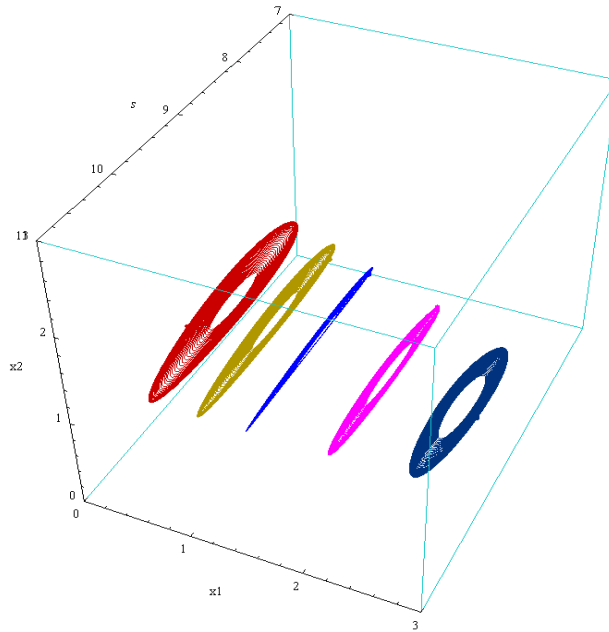


Figura B.24: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a21} = 13.0412$ y campo \tilde{f}_j .

Un análisis semejante al anterior se realiza para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.24, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{21}$. Como se puede observar en las Figuras B.23 y B.24, los retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$ y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k como se muestra en el Corolario 101.

Condición para $k_{a11} = 13.8417$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned}
 L_k &\leftrightarrow \xi_1 = 0.125(8.95381 - 2\xi_1). \\
 La_{k1} &\leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.0625(0.566662 - 0.126574\xi_1). \\
 La_{k2} &\leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.0625(1.60147 - 0.107814\xi_1). \\
 Lb_{k1} &\leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.0625\sqrt{32.(55.8535 - 9.1037\xi_1) - (0.5666 - 0.1265\xi_1)^2}. \\
 Lb_{k2} &\leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.0625\sqrt{32.(47.575 - 7.7544\xi_1) - (1.6014 - 0.1078\xi_1)^2}. \\
 La_k &\leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{(0.566662 - 0.126574\xi_1)}{\sqrt{32.(0.5666 - 9.10378\xi_1) - (0.5666 - 0.1265\xi_1)^2}} \\
 &\quad + \frac{(1.60147 - 0.107814\xi_1)}{\sqrt{32.(47.575 - 7.7544\xi_1) - (1.6014 - 0.1078\xi_1)^2}}. \\
 0 &\leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.
 \end{aligned}$$

En la Figura B.25 se presenta la línea de equilibrios L_k , y los trozos de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k .

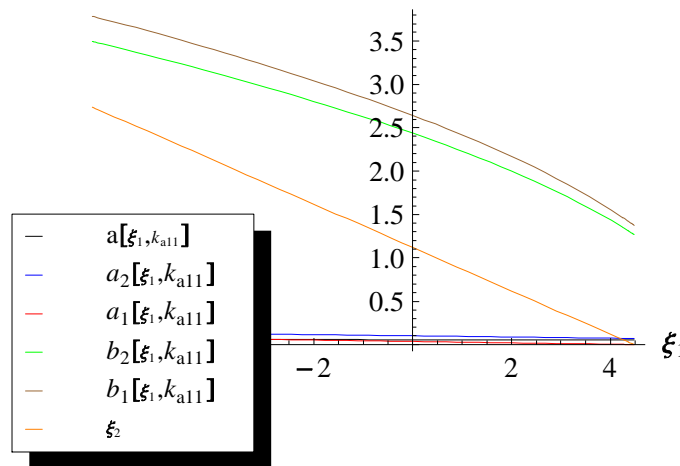


Figura B.25: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k para $k_{a11} = 13.8417$.

Como los segmentos de curva Lb_{k_1} , Lb_{k_2} están definidos en el dominio de L_k , y el segmento de curva La_k se encuentran encima del eje ξ_1 , entonces cada punto del segmento de equilibrios L_k se comporta como foco-foco asintóticamente inestable en el sistema no suave (2.1). Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales cercanas a la línea de equilibrios L_k se alejan de él por lo cual el segmento L_k es a un conjunto *repulsor* del sistema no suave (2.1) y tiende a formar un ciclo límite en el plano coordenado $s - x_2$, orbitalmente asintóticamente estable en desarrollo de la bifurcación de Hopf-Zou & Küpper no suave de acuerdo a los Teoremas 21 y 121; significando la oscilación de coexistencia entre el el *k-estratega* y la presa. El ciclo límite al cual tiende todas las órbitas del sistema en el plano coordenado $s - x_1$ crece en amplitud con respecto al caso anterior, como se observa en el retrato de fase correspondiente al parámetro de bifurcación $k = k_{a11}$, Figura B.26.

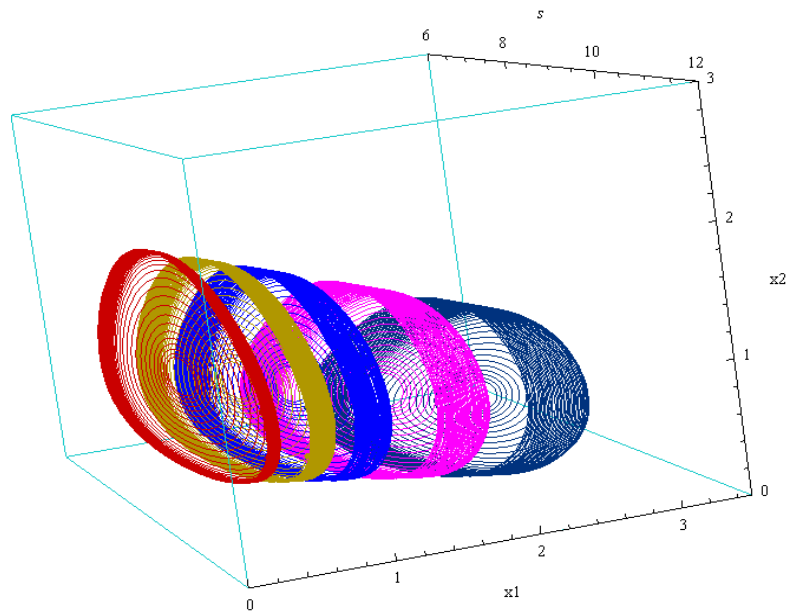


Figura B.26: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a11} = 13.8417$ y campo f_j .

Un análisis semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.27, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{a11}$. Como se puede observar en las Figuras B.26 y B.27, los retratos de fase

del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$ y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ son topológicamente equivalentes en un recubrimiento tubular del segmento de equilibrios L_k como se demuestra en el Corolario 101.

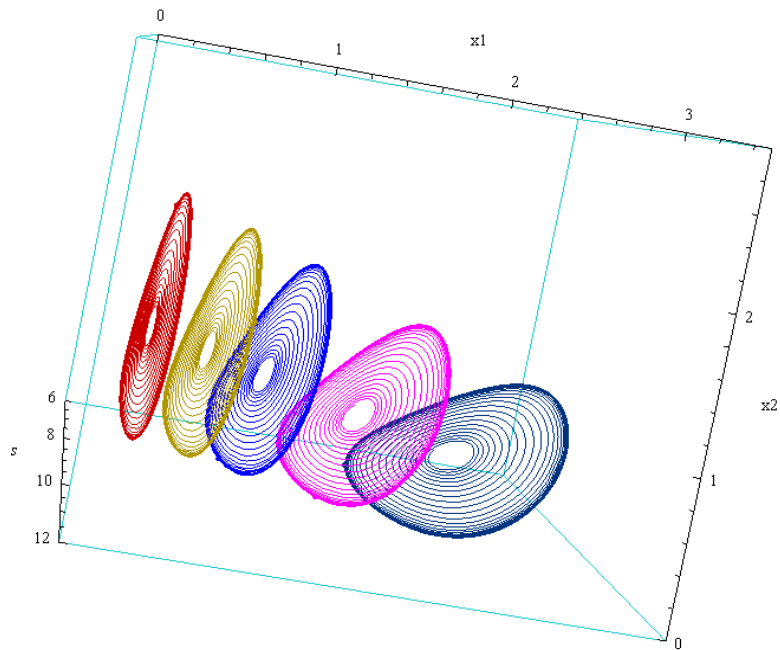


Figura B.27: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a11} = 13.8417$ y campo \tilde{f}_j .

B.3 Modelo sin variedad invariante del tipo 1A

Los siguientes son los parámetros del modelo natural-natural sin variedad invariante:

Parámetros de la respuesta funcional $p_1(s, a)$

$$\begin{aligned}
 A_1 &= 1; & B_1 &= 1; & D_1 &= 1; & c_1 &= 1; \\
 d_{11} &= 2; & d_{21} &= 7; & F_1 &= 0; & m_1 &= 1; \\
 n_1 &= 1; & q_1 &= 1; & r_1 &= \frac{1}{2}; & u_1 &= 1; \\
 v_1 &= 0; & \lambda &= 10; & \gamma &= 1; & & ..
 \end{aligned}$$

Parámetros de la respuesta funcional $p_3(s, a)$

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{2}; & B_2 &= \frac{1}{2}; & D_2 &= 1; & c_2 &= 1; \\ d_{12} &= 2; & d_{22} &= 7; & F_2 &= 0; & m_2 &= 1; \\ n_2 &= 1; & q_2 &= 1; & r_2 &= \frac{1}{2}; & u_2 &= 1; \\ v_2 &= 0; & \lambda &= 10; & \gamma &= 1; & & .. \end{aligned}$$

La resistencia ambiental g de la presa y la respuesta funcional p de los predadores adoptan la forma:

$$p(s, a) = \begin{cases} \frac{s}{1+\sqrt{a}} + \frac{s}{s+a}, & \text{si } s \leq \lambda \\ -\frac{5}{1+\frac{\sqrt{a}}{2}} + \frac{10}{1+\sqrt{a}} + \frac{s}{2(1+\frac{\sqrt{a}}{2})} + \frac{s}{1+\sqrt{a}} + \frac{s}{a+s}, & \text{si } s > \lambda, \end{cases}$$

$$g(s, k) = 1 - \frac{(-1+e^s)s}{(-1+e^k)k}.$$

La ecuación (B.2) para a_1 es de la forma:

$$\begin{aligned} 0 &= -2 + \frac{10}{1+\sqrt{a_1}} + \frac{10}{10+a_1} \\ a_1 &= 23.7212. \end{aligned}$$

La ecuación (B.2) para a_2 es de la forma:

$$\begin{aligned} 0 &= -7 + \frac{10}{1+\sqrt{a_2}} + \frac{10}{10+a_2} \\ a_2 &= 0.429428. \end{aligned}$$

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$L_k = \{(s, \xi_1, \xi_2) : p(\lambda, a_1)\xi_1 + p(\lambda, a_2)\xi_2 = \gamma\lambda g(\lambda, k); \lambda, 0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}\}, \quad (\text{B.7})$$

$$La_{k,j} = \{(s, \xi_1, a_j(\xi_1, k)) : s = \lambda, 0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}\}, \quad (\text{B.8})$$

$$Lb_{k,j} = \{(s, \xi_1, b_j(\xi_1, k)) : s = \lambda, 0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}\}, \quad (\text{B.9})$$

$$La_k = \{(s, \xi_1, a(\xi_1, k)) : a(\xi_1, k) = \frac{a_1(\xi_1, k)}{b_1(\xi_1, k)} + \frac{a_2(\xi_1, k)}{b_2(\xi_1, k)} - \frac{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{p_j(\lambda, a_1)^2}{p_j(\lambda, a_2)}}}\right)}{\pi}; s = \lambda, 0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}\}, \quad (\text{B.10})$$

$$La_k = \{(s, \xi_1, a(\xi_1, k)) : a(\xi_1, k) = \frac{a_1(\xi_1, k)}{b_1(\xi_1, k)} + \frac{a_2(\xi_1, k)}{b_2(\xi_1, k)} - \frac{\ln\left(\sqrt{1+\frac{p_j(\lambda, a_1)^2}{p_j(\lambda, a_2)}}\right)}{\pi}; s = \lambda, 0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}\}. \quad (\text{B.11})$$

así como los retratos de fase del sistema para los distintos valores del parámetro de bifurcación k_{bij} y k_{aij} $i, j = 1, 2$, seleccionados con el propósito de mostrar los cambios cualitativos que ocurren en el sistema. Los parámetros de bifurcación k_{bij} y k_{aij} para $i, j = 1, 2$, están definidos por las ecuaciones

$$K_{bij}(k_{bij}) = \gamma \lambda g(\lambda, k) \partial_s p_j(\lambda, a_i) - \frac{1}{4} \gamma^2 \left(\lambda \partial_s(\lambda, k) + g(\lambda, k) \left(1 - \frac{\lambda \partial_s p_j(\lambda, a_i)}{p_j(\lambda, a_i)} \right) \right)^2 = 0,$$

$$K_{aij}(k_{aij}) = -\lambda p_j(\lambda, a_i) \partial_s g(\lambda, k) + g(\lambda, k) (\lambda \partial_s p_j(\lambda, a_i) - p_j(\lambda, a_i)) = 0,$$

por las Definiciones dadas en 37, 41 y la proposición 39. Los valores obtenidos para los puntos de bifurcación k_{bij} y k_{aij} en cada uno de los subsistemas son los siguientes:

subsistema 1

$$K_{b21}(k) = -\frac{1}{4} \left(0.131335 \left(1 - \frac{10(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) + 10 \left(-\frac{10e^{10}}{(-1+e^k)k} - \frac{(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) \right)^2 + 6.08065 \left(1 - \frac{10(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) = 0.$$

$$k_{b21} = 10.9201.$$

$$K_{b11}(k) = -\frac{1}{4} \left(0.0439708 \left(1 - \frac{10(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) + 10 \left(-\frac{10e^{10}}{(-1+e^k)k} - \frac{(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) \right)^2 + 1.91206 \left(1 - \frac{10(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) = 0.$$

$$k_{b11} = 11.3659.$$

$$K_{a21}(k) = -0.919346 \left(1 - \frac{10(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) - 70 \left(-\frac{10e^{10}}{(-1+e^k)k} - \frac{(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) = 0.$$

$$k_{a21} = 14.0964.$$

$$K_{a11}(k) = -0.0879417 \left(1 - \frac{10(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) - 20 \left(-\frac{10e^{10}}{(-1+e^k)k} - \frac{(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) = 0.$$

$$k_{a11} = 15.1131.$$

subsistema 2

$$K_{b22}(k) = -\frac{1}{4} \left(0.456354 \left(1 - \frac{10(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) + 10 \left(-\frac{10e^{10}}{(-1+e^k)k} - \frac{(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) \right)^2 + 3.80552 \left(1 - \frac{10(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) = 0.$$

$$k_{b22} = 11.0389.$$

$$K_{b12}(k) = -\frac{1}{4} \left(0.16794 \left(1 - \frac{10(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) + 10 \left(-\frac{10e^{10}}{(-1+e^k)k} - \frac{(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) \right)^2 + 1.66412 \left(1 - \frac{10(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) = 0.$$

$$k_{b12} = 11.3879.$$

$$K_{a22}(k) = -3.19448 \left(1 - \frac{10(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) - 70 \left(-\frac{10e^{10}}{(-1+e^k)k} - \frac{(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) = 0.$$

$$k_{a22} = 12.9635.$$

$$K_{a12}(k) = -0.335881 \left(1 - \frac{10(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) - 20 \left(-\frac{10e^{10}}{(-1+e^k)k} - \frac{(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) = 0.$$

$$k_{a12} = 13.87.$$

Condición para $k_{b21} = 10.9201$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$L_k \leftrightarrow \xi_2 = 0.14285(6.35125 - 2\xi_1).$$

$$La_{k1} \leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.0714286(-27.5127 - 0.12231\xi_1).$$

$$La_{k2} \leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.0714286(-26.0677 - 0.403779\xi_1).$$

$$Lb_{k1} \leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.07142 \sqrt{28.(27.0338 - 5.8360\xi_1) - (-27.5127 - 0.1223\xi_1)^2}.$$

$$Lb_{k2} \leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.0714 \sqrt{28.(16.9189 - 2.9979\xi_1) - (-26.0677 - 0.4037\xi_1)^2}.$$

$$La_k \leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{-26.0677 - 0.403779\xi_1}{\sqrt{28.(16.9189 - 2.9979\xi_1) - (-26.0677 - 0.4037\xi_1)^2}} + \frac{-27.5127 - 0.12231\xi_1}{\sqrt{28.(27.0338 - 5.83603\xi_1) - (-27.5127 - 0.12231\xi_1)^2}}.$$

$$0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.$$

En la Figura B.28 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k . Como los segmentos Lb_{k1} , Lb_{k2} no están definidos debajo del segmento de equilibrios L_k y los segmentos La_{k1} , La_{k2} se encuentran debajo del eje ξ_1 en el dominio de L_k , entonces los puntos del segmento de equilibrios L_k se comportan como nodos estables en cada subsistema del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, Corolario 78. Luego existe una vecindad del segmento de equilibrios para el cual las soluciones con condiciones iniciales en esta vecindad tienden a puntos del segmento L_k cuando t tiende a infinito, Teorema 141, como se observa en el retrato

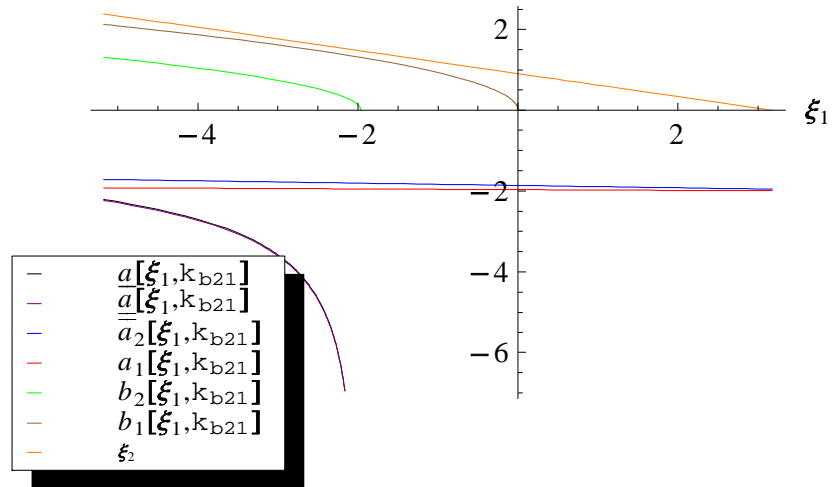


Figura B.28: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k para $k_{b21} = 10.9201$.

de fase correspondiente al parámetro de bifurcación $k = k_{b21}$, Figura B.29. Además el retrato de fase de la Figura B.29, se asemeja al del sistema no suave (2.1) cuando los equilibrios son del tipo *nodo-nodo* asintóticamente estable; sin embargo en este

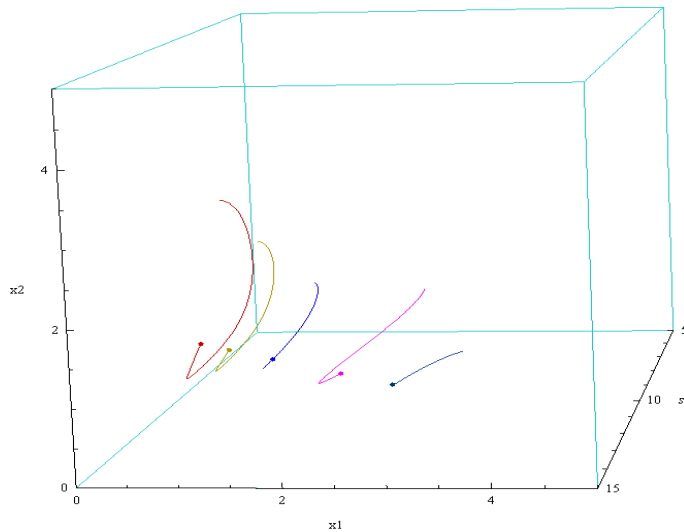


Figura B.29: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b21} = 10.9201$ y campo f_j .

caso no existen variedades invariantes que contenga puntos de equilibrios del interior del segmento L_k (con la topología inducida de L_k). Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales en el octante positivo permanecen en éste, son acotadas, y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios L_k ; por lo tanto el segmento L_k es a un *atractor* del sistema y su cuenca de atractividad es el octante positivo. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el k -estratega, el r -estratega y la presa.

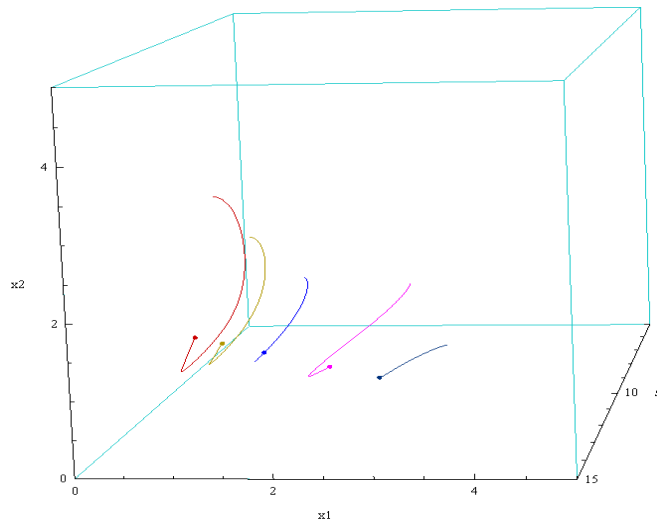


Figura B.30: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b21} = 10.9201$ y campo \tilde{f}_j .

Un análisis semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.30, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{b21}$. Como se puede observar en las Figuras B.29 y B.30, los retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k ; sin embargo el Corolario 101, no aplica en este caso, ya que no existen variedades invariantes estable para el sistema no suave (2.1) que contengan puntos de equilibrios del interior del segmento de equilibrios L_k .

Condición para $k = k_{b22} = 11.0389$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$L_k \leftrightarrow \xi_2 = 0.142857(6.79459 - 2\xi_1).$$

$$La_{k1} \leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.07142(-24.058 - 0.12231\xi_1).$$

$$La_{k2} \leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.07142(-22.5121 - 0.403779\xi_1).$$

$$Lb_{k1} \leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.07142\sqrt{28.(28.9209 - 5.8360\xi_1) - (-24.058 - 0.12231\xi_1)^2}.$$

$$Lb_{k2} \leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.07142\sqrt{28.(18.0999 - 2.9979\xi_1) - (-22.5121 - 0.403779\xi_1)^2}.$$

$$La_k \leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{-22.5121 - 0.403779\xi_1}{\sqrt{28.(18.0999 - 2.99796\xi_1) - (-22.5121 - 0.403779\xi_1)^2}} + \frac{-24.058 - 0.12231\xi_1}{\sqrt{28.(28.9209 - 5.83603\xi_1) - (-24.058 - 0.12231\xi_1)^2}}.$$

$$0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.$$

En la Figura B.31 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k . Como el segmento de curva Lb_{k2} no está definido debajo del seg-

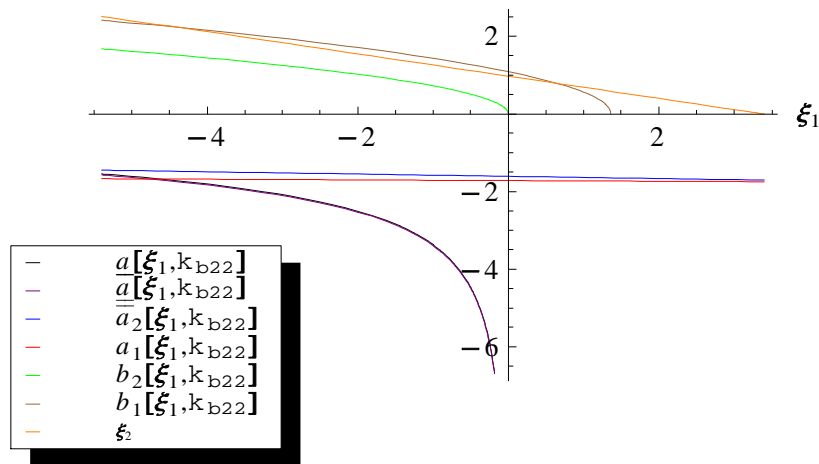


Figura B.31: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k para $k_{b22} = 11.0389$.

mento de equilibrios L_k , y el segmento de curva La_{k2} se encuentra debajo del eje ξ_1 en el dominio de L_k , entonces en el subsistema del sistema no suave (2.1) asociado al campo $f_2(s, x_1, x_2)$ los puntos del segmento de equilibrios L_k se comportan como nodos estables. También La_{k1} se encuentra debajo del eje ξ_1 en el dominio de L_k , y el segmento de curva Lb_{k1} intersecta el eje ξ_1 en el punto $\xi_1 = \bar{\bar{\xi}}_{11}(k_{b22})$ por lo cual el punto $(\lambda, \bar{\bar{\xi}}_{11}(k_{b22}), \bar{\bar{\xi}}_{21}(k_{b22}))$ divide L_k en dos partes (*una de las cuales puede ser vacía*). Luego en el subsistema del sistema no suave (2.1) asociado al campo $f_1(s, x_1, x_2)$ los puntos de L_k a la izquierda de este punto son focos estables y los puntos a la derecha son nodos estables (Corolario 78) y existe una vecindad del segmento de equilibrios para el cual las soluciones con condiciones iniciales en esta vecindad tienden a puntos del segmento L_k cuando t tiende a infinito, Teorema 141, como se observa en el retrato de fase correspondiente al parámetro de bifurcación $k = k_{b22}$, Figura B.32. Además éste retrato de fase se asemeja al del sistema no suave

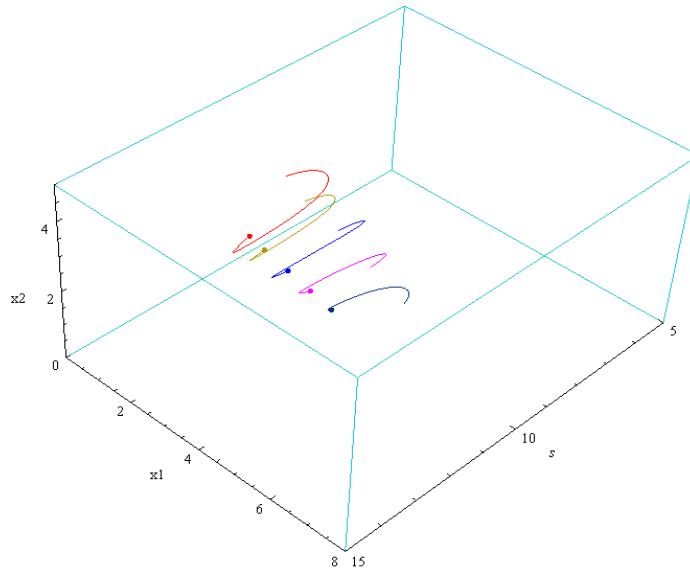


Figura B.32: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b22} = 11.0389$ y campo f_j .

(2.1) cuando existen variedades invariantes por cada punto del interior de L_k y cada punto del segmento de equilibrios L_k a la izquierda de el punto $(\lambda, \bar{\bar{\xi}}_{11}(k_{b22}), \bar{\bar{\xi}}_{21}(k_{b22}))$ se comportan como nodo-foco estable y cada punto del segmento de equilibrios L_k

a la derecha del punto $(\lambda, \bar{\xi}_{11}(k_{b22}), \bar{\xi}_{21}(k_{b22}))$ se comporta como nodo-nodo asintóticamente estable, sin embargo en este caso no existen variedades invariantes estables locales que contengan puntos de equilibrios del interior del segmento L_k . Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales en el octante positivo permanecen en éste, son acotadas y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios L_k ; por lo tanto el segmento L_k es a un *atractor* del sistema y su cuenca de atractividad es el octante positivo. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el k -estratega, el r -estratega y la presa.

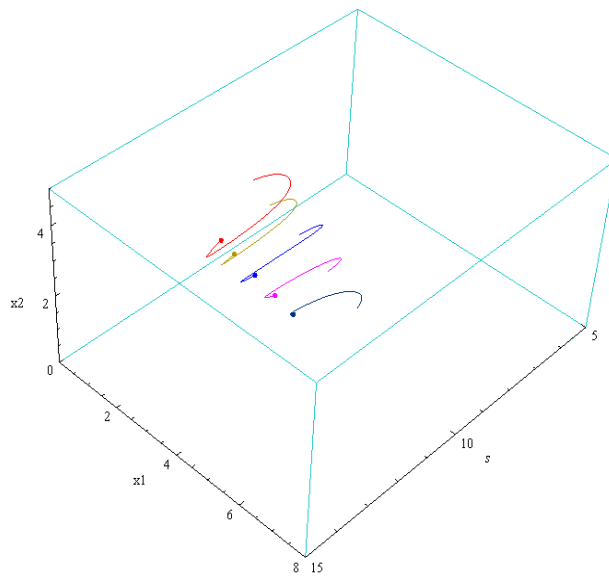


Figura B.33: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b22} = 11.0389$ y campo \tilde{f}_j .

Un análisis semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.33, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{b22}$. Como se puede observar en las Figuras B.32 y B.33, los retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ no se puede afirmar que son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k porque en este caso el Corolario 101 no aplica, ya que no existen variedades invariantes estables

para el sistema no suave (2.1) que contengan los puntos del interior del segmento de equilibrios L_k .

Condición para $k_{b11} = 11.3659$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$L_k \leftrightarrow \xi_1 = 0.14285(7.75508 - 2\xi_1).$$

$$La_{k1} \leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.07142(-16.5737 - 0.12231\xi_1).$$

$$La_{k2} \leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.07142(-14.8093 - 0.403779\xi_1).$$

$$Lb_{k1} \leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.07142\sqrt{28.(33.0092 - 5.8360\xi_1) - (-16.5737 - 0.12231\xi_1)^2}.$$

$$Lb_{k2} \leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.07142\sqrt{28.(20.6585 - 2.9979\xi_1) - (-14.8093 - 0.4037\xi_1)^2}.$$

$$La_k \leftrightarrow a(x_1, k) = \frac{-14.8093 - 0.403779\xi_1}{\sqrt{28.(20.6585 - 2.9979\xi_1) - (-14.8093 - 0.4037\xi_1)^2}} + \frac{-16.5737 - 0.12231\xi_1}{\sqrt{28.(33.0092 - 5.8360\xi_1) - (-16.5737 - 0.12231\xi_1)^2}}.$$

$$0 \leq x_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.$$

En la Figura B.34 se presenta la línea de equilibrios L_k y los trozos de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k . Como el segmento de curva Lb_{k1} esta definido en el dominio de L_k ; y el segmento de curva Lb_{k2} intersecta el eje ξ_1 en el punto $\bar{\bar{\xi}}_{12}(k_{b11})$ por lo cual el punto $(\lambda, \bar{\bar{\xi}}_{12}(k_{b11}), \bar{\bar{\xi}}_{22}(k_{b11}))$ divide L_k en dos partes (*una de las cuales puede ser vacía*). Además el segmento de curva La_k se encuentran debajo del eje ξ_1 , luego existe una vecindad del segmento de equilibrios para el cual las soluciones con condiciones iniciales en esta vecindad tienden a un punto del segmento L_k cuando t tiende a infinito, Teorema 141, como se observa en el retrato de fase correspondiente al parámetro de bifurcación $k = k_{b11}$, Figura B.35. El retrato de fase se asemeja al del sistema no suave (2.1) cuando existen variedades invariantes y cada punto del segmento del equilibrios L_k a la izquierda de el punto $(\lambda, \bar{\bar{\xi}}_{12}(k_{b11}), \bar{\bar{\xi}}_{22}(k_{b11}))$ se comporta como foco-foco estable, así como cada punto del segmento de equilibrios L_k a la derecha de el punto $(\lambda, \bar{\bar{\xi}}_{12}(k_{b11}), \bar{\bar{\xi}}_{22}(k_{b11}))$ se comportan como foco-nodo

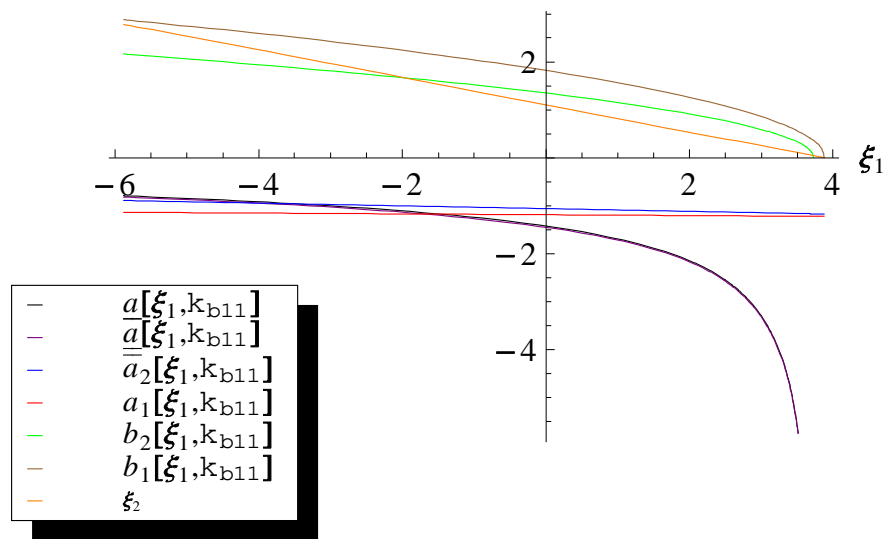


Figura B.34: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de los trozos de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k para $k_{b11} = 11.3659$.

asintóticamente estable; sin embargo en este caso no existen variedades invariantes estables locales que contengan puntos de equilibrios del interior del segmento L_k . Las

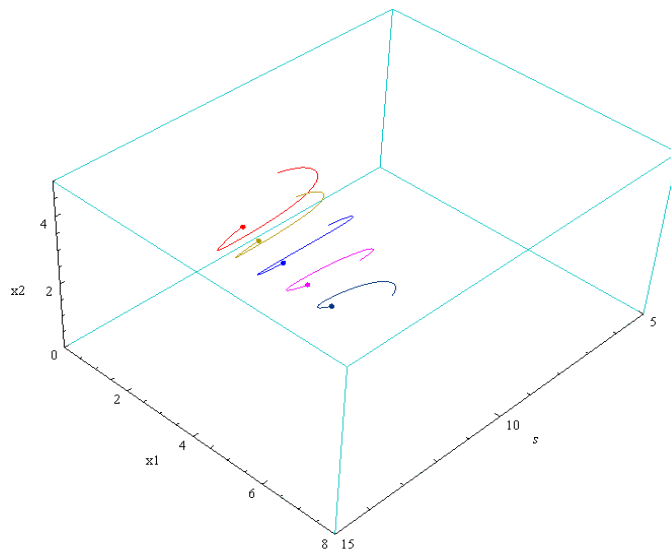


Figura B.35: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b11} = 11.3659$ y campo f_j .

trayectorias del sistema con condiciones iniciales en el octante positivo permanecen en éste, son acotadas, y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios L_k ; por lo tanto el segmento L_k es a un *atractor* del sistema y su cuenca de atractividad es el octante positivo. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el k -estratega, el r -estratega y la presa.

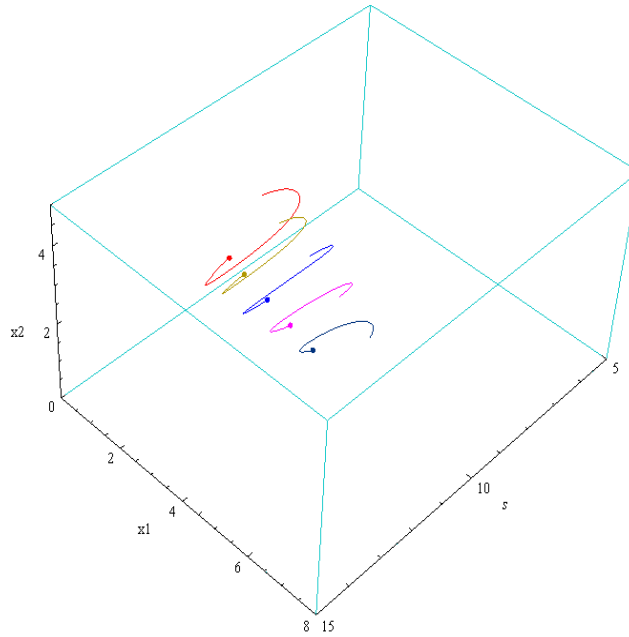


Figura B.36: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b11} = 11.3659$ y campo aproximado \tilde{f}_j .

Un análisis semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.36, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{b11}$. Como se puede observar en las Figuras B.35 y B.36, los retratos de fase del sistema (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$ y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ no puede afirmarse que son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k porque el Corolario 101 no aplica en este caso, ya que no existen variedades invariantes estables para el sistema no suave (2.1) que contengan los puntos del interior del segmento de equilibrios L_k .

Condición para $k_{b12} = 11.3879$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$L_k \leftrightarrow \xi_2 = 0.142857(7.80831 - 2\xi_1).$$

$$La_{k1} \leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.0714286(-16.1588 - 0.12231\xi_1).$$

$$La_{k2} \leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.0714286(-14.3823 - 0.403779\xi_1).$$

$$Lb_{k1} \leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.07142 \sqrt{28.(33.2358 - 5.8360\xi_1) - (-16.1588 - 0.1223\xi_1)^2}.$$

$$Lb_{k2} \leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.07142 \sqrt{28.(20.8003 - 2.9979\xi_1) - (-14.3823 - 0.4037\xi_1)^2}.$$

$$La_k \leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{-14.3823 - 0.403779\xi_1}{\sqrt{28.(20.8003 - 2.99796\xi_1) - (-14.3823 - 0.4037\xi_1)^2}} + \frac{-16.1588 - 0.12231\xi_1}{\sqrt{28.(33.2358 - 5.8360\xi_1) - (-16.1588 - 0.1223\xi_1)^2}}.$$

$$0 \leq x_1 \leq \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.$$

En la Figura B.37 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k .

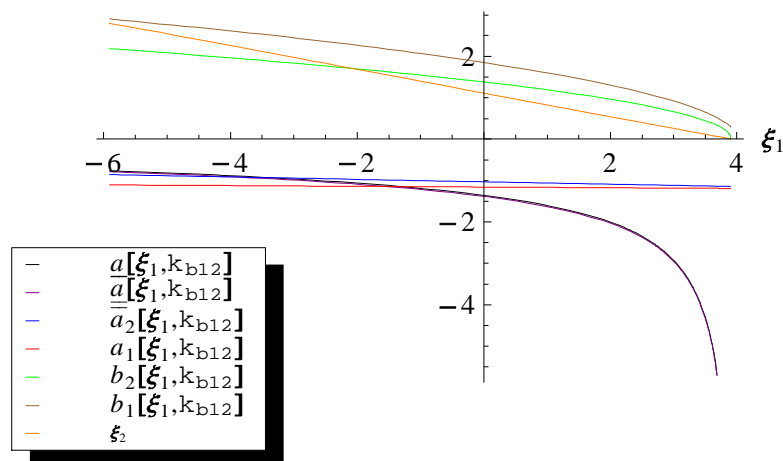


Figura B.37: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , para $k_{b12} = 11.3879$.

Como los segmentos de curva $L_{b_{k_1}}$, $L_{b_{k_2}}$ están definidos en el dominio de L_k , y el segmento de curva L_{a_k} se encuentran debajo del eje x_1 , entonces en los subsistemas del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_1(s, x_1, x_2)$ y $f_2(s, x_1, x_2)$, los puntos del segmento de equilibrios L_k se comportan como focos estables, Corolario 78. Por lo tanto existe una vecindad del segmento de equilibrios para el cual las soluciones con condiciones iniciales en esta vecindad tienden a un punto del segmento L_k cuando t tiende a infinito, Teorema 141. Además el retrato de fase se asemeja al del sistema no suave (2.1) cuando existen variedades invariantes y cada punto del segmento del equilibrios L_k se comportan como foco-foco asintóticamente estable; sin embargo en este caso no existen variedades invariantes estables locales que contengan puntos de equilibrios del interior del segmento L_k . En este caso la variación media del radio de oscilación es alta debido a los valores relativamente altos de las componentes reales de sus valores propios, por lo cual el retrato de fase da la falsa impresión de tener los puntos del segmento de equilibrios L_k del tipo nodo-nodo asintóticamente estable, como se puede observar en el retrato de fase correspondiente al parámetro de bifurcación $k = k_{b_{12}}$, Figura B.38.

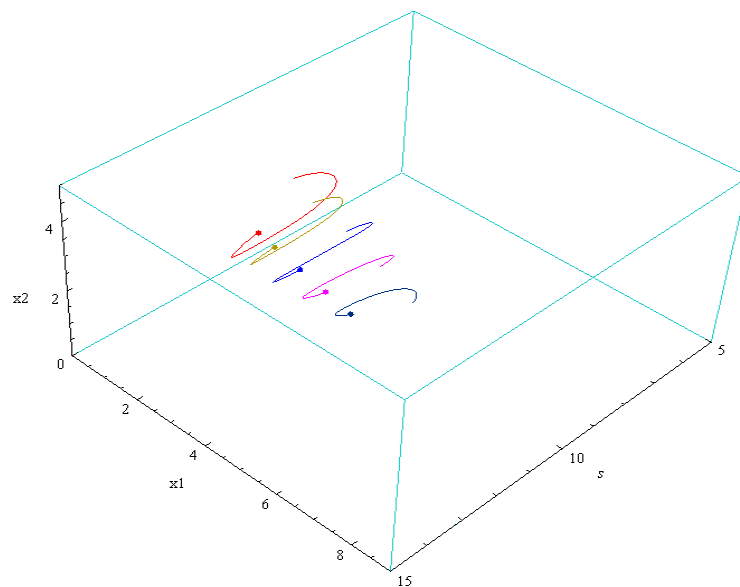


Figura B.38: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b_{12}} = 11.3879$ y campo f_j .

Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales en el octante positivo permanecen en éste, son acotadas, y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios L_k ; por lo tanto el segmento L_k es a un *atractor* del sistema y su cuenca de atracción es el octante positivo. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el k -estratega, el r -estratega y la presa.

Un análisis semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.39, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{b12}$. Como se puede observar en las Figuras B.38 y B.39, los retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ no se puede afirmar que son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k porque que en este caso el Corolario 101 no aplica, ya que no existen variedades invariantes estables para el sistema no suave (2.1) que contengan los puntos del interior del segmento de equilibrios L_k .

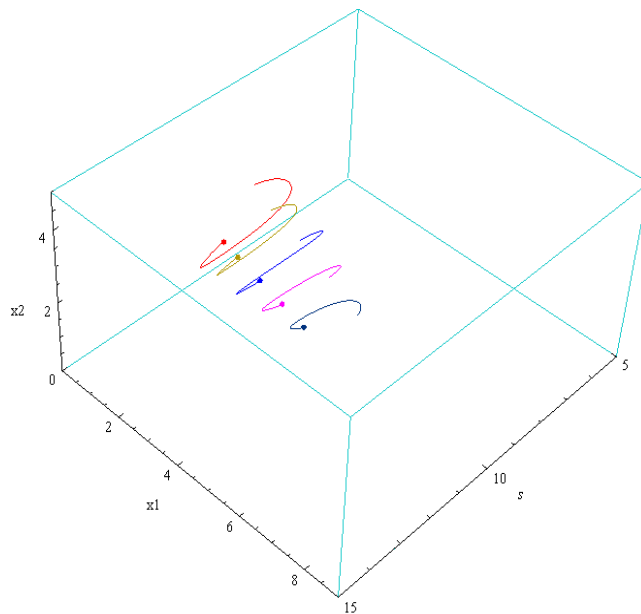


Figura B.39: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b12} = 11.3879$ y campo \tilde{f}_j .

Condición para $k_{a22} = 12.9635$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$L_k \leftrightarrow \xi_2 = 0.14285(9.60167 - 2\xi_1).$$

$$La_{k2} \leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.07142(-2.18451 - 0.12231\xi_1).$$

$$La_{k2} \leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.07142(-4.44089 \times 10^{-16} - 0.403779\xi_1).$$

$$Lb_{k1} \leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.07142\sqrt{28.(40.8691 - 5.8360\xi_1) - (-2.18451 - 0.1223\xi_1)^2}.$$

$$Lb_{k2} \leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.07142\sqrt{28.(25.577 - 2.997\xi_1) - (-4.4408 \times 10^{-16} - 0.40377\xi_1)^2}.$$

$$La_k \leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{-4.44089 \times 10^{-16} - 0.403779\xi_1}{\sqrt{28.(25.5776 - 2.9979\xi_1) - (-4.4408 \times 10^{-16} - 0.40377\xi_1)^2}} + \frac{-2.18451 - 0.12231\xi_1}{\sqrt{28.(40.8691 - 5.8360\xi_1) - (-2.18451 - 0.1223\xi_1)^2}}.$$

$$0 \leq x_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.$$

En la Figura B.40 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$ y La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k .

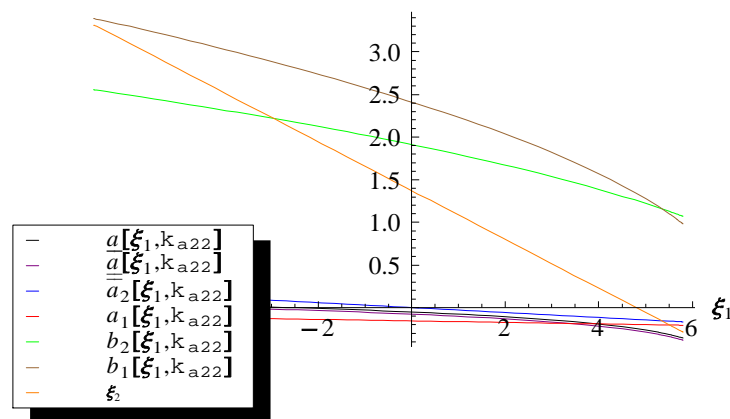


Figura B.40: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k para $k_{a22} = 12.9635$.

Como los segmentos de curva Lb_{k_1} , Lb_{k_2} están definidos en el dominio L_k y el segmento de curva $L_{\underline{a}_k}$ se encuentran debajo del eje x_1 , entonces en los subsistemas del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_1(s, x_1, x_2)$ y $f_2(s, x_1, x_2)$, los puntos del segmento de equilibrios L_k se comportan como focos estables, Corolario 78. Por lo tanto existe una vecindad del segmento de equilibrios para el cual las soluciones con condiciones iniciales en esta vecindad tienden a un punto del segmento L_k cuando t tiende a infinito, Teorema 141. En este caso la variación media del radio de oscilación es baja debido a los valores relativamente bajos de las componentes reales de sus valores propios y las órbitas se desplazan en dirección hacia abajo como los sistemas de tipo elíptico a pesar de que los subsistemas del sistema no suave (2.1) son del tipo hiperbólico $\left(\frac{\partial_s p_2(\lambda, a_2)}{\partial_s p_2(\lambda, a_1)} = 2.28681 > 1; \frac{\partial_s p_1(\lambda, a_2)}{\partial_s p_1(\lambda, a_1)} = 3.18016 > 1\right)$ por la Observación 134 y la parte i) de la Proposición 137, ya que $\left(\frac{\partial_s p_2(\lambda, a_2)}{\partial_s p_2(\lambda, a_1)} - \frac{\partial_s p_1(\lambda, a_2)}{\partial_s p_1(\lambda, a_1)} = -0.8934\right) < 0$, como se puede apreciar en el retrato de fase correspondiente al parámetro de bifurcación $k = k_{a_{22}}$, Figura B.41.

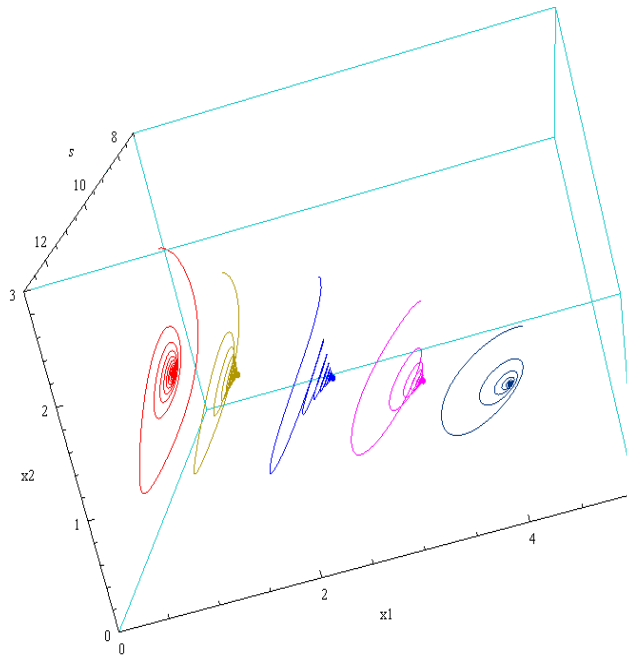


Figura B.41: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a_{22}} = 12.9635$ y campo f_j .

Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales en el octante positivo per-

manecen en éste, son acotadas y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios L_k ; por lo tanto el segmento L_k es a un *atractor* del sistema y su cuenca de atracción es el octante positivo. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el k -estratega, el r -estratega y la presa.

Un análisis semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.42, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{a22}$. Como se puede observar en las Figuras B.41 y B.42, los retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ no se puede afirmar que son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k porque el Corolario 101 no aplica en este caso, ya que no existen variedades invariantes estables para el sistema no suave (2.1) que contengan los puntos del interior del segmento de equilibrios L_k .

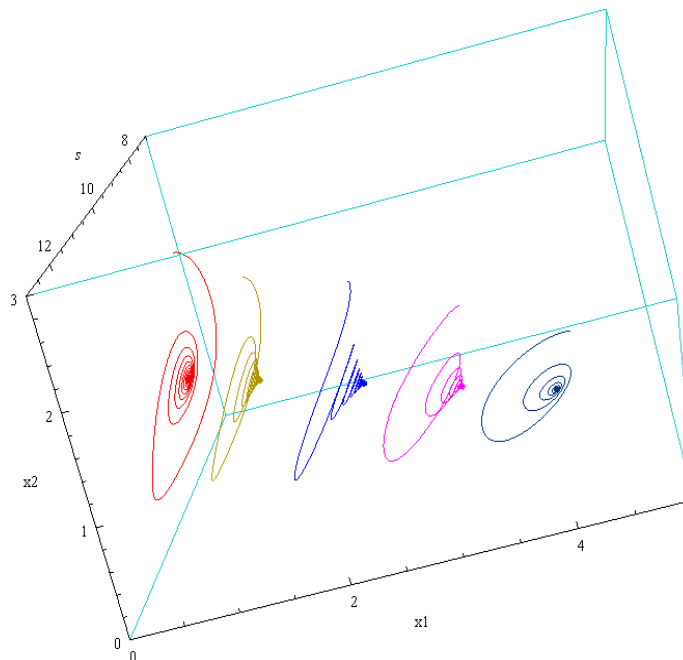


Figura B.42: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a22} = 12.9635$ y campo \tilde{f}_j .

Condición para $k_{a12} = 13.87$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$L_k \leftrightarrow \xi_2 = 0.142857(9.84963 - 2\xi_1)$$

$$La_{k1} \leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.0714286(-0.252384 - 0.12231\xi_1).$$

$$La_{k2} \leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.07142(1.98854 - 0.403779\xi_1).$$

$$Lb_{k1} \leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.07142\sqrt{28.(41.9245 - 5.8360\xi_1) - (-0.25238 - 0.1223\xi_1)^2}.$$

$$Lb_{k2} \leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.07142\sqrt{28.(26.238 - 2.99796\xi_1) - (1.98854 - 0.403779\xi_1)^2}.$$

$$La_k \leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{1.98854 - 0.403779\xi_1}{\sqrt{28.(26.2381 - 2.99796\xi_1) - (1.9885 - 0.40377\xi_1)^2}} + \frac{-0.252384 - 0.12231\xi_1}{\sqrt{28.(41.9245 - 5.8360\xi_1) - (-0.252384 - 0.1223\xi_1)^2}}.$$

$$0 \leq x_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.$$

En la Figura B.43 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k .

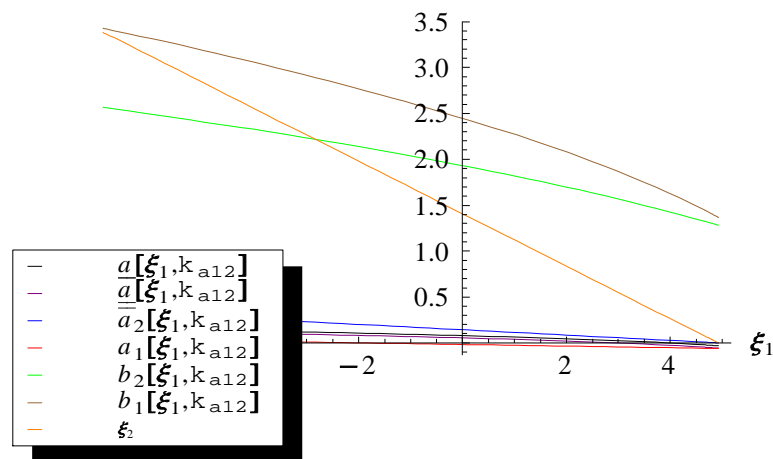


Figura B.43: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , para $k_{a12} = 13.87$.

Como los segmentos de curva Lb_{k_1} , Lb_{k_2} están definidos en el dominio de L_k y los segmentos de curva $L\underline{a}_k$, $L\underline{\underline{a}}_k$ decrecen por el Lema 132. Por lo tanto la intersección de las curva $L\underline{a}_k$ y $L\underline{\underline{a}}_k$ con el eje ξ_1 , puntos $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a_{12}}), \tilde{\xi}_2(k_{a_{12}}))$ y $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a_{12}}), \tilde{\xi}_2(k_{a_{12}}))$ respectivamente, dividen L_k en tres partes (*una de las cuales puede ser vacía*). Existen dos entornos tubulares, un entorno es de los puntos del segmento de equilibrio $\widehat{L}_k \subset L_k$ a la izquierda del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a_{12}}), \tilde{\xi}_2(k_{a_{12}}))$ en el cual las soluciones con condición iniciales en esta vecindad se alejan del segmento L_k cuando t crece, es decir la parte de L_k a la izquierda del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a_{12}}), \tilde{\xi}_2(k_{a_{12}}))$ es un repulsor del sistema; sin embargo las órbitas descienden a lo largo del segmento de equilibrios por la Observación 134 y la parte vi) de la Proposición 137, ya que $\left(\frac{\partial_s p_2(\lambda, a_2)}{\partial_s p_2(\lambda, a_1)} - \frac{\partial_s p_1(\lambda, a_2)}{\partial_s p_1(\lambda, a_1)} = -0.893353\right) < 0$, y alcanzan el otro entorno tubular de los puntos del segmento de equilibrios $\widehat{L}_k \subset L_k$ a la derecha del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a_{12}}), \tilde{\xi}_2(k_{a_{12}}))$ del segmento de equilibrios L_k , en el cual las soluciones con condiciones iniciales en esta vecindad tienden a puntos del segmento L_k cuando t tiende a más infinito, Teorema 141; como se observa en el retrato de fase correspondiente al parámetro de bifurcación $k = k_{a_{12}}$, véase Figura B.44.

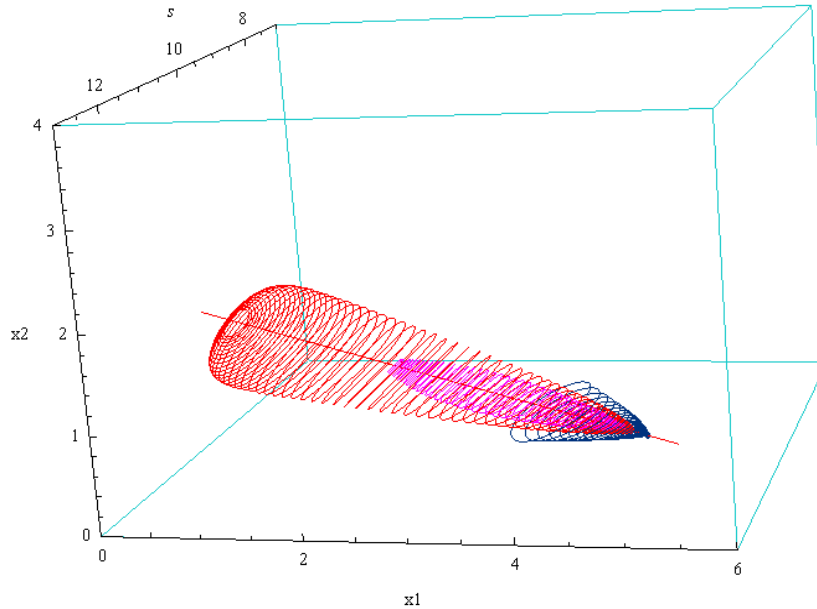


Figura B.44: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a_{12}} = 13.87$ y campo f_j .

Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales en un entorno tubular suficientemente pequeño de los puntos de L_k a la derecha del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a12}), \tilde{\xi}_2(k_{a12}))$, en el octante positivo permanecen en éste, son acotadas y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios L_k ; por lo tanto la parte del segmento L_k a la derecha del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a12}), \tilde{\xi}_2(k_{a12}))$ es a un *atractor* del sistema. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el k -estratega, el r -estratega y la presa. Además la

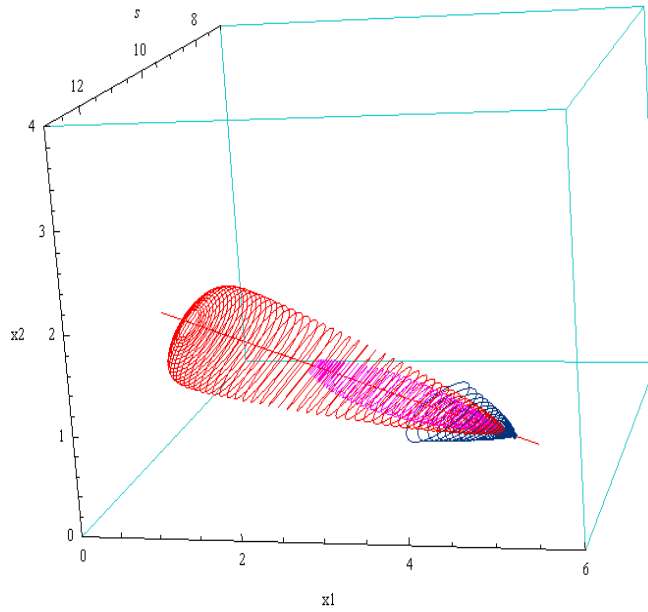


Figura B.45: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a12} = 13.87$ y campo \tilde{f}_j .

pérdida de terreno del k -estratega frente al r -estratega en este caso se debe a la conmutación del sistema no suave (2.1) y no al incremento de la capacidad de carga k . Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales en un entorno tubular suficientemente pequeño de los puntos de L_k a la izquierda del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a12}), \tilde{\xi}_2(k_{a12}))$ se alejan del segmento de equilibrios L_k y tiende a formar un ciclo límite el cual es destruido en este caso por la conmutación del sistema, la cual destruye las variedades invariantes que cruzan transversalmente los puntos de equilibrios del segmento L_k ; por lo tanto la parte del segmento L_k a la izquierda del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a12}), \tilde{\xi}_2(k_{a12}))$ es un *repulsor* del sistema. Los equilibrios en este caso no representan coexistencia estable entre el k -estratega, el r -estratega y la presa, porque los equilibrios del

sistema ahora no son estable desde el punto de vista de Lyapunov; sin embargo las órbitas descienden a lo largo del segmento de equilibrios por la Observación 134, y la parte vi) de la Proposición 137, ya que $\left(\frac{\partial_s p_2(\lambda, a_2)}{\partial_s p_2(\lambda, a_1)} - \frac{\partial_s p_1(\lambda, a_2)}{\partial_s p_1(\lambda, a_1)} = -0.893353\right) < 0$, y alcanzan segmento de equilibrios L_k cuando t tiende a más infinito, significando la oscilación de coexistencia entre las tres especies es posible y la pérdida de terreno del k -estratega frente al r -estratega.

Un análisis semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.45, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{a12}$. Como se puede observar en las Figuras B.44 y B.45, los retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado al campo $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ no se puede afirmar que son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k porque el Corolario 101 no aplica en este caso, ya que no existen variedades invariantes estables para el sistema no suave (2.1) que contengan los puntos del interior del segmento de equilibrios L_k .

Condición para $k_{api} = 13.6$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned}
 L_k &\leftrightarrow \xi_2 = 0.142857(9.7991 - 2.\xi_1). \\
 La_{k1} &\leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.07142(-0.646124 - 0.12231\xi_1). \\
 La_{k2} &\leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.07142(1.5833 - 0.403779\xi_1). \\
 Lb_{k1} &\leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.07142\sqrt{28.(41.7095 - 5.8360\xi_1) - (-0.6461 - 0.1223\xi_1)^2}. \\
 Lb_{k2} &\leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.07142\sqrt{28.(26.1035 - 2.9979\xi_1) - (1.5833 - 0.4037\xi_1)^2}. \\
 La_k &\leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{1.5833 - 0.403779\xi_1}{\sqrt{28.(26.1035 - 2.9979\xi_1) - (1.5833 - 0.4037\xi_1)^2}} \\
 &\quad + \frac{-0.646124 - 0.12231\xi_1}{\sqrt{28.(41.7095 - 5.8360\xi_1) - (-0.646124 - 0.1223\xi_1)^2}}. \\
 0 &\leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.
 \end{aligned}$$

En la Figura B.46 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k .

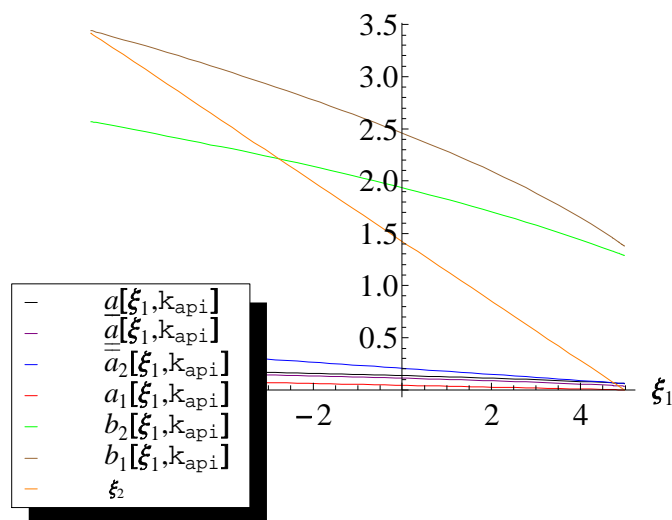


Figura B.46: Gráfica, de la línea de equilibrio L_k de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , para $k_{api} = 13.6$.

Como los segmentos de curva Lb_{k1} , Lb_{k2} están definidas en el dominio de L_k , y los segmentos de curva La_k , $L\bar{a}_k$ decrecen por el Lema 132. Por lo tanto la intersección de las curva $L\bar{a}_k$ y La_k con el eje ξ_1 , puntos $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{api}), \tilde{\xi}_2(k_{api}))$, $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{api}), \tilde{\xi}_2(k_{api}))$ respectivamente, dividen L_k en tres partes (*una de las cuales puede ser vacía*). Existen dos entornos tubulares, el primero es entorno de los puntos del segmento de equilibrios $\hat{L}_k \subset L_k$ a la izquierda del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{api}), \tilde{\xi}_2(k_{api}))$ en el cual las soluciones con condiciones iniciales en esta vecindad se alejan del segmento L_k cuando t crece, es decir la parte de L_k a la izquierda del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{api}), \tilde{\xi}_2(k_{api}))$ es un repulsor del sistema; sin embargo las órbitas descienden a lo largo del segmento de equilibrios por la Observación 134 y la parte vi) de la Proposición 137, ya que $\left(\frac{\partial_s p_2(\lambda, a_2)}{\partial_s p_2(\lambda, a_1)} - \frac{\partial_s p_1(\lambda, a_2)}{\partial_s p_1(\lambda, a_1)} = -0.893353\right) < 0$, y alcanzan el otro entorno tubular, el de los puntos del segmento de equilibrios $\hat{L}_k \subset L_k$ a la derecha del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k), \tilde{\xi}_2(k))$ del segmento de equilibrios L_k , en el cual las soluciones con condiciones iniciales

en esta vecindad tienden a puntos del segmento L_k cuando t tiende a más infinito, Teorema 141, como se observa en el retrato de fase correspondiente al parámetro de bifurcación $k = k_{api}$, Figura B.47.

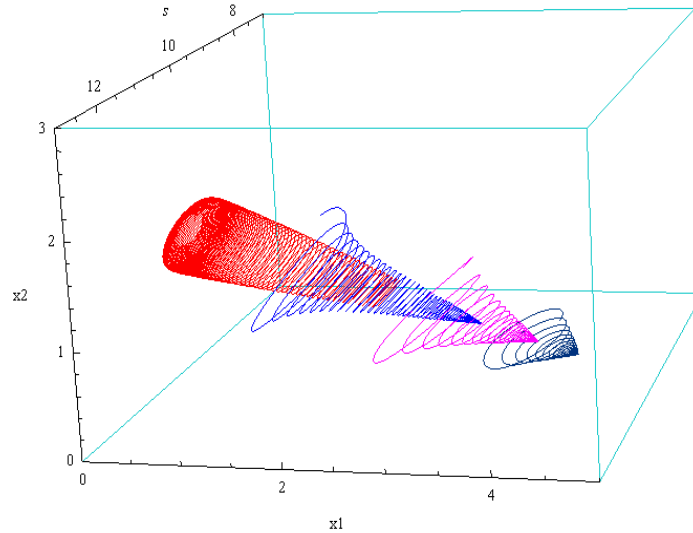


Figura B.47: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{api} = 13.6$ y campo f_j .

Por consiguiente las trayectorias del sistema con condiciones iniciales en un entorno tubular suficientemente pequeño de los puntos de L_k a la derecha del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{api}), \tilde{\xi}_2(k_{api}))$, en el octante positivo permanecen en éste, son acotadas y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios L_k ; por lo tanto la parte del segmento L_k a la derecha del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{api}), \tilde{\xi}_2(k_{api}))$ es a un *atractor* del sistema. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el k -estratega, el r -estratega. Además de nuevo la pérdida de terreno del k -estratega frente al r -estratega se debe a la conmutación del sistema no suave (2.1) y no al incremento de la capacidad de carga k . Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales en un entorno tubular suficientemente pequeño de los puntos de L_k a la izquierda del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{api}), \tilde{\xi}_2(k_{api}))$, en el octante positivo se alejan del segmento de equilibrios L_k y tienden a formar un ciclo límite el cual es destruido por la conmutación del sistema, la cual destruye las variedades invariantes que intersectan transversalmente los puntos de equilibrios del segmento L_k ; por lo tanto la parte del segmento L_k a la izquierda del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{api}), \tilde{\xi}_2(k_{api}))$ es a un *repulsor* del sistema. Los equi-

librios en este caso no representan coexistencia estable entre el k -estratega, el r -estratega, y la presa, porque los equilibrios del sistema ahora no son estable desde el punto de vista de Lyapunov; sin embargo las órbitas descienden a lo largo del segmento de equilibrios por la Observación 134 y la parte vi) de la Proposición 137, ya que $\left(\frac{\partial_s p_2(\lambda, a_2)}{\partial_s p_2(\lambda, a_1)} - \frac{\partial_s p_1(\lambda, a_2)}{\partial_s p_1(\lambda, a_1)} = -0.893353\right) < 0$, y alcanzan segmento de equilibrios L_k cuando t tiende a más infinito, significando la oscilación de coexistencia entre las tres especies es posible y la pérdida de terreno del k -estratega frente al r -estratega.

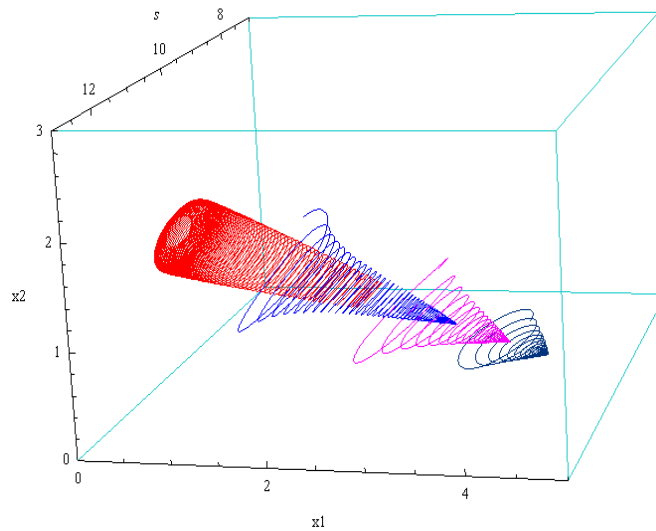


Figura B.48: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{api} = 13.6$ y campo \tilde{f}_j .

Un análisis semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.48, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{api}$. Como se puede observar en las Figuras B.47 y B.48, los retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ no se puede afirmar que son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k porque el Corolario 101 no aplica en este caso, ya que no existen variedades invariantes estables para el sistema no suave (2.1) que contengan los puntos del interior del segmento de equilibrios L_k .

Condición para $k_{a21} = 14.0964$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$L_k \leftrightarrow \xi_2 = 0.142857(9.88202 - 2.\xi_1).$$

$$La_{k1} \leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.0714286(-1.776367 \times 10^{-15} - 0.12231\xi_1).$$

$$La_{k2} \leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.0714286(2.24829 - 0.403779\xi_1).$$

$$Lb_{k1} \leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.0714\sqrt{28.(42.062 - 5.836\xi_1) - (-1.776 \times 10^{-15} - 0.1223\xi_1)^2}.$$

$$Lb_{k2} \leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.07142\sqrt{28.(26.3244 - 2.9979\xi_1) - (2.24829 - 0.4037\xi_1)^2}.$$

$$La_k \leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{2.24829 - 0.403779\xi_1}{\sqrt{28.(26.3244 - 2.9979\xi_1) - (2.24829 - 0.40377\xi_1)^2}} + \frac{-1.776367 \times 10^{-15} - 0.12231\xi_1}{\sqrt{28.(42.0624 - 5.8360\xi_1) - (-1.7763 \times 10^{-15} - 0.1223\xi_1)^2}}.$$

$$0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.$$

En la Figura B.49 se presenta la línea de equilibrios L_k y los trozos de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k .

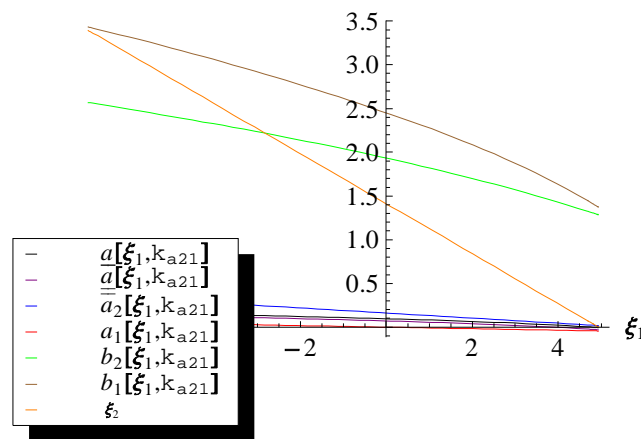


Figura B.49: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k para $k_{a21} = 14.0964$.

Como los segmentos de curva Lb_{k_1} , Lb_{k_2} están definidas en el dominio de L_k , y los segmentos de curva $L\underline{a}_k$, $L\underline{\underline{a}}_k$ decrecen por el Lema 132. Por lo tanto la intersección de las curva $L\underline{\underline{a}}_k$ y $L\underline{a}_k$ con el eje ξ_1 , puntos $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a21}), \tilde{\xi}_2(k_{a21}))$ y $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a21}), \tilde{\xi}_2(k_{a21}))$, respectivamente, dividen L_k en tres partes (*una de las cuales puede ser vacía*). Existen dos entornos tubulares, el primero entorno tubular es de los puntos del segmento de equilibrios $\widehat{L}_k \subset L_k$ a la izquierda del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a21}), \tilde{\xi}_2(k_{a21}))$ en el cual las soluciones con condiciones iniciales en esta vecindad se alejan del segmento L_k cuando t crece, es decir la parte de L_k a la izquierda del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a21}), \tilde{\xi}_2(k_{a21}))$ es un repulsor del sistema; sin embargo las órbitas descienden a lo largo del segmento de equilibrios por la Observación 134 y la parte vi) de la Proposición 137, ya que $\left(\frac{\partial_s p_2(\lambda, a_2)}{\partial_s p_2(\lambda, a_1)} - \frac{\partial_s p_1(\lambda, a_2)}{\partial_s p_1(\lambda, a_1)} = -0.893353 \right) < 0$, y alcanzan el otro entorno tubular, el de los puntos del segmento de equilibrios $\widehat{L}_k \subset L_k$ a la derecha del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a21}), \tilde{\xi}_2(k_{a21}))$ del segmento de equilibrios L_k , en el cual las soluciones con condiciones iniciales en esta vecindad tienden a puntos del segmento L_k cuando t tiende a más infinito, Teorema 141, como se observa en el retrato de fase correspondiente al parámetro de bifurcación $k = k_{a21}$, Figura B.50. Dado que crece la inestabilidad del segmento de equilibrios con el parámetro de bifurcación k , se observa una mayor oscilación de las órbitas en su decaimiento a lo largo del segmento de equilibrios con respecto al caso anterior. Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales en un entorno tubular suficientemente pequeño de los puntos de L_k a la derecha del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a21}), \tilde{\xi}_2(k_{a21}))$, en el octante positivo permanecen en éste, son acotadas y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios L_k ; por lo tanto la parte del segmento L_k a la derecha del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a21}), \tilde{\xi}_2(k_{a21}))$ es a un *atractor* del sistema. Los equilibrios en este caso re-presentan coexistencia estable entre el *k-estratega*, el *r-estratega*. Además la pérdida de terreno del *k-estratega* frente al *r-estratega* se debe a la conmutación del sistema no suave (2.1) y no al incremento de la capacidad de carga k . Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales en un entorno tubular suficientemente pequeño de los puntos de L_k , a la izquierda del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a21}), \tilde{\xi}_2(k_{a21}))$, en el octante positivo se alejan del segmento de equilibrios L_k y tiende a formar un ciclo límite, el cual es destruido en este caso por la conmutación del sistema, la cual destruye las variedades invariantes

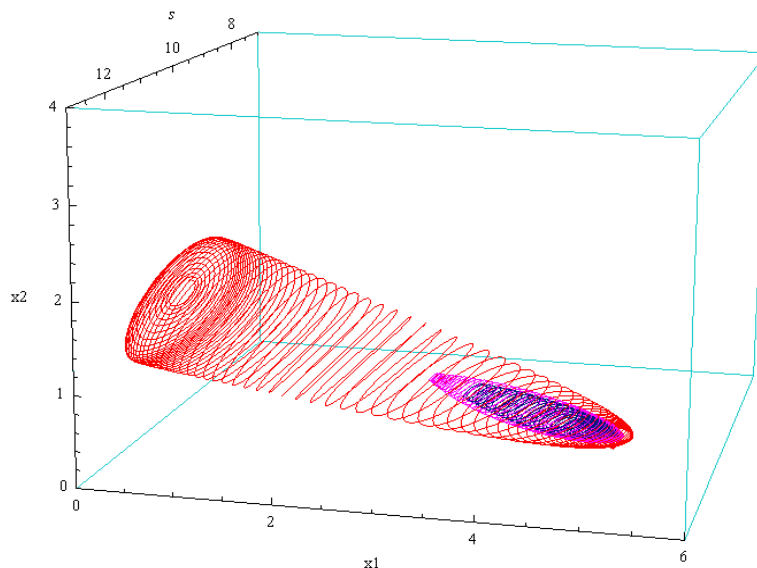


Figura B.50: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a21} = 14.0964$ y campo f_j .

que cruzan transversalmente los puntos de equilibrios del segmento L_k ; por lo tanto la parte del segmento L_k a la izquierda del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a21}), \tilde{\xi}_2(k_{a21}))$ es a un *repulsor* del sistema. Los equilibrios en este caso no representan coexistencia estable entre el *k-estratega*, el *r-estratega* y la presa, porque los equilibrios del sistema ahora no son estable desde el punto de vista de Lyapunov; sin embargo las órbitas descienden a lo largo del segmento de equilibrios por la Observación 134 y la parte vi) de la Proposición 137, ya que $\left(\frac{\partial_s p_2(\lambda, a_2)}{\partial_s p_2(\lambda, a_1)} - \frac{\partial_s p_1(\lambda, a_2)}{\partial_s p_1(\lambda, a_1)} = -0.893353\right) < 0$, y alcanzan el otro entorno tubular de los puntos del segmento de equilibrios $\hat{\tilde{L}}_k \subset L_k$ a la derecha del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a21}), \tilde{\xi}_2(k_{a21}))$ del segmento de equilibrios L_k , en el cual las soluciones con condiciones iniciales en esta vecindad tienden a puntos del segmento L_k cuando t tiende a más infinito, significando la oscilación de coexistencia entre las tres especies es posible y la pérdida de terreno del *k-estratega* frente al *r-estratega*.

Un análisis semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.51, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{a21}$. Como se puede observar en las Figuras B.50 y B.51, los retratos de fase del

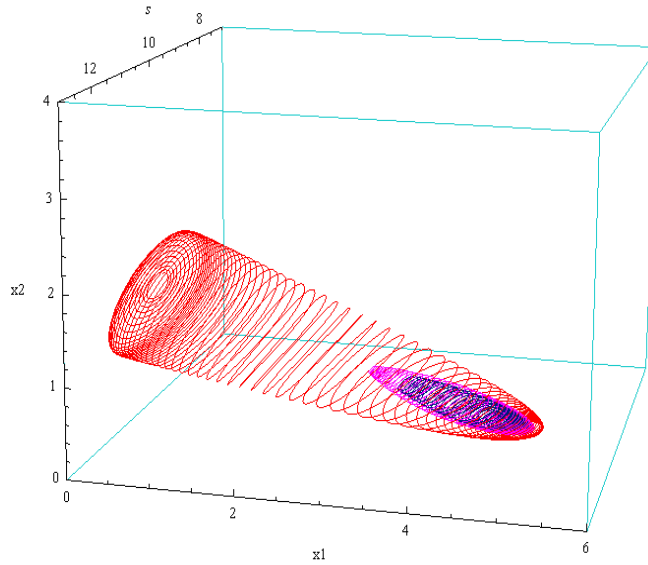


Figura B.51: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a21} = 14.0964$ y campo \tilde{f}_j .

sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ no se puede afirmar que son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k porque el Corolario 101 no aplica en este caso, ya que no existen variedades invariantes estables para el sistema no suave (2.1) que contengan los puntos del interior del segmento de equilibrios L_k .

Condición para $k_{a11} = 15.1131$

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned}
 L_k &\leftrightarrow \xi_2 = 0.142857(9.96019 - 2\xi_1). \\
 La_{k1} &\leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.07142(0.609115 - 0.12231\xi_1). \\
 La_{k2} &\leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.07142(2.87519 - 0.403779\xi_1). \\
 Lb_{k1} &\leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.07142\sqrt{28.(42.3951 - 5.8360\xi_1) - (0.6091 - 0.1223\xi_1)^2}. \\
 Lb_{k2} &\leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.07142\sqrt{28.(26.5326 - 2.9979\xi_1) - (2.8751 - 0.4037\xi_1)^2}.
 \end{aligned}$$

$$La_k \leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{2.87519 - 0.403779\xi_1}{\sqrt{28.(26.5326 - 2.9979\xi_1) - (2.8751 - 0.4037\xi_1)^2}} + \frac{0.609115 - 0.12231\xi_1}{\sqrt{28.(42.395 - 5.8360x_1) - (0.609115 - 0.12231\xi_1)^2}}.$$

$$0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.$$

En la Figura B.52 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k .

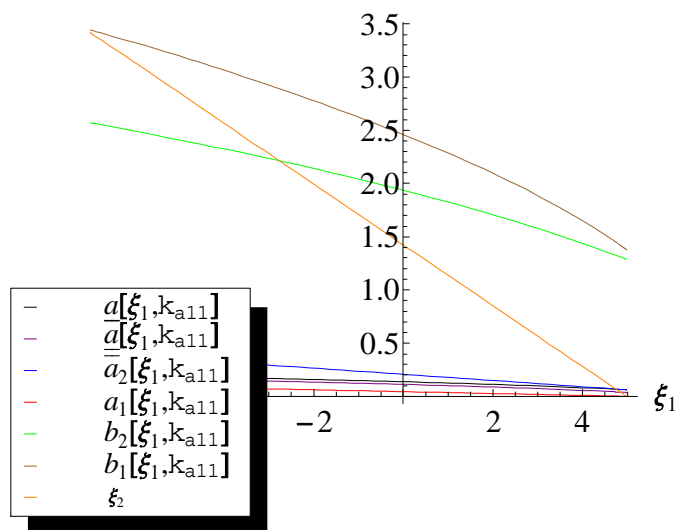


Figura B.52: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k con $k_{a11} = 15.1131$.

Como los segmentos de curva Lb_{k1} , Lb_{k2} están definidas en el dominio de L_k y los segmentos de curva La_k , $L\underline{a}_k$ se encuentran encima del eje ξ_1 . Por lo tanto existe un entorno tubular de L_k en el cual las soluciones con condiciones iniciales en esta vecindad se alejan del segmento L_k cuando t crece, es decir L_k es un repulsor del sistema, Teorema 141. Sin embargo las órbitas descienden a lo largo del segmento de equilibrios por la Observación 134 y la parte vi) de la Proposición 137, ya que $\left(\frac{\partial_s p_2(\lambda, a_2)}{\partial_s p_2(\lambda, a_1)} - \frac{\partial_s p_1(\lambda, a_2)}{\partial_s p_1(\lambda, a_1)} = -0.893353\right) < 0$, y alcanzan el plano coordenado $x_2 = 0$, el cual es una variedad invariante del sistema, donde forma un ciclo límite el cual

es orbitalmente asintóticamente estable en desarrollo de la bifurcación de Hopf-Zou & Küpper no suave de acuerdo con el Teorema 121; significando la oscilación de coexistencia entre el *r-estratega* y la presa, como se observa en el retrato de fase correspondiente al parámetro de bifurcación $k = k_{a11}$, Figura B.53.

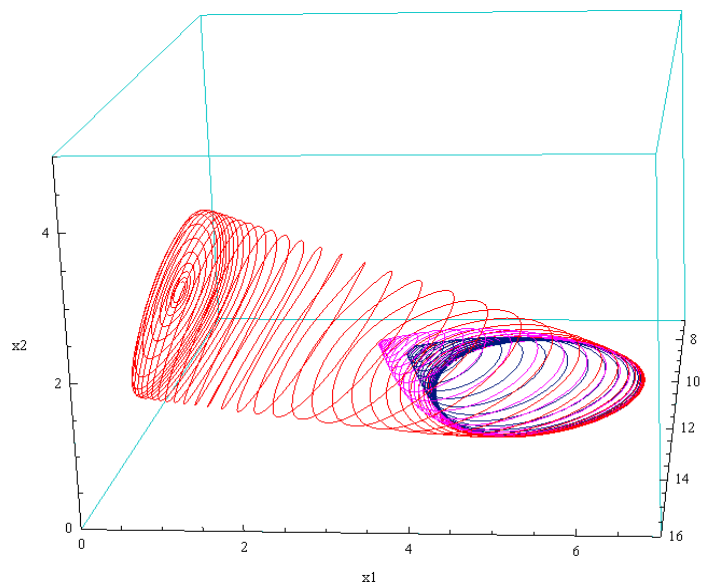


Figura B.53: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a11} = 15.1131$ y campo f_j .

Un análisis semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado al campo aproximado $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.54, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{a11}$. Como se puede observar en las Figuras B.53 y B.54, los retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ no se puede afirmar que son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k porque el Corolario 101 no aplica en este caso, ya que no existen variedades invariantes estables para el sistema no suave (2.1) que contengan los puntos del interior del segmento de equilibrios L_k .

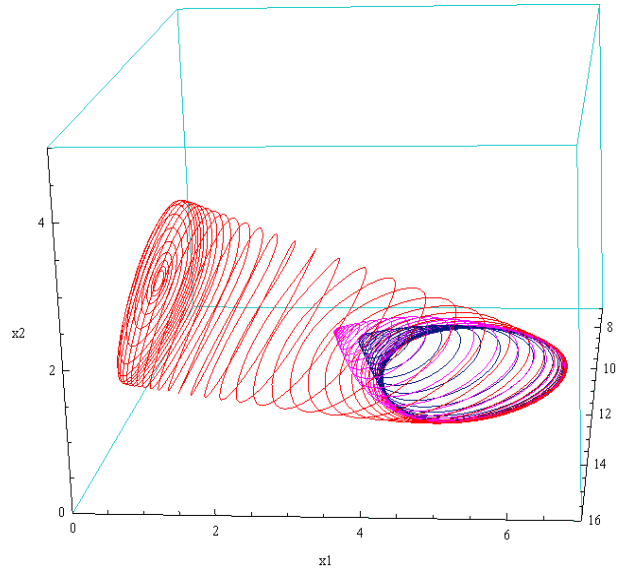


Figura B.54: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a11} = 15.1131$ y campo \tilde{f}_j .

B.4 Modelo con variedad invariante del tipo 1B

Los siguientes son los parámetros del modelo natural:

Parámetros de la respuesta funcional $p_1(s, a)$

$$\begin{aligned} A_1 &= 0.3; & B_1 &= 1; & D_1 &= 6; & c_1 &= 1; \\ d_{11} &= 0.4; & d_{21} &= 0.7; & F_1 &= 0; & m_1 &= 1; \\ n_1 &= 0; & q_1 &= 0.3; & r_1 &= 0; & u_1 &= 0; \\ v_1 &= 0; & \lambda &= 9; & \gamma &= 1; & & \dots \end{aligned}$$

Parámetros de la respuesta funcional $p_3(s, a)$

$$\begin{aligned} A_2 &= 0.1; & B_2 &= 1; & D_2 &= 6; & c_2 &= 1; \\ d_{12} &= 0.4; & d_{22} &= 0.7; & F_2 &= 0; & m_2 &= 1; \\ n_2 &= 0.9690184897913586; & q_2 &= 0.6; & r_2 &= 4; & u_2 &= 0; \\ v_2 &= 0; & \lambda &= 9; & \gamma &= 1; & & \dots \end{aligned}$$

La resistencia ambiental g de la presa y la respuesta funcional p de los predadores

adoptan la forma:

$$\begin{aligned}
 p(s, a) &= \begin{cases} 0.042857 + \frac{0.3s}{(0.3s+a)}, & \text{si } s \leq \lambda \\ 0.042857 + \frac{2.7}{(2.7+a)} - \frac{5.4}{(5.4+a)} - \frac{0.840773}{6+a^4} + \frac{0.1s^{0.969018}}{6+a^4} + \frac{0.6s}{a+0.6s}, & \text{si } s > \lambda, \end{cases} \\
 g(s, k) &= 1 - \left(\frac{s}{k}\right).
 \end{aligned}$$

La ecuación (B.2) para a_1 es de la forma:

$$\begin{aligned}
 0 &= -0.357143 + \frac{2.7}{(2.7+a_1)} \\
 a_1 &= 4.86.
 \end{aligned}$$

La ecuación (B.2) para a_2 es de la forma:

$$\begin{aligned}
 0 &= -0.657143 + \frac{2.7}{(2.7+a_2)} \\
 a_2 &= 1.4087.
 \end{aligned}$$

Además, se muestran las gráficas y las ecuaciones paramétricas de la curvas L_k , $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k siguientes

$$\begin{aligned}
 L_k &= \{(s, \xi_1, x_2) : p(\lambda, a_1)\xi_{11} + p(\lambda, a_2)\xi_{12} = \gamma\lambda g(\lambda, k); \\
 &\quad \lambda, \xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0\}, \tag{B.12}
 \end{aligned}$$

$$La_{k,j} = \{(s, \xi_1, a_j(\xi_1, k)) : s = \lambda, 0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}\}, \tag{B.13}$$

$$Lb_{k,j} = \{(s, \xi_1, b_j(\xi_1, k)) : s = \lambda, 0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}\}, \tag{B.14}$$

$$\begin{aligned}
 La_k &= \{(s, \xi_1, a(\xi_1, k)) : a(\xi_1, k) = \frac{a_1(\xi_1, k)}{b_1(\xi_1, k)} + \frac{a_2(\xi_1, k)}{b_2(\xi_1, k)}; \\
 &\quad s = \lambda, 0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}\}, \tag{B.15}
 \end{aligned}$$

así como los retratos de fase del sistema para los distintos valores del parámetro de bifurcación k_{bij} y k_{aij} para $i, j = 1, 2$, seleccionados con el propósito de mostrar los cambios cualitativos que ocurren en el sistema. Los parámetros de bifurcación k_{bij} y k_{aij} para $i, j = 1, 2$, están definidos por las ecuaciones

$$\begin{aligned}
 K_{bij}(k_{bij}) &= \gamma\lambda g(\lambda, k)\partial_s p_j(\lambda, a_i) - \frac{1}{4}\gamma^2 \left(\lambda\partial_s(\lambda, k) + g(\lambda, k) \left(1 - \frac{\lambda\partial_s p_j(\lambda, a_i)}{p_j(\lambda, a_i)} \right) \right)^2 = 0, \\
 K_{aij}(k_{aij}) &= -\lambda p_j(\lambda, a_i)\partial_s g(\lambda, k) + g(\lambda, k) (\lambda\partial_s p_j(\lambda, a_i) - p_j(\lambda, a_i)) = 0,
 \end{aligned}$$

por las Definiciones 37, 41 y la proposición 39. Los valores obtenidos para los puntos de bifurcación k_{bij} y k_{aij} en cada uno de los subsistemas son los siguientes:

$$\begin{aligned}
 K_{b21}(k) &= 0.225306 \left(1 - \frac{9}{k}\right) - \frac{1}{4} \left(0.678134 \left(1 - \frac{9}{k}\right) - \frac{9}{k}\right)^2 = 0. \\
 k_{b21} &= 12.6908. \\
 K_{b11}(k) &= 0.229592 \left(1 - \frac{9}{k}\right) - \frac{1}{4} \left(0.42602 \left(1 - \frac{9}{k}\right) - \frac{9}{k}\right)^2 = 0. \\
 k_{b11} &= 13.2487. \\
 K_{a21}(k) &= -0.474694 \left(1 - \frac{9}{k}\right) + \frac{6.3}{k} = 0. \\
 k_{a21} &= 22.2717. \\
 K_{a11}(k) &= -0.170408 \left(1 - \frac{9}{k}\right) + \frac{3.6}{k} = 0. \\
 k_{a11} &= 30.1257.
 \end{aligned}$$

subsistema 2

$$\begin{aligned}
 K_{b22}(k) &= 0.246072 \left(1 - \frac{9}{k}\right) - \frac{1}{4} \left(0.648469 \left(1 - \frac{9}{k}\right) - \frac{9}{k}\right)^2 = 0. \\
 k_{b22} &= 12.5911. \\
 K_{b12}(k) &= 0.250752 \left(1 - \frac{9}{k}\right) - \frac{1}{4} \left(0.373119 \left(1 - \frac{9}{k}\right) - \frac{9}{k}\right)^2 = 0. \\
 k_{b12} &= 13.1844. \\
 K_{a22}(k) &= -0.453928 \left(1 - \frac{9}{k}\right) + \frac{6.3}{k} = 0. \\
 k_{a22} &= 22.8788. \\
 K_{a12}(k) &= -0.149248 \left(1 - \frac{9}{k}\right) + \frac{3.6}{k} = 0. \\
 k_{a12} &= 33.121.
 \end{aligned}$$

Condición para $k_{b22} = 12.5911$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned}
 L_k &\leftrightarrow \xi_2 = 1.42857(2.5669 - 0.4\xi_1). \\
 La_{k1} &\leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.7142(-0.364965 - 0.00784354\xi_1). \\
 La_{k2} &\leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.7142(-0.370887 - 0.00856644\xi_1). \\
 Lb_{k1} &\leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.7142\sqrt{2.8(0.0449 + 0.00013\xi_1) - (-0.36496 - 0.00784\xi_1)^2}. \\
 Lb_{k2} &\leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.7142\sqrt{2.8(0.0491 + 0.00014\xi_1) - (-0.3708 - 0.00856\xi_1)^2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 La_k \leftrightarrow a(\xi_1, k) &= \frac{-0.370887 - 0.008566\xi_1}{\sqrt{2.8(0.0491276 + 0.000145\xi_1) - (-0.37088 - 0.00856\xi_1)^2}} \\
 &+ \frac{-0.364965 - 0.00784354\xi_1}{\sqrt{2.8(0.0449818 + 0.0001333\xi_1) - (-0.364965 - 0.00784\xi_1)^2}}. \\
 0 \leq \xi_1 &\leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.
 \end{aligned}$$

En la Figura B.55 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k .

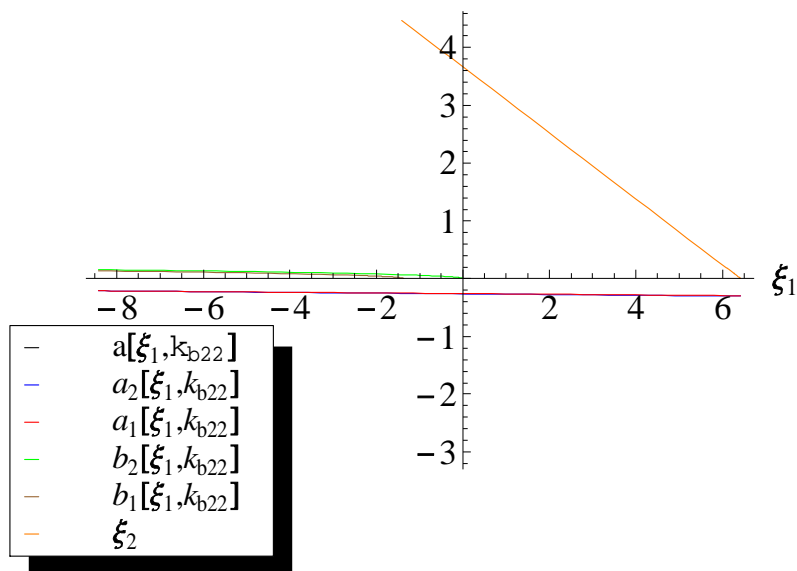


Figura B.55: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , para $k_{b22} = 12.5911$.

Como los segmentos Lb_{k1} , Lb_{k2} no están definidos debajo de L_k , y los segmentos La_{k1} , La_{k2} se encuentran debajo del eje ξ_1 , entonces los puntos del segmento de equilibrios L_k se comportan como nodos estables en cada subsistema del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$. Por lo tanto los puntos del segmento de equilibrios L_k se comportan como equilibrios del tipo *nodo-nodo* asintóticamente estable en el sistema no suave (2.1) como se observa en el retrato de fase de la Figura B.56. Las

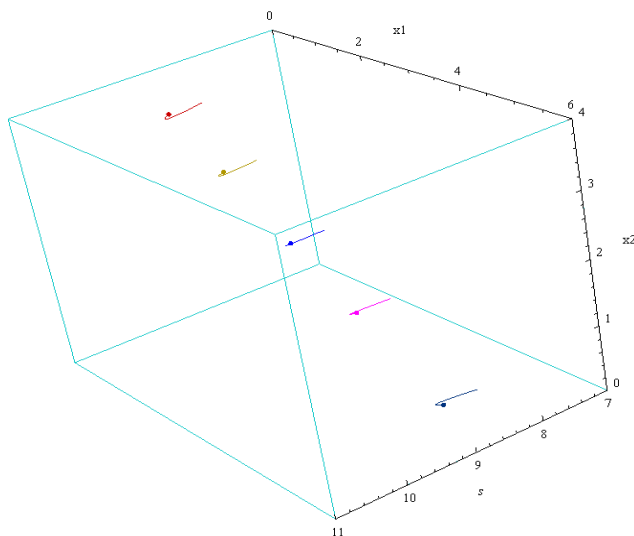


Figura B.56: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b22} = 12.5911$ y campo f_j .

trayectorias del sistema con condiciones iniciales en el octante positivo permanecen en éste, son acotadas y tienden asintóticamente hacia la línea de equilibrios L_k ; por lo cual el segmento L_k es a un *atractor* del sistema y su cuenca de atractividad es el octante positivo, Teorema 114. Los equilibrios en este caso representan coexistencia

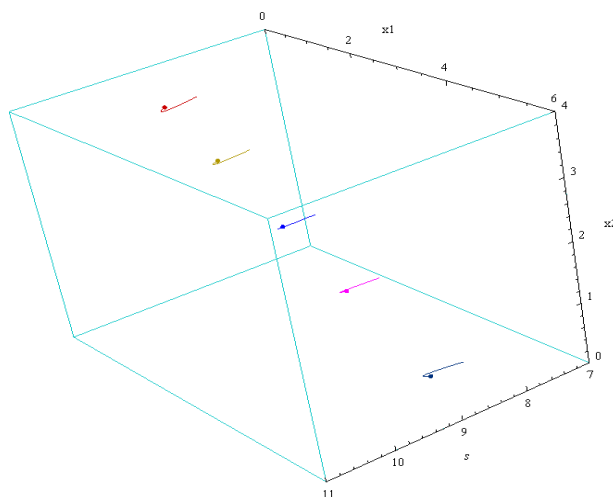


Figura B.57: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b22} = 12.5911$ y campo \tilde{f}_j .

Un análisis semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.57, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{b22}$. Como se observa en las Figuras B.56 y B.57, los retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k , como se muestra en el Corolario 101.

Condición para $k_{b21} = 12.6908$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned}
 L_k &\leftrightarrow \xi_2 = 1.42857(2.5669 - 0.4\xi_1). \\
 La_{k1} &\leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.714286(-0.364965 - 0.00784354\xi_1). \\
 La_{k2} &\leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.714286(-0.370887 - 0.00856644\xi_1). \\
 Lb_{k1} &\leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.7142\sqrt{2.8(0.0449 + 0.000133\xi_1) - (-0.3649 - 0.00784\xi_1)^2}. \\
 Lb_{k2} &\leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.71428\sqrt{2.8(0.0491 + 0.000145\xi_1) - (-0.3709 - 0.00856\xi_1)^2}. \\
 La_k &\leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{-0.370887 - 0.00856\xi_1}{\sqrt{2.8(0.04912 + 0.000145\xi_1) - (-0.37088 - 0.00856\xi_1)^2}} \\
 &\quad + \frac{-0.364965 - 0.00784354\xi_1}{\sqrt{2.8(0.04498 + 0.000133\xi_1) - (-0.364965 - 0.007843\xi_1)^2}}. \\
 0 &\leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.
 \end{aligned}$$

En la Figura B.58 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k . Como el segmento de curva Lb_{k1} no está definido en el dominio de L_k y el segmento de curva La_{k1} se encuentran debajo del eje ξ_1 , entonces en el subsistema del sistema no suave (2.1) asociado al campo $f_1(s, x_1, x_2)$ los puntos del segmento de equilibrios L_k sobre las variedades invariantes que los contienen se comportan como nodos estables, Corolario 78. También La_{k2} se encuentran debajo del eje ξ_1 en el dominio de L_k , y el segmento de curva Lb_{k2} intersecta el eje ξ_1 en

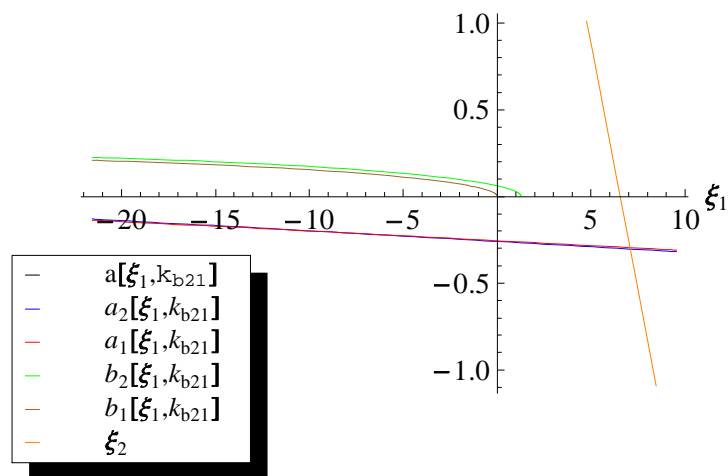


Figura B.58: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , para $k_{b21} = 12.6908$.

el punto $\bar{\xi}_{12}(k_{b21})$ por lo cual el punto $(\lambda, \bar{\xi}_{12}(k_{b21}), \bar{\xi}_{22}(k_{b21}))$ divide L_k en dos partes (una de las cuales puede ser vacía). Por consiguiente en el subsistema del sistema no suave (2.1) asociado al campo $f_2(s, x_1, x_2)$ los puntos de L_k a la izquierda del punto $(\lambda, \bar{\xi}_{12}(k_{b21}), \bar{\xi}_{22}(k_{b21}))$ son focos estables, los puntos a la derecha son nodos estables. En conclusión los puntos del segmento de equilibrios L_k a la izquierda de $(\lambda, \bar{\xi}_{12}(k_{b21}), \bar{\xi}_{22}(k_{b21}))$ se comportan como puntos del tipo nodo-foco estable, y los puntos del segmento de equilibrios L_k a la derecha de $(\lambda, \bar{\xi}_{12}(k_{b21}), \bar{\xi}_{22}(k_{b21}))$ se comportan como puntos del tipo nodo-nodo asintóticamente estable, en el sistema no suave (2.1) sobre la variedad invariante local que los contiene, Teorema 114, como se puede observar en el retrato de fase de la Figura B.59. El retrato de fase de la Figura B.59, luce semejante al retrato de fase al de la Figura B.56, sin embargo son geoméricamente no equivalentes. Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales en el octante positivo permanecen en éste, son acotadas y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios L_k , por lo cual el segmento L_k es a un *atractor* del sistema y su cuenca de atractividad es el octante positivo. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el *k-estratega*, el *r-estratega* y la presa.

Un análisis semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los

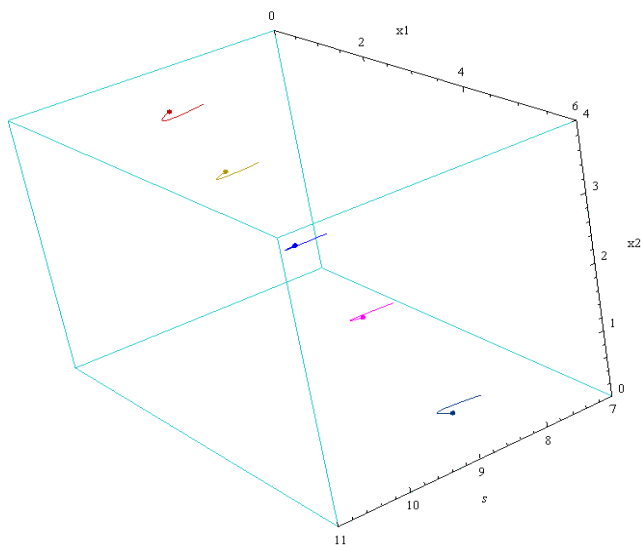


Figura B.59: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b21} = 12.6908$ y campo f_j .

campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.60, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{b21}$. Como se puede observar en las Figuras B.59 y B.60, los retratos de fase

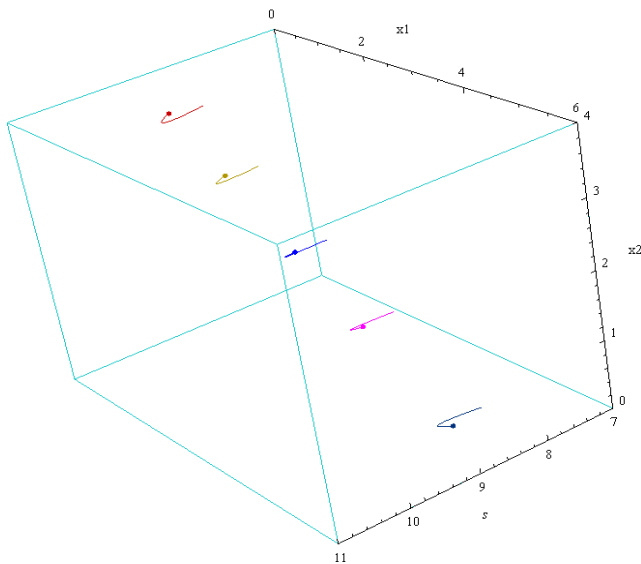


Figura B.60: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b21} = 12.6908$ y campo \tilde{f}_j .

del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k , como se muestra en el Corolario 101.

Condición para $k_{b12} = 13.1844$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned}
 L_k &\leftrightarrow \xi_2 = 1.42857(2.85637 - 0.4\xi_1). \\
 La_{k1} &\leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.714286(-0.327182 - 0.00784354\xi_1). \\
 La_{k2} &\leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.714286(-0.333773 - 0.00856644\xi_1). \\
 Lb_{k1} &\leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.7142\sqrt{2.8(0.0500 + 0.00013x_1) - (-0.32718 - 0.0078\xi_1)^2}. \\
 Lb_{k2} &\leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.7142\sqrt{2.8(0.0546 + 0.00014\xi_1) - (-0.3337 - 0.0085\xi_1)^2}. \\
 La_k &\leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{-0.333773 - 0.008566\xi_1}{\sqrt{2.8(0.05466 + 0.000145x_1) - (-0.3337 - 0.0085\xi_1)^2}} \\
 &\quad + \frac{-0.327182 - 0.00784354\xi_1}{\sqrt{2.8(0.050054 + 0.0001333\xi_1) - (-0.32718 - 0.00784\xi_1)^2}}. \\
 0 &\leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.
 \end{aligned}$$

En la Figura B.61 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k . Como el segmento de curva Lb_{k2} está definido en el dominio de L_k y el segmento de curva La_{k2} se encuentran debajo del eje ξ_1 , entonces en el subsistema del sistema no suave (2.1) asociado al campo $f_2(s, x_1, x_2)$, los puntos del segmento de equilibrios L_k restringidos a la variedades invariantes que los contienen se comportan como focos estables. Además La_{k1} se encuentran debajo del eje ξ_1 en el dominio de L_k , y el segmento de curva Lb_{k1} intersecta el eje ξ_1 en el punto $\bar{\xi}_{11}(k_{b12})$ por lo cual el punto $(\lambda, \bar{\xi}_{11}(k_{b12}), \bar{\xi}_{21}(k_{b12}))$ divide L_k en dos partes (*una de las cuales puede ser vacía*). Por consiguiente en el subsistema del sistema no suave (2.1) asociado al campo $f_1(s, x_1, x_2)$ los puntos de L_k a la izquierda del punto $(\lambda, \bar{\xi}_{11}(k_{b12}), \bar{\xi}_{21}(k_{b12}))$ son focos estables, los puntos a la derecha son nodos estables,

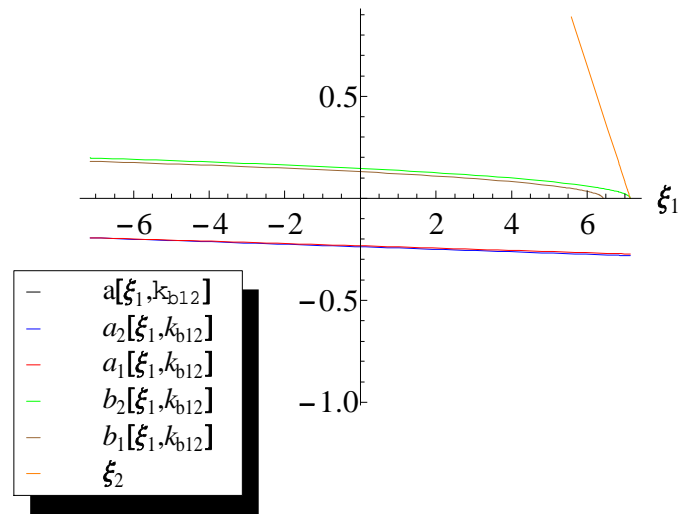


Figura B.61: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k para $k_{b12} = 13.1844$.

Corolario 78. En conclusión cada punto del segmento de equilibrios L_k a la izquierda de el punto $(\lambda, \bar{\xi}_{11}(k_{b12}), \bar{\xi}_{21}(k_{b12}))$ se comporta como foco-foco estable y cada punto del segmento de equilibrios L_k a la derecha del punto $(\lambda, \bar{\xi}_{11}(k_{b12}), \bar{\xi}_{21}(k_{b12}))$ se comporta como foco-nodo asintóticamente estable en el sistema no suave (2.1) sobre la

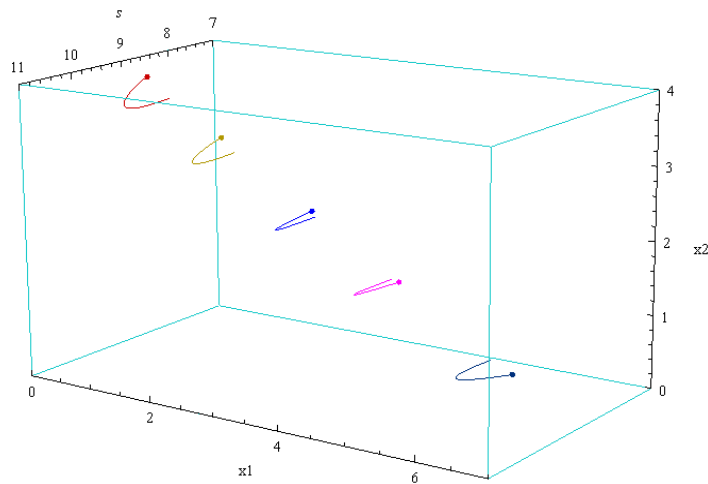


Figura B.62: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b12} = 13.1844$ y campo f_j .

variedad invariante estable que los contiene, Teorema 114, como se puede observar en la Figura B.62. El retrato de fase de la Figura B.62, luce semejante al retrato de fase de la Figura B.59, sin embargo son geoméricamente no equivalentes. Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales en el octante positivo siguen permaneciendo en éste, son acotadas y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios L_k ; por lo tanto el segmento L_k es a un *atractor* del sistema y su cuenca de atractividad es el octante positivo. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el *k-estratega*, el *r-estratega* y la presa.

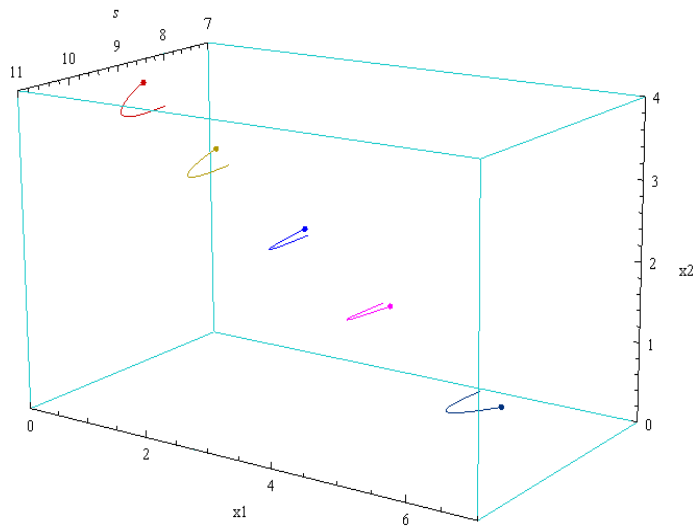


Figura B.63: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b12} = 13.1844$ y campo \tilde{f}_j .

Un análisis semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.63, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{b12}$. Como se puede observar en las Figuras B.62 y B.63, los retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k , como se demuestra en el Corolario 101.

Condición para $k_{b11} = 13.2487$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$L_k \leftrightarrow \xi_2 = 1.42857(2.88621 - 0.4\xi_1).$$

$$La_{k1} \leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.7142(-0.327182 - 0.00784354\xi_1).$$

$$La_{k2} \leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.7142(-0.329946 - 0.00856644\xi_1).$$

$$Lb_{k1} \leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.7142\sqrt{2.8(0.0505 + 0.000133\xi_1) - (-0.3271 - 0.0078\xi_1)^2}.$$

$$Lb_{k2} \leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.7142\sqrt{2.8(0.0552 + 0.00014\xi_1) - (-0.3299 - 0.0085\xi_1)^2}.$$

$$La_k \leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{-0.329946 - 0.00856644\xi_1}{\sqrt{2.8(0.05523 + 0.000145\xi_1) - (-0.3299 - 0.00856\xi_1)^2}} + \frac{-0.327182 - 0.00784354\xi_1}{\sqrt{2.8(0.050577 + 0.000133\xi_1) - (-0.327182 - 0.00784\xi_1)^2}}.$$

$$0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.$$

En la Figura B.64 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k .

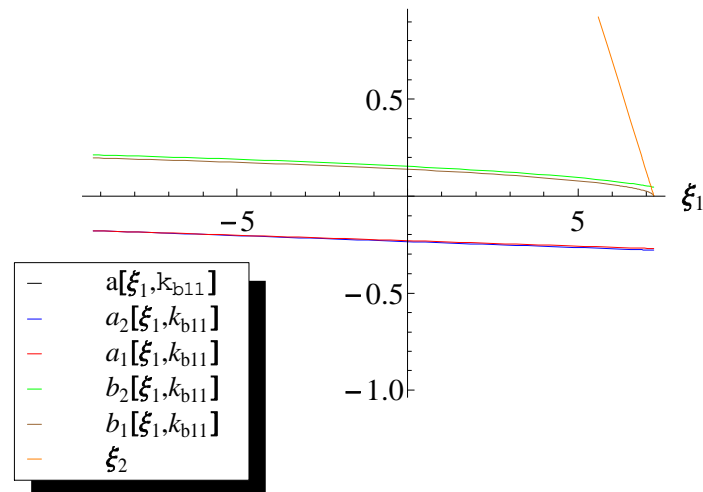


Figura B.64: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k para $k_{b11} = 13.2487$.

Como los segmentos de curva Lb_{k_1} , Lb_{k_2} están definidos en el dominio de L_k y el segmento de curva $L\underline{a}_k$ se encuentran debajo del eje ξ_1 , entonces en los subsistemas del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_1(s, x_1, x_2)$ y $f_2(s, x_1, x_2)$, los puntos del segmento de equilibrios L_k se comportan como focos estables, Corolario 78. Por consiguiente cada punto del segmento de equilibrios L_k se comporta como foco-foco asintóticamente estable en el sistema no suave (2.1) sobre la variedad invariante estable que los contiene, Teorema 114. En este caso como la variación media del radio de oscilación es alta debido a los valores relativamente altos de las componentes reales de sus valores propios μ_{1j} y μ_{2j} (véase Definición 3.6), el retrato de fase da la falsa impresión de tener el comportamiento de los puntos del segmento de equilibrios L_k del tipo nodo-nodo asintóticamente estables, como se observa en el retrato de fase de la Figura B.65.

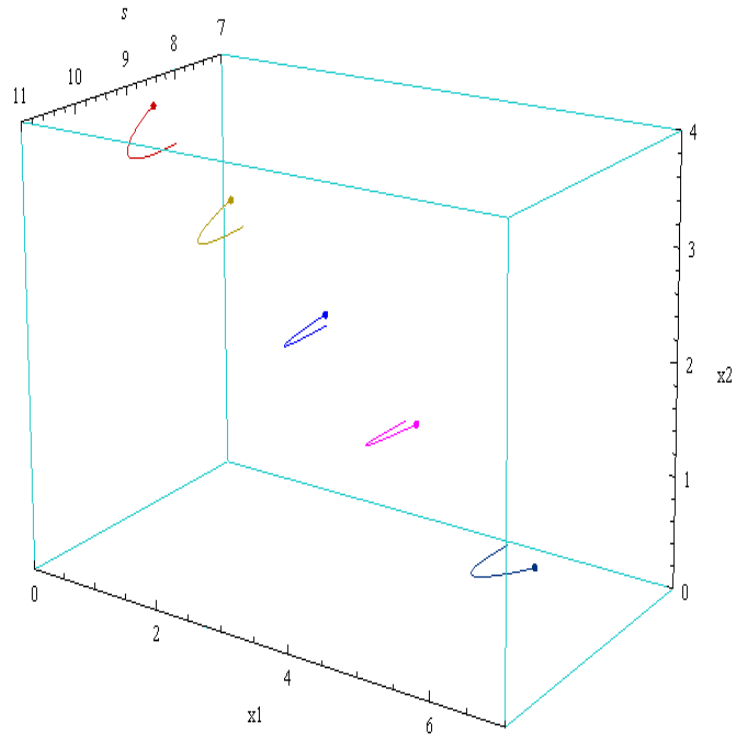


Figura B.65: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b22} = 13.2487$ y campo f_j .

El retrato de fase de la Figura B.65, luce semejante al retrato de fase de la Figura

B.59, sin embargo son geoméricamente no equivalentes. Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales en el octante positivo permanecen en éste, son acotadas y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios L_k ; por lo tanto el segmento L_k es a un *atractor* del sistema y su cuenca de atractividad es el octante positivo. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el k -estratega, el r -estratega y la presa. Un análisis semejante al anterior se realiza para el sistema no

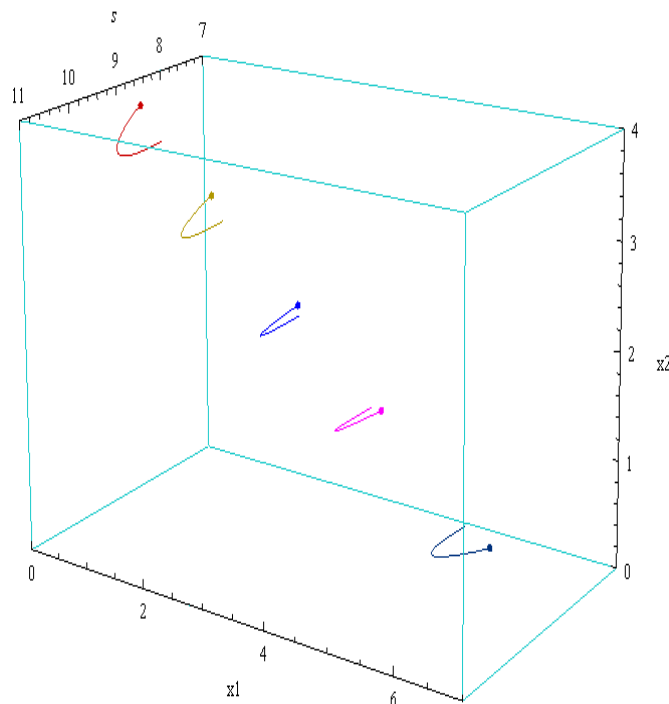


Figura B.66: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b22} = 13.2487$ y campo \tilde{f}_j .

suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.66, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{b11}$. Como se puede observar en las Figuras B.65 y B.66, los retratos fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k , como se demuestra en el Corolario 101.

Condición para $k_{a21} = 22.2717$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned}
 L_k &\leftrightarrow \xi_2 = 1.42857(5.3631 - 0.4\xi_1). \\
 La_{k1} &\leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.714286(2.77556 \times 10^{-17} - 0.00784354\xi_1). \\
 La_{k2} &\leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.714286(-0.0123742 - 0.00856644\xi_1). \\
 Lb_{k1} &\leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.7142\sqrt{2.8(0.094 + 0.00013\xi_1) - (2.775 \times 10^{-17} - 0.0078\xi_1)^2}. \\
 Lb_{k2} &\leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.7142\sqrt{2.8(0.094 + 0.00013\xi_1) - (2.775 \times 10^{-17} - 0.0078\xi_1)^2}. \\
 La_k &\leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{-0.0123742 - 0.00856644\xi_1}{\sqrt{2.8(0.1026 + 0.000145\xi_1) - (-0.012374 - 0.00856\xi_1)^2}} \\
 &\quad + \frac{2.77556 \times 10^{-17} - 0.00784354\xi_1}{\sqrt{2.8(0.0939819 + 0.000133\xi_1) - (2.77556 \times 10^{-17} - 0.00784\xi_1)^2}}. \\
 0 &\leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.
 \end{aligned}$$

En la Figura B.67 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k .

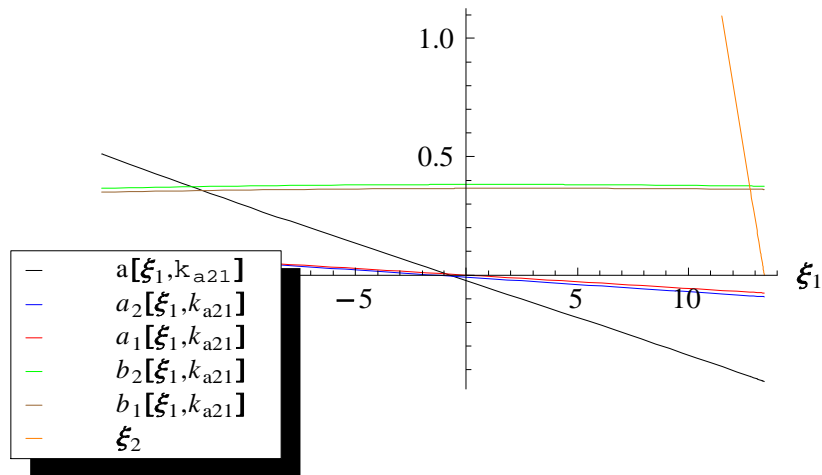


Figura B.67: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , para $k_{a21} = 22.2717$.

Como los segmentos de curva Lb_{k1} , Lb_{k2} están definidos en el dominio de L_k y los segmentos de curva La_{k1} , La_{k2} se encuentran debajo del eje ξ_1 , entonces cada punto del segmento de equilibrios L_k se comporta como foco-foco asintóticamente estable en el sistema no suave (2.1) sobre la variedad invariante estable local que los contiene, Teorema 114. En este caso como la variación media del radio de oscilación es pequeña debido a los valores relativamente bajos de las componentes reales de sus valores propios, por consiguiente en el retrato de fase los puntos del segmento de equilibrios L_k parecen ser del tipo foco asintóticamente estable de los sistemas suaves, como se puede observar en el retrato de fase correspondiente al parámetro de bifurcación $k = k_{a21}$, Figura B.68. Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales en el

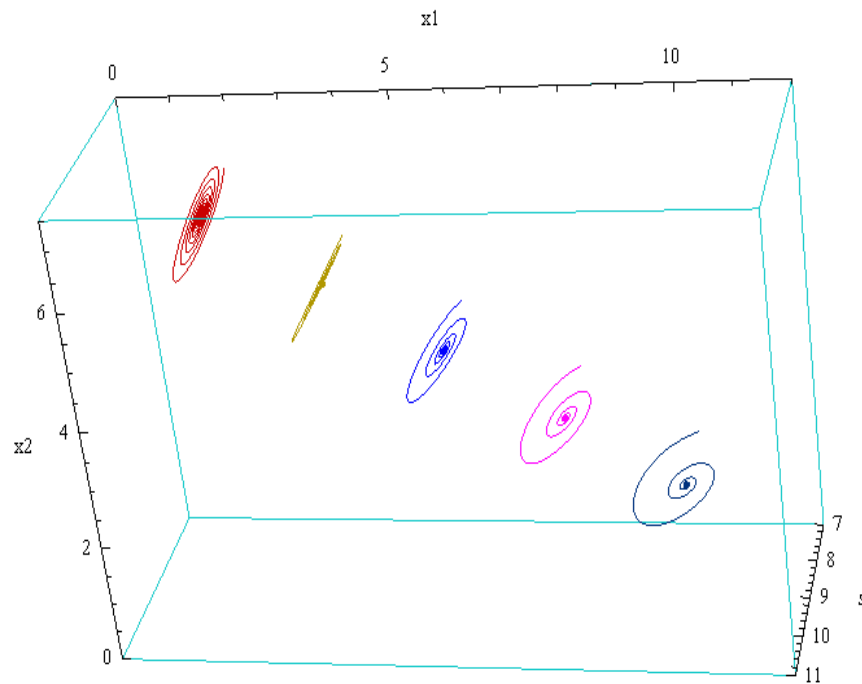


Figura B.68: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a21} = 22.2717$ y campo f_j .

octante positivo permanecen en éste, son acotadas y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios L_k ; por lo tanto el segmento L_k es a un *atractor* del sistema y su cuenca de atractividad es el octante positivo. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el k -estratega, el r -estratega y la presa.

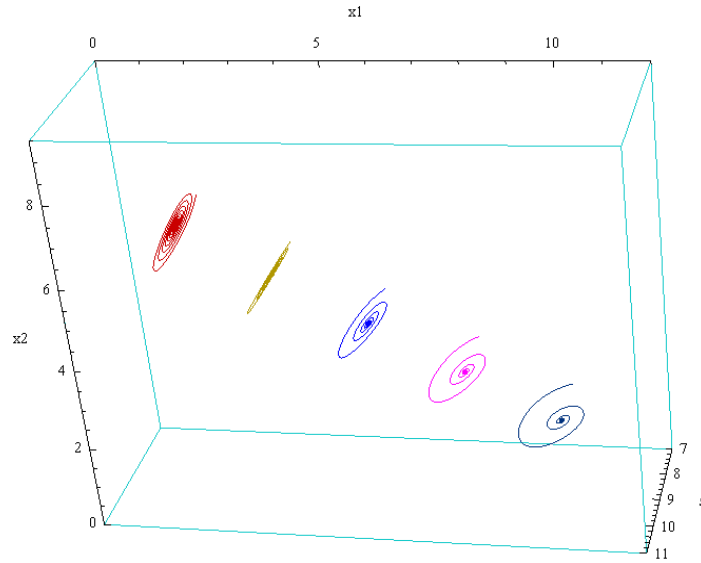


Figura B.69: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a21} = 22.2717$ y campo \tilde{f}_j .

Un análisis semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.69, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{a21}$. Como se puede observar en las Figuras B.68 y B.69, los retratos de fase del sistema (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k , como se demuestra en el Corolario 101.

Condición para $k_{a22} = 22.8788$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$L_k \leftrightarrow \xi_2 = 1.42857(5.45961 - 0.4\xi_1).$$

$$La_{k1} \leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.714286(0.0125968 - 0.00784354\xi_1).$$

$$La_{k2} \leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.714286(-0.00856644\xi_1).$$

$$Lb_{k1} \leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.7142\sqrt{2.8(0.09567 + 0.000133\xi_1) - (0.0125 - 0.0078\xi_1)^2}.$$

$$Lb_{k2} \leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.7142\sqrt{2.8(0.1044 + 0.000145\xi_1) - (-0.00856\xi_1)^2}.$$

$$La_k \leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{-0.00856644\xi_1}{\sqrt{2.8(0.104491 + 0.000145x_1) - (-0.00856\xi_1)^2}} + \frac{0.0125968 - 0.00784354\xi_1}{\sqrt{2.8(0.0956732 + 0.000133\xi_1) - (0.0125968 - 0.00784\xi_1)^2}}$$

$$0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.$$

En la Figura B.70 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k .

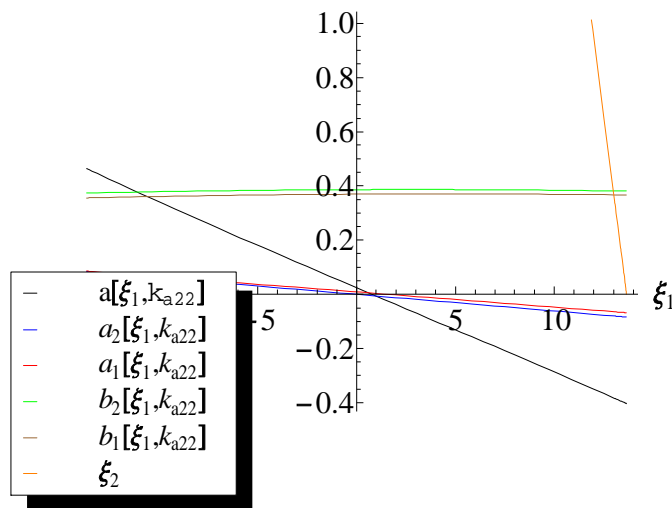


Figura B.70: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , para $k_{a22} = 22.8788$.

Como los segmentos de curva Lb_{k1} , Lb_{k2} están definidos en el dominio de L_k , y el segmento de curva La_k , decrece por el Lema 111, e intersecta el eje ξ_1 en el punto $\widehat{\xi}_1(k_{a22})$ por lo cual el punto $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k_{a22}), \widehat{\xi}_2(k_{a22}))$, divide L_k en dos partes (*una de las cuales puede ser vacía*), cada punto del segmento de equilibrios L_k a la izquierda del punto $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k_{a22}), \widehat{\xi}_2(k_{a22}))$ se comporta como foco-foco inestable y cada punto del segmento de equilibrios L_k a la derecha del punto $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k_{a22}), \widehat{\xi}_2(k_{a22}))$ como foco-foco asintóticamente estable en el sistema no suave (2.1) sobre las variedades invariantes inestables y estables respectivamente que los contienen, Teorema 114. A medida que aumenta el parámetro k , crece la inestabilidad del segmento L_k , significando la

pérdida de terreno del predador dos con respecto al predador uno hasta su extinción a valores mayores del parámetro k_{a11} , como se puede observar en el retrato de fase de la Figura B.71.

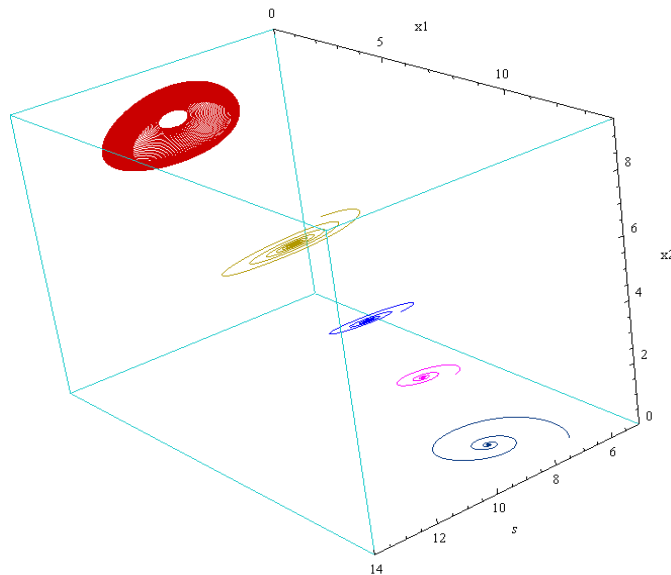


Figura B.71: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a22} = 22.8788$ y campo f_j .

Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales en el octante positivo permanecen en éste, son acotadas y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios L_k ; por lo tanto el segmento L_k es a un *atractor* del sistema y su cuenca de atracción es el octante positivo. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el *k-estratega*, el *r-estratega* y la presa.

Un análisis semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.24, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{a22}$. Como se puede observar en las Figuras B.71 y B.69, los retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k , como se demuestra en el Corolario 101.

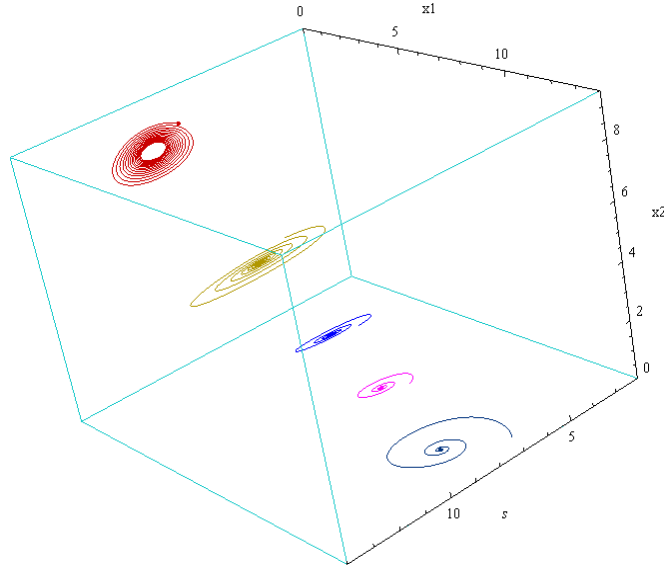


Figura B.72: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a22} = 22.8788$ y campo \tilde{f}_j .

Condición para $k_{api} = 28$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$L_k \leftrightarrow \xi_2 = 1.42857(6.10714 - 0.4\xi_1).$$

$$La_{k1} \leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.714286(0.0971137 - 0.00784354\xi_1).$$

$$La_{k2} \leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.714286(0.0830228 - 0.00856644\xi_1).$$

$$Lb_{k1} \leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.7142\sqrt{2.8(0.10702 + 0.000133\xi_1) - (0.0971 - 0.00784\xi_1)^2}.$$

$$Lb_{k2} \leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.7142\sqrt{2.8(0.116884 + 0.000145622\xi_1) - (-0.00856644\xi_1)^2}.$$

$$La_k \leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{0.0830228 - 0.00856644\xi_1}{\sqrt{2.8(0.1168 + 0.000145\xi_1) - (0.08302 - 0.00856\xi_1)^2}} + \frac{0.0971137 - 0.00784354\xi_1}{\sqrt{2.8(0.10702 + 0.0001333\xi_1) - (0.09711 - 0.00784\xi_1)^2}}.$$

$$0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.$$

En la Figura B.73 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k .

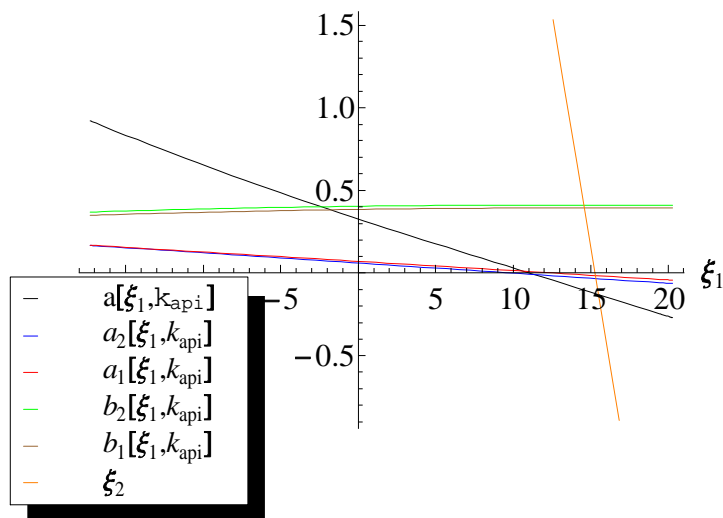


Figura B.73: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , para $k_{api} = 28$.

Como los segmentos de curva Lb_{k_1} , Lb_{k_2} están definidos en el dominio de L_k y el segmento de curva La_k , decrece por el Lema 111, e intersecta el eje ξ_1 en el punto $\widehat{\xi}_1(k_{api})$ por lo cual el punto $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k_{api}), \widehat{\xi}_2(k_{api}))$, divide L_k en dos partes (*una de las cuales puede ser vacía*), cada punto del segmento de equilibrios L_k a la izquierda del punto $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k_{api}), \widehat{\xi}_2(k_{api}))$ se comporta como foco-foco inestable y cada punto del segmento de equilibrios L_k a la derecha del punto $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k_{api}), \widehat{\xi}_2(k_{api}))$ se comporta como foco-foco estable, Teorema 114, véase Figura B.74.

Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales en un entorno tubular suficientemente pequeño de los puntos de L_k a la derecha del punto $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k_{api}), \widehat{\xi}_2(k_{api}))$, en el octante positivo, permanecen en éste, son acotadas y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios L_k , por lo tanto la parte del segmento L_k a la derecha del punto $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k_{api}), \widehat{\xi}_2(k_{api}))$ es a un *atractor* del sistema. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el k -estratega, el r -estratega y la presa. Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales en un entorno tubular suficientemente pequeño de los puntos de L_k a la izquierda del punto $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k_{api}), \widehat{\xi}_2(k_{api}))$, en el octante positivo se alejan del segmento de equilibrios L_k y se desplazan en dirección hacia

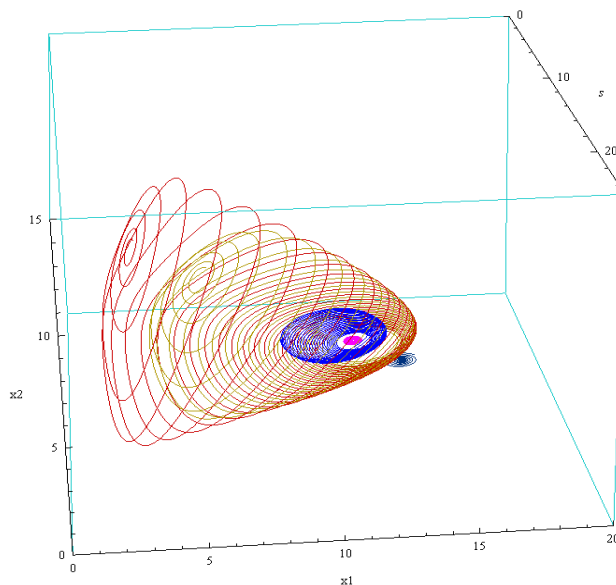


Figura B.74: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{api} = 28$ y campo f_j .

abajo por ser el sistema de tipo elíptico $\left(\frac{\partial_s p_2(\lambda, a_2)}{\partial_s p_2(\lambda, a_1)} - \frac{\partial_s p_1(\lambda, a_2)}{\partial_s p_1(\lambda, a_1)} = -2.22154 \times 10^{-16} < 0\right)$, ver Teorema 21 y Observación 135; e intersectan el entorno tubular de L_k de los puntos del segmento de equilibrios L_k a la derecha del punto $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k), \widehat{\xi}_2(k))$. Allí las soluciones con condiciones iniciales en esta vecindad tiende a puntos del segmento L_k cuando t tiende a más infinito; sin embargo la parte del segmento L_k a la izquierda del punto $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k_{api}), \widehat{\xi}_2(k_{api}))$ es un *repulsor* del sistema. Los equilibrios en este caso no representan coexistencia estable entre el k -estratega, el r -estratega y la presa, ya que los equilibrios del sistema ahora no son estable desde el punto de vista de Lyapunov. A medida que aumenta el parámetro k , crece la inestabilidad del segmento L_k ; significando la pérdida de terreno del predador dos con respecto al predador uno hasta su extinción a valores mayores del parámetro \bar{k}_{a1} , como se puede observar en el retrato de fase correspondiente al parámetro de bifurcación $k = k_{api}$, Figura B.74. Un análisis semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\widetilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.75, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{api}$. Como se puede observar en las Figuras B.74 y B.75, los retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no

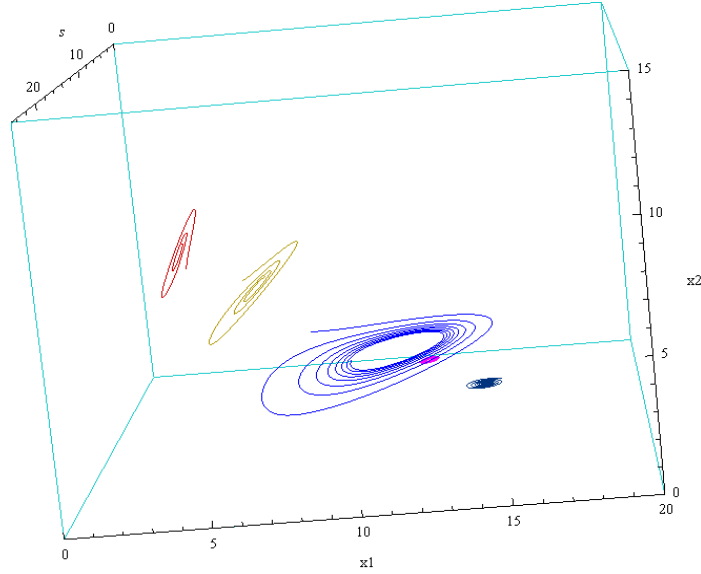


Figura B.75: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{api} = 28$ y campo \tilde{f}_j .

suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k como se demuestra en el Corolario 101.

Condición para $k_{a11} = 30.1257$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$L_k \leftrightarrow \xi_2 = 1.42857(6.31127 - 0.4\xi_1).$$

$$La_{k1} \leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.714286(0.123757 - 0.00784354\xi_1).$$

$$La_{k2} \leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.714286(0.109195 - 0.00856644\xi_1).$$

$$Lb_{k1} \leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.7142\sqrt{2.8(0.1105 + 0.000133\xi_1) - (0.12375 - 0.0078\xi_1)^2}.$$

$$Lb_{k2} \leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.7142\sqrt{2.8(0.12079 + 0.00014\xi_1) - (0.1091 - 0.00856\xi_1)^2}.$$

$$La_k \leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{0.109195 - 0.00856644\xi_1}{\sqrt{2.8(0.12079 + 0.000145\xi_1) - (0.109195 - 0.00856\xi_1)^2}} + \frac{0.123757 - 0.00784354\xi_1}{\sqrt{2.8(0.110597 + 0.000133\xi_1) - (0.123757 - 0.007843\xi_1)^2}}.$$

$$0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.$$

En la Figura B.76 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k . Como los segmentos de curva Lb_{k1} , Lb_{k2} están definidos en el

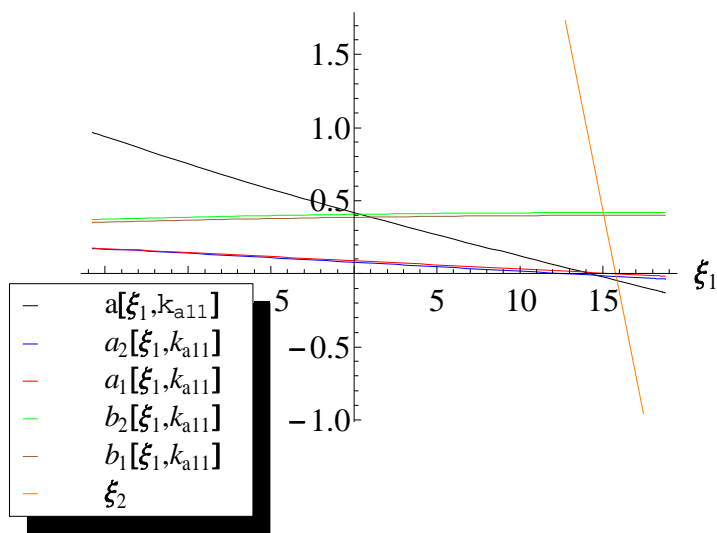


Figura B.76: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , para $k_{a11} = 30.1257$.

dominio de L_k y el segmento de curva La_k , decrece por el Lema 111, e intersecta el eje ξ_1 en el punto $\widehat{\xi}_1(k_{a11})$ por lo cual el punto $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k_{a11}), \widehat{\xi}_2(k_{a11}))$, divide L_k en dos partes (*una de las cuales puede ser vacía*); los puntos del segmento de equilibrios L_k a la izquierda del punto $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k_{a11}), \widehat{\xi}_2(k_{a11}))$ son del tipo foco-foco inestable y los puntos del segmento de equilibrios L_k a la derecha del punto $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k_{a11}), \widehat{\xi}_2(k_{a11}))$ son del tipo foco-foco estable, véase Figura B.77. Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales en un entorno tubular suficientemente pequeño de los puntos de L_k a la derecha del punto $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k_{a11}), \widehat{\xi}_2(k_{a11}))$, en el octante positivo, permanecen en éste, son acotadas y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios L_k ; por lo tanto la parte del segmento L_k a la derecha del punto $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k_{a11}), \widehat{\xi}_2(k_{a11}))$ es a un *atractor* del sistema. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el *k-estratega*, el *r-estratega* y la presa. Las trayectorias del sistema con condiciones en un entorno tubular suficientemente pequeño de los puntos de L_k

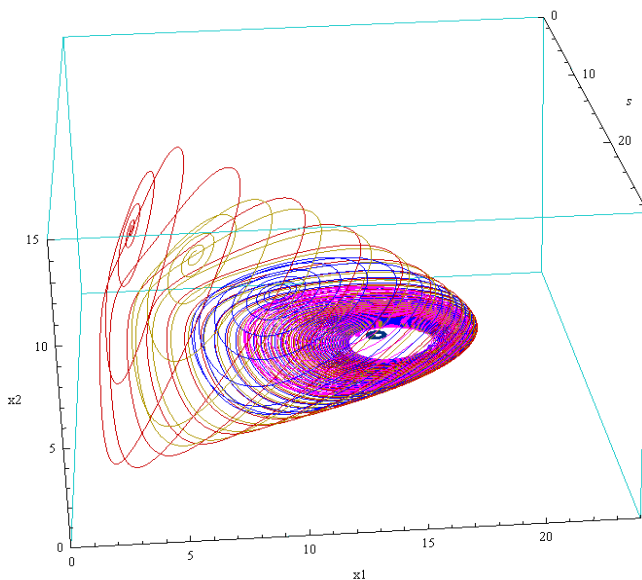


Figura B.77: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a11} = 30.1257$ y campo f_j .

a la izquierda del punto $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k_{a11}), \widehat{\xi}_2(k_{a11}))$, en el octante positivo, se alejan del segmento de equilibrios L_k , se desplazan en dirección hacia abajo e intersectan un entorno tubular de los puntos de L_k , a la derecha del punto $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k_{a11}), \widehat{\xi}_2(k_{a11}))$. Allí las soluciones con condiciones iniciales en esta vecindad tienden a puntos del segmento L_k cuando t tiende a más infinito; sin embargo la parte del segmento L_k a la izquierda del punto $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k_{a11}), \widehat{\xi}_2(k_{a11}))$ es un *repulsor* del sistema. Los equilibrios en este caso no representan coexistencia estable entre el *k-estratega*, el *r-estratega* y la presa, ya que los equilibrios del sistema ahora no son estables desde el punto de vista de Lyapunov, véase Figura B.77. A medida que aumenta el parámetro k , crece la inestabilidad del segmento L_k significando la pérdida de terreno del predador dos con respecto al predador uno hasta su extinción a valores mayores del parámetro k_{a1} , como se observa en el retrato de fase correspondiente al parámetro $k = k_{a1}$.

Un análisis semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\widetilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.78, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{a11}$. Como se puede observar en las Figuras B.77 y B.78, los retratos de fase

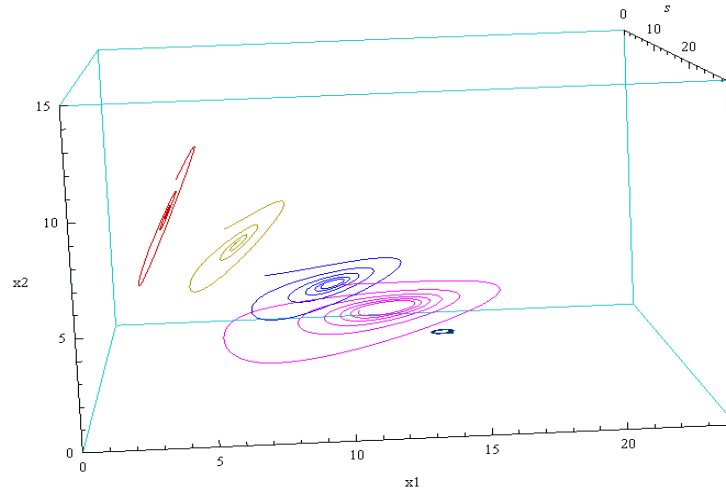


Figura B.78: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a11} = 30.1257$ y campo \tilde{f}_j .

del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k , como se muestra en el Corolario 101.

Condición para $k_{a12} = 33121$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$L_k \leftrightarrow \xi_2 = 1.42857(6.55442 - 0.4\xi_1).$$

$$La_{k1} \leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.714286(0.155493 - 0.00784354\xi_1).$$

$$La_{k2} \leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.714286(0.14037 - 0.00856644\xi_1).$$

$$Lb_{k1} \leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.7142\sqrt{2.8(0.11485 + 0.000133\xi_1) - (0.1237 - 0.00784\xi_1)^2}.$$

$$Lb_{k2} \leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.7142\sqrt{2.8(0.12544 + 0.00014\xi_1) - (0.1403 - 0.00856\xi_1)^2}.$$

$$La_k \leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{0.14037 - 0.00856644\xi_1}{\sqrt{2.8(0.125444 + 0.000145\xi_1) - (0.14037 - 0.008566\xi_1)^2}} + \frac{0.155493 - 0.0078435\xi_1}{\sqrt{2.8(0.114858 + 0.0001333\xi_1) - (0.155493 - 0.00784\xi_1)^2}}$$

$$0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.$$

En la Figura B.79 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$,

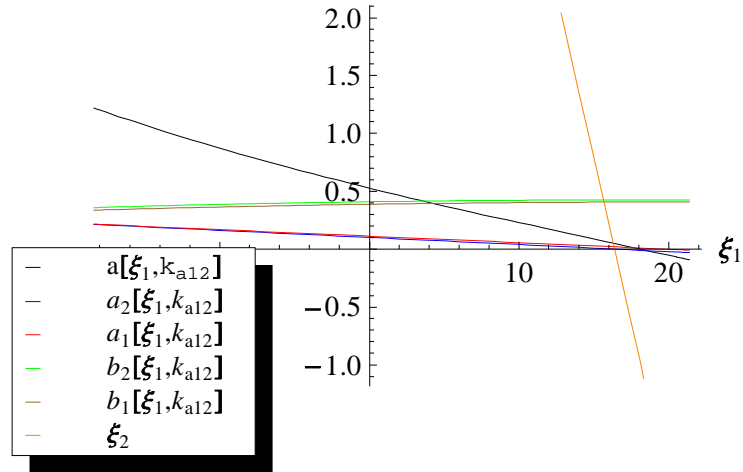


Figura B.79: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , para $k_{a12} = 33.121$.

La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k . Como los segmentos de curva Lb_{k1} , Lb_{k2} están definidos

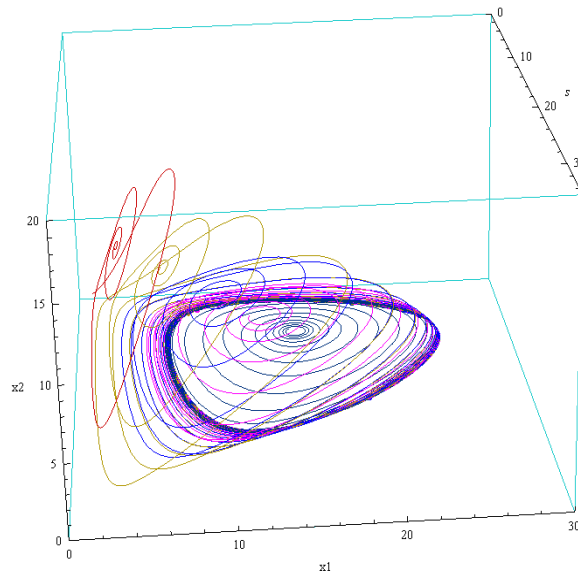


Figura B.80: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a12} = 33.121$ y campo f_j .

en el dominio de L_k y el segmento de curva La_k se encuentran arriba del eje ξ_1 , entonces cada punto del segmento de equilibrios L_k se comporta como foco-foco asintóticamente inestable en el sistema no suave (2.1). Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales cercanas a la línea de equilibrios L_k se alejan de él, por consiguiente el segmento L_k es un conjunto *repulsor* del sistema no suave (2.1). Los equilibrios en este caso no representan coexistencia estable entre el *k-estratega*, el *r-estratega* y la presa, porque los equilibrios del sistema ahora no son estables desde el punto de vista de Lyapunov; sin embargo debido a que las órbitas del sistema se alejan del segmento de equilibrios L_k y se desplazan en dirección hacia abajo por ser el sistema de tipo elíptico $\left(\frac{\partial_s p_2(\lambda, a_2)}{\partial_s p_2(\lambda, a_1)} - \frac{\partial_s p_1(\lambda, a_2)}{\partial_s p_1(\lambda, a_1)} = -2.22154 \times 10^{-16} < 0\right)$ (ver Teorema 21 y Observación 135); e intersectan el plano invariante $x_2 = 0$, y un ciclo límite puede aparecer el cual es orbitalmente asintóticamente estable en desarrollo de la bifurcación de Hopf-Zou & Küpper no-suave de acuerdo con el Teorema 121, significando la oscilación de coexistencia entre el *r-estratega* y la presa, véase Figura B.80.

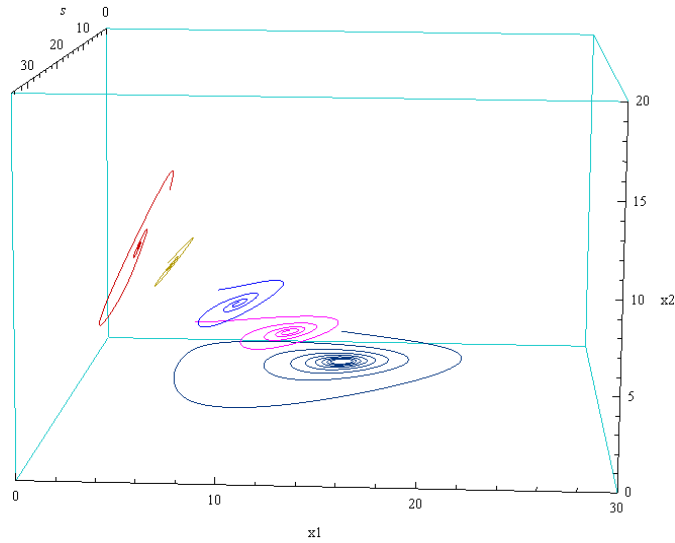


Figura B.81: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a12} = 33.121$ y campo \tilde{f}_j .

Un análisis semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.81, se presenta un retrato de fase

para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{a12}$. Como se puede observar en las Figuras B.80 y B.81, los retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k como se muestra en el Corolario 101.

B.5 Modelo sin variedad invariante del tipo 1B

Los siguientes son los parámetros del modelo natural:

Parámetros de la respuesta funcional $p_1(s, a)$

$$\begin{aligned} A_1 &= 0.3; & B_1 &= 1; & D_1 &= 6; & c_1 &= 1; \\ d_{11} &= 0.4; & d_{21} &= 0.7; & F_1 &= 0; & m_1 &= 1; \\ n_1 &= 0; & q_1 &= 0.3; & r_1 &= 0; & u_1 &= 0; \\ v_1 &= 0; & \lambda &= 9; & \gamma &= 1; & & \dots \end{aligned}$$

Parámetros de la respuesta funcional $p_3(s, a)$

$$\begin{aligned} A_2 &= 0.1; & B_2 &= 1; & D_2 &= 6; & c_2 &= 1; \\ d_{12} &= 0.4; & d_{22} &= 0.7; & F_2 &= 0; & m_2 &= 1; \\ n_2 &= 0.7; & q_2 &= 0.4; & r_2 &= 4; & u_2 &= 0; \\ v_2 &= 0; & \lambda &= 9; & \gamma &= 1; & & \dots \end{aligned}$$

La resistencia ambiental g de la presa y la respuesta funcional p de los predadores adoptan la forma:

$$p(s, a) = \begin{cases} 0.0428571 + \frac{0.3s}{(0.3s+a)}, & \text{si } s \leq \lambda \\ 0.04285 + \frac{2.7}{(2.7+a)} - \frac{3.6}{(3.6+a)} - \frac{0.465554}{6+a^4} + \frac{0.1s^{0.7}}{6+a^4} + \frac{0.4s}{a+0.4s}, & \text{si } s > \lambda, \end{cases}$$

$$g(s, k) = 1 - \left(\frac{s}{k}\right).$$

La ecuación (B.2) para a_1 es de la forma:

$$\begin{aligned} 0 &= -0.357143 + \frac{2.7}{(2.7+a_1)} \\ a_1 &= 4.86. \end{aligned}$$

La ecuación (B.2) para a_2 es de la forma:

$$\begin{aligned} 0 &= -0.657143 + \frac{2.7}{(2.7+a_2)} \\ a_2 &= 1.4087. \end{aligned}$$

Además, se muestran las gráficas y las ecuaciones paramétricas de la curvas L_k , $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k siguientes

$$\begin{aligned} L_k &= \{(s, \xi_1, x_2) : p(\lambda, a_1)\xi_{11} + p(\lambda, a_2)\xi_{12} = \gamma\lambda g(\lambda, k); \\ &\quad \lambda, \xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0\}, \end{aligned} \tag{B.16}$$

$$La_{k,j} = \{(s, \xi_1, a_j(\xi_1, k)) : s = \lambda, 0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}\}, \tag{B.17}$$

$$Lb_{k,j} = \{(s, \xi_1, b_j(\xi_1, k)) : s = \lambda, 0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}\}, \tag{B.18}$$

$$\begin{aligned} La_k &= \{(s, \xi_1, a(\xi_1, k)) : a(\xi_1, k) = \frac{a_1(\xi_1, k)}{b_1(\xi_1, k)} + \frac{a_2(\xi_1, k)}{b_2(\xi_1, k)} - \frac{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{p_j(\lambda, a_1)^2}{p_j(\lambda, a_2)^2}}}\right)}{\pi}; \\ &\quad s = \lambda, 0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}\}, \end{aligned} \tag{B.19}$$

$$\begin{aligned} La_k &= \{(s, \xi_1, a(\xi_1, k)) : a(\xi_1, k) = \frac{a_1(\xi_1, k)}{b_1(\xi_1, k)} + \frac{a_2(\xi_1, k)}{b_2(\xi_1, k)} - \frac{\ln\left(\sqrt{1 + \frac{p_j(\lambda, a_1)^2}{p_j(\lambda, a_2)^2}}\right)}{\pi}; \\ &\quad s = \lambda, 0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}\}, \end{aligned} \tag{B.20}$$

así como los retratos de fase del sistema para los distintos valores del parámetro de bifurcación k_{bij} y k_{aij} para $i, j = 1, 2$, seleccionados con el propósito de mostrar los cambios cualitativos que ocurren en el sistema. Los parámetros de bifurcación k_{bij} y k_{aij} para $i, j = 1, 2$, están dados por las ecuaciones

$$\begin{aligned} K_{bij}(k_{bij}) &= \gamma\lambda g(\lambda, k)\partial_s p_j(\lambda, a_i) - \frac{1}{4}\gamma^2 \left(\lambda\partial_s(\lambda, k) + g(\lambda, k) \left(1 - \frac{\lambda\partial_s p_j(\lambda, a_i)}{p_j(\lambda, a_i)} \right) \right)^2 = 0, \\ K_{aij}(k_{aij}) &= -\lambda p_j(\lambda, a_i)\partial_s g(\lambda, k) + g(\lambda, k) (\lambda\partial_s p_j(\lambda, a_i) - p_j(\lambda, a_i)) = 0, \end{aligned}$$

por las Definiciones 37, 41 y la proposición (39). Los valores obtenidos para los puntos de bifurcación k_{bij} y k_{aij} en cada uno de los subsistemas son los siguientes:

$$\begin{aligned}
 K_{b21}(k) &= 0.225306 \left(1 - \frac{9}{k}\right) - \frac{1}{4} \left(0.678134 \left(1 - \frac{9}{k}\right) - \frac{9}{k}\right)^2 = 0. \\
 k_{b21} &= 12.6908. \\
 K_{b11}(k) &= 0.229592 \left(1 - \frac{9}{k}\right) - \frac{1}{4} \left(0.42602 \left(1 - \frac{9}{k}\right) - \frac{9}{k}\right)^2 = 0. \\
 k_{b11} &= 13.2487. \\
 K_{a21}(k) &= -0.474694 \left(1 - \frac{9}{k}\right) + \frac{6.3}{k} = 0. \\
 k_{a21} &= 22.2717. \\
 K_{a11}(k) &= -0.170408 \left(1 - \frac{9}{k}\right) + \frac{3.6}{k} = 0. \\
 k_{a11} &= 30.1257.
 \end{aligned}$$

subsistema 2

$$\begin{aligned}
 K_{b22}(k) &= 0.234941 \left(1 - \frac{9}{k}\right) - \frac{1}{4} \left(0.66437 \left(1 - \frac{9}{k}\right) - \frac{9}{k}\right)^2 = 0. \\
 k_{b22} &= 12.6433. \\
 K_{b12}(k) &= 0.245032 \left(1 - \frac{9}{k}\right) - \frac{1}{4} \left(0.387419 \left(1 - \frac{9}{k}\right) - \frac{9}{k}\right)^2 = 0. \\
 k_{b12} &= 13.2009. \\
 K_{a22}(k) &= -0.465059 \left(1 - \frac{9}{k}\right) + \frac{6.3}{k} = 0. \\
 k_{a22} &= 22.5467. \\
 K_{a12}(k) &= -0.154968 \left(1 - \frac{9}{k}\right) + \frac{3.6}{k} = 0. \\
 k_{a12} &= 32.2307.
 \end{aligned}$$

Condición para $k_{b22} = 12.6433$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned}
 L_k &\leftrightarrow \xi_2 = 1.42857(2.59347 - 0.4\xi_1). \\
 La_{k1} &\leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.714286(-0.361496 - 0.00784354\xi_1). \\
 La_{k2} &\leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.714286(-0.364273 - 0.00856644\xi_1).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Lb_{k1} &\leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.7142\sqrt{2.8(0.04544 + 0.00013\xi_1) - (-0.36149 - 0.00784\xi_1)^2}. \\
 Lb_{k2} &\leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.7142\sqrt{2.8(0.0473 + 0.00014\xi_1) - (-0.364273 - 0.00856\xi_1)^2}. \\
 La_k &\leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{-0.364273 - 0.00856644\xi_1}{\sqrt{2.8(0.0473909 + 0.000313\xi_1) - (-0.364273 - 0.0085\xi_1)^2}} \\
 &\quad + \frac{-0.361496 - 0.00784354\xi_1}{\sqrt{2.8(0.0454475 + 0.0001333\xi_1) - (-0.361496 - 0.007843\xi_1)^2}}. \\
 0 &\leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.
 \end{aligned}$$

En la Figura B.82 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k . Como los segmentos Lb_{k1} , Lb_{k2} no están definidos debajo del segmento

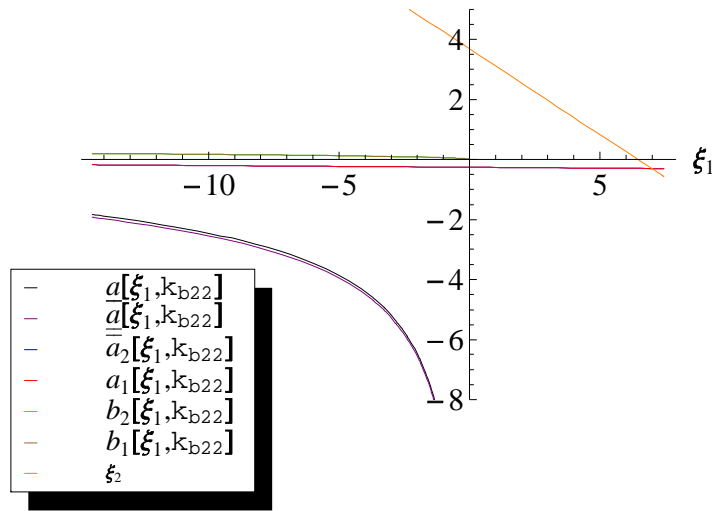


Figura B.82: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , para $k_{b22} = 12.6433$.

de equilibrios L_k y los segmentos La_{k1} , La_{k2} se encuentran debajo del eje ξ_1 en el dominio de L_k , entonces los puntos del segmento de equilibrios L_k se comportan como nodos estables en cada subsistema del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, Corolario 78. Por consiguiente existe una vecindad del segmento de equilibrios para el cual las soluciones con condiciones iniciales en esta vecindad tiende a un punto del segmento L_k cuando t tiende a infinito, Teorema 141, como se puede observar en el retrato de fase de la Figura B.83. Además el retrato de

fase se asemeja al del sistema no suave (2.1) cuando los equilibrios son del tipo *nodo-nodo* asintóticamente estables; sin embargo en este caso no existen variedades invariantes que contenga puntos de equilibrios del interior del segmento L_k . Las

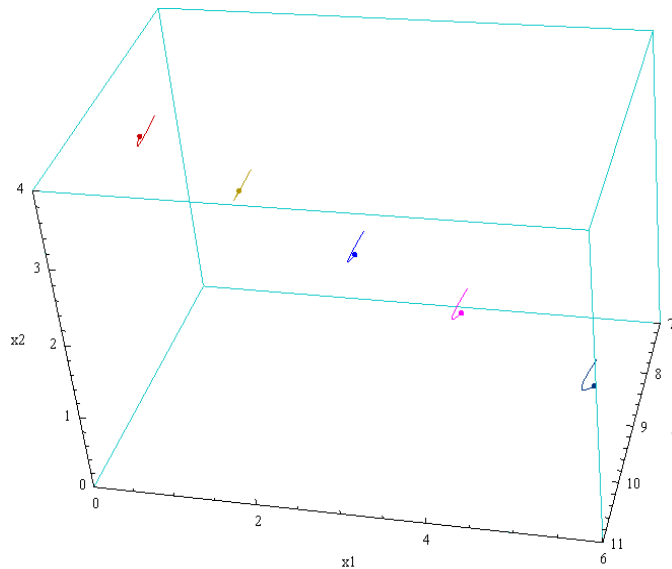


Figura B.83: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b22} = 12.6433$ y campo f_j .

trayectorias del sistema con condiciones iniciales en el octante positivo permanecen en éste, son acotadas y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios L_k ; por lo tanto el segmento L_k es a un *atractor* del sistema y su cuenca de atractividad es el octante positivo. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el *k-estratega*, el *r-estratega* y la presa.

Un comportamiento semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado al campo aproximado $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.84, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{b22}$. Como se puede observar en las Figuras B.83 y B.84, los retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ no se puede afirmar que son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k , porque el Corolario 101 no aplica en este caso, ya que no existen variedades in-

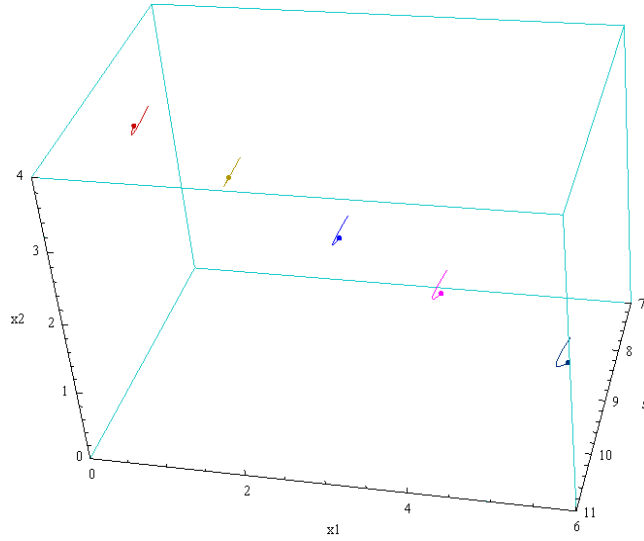


Figura B.84: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b22} = 12.6433$ y campo \tilde{f}_j .

variantes estables para el sistema no suave (2.1) que contengan los puntos del interior del segmento de equilibrios L_k .

Condición para $k = k_{b21} = 12.6908$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$L_k \leftrightarrow \xi_2 = 1.42857(2.61743 - 0.4\xi_1).$$

$$La_{k1} \leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.714286(-0.358369 - 0.00784354\xi_1).$$

$$La_{k2} \leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.714286(-0.361171 - 0.00861627\xi_1).$$

$$Lb_{k1} \leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.7142\sqrt{2.8(0.04586 + 0.000133\xi_1) - (-0.3583 - 0.00784\xi_1)^2}.$$

$$Lb_{k2} \leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.7142\sqrt{2.8(0.0478 + 0.000313\xi_1) - (-0.36117 - 0.0086\xi_1)^2}.$$

$$Lb_{k2} \leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.7142\sqrt{2.8(0.0478 + 0.000313\xi_1) - (-0.36117 - 0.0086\xi_1)^2}.$$

$$La_k \leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{-0.361171 - 0.00861627\xi_1}{\sqrt{2.8(0.04782 + 0.0003139\xi_1) - (-0.361171 - 0.00861\xi_1)^2} + \frac{-0.358369 - 0.00784354\xi_1}{\sqrt{2.8(0.0458673 + 0.0001333\xi_1) - (-0.358369 - 0.007843\xi_1)^2}}}.$$

$$0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.$$

En la Figura B.85 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k con parámetro de bifurcación k_{b21} . Como el segmento de curva

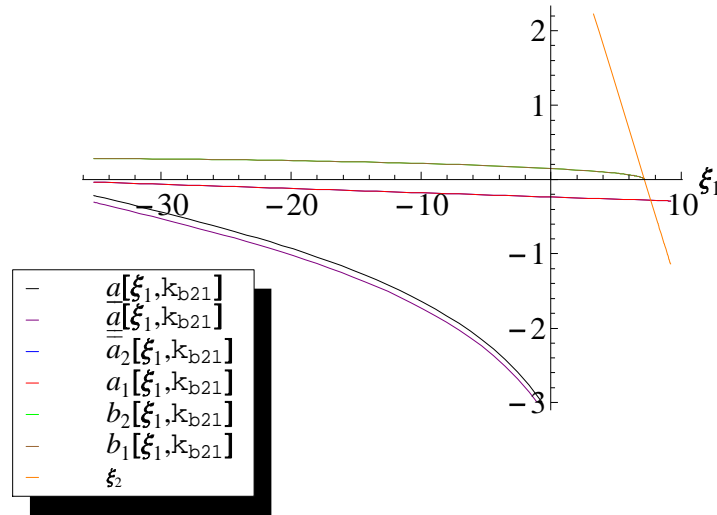


Figura B.85: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , para $k_{b21} = 12.6908$.

Lb_{k1} no está definido debajo del segmento de equilibrios L_k y el segmento de curva La_{k1} se encuentra debajo del eje ξ_1 en el dominio de L_k , entonces en el subsistema del sistema no suave (2.1) asociado al campo $f_1(s, \xi_1, x_2)$, cada punto del segmento de equilibrios L_k se comporta como nodo estable. También La_{k2} se encuentra debajo del eje ξ_1 en el dominio de L_k , y el segmento de curva Lb_{k2} intersecta el eje ξ_1 en el punto $\overline{\xi}_{12}(k_{b21})$ por lo cual el punto $(\lambda, \overline{\xi}_{12}(k_{b21}), \overline{\xi}_{22}(k_{b21}))$ divide L_k en dos partes (una de las cuales puede ser vacía). Por lo tanto en el subsistema del sistema no suave (2.1) asociado al campo campo $f_2(s, x_1, x_2)$ los puntos de L_k a la izquierda del punto $(\lambda, \overline{\xi}_{12}(k_{b21}), \overline{\xi}_{22}(k_{b21}))$ son focos estables, los puntos a la derecha son nodos estables, Corolario 78. Por consiguiente existe una vecindad del segmento de equilibrios para el cual las soluciones con condiciones iniciales en esta vecindad tiende a puntos del segmento L_k cuando t tiende a infinito, Teorema 141, como se puede observar en el retrato de fase de la Figura B.86. Además el retrato de fase se asemeja

al del sistema no suave (2.1) cuando existen variedades invariantes y cada punto del segmento de equilibrios L_k a la izquierda de el punto $(\lambda, \bar{\bar{\xi}}_{12}(k_{b21}), \bar{\bar{\xi}}_{22}(k_{b21}))$ se comporta como nodo-foco estable, así como cada punto del segmento de equilibrios L_k a la derecha del punto $(\lambda, \bar{\bar{\xi}}_{12}(k_{b21}), \bar{\bar{\xi}}_{22}(k_{b21}))$ se comporta como nodo-nodo asintóticamente estable; sin embargo en este caso no existen variedades invariantes estables locales que contengan puntos de equilibrios del interior del segmento L_k . El retrato de fase de la Figura B.86, luce semejante al retrato de fase al de la Figura B.83, pero son geoméricamente no equivalentes. Las trayectorias del sistema con condiciones

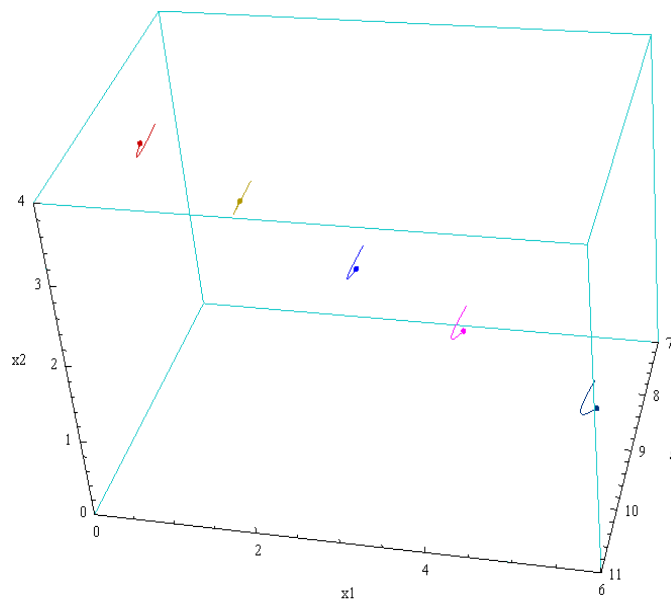


Figura B.86: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b21} = 12.6908$ y campo f_j .

iniciales en el octante positivo permanecen en éste, son acotadas y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios L_k ; por lo tanto el segmento L_k es a un *atractor* del sistema y su cuenca de atractividad es el octante positivo. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el *k-estratega*, el *r-estratega* y la presa.

Un comportamiento semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.87, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{b21}$. Como se puede observar en las Figuras B.86 y B.87, los

retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ no se puede afirmar que son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k , porque en este caso el Corolario 101 no aplica, ya que no existen variedades invariantes estables para el sistema no suave (2.1) que contengan los puntos del interior del segmento de equilibrios L_k .

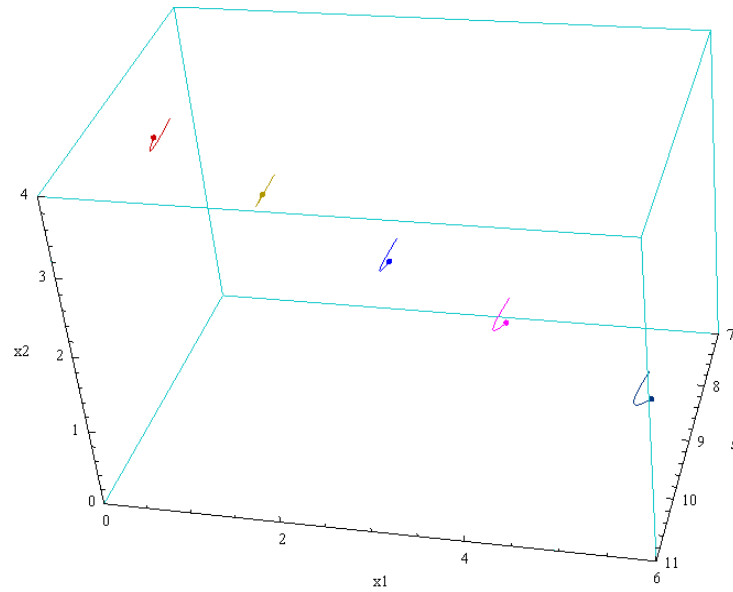


Figura B.87: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b21} = 12.6908$ y campo \tilde{f}_j .

Condición para $k_{b12} = 13.2009$

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned}
 L_k &\leftrightarrow \xi_2 = 1.42857(2.86405 - 0.4\xi_1). \\
 La_{k1} &\leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.714286(-0.326179 - 0.00784354\xi_1). \\
 La_{k2} &\leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.714286(-0.329245 - 0.00861627\xi_1). \\
 Lb_{k1} &\leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.7142\sqrt{2.8(0.05018 + 0.00013\xi_1) - (-0.3292 - 0.0086\xi_1)}. \\
 Lb_{k2} &\leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.7142\sqrt{2.8(0.0523 + 0.00031\xi_1) - (-0.3611 - 0.00861\xi_1)^2}.
 \end{aligned}$$

$$La_k \leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{-0.329245 - 0.00861627\xi_1}{\sqrt{2.8(0.05233 + 0.0003139\xi_1) - (-0.32924 - 0.00861\xi_1)^2}}$$

$$+ \frac{-0.326179 - 0.00784354\xi_1}{\sqrt{2.8(0.0501891 + 0.0001333\xi_1) - (-0.326179 - 0.007843\xi_1)^2}}$$

$$0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.$$

En la Figura B.88 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k . Como el segmento de curva Lb_{k2} esta definido en el dominio de

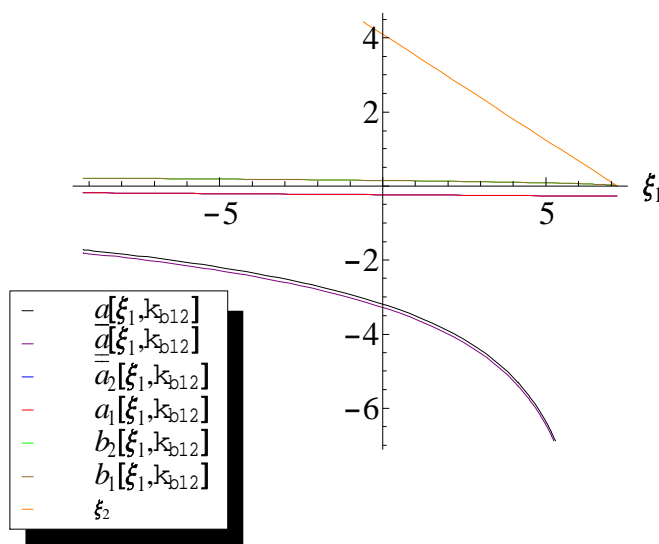


Figura B.88: Gráfica, de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , para $k_{b12} = 13.2009$.

L_k ; y el segmento de curva Lb_{k1} intersecta el eje ξ_1 en el punto $\overline{\xi}_{11}(k_{b12})$ por lo cual el punto $(\lambda, \overline{\xi}_{11}(k_{b12}), \overline{\xi}_{21}(k_{b12}))$ divide L_k en dos partes (*una de las cuales puede ser vacía*). Además el segmento de curva \underline{La}_k se encuentran debajo del eje ξ_1 , luego existe una vecindad del segmento de equilibrios para el cual las soluciones con condiciones iniciales en esta vecindad tienden a puntos del segmento L_k cuando t tiende a infinito, Teorema 141, como se observa en el retrato de fase de la Figura B.89. El retrato de fase se asemeja al del sistema no suave (2.1) cuando existen variedades invariantes y cada punto de L_k a la izquierda de el punto $(\lambda, \overline{\xi}_{11}(k_{b12}), \overline{\xi}_{21}(k_{b12}))$ se

comporta como foco-foco estable, así como cada punto de L_k a la derecha del punto $(\lambda, \bar{\xi}_{11}(k_{b12}), \bar{\xi}_{21}(k_{b12}))$ se comporta como focos-nodo asintóticamente estable; sin embargo en este caso no existen variedades invariantes estables locales que contengan puntos de equilibrios del interior del segmento L_k .

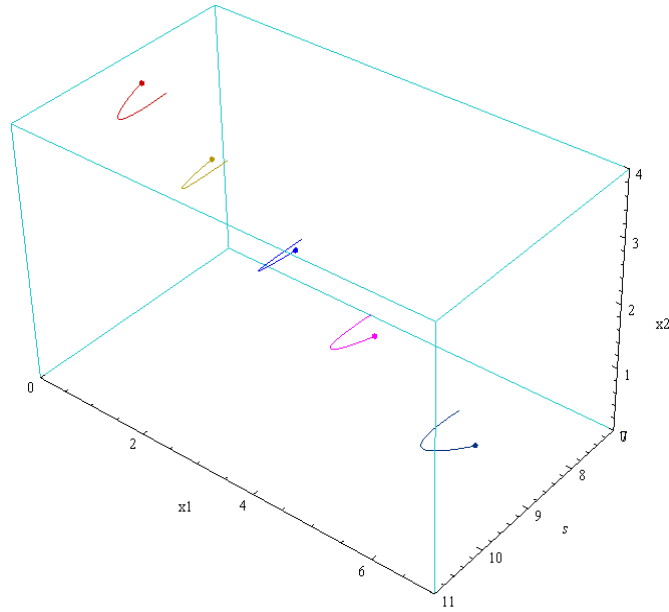


Figura B.89: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b12} = 13.2009$ y campo f_j .

Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales en el octante positivo permanecen en éste, son acotadas y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios L_k ; por lo tanto el segmento L_k es a un *atractor* del sistema y su cuenca de atracción es el octante positivo. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el *k-estratega*, el *r-estratega* y la presa.

Un comportamiento semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.90, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{b12}$. Como se puede observar en las Figuras B.89 y B.90, los retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ no se puede afirmar que

son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k , porque el Corolario 101 no aplica en este caso, ya que no existen variedades invariantes estables para el sistema no suave (2.1) que contengan los puntos del interior del segmento de equilibrios L_k .

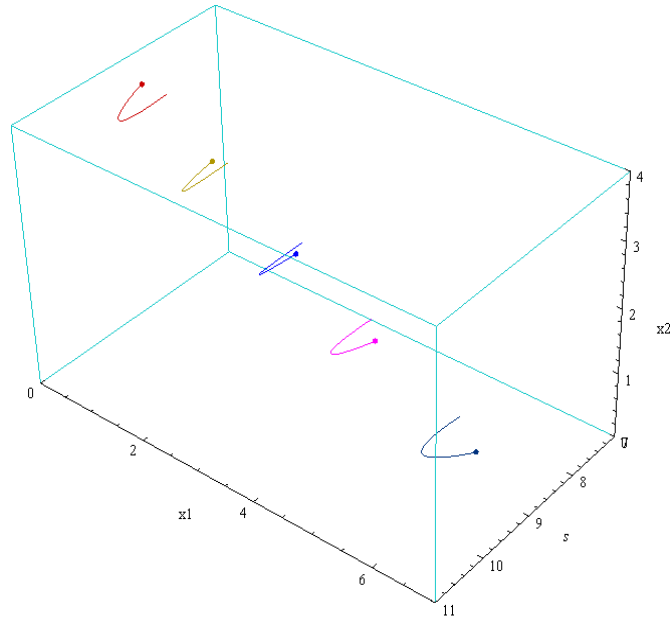


Figura B.90: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b12} = 13.2009$ y campo \tilde{f}_j .

Condición para $k_{b11} = 13.2487$

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$L_k \leftrightarrow \xi_2 = 1.42857(2.88621 - 0.4\xi_1).$$

$$La_{k1} \leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 1.42857(2.88621 - 0.4\xi_1).$$

$$La_{k2} \leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.714286(-0.326377 - 0.008616\xi_1).$$

$$Lb_{k1} \leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.7142\sqrt{2.8(0.050577 + 0.00013\xi_1) - (-0.3232 - 0.0078\xi_1)^2}.$$

$$Lb_{k2} \leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.7142\sqrt{2.8(0.05233 + 0.0003\xi_1) - (-0.32637 - 0.0086\xi_1)^2}.$$

asintóticamente estable; sin embargo en este caso no existen variedades invariantes estables locales que contengan puntos de equilibrios del interior del segmento L_k . En este caso como la variación media del radio de oscilación es alta debido a los valores relativamente altos de las componentes reales de sus valores propios, luego el retrato de fase da la falsa impresión de tener el mismo comportamiento de los puntos del segmento de equilibrios L_k del tipo nodo-nodo asintóticamente estable, como se observa en el retrato de fase de la Figura B.92. Las trayectorias del sistema

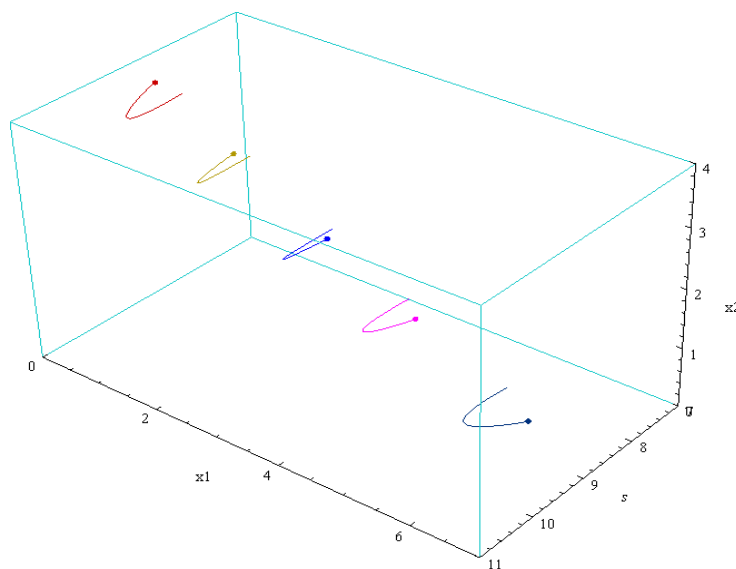


Figura B.92: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b11} = 13.2487$ y campo f_j .

con condiciones iniciales en el octante positivo permanecen en éste, son acotadas y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios L_k ; por lo tanto el segmento L_k es a un *atractor* del sistema y su cuenca de atractividad es el octante positivo. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el k -estratega, el r -estratega, y la presa.

Un comportamiento semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.93 se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{b11}$. Como se puede observar en las Figuras B.92 y B.93, los

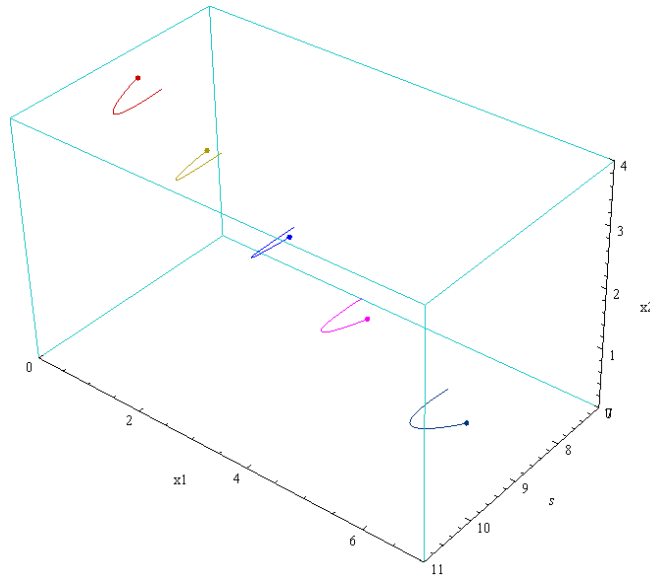


Figura B.93: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b11} = 13.2487$ y campo \tilde{f}_j .

retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ no puede afirmarse que son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k porque la Proposición 98 no aplica en este caso, ya que no existen variedades invariantes estables para el sistema no suave (2.1) que contengan los puntos del interior del segmento de equilibrios L_k .

Condición para $k_{a21} = 22.2717$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$L_k \leftrightarrow \xi_2 = 1.42857(5.3631 - 0.4\xi_1).$$

$$La_{k1} \leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.714286(2.77556 \times 10^{-17} - 0.00784354\xi_1).$$

$$La_{k2} \leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.714286(-0.00574125 - 0.00861627\xi_1).$$

$$Lb_{k1} \leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.7142\sqrt{2.8(0.0939 + 0.0001\xi_1) - (2.775 \times 10^{-17} - 0.0078\xi_1)^2}.$$

$$Lb_{k2} \leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.7142\sqrt{2.8(0.0980 + 0.00031\xi_1) - (-0.0057412 - 0.0086\xi_1)^2}.$$

$$La_k \leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{-0.00574125 - 0.00861627\xi_1}{\sqrt{2.8(0.09800 + 0.00031\xi_1) - (-0.005741 - 0.00861\xi_1)^2}} + \frac{2.77556 \times 10^{-17} - 0.00784354\xi_1}{\sqrt{2.8(0.0939819 + 0.0001333\xi_1) - (2.7755 \times 10^{-17} - 0.007843\xi_1)^2}}.$$

$$0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.$$

En la Figura B.94 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$ y La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k . Como los segmentos de curva Lb_{k1} , Lb_{k2} están definidos

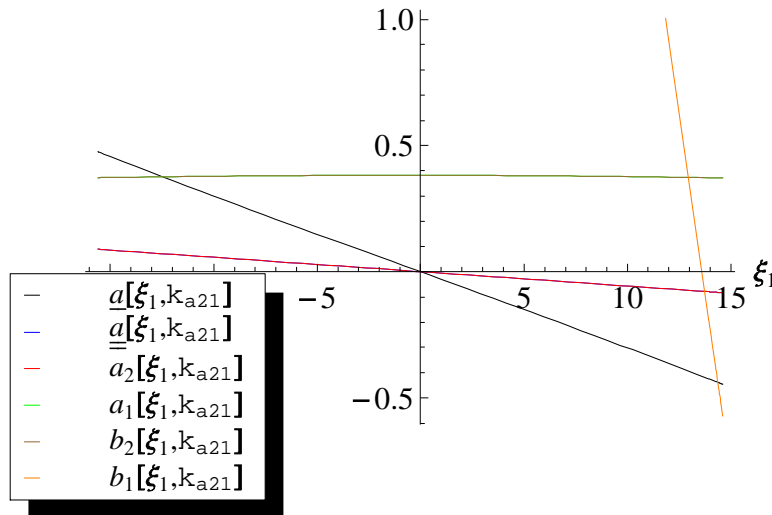


Figura B.94: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , para $k_{a21} = 22.2717$.

en el dominio de L_k y el segmento de curva La_k se encuentran debajo del eje ξ_1 , entonces en los subsistemas del sistema (2.1) asociado a los campos $f_1(s, x_1, x_2)$ y $f_2(s, x_1, x_2)$, los puntos del segmento de equilibrios L_k se comportan como focos estables, Corolario 78. Por consiguiente existe una vecindad del segmento de equilibrios para el cual las soluciones con condiciones iniciales en esta vecindad tiende a un punto del segmento L_k cuando t tiende a infinito, Teorema 141. Además el retrato de fase se asemeja al del sistema no suave (2.1) cuando existen variedades invari-

antes y cada punto del segmento de equilibrios L_k se comportan como foco-foco asintóticamente estables; sin embargo en este caso no existen variedades invariantes estables locales que contengan puntos de equilibrios del interior del segmento L_k . En este caso la variación media del radio de oscilación es baja debido a los valores relativamente bajos de las componentes reales de sus valores propios y las órbitas se desplazan en dirección hacia abajo como los sistemas de tipo elíptico debido a la conmutación del sistema no suave (2.1) por la Observación 134 y la parte i) de 137, ya que $\left(\frac{\partial_s p_2(\lambda, a_2)}{\partial_s p_2(\lambda, a_1)} - \frac{\partial_s p_1(\lambda, a_2)}{\partial_s p_1(\lambda, a_1)} = -0.0225186 < 0\right)$, como se puede apreciar en el retrato de fase de la Figura B.95. Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales en el

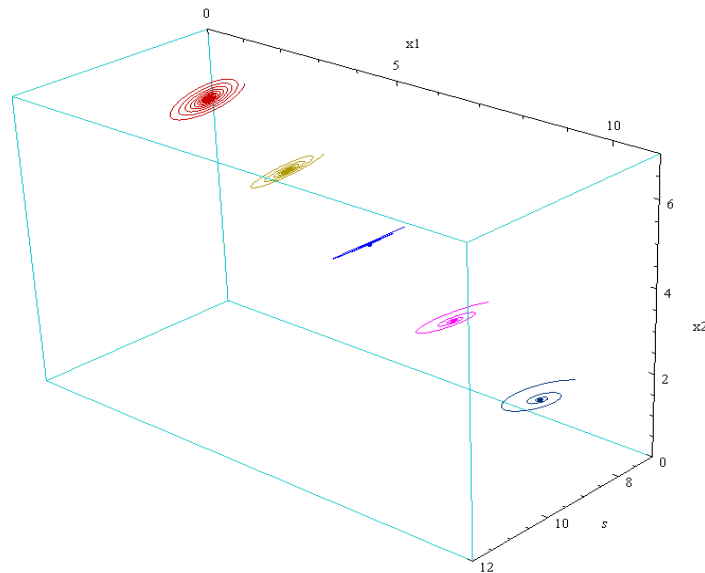


Figura B.95: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a21} = 22.2717$ y campo f_j .

octante positivo permanecen en éste, son acotadas y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios L_k ; por lo tanto el segmento L_k es a un *atractor* del sistema y su cuenca de atractividad es el octante positivo. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el *k-estratega*, el *r-estratega*, y la presa.

Un comportamiento semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.96, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de

bifurcación $k = k_{a21}$. Como se puede observar en las Figuras B.95 y B.96, los retratos de fase del sistema (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ no se puede afirmar que son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k , porque el Corolario 101 no aplica en este caso, ya que no existen variedades invariantes estables para el sistema no suave (2.1) que contengan puntos del interior del segmento de equilibrios L_k .

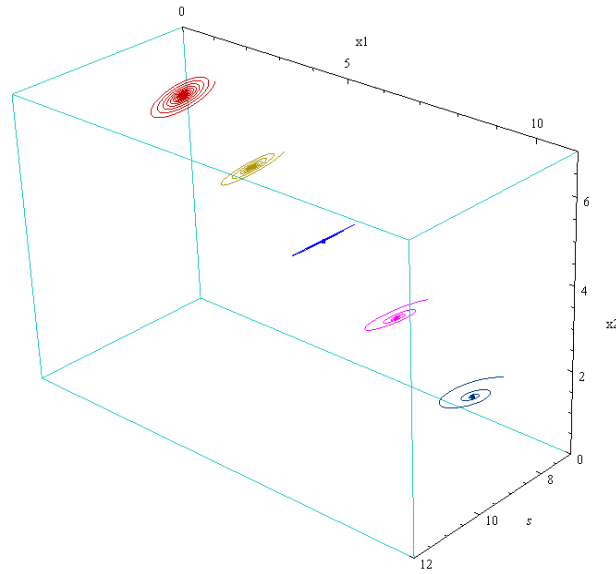


Figura B.96: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a21} = 22.2717$ y campo \tilde{f}_j .

Condición para $k_{a22} = 22.5467$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$L_k \leftrightarrow \xi_2 = 1.42857(5.40745 - 0.4\xi_1).$$

$$La_{k1} \leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.714286(0.00578873 - 0.00784354\xi_1).$$

$$La_{k2} \leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.714286(2.77556 \times 10^{-17} - 0.00861627\xi_1).$$

$$Lb_{k1} \leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.7142\sqrt{2.8(0.0947 + 0.000133\xi_1) - (0.005788 - 0.00784\xi_1)^2}.$$

$$Lb_{k2} \leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.7142\sqrt{2.8(0.098 + 0.0003\xi_1) - (2.7755 \times 10^{-17} - 0.0086\xi_1)^2}.$$

$$La_k \leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{2.77556 \times 10^{-17} - 0.00861627\xi_1}{\sqrt{2.8(0.09881 + 0.000313\xi_1) - (2.7755 \times 10^{-17} - 0.0086\xi_1)^2}} + \frac{0.00578873 - 0.0078435\xi_1}{\sqrt{2.8(0.0947591 + 0.0001333\xi_1) - (0.005788 - 0.007843\xi_1)^2}}.$$

$$0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.$$

En la Figura B.97 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k .

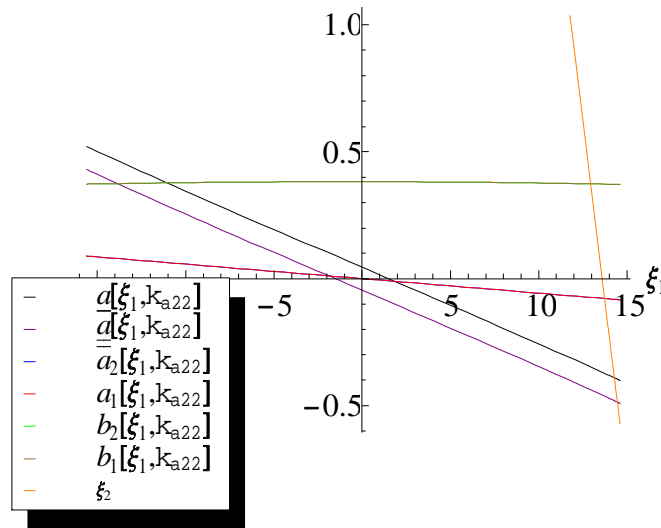


Figura B.97: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k para $k_{a22} = 22.5467$.

Como los segmentos de curva Lb_{k1} , Lb_{k2} están definidos en el dominio de L_k y los segmentos de curva $La_{k,}$, $L\underline{a}_k$ decrecen por el Lema 132, por consiguiente la intersección de las curvas $L\underline{a}_k$ y La_k con el eje ξ_1 , puntos $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a22}), \tilde{\xi}_2(k_{a22}))$ y $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a22}), \tilde{\xi}_2(k_{a22}))$ respectivamente dividen L_k en tres partes (*dos de las cuales pueden ser vacías*). Por lo tanto existe dos entornos tubulares, el primero es entorno tubular de los puntos del segmento de equilibrios $\widehat{L}_k \subset L_k$ a la derecha del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a22}), \tilde{\xi}_2(k_{a22}))$ en el cual las soluciones con condición iniciales en esta vecindad tienden a puntos del segmento L_k cuando t tiende a más infinito, es decir la parte de

L_k a la derecha del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a22}), \tilde{\xi}_2(k_{a22}))$ es un atractor del sistema, Teorema 141. El otro entorno tubular, el de los puntos del segmento de equilibrios $\widehat{L}_k \subset L_k$ a la izquierda del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a22}), \tilde{\xi}_2(k_{a22}))$ es vacío; sin embargo las órbitas con condiciones iniciales entre los puntos $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a22}), \tilde{\xi}_2(k_{a22}))$ y $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a22}), \tilde{\xi}_2(k_{a22}))$ en la zona de transición descienden a lo largo del segmento de equilibrios por la Observación 134, ya que $\left(\frac{\partial_s p_2(\lambda, a_2)}{\partial_s p_2(\lambda, a_1)} - \frac{\partial_s p_1(\lambda, a_2)}{\partial_s p_1(\lambda, a_1)} = -0.0225186\right) < 0$, y alcanzan el entorno tubular de los puntos de $\widehat{L}_k \subset L_k$ a la derecha del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a22}), \tilde{\xi}_2(k_{a22}))$, en el cual convergen a puntos del segmento L_k cuando t tiende a más infinito, como se observa en el retrato de fase de la Figura B.98. Por consiguiente las trayectorias del sis-

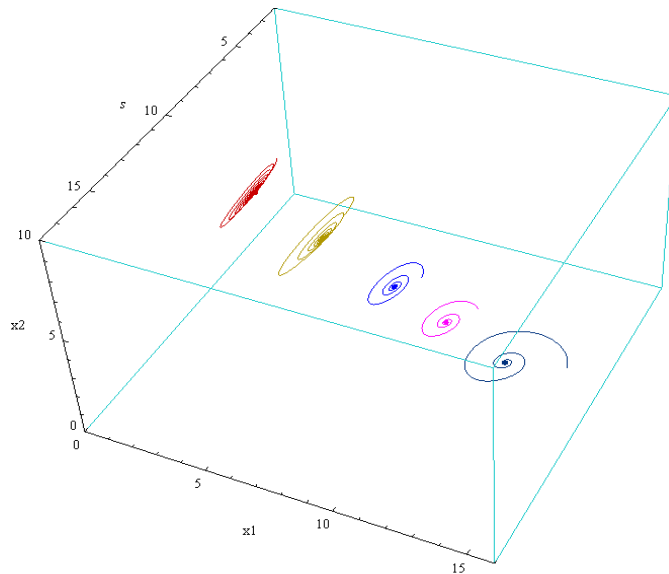


Figura B.98: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a22} = 22.5467$ y campo f_j .

tema con condiciones iniciales en un entorno tubular suficientemente pequeño de los puntos de L_k a la derecha del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a22}), \tilde{\xi}_2(k_{a22}))$, en el octante positivo permanecen en éste, son acotadas y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios L_k ; por lo tanto la parte del segmento L_k a la derecha del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a22}), \tilde{\xi}_2(k_{a22}))$ es a un *atractor* del sistema. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el *k-estratega*, el *r-estratega* y la presa. Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales en un entorno tubular suficientemente pequeño de los puntos de L_k ,

entre los puntos $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a22}), \tilde{\xi}_2(k_{a22}))$ y $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a22}), \tilde{\xi}_2(k_{a22}))$ en la zona de transición se alejan del segmento L_k . Luego los equilibrios en este caso no representan coexistencia estable entre el k -estratega, el r -estratega y la presa, porque los equilibrios del sistema ahora no son estables desde el punto de vista de Lyapunov; sin embargo las órbitas descienden a lo largo del segmento de equilibrios L_k por la Observación 134 y la parte iv) de la Proposición 137, ya que $\left(\frac{\partial_s p_2(\lambda, a_2)}{\partial_s p_2(\lambda, a_1)} - \frac{\partial_s p_1(\lambda, a_2)}{\partial_s p_1(\lambda, a_1)} = -0.0225186\right) < 0$, y alcanzan el entorno tubular de los puntos de $\hat{L}_k \subset L_k$ a la derecha del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a22}), \tilde{\xi}_2(k_{a22}))$, en el cual convergen a puntos del segmento L_k cuando t tiende a más infinito; significando la oscilación de coexistencia entre las tres especies es posible y la pérdida de terreno del k -estratega frente al r -estratega.

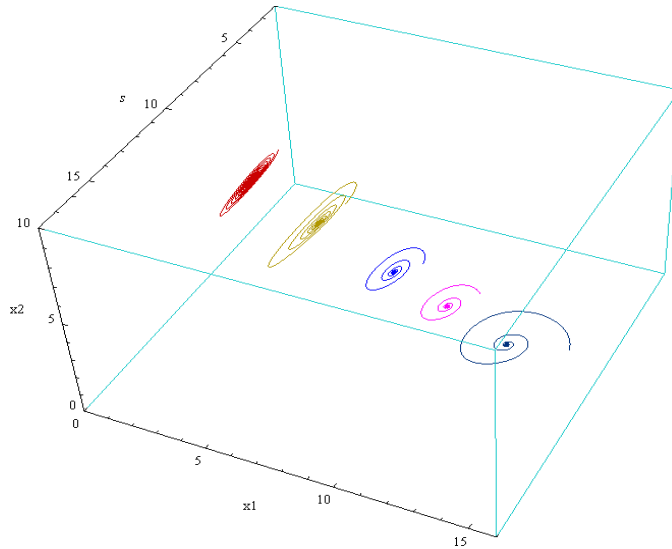


Figura B.99: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a22} = 22.5467$ y campo \tilde{f}_j .

Un comportamiento semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, \xi_1, x_2)$. En la Figura B.99, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{a22}$. Como se puede observar en las Figuras B.98 y B.99, los retratos de fase del sistema (2.1) asociado a los campos $f_j(s, \xi_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, \xi_1, x_2)$ no se puede afirmar que son topológicamente

equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k , porque el Corolario 101 no aplica en este caso, ya que no existen variedades invariantes estables para el sistema no suave (2.1) que contengan los puntos del interior del segmento de equilibrios L_k .

Condición para $k_{api} = 29$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned}
 L_k &\leftrightarrow \xi_2 = 1.42857(6.2069 - 0.4\xi_1). \\
 La_{k1} &\leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.714286(0.110134 - 0.00784354\xi_1). \\
 La_{k2} &\leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.714286(0.103489 - 0.00861627\xi_1). \\
 Lb_{k1} &\leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.7142\sqrt{2.8(0.10876 + 0.000133\xi_1) - (0.1101 - 0.0078\xi_1)^2}. \\
 Lb_{k2} &\leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.7142\sqrt{2.8(0.113 + 0.00031\xi_1) - (0.10348 - 0.0086\xi_1)^2}. \\
 La_k &\leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{0.103489 - 0.00861627\xi_1}{\sqrt{2.8(0.11342 + 0.000313\xi_1) - (0.10348 - 0.008616\xi_1)^2}} \\
 &\quad + \frac{0.110134 - 0.00784354\xi_1}{\sqrt{2.8(0.108768 + 0.000133\xi_1) - (0.110134 - 0.007843\xi_1)^2}}. \\
 0 &\leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.
 \end{aligned}$$

En la Figura B.100 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$ y La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k . Como los segmentos de curva Lb_{k1} , Lb_{k2} están definidas en el dominio de L_k y los segmentos de curva $L\underline{a}_k$, $L\underline{\underline{a}}_k$ decrecen por el Lema 132, por lo tanto la intersección de las curva $L\underline{a}_k$ y $L\underline{\underline{a}}_k$ con el eje ξ_1 , puntos $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{api}), \tilde{\xi}_2(k_{api}))$ y $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{api}), \tilde{\xi}_2(k_{api}))$ respectivamente, dividen L_k en tres partes (*dos de las cuales pueden ser vacías*). Por consiguiente existen dos entornos tubulares, el primero es entorno de los puntos del segmento de equilibrios $\widehat{L}_k \subset L_k$ a la izquierda del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{api}), \tilde{\xi}_2(k_{api}))$ en el cual las soluciones con condición iniciales en esta vecindad se alejan del segmento L_k cuando t crece, es decir la parte de L_k a la izquierda del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{api}), \tilde{\xi}_2(k_{api}))$ es un repulsor del sistema. Los equilibrios en este caso no representan coexistencia estable entre el k -estratega, el

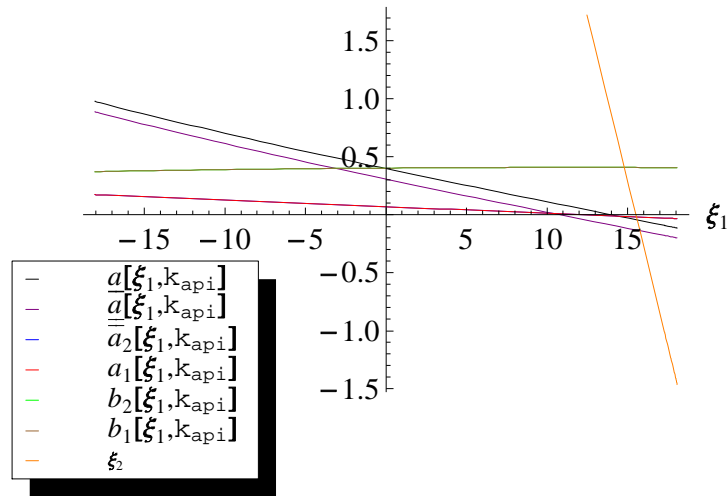


Figura B.100: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$ y La_k , para $k_{api} = 29$.

r-estratega y la presa, porque los equilibrios del sistema ahora no son estables desde el punto de vista de Lyapunov; sin embargo las órbitas descienden a lo largo del segmento de equilibrios por la Observación 134 y la parte iv) de la proposición 137,

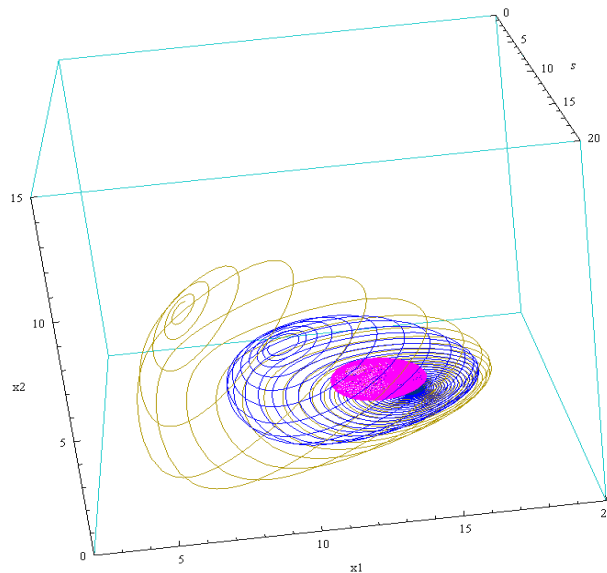


Figura B.101: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{api} = 29$ y campo f_j .

ya que $\left(\frac{\partial_s p_2(\lambda, a_2)}{\partial_s p_2(\lambda, a_1)} - \frac{\partial_s p_1(\lambda, a_2)}{\partial_s p_1(\lambda, a_1)} = -0.0225186\right) < 0$, alcanzando el otro entorno tubular, el de los puntos del segmento de equilibrios $\widehat{L}_k \subset L_k$ a la derecha del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{api}), \tilde{\xi}_2(k_{api}))$, donde las trayectorias del sistema, permanecen en el octante positivo, son acotadas y tienden asintóticamente hacia la línea de equilibrios L_k , significando que la coexistencia estable entre el k -estratega, el r -estratega y la presa es posible, y la pérdida de terreno del k -estratega frente al r -estratega, debida a la conmutación del sistema no suave (2.1), Teorema 141; como se puede observar en el retrato de fase de la Figura B.101.

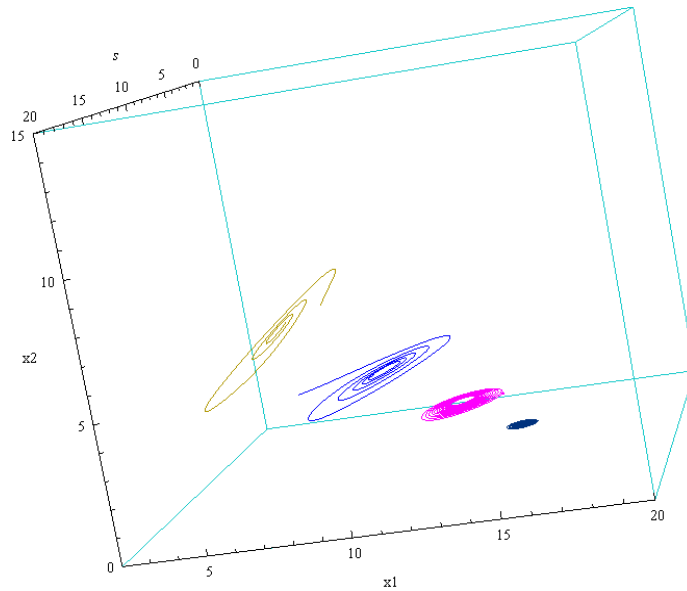


Figura B.102: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{api} = 29$ y campo \tilde{f}_j .

Un comportamiento semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, \xi_1, x_2)$. En la Figura B.102, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{api}$. Como se puede observar en las Figuras B.101 y B.102, los retratos de fase del sistema (2.1) asociado a los campos $f_j(s, \xi_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, \xi_1, x_2)$ no se puede afirmar que son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k , porque el Corolario 101 no aplica en este caso, ya que no existen variedades

invariantes estables para el sistema no suave (2.1) que contengan los puntos del interior del segmento de equilibrios L_k .

Condición para $k_{a11} = 30.1257$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$L_k \leftrightarrow \xi_2 = 1.42857(6.31127 - 0.4\xi_1).$$

$$La_{k1} \leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.714286(0.123757 - 0.00784354\xi_1).$$

$$La_{k2} \leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.714286(0.117 - 0.00856644\xi_1).$$

$$Lb_{k1} \leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.7142\sqrt{2.8(0.11059 + 0.00013\xi_1) - (0.1237 - 0.0078\xi_1)^2}.$$

$$Lb_{k2} \leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.7142\sqrt{2.8(0.1153 + 0.000145x_1) - (0.117 - 0.00856\xi_1)^2}.$$

$$La_k \leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{0.117 - 0.00856644\xi_1}{\sqrt{2.8(0.115327 + 0.0001456\xi_1) - (0.117 - 0.00856\xi_1)^2}} + \frac{0.123757 - 0.00784354\xi_1}{\sqrt{2.8(0.110597 + 0.0001333\xi_1) - (0.123757 - 0.007843\xi_1)^2}}.$$

$$0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.$$

En la Figura B.103 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k

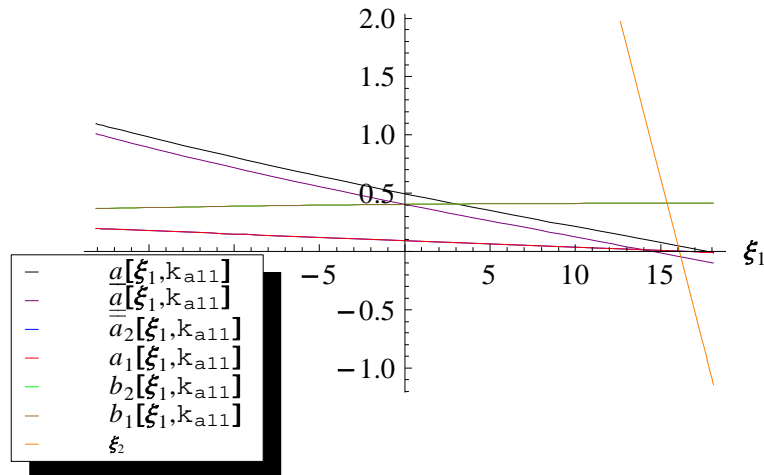


Figura B.103: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , para $k_{a11} = 30.1257$.

que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k . Como los segmentos de curva Lb_{k_1} , Lb_{k_2} están definidas en el

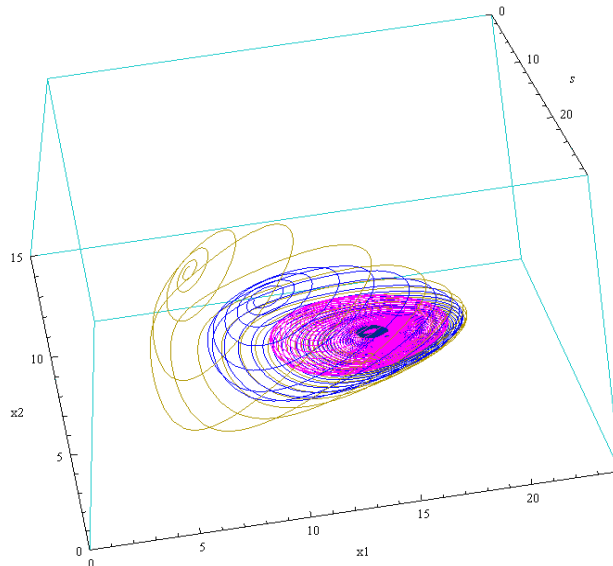


Figura B.104: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a11} = 30.1257$ y campo f_j .

dominio de L_k y los segmentos de curva $L\bar{a}_k$, $L\underline{a}_k$ decrecen por el Lema 132, por lo tanto la intersección de las curva $L\bar{a}_k$ y $L\underline{a}_k$ con el eje ξ_1 , puntos $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a11}), \tilde{\xi}_2(k_{a11}))$ y $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a11}), \tilde{\xi}_2(k_{a11}))$ respectivamente, dividen L_k en tres partes (dos de los cuales pueden ser vacíos). Por consiguiente existen dos entornos tubulares, el primero es entorno de los puntos del segmento de equilibrios $\widehat{L}_k \subset L_k$ a la izquierda del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a11}), \tilde{\xi}_2(k_{a11}))$ en el cual las soluciones con condición iniciales en esta vecindad se alejan del segmento L_k cuando t crece, es decir la parte de L_k a la izquierda del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a11}), \tilde{\xi}_2(k_{a11}))$ es un repulsor del sistema; sin embargo las órbitas descienden a lo largo del segmento de equilibrios por la Observación 134 y la parte iv) de la Proposición 137, ya que $\left(\frac{\partial_s p_2(\lambda, a_2)}{\partial_s p_2(\lambda, a_1)} - \frac{\partial_s p_1(\lambda, a_2)}{\partial_s p_1(\lambda, a_1)} = -0.0225186\right) < 0$, y alcanzan el plano coordenado $x_2 = 0$, el cual es una variedad invariante del sistema y allí convergen, ya que $k_{a11} < k_{a1}$, Teorema 141. El otro entorno tubular, el de los puntos del segmento de equilibrios $\widehat{L}_k \subset L_k$ a la derecha del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a11}), \tilde{\xi}_2(k_{a11}))$ en este caso es vacío, ya que $\tilde{\xi}_1(k_{a11}) > \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{P(\lambda, a_1)}$. Ahora el k -estratega pierde terreno

frente al r -estratega y al fin desaparece por efecto de la bifurcación de zip no suave, mientras la coexistencia estable entre el r -estratega y la presa persiste como se puede observar en el retrato de fase de la Figura B.104. Dado que crece la inestabilidad del segmento de equilibrios con el parámetro de bifurcación k se observa una mayor oscilación de las órbitas en su decaimiento a lo largo del segmento de equilibrios con respecto al caso anterior.

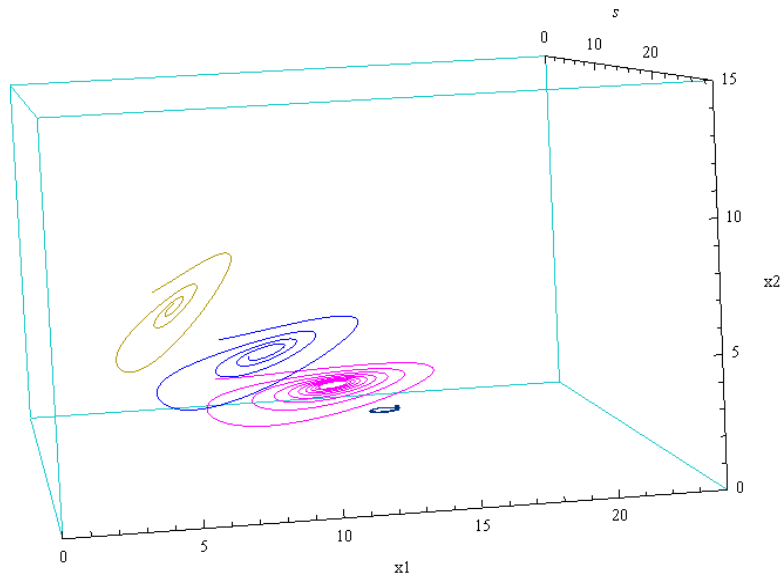


Figura B.105: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a11} = 30.1257$ y campo \tilde{f}_j .

Un comportamiento semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, \xi_1, x_2)$. En la Figura B.104, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{a11}$. Como se puede observar en las Figuras B.104 y B.105, los retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, \xi_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, \xi_1, x_2)$ no se puede afirmar que son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k porque la Proposición 98 no aplica en este caso, ya que no existen variedades invariantes estables para el sistema no suave (2.1) que contengan los puntos del interior del segmento de equilibrios L_k .

Condición para $k_{a12} = 32.2307$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$L_k \leftrightarrow \xi_2 = 1.42857(6.48687 - 0.4\xi_1).$$

$$La_{k1} \leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.714286(0.146676 - 0.00784354\xi_1).$$

$$La_{k2} \leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.714286(0.139731 - 0.00861627\xi_1).$$

$$Lb_{k1} \leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.7142\sqrt{2.8(0.1185 + 0.000133\xi_1) - (0.14667 - 0.00784\xi_1)^2}.$$

$$Lb_{k2} \leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.7142\sqrt{2.8(0.11367 + 0.00014\xi_1) - (0.13973 - 0.0086\xi_1)^2}.$$

$$La_k \leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{0.139731 - 0.00861627\xi_1}{\sqrt{2.8(0.11367 + 0.0001456\xi_1) - (0.139731 - 0.008616\xi_1)^2}} + \frac{0.146676 - 0.00784354\xi_1}{\sqrt{2.8(0.118536 + 0.0001333\xi_1) - (0.146676 - 0.007843\xi_1)^2}}.$$

$$0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.$$

En la Figura B.106 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k

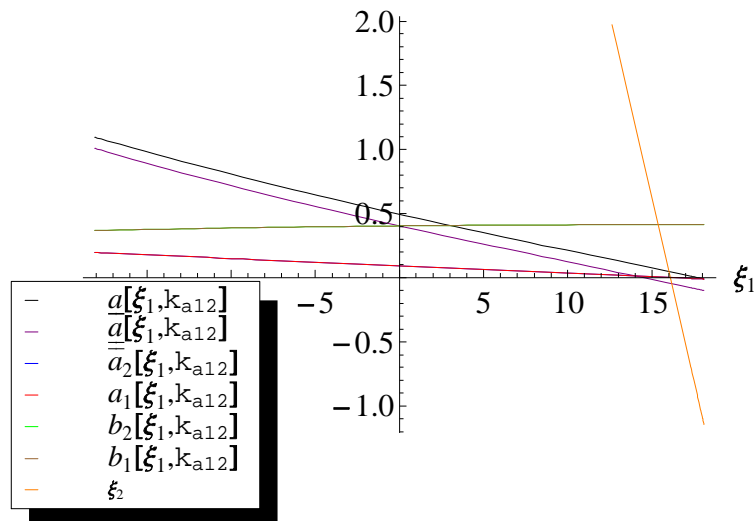


Figura B.106: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , para $k_{a12} = 32.2307$.

que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de

equilibrios L_k . Como los segmentos de curva Lb_{k1} , Lb_{k2} están definidos en el dominio de L_k y el segmentos de curva $L\underline{a}_k$ se encuentran encima del eje ξ_1 en el dominio de L_k , por lo tanto existe un entorno tubular de L_k en el cual las soluciones con condición iniciales en esta vecindad se alejan del segmento L_k cuando t crece, es decir L_k es un repulsor del sistema, Teorema 141. Sin embargo las órbitas descienden a lo largo del segmento de equilibrios por la Observación 134 y la parte iv) de la Proposición 137, ya que $\left(\frac{\partial_s p_2(\lambda, a_2)}{\partial_s p_2(\lambda, a_1)} - \frac{\partial_s p_1(\lambda, a_2)}{\partial_s p_1(\lambda, a_1)} = -0.0225186\right) < 0$, y alcanzan el plano coordenado $x_2 = 0$, el cual es una variedad invariante del sistema, donde forman ciclos límites, los cuales son orbitalmente asintóticamente estables en desarrollo de la bifurcación de Hopf-Zou & Küpper no-suave de acuerdo con el Teorema 121, significando la oscilación de coexistencia entre el r -estratega y la presa como se puede observar en el retrato de fase de la Figura B.107.

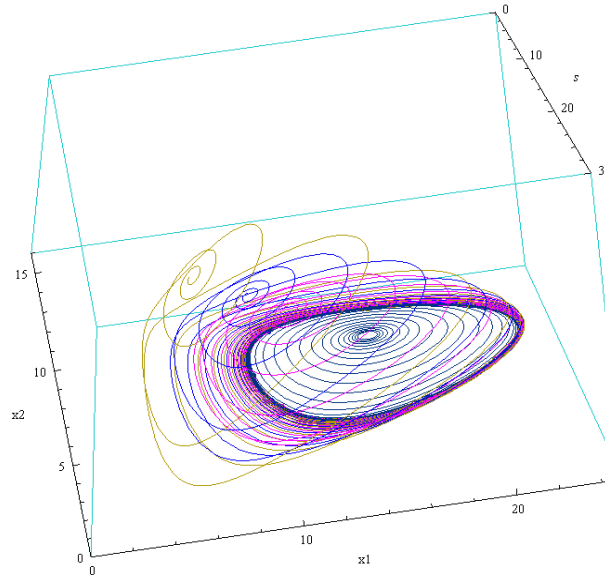


Figura B.107: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a12} = 32.2307$ y campo f_j .

Un comportamiento semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, \xi_1, x_2)$. En la Figura B.108, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{a12}$. Como se puede observar en las Figuras B.107 y B.108, los

retratos fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ no se puede afirmar que son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k , porque la Proposición 98 no aplica en este caso, ya que no existen variedades invariantes estables para el sistema no suave (2.1) que contengan los puntos del interior del segmento de equilibrios L_k .

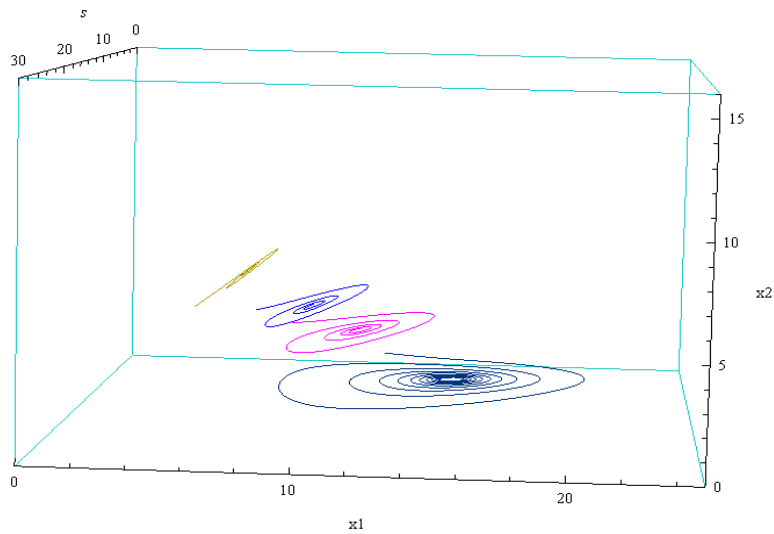


Figura B.108: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a12} = 32.2307$ y campo \tilde{f}_j .

B.6 Modelo con variedad invariante del tipo 2

Los siguientes son los parámetros del modelo natural:

Parámetros de la respuesta funcional $p_1(s, a)$

$$\begin{aligned}
 A_1 &= 1; & B_1 &= 1; & D_1 &= 1; & c_1 &= 1; \\
 d_{11} &= 2.5; & d_{21} &= \frac{65}{11}; & F_1 &= 0; & m_1 &= 1; \\
 n_1 &= 1; & q_1 &= 1; & r_1 &= 1; & u_1 &= 1; \\
 v_1 &= 0; & \lambda &= 10; & \gamma &= 1; & & ..
 \end{aligned}$$

Parámetros de la respuesta funcional $p_3(s, a)$

$$\begin{aligned} A_2 &= 3; & B_2 &= 6; & D_2 &= 2; & c_2 &= 2; \\ d_{12} &= 2.5; & d_{22} &= \frac{65}{11}; & F_2 &= 0; & m_2 &= 1; \\ n_2 &= 0.926125; & q_2 &= 1; & r_2 &= 1; & u_2 &= 1; \\ v_2 &= 0; & \lambda &= 10; & \gamma &= 1; & &.. \end{aligned}$$

La resistencia ambiental g de la presa y la respuesta funcional p de los predadores adoptan la forma:

$$\begin{aligned} p(s, a) &= \begin{cases} \frac{s}{1+a} + \frac{s}{s+a}, & \text{si } s \leq \lambda \\ \frac{10}{1+a} - \frac{10}{10+a} - \frac{25.3073}{2+6a} + \left(\frac{.3 s^{.926125}}{2+6a} \right) + \frac{.2s}{a+s}, & \text{si } s > \lambda, \end{cases} \\ g(s, k) &= 1 - \frac{(-1+e^s)s}{(-1+e^k)k}. \end{aligned}$$

La ecuación (B.2) para a_1 es de la forma:

$$\begin{aligned} 0 &= -2.5 + \frac{10}{1+a_1} + \frac{10}{10+a_1} \\ a_1 &= 4.5208. \end{aligned}$$

La ecuación (B.2) para a_2 es de la forma:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{65}{11} + \frac{10}{1+a_2} + \frac{10}{10+a_2} \\ a_2 &= 1.0. \end{aligned}$$

Además, se muestran las gráficas y las ecuaciones paramétricas de la curvas L_k , $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k siguientes

$$\begin{aligned} L_k &= \{(s, \xi_1, x_2) : p(\lambda, a_1)\xi_{11} + p(\lambda, a_2)\xi_{12} = \gamma \lambda g(\lambda, k); \\ &\quad \lambda, \xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0\}. \end{aligned} \tag{B.21}$$

$$La_{k,j} = \{(s, \xi_1, a_j(\xi_1, k)) : s = \lambda, 0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}\}, \tag{B.22}$$

$$Lb_{k,j} = \{(s, \xi_1, b_j(\xi_1, k)) : s = \lambda, 0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}\}, \tag{B.23}$$

$$\begin{aligned} La_k &= \{(s, \xi_1, a(\xi_1, k)) : a(\xi_1, k) = \frac{a_1(\xi_1, k)}{b_1(\xi_1, k)} + \frac{a_2(\xi_1, k)}{b_2(\xi_1, k)}; \\ &\quad s = \lambda, 0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}\}, \end{aligned} \tag{B.24}$$

así como los retratos de fase del sistema para los distintos valores del parámetro de bifurcación k_{bij} y k_{aij} para $i, j = 1, 2$, seleccionados con el propósito de mostrar los

cambios cualitativos que ocurren en el sistema. Los parámetros de bifurcación k_{bij} y k_{aij} para $i, j = 1, 2$, están dados por las ecuaciones

$$K_{bij}(k_{bij}) = \gamma \lambda g(\lambda, k) \partial_s p_j(\lambda, a_i) - \frac{1}{4} \gamma^2 \left(\lambda \partial_s(\lambda, k) + g(\lambda, k) \left(1 - \frac{\lambda \partial_s p_j(\lambda, a_i)}{p_j(\lambda, a_i)} \right) \right)^2 = 0,$$

$$K_{aij}(k_{aij}) = -\lambda p_j(\lambda, a_i) \partial_s g(\lambda, k) + g(\lambda, k) (\lambda \partial_s p_j(\lambda, a_i) - p_j(\lambda, a_i)) = 0,$$

por las Definiciones 37, 41 y la proposición 39. Los valores obtenidos para los puntos de bifurcación k_{bij} y k_{aij} en cada uno de los subsistemas son los siguientes:

subsistema 1

$$K_{b21}(k) = -\frac{1}{4} \left(0.13986 \left(1 - \frac{10(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) + 10 \left(-\frac{10^{10}}{(-1+e^k)k} - \frac{(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) \right)^2 + 5.08264 \left(1 - \frac{10(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) = 0.$$

$$k_{b21} = 10.9819.$$

$$K_{b11}(k) = -\frac{1}{4} \left(0.189705 \left(1 - \frac{10(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) + 10 \left(-\frac{10e^{10}}{(-1+e^k)k} - \frac{(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) \right)^2 + 2.02574 \left(1 - \frac{10(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) = 0.$$

$$k_{b11} = 11.3088.$$

$$K_{a11}(k) = -0.474263 \left(1 - \frac{10(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) - 25 \left(-\frac{10e^{10}}{(-1+e^k)k} - \frac{(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) = 0.$$

$$k_{a11} = 13.7582.$$

$$K_{a21}(k) = -0.826446 \left(1 - \frac{10(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) - 59.0909 \left(-\frac{10e^{10}}{(-1+e^k)k} - \frac{(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) = 0.$$

$$k_{a21} = 14.0384.$$

subsistema 2

$$K_{b22}(k) = -\frac{1}{4} \left(0.476229 \left(1 - \frac{10(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) + 10 \left(-\frac{10e^{10}}{(-1+e^k)k} - \frac{(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) \right)^2 + 3.09501 \left(1 - \frac{10(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) = 0.$$

$$k_{b22} = 11.1048.$$

$$K_{b12}(k) = -\frac{1}{4} \left(0.506582 \left(1 - \frac{10(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) + 10 \left(-\frac{10e^{10}}{(-1+e^k)k} - \frac{(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) \right)^2 + 1.23354 \left(1 - \frac{10(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) = 0.$$

$$k_{b12} = 11.4053.$$

$$K_{a12}(k) = -1.26646 \left(1 - \frac{10(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) - 25 \left(-\frac{10e^{10}}{(-1+e^k)k} - \frac{(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) = 0.$$

$$k_{a12} = 12.8706.$$

$$K_{a22}(k) = -2.81408 \left(1 - \frac{10(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) - 18 \left(-\frac{10e^{10}}{(-1+e^k)k} - \frac{(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) = 0.$$

$$k_{a22} = 12.9255.$$

Condición para $k_{b21} = 10.9819$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned}
 L_k &\leftrightarrow \xi_2 = 0.169231(6.58905 - 2.5\xi_1). \\
 La_{k1} &\leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.0846154(-21.6275 + 0.0736346\xi_1). \\
 La_{k2} &\leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.0846154(-20.3179 + 0.0448391\xi_1). \\
 Lb_{k1} &\leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.0846\sqrt{23.6364(19.7894 - 4.5158\xi_1) - (-21.627 + 0.074\xi_1)^2}. \\
 Lb_{k2} &\leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.0846\sqrt{23.6364(12.0505 - 2.7498\xi_1) - (-20.3179 + 0.045\xi_1)^2}. \\
 La_k &\leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{-20.3179 + 0.0448391\xi_1}{\sqrt{23.6364(12.0505 - 2.7498\xi_1) - (-20.3179 + 0.04483\xi_1)^2}} \\
 &\quad + \frac{-21.6275 + 0.0736346\xi_1}{\sqrt{23.6364(19.7894 - 4.51589\xi_1) - (-21.6275 + 0.07363\xi_1)^2}}. \\
 0 \leq \xi_1 &\leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.
 \end{aligned}$$

En la Figura B.109 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$,

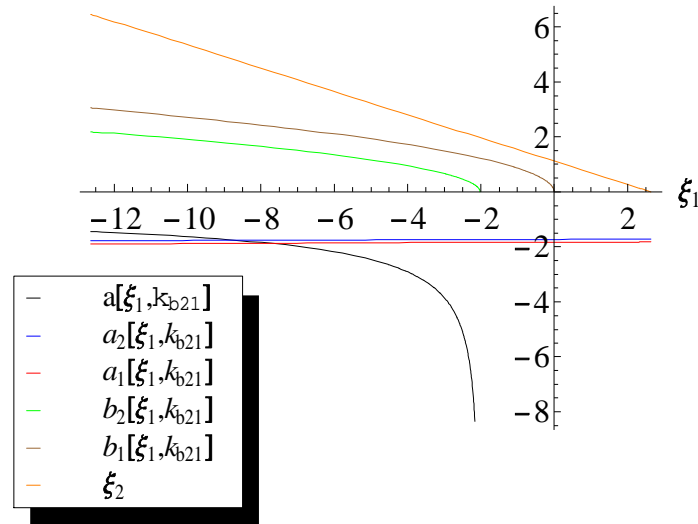


Figura B.109: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , para $k_{b21} = 10.9819$.

La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k . Como los segmentos Lb_{k1} , Lb_{k2} no están definidos debajo del segmento de equilibrios L_k y los segmentos La_{k1} , La_{k2} se encuentran debajo del eje ξ_1 en el dominio de L_k , por lo tanto los puntos del segmento de equilibrios L_k se comportan como nodos estables en cada subsistema del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, Corolario 79. En conclusión los puntos del segmento de equilibrios L_k se comportan como equilibrios del tipo *nodo-nodo* asintóticamente estable en el sistema no suave (2.1), por el Teorema 115, como se puede observar en el retrato de fase de la Figura B.110. Las trayectorias del sistema con condi-

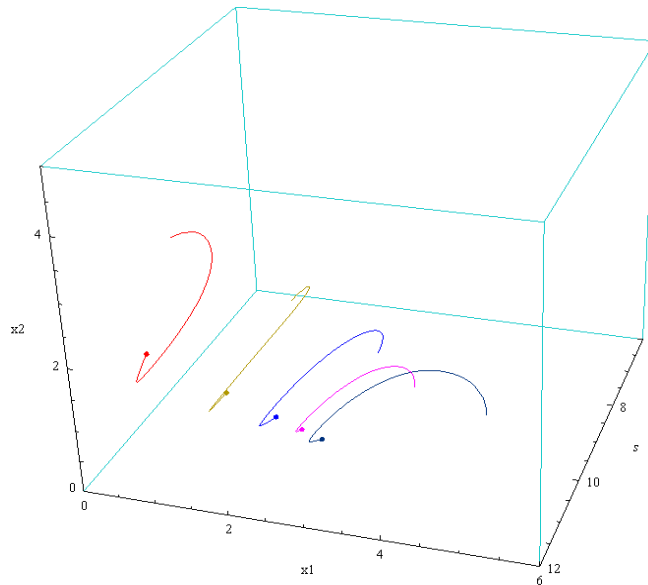


Figura B.110: Retrato de fase con parámetro de bifurcación para $k_{b21} = 10.9819$ y campo f_j .

ciones iniciales en el octante positivo permanecen en éste, son acotadas y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios L_k ; por lo tanto el segmento L_k es a un *atractor* del sistema y su cuenca de atractividad es el octante positivo, Teorema 115. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el *kr-estratega*, el *r-estratega* y la presa.

Un comportamiento semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.111, se presenta un

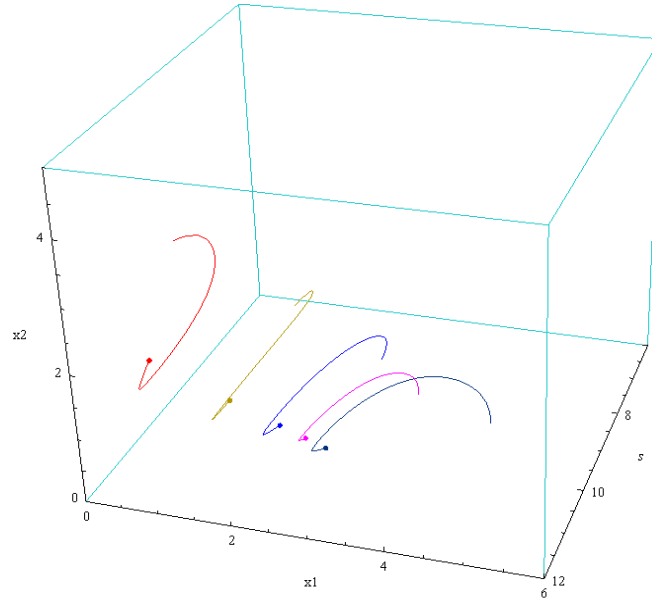


Figura B.111: Retrato de fase con parámetro de bifurcación para $k_{b21} = 10.9819$ y campo \tilde{f}_j .

retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{b21}$. Como se observa en las Figuras B.110 y B.111, los retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k , como se muestra en el Corolario 101.

Condición para $k_{b22} = 11.1048$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$L_k \leftrightarrow \xi_2 = 0.169231(7.01691 - 2.5\xi_1).$$

$$La_{k1} \leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.0846154(-18.811 + 0.0736346\xi_1).$$

$$La_{k2} \leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.0846154(-17.4162 + 0.0448391\xi_1).$$

$$Lb_{k1} \leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.0846\sqrt{23.6364(21.0745 - 4.516\xi_1) - (-18.811 + 0.0736\xi_1)^2}.$$

$$Lb_{k2} \leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.0846\sqrt{23.6364(12.83 - 2.7498\xi_1) - (-17.4162 + 0.04483\xi_1)^2}.$$

$$La_k \leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{-17.4162 + 0.0448391\xi_1}{\sqrt{23.6364(12.833 - 2.7498\xi_1) - (-17.4162 + 0.04483\xi_1)^2}} + \frac{-18.811 + 0.0736346\xi_1}{\sqrt{23.6364.(21.0745 - 4.51589\xi_1) - (-18.811 + 0.0736346\xi_1)^2}}.$$

$$0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.$$

En la Figura B.112 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k . Como el segmento de curva Lb_{k2} no está definida debajo del

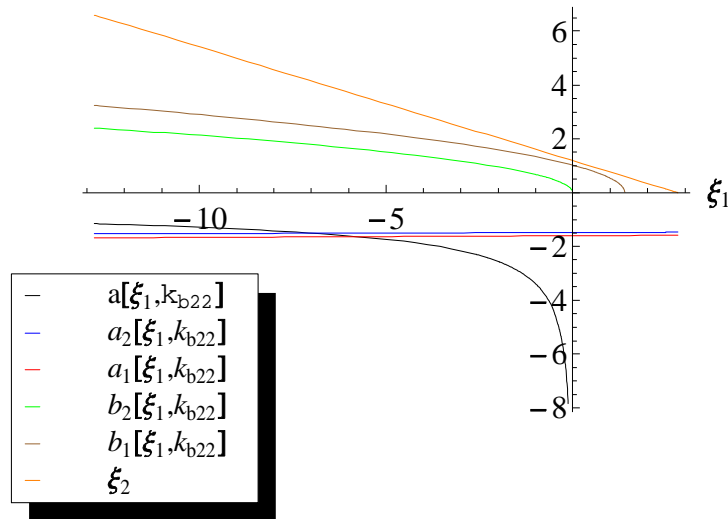


Figura B.112: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , para $k_{b22} = 11.1048$.

segmento de equilibrios L_k y el segmento de curva La_{k2} se encuentran debajo del eje ξ_1 en el dominio de L_k , entonces en el subsistema del sistema no suave (2.1) asociado al campo $f_2(s, x_1, x_2)$ los puntos del segmento de equilibrios L_k restringidos a la variedades invariantes que los contienen se comportan como nodos estables, Corolario 79. También La_{k1} se encuentran debajo del eje ξ_1 en el dominio de L_k , y el segmento de curva Lb_{k1} intersecta el eje ξ_1 en el punto $\bar{\xi}_{11}(k_{b22})$ por lo cual el punto $(\lambda, \bar{\xi}_{11}(k_{b22}), \bar{\xi}_{21}(k_{b22}))$ divide L_k en dos partes (*una de las cuales puede ser vacía*). Por lo tanto en el subsistema del sistema no suave (2.1) asociado al campo

$f_1(s, x_1, x_2)$ los puntos de L_k a la izquierda del punto $(\lambda, \bar{\xi}_{11}(k_{b22}), \bar{\xi}_{21}(k_{b22}))$ son focos estables, los puntos a la derecha son nodos estables, por consiguiente los puntos del segmento de equilibrios L_k a la izquierda del punto $(\lambda, \bar{\xi}_{11}(k_{b22}), \bar{\xi}_{21}(k_{b22}))$ son del tipo nodo-foco estable, y los puntos del segmento de equilibrios L_k a la derecha del punto $(\lambda, \bar{\xi}_{11}(k_{b22}), \bar{\xi}_{21}(k_{b22}))$ son del tipo nodo-nodo asintóticamente estable en el sistema no suave (2.1) sobre la variedad invariante que los contiene, Teorema 115, como se puede observar en el retrato de fase de la Figura B.113. En este caso como la

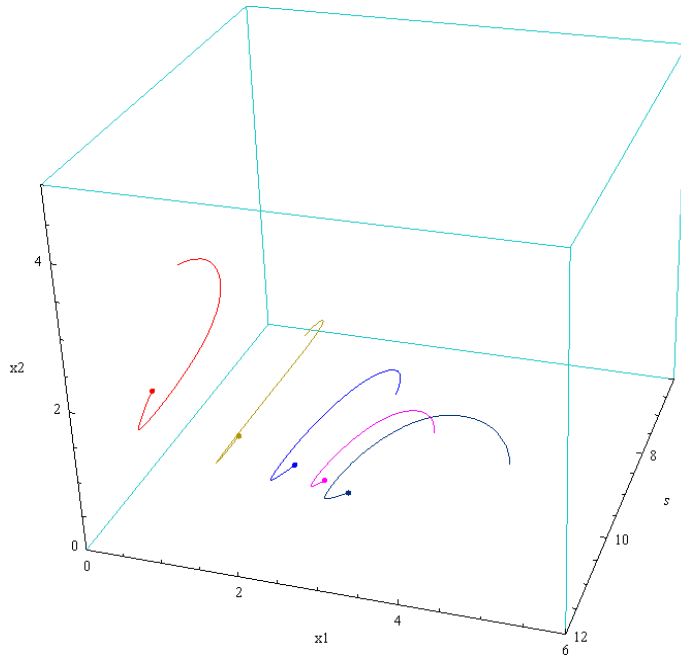


Figura B.113: Retrato de fase con parámetro de bifurcación para $k_{b22} = 11.1048$ y campo f_j .

variación media del radio de oscilación es alta debido a los valores relativamente altos de las componentes reales de sus valores propios μ_{1j} y μ_{2j} (véase Definición 3.6), y los puntos del segmento de equilibrios L_k a la izquierda de el punto $(\lambda, \bar{\xi}_{12}(k), \bar{\xi}_{22}(k))$ son del tipo nodo-foco estables, entonces el retrato de fase da la falsa impresión de tener el mismo comportamiento de los puntos del segmento de equilibrios L_k del tipo nodo-nodo asintóticamente estable, como se puede observar en el retrato de fase de la Figura B.113. Además el retrato de fase de la Figura B.113, luce semejante al retrato de fase al de la Figura B.110, sin embargo son geoméricamente no equivalentes. Las

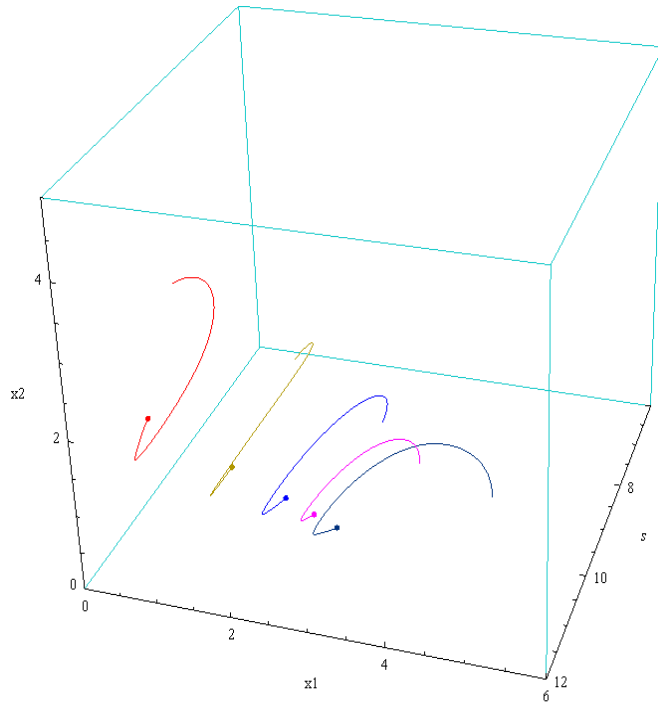


Figura B.114: Retrato de fase con parámetro de bifurcación para $k_{b22} = 11.1048$ y campo \tilde{f}_j .

trayectorias del sistema con condiciones iniciales en el octante positivo permanecen en éste, son acotadas y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios L_k ; por lo tanto el segmento L_k es a un *atractor* del sistema y su cuenca de atractividad es el octante positivo. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el *kr-estratega*, el *r-estratega* y la presa.

Un comportamiento semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado al campo aproximado $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.114, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{b22}$. Como se puede observar en las Figuras B.113 y B.114, los retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k , como se muestra en el Corolario 101.

Condición para $k_{b11} = 11.3088$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$L_k \leftrightarrow \xi_2 = 0.169231(7.61119 - 2.5\xi_1).$$

$$La_{k1} \leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.0846154(-14.8989 + 0.0736346\xi_1).$$

$$La_{k2} \leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.0846154(-13.386 + 0.0448391\xi_1).$$

$$Lb_{k1} \leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.0846\sqrt{23.636(22.859 - 4.5158\xi_1) - (-14.8989 + 0.07363\xi_1)^2}.$$

$$Lb_{k2} \leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.0846\sqrt{23.636(13.920 - 2.7498\xi_1) - (-13.386 + 0.04483\xi_1)^2}.$$

$$La_k \leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{-13.386 + 0.0448391\xi_1}{\sqrt{23.6364.(13.9199 - 2.74989\xi_1) - (-13.386 + 0.04483\xi_1)^2}} + \frac{-14.8989 + 0.0736346\xi_1}{\sqrt{23.6364.(22.8593 - 4.51589\xi_1) - (-14.8989 + 0.07363\xi_1)^2}}.$$

$$0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.$$

En la Figura B.115 se presenta la línea de equilibrios L_k y los trozos de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k . Como el segmento de curva Lb_{k1} está definido en

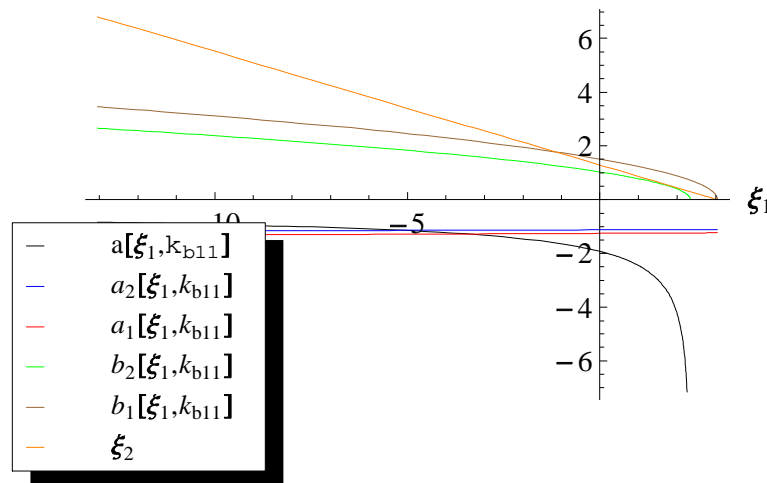


Figura B.115: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , para $k_{b11} = 11.3088$.

el dominio de L_k , y el segmento de curva La_{k1} se encuentran debajo del eje ξ_1 , entonces en el subsistema del sistema no suave (2.1) asociado al campo $f_1(s, x_1, x_2)$ los puntos del segmento de equilibrios L_k restringidos a la variedades invariantes que los contienen se comportan como focos estables. También La_{k2} se encuentran

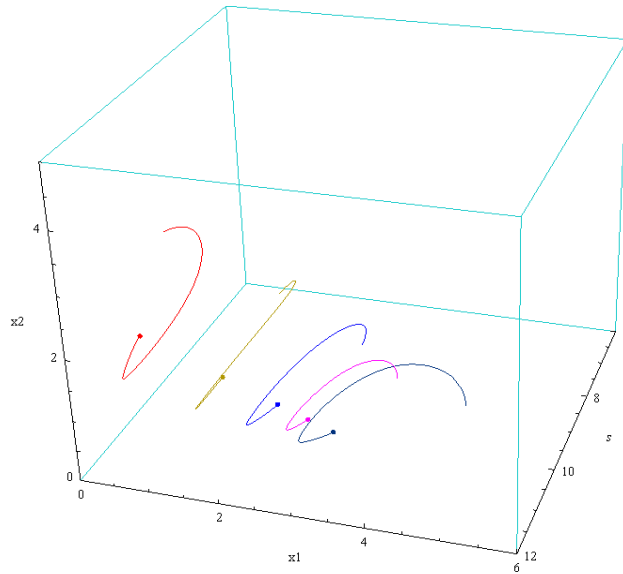


Figura B.116: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b11} = 11.3088$ y campo f_j .

debajo del eje ξ_1 , y el segmento de curva Lb_{k2} intersecta el eje ξ_1 en el punto $\bar{\bar{\xi}}_{12}(k_{b11})$ por lo cual el punto $(\lambda, \bar{\bar{\xi}}_{12}(k_{b11}), \bar{\bar{\xi}}_{22}(k_{b11}))$ divide L_k en dos partes (*una de las cuales puede ser vacía*). Por lo tanto en el subsistema del sistema no suave (2.1) asociado al campo $f_2(s, x_1, x_2)$ los puntos de L_k a la izquierda de este punto son focos estables, los puntos a la derecha son nodos estables, Corolario 79. Por consiguiente los puntos del segmento de equilibrios L_k a la izquierda del punto $(\lambda, \bar{\bar{\xi}}_{12}(k_{b11}), \bar{\bar{\xi}}_{22}(k_{b11}))$ son del tipo foco-foco estable y los puntos del segmento de equilibrios L_k a la derecha de el punto $(\lambda, \bar{\bar{\xi}}_{12}(k_{b11}), \bar{\bar{\xi}}_{22}(k_{b11}))$ son del tipo focos-nodo asintóticamente estable en el sistema no suave (2.1) sobre las variedades invariantes locales estables que los contienen, Teorema 115. También en este caso como la variación media del radio de oscilación es alta debido a los valores relativamente altos de las componentes reales de sus valores propios, el retrato de fase da la falsa impresión de tener el

comportamiento de los puntos del segmento de equilibrios L_k del tipo nodo-nodo asintóticamente estable, como se puede observar en el retrato de fase de la Figura B.116. El retrato de fase de la Figura B.116, luce semejante al retrato de fase de la Figura B.110, sin embargo son geoméricamente no equivalentes. Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales en el octante positivo siguen permaneciendo en éste, son acotadas y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios L_k ; por lo tanto el segmento L_k es a un *atractor* del sistema y su cuenca de atractividad es el octante positivo. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el *kr-estratega*, el *r-estratega* y la presa.

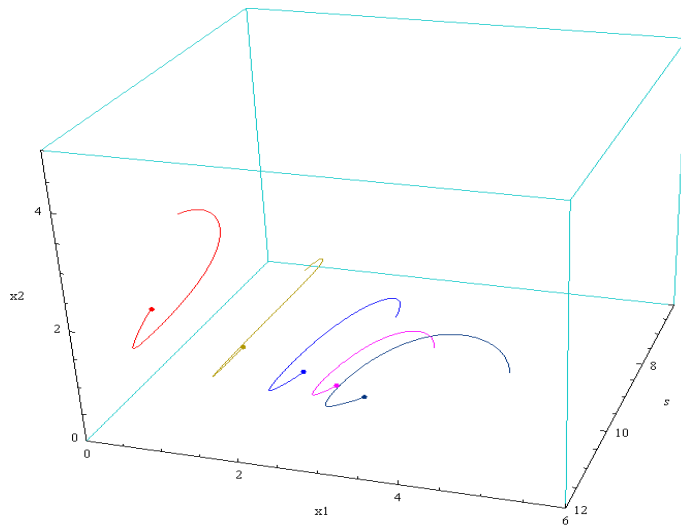


Figura B.117: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b11} = 11.3088$ y campo \tilde{f}_j .

Un comportamiento semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.117, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{b11}$. Como se puede observar en las Figuras B.116 y B.117, los retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k , como se muestra en el Corolario 101.

Condición para $k_{b12} = 10.4053$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$L_k \leftrightarrow \xi_2 = 0.169231(7.84949 - 2.5\xi_1).$$

$$La_{k1} \leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.0846154(-13.3302 + 0.0736346\xi_1).$$

$$La_{k2} \leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.0846154(-11.77 + 0.0448391\xi_1).$$

$$Lb_{k1} \leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.08461\sqrt{23.636(23.575 - 4.5158\xi_1) - (-13.330 + 0.0736\xi_1)^2}.$$

$$Lb_{k2} \leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.08461\sqrt{23.636(14.3557 - 2.7498\xi_1) - (-11.77 + 0.0448\xi_1)^2}.$$

$$La_k \leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{-11.77 + 0.0448391\xi_1}{\sqrt{23.6364.(14.3557 - 2.74989\xi_1) - (-13.386 + 0.04483\xi_1)^2}} + \frac{-13.3302 + 0.0736346\xi_1}{\sqrt{23.6364.(23.575 - 4.51589\xi_1) - (-13.3302 + 0.07363\xi_1)^2}}.$$

$$0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.$$

En la Figura B.118 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k . Como los segmentos de curva Lb_{k1} , Lb_{k2} están definidos en el dominio

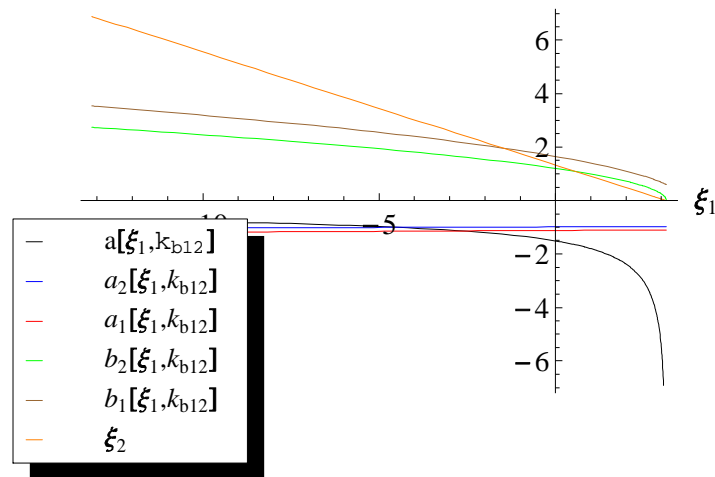


Figura B.118: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , para $k_{b12} = 11.4053$.

de L_k y el segmento de curva La_k se encuentran debajo del eje ξ_1 en el dominio de L_k , entonces los puntos del segmento de equilibrios L_k son del tipo foco-foco asintóticamente estable en el sistema no suave (2.1) sobre las variedades invariantes estables que los contienen, Teorema 115. En este caso como la variación media del radio de oscilación es alta debido a los valores relativamente altos de las componentes reales de sus valores propios μ_{1j} y μ_{2j} (véase Definición 3.6), el retrato de fase da la falsa impresión de tener el mismo comportamiento de los puntos del segmento de equilibrios L_k del tipo nodo-nodo asintóticamente estable, como se puede observar en el retrato de fase de la Figura B.119. El retrato de fase de la Figura B.119, es semejante al retrato de fase de la Figura B.110, sin embargo son geoméricamente no equivalentes. Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales en el octante

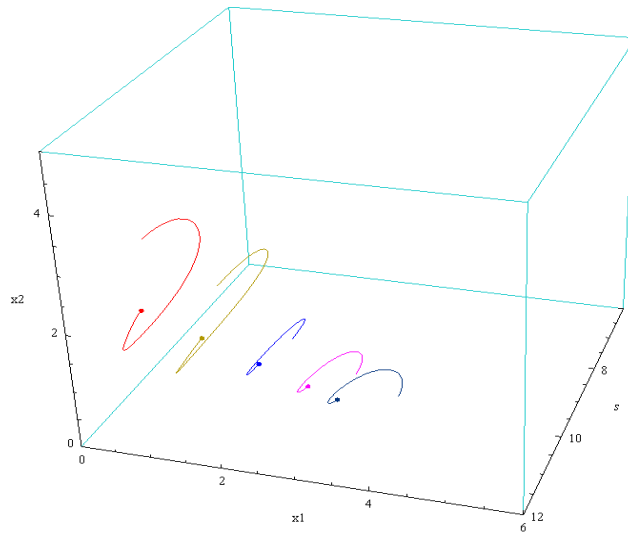


Figura B.119: Retrato de fase con parámetro de bifurcación para $k_{b12} = 11.4053$ y campo \tilde{f}_j .

positivo permanecen en éste, son acotadas y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios L_k ; por lo tanto el segmento L_k es a un *atractor* del sistema y su cuenca de atractividad es el octante positivo. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el *kr-estratega*, el *r-estratega* y la presa.

Un comportamiento semejante al anterior se realiza para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.120, se presenta un

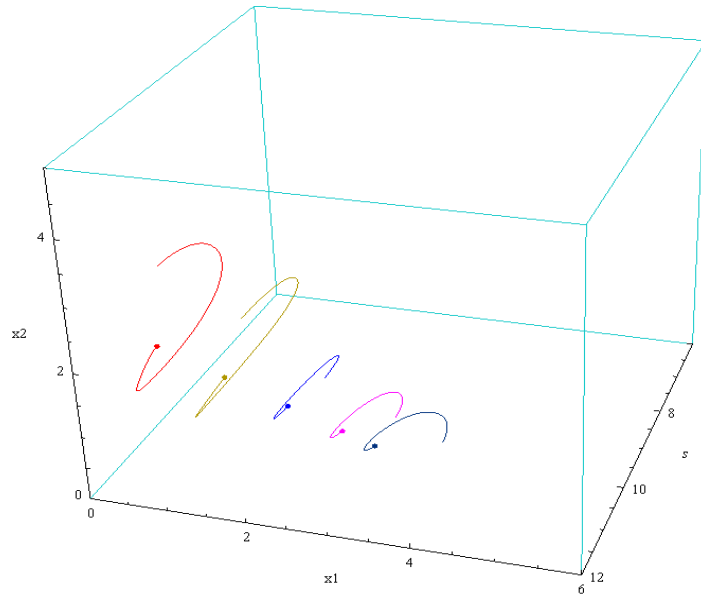


Figura B.120: Retrato de fase con parámetro de bifurcación para $k_{b12} = 11.4053$ y campo \tilde{f}_j .

retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{b12}$. Como se puede observar en las Figuras B.119 y B.120, los retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k , como se muestra en el Corolario 101.

Condición para $k_{a12} = 12.8706$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$L_k \leftrightarrow \xi_2 = 0.169231(9.55976 - 2.5\xi_1).$$

$$La_{k1} \leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.0846154(-2.07159 + 0.0736346\xi_1).$$

$$La_{k2} \leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.0846154(-0.171461 + 0.0448391\xi_1).$$

$$Lb_{k1} \leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.0846\sqrt{23.6364(28.7116 - 4.516\xi_1) - (-2.0716 + 0.0736\xi_1)^2}.$$

$$Lb_{k2} \leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.0846\sqrt{23.636(17.4835 - 2.7498\xi_1) - (-0.17146 + 0.0448\xi_1)^2}.$$

$$La_k \leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{-0.171461 + 0.0448391\xi_1}{\sqrt{23.6364.(17.4835 - 2.74989\xi_1) - (-0.171461 + 0.04483\xi_1)^2}} + \frac{-2.07159 + 0.0736346\xi_1}{\sqrt{23.6364.(28.7116 - 4.51589x_1) - (-2.07159 + 0.07363x_1)^2}}.$$

$$0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.$$

En la Figura B.121 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k .

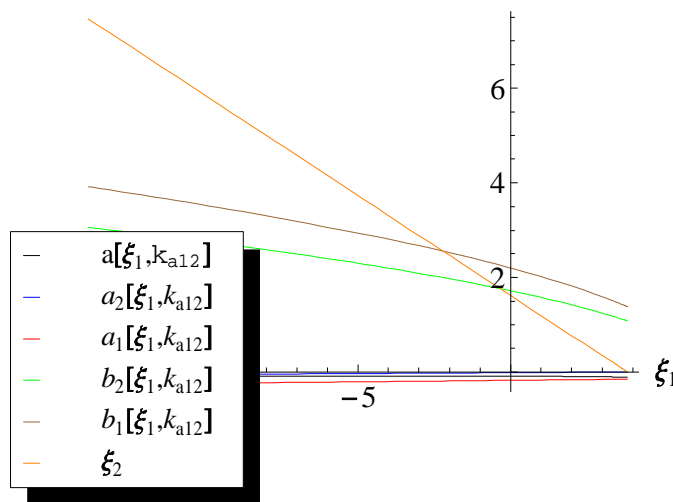


Figura B.121: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , para $k_{a12} = 12.8706$.

Como los segmentos de curva Lb_{k1} , Lb_{k2} están definidos en el dominio de L_k y el segmento de curva La_k se encuentran debajo del eje ξ_1 , entonces los puntos del segmento de equilibrios L_k se comportan como foco-foco asintóticamente estable en el sistema no suave (2.1) sobre las variedades invariantes estables que los contienen, Teorema 115. En este caso como la variación media del radio de oscilación es baja debido a los valores relativamente bajos de las componentes reales de sus valores propios μ_{1j} y μ_{2j} (véase Definición 3.6), en el retrato de fase los puntos del segmento de equilibrios L_k parecen del tipo foco asintóticamente estable de los sistemas suaves, como se observa en el retrato de fase de la Figura B.122.

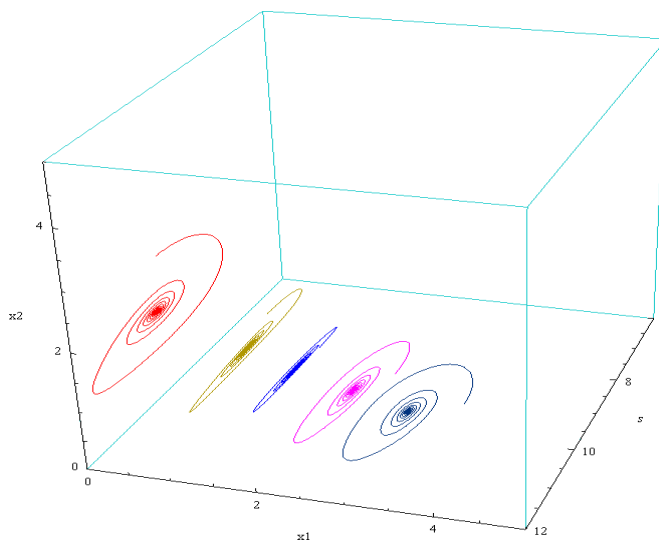


Figura B.122: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a12} = 12.8706$ y campo f_j .

Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales en el octante positivo permanecen en éste, son acotadas y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios L_k ; por lo tanto el segmento L_k es a un *atractor* del sistema y su cuenca de atracción es el octante positivo. Los equilibrios en este caso representan coexistencia

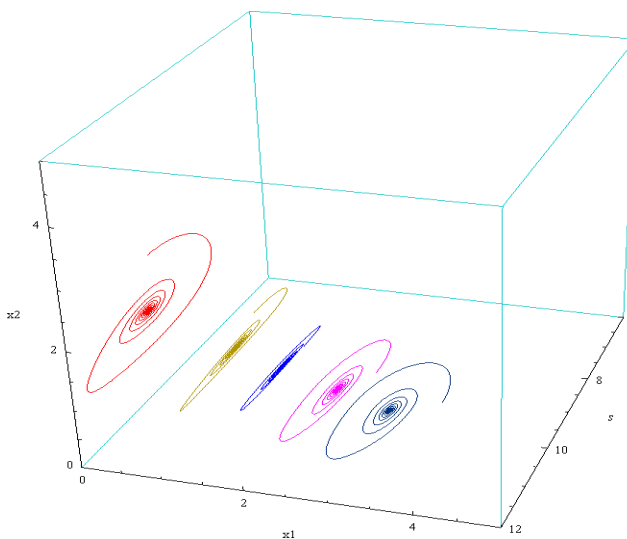


Figura B.123: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a12} = 12.8706$ y campo \tilde{f}_j .

Un comportamiento semejante al anterior se realiza para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.123, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{a12}$. Como se puede observar en las Figuras B.122 y B.123, los retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k , como se muestra en el Corolario 101.

Condición para $k_{a22} = 12.9255$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned}
 L_k &\leftrightarrow \xi_2 = 0.169231(9.58505 - 2.5\xi_1). \\
 La_{k1} &\leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.0846154(-1.90516 + 0.0736346\xi_1). \\
 La_{k2} &\leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.0846154(1.77636 \times 10^{-15} + 0.0448391\xi_1). \\
 Lb_{k1} &\leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.0846\sqrt{23.636(28.7875 - 4.5159\xi_1) - (-1.905 + 0.0736\xi_1)^2}. \\
 Lb_{k2} &\leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.0846\sqrt{23.636(17.53 - 2.749\xi_1) - (1.776 \times 10^{-15} + 0.0448\xi_1)^2}. \\
 La_k &\leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{1.77636 \times 10^{-15} + 0.0448391\xi_1}{\sqrt{23.6364(17.5298 - 2.7499\xi_1) - (1.77636 \times 10^{-15} + 0.0448\xi_1)^2}} \\
 &\quad + \frac{-1.90516 + 0.0736346\xi_1}{\sqrt{23.6364.(28.7875 - 4.51589\xi_1) - (-1.90516 + 0.07363\xi_1)^2}}. \\
 0 &\leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.
 \end{aligned}$$

En la Figura B.124 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k . Como los segmentos de curva Lb_{k1} , Lb_{k2} están definidos en el dominio de L_k y el segmento de curva La_k se encuentran debajo del eje ξ_1 , en el dominio de L_k , entonces los puntos del segmento de equilibrios L_k son del tipo foco-foco asintóticamente estable en el sistema no suave (2.1) sobre las variedades

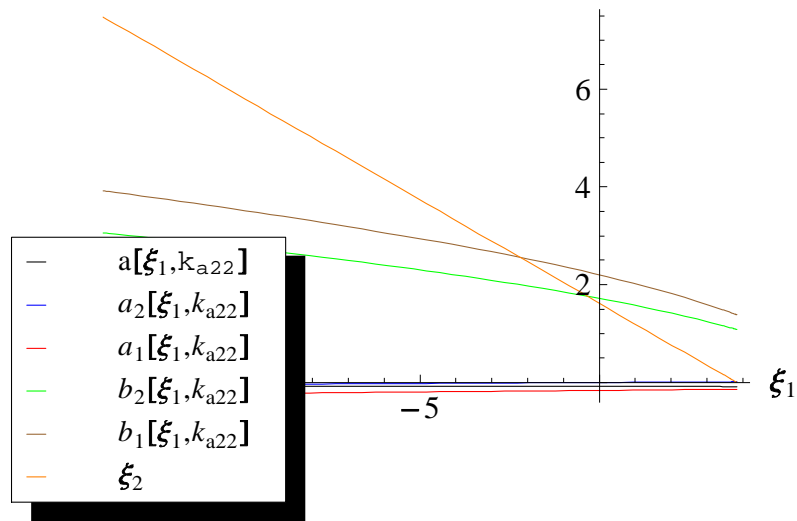


Figura B.124: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , para $k_{a22} = 12.9255$.

invariantes estables que los contienen, Teorema 115. En este caso como la variación

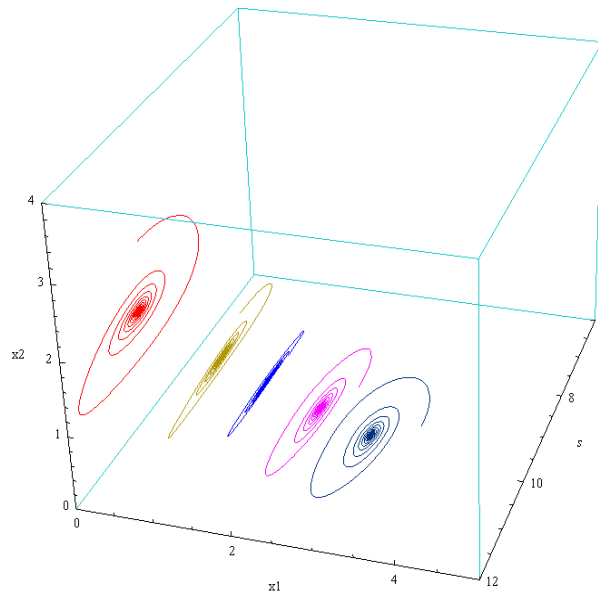


Figura B.125: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a22} = 12.9255$ y campo f_j .

media del radio de oscilación es baja debido a los valores relativamente bajos de las

componentes reales de sus valores propios μ_{1j} y μ_{2j} (véase Definición 3.6), luego en el retrato de fase los puntos del segmento de equilibrios L_k parecen del tipo foco asintóticamente estable de los sistemas suaves, como se observa en el retrato de fase de la Figura B.125. Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales en el octante positivo permanecen en éste, son acotadas y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios L_k ; por lo tanto el segmento L_k es a un *atractor* del sistema y su cuenca de atractividad es el octante positivo. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el *kr-estratega*, el *r-estratega* y la presa.

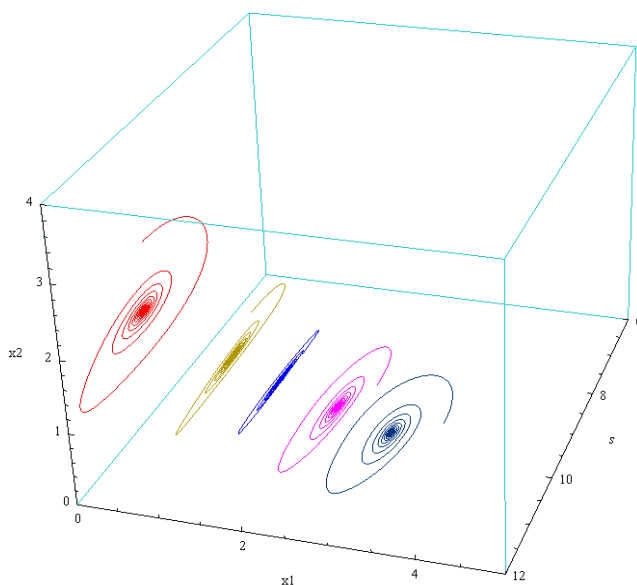


Figura B.126: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a22} = 12.9255$ y campo \tilde{f}_j .

Un comportamiento semejante al anterior se realiza para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.126, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{a22}$. Como se puede observar en las Figuras B.125 y B.126, los retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k , como se muestra en el Corolario 101.

Condición para $k_{api} = 13.23$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$L_k \leftrightarrow \xi_2 = 0.169231(9.70101 - 2.5\xi_1).$$

$$La_{k1} \leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.0846154(-1.14175 + 0.0736346\xi_1).$$

$$La_{k2} \leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.0846154(0.786461 + 0.0448391\xi_1).$$

$$Lb_{k1} \leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.0846\sqrt{23.6364(29.136 - 4.5158\xi_1) - (-1.1417 + 0.0736\xi_1)^2}.$$

$$Lb_{k2} \leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.0846\sqrt{23.6364(17.7419 - 2.7498\xi_1) - (0.7865 + 0.0448\xi_1)^2}.$$

$$La_k \leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{0.786461 + 0.0448391\xi_1}{\sqrt{23.6364(17.7419 - 2.74989\xi_1) - (0.786461 + 0.04483\xi_1)^2} - 1.14175 + 0.0736346\xi_1} + \frac{0.786461 + 0.0448391\xi_1}{\sqrt{23.6364(29.1358 - 4.51589\xi_1) - (-1.14175 + 0.07363\xi_1)^2}}.$$

$$0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.$$

En la Figura B.127 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k

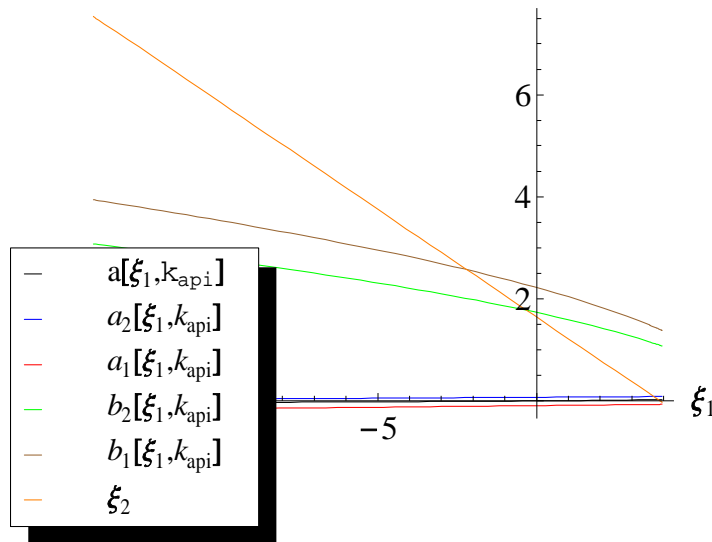


Figura B.127: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , para $k_{api} = 13.23$.

que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento

de equilibrios L_k . Como los segmentos de curva Lb_{k1} , Lb_{k2} están definidos en el dominio de L_k y el segmento de curva La_k crece por el Lema 111, e intersecta el eje ξ_1 en el punto $\widehat{\xi}_1(k_{api})$, por lo cual el punto $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k_{api}), \widehat{\xi}_2(k_{api}))$ divide L_k en dos partes (*una de las cuales puede ser vacía*). Los puntos del segmento de

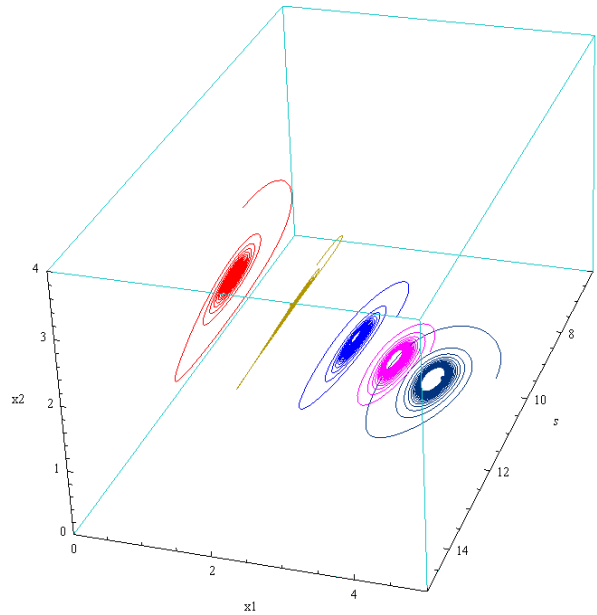


Figura B.128: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{api} = 13.23$ y campo f_j .

equilibrios L_k a la izquierda del punto $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k_{api}), \widehat{\xi}_2(k_{api}))$ son del tipo foco-foco asintóticamente estable y los puntos del segmento de equilibrios L_k a la derecha de el punto $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k_{api}), \widehat{\xi}_2(k_{api}))$ son del tipo foco-foco inestable en el sistema no suave (2.1) sobre las variedades invariantes estables e inestables locales respectivamente que los contienen, Teorema 115, véase Figura B.128. Luego las trayectorias del sistema con condiciones iniciales en un entorno tubular suficientemente pequeño de los puntos de L_k a la izquierda del punto $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k_{api}), \widehat{\xi}_2(k_{api}))$, en el octante positivo, permanecen en éste, son acotadas y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios L_k , y la parte del segmento L_k a la izquierda del punto $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k_{api}), \widehat{\xi}_2(k_{api}))$ es un *atractor* del sistema. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el *kr-estratega*, el *r-estratega* y la presa. Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales en un entorno tubular suficientemente pequeño de los puntos

de L_k a la izquierda del punto $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k_{api}), \widehat{\xi}_2(k_{api}))$, en el octante positivo, se alejan del segmento de equilibrios L_k e intersectan el entorno tubular de los puntos de L_k a la izquierda del punto $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k_{api}), \widehat{\xi}_2(k_{api}))$, y allí convergen por ser el sistema no suave (2.1) de tipo elíptico ($\frac{\partial_s p_2(\lambda, a_2)}{\partial_s p_2(\lambda, a_1)} - \frac{\partial_s p_1(\lambda, a_2)}{\partial_s p_1(\lambda, a_1)} = 1.09173 \times 10^{-6} > 0$), ver Teorema 21, y Observación 135. Por consiguiente la parte del segmento L_k a la derecha del punto $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k_{api}), \widehat{\xi}_2(k_{api}))$ es a un *repulsor* del sistema. Los equilibrios en este caso no representan coexistencia estable entre el *kr-estratega*, el *r-estratega* y la presa, ya que los equilibrios del sistema ahora no son estable desde el punto de vista de Lyapunov; sin embargo la dinámica del sistema reduce la especie del *r-estratega* para que la coexistencia estable entre el *kr-estratega*, el *r-estratega* y la presa sea posible, lo cual significa la pérdida de terreno del *r-estratega* frente al *kr-estratega*. A medida que se aumenta el parámetro k , crece la inestabilidad del segmento L_k , significando la pérdida de terreno del predador uno con respecto al predador dos hasta su extinción a valores mayores del parámetro k_{a1} , como se observa en el retrato de fase correspondiente de la Figura B.128.

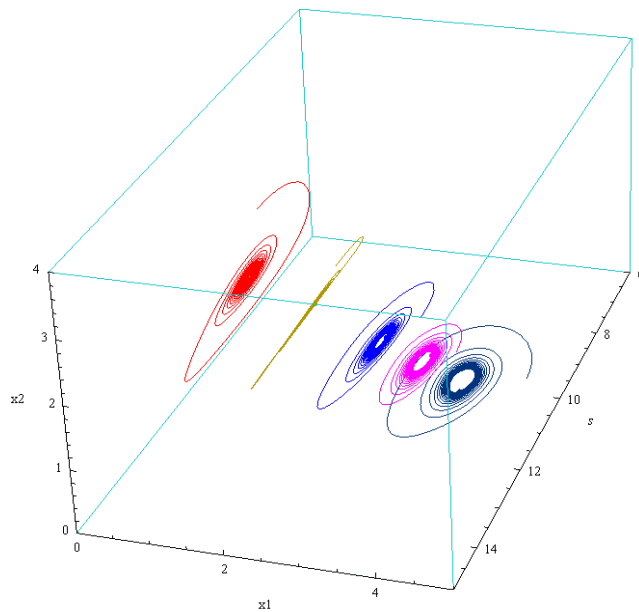


Figura B.129: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{api} = 13.23$ y campo \widetilde{f}_j .

Un comportamiento semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.129, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{api}$. Como se puede observar en las Figuras B.128 y B.129, los retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k como se muestra en el Corolario 101.

Condición para $k_{a11} = 13.7582$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned}
 L_k &\leftrightarrow \xi_2 = 0.169231(9.83047 - 2.5\xi_1). \\
 La_{k1} &\leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.0846154(-0.289545 + 0.0736346\xi_1). \\
 La_{k2} &\leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.0846154(1.6644 + 0.0448391\xi_1). \\
 Lb_{k1} &\leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.0846\sqrt{23.636(29.5247 - 4.5158\xi_1) - (-0.2895 + 0.0736\xi_1)^2}. \\
 Lb_{k2} &\leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.0846\sqrt{23.636(17.9786 - 2.7498\xi_1) - (1.6644 + 0.0448\xi_1)^2}. \\
 La_k &\leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{1.6644 + 0.0448391\xi_1}{\sqrt{23.6364(17.9786 - 2.74989\xi_1) - (1.6644 + 0.04483\xi_1)^2}} \\
 &\quad + \frac{-0.289545 + 0.0736346\xi_1}{\sqrt{23.6364(29.5247 - 4.51589\xi_1) - (-0.289545 + 0.073634\xi_1)^2}}. \\
 0 &\leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.
 \end{aligned}$$

En la Figura B.130 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$ y La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k . Como los segmentos de curva Lb_{k1} , Lb_{k2} están definidos en el dominio de L_k y el segmento de curva La_k se encuentran arriba del eje ξ_1 en el dominio de L_k , entonces los puntos del segmento de equilibrios L_k son del tipo foco-foco asintóticamente inestable, por lo cual el segmento L_k es un conjunto *repulsor* del sistema no suave (2.1). Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales cercanas a la línea de equilibrios L_k se alejan de él, e intersectan el plano coordenado

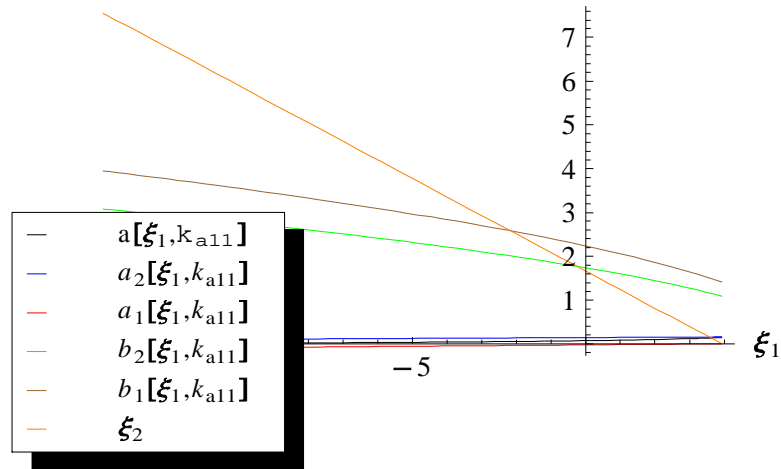


Figura B.130: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , para $k_{a11} = 13.7582$.

$s-x_2$ por ser el sistema de tipo elíptico $\left(\frac{\partial_s p_2(\lambda, a_2)}{\partial_s p_2(\lambda, a_1)} - \frac{\partial_s p_1(\lambda, a_2)}{\partial_s p_1(\lambda, a_1)} = 01.09173 \times 10^{-6} > 0\right)$, ver Teorema 21 y Observación 135. Como el plano coordenado es una variedad

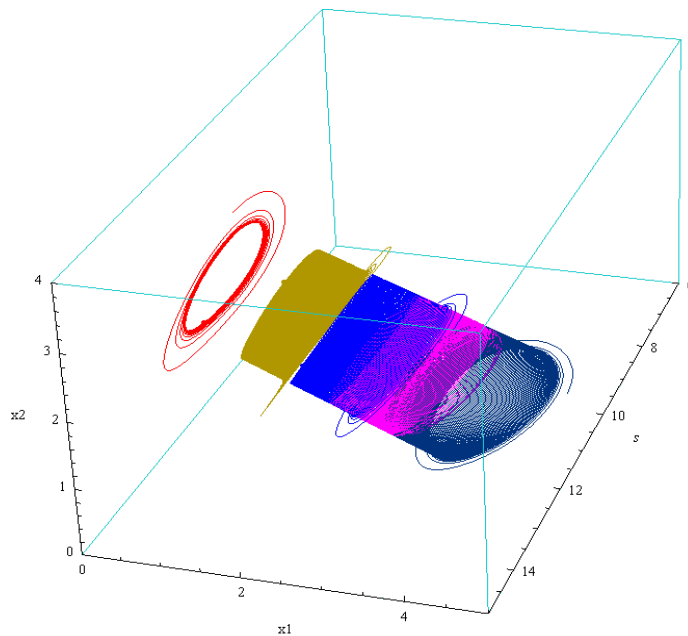


Figura B.131: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a11} = 13.7582$ y campo f_j .

invariante, la órbita allí tiende a formar un ciclo límite en desarrollo de la bifurcación de Hopf-Zou & Küpper no suave de acuerdo al Teorema 121; significando la oscilacion de coexistencia entre el *kr-estratega* y la presa, como se puede apreciar en el retrato de fase correspondiente al parámetro de bifurcación $k = k_{a11}$, Figura B.131.

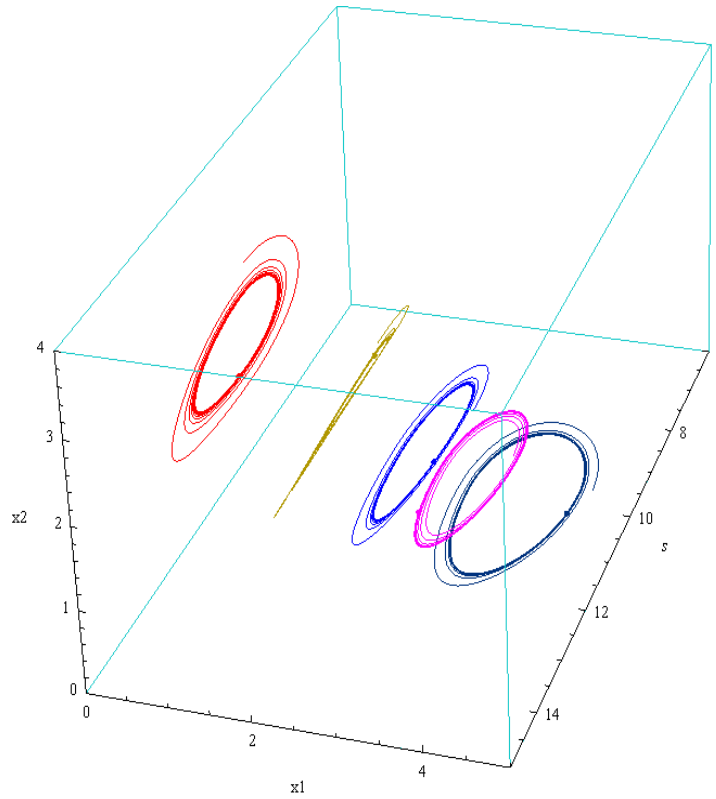


Figura B.132: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a11} = 13.7582$ y campo \tilde{f}_j .

Un comportamiento semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.132, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{a11}$. Como se puede observar en las Figuras B.131 y B.132, los retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k , como se demuestra en el Corolario 101.

Condición para $k_{a21} = 14.0384$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned}
 L_k &\leftrightarrow \xi_2 = 0.169231(9.87446 - 2.5\xi_1). \\
 La_{k1} &\leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.0846154(-8.88178 \times 10^{-16} + 0.0736346\xi_1). \\
 La_{k2} &\leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.0846154(1.96268 + 0.0448391\xi_1). \\
 Lb_{k1} &\leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.084\sqrt{23.636(29.6568 - 4.516\xi_1) - (-8.88 \times 10^{-16} + 0.073\xi_1)^2}. \\
 Lb_{k2} &\leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.084\sqrt{23.6364(18.0591 - 2.7498\xi_1) - (1.963 + 0.0448\xi_1)^2}. \\
 La_k &\leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{1.96268 + 0.0448391\xi_1}{\sqrt{23.6364.(18.0591 - 2.74989\xi_1) - (1.96268 + 0.04483\xi_1)^2}} \\
 &\quad + \frac{-8.88178 \times 10^{-16} + 0.0736346\xi_1}{\sqrt{23.6364.(29.6568 - 4.51589\xi_1) - (-8.88178 \times 10^{-16} + 0.07363\xi_1)^2}}. \\
 0 &\leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.
 \end{aligned}$$

En la Figura B.133 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k

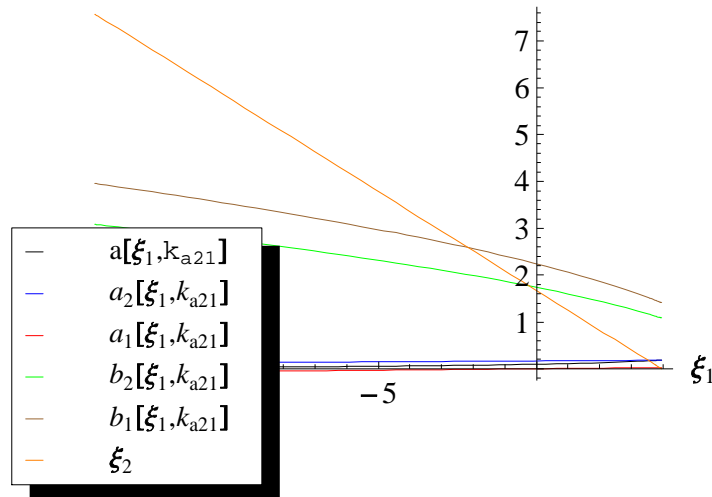


Figura B.133: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , para $k_{a21} = 14.0384$

que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento

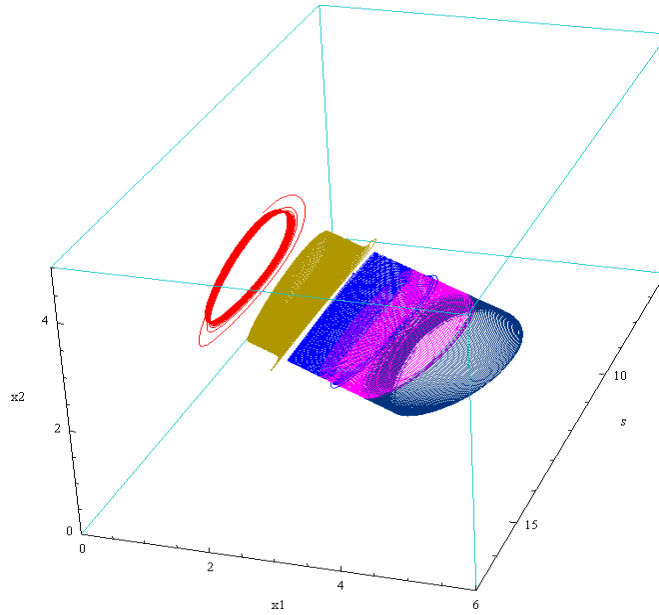


Figura B.134: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a21} = 14.0384$ y campo f_j .

dominio de L_k y el segmento de curva La_k se encuentran arriba del eje ξ_1 en el dominio de L_k , entonces los puntos del segmento de equilibrios L_k son del tipo foco-foco asintóticamente inestables en el sistema no suave (2.1). Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales cercanas a la línea de equilibrios L_k se alejan de él, por lo cual el segmento L_k es un conjunto *repulsor* del sistema no suave (2.1; sin embargo un ciclo límite puede aparecer el cual es orbitalmente asintóticamente estable en desarrollo de la bifurcación de Hopf-Zou & Küpper no-suave de acuerdo con el Teorema 121, significando la oscilación de coexistencia entre el *kr-estratega* y la presa. El ciclo límite crece más en amplitud que en el caso anterior debido a la mayor inestabilidad del sistema, como se observa en el retrato de fase de la Figura B.134.

Un comportamiento semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.135, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro

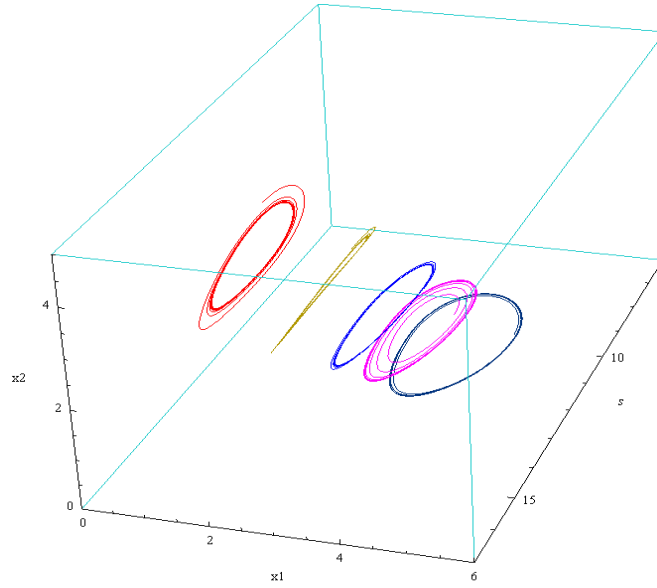


Figura B.135: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a21} = 14.0384$ y campo \tilde{f}_j .

bifurcación $k = k_{a21}$. Como se puede observar en las Figuras B.134 y B.135, los retratos de fase del sistema (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k , como se muestra en el Corolario 101.

B.7 Modelo sin variedad invariante del tipo 2

Los siguientes son los parámetros del modelo natural-natural sin variedad invariante:

Parámetros de la respuesta funcional $p_1(s, a)$

$$\begin{aligned}
 A_1 &= 1; & B_1 &= 1; & D_1 &= 1; & c_1 &= 1; \\
 d_{11} &= 2; & d_{21} &= 7; & F_1 &= 0; & m_1 &= 1; \\
 n_1 &= 1; & q_1 &= 1; & r_1 &= 1; & u_1 &= 1; \\
 v_1 &= 0; & \lambda &= 10; & \gamma &= 1; & & ..
 \end{aligned}$$

Parámetros de la respuesta funcional $p_3(s, a)$

$$\begin{aligned} A_2 &= 3; & B_2 &= 6; & D_2 &= 2; & c_2 &= 1; \\ d_{12} &= 2; & d_{22} &= 7; & F_2 &= 0; & m_2 &= 1; \\ n_2 &= 1; & q_2 &= 1; & r_2 &= 1; & u_2 &= 1; \\ v_2 &= 0; & \lambda &= 10; & \gamma &= 1; & & \dots \end{aligned}$$

La resistencia ambiental g de la presa y la respuesta funcional p de los predadores adoptan la forma:

$$\begin{aligned} p(s, a) &= \begin{cases} \frac{s}{1+a} + \frac{s}{s+a}, & \text{si } s \leq \lambda \\ \frac{10}{1+a} - \frac{10}{10+a} - \frac{30}{2+6a} + \left(\frac{.3s}{2+6a}\right) + \frac{.2s}{a+s}, & \text{si } s > \lambda, \end{cases} \\ g(s, k) &= 1 - \frac{(-1+e^s)s}{(-1+e^k)k}. \end{aligned}$$

La ecuación (B.2) para a_1 es de la forma:

$$\begin{aligned} 0 &= -2 + \frac{10}{1+a_1} + \frac{10}{10+a_1} \\ a_1 &= 6.22681. \end{aligned}$$

La ecuación (B.2) para a_2 es de la forma:

$$\begin{aligned} 0 &= -7 + \frac{10}{1+a_2} + \frac{10}{10+a_2} \\ a_2 &= 0.649887. \end{aligned}$$

Además, se muestran las gráficas y las ecuaciones paramétricas de la curvas L_k , $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k siguientes

$$\begin{aligned} L_k &= \{(s, \xi_1, x_2) : p(\lambda, a_1)\xi_{11} + p(\lambda, a_2)\xi_{12} = \gamma\lambda g(\lambda, k); \\ &\quad \lambda, \xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0\}. \end{aligned} \tag{B.25}$$

$$La_{k,j} = \{(s, \xi_1, a_j(\xi_1, k)) : s = \lambda, 0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}\}, \tag{B.26}$$

$$Lb_{k,j} = \{(s, \xi_1, b_j(\xi_1, k)) : s = \lambda, 0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}\}, \tag{B.27}$$

$$\begin{aligned} La_k &= \{(s, \xi_1, a(\xi_1, k)) : a(\xi_1, k) = \frac{a_1(\xi_1, k)}{b_1(\xi_1, k)} + \frac{a_2(\xi_1, k)}{b_2(\xi_1, k)} - \frac{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{p_j(\lambda, a_1)^2}{p_j(\lambda, a_2)}}}\right)}{\pi}; \\ &\quad s = \lambda, 0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}\}, \end{aligned} \tag{B.28}$$

$$\begin{aligned} La_{\underline{k}} &= \{(s, \xi_1, a(\xi_1, k)) : a(\xi_1, k) = \frac{a_1(\xi_1, k)}{b_1(\xi_1, k)} + \frac{a_2(\xi_1, k)}{b_2(\xi_1, k)} - \frac{\ln\left(\sqrt{1 + \frac{p_j(\lambda, a_1)^2}{p_j(\lambda, a_2)}}\right)}{\pi}; \\ &\quad s = \lambda, 0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}\}, \end{aligned} \tag{B.29}$$

así como los retratos de fase del sistema para los distintos valores del parámetro de bifurcación k_{bij} y k_{aij} para $i, j = 1, 2$, seleccionados con el propósito de mostrar los cambios cualitativos que ocurren en el sistema. Los parámetros de bifurcación k_{bij} y k_{aij} para $i, j = 1, 2$, están dadas por las ecuaciones

$$K_{bij}(k_{bij}) = \gamma \lambda g(\lambda, k) \partial_s p_j(\lambda, a_i) - \frac{1}{4} \gamma^2 \left(\lambda \partial_s(\lambda, k) + g(\lambda, k) \left(1 - \frac{\lambda \partial_s p_j(\lambda, a_i)}{p_j(\lambda, a_i)} \right) \right)^2 = 0,$$

$$K_{aij}(k_{aij}) = -\lambda p_j(\lambda, a_i) \partial_s g(\lambda, k) + g(\lambda, k) (\lambda \partial_s p_j(\lambda, a_i) - p_j(\lambda, a_i)) = 0,$$

por las Definiciones 37, 41 y la proposición 39. Los valores obtenidos para los puntos de bifurcación k_{bij} y k_{aij} en cada uno de los subsistemas son los siguientes:

subsistema 1

$$K_{b21}(k) = -\frac{1}{4} \left(0.125954 \left(1 - \frac{10(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) + 10 \left(-\frac{10e^{10}}{(-1+e^k)k} - \frac{(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) \right)^2 + 6.11832 \left(1 - \frac{10(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) = 0.$$

$$k_{b21} = 10.9186.$$

$$K_{b11}(k) = -\frac{1}{4} \left(0.189891 \left(1 - \frac{10(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) + 10 \left(-\frac{10e^{10}}{(-1+e^k)k} - \frac{(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) \right)^2 + 1.62022 \left(1 - \frac{10(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) = 0.$$

$$k_{b11} = 11.3923.$$

$$K_{a11}(k) = -0.379781 \left(1 - \frac{10(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) - 20 \left(-\frac{10e^{10}}{(-1+e^k)k} - \frac{(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) = 0.$$

$$k_{a11} = 13.7573.$$

$$K_{a21}(k) = -0.881678 \left(1 - \frac{10(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) - 70 \left(-\frac{10e^{10}}{(-1+e^k)k} - \frac{(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) = 0.$$

$$k_{a21} = 14.135.$$

subsistema 2

$$K_{b22}(k) = -\frac{1}{4} \left(0.257153 \left(1 - \frac{10(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) + 10 \left(-\frac{10e^{10}}{(-1+e^k)k} - \frac{(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) \right)^2 + 5.19993 \left(1 - \frac{10(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) = 0.$$

$$k_{a12} = 13.1216.$$

$$K_{b12}(k) = \frac{1}{4} \left(0.382428 \left(1 - \frac{10(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) + 10 \left(-\frac{10e^{10}}{(-1+e^k)k} - \frac{(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) \right)^2 + 1.23514 \left(1 - \frac{10(-1+e^{10})}{(-1+e^k)k} \right) = 0.$$

$$k_{b22} = 10.9594.$$

$$\begin{aligned}
 K_{a12}(k) &= -0.764856 \left(1 - \frac{10(-1+e^{10})}{(-1+e^k)^k} \right) - 20 \left(-\frac{10e^{10}}{(-1+e^k)^k} - \frac{(-1+e^{10})}{(-1+e^k)^k} \right) = 0. \\
 k_{a12} &= 13.1216. \\
 K_{a22}(k) &= -1.80007 \left(1 - \frac{10(-1+e^{10})}{(-1+e^k)^k} \right) - 70 \left(-\frac{10e^{10}}{(-1+e^k)^k} - \frac{(-1+e^{10})}{(-1+e^k)^k} \right) = 0. \\
 k_{a22} &= 13.4804
 \end{aligned}$$

Condición para $k_{b21} = 10.9186$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned}
 L_k &\leftrightarrow \xi_2 = 0.142857(6.34511 - 2\xi_1). \\
 La_{k1} &\leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.0714286(-27.5844 + 0.0895113\xi_1). \\
 La_{k2} &\leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.0714286(-27.0017 + 0.175386\xi_1). \\
 Lb_{k1} &\leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.07142\sqrt{28(27.175 - 6.2973\xi_1) - (-27.5844 + 0.0895\xi_1)^2}. \\
 Lb_{k2} &\leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.07142\sqrt{28(23.0959 - 5.550\xi_1) - (-27.0017 + 0.1753\xi_1)^2}. \\
 La_k &\leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{-27.5844 + 0.0895113\xi_1}{\sqrt{28.(27.175 - 6.29734\xi_1) - (-27.5844 + 0.0895\xi_1)^2}} \\
 &\quad + \frac{-27.0017 + 0.175386\xi_1}{\sqrt{28.(23.0959 - 5.5507\xi_1) - (-27.0017 + 0.17538\xi_1)^2}}. \\
 0 &\leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.
 \end{aligned}$$

En la Figura B.136 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k . Como los segmentos Lb_{k1} , Lb_{k2} no están definidos debajo del segmento de equilibrios L_k y los segmentos La_{k1} , La_{k2} se encuentran debajo del eje ξ_1 en el dominio de L_k , entonces los puntos del segmento de equilibrios L_k se comportan como nodos estables en cada subsistema del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, \xi_1, x_2)$, Corolario 79. Por lo tanto existe una vecindad del segmento de equilibrios para el cual las soluciones con condiciones iniciales en esta vecindad tienden a puntos del segmento L_k cuando t tiende a infinito, Teorema 142, como se puede observar en el retrato de fase de la Figura B.137. Además el retrato de fase se asemeja al del sistema no suave (2.1) que preserva sus variedades invariantes locales,

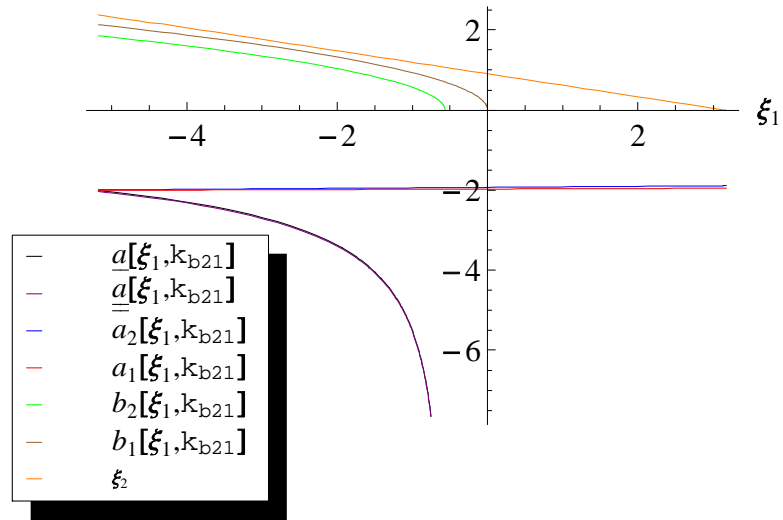


Figura B.136: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k para $k_{b21} = 10.9186$.

cuando los equilibrios son del tipo *nodo-nodo* asintóticamente estable; sin embargo en este caso no existen variedades invariantes que contenga puntos de equilibrios

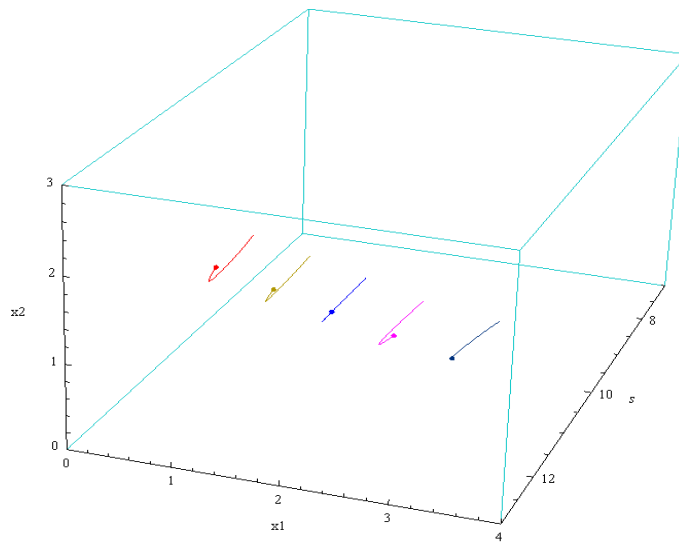


Figura B.137: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b21} = 10.9186$ y campo f_j .

del interior del segmento L_k (con la topología inducida de L_k). Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales en el octante positivo permanecen en éste, son acotadas y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios L_k ; por lo tanto el segmento L_k es a un *atractor* del sistema y su cuenca de atractividad es el octante positivo. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el kr -estratega, el r -estratega y la presa.

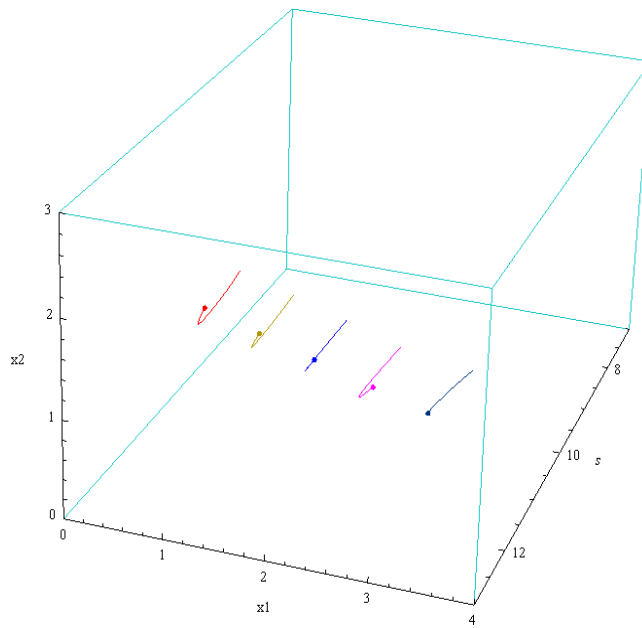


Figura B.138: Retrato de fase con parámetro de bifurcación para $k_{b21} = 10.9186$ y campo \tilde{f}_j .

Un análisis semejante al anterior se realiza para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.138, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{b21}$. Como se puede observar en las Figuras B.137 y B.138, los retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k ; sin embargo el Corolario 101 no aplica en este caso, ya que no existen variedades invariantes estables para el sistema no suave (2.1) que contengan los puntos del interior del segmento de equilibrios L_k .

Condición para $k_{b22} = 10.9594$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$L_k \leftrightarrow \xi_2 = 0.142857(6.50432 - 2\xi_1).$$

$$La_{k1} \leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.0714286(-26.3444 + 0.0895113\xi_1).$$

$$La_{k2} \leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.0714286(-25.7471 + 0.175386\xi_1).$$

$$Lb_{k1} \leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.07142 \sqrt{28.(27.8568 - 6.2973\xi_1) - (-26.3444 + 0.0895\xi_1)^2}.$$

$$Lb_{k2} \leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.07142 \sqrt{28.(23.6754 - 5.550\xi_1) - (-25.7471 + 0.1753\xi_1)^2}.$$

$$La_k \leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{(-26.3444 + 0.0895113\xi_1)}{\sqrt{28.(27.856 - 6.29734\xi_1) - (-26.3444 + 0.0895\xi_1)^2}} + \frac{-25.7471 + 0.17538\xi_1}{\sqrt{28.(23.675 - 5.5507\xi_1) - (-25.7471 + 0.17538\xi_1)^2}}.$$

$$0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.$$

En la Figura B.139 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k . Como el segmento de curva Lb_{k2} no está definido debajo del segmento

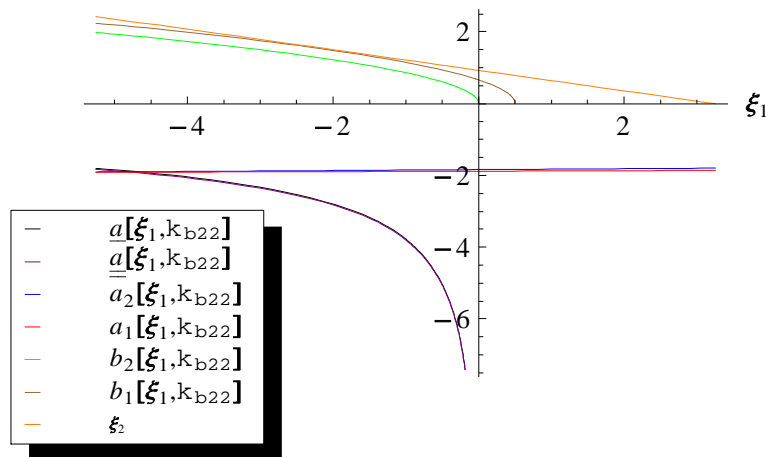


Figura B.139: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , para $k_{b22} = 10.9594$.

de equilibrios L_k y el segmento de curva La_{k2} se encuentran debajo del eje ξ_1 en el dominio de L_k , entonces en el subsistema del sistema no suave (2.1) asociado al campo $f_2(s, x_1, x_2)$ los puntos del segmento de equilibrios L_k se comportan como nodos estables. También La_{k1} se encuentra debajo del eje ξ_1 en el dominio de L_k ,

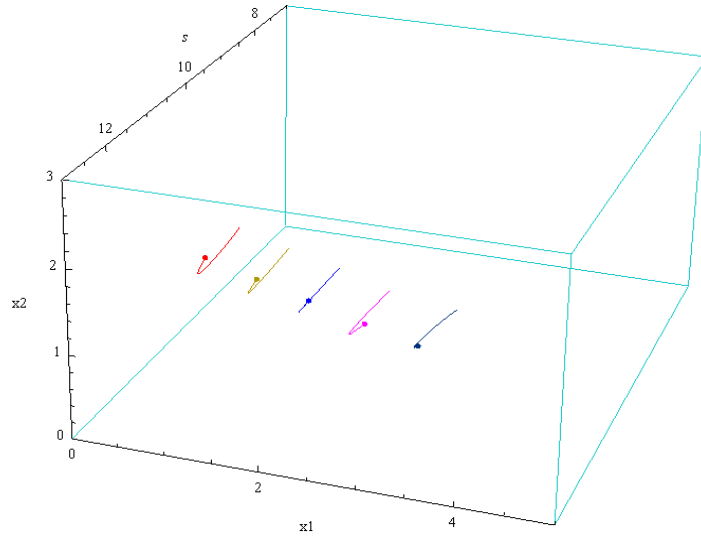


Figura B.140: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b22} = 10.9594$ y campo f_j .

y el segmento de curva Lb_{k1} intersecta el eje ξ_1 , en el punto $\bar{\bar{\xi}}_{11}$ por lo cual el punto $(\lambda, \bar{\bar{\xi}}_{11}(k_{b22}), \bar{\bar{\xi}}_{21}(k_{b22}))$ divide L_k en dos partes (*una de las cuales puede ser vacía*). Luego en el subsistema del sistema no suave (2.1) asociado al campo $f_1(s, x_1, x_2)$, los puntos de L_k a la izquierda de este punto son focos estables, los puntos a la derecha son nodos estables, Corolario 79. Por lo tanto existe una vecindad del segmento de equilibrios para el cual las soluciones con condiciones iniciales allí tienden a un punto del segmento L_k cuando t tiende a infinito, Teorema 142, como se puede observar en el retrato de fase de la Figura B.140. El retrato de fase se asemeja al del sistema no suave (2.1) cuando existen variedades invariantes, los puntos del segmento de equilibrios L_k a la izquierda de el punto $(\lambda, \bar{\bar{\xi}}_{11}(k_{b22}), \bar{\bar{\xi}}_{21}(k_{b22}))$ son del tipo nodo-foco estable y los puntos del segmento de equilibrios L_k a la derecha del punto $(\lambda, \bar{\bar{\xi}}_{11}(k_{b22}), \bar{\bar{\xi}}_{21}(k_{b22}))$ son del tipo nodo-nodo asintóticamente estable; sin embargo en este caso no existen variedades invariantes estables locales que contengan

puntos de equilibrios del interior del segmento L_k . Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales en el octante positivo permanecen en éste, son acotadas y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios L_k ; por lo tanto el segmento L_k es a un *atractor* del sistema y su cuenca de atractividad es el octante positivo. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el *kr-estratega*, el *r-estratega* y la presa.

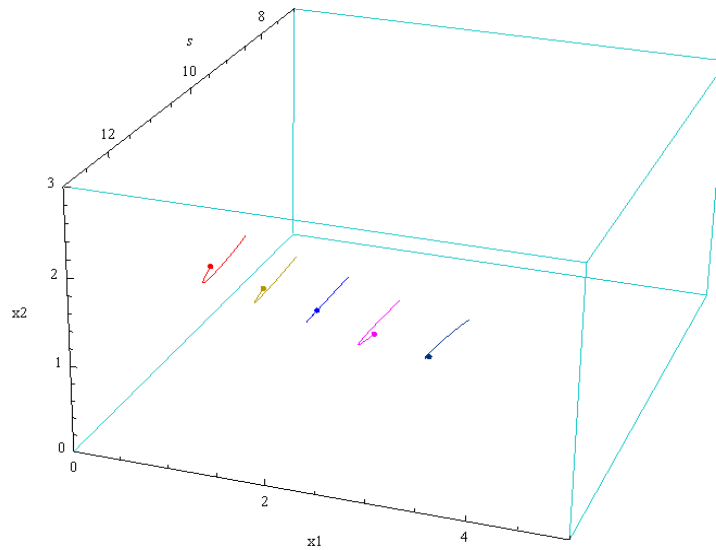


Figura B.141: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b22} = 10.9594$ y campo \tilde{f}_j .

Un comportamiento semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.141, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{b22}$. Como se puede observar en las Figuras B.140 y B.141, los retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ no se puede afirmar que son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k , porque el Corolario 101 no aplica en este caso, ya que no existen variedades invariantes estables para el sistema no suave (2.1) que contengan puntos del interior del segmento de equilibrios L_k .

Condición para $k_{b11} = 11.3923$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned}
 L_k &\leftrightarrow \xi_2 = 0.142857(7.81871 - 2\xi_1). \\
 La_{k1} &\leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.0714286(-16.1073 + 0.0895113\xi_1). \\
 La_{k2} &\leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.0714286(-15.3892 + 0.175386\xi_1). \\
 Lb_{k1} &\leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.07142\sqrt{28.(33.4862 - 6.29734\xi_1) - (-16.1073 + 0.0895\xi_1)^2}. \\
 Lb_{k2} &\leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.07142\sqrt{28.(28.4597 - 5.5507\xi_1) - (-15.3892 + 0.1753\xi_1)^2}. \\
 La_k &\leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{(-16.1073 + 0.0895113\xi_1)}{\sqrt{28.(33.4862 - 6.29734\xi_1) - (-16.1073 + 0.0895\xi_1)^2}} \\
 &\quad + \frac{-15.3892 + 0.175386\xi_1}{\sqrt{28.(28.4597 - 5.5507\xi_1) - (-15.3892 + 0.17538\xi_1)^2}}. \\
 0 &\leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.
 \end{aligned}$$

En la Figura B.142 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k

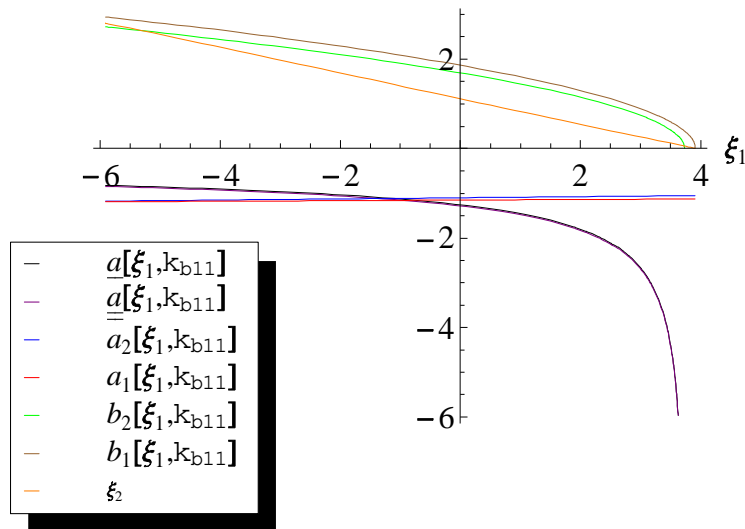


Figura B.142: áfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , para $k_{b11} = 11.3923$.

que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento

de equilibrios L_k . Como el segmento de curva $L_{b_{k1}}$ está definido en el dominio de L_k , y el segmento de curva $L_{b_{k2}}$ intersecta el eje ξ_1 en el punto $\bar{\bar{\xi}}_{12}(k_{b11})$ por lo cual el punto $(\lambda, \bar{\bar{\xi}}_{12}(k_{b11}), \bar{\bar{\xi}}_{22}(k_{b11}))$ divide L_k en dos partes (*una de las cuales puede ser vacía*), y además el segmento curva L_{a_k} se encuentran debajo del eje ξ_1 en el dominio de L_k ; entonces existe una vecindad del segmento de equilibrio para el cual las soluciones con condiciones iniciales en esta vecindad tienden a puntos del segmento L_k cuando t tiende a infinito, Teorema 142. El retrato de fase se asemeja

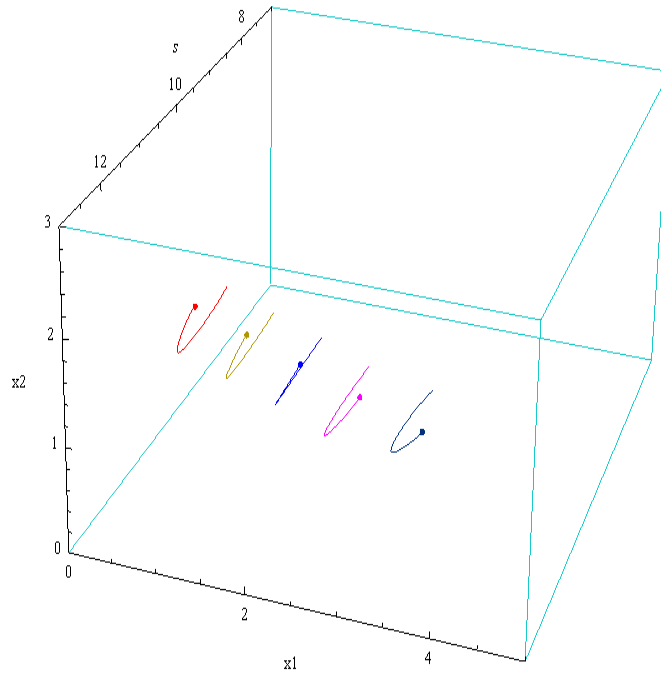


Figura B.143: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b11} = 11.3923$ y campo f_j .

al del sistema no suave (2.1) cuando existen variedades invariantes y los puntos del segmento del equilibrios L_k a la izquierda de el punto $(\lambda, \bar{\bar{\xi}}_{11}(k_{b11}), \bar{\bar{\xi}}_{22}(k_{b11}))$ son del tipo foco-foco estables y los puntos del segmento de equilibrios L_k a la derecha de el punto $(\lambda, \bar{\bar{\xi}}_{12}(k_{b11}), \bar{\bar{\xi}}_{22}(k_{b11}))$ son del tipo focos-nodo asintóticamente estables; sin embargo en este caso no existen variedades invariantes estables locales que contengan puntos de equilibrios del interior del segmento L_k . Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales en el octante positivo permanecen en éste, son acotadas y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios L_k ; por lo tanto el segmento L_k es a un

Apéndice B. Modelos no suaves numéricos que exhiben bifurcación zip 464
atractor del sistema y su cuenca de atractividad es el octante positivo. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el *kr-estratega*, el *r-estratega* y la presa, véase Figura B.143.

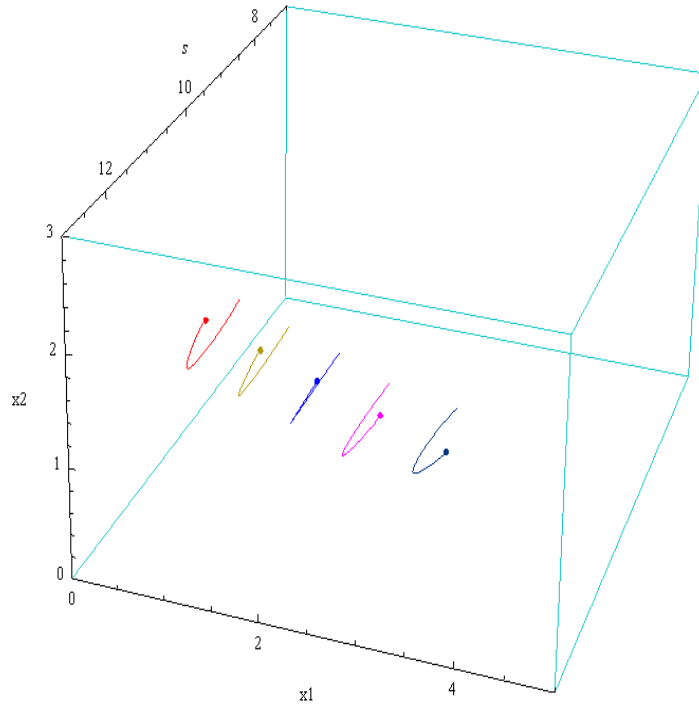


Figura B.144: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b11} = 11.3923$ y campo \tilde{f}_j .

Un comportamiento semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.144, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{b11}$. Como se puede observar en las Figuras B.143 y B.144, los retratos de fase del sistema (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los subsistema del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$, no se puede afirmar que son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k , porque el Corolario 101 no aplica en este caso, ya que no existen variedades invariantes estables para el sistema no suave (2.1) que contengan los puntos del interior del segmento de equilibrios L_k .

Condición para $k_{b12} = 114385$

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned}
 L_k &\leftrightarrow \xi_2 = 0.142857(7.92562 - 2\xi_1). \\
 La_{k1} &\leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.0714286(-15.2746 + 0.089511\xi_1). \\
 La_{k2} &\leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.0714286(-14.5467 + 0.175386\xi_1). \\
 Lb_{k1} &\leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.07142\sqrt{28.(33.944 - 6.29734\xi_1) - (-15.2746 + 0.0895\xi_1)^2}. \\
 Lb_{k2} &\leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.07142\sqrt{28.(28.8489 - 5.5507\xi_1) - (-14.5467 + 0.175386\xi_1)^2}. \\
 La_k &\leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{(-15.2746 + 0.0895113\xi_1}{\sqrt{28.(33.944 - 6.2973\xi_1) - (-15.2746 + 0.08951\xi_1)^2}} \\
 &\quad + \frac{-14.5467 + 0.175386\xi_1}{\sqrt{28.(28.8489 - 5.5507\xi_1) - (-14.5467 + 0.17538\xi_1)^2}}. \\
 0 &\leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.
 \end{aligned}$$

En la Figura B.145 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$,

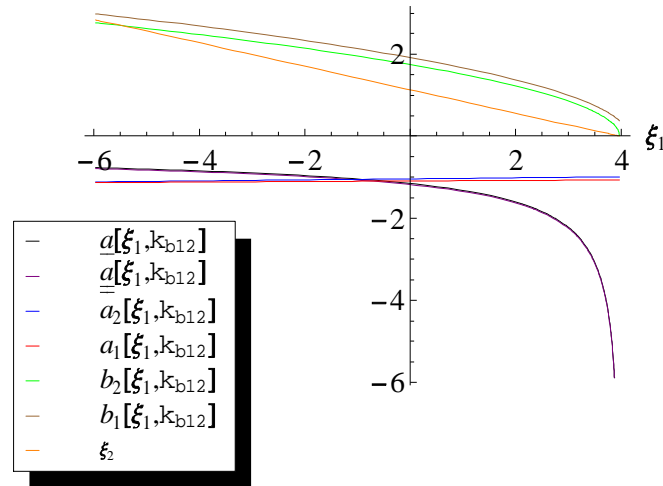


Figura B.145: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , para $k_{b12} = 11.4385$.

La_k , que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del seg-

mento de equilibrios L_k . Como los segmentos de curva Lb_{k1} , Lb_{k2} están definidas

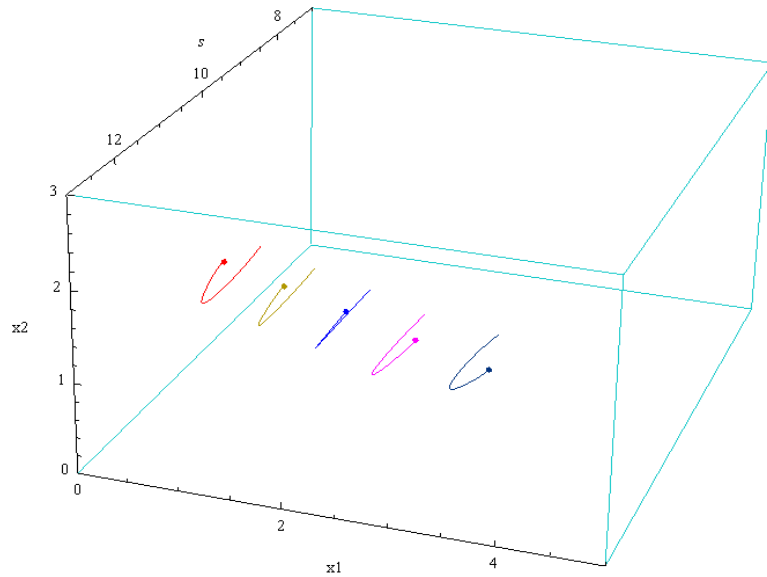


Figura B.146: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b12} = 11.4385$ y campo f_j .

en el dominio de L_k y el segmento de curva La_k se encuentra debajo del eje ξ_1 en el dominio de L , entonces en los subsistemas del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_1(s, x_1, x_2)$ y $f_2(s, x_1, x_2)$, los puntos del segmento de equilibrios L_k se comportan como focos estables, Corolario 79; luego existe una vecindad del segmento de equilibrios para el cual las soluciones con condiciones iniciales en esta vecindad tiende a puntos del segmento L_k cuando t tiende a infinito, Teorema 142. Además el retrato de fase se asemeja al del sistema no suave (2.1) cuando existen variedades invariantes y los puntos del segmento del equilibrios L_k son del tipo foco-foco asintóticamente estables; sin embargo en este caso no existen variedades invariantes estables locales que contengan puntos de equilibrios del interior del segmento L_k (con la topología inducida de L_k). En este caso la variación media del radio de oscilación es alta debido a los valores relativamente altos de las componentes reales de sus valores propios μ_{1j} y μ_{2j} (véase Definición 3.6), por consiguiente el retrato de fase da la falsa impresión de tener el mismo comportamiento de los puntos del segmento de equilibrios L_k del tipo nodo-nodo asintóticamente estable, como se observa en

el retrato de fase de la Figura B.146. Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales en el octante positivo permanecen en éste, son acotadas y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios L_k ; por lo tanto el segmento L_k es a un *atractor* del sistema y su cuenca de atractividad es el octante positivo. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el *kr-estratega*, el *r-estratega* y la presa.

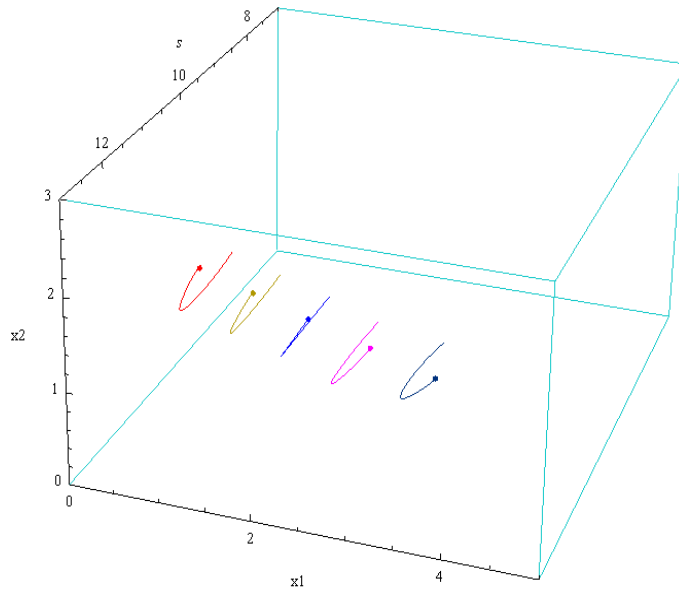


Figura B.147: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b12} = 11.4385$ y campo \tilde{f}_j .

Un comportamiento semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.147, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{b12}$. Como se puede observar en las Figuras B.146 y B.147, los retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ no se puede afirmar que son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k , porque el Corolario 101 no aplica en este caso, ya que no existen variedades invariantes estables para el sistema no suave (2.1) que contengan los puntos del interior del segmento de equilibrios L_k .

Condición para $k_{a12} = 13.1216$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$L_k \leftrightarrow \xi_2 = 0.142857(9.66403 - 2\xi_1).$$

$$La_{k1} \leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.0714286(-1.735 + 0.0895113\xi_1).$$

$$La_{k2} \leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.0714286(-0.847466 + 0.175386\xi_1).$$

$$Lb_{k1} \leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.07142\sqrt{28.(41.3894 - 6.29734\xi_1) - (-1.735 + 0.08951\xi_1)^2}.$$

$$Lb_{k2} \leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.07142\sqrt{28.(35.1766 - 5.5507\xi_1) - (-0.847466 + 0.1753\xi_1)^2}.$$

$$La_k \leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{-1.735 + 0.0895113\xi_1}{\sqrt{28.(41.3894 - 6.29734\xi_1) - (-1.735 + 0.0895\xi_1)^2}} + \frac{-0.847466 + 0.175386\xi_1}{\sqrt{28.(35.1766 - 5.5507x_1) - (-0.847466 + 0.17538x_1)^2}}.$$

$$0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.$$

En la Figura B.148 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k

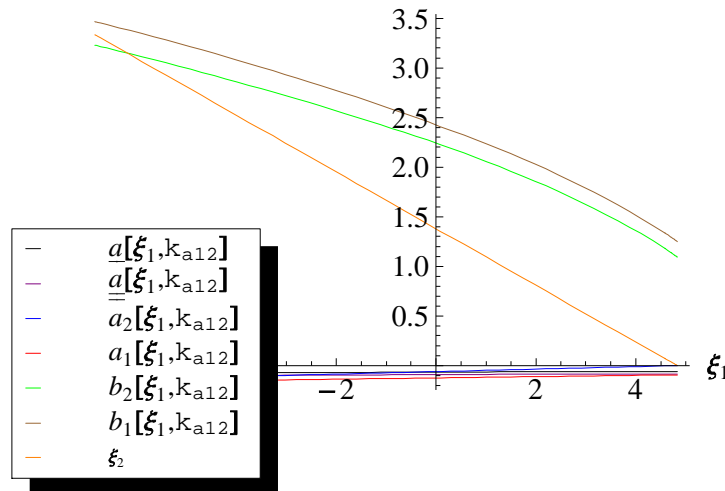


Figura B.148: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , para $k_{a12} = 13.1216$.

que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento

de equilibrios L_k . Como los segmentos de curva Lb_{k1} , Lb_{k2} están definidas en el

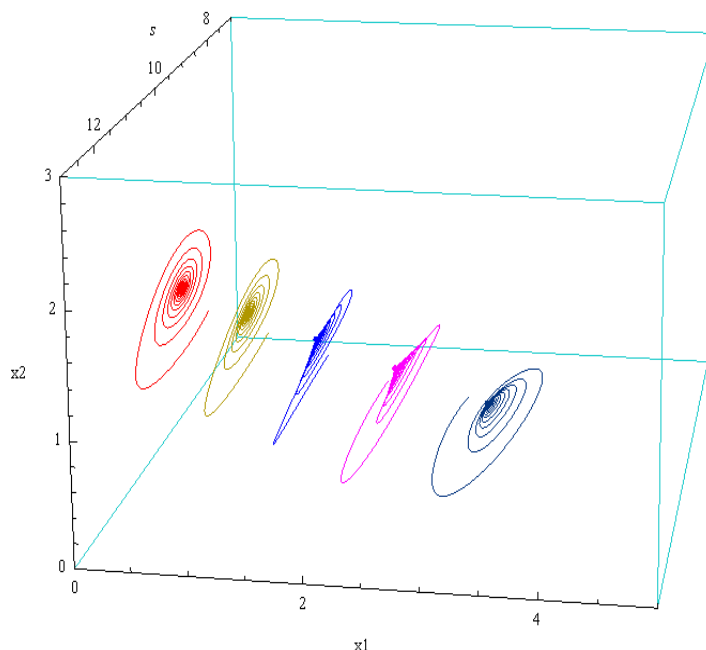


Figura B.149: Retrato de fase con parametro de bifurcación $k_{a12} = 13.1216$ y campo f_j .

dominio de L_k y el segmento de curva $L\underline{a}_k$ se encuentran debajo del eje ξ_1 , entonces en los subsistemas del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_1(s, x_1, x_2)$ y $f_2(s, x_1, x_2)$, los puntos del segmento de equilibrios L_k se comportan como focos estables, Corolario 79. Por consiguiente existe una vecindad del segmento de equilibrios para el cual las soluciones con condiciones iniciales en esta vecindad tiende a un punto del segmento L_k cuando t tiende a infinito, Teorema 142. Además el retrato de fase se asemeja al del sistema no suave (2.1) cuando existen variedades invariantes y los puntos del segmento del equilibrios L_k son del tipo foco-foco asintóticamente estable; sin embargo en este caso no existen variedades invariantes estables locales que contengan puntos de equilibrios del interior del segmento L_k . En este caso la variación media del radio de oscilación es baja debido a los valores relativamente bajos de las componentes reales de sus valores propios y las órbitas se desplazan en dirección hacia arriba, ya que el sistema no suave (2.1) es del tipo elíptico $\left(\frac{\partial_s p_2(\lambda, a_2)}{\partial_s p_2(\lambda, a_1)} - \frac{\partial_s p_1(\lambda, a_2)}{\partial_s p_1(\lambda, a_1)} = 0.433749 \right) > 0$, por la Observación 134 y la parte ii) de la

Proposición 138, como se puede apreciar en el retrato de fase de la Figura B.149. Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales en el octante positivo permanecen en éste, son acotadas y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios L_k ; por lo tanto el segmento L_k es a un *atractor* del sistema y su cuenca de atractividad es el octante positivo. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el *kr-estratega*, el *r-estratega* y la presa.

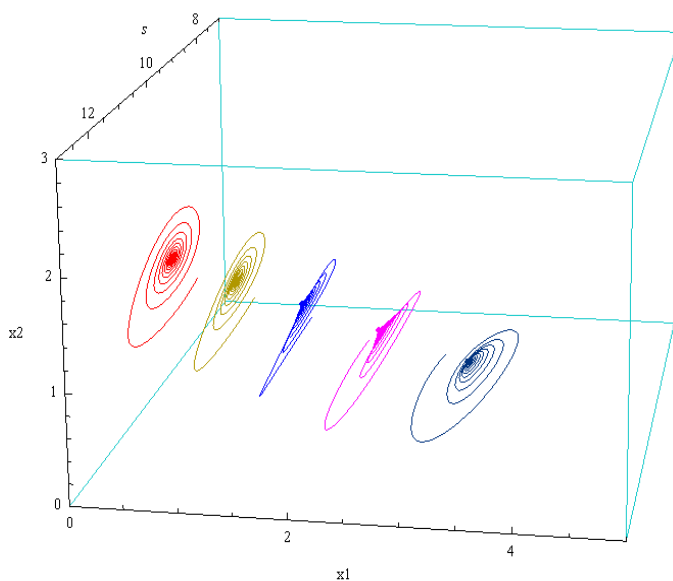


Figura B.150: Retrato de fase con parametro de bifurcación $k_{a12} = 13.1216$ y campo \tilde{f}_j .

Un comportamiento semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.150, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{a12}$. Como se puede observar en las Figuras B.149 y B.150, los retratos de fase del sistema (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ no puede afirmarse que son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k , porque el Corolario 101 no aplica en este caso, ya que no existen variedades invariantes estables para el sistema no suave (2.1) que contengan los puntos del interior del segmento de equilibrios L_k .

Condición para $k_{a22} = 13.4804$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$L_k \leftrightarrow \xi_2 = 0.142857(9.77157 - 2.\xi_1).$$

$$La_{k1} \leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.0714286(-0.897413 + 0.0895113\xi_1).$$

$$La_{k2} \leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.0714286(-1.77636 \times 10^{-15} + 0.175386\xi_1).$$

$$Lb_{k1} \leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.0714\sqrt{28.(41.8499 - 6.29734\xi_1) - (-0.89741 + 0.08951\xi_1)^2}.$$

$$Lb_{k2} \leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.0714\sqrt{28(35.568 - 5.550\xi_1) - (-1.7763 \times 10^{-15} + 0.17538\xi_1)^2}.$$

$$La_k \leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{-0.897413 + 0.0895113\xi_1}{\sqrt{28.(41.8499 - 6.29734\xi_1) - (-0.897413 + 0.08951\xi_1)^2}} + \frac{-1.77636 \times 10^{-15} + 0.175386\xi_1}{\sqrt{28.(35.5681 - 5.5507\xi_1) - (-1.77636 \times 10^{-15} + 0.17538\xi_1)^2}}.$$

$$0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.$$

En la Figura B.151 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k

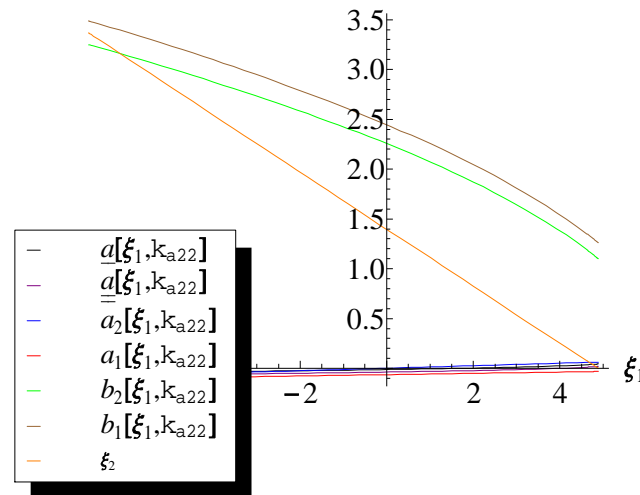


Figura B.151: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , para $k_{a22} = 13.4804$.

que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento

de equilibrios L_k . Como los segmentos de curva Lb_{k1} , Lb_{k2} están definidos en el

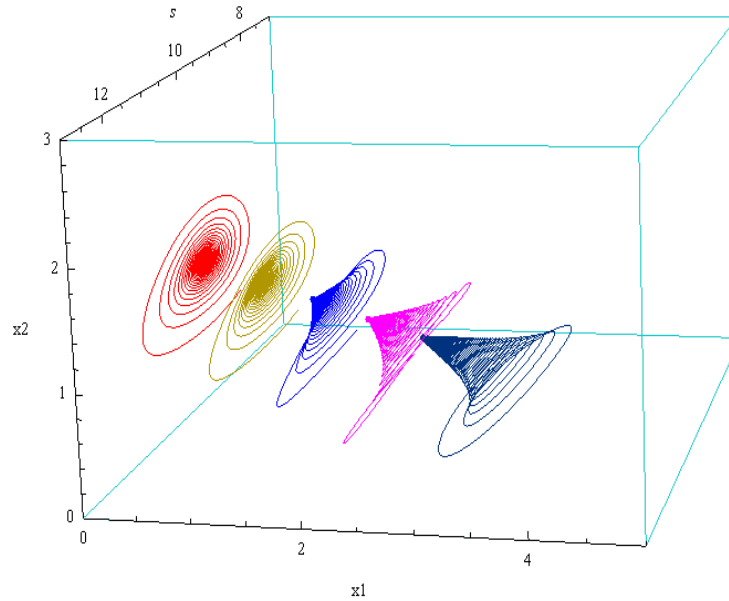


Figura B.152: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a22} = 13.4804$ y campo f_j .

dominio de L_k y los segmentos de curva $L\hat{a}_k$, $L\underline{a}_k$ crecen por el Lema 132, entonces la intersecciones de las curvas $L\hat{a}_k$ y $L\underline{a}_k$ con el eje ξ_1 , puntos $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a22}), \tilde{\xi}_2(k_{a22}))$ y $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a22}), \tilde{\xi}_2(k_{a22}))$ respectivamente, dividen L_k en tres partes (*dos de las cuales pueden ser vacías*). Existen dos entornos tubulares, el primero es entorno tubular de los puntos del segmento de equilibrios $\hat{L}_k \subset L_k$ a la derecha del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a22}), \tilde{\xi}_2(k_{a22}))$ en el cual las soluciones con condición iniciales en esta vecindad se alejan del segmento L_k cuando t crece, es decir la parte de L_k a la derecha del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a22}), \tilde{\xi}_2(k_{a22}))$ es un repulsor del sistema. Luego los equilibrios en este caso no representan coexistencia estable entre el *kr-estratega*, el *r-estratega* y la presa, porque los equilibrios del sistema ahora no son estables desde el punto de vista de Lyapunov; sin embargo las órbitas ascienden a lo largo del segmento de equilibrios por la Observación 134 y la parte ii) de la Proposición 138, ya que $\left(\frac{\partial_s p_2(\lambda, a_2)}{\partial_s p_2(\lambda, a_1)} - \frac{\partial_s p_1(\lambda, a_2)}{\partial_s p_1(\lambda, a_1)} = 0.433749\right) > 0$, y alcanzan el otro entorno tubular, el de los puntos del segmento de equilibrios $\hat{L}_k \subset L_k$ a la izquierda del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a22}), \tilde{\xi}_2(k_{a22}))$, en el cual las soluciones con condiciones iniciales allí tienden a puntos del

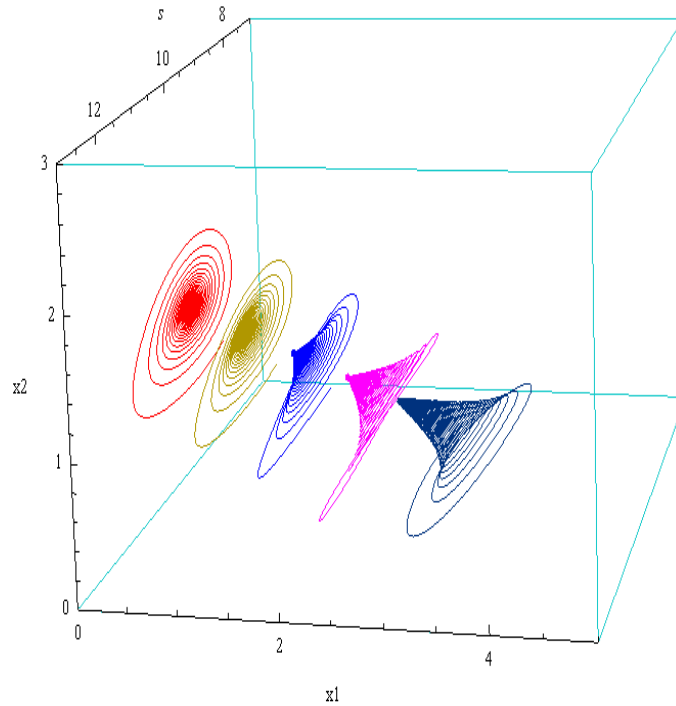


Figura B.153: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a22} = 13.4804$ y campo \tilde{f}_j .

segmento L_k cuando t tiende a más infinito, Teorema 142, como se observa en el retrato de fase de la Figura B.152. Por consiguiente las trayectorias del sistema con condiciones iniciales en un entorno tubular suficientemente pequeño de los puntos de L_k a la izquierda del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a22}), \tilde{\xi}_2(k_{a22}))$, en el octante positivo permanecen en éste, son acotadas y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios L_k ; por lo tanto la parte del segmento L_k a la izquierda del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a22}), \tilde{\xi}_2(k_{a22}))$ es a un *atractor* del sistema. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el *kr-estratega*, el *r-estratega* y la presa. Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales en un entorno tubular suficientemente pequeño de los puntos de L_k , a la derecha del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a22}), \tilde{\xi}_2(k_{a22}))$ se alejan del segmento L_k . Luego los equilibrios en este caso no representan coexistencia estable entre el *k-estratega*, el *r-estratega* y la presa, porque los equilibrios del sistema ahora no son estables desde el punto de vista de Lyapunov; sin embargo las órbitas ascienden a lo largo del segmento de equilibrios L_k por la Observación 134, y la parte ii) de la Proposición

138, ya que $\left(\frac{\partial_s p_2(\lambda, a_2)}{\partial_s p_2(\lambda, a_1)} - \frac{\partial_s p_1(\lambda, a_2)}{\partial_s p_1(\lambda, a_1)} = 0.433749\right) > 0$, y alcanzan el entorno tubular de los puntos de $\widehat{L}_k \subset L_k$ a la izquierda del punto $(\lambda, \widetilde{\xi}_1(k_{a22}), \widetilde{\xi}_2(k_{a22}))$, en el cual convergen a puntos del segmento L_k cuando t tiende a más infinito; significando la oscilación de coexistencia entre las tres especies es posible y la pérdida de terreno del r -estratega frente al kr -estratega, véase Figura B.152.

Un análisis semejante al anterior se realiza para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\widetilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.153, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{a22}$. Como se puede observar en las Figuras B.152 y B.153, los retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\widetilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ no se puede afirmar que son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k , porque el Corolario 101 no aplica en este caso, ya que no existen variedades invariantes estables para el sistema no suave (2.1) que contengan los puntos del interior del segmento de equilibrios L_k .

Condición para $k_{api} = 13.6$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$L_k \leftrightarrow \xi_2 = 0.142857(9.7991 - 2.\xi_1).$$

$$La_{k1} \leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.0714286(-0.683035 + 0.0895113\xi_1).$$

$$La_{k2} \leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.0714286(0.216905 + 0.175386\xi_1).$$

$$Lb_{k1} \leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.07142\sqrt{28.(41.9678 - 6.2973\xi_1) - (-0.6830 + 0.08951\xi_1)^2}.$$

$$Lb_{k2} \leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.07142\sqrt{28.(41.9678 - 6.29734x_1) - (-0.68303 + 0.08951\xi_1)^2}.$$

$$La_k \leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{-0.683035 + 0.0895113\xi_1}{\sqrt{28.(41.9678 - 6.29734x_1) - (-0.683035 + 0.08951\xi_1)^2}} + \frac{0.216905 + 0.175386\xi_1}{\sqrt{28.(35.6682 - 5.5507x_1) - (0.216905 + 0.17538x_1)^2}}.$$

$$0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.$$

En la Figura B.154 se presenta la línea de equilibrios L_k y los trozos de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$ y La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k . Como los segmentos de curva Lb_{k1} ,

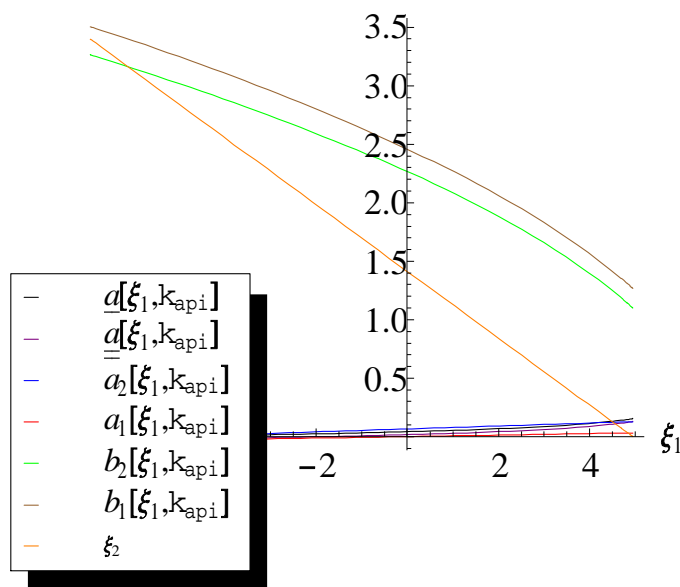


Figura B.154: Gráfica, de la línea de equilibrio L_k y de los trozos de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$ y La_k para $k_{api} = 13.6$.

Lb_{k2} están definidos en el dominio de L_k y los segmentos de curva La_k , $L\underline{a}_k$ crecen por el Lema 132, entonces la intersecciones de las curvas $L\underline{a}_k$ y La_k , con el eje ξ_1 , puntos $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{api}), \tilde{\xi}_2(k_{api}))$ y $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{api}), \tilde{\xi}_2(k_{api}))$ respectivamente, dividen L_k en tres partes (dos de las cuales pueden ser vacías). Existen dos entornos tubulares, el primero es entorno de los puntos del segmento de equilibrios $\hat{L}_k \subset L_k$ a la derecha del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{api}), \tilde{\xi}_2(k_{api}))$ en el cual las soluciones con condiciones iniciales en esta vecindad se alejan del segmento L_k cuando t crece, es decir la parte de L_k a la derecha del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{api}), \tilde{\xi}_2(k_{api}))$ es un repulsor del sistema; sin embargo las órbitas ascienden a lo largo del segmento de equilibrios por la Observación 134 y la parte ii) de la Proposición 138, ya que $\left(\frac{\partial_s p_2(\lambda, a_2)}{\partial_s p_2(\lambda, a_1)} - \frac{\partial_s p_1(\lambda, a_2)}{\partial_s p_1(\lambda, a_1)} = 0.433749\right) > 0$, y alcanzan el otro entorno tubular, el de los puntos del segmento de equilibrios $\hat{L}_k \subset L_k$ a la izquierda del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{api}), \tilde{\xi}_2(k_{api}))$, en el cual las soluciones con condiciones

iniciales en esta vecindad tienden a puntos del segmento L_k cuando t tiende a más infinito, Teorema 141. Al igual que el caso anterior, las trayectorias del sistema con

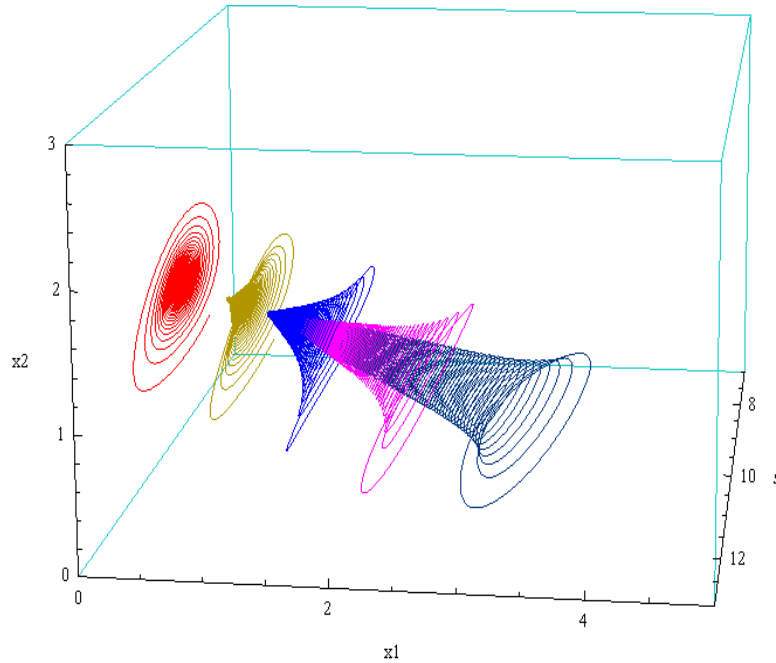


Figura B.155: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{api} = 13.6$ y campo f_j .

condiciones iniciales en un entorno tubular suficientemente pequeño de los puntos de L_k a la izquierda del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{api}), \tilde{\xi}_2(k_{api}))$, en el octante positivo permanecen en éste, son acotadas y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios L_k ; por lo tanto la parte del segmento L_k a la izquierda del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{api}), \tilde{\xi}_2(k_{api}))$ es a un *atractor* del sistema. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el *kr-estratega*, el *r-estratega* y la presa. Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales en un entorno tubular suficientemente pequeño de los puntos de L_k , a la derecha del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{api}), \tilde{\xi}_2(k_{api}))$ se alejan del segmento L_k . Luego los equilibrios en este caso no representan coexistencia estable entre el *kr-estratega*, el *r-estratega* y la presa, porque los equilibrios del sistema ahora no son estables desde el punto de vista de Lyapunov; sin embargo las órbitas ascienden a lo largo del segmento de equilibrios L_k por la Observación 134 y la parte ii) de la Proposición 138, ya que $\left(\frac{\partial_s p_2(\lambda, a_2)}{\partial_s p_2(\lambda, a_1)} - \frac{\partial_s p_1(\lambda, a_2)}{\partial_s p_1(\lambda, a_1)} = 0.433749\right) > 0$, y alcanzan el entorno tubular

de los puntos de $\widehat{L}_k \subset L_k$ a la izquierda del punto $(\lambda, \widetilde{\xi}_1(k_{api}), \widetilde{\xi}_2(k_{api}))$, en el cual convergen a puntos del segmento L_k cuando t tiende a más infinito; significando la oscilación de coexistencia entre las tres especies es posible y la pérdida de terreno del r -estratega frente al kr -estratega, véase Figura B.155.

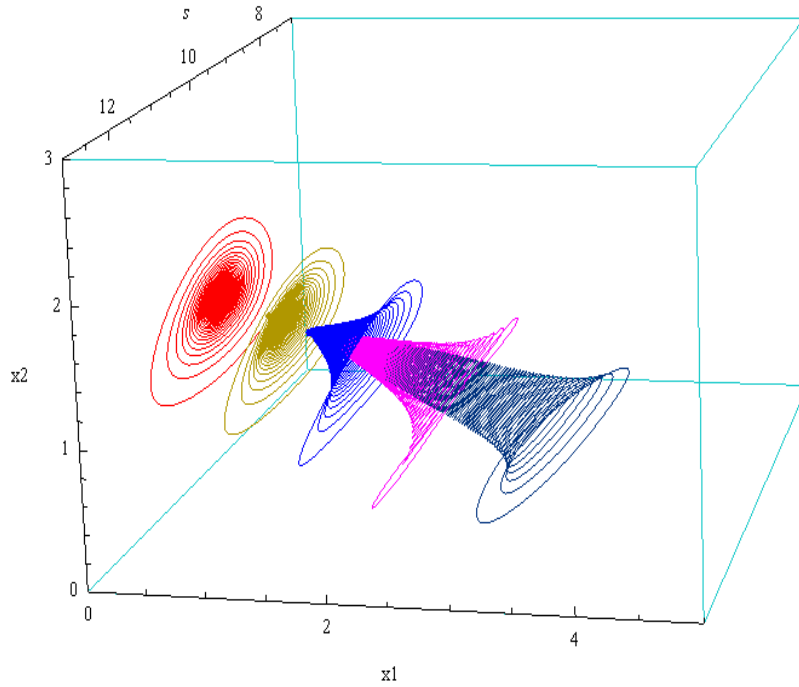


Figura B.156: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{api} = 13.6$ y campo \widetilde{f}_j .

Un análisis semejante al anterior se realiza para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\widetilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.156, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{api}$. Como se puede observar en las Figuras B.155 y B.156, los retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\widetilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ no se puede afirmar que son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k , porque el Corolario 101 no aplica en este caso, ya que no existen variedades invariantes estables para el sistema no suave (2.1) que contengan los puntos del interior del segmento de equilibrios L_k .

Condición para $k_{a11} = 13.7573$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$L_k \leftrightarrow \xi_2 = 0.142857(9.83031 - 2\xi_1).$$

$$La_{k1} \leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.0714286(-0.439962 + 0.0895113\xi_1).$$

$$La_{k2} \leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.0714286(0.462845 + 0.175386\xi_1).$$

$$Lb_{k1} \leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.07142\sqrt{28.(42.101 - 6.2973\xi_1) - (-0.4399 + 0.0895x_1)^2}.$$

$$Lb_{k2} \leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.07142\sqrt{28.(35.781 - 5.5507\xi_1) - (0.46284 + 0.1753\xi_1)^2}.$$

$$La_k \leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{-0.439962 + 0.0895113\xi_1}{\sqrt{28.(42.1015 - 6.29734\xi_1) - (-0.439962 + 0.08951\xi_1)^2}} + \frac{0.462845 + 0.175386\xi_1}{\sqrt{28.(35.7818 - 5.5507\xi_1) - (0.462845 + 0.175386\xi_1)^2}}.$$

$$0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.$$

En la Figura B.157 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k

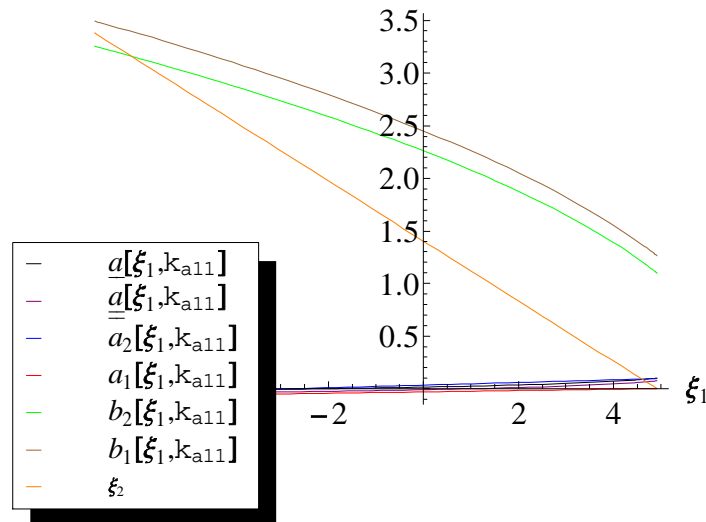


Figura B.157: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , para $k_{a11} = 13.757$.

que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento

de equilibrios L_k . Como los segmentos de curva Lb_{k1} , Lb_{k2} están definidos en el dominio de L_k y los segmentos de curva $L\underline{a}_k$, $L\overline{a}_k$ crecen por el Lema 132, entonces la intersecciones de las curvas $L\underline{a}_k$ y $L\overline{a}_k$ con el eje ξ_1 , puntos $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a11}), \tilde{\xi}_2(k_{a11}))$ y $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a11}), \tilde{\xi}_2(k_{a11}))$ respectivamente, dividen L_k en tres partes (*una de las cuales puede ser vacía*). Por consiguiente existe un entorno tubular del segmento de equi-

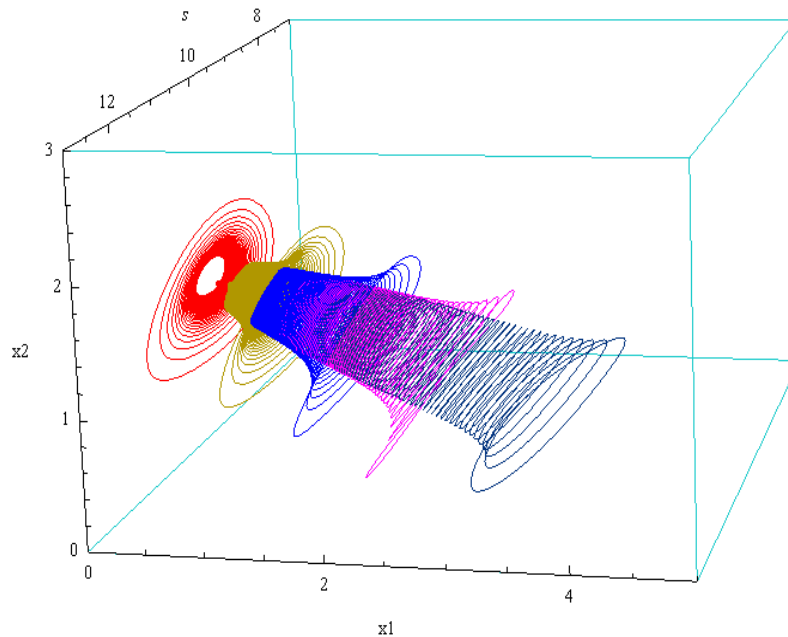


Figura B.158: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a11} = 13.7573$ y campo \tilde{f}_j .

librios $\widehat{L}_k \subset L_k$ a la derecha del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a11}), \tilde{\xi}_2(k_{a11}))$ en el cual las soluciones con condición iniciales en esta vecindad se alejan del segmento L_k cuando t crece, es decir la parte de L_k a la derecha del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a11}), \tilde{\xi}_2(k_{a11}))$ es un repulsor del sistema Teorema 141; sin embargo las órbitas ascienden a lo largo del segmento de equilibrios por la Observación 134 y la parte ii) de la Proposición 138, ya que $\left(\frac{\partial_s p_2(\lambda, a_2)}{\partial_s p_2(\lambda, a_1)} - \frac{\partial_s p_1(\lambda, a_2)}{\partial_s p_1(\lambda, a_1)} = 0.433749 \right) > 0$, y pueden alcanzar el plano coordenado $x_1 = 0$, el cual es una variedad invariante del sistema no suave (2.1). Luego forma un ciclo límite el cual es orbitalmente asintóticamente estable en desarrollo de la bifurcación de Hopf-Zou & Küpper no-suave de acuerdo con el Teorema 121, significando la oscilación de coexistencia entre el *kr-estratega* y la presa. El entorno

tubular de los puntos del segmento de equilibrios $\widehat{L}_k \subset L_k$ a la izquierda del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a11}), \tilde{\xi}_2(k_{a11}))$ del segmento de equilibrios L_k es vacío en este caso, ya que $\tilde{\xi}_1(k_{a11}) < 0$. como se observa en el retrato de fase de la Figura B.158.

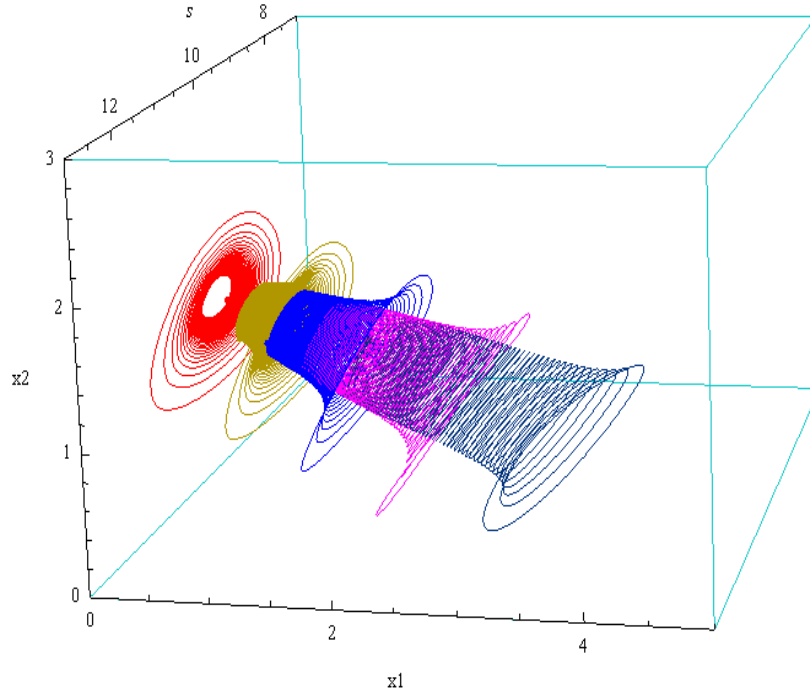


Figura B.159: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a11} = 13.7573$ y campo \tilde{f}_j .

Un comportamiento semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.159, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{a11}$. Como se puede observar en las Figuras B.158 y B.159, los retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ no se puede afirmar que son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k , porque el Corolario 101 no aplica en este caso, ya que no existen variedades invariantes estables para el sistema no suave (2.1) que contengan los puntos del interior del segmento de equilibrios L_k .

Condición para $k_{a21} = 14.135$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned}
 L_k &\leftrightarrow \xi_2 = 0.142857(9.8868 - 2\xi_1) \\
 La_{k1} &\leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.0714286(-5.32907 \times 10^{-15} + 0.0895113\xi_1). \\
 La_{k2} &\leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.0714286(0.907995 + 0.175386\xi_1). \\
 Lb_{k1} &\leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.0714\sqrt{28.(42.3434 - 6.2973\xi_1) - (-5.329 \times 10^{-15} + 0.089\xi_1)^2}. \\
 Lb_{k2} &\leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.0714\sqrt{28.(35.9875 - 5.5507\xi_1) - (0.90799 + 0.1753\xi_1)^2}. \\
 La_k &\leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{-5.32907 \times 10^{-15} + 0.0895113\xi_1}{\sqrt{28.(42.3434 - 6.29734\xi_1) - (-5.32907 \times 10^{-15} + 0.0895\xi_1)^2} + \frac{0.907995 + 0.175386\xi_1}{\sqrt{28.(35.9875 - 5.5507\xi_1) - (0.907995 + 0.1753\xi_1)^2}}}. \\
 0 &\leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.
 \end{aligned}$$

En la Figura B.160 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k

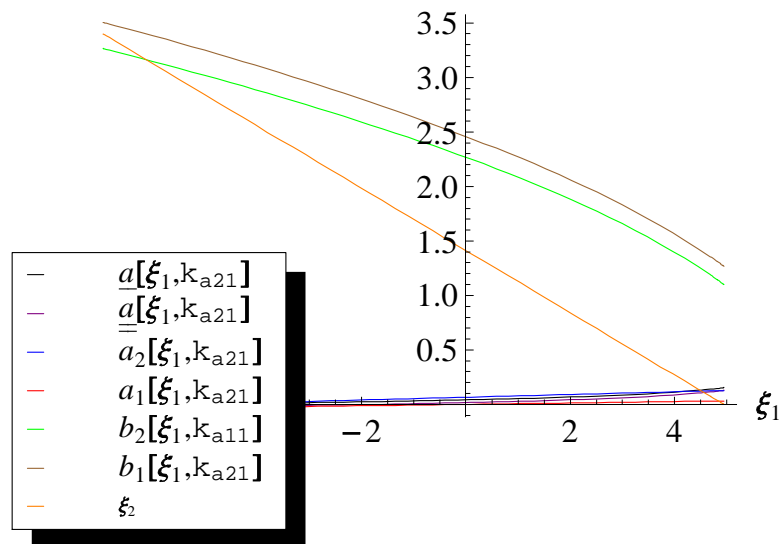


Figura B.160: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , para $k_{a21} = 14.135$.

que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k . Como los segmentos de curva Lb_{k1} , Lb_{k2} están definidos en el dominio de L_k y los segmentos de curva $L\underline{a}_k$, $L\underline{a}_k$, se encuentran arriba del eje ξ_1 en el dominio de L_k . Por lo tanto existe un entorno tubular de L_k en el cual las soluciones con condición iniciales en esta vecindad se alejan del segmento L_k cuando t crece, es decir L_k es un repulsor del sistema no suave Teorema 141. Sin embargo las órbitas ascienden a lo largo del segmento de equilibrios por la Observación 134 y la parte ii) de la Proposición 138, ya que $\left(\frac{\partial_s p_2(\lambda, a_2)}{\partial_s p_2(\lambda, a_1)} - \frac{\partial_s p_1(\lambda, a_2)}{\partial_s p_1(\lambda, a_1)} = 0.433749\right) > 0$, y alcanzan el plano coordenado $x_1 = 0$, el cual es una variedad invariante del sistema no suave (2.1). Luego forma un ciclo límite de mayor amplitud que en el caso anterior, el cual es orbitalmente asintóticamente estable en desarrollo de la bifurcación de Hopf-Zou & Küpper no-suave de acuerdo con el Teorema 121, significando la oscilación de coexistencia entre el el *kr-estratega* y la presa, como se observa en el retrato de fase de la Figura B.161.

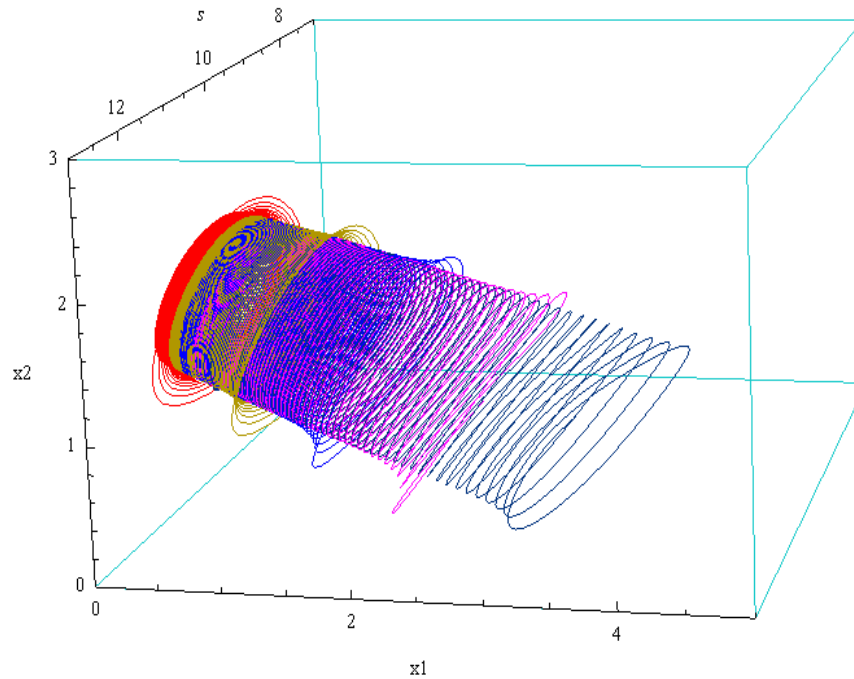


Figura B.161: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a21} = 14.135$ y campo f_j .

Un comportamiento semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado al campo aproximado $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.162, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{a21}$. Como se puede observar en las Figuras B.161 y B.162, los retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$, no se puede afirmar que son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k , porque el Corolario 101 no aplica en este caso, ya que no existen variedades invariantes estables para el sistema no suave (2.1) que contengan los puntos del interior del segmento de equilibrios L_k .

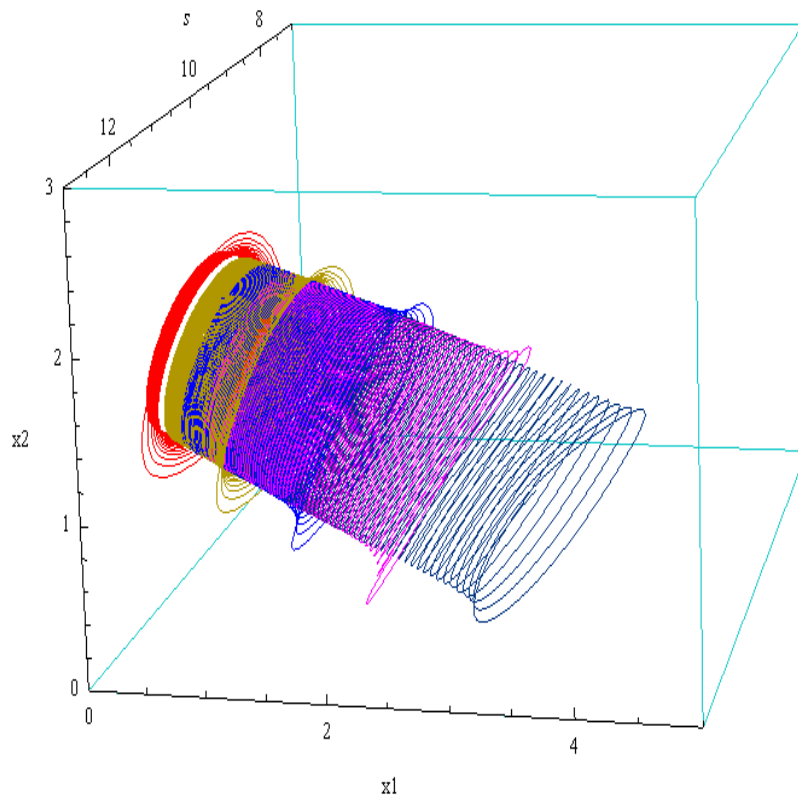


Figura B.162: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a21} = 14.135$ y campo \tilde{f}_j .

B.8 Modelo con variedad invariante del tipo 3

Los siguientes son los parámetros del modelo natural:

Parámetros de la respuesta funcional $p_1(s, a)$

$$\begin{aligned} A_1 &= 1.1; & B_1 &= 1; & D_1 &= 1; & c_1 &= 1; \\ d_{11} &= 0.5; & d_{21} &= 0.6; & F_1 &= 0; & m_1 &= .1; \\ n_1 &= 0.5; & q_1 &= 4; & r_1 &= 15; & u_1 &= 0; \\ v_1 &= -0.2; & \lambda &= 10; & \gamma &= 1; & &.. \end{aligned}$$

Parámetros de la respuesta funcional $p_3(s, a)$

$$\begin{aligned} A_2 &= 1; & B_2 &= 1; & D_2 &= 1; & c_2 &= 1; \\ d_{12} &= 0.5; & d_{22} &= 0.6; & F_2 &= 0; & m_2 &= .1 \\ n_2 &= 0.1; & q_2 &= 4; & r_2 &= 15 & u_2 &= 0 \\ v_2 &= -0.2 & \lambda &= 10; & \gamma &= 1, & &.. \end{aligned}$$

La resistencia ambiental g de la presa y la respuesta funcional p de los predadores adoptan la forma:

$$\begin{aligned} p(s, a) &= \begin{cases} \frac{1.1s^{0.5}}{1+a^{15}} + \frac{4s}{(4s+a)a^{0.2}}, & \text{si } s \leq \lambda \\ \frac{2.21958}{1+a^{15}} + \frac{s^{0.1}}{1+a^{15}} + \frac{4s}{(4s+a)a^{0.2}}, & \text{si } s > \lambda, \end{cases} \\ g(s, k) &= 1 - \left(\frac{s}{k}\right)^{0.1}. \end{aligned}$$

La ecuación (B.2) para a_1 es de la forma:

$$\begin{aligned} 0 &= -0.5 + \frac{40}{(40+a_1)a_1^{0.2}} + \frac{3.47851}{1+a_1^{15}} \\ a_1 &= 10.2389. \end{aligned}$$

La ecuación (B.2) para a_2 es de la forma:

$$\begin{aligned} 0 &= -0.6 + \frac{40}{(40+a_2)a_2^{0.2}} + \frac{3.47851}{1+a_2^{15}} \\ a_2 &= 6.23374. \end{aligned}$$

Además, se muestran las gráficas y las ecuaciones paramétricas de la curvas L_k ,

$La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k siguientes

$$L_k = \{(s, \xi_1, x_2) : p(\lambda, a_1)\xi_{11} + p(\lambda, a_2)\xi_{12} = \gamma\lambda g(\lambda, k);$$

$$\lambda, \xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0\}. \quad (\text{B.30})$$

$$La_{k,j} = \{(s, \xi_1, a_j(\xi_1, k)) : s = \lambda, 0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}\}, \quad (\text{B.31})$$

$$Lb_{k,j} = \{(s, \xi_1, b_j(\xi_1, k)) : s = \lambda, 0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}\}, \quad (\text{B.32})$$

$$La_k = \{(s, \xi_1, a(\xi_1, k)) : a(\xi_1, k) = \frac{a_1(\xi_1, k)}{b_1(\xi_1, k)} + \frac{a_2(\xi_1, k)}{b_2(\xi_1, k)};$$

$$s = \lambda, 0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}\}, \quad (\text{B.33})$$

así como los retratos de fase del sistema para los distintos valores del parámetro de bifurcación k_{bij} y k_{aij} para $i, j = 1, 2$, seleccionados con el propósito de mostrar los cambios cualitativos que ocurren en el sistema. Los parámetros de bifurcación k_{bij} y k_{aij} para $i, j = 1, 2$, están dadas por las ecuaciones

$$K_{bij}(k_{bij}) = \gamma\lambda g(\lambda, k)\partial_s p_j(\lambda, a_i) - \frac{1}{4}\gamma^2 \left(\lambda\partial_s(\lambda, k) + g(\lambda, k) \left(1 - \frac{\lambda\partial_s p_j(\lambda, a_i)}{p_j(\lambda, a_i)} \right) \right)^2 = 0,$$

$$K_{aij}(k_{aij}) = -\lambda p_j(\lambda, a_i)\partial_s g(\lambda, k) + g(\lambda, k) (\lambda\partial_s p_j(\lambda, a_i) - p_j(\lambda, a_i)) = 0,$$

por las Definiciones 37, 41 y la proposición 39. Los valores obtenidos para los puntos de bifurcación k_{bij} y k_{aij} en cada uno de los subsistemas son los siguientes:

subsistema 1

$$K_{b11}(k) = 0.101902 \left(1 - \frac{1.25893}{k^{0.1}} \right) - \frac{1}{4} \left(0.796197 \left(1 - \frac{1.25893}{k^{0.1}} \right) - \frac{0.125893}{k^{0.1}} \right)^2 = 0.$$

$$k_{b11} = 11.9258.$$

$$K_{b21}(k) = 0.0808986 \left(1 - \frac{1.25893}{k^{0.1}} \right) - \frac{1}{4} \left(0.865169 \left(1 - \frac{1.25893}{k^{0.1}} \right) - \frac{0.125893}{k^{0.1}} \right)^2 = 0.$$

$$k_{b21} = 12.2493.$$

$$K_{a21}(k) = -0.519101 \left(1 - \frac{1.25893}{k^{0.1}} \right) + \frac{.0755355}{k^{0.1}} = 0.$$

$$k_{a21} = 29.8555.$$

$$K_{a11}(k) = -0.398098 \left(1 - \frac{1.25893}{k^{0.1}} \right) + \frac{0.0629463}{k^{0.1}} = 0.$$

$$k_{a11} = 32.646.$$

$$\begin{aligned}
 K_{b12}(k) &= 0.101902 \left(1 - \frac{1.25893}{k^{0.1}}\right) - \frac{1}{4} \left(0.796197 \left(1 - \frac{1.25893}{k^{0.1}}\right) - \frac{0.125893}{k^{0.1}}\right)^2 = 0. \\
 k_{b12} &= 11.9258. \\
 K_{b22}(k) &= 0.0808986 \left(1 - \frac{1.25893}{k^{0.1}}\right) - \frac{1}{4} \left(0.865169 \left(1 - \frac{1.25893}{k^{0.1}}\right) - \frac{0.125893}{k^{0.1}}\right)^2 = 0. \\
 k_{b22} &= 12.2493. \\
 K_{a22}(k) &= -0.519101 \left(1 - \frac{1.25893}{k^{0.1}}\right) + \frac{.0755355}{k^{0.1}} = 0. \\
 k_{a22} &= 29.8555. \\
 K_{a12}(k) &= -0.398098 \left(1 - \frac{1.25893}{k^{0.1}}\right) + \frac{0.0629463}{k^{0.1}} = 0. \\
 k_{a12} &= 32.646.
 \end{aligned}$$

Condición para $k_{b12} = 11.9258$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned}
 L_k &\leftrightarrow \xi_2 = 1.66667(0.174573 - 0.5\xi_1). \\
 La_{k1} &\leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.833333(-0.0498904 - 0.00206918\xi_1). \\
 La_{k2} &\leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.833333(-0.0498904 - 0.00206918\xi_1). \\
 Lb_{k1} &\leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.8333\sqrt{2.4(0.0008 + 0.00063\xi_1) - (-0.0498 - 0.0020\xi_1)^2}. \\
 Lb_{k2} &\leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.8333\sqrt{2.4(0.0008 + 0.00063\xi_1) - (-0.0498 - 0.0020\xi_1)^2}. \\
 La_k &\leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{-0.0498904 - 0.002069\xi_1}{\sqrt{2.4(0.00084736 + 0.0006300\xi_1) - (-0.0498904 - 0.00206\xi_1)^2}} \\
 &\quad + \frac{-0.0498904 - 0.00206918\xi_1}{\sqrt{2.4(0.000847364 + 0.000630x_1) - (-0.0498904 - 0.0020691\xi_1)^2}} \\
 0 &\leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.
 \end{aligned}$$

En la Figura B.163 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k . Como los segmentos Lb_{k1} , Lb_{k2} no están definidos debajo del segmento de equilibrios L_k y los segmentos La_{k1} , La_{k2} se encuentran debajo del eje ξ_1 en el dominio de L_k , entonces los puntos del segmento de equilibrios L_k se comportan como nodos estables en cada subsistema del sistema no suave (2.1) asociado a los

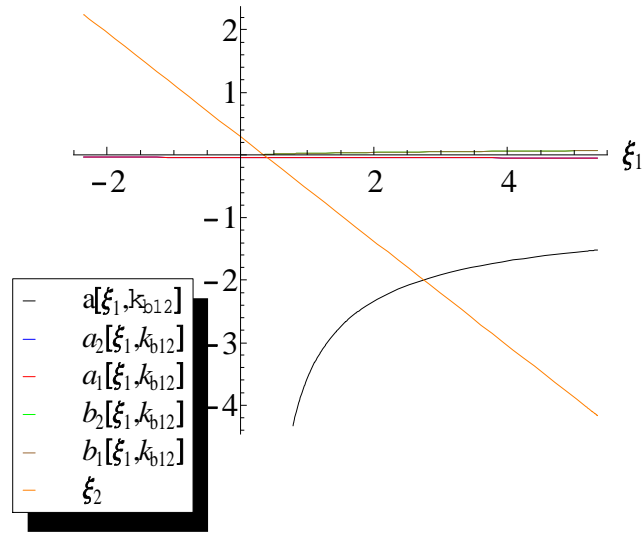


Figura B.163: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , para $k_{b12} = 11.9258$.

campos $f_j(s, x_1, x_2)$, Corolario 80. Por consiguiente como equilibrios del tipo *nodo-nodo* asintóticamente estable en el sistema no suave (2.1), Teorema 114, como se

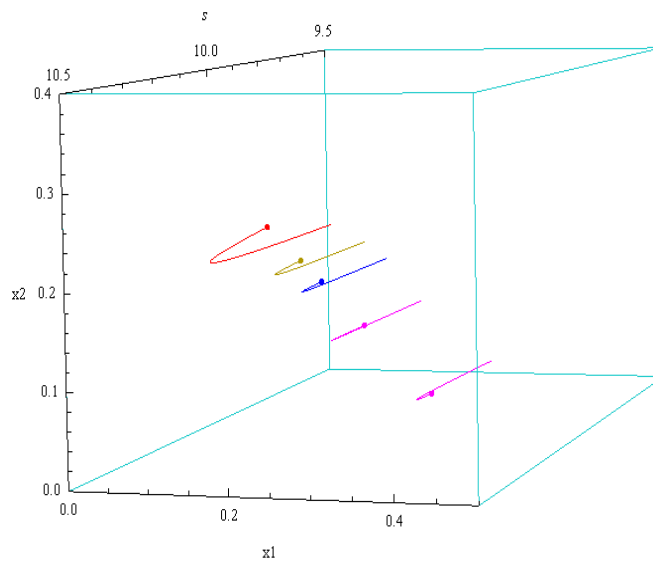


Figura B.164: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b12} = 11.9258$ y campo f_j .

puede observar en el retrato de fase de la Figura B.164. Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales en el octante positivo permanecen en éste, son acotadas y tienden asintóticamente hacia la línea de equilibrios L_k ; por lo tanto el segmento L_k es a un *atractor* del sistema y su cuenca de atractividad es el octante positivo, Teorema 114. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el k -estratega, el r -estratega y la presa.

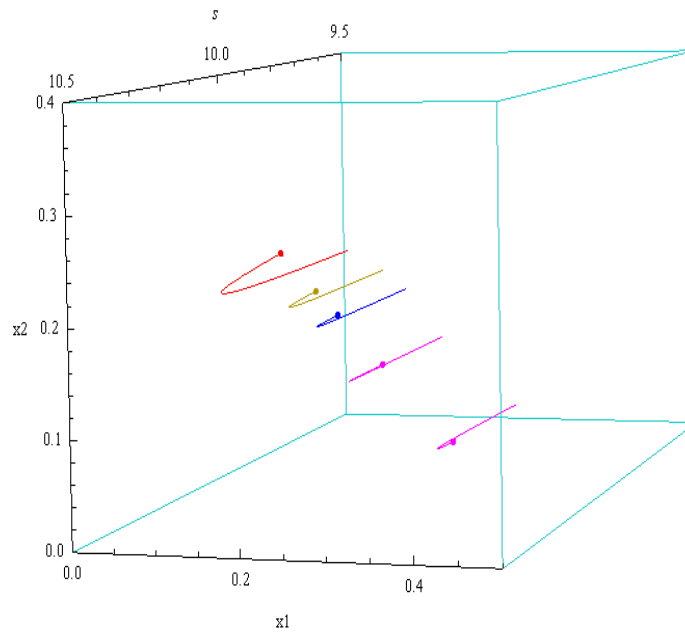


Figura B.165: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b12} = 11.9258$ y campo \tilde{f}_j .

Un comportamiento semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.165, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{b12}$. Como se observa en las Figuras B.164 y B.165, los retratos fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k , como se demuestra en el Corolario 101.

Condición para $k_{b11} = 11.9258$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$L_k \leftrightarrow \xi_2 = 1.66667(0.174573 - 0.5\xi_1).$$

$$La_{k1} \leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.833333(-0.0498904 - 0.00206918\xi_1).$$

$$La_{k2} \leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.833333(-0.0498904 - 0.00206918\xi_1).$$

$$Lb_{k1} \leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.83333\sqrt{2.4(0.00084 + 0.00063\xi_1) - (-0.04989 - 0.0020\xi_1)^2}.$$

$$Lb_{k2} \leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.83333\sqrt{2.4(0.00084 + 0.000630\xi_1) - (-0.0498 - 0.0020\xi_1)^2}.$$

$$La_k \leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{-0.0498904 - 0.00206918\xi_1}{\sqrt{2.4(0.000847 + 0.000630\xi_1) - (-0.0498904 - 0.0020x_1)^2}} + \frac{-0.0498904 - 0.002069\xi_1}{\sqrt{2.4(0.00084 + 0.000630x_1) - (-0.0498904 - 0.002069\xi_1)^2}}.$$

$$0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.$$

En la Figura B.115 se presenta la línea de equilibrios L_k y los trozos de las cur-

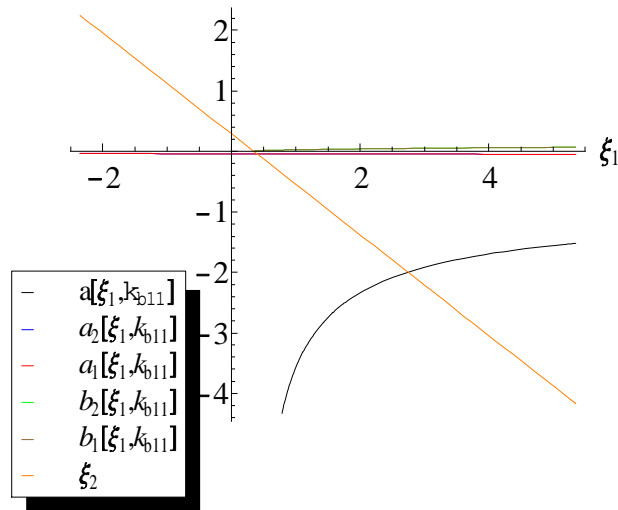


Figura B.166: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , para $k_{b11} = 11.9258$.

vas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , que muestran la dinámica de los valores propios del sistema

alrededor del segmento de equilibrios L_k . Como en el caso anterior los segmentos

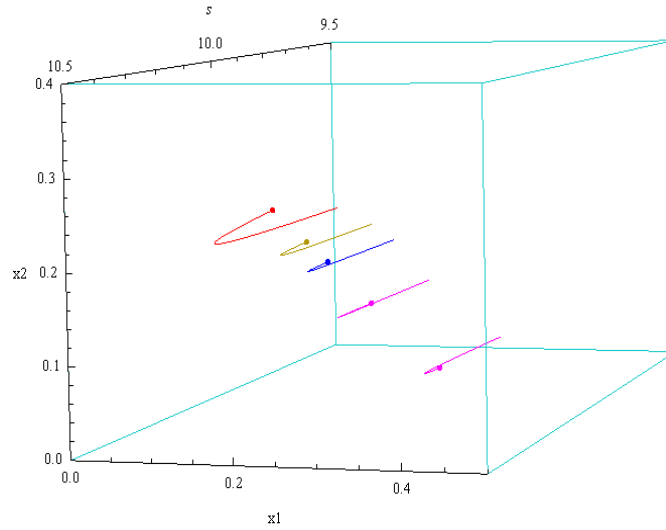


Figura B.167: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b11} = 11.9258$ y campo f_j .

Lb_{k1} , Lb_{k2} no están definidos debajo del segmento de equilibrios L_k y los segmentos La_{k1} , La_{k2} se encuentran debajo del eje ξ_1 , entonces los puntos del segmento de equilibrios L_k se comportan como nodos estables en cada subsistema del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, Corolario 80. Por consiguiente como equilibrios del tipo *nodo-nodo* asintóticamente estable en el sistema no suave (2.1), Teorema 114, como se observa en el retrato de fase de la Figura B.167. En este caso el subsistema del sistema no suave (2.1) asociado al campo $f_1(s, x_1, x_2)$ tiene los mismos puntos bifurcación que el subsistema del sistema no suave (2.1) asociado al campo $f_2(s, x_1, x_2)$ lo cual muestra la existencia de sistemas no suave con puntos de bifurcación iguales en ambos lados de la superficie de conmutación. Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales en el octante positivo permanecen en éste y son acotadas y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios L ; por lo tanto el segmento L_k es a un *atractor* del sistema y su cuenca de atractividad es el octante positivo, Teorema 114. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el k -estratega, el r -estratega y la presa.

Un comportamiento semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2)

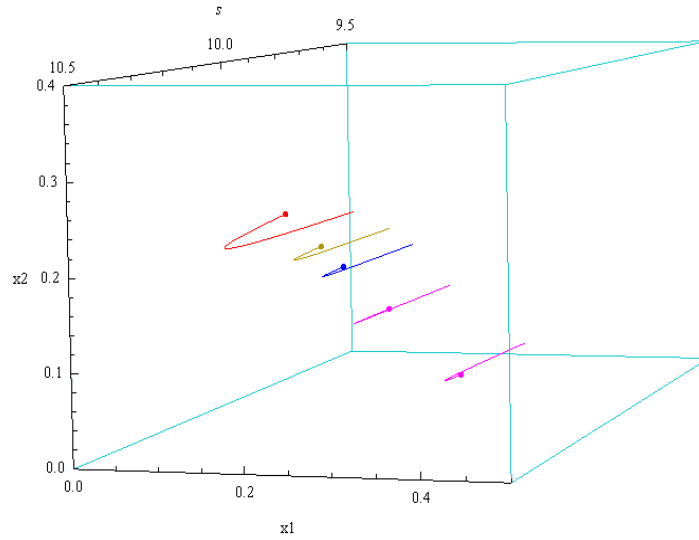


Figura B.168: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b11} = 11.9258$ y campo \tilde{f}_j .

asociado al campo aproximado $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.168, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{b11}$. Como se observa en las Figuras B.167 y B.168, los retratos de fase del sistema (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k , como se muestra en el Corolario 101.

Condición para $k_{b21} = 12.2493$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$L_k \leftrightarrow \xi_2 = 1.66667(0.200836 - 0.5\xi_1).$$

$$La_{k1} \leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.833333(-0.0483696 - 0.00206918\xi_1).$$

$$La_{k2} \leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.833333(-0.0483696 - 0.00206918\xi_1).$$

$$Lb_{k1} \leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.83333\sqrt{2.4(0.0009 + 0.00063\xi_1) - (-0.04836 - 0.0020\xi_1)^2}.$$

$$Lb_{k2} \leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.83333\sqrt{2.4(0.0009 + 0.00063\xi_1) - (-0.04836 - 0.0020\xi_1)^2}.$$

$$La_k \leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{-0.0483696 - 0.00206918\xi_1}{\sqrt{2.4.(0.0009 + 0.00063\xi_1) - (-0.0483696 - 0.0020\xi_1)^2}}$$

$$+ \frac{-0.0483696 - 0.00206918\xi_1}{\sqrt{2.4.(0.00097484 + 0.000630095x_1) - (-0.0483696 - 0.0020691\xi_1)^2}}.$$

$$0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.$$

En la Figura B.169 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k . Como los segmentos de curva Lb_{k1} , Lb_{k2} están definidos en el dominio

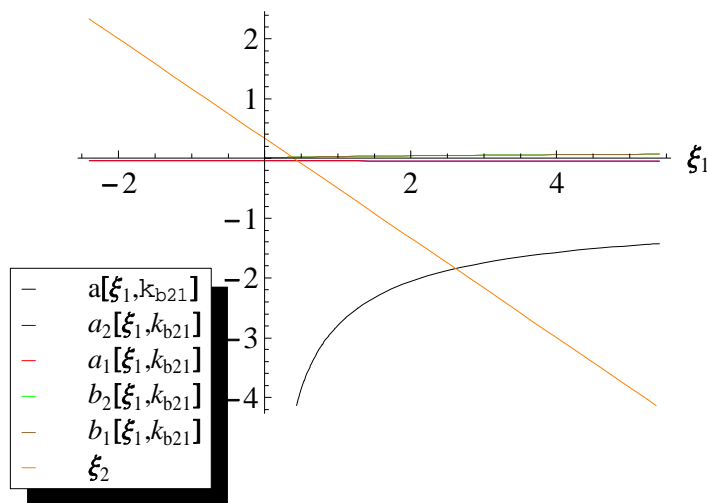


Figura B.169: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , para $k_{b21} = 12.2493$.

de L_k y el segmento de curva La_k se encuentran debajo del eje ξ_1 , entonces los puntos del segmento de equilibrios L_k son del tipo foco-foco asintóticamente estable en el sistema no suave (2.1) sobre las variedades invariantes estables locales que los contienen, Teorema 114. En este caso como la variación media del radio de oscilación es alta debido a los valores relativamente altos de las componentes reales de sus valores propios μ_{1j} y μ_{2j} (véase Definición 3.6), el retrato de fase da la falsa impresión de tener el comportamiento de los puntos del segmento de equilibrios L_k del tipo nodo-nodo asintóticamente estable, como se puede observar en el retrato de fase

Apéndice B. Modelos no suaves numéricos que exhiben bifurcación zip 493
 de la Figura B.170. El retrato de fase de la Figura B.170, luce semejante al retrato de fase al de la Figura B.164; sin embargo son geoméricamente no equivalentes.

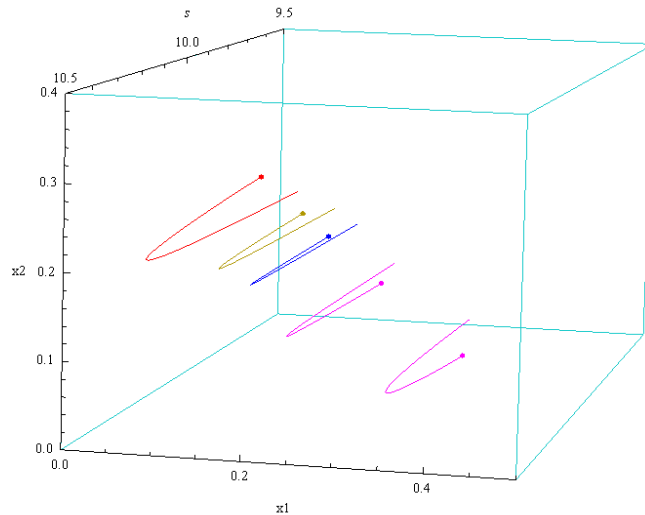


Figura B.170: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b21} = 12.2493$ y campo f_j .

Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales en el octante positivo permanecen en éste, son acotadas y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios

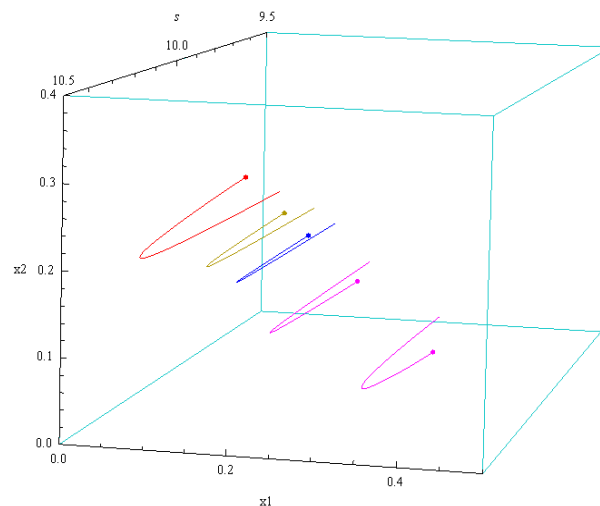


Figura B.171: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b21} = 12.2493$ y campo \tilde{f}_j .

L_k ; por lo tanto el segmento L_k es a un *atractor* del sistema y su cuenca de atracción es el octante positivo. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el *k-estratega*, el *r-estratega* y la presa.

Un comportamiento semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.171, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{b21}$. Como se puede observar en las Figuras B.170 y B.171, los retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k , como se muestra en el Corolario 101.

Condición para $k_{b22} = 12.2493$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned}
 L_k &\leftrightarrow \xi_2 = 1.66667(0.200836 - 0.5\xi_1). \\
 La_{k1} &\leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.833333(-0.0483696 - 0.00206918\xi_1). \\
 La_{k2} &\leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.833333(-0.0483696 - 0.00206918\xi_1). \\
 Lb_{k1} &\leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.8333\sqrt{2.4(0.0009 + 0.00063\xi_1) - (-0.0483 - 0.00206\xi_1)^2}. \\
 Lb_{k2} &\leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.8333\sqrt{2.4(0.0009 + 0.00063\xi_1) - (-0.0483 - 0.00206\xi_1)^2}. \\
 La_k &\leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{-0.0483696 - 0.00206918\xi_1}{\sqrt{2.4(0.0009 + 0.00063\xi_1) - (-0.0483696 - 0.0020\xi_1)^2}} \\
 &\quad + \frac{-0.0483696 - 0.00206918\xi_1}{\sqrt{2.4(0.00097484 + 0.000630095\xi_1) - (-0.0483696 - 0.002069\xi_1)^2}}. \\
 0 &\leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.
 \end{aligned}$$

En la Figura B.172 se presenta la línea de equilibrios L_k y los trozos de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k .

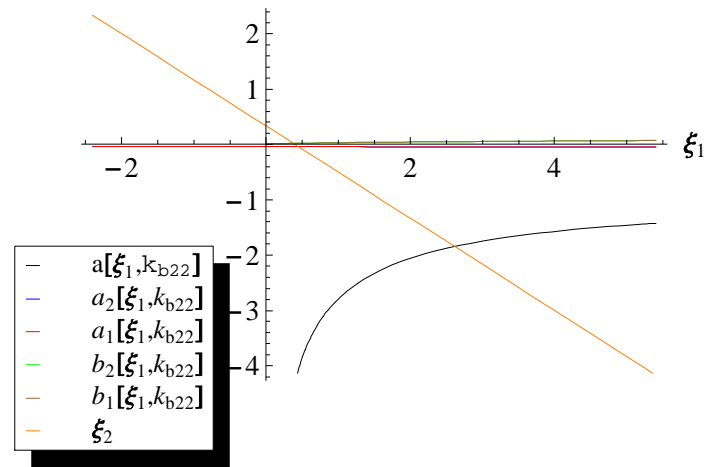


Figura B.172: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , para $k_{b22} = 12.2493$.

Como los segmentos de curva Lb_{k1} , Lb_{k2} están definidos en el dominio de L_k y el

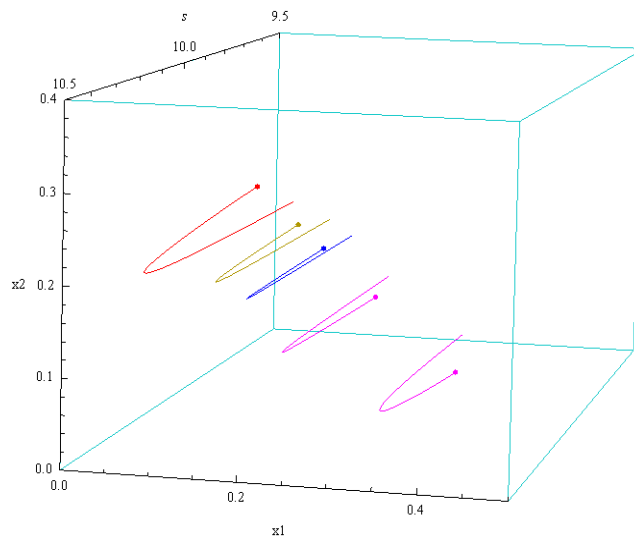


Figura B.173: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b22} = 12.2493$ y campo f_j .

segmento de curva La_k se encuentra debajo del eje ξ_1 en el dominio de L_k , entonces los puntos del segmento de equilibrios L_k son del tipo foco-foco asintóticamente estable en el sistema no suave (2.1) sobre las variedades invariantes estables locales

que los contienen, Teorema 114. En este caso como la variación media del radio de oscilación es alta debido a los valores relativamente altos de las componentes reales de sus valores propios μ_{1j} y μ_{2j} (véase Definición 3.6), el retrato de fase da la falsa impresión de tener el comportamiento de los puntos del segmento de equilibrios L_k del tipo nodo-nodo asintóticamente estable, como se puede observar en el retrato de fase de la Figura B.173. El retrato de fase de la Figura B.173, luce semejante al retrato de fase al de la Figura B.164; sin embargo son geoméricamente no equivalentes. Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales en el octante positivo permanecen en éste, son acotadas y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios L ; por lo tanto el segmento L_k es a un *atractor* del sistema y su cuenca de atractividad es el octante positivo. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el *k-estratega*, el *r-estratega* y la presa.

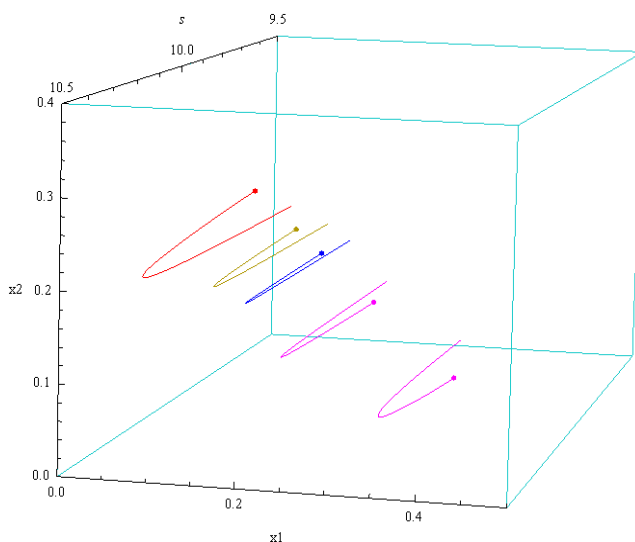


Figura B.174: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b22} = 12.2493$ y campo \tilde{f}_j .

Un comportamiento semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.174, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{b22}$. Como se puede observar en las Figuras B.173 y B.174, los retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los

del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k , como se demuestra en la Proposición 98.

Condición para $k_{a21} = 29.8555$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned}
 L_k &\leftrightarrow \xi_2 = 1.66667(1.03609 - 0.5\xi_1). \\
 La_{k1} &\leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.833333(6.76542 \times 10^{-17} - 0.00206918\xi_1). \\
 La_{k2} &\leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.833333(2.00468 \times 10^{-13} - 0.00206918\xi_1). \\
 Lb_{k1} &\leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.83333\sqrt{2.4(0.005 + 0.00063\xi_1) - (6.7654 \times 10^{-17} - 0.002\xi_1)^2}. \\
 Lb_{k2} &\leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.83333\sqrt{2.4(0.005 + 0.00063\xi_1) - (6.7654 \times 10^{-17} - 0.002\xi_1)^2}. \\
 La_k &\leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{2.00468 \times 10^{-13} - 0.00206918\xi_1}{\sqrt{2.4(0.005 + 0.0006305\xi_1) - (2.00468 \times 10^{-13} - 0.002069\xi_1)^2}} \\
 &\quad + \frac{6.76542 \times 10^{-17} - 0.00206918\xi_1}{\sqrt{2.4(0.00502908 + 0.0006300\xi_1) - (6.76542 \times 10^{-17} - 0.002069\xi_1)^2}}. \\
 0 &\leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.
 \end{aligned}$$

En la Figura B.175 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k . Como los segmentos de curva Lb_{k1} , Lb_{k2} están definidos en el dominio de L_k y el segmento de curva La_k se encuentran debajo del eje ξ_1 , entonces los puntos del segmento de equilibrios L_k son del tipo foco-foco asintóticamente estable en el sistema no suave (2.1) sobre las variedades invariantes estables locales que los contienen, Teorema 114. Como la variación media del radio de oscilación es baja debido a los valores relativamente bajos de las componentes reales de sus valores propios, en el retrato de fase los puntos del segmento de equilibrios L_k parecen ser del tipo foco asintóticamente estable de los sistemas suaves, como se puede observar en el retrato de fase de la Figura B.176. Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales en el octante positivo permanecen en éste, son acotadas y tienden asintóti-

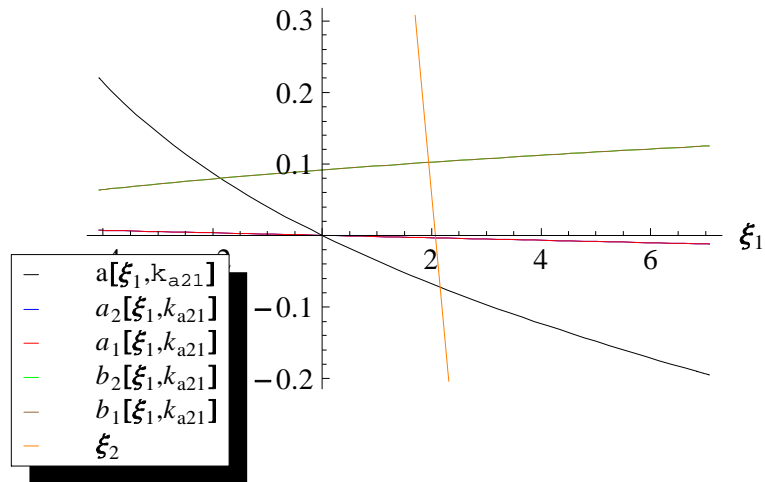


Figura B.175: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , para $k_{a21} = 29.8555$.

camente hacia línea de equilibrios L_k ; por lo tanto el segmento L_k es a un *atractor* del sistema y su cuenca de atractividad es el octante positivo. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el k -estratega, el r -estratega y la presa, véase B.176.

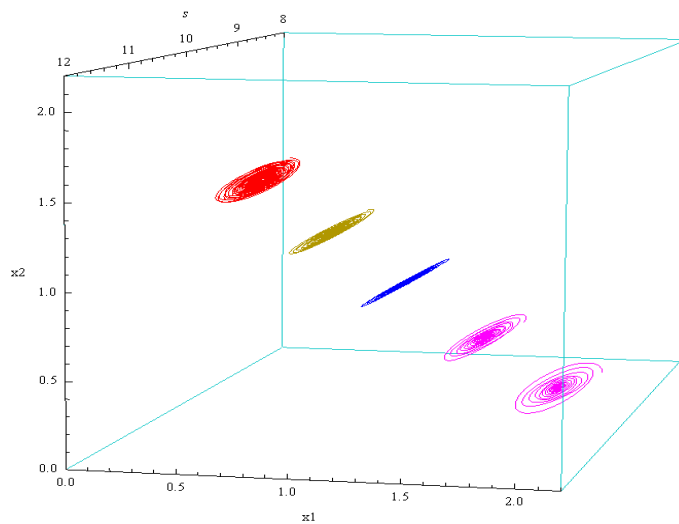


Figura B.176: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a21} = 29.8555$ y campo f_j .

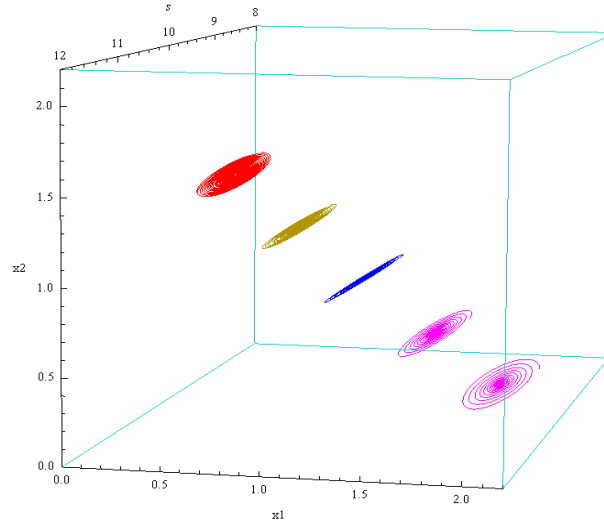


Figura B.177: Retrato de fase con parámetro de bifurcación para $k_{a21} = 29.8555$ y campo \tilde{f}_j .

Un comportamiento semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado al campo aproximado $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.177, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{a21}$. Como se puede observar en las Figuras B.68 y B.177, los retratos fase del sistema (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k , como se muestra en el Corolario 101.

Condición para $k_{a22} = 29.8555$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned}
 L_k &\leftrightarrow \xi_2 = 1.66667(1.03609 - 0.5\xi_1). \\
 La_{k1} &\leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.833333(-4.33681 \times 10^{-17} - 0.002069\xi_1). \\
 La_{k2} &\leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.833333(-2.00468 \times 10^{-13} - 0.002069\xi_1). \\
 Lb_{k1} &\leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.8333\sqrt{2.4(0.005 + 0.0006\xi_1) - (-2.0046 \times 10^{-13} - 0.002\xi_1)^2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_{k_2} &\leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.8333\sqrt{2.4(0.005 + 0.0006\xi_1) - (-4.3368 \times 10^{-17} - 0.002\xi_1)^2}. \\
 La_k &\leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{-2.00468 \times 10^{-13} - 0.00206918\xi_1}{\sqrt{2.4(0.0050 + 0.00063\xi_1) - (-2.00468 \times 10^{-13} - 0.00206\xi_1)^2}} \\
 &\quad + \frac{-4.33681 \times 10^{-17} - 0.00206918\xi_1}{\sqrt{2.4(0.00502908 + 0.0006300\xi_1) - (-4.33681 \times 10^{-17} - 0.002069\xi_1)^2}}. \\
 0 &\leq \xi_1 \leq \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.
 \end{aligned}$$

En la Figura B.178 se presenta la línea de equilibrios L_k , y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k .

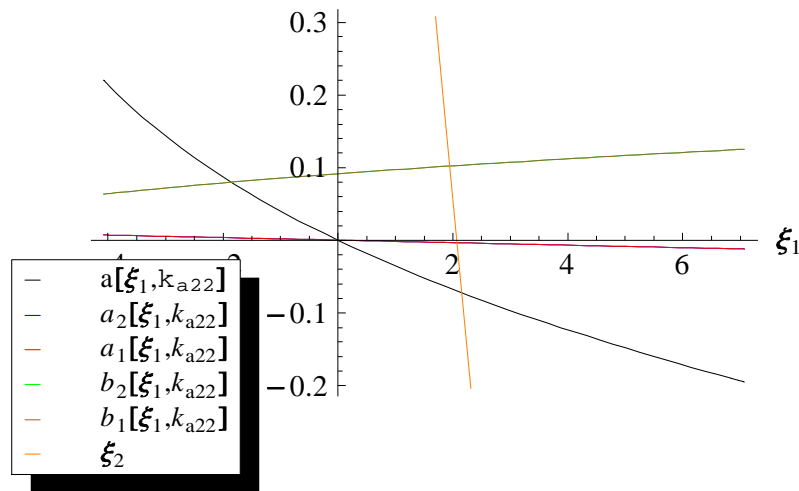


Figura B.178: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , para $k_{a22} = 29.8555$.

También los segmentos de curva Lb_{k_1} , Lb_{k_2} están definidos en el dominio de L_k y el segmento de curva La_k se encuentran debajo del eje ξ_1 , entonces los puntos del segmento de equilibrios L_k son del tipo foco-foco asintóticamente estable en el sistema no suave (2.1) sobre las variedades invariantes estables locales que los contienen, Teorema 114. En este caso como la variación media del radio de oscilación es baja debido a los valores relativamente bajos de las componentes reales de sus valores propios, en el retrato de fase los puntos del segmento de equilibrios L_k parecen ser del

tipo foco asintóticamente estable de los sistemas suaves, como se observa en el retrato de fase de la Figura B.179. Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales en

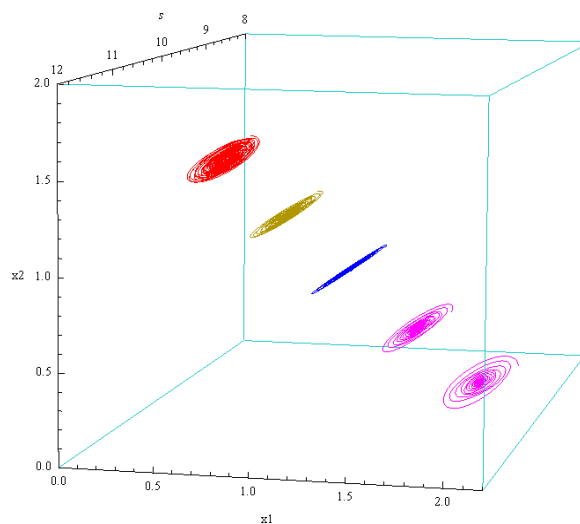


Figura B.179: Retrato de fase con parámetro de bifurcación para $k_{a22} = 29.8555$ y campo f_j .

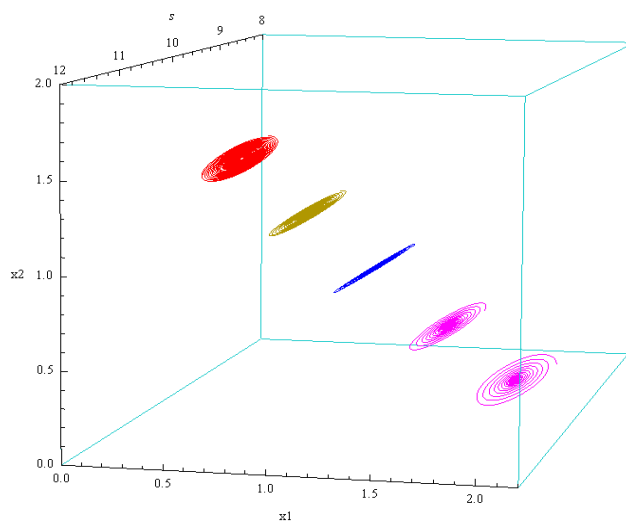


Figura B.180: Retrato de fase con parámetro de bifurcación para $k_{a22} = 29.8555$ y campo f_j .

el octante positivo permanecen en éste, son acotadas y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios L_k ; por lo tanto el segmento L_k es a un *atractor* del sistema y su

cuenca de atractividad es el octante positivo. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el k -estratega, el r -estratega y la presa, véase Figura B.179.

Un comportamiento semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.180, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{a22}$. Como se puede observar en las Figuras B.179 y B.180, los retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k , como se muestra en el Corolario 101.

Condición para $k_{api} = 31$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned}
 L_k &\leftrightarrow \xi_2 = 1.66667(1.06975 - 0.5\xi_1). \\
 La_{k1} &\leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.833333(0.00194912 - 0.00206918\xi_1). \\
 La_{k2} &\leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.833333(0.00194912 - 0.00206918\xi_1). \\
 Lb_{k1} &\leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.83333\sqrt{2.4(0.005 + 0.0006\xi_1) - (0.00194 - 0.00206\xi_1)^2}. \\
 Lb_{k2} &\leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.83333\sqrt{2.4(0.005 + 0.00063\xi_1) - (0.00194 - 0.00206\xi_1)^2}. \\
 La_k &\leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{0.00194912 - 0.00206918\xi_1}{\sqrt{2.4(0.00519245 + 0.0006301\xi_1) - (0.001949 - 0.00206\xi_1)^2}} \\
 &\quad + \frac{0.00194912 - 0.00206918\xi_1}{\sqrt{2.4(0.00519245 + 0.000630095\xi_1) - (0.00194912 - 0.002069\xi_1)^2}}. \\
 0 &\leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.
 \end{aligned}$$

En la Figura B.181 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k . Como los segmentos de curva Lb_{k1} , Lb_{k2} están definidas en el dominio de L_k y el segmento de curva La_k decrece por el Lema 111, e intersecta el eje ξ_1 en el punto $\hat{\xi}_1(k_{api})$ por lo cual el punto $(\lambda, \hat{\xi}_1(k_{api}), \hat{\xi}_2(k_{api}))$, divide L_k en dos partes

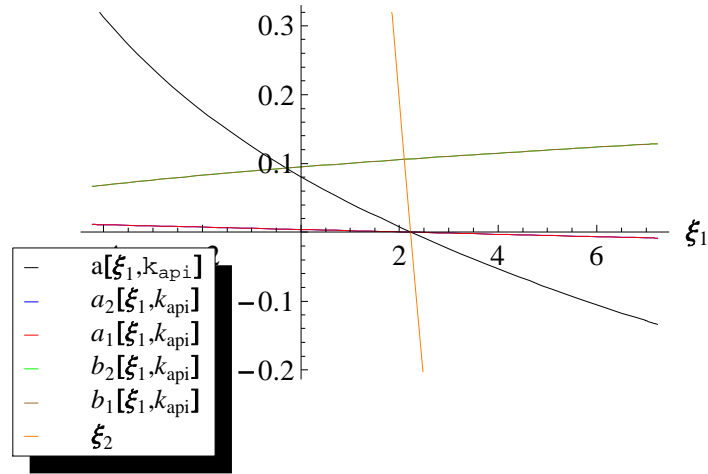


Figura B.181: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , para $k_{api} = 31$.

(una de las cuales puede ser vacía). Los puntos del segmento de equilibrios L_k a la izquierda del punto $(\lambda, \hat{\xi}_1(k_{api}), \hat{\xi}_2(k_{api}))$ son del tipo foco-foco inestable y los puntos del segmento de equilibrios L_k a la derecha de el punto $(\lambda, \hat{\xi}_1(k_{api}), \hat{\xi}_2(k_{api}))$ son del tipo foco-foco asintóticamente estable en el sistema no suave (2.1) sobre las variedades

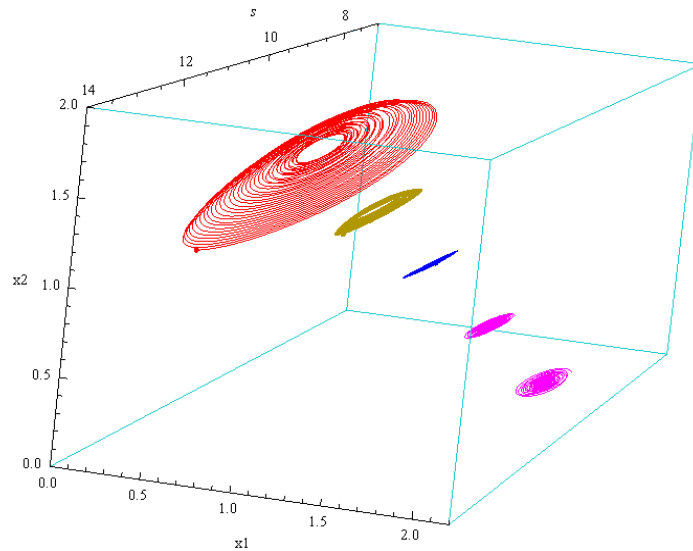


Figura B.182: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{api} = 31$ y campo f_j .

invariantes inestables y estables locales que los contienen respectivamente, Teorema 114, como se puede observar en el retrato de fase correspondiente al parámetro de bifurcación $k = k_{api}$, Figura B.182. Luego las trayectorias del sistema con condiciones iniciales en un entorno tubular suficientemente pequeño de los puntos puntos de L_k a la derecha del punto $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k_{api}), \widehat{\xi}_2(k_{api}))$, en el octante positivo, permanecen en éste, son acotadas y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios L_k . Por lo tanto

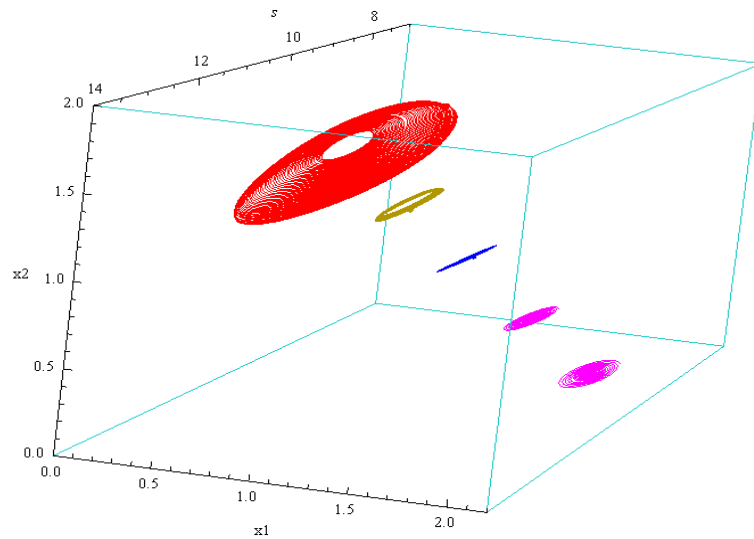


Figura B.183: Retrato de fase con parámetro de bifurcación para $k_{api} = 31$ y campo \widetilde{f}_j .

la parte del segmento L_k a la derecha del punto $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k_{api}), \widehat{\xi}_2(k_{api}))$ es a un *atractor* del sistema. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el k -estratega, el r -estratega y la presa. Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales en un entorno tubular suficientemente pequeño de los puntos puntos de L_k a la izquierda del punto $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k_{api}), \widehat{\xi}_2(k_{api}))$, en el octante positivo se alejan del segmento de equilibrios L_k y se desplazan en dirección hacia abajo por ser el sistema de tipo elíptico $\left(\frac{\partial_s p_2(\lambda, a_2)}{\partial_s p_2(\lambda, a_1)} - \frac{\partial_s p_1(\lambda, a_2)}{\partial_s p_1(\lambda, a_1)} = -1.8972 \times 10^{-11} \right) < 0$, ver Teorema 21 y Observación 135; e intersectan el entorno tubular de los puntos de L_k a la derecha del punto $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k_{api}), \widehat{\xi}_2(k_{api}))$, donde las soluciones con condiciones iniciales en esta vecindad tiende a puntos del segmento L_k cuando t tiende a más infinito; sin embargo la parte del segmento L_k a la izquierda del punto $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k_{api}), \widehat{\xi}_2(k_{api}))$ es

a un *repulsor* del sistema. Los e-equilibrios en este caso no representan coexistencia estable entre el *k-estratega*, el *r-estratega* y la presa, ya que los equilibrios del sistema ahora no son estable desde el punto de vista de Lyapunov. A medida que se aumenta el parámetro k , crece la inestabilidad del segmento L_k , significando la pérdida de terreno del predador dos con respecto al predador uno hasta su extinción a valores mayores del parámetro \bar{k}_{a1} , como se puede observar en el retrato de fase de la Figura B.182.

Un comportamiento semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.183, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{api}$. Como se puede observar en las Figuras B.182 y B.183, los retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k como se muestra en el Corolario 101.

Condición para $k_{a11} = 32.646$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned}
 L_k &\leftrightarrow \xi_2 = 1.66667(1.11583 - 0.5\xi_1). \\
 La_{k1} &\leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.833333(0.00461768 - 0.00206918\xi_1). \\
 La_{k2} &\leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.833333(0.00461768 - 0.00206918\xi_1). \\
 Lb_{k1} &\leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.8333\sqrt{2.4(0.0054 + 0.00063\xi_1) - (0.0046 - 0.0020\xi_1)^2}. \\
 Lb_{k2} &\leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.8333\sqrt{2.4(0.0054 + 0.00063\xi_1) - (0.0046 - 0.0020\xi_1)^2}. \\
 La_k &\leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{0.00461768 - 0.00206918\xi_1}{\sqrt{2.4(0.00541 + 0.00063\xi_1) - (0.00461768 - 0.00206\xi_1)^2}} \\
 &\quad + \frac{0.00461768 - 0.00206918\xi_1}{\sqrt{2.4(0.005416 + 0.000630\xi_1) - (0.004617 - 0.00206\xi_1)^2}}. \\
 0 &\leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.
 \end{aligned}$$

En la Figura B.184 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$,

La_k muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k . Los segmentos de curva Lb_{k1} , Lb_{k2} están definidos en

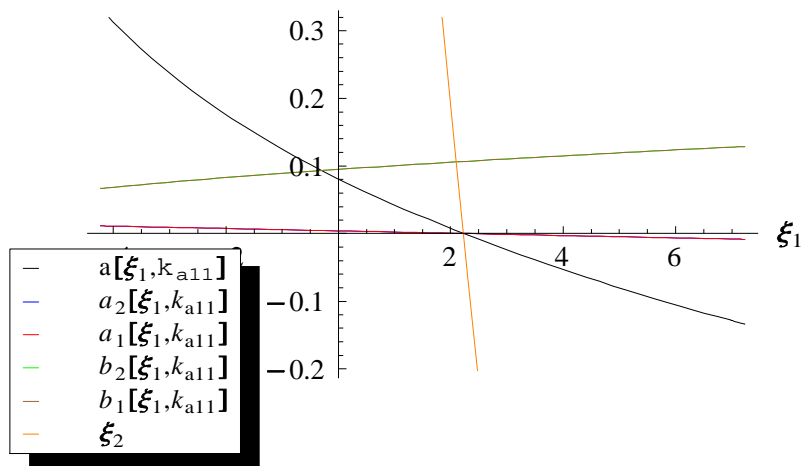


Figura B.184: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , para $k_{a11} = 32.646$.

el dominio L_k y el segmento de curva La_k , se encuentra encima del eje ξ_1 en el dominio L_k . Por lo tanto existe un entorno tubular de L_k en el cual las soluciones con condiciones iniciales en esta vecindad se alejan del segmento L_k cuando t crece, es decir L_k es un repulsor del sistema, Teorema 121. Sin embargo las órbitas descienden a lo largo del segmento de equilibrios por la Observación 134, ya que $\left(\frac{\partial_s p_2(\lambda, a_2)}{\partial_s p_2(\lambda, a_1)} - \frac{\partial_s p_1(\lambda, a_2)}{\partial_s p_1(\lambda, a_1)} = -1.89723 \times 10^{-11}\right) < 0$, y alcanzan el plano coordenado $x_2 = 0$, el cual es una variedad invariante del sistema, donde forman un ciclo límite el cual es orbitalmente asintóticamente estable en desarrollo de la bifurcación de Hopf-Zou & Küpper no suave de acuerdo con el Teorema 121, significando la oscilación de coexistencia entre el *r-estratega* y la presa, como se observa en el retrato de fase de la Figura B.185.

Un comportamiento semejante al anterior se tienen para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.186, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{a11}$. Como se puede observar en las Figuras B.185 y B.186, los

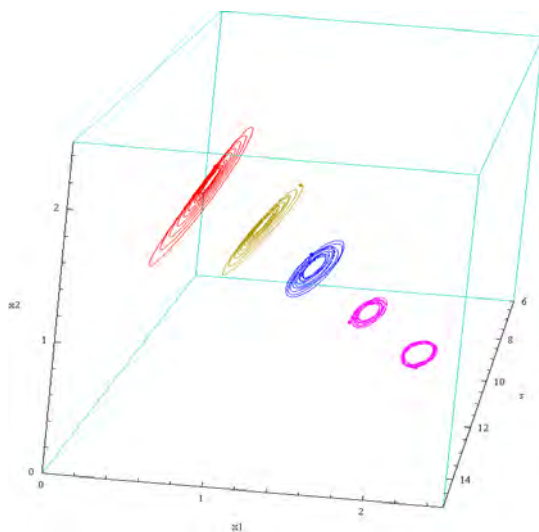


Figura B.185: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a11} = 32.646$ y campo f_j .

retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k , como se muestra en el Corolario 101.

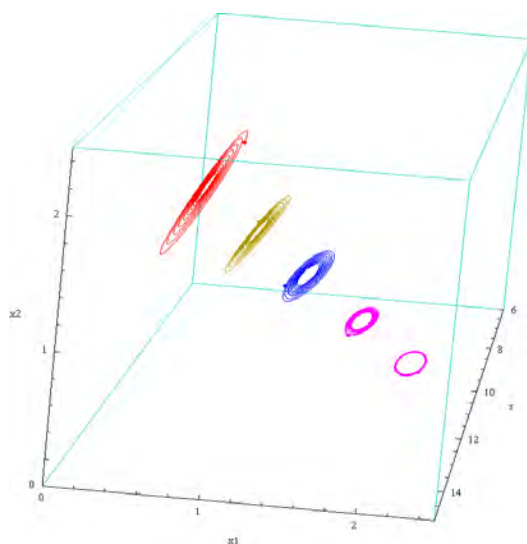


Figura B.186: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a11} = 32.646$ y campo \tilde{f}_j .

Condición para $k_{a12} = 32.646$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$L_k \leftrightarrow \xi_2 = 1.66667(1.11583 - 0.5\xi_1).$$

$$La_{k1} \leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.833333(0.00461768 - 0.00206918\xi_1).$$

$$La_{k2} \leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.833333(0.00461768 - 0.00206918\xi_1).$$

$$Lb_{k1} \leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.83333\sqrt{2.4(0.00541 + 0.00063\xi_1) - (0.00461 - 0.0020\xi_1)^2}.$$

$$Lb_{k2} \leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.83333\sqrt{2.4(0.00541 + 0.0006\xi_1) - (0.00461 - 0.0020\xi_1)^2}.$$

$$La_k \leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{0.00461768 - 0.00206918\xi_1}{\sqrt{2.4(0.005416 + 0.00063\xi_1) - (0.004617 - 0.00206\xi_1)^2}} + \frac{0.00461768 - 0.00206918\xi_1}{\sqrt{2.4(0.00541613 + 0.0006300\xi_1) - (0.004617 - 0.002069\xi_1)^2}}.$$

$$0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.$$

En la Figura B.187 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , y

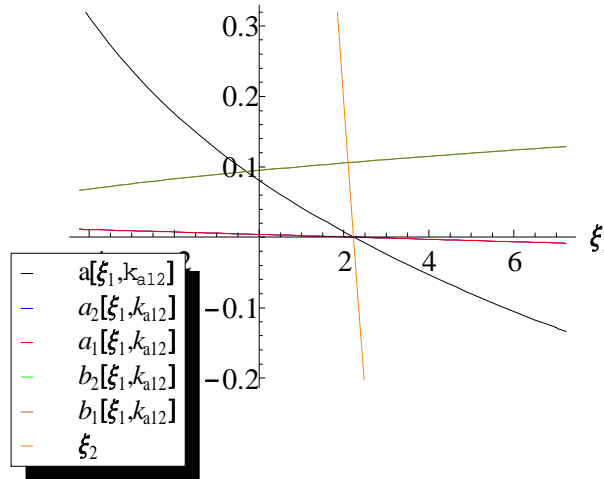


Figura B.187: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , para $k_{a12} = 32.646$.

La_k muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento

de equilibrios L_k . Como en el caso anterior los segmentos de curva Lb_{k1} , Lb_{k2} están definidos en el dominio de L_k y el segmento de curva La_k se encuentran arriba del eje ξ_1 , entonces los puntos del segmento de equilibrios L_k son del tipo foco-foco asintóticamente inestable en el sistema no suave (2.1). Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales cercanas a la línea de equilibrios L_k se alejan de él por lo cual el segmento L_k es un conjunto *repulsor* del sistema (2.1); sin embargo un ciclo límite puede aparecer el cual es orbitalmente asintóticamente estable en desarrollo de la bifurcación de Hopf-Zou & Küpper no-suave de acuerdo con el Teorema 121, significando la oscilación de coexistencia entre el *r-estratega* y la presa. El ciclo límite crece aún más en amplitud debido a la mayor inestabilidad del sistema, como se puede observar en el retrato de fase de la Figura B.188.

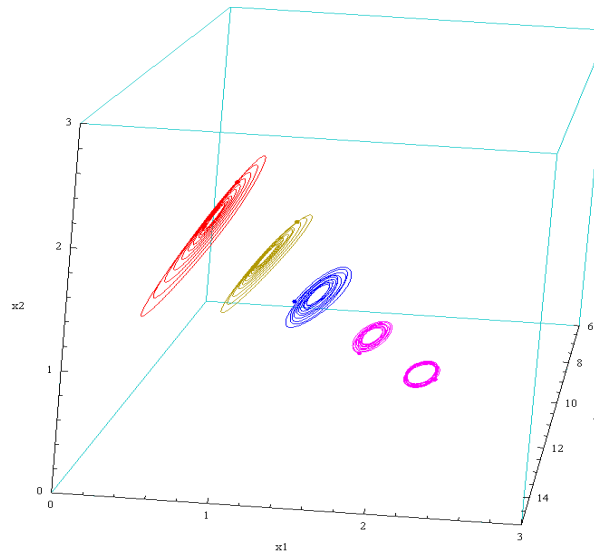


Figura B.188: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a12} = 32.646$ y campo f_j .

Un comportamiento semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.189, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro bifurcación $k = k_{a12}$. Como se puede observar en las Figuras B.188 y B.189, los retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los

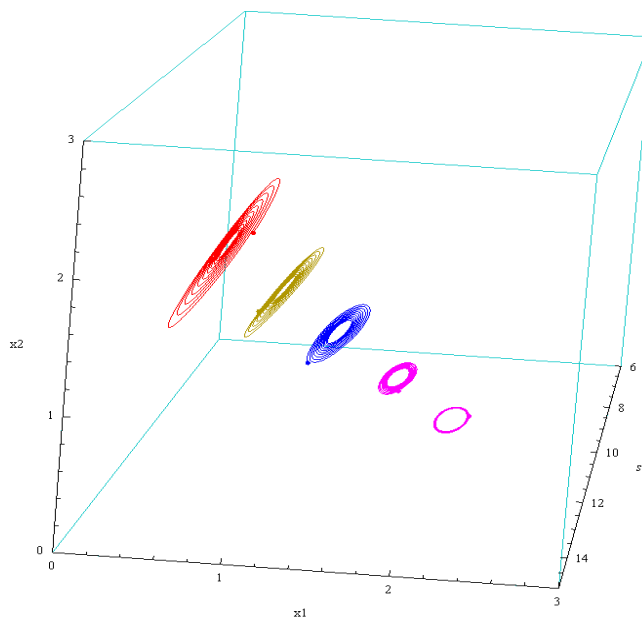


Figura B.189: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a12} = 32.646$ y campo \tilde{f}_j .

del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k , como se muestra en el Corolario 101.

B.9 Modelo sin variedad invariante del tipo 3

Los siguientes son los parámetros del modelo natural-natural sin variedad invariante:

Parámetros de la respuesta funcional $p_1(s, a)$

$$\begin{aligned}
 A_1 &= 1.1; & B_1 &= 1; & D_1 &= 1; & c_1 &= 1; \\
 d_{11} &= 0.5; & d_{21} &= 0.6; & F_1 &= 0; & m_1 &= 0.1; \\
 n_1 &= 0.5; & q_1 &= 10; & r_1 &= 15; & u_1 &= 0; \\
 v_1 &= -2; & \lambda &= 10; & \gamma &= 1; & & ..
 \end{aligned}$$

Parámetros de la respuesta funcional $p_3(s, a)$

$$\begin{aligned} A_2 &= 1; & B_2 &= 1; & D_2 &= 1; & c_2 &= 1; \\ d_{12} &= 0.5; & d_{22} &= 0.6; & F_2 &= 0; & m_2 &= 0.1; \\ n_2 &= 0.1; & q_2 &= 4; & r_2 &= 15; & u_2 &= 1; \\ v_2 &= -2; & \lambda &= 10; & \gamma &= 1; & &.. \end{aligned}$$

La resistencia ambiental g de la presa y la respuesta funcional p de los predadores adoptan la forma:

$$\begin{aligned} p(s, a) &= \begin{cases} \frac{s}{1+a} + \frac{s}{s+a}, & \text{si } s \leq \lambda \\ \frac{10}{1+a} - \frac{10}{10+a} - \frac{30}{2+6a} + \left(\frac{.3 s}{2+6a}\right) + \frac{.2s}{a+s}, & \text{si } s > \lambda, \end{cases} \\ g(s, k) &= 1 - \left(\frac{s}{k}\right)^{0.1}. \end{aligned}$$

La ecuación (B.2) para a_1 es de la forma:

$$\begin{aligned} 0 &= -0.5 + \frac{100}{(100+a_1)a_1^{0.2}} + \frac{3.47851}{1+a_1^{15}} \\ a_1 &= 15.5408. \end{aligned}$$

La ecuación (B.2) para a_2 es de la forma:

$$\begin{aligned} 0 &= -0.6 + \frac{100}{(100+a_2)a_2^{0.2}} + \frac{3.47851}{1+a_2^{15}} \\ a_2 &= 8.5377. \end{aligned}$$

Además se muestran las gráficas y las ecuaciones paramétricas de la curvas L_k , $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k siguientes

$$\begin{aligned} L_k &= \{(s, \xi_1, x_2) : p(\lambda, a_1)\xi_{11} + p(\lambda, a_2)\xi_{12} = \gamma\lambda g(\lambda, k); \\ &\quad \lambda, \xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0\}, \end{aligned} \tag{B.34}$$

$$La_{k,j} = \{(s, \xi_1, a_j(\xi_1, k)) : s = \lambda, 0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}\}, \tag{B.35}$$

$$Lb_{k,j} = \{(s, \xi_1, b_j(\xi_1, k)) : s = \lambda, 0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}\}, \tag{B.36}$$

$$\begin{aligned} La_k &= \{(s, \xi_1, a(\xi_1, k)) : a(\xi_1, k) = \frac{a_1(\xi_1, k)}{b_1(\xi_1, k)} + \frac{a_2(\xi_1, k)}{b_2(\xi_1, k)} - \frac{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{p_j(\lambda, a_1)^2}{p_j(\lambda, a_2)^2}}}\right)}{\pi}; \\ &\quad s = \lambda, 0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}\}, \end{aligned} \tag{B.37}$$

$$\begin{aligned} La_k &= \{(s, \xi_1, a(\xi_1, k)) : a(\xi_1, k) = \frac{a_1(\xi_1, k)}{b_1(\xi_1, k)} + \frac{a_2(\xi_1, k)}{b_2(\xi_1, k)} - \frac{\ln\left(\sqrt{1 + \frac{p_j(\lambda, a_1)^2}{p_j(\lambda, a_2)^2}}\right)}{\pi}; \\ &\quad s = \lambda, 0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}\}, \end{aligned} \tag{B.38}$$

así como los retratos de fase del sistema para los distintos valores del parámetro de bifurcación k_{bij} y k_{aij} $i, j = 1, 2$, seleccionados con el propósito de mostrar los cambios cualitativos que ocurren en el sistema. Los parámetros de bifurcación k_{bij} y k_{aij} $i, j = 1, 2$, están dadas por las ecuaciones

$$K_{bij}(k_{bij}) = \gamma \lambda g(\lambda, k) \partial_s p_j(\lambda, a_i) - \frac{1}{4} \gamma^2 \left(\lambda \partial_s(\lambda, k) + g(\lambda, k) \left(1 - \frac{\lambda \partial_s p_j(\lambda, a_i)}{p_j(\lambda, a_i)} \right) \right)^2 = 0,$$

$$K_{aij}(k_{aij}) = -\lambda p_j(\lambda, a_i) \partial_s g(\lambda, k) + g(\lambda, k) (\lambda \partial_s p_j(\lambda, a_i) - p_j(\lambda, a_i)) = 0,$$

por las Definiciones 37, 41 y la proposición 39. Los valores obtenidos para los puntos de bifurcación k_{bij} y k_{aij} en cada uno de los subsistemas son los siguientes:

subsistema 1

$$K_{b11}(k) = 0.0672524 \left(1 - \frac{1.25893}{k^{0.1}} \right) - \frac{1}{4} \left(0.865495 \left(1 - \frac{1.25893}{k^{0.1}} \right) - \frac{0.125893}{k^{0.1}} \right)^2 = 0.$$

$$k_{b11} = 12.5782.$$

$$K_{b21}(k) = 0.0471967 \left(1 - \frac{1.25893}{k^{0.1}} \right) - \frac{1}{4} \left(0.921339 \left(1 - \frac{1.25893}{k^{0.1}} \right) - \frac{0.125893}{k^{0.1}} \right)^2 = 0.$$

$$k_{b21} = 13.208.$$

$$K_{a21}(k) = -0.552803 \left(1 - \frac{1.25893}{k^{0.1}} \right) + \frac{.0755355}{k^{0.1}} = 0.$$

$$k_{a21} = 28.0224.$$

$$K_{a11}(k) = -0.432748 \left(1 - \frac{1.25893}{k^{0.1}} \right) + \frac{0.0629463}{k^{0.1}} = 0.$$

$$k_{a11} = 29.8438.$$

subsistema 2

$$K_{b12}(k) = 0.116416 \left(1 - \frac{1.25893}{k^{0.1}} \right) - \frac{1}{4} \left(0.767167 \left(1 - \frac{1.25893}{k^{0.1}} \right) - \frac{0.125893}{k^{0.1}} \right)^2 = 0.$$

$$k_{b12} = 11.7439.$$

$$K_{b22}(k) = 0.0944005 \left(1 - \frac{1.25893}{k^{0.1}} \right) - \frac{1}{4} \left(0.842666 \left(1 - \frac{1.25893}{k^{0.1}} \right) - \frac{0.125893}{k^{0.1}} \right)^2 = 0.$$

$$k_{b22} = 12.0141.$$

$$K_{a22}(k) = -0.5056 \left(1 - \frac{1.25893}{k^{0.1}} \right) + \frac{.0755355}{k^{0.1}} = 0.$$

$$k_{a22} = 30.6919.$$

$$K_{a12}(k) = -0.383584 \left(1 - \frac{1.25893}{k^{0.1}} \right) + \frac{0.0629463}{k^{0.1}} = 0.$$

$$k_{a12} = 34.0509.$$

Condición para $k_{b12} = 11.7439$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$L_k \leftrightarrow \xi_2 = 1.66667(0.159462 - 0.5\xi_1).$$

$$La_{k1} \leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.833333(-0.0502281 - 0.001675318\xi_1).$$

$$La_{k2} \leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.833333(-0.0509808 - 0.00226496\xi_1).$$

$$Lb_{k1} \leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.8333\sqrt{2.4(0.00045 + 0.000601\xi_1) - (-0.0502 - 0.0016\xi_1)^2}.$$

$$Lb_{k2} \leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.8333\sqrt{2.4(0.00090 + 0.0006\xi_1) - (-0.0509 - 0.00226\xi_1)^2}.$$

$$La_k \leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{-0.0509808 - 0.00226496\xi_1}{\sqrt{2.4(0.000903 + 0.0006\xi_1) - ((1.(-0.05098 - 0.00226\xi_1))^2 - 0.0502281 - 0.00167531\xi_1)}} + \frac{-0.0502281 - 0.00167531\xi_1}{\sqrt{2.4(0.000451565 + 0.0006016\xi_1) - (-0.0502281 - 0.001675\xi_1)^2}}.$$

$$0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.$$

En la Figura B.190 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k

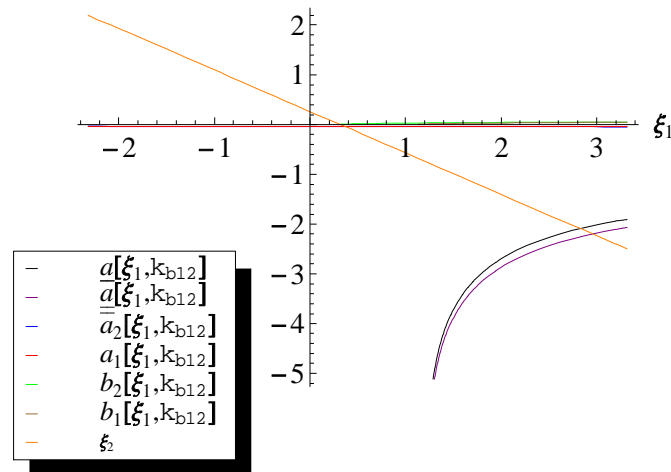


Figura B.190: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , para $k_{b12} = 11.7439$

que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento

de equilibrios L_k . Como los segmentos Lb_{k1} , Lb_{k2} no están definidos debajo del segmento de equilibrios L_k y los segmentos La_{k1} , La_{k2} se encuentran debajo del eje ξ_1 , entonces los puntos del segmento de equilibrios L_k se comportan como nodos estables en cada subsistema del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, Corolario 80. Por consiguiente existe una vecindad del segmento de equilibrios para el cual las soluciones con condiciones iniciales en esta vecindad tienden a puntos del segmento L_k cuando t tiende a infinito, Teorema 141. Además el retrato de fase se asemeja al del sistema no suave (2.1) cuando los equilibrios son del tipo *nodo-nodo* asintóticamente estable; sin embargo en este caso no existen variedades invariantes que contengan puntos de equilibrios del interior del segmento L_k , como se puede observar en el retrato de fase de la Figura B.191. Las trayectorias del sistema con

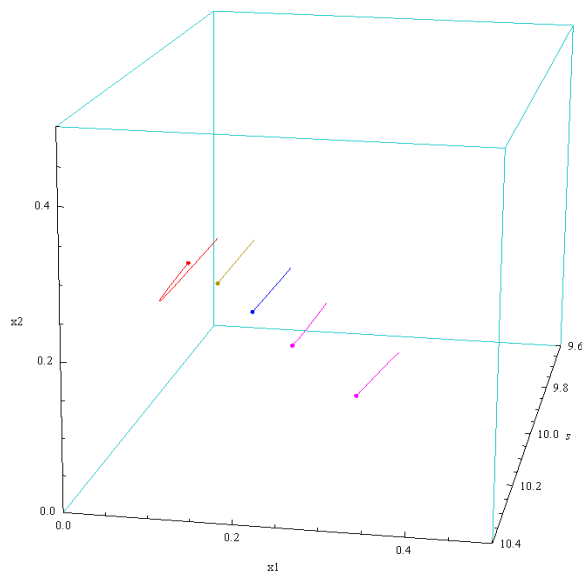


Figura B.191: Retrato de fase con parámetro de bifurcación para $k_{b12} = 11.7439$ y campo f_j .

condiciones iniciales en el octante positivo permanecen en éste, son acotadas y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios L_k ; por lo tanto el segmento L_k es un *atractor* del sistema y su cuenca de atractividad es el octante positivo. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el *k-estratega*, el *r-estratega* y la presa.

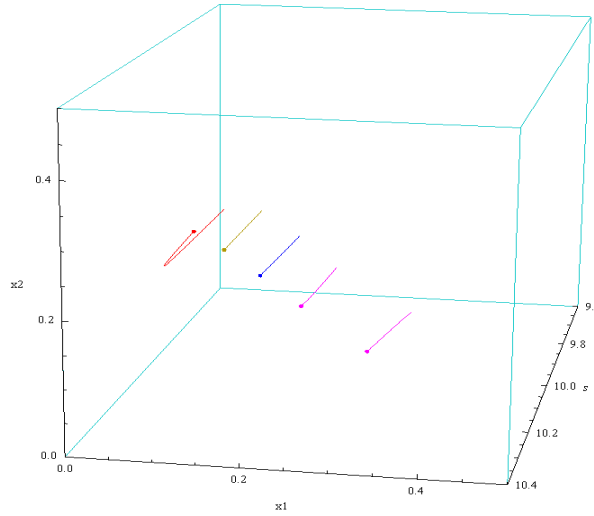


Figura B.192: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b12} = 11.7439$ y campo \tilde{f}_j .

Un comportamiento semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.192, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{b12}$. Como se puede observar en las Figuras B.191 y B.192, los retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ no se puede afirmar que son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k ; sin embargo el Corolario 101 no aplica en este caso, ya que no existen variedades invariantes estable para el sistema no suave (2.1) que contengan puntos de equilibrios del interior de L_k .

Condición para $k_{b22} = 12.0141$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned}
 L_k &\leftrightarrow \xi_2 = 1.66667(0.181826 - 0.5\xi_1). \\
 La_{k1} &\leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.833333(-0.0488577 - 0.00167531\xi_1). \\
 La_{k2} &\leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.833333((1.(-0.049716 - 0.00226496\xi_1)).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Lb_{k1} &\leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.8333\sqrt{2.4(0.0005 + 0.00060\xi_1) - (-0.04885 - 0.0016\xi_1)^2}. \\
 Lb_{k2} &\leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.8333\sqrt{2.4(0.00102 + 0.0006\xi_1) - (-0.04971 - 0.00226\xi_1)^2}. \\
 La_k &\leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{-0.049716 - 0.00226496\xi_1}{\sqrt{2.4(0.00102 + 0.00066\xi_1) - ((1.(-0.0497 - 0.00226\xi_1))^2} \\
 &\quad + \frac{(-0.0488577 - 0.00167531\xi_1)}{\sqrt{2.4(0.000514894 + 0.000601672\xi_1) - ((-0.0488 - 0.001675\xi_1)^2}}. \\
 0 &\leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.
 \end{aligned}$$

En la Figura B.193 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k . Como el segmento de curva Lb_{k1} no está definido en el dominio L_k y

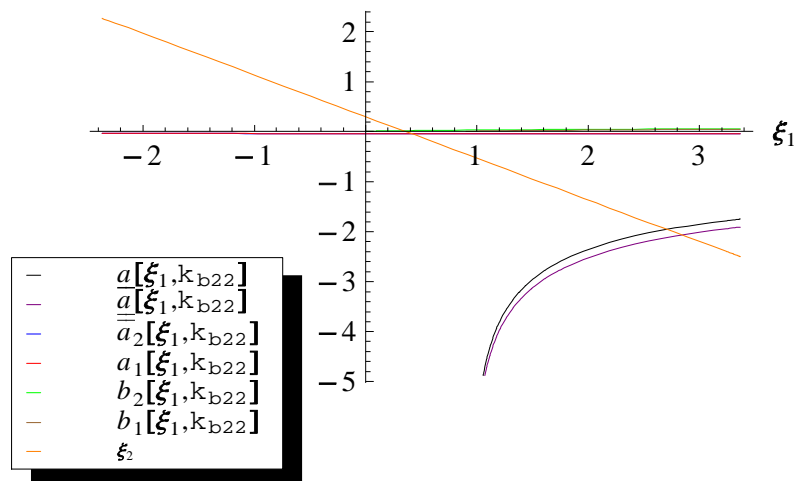


Figura B.193: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , para $k_{b22} = 12.0141$.

el segmento de curva La_{k1} se encuentran debajo del eje ξ_1 en el dominio L_k , entonces en el subsistema del sistema no suave (2.1) asociado al campo $f_1(s, x_1, x_2)$ los puntos del segmento de equilibrios L_k se comportan como nodos estables. El segmento de curva Lb_{k2} está arriba y La_{k2} debajo del eje ξ_1 en el dominio L_k , luego en el subsistema del sistema no suave (2.1) asociado al campo $f_2(s, x_1, x_2)$ los puntos de L_k se comportan como focos estables, Corolario 80. Por consiguiente existe una vecindad

del segmento de equilibrios para el cual las soluciones con condiciones iniciales en esta vecindad tienden a puntos del segmento L_k cuando t tiende a infinito, Teorema 141, como se observa en el retrato de fase de la Figura B.194. Además el retrato de fase se asemeja al del sistema no suave (2.1) cuando existen variedades invariantes y los puntos del segmento de equilibrios L_k son del tipo nodo-foco estable, sin embargo en este caso no existen variedades invariantes estables locales que contengan puntos de equilibrios del interior del segmento L_k . Las trayectorias del sistema con condiciones

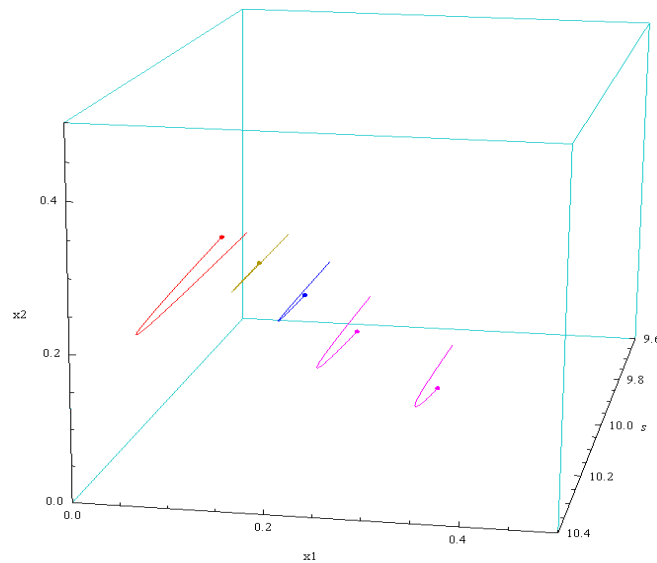


Figura B.194: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b22} = 12.0141$ y campo f_j .

iniciales en el octante positivo permanecen en éste, son acotadas y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios L_k ; por lo tanto el segmento L_k es a un *atractor* del sistema y su cuenca de atractividad es el octante positivo. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el k -estratega, el r -estratega y la presa.

Un comportamiento semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.195, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro bifurcación $k = k_{b22}$. Como se puede observar en las Figuras B.194 y B.195, los retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los

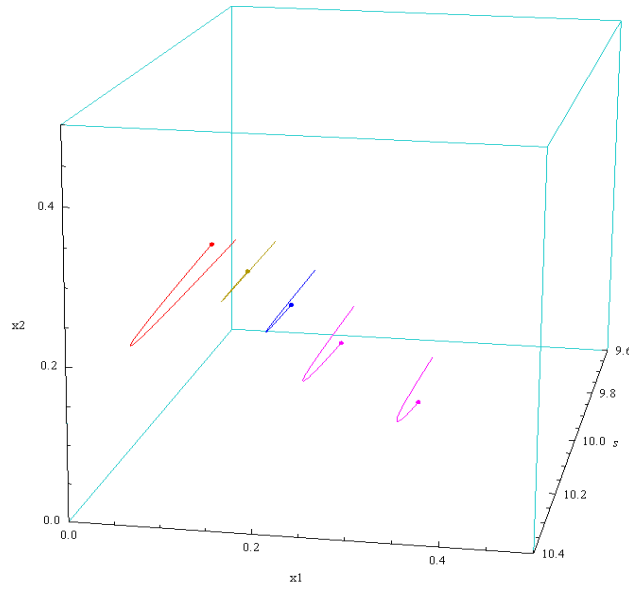


Figura B.195: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b22} = 12.0141$ y campo \tilde{f}_j .

del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ no se puede afirmar que son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k , porque el Corolario 101 no aplica en este caso, ya que no existen variedades invariantes estables para el sistema no suave (2.1) que contengan los puntos del interior del segmento de equilibrios L_k .

Condición para $k_{b11} = 12.5782$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$L_k \leftrightarrow \xi_2 = 1.66667(0.226773 - 0.5\xi_1).$$

$$La_{k1} \leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.833333(-0.0461033 - 0.00167531\xi_1).$$

$$La_{k2} \leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.833333(1.(-0.0471737 - 0.00226496\xi_1)).$$

$$Lb_{k1} \leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.83333\sqrt{2.4(0.0006 + 0.00060\xi_1) - (-0.0461 - 0.00167\xi_1)^2}.$$

$$Lb_{k2} \leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.83333\sqrt{2.4(0.00128 + 0.0006\xi_1) - (-0.0471 - 0.00226\xi_1)^2}.$$

$$La_k \leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{-0.0471737 - 0.002264\xi_1}{\sqrt{2.4.(0.00128 + 0.000660\xi_1) - ((1.(-0.0471737 - 0.00226\xi_1))^2 - 0.0461033 - 0.00167531\xi_1)}} + \frac{-0.0461033 - 0.00167531\xi_1}{\sqrt{2.4.(0.000642176 + 0.000601672\xi_1) - (-0.0461033 - 0.00167531\xi_1)^2}}$$

$$0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.$$

en la Figura B.196 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k . Como el segmento de curva Lb_{k1} no está definido en el dominio de

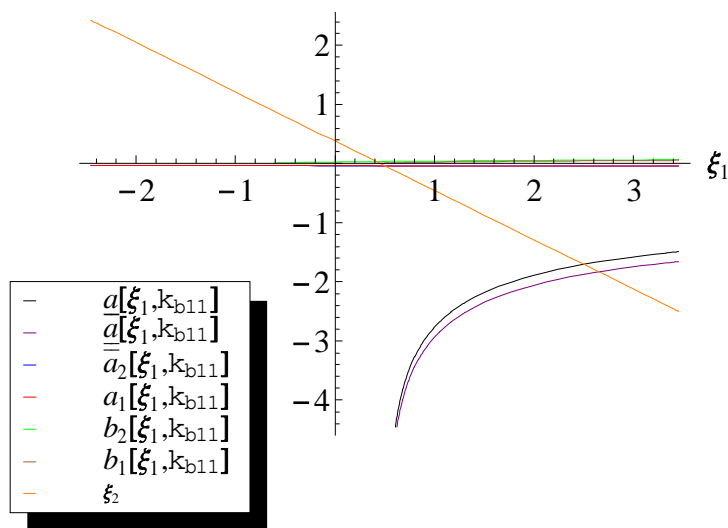


Figura B.196: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , para $k_{b11} = 12.5782$.

L_k y el segmento de curva La_{k1} se encuentran debajo del eje ξ_1 en el dominio de L_k , entonces en el subsistema del sistema no suave (2.1) asociado al campo $f_1(s, x_1, x_2)$ los puntos del segmento de equilibrios L_k se comportan como nodos estables. También el segmento de curva Lb_{k2} está definido en el dominio de L_k y La_{k2} está definido debajo del eje ξ_1 en el dominio de L_k , por lo tanto en el subsistema del sistema (2.1) asociado al campo $f_2(s, x_1, x_2)$ los puntos de L_k se comportan como focos estables, Corolario 80. Por consiguiente existe una vecindad del segmento de equilibrios para el cual las soluciones con condiciones iniciales en esta vecindad tienden a puntos del segmento

L_k cuando t tiende a infinito, Teorema 141, como se observa en el retrato de fase de la Figura B.197. Además el retrato de fase se asemeja al del sistema no suave (2.1) cuando existen variedades invariantes y los puntos del segmento de equilibrios L_k son del tipo nodo-foco estable; sin embargo en este caso no existen variedades invariantes estables locales que contengan puntos de equilibrios del interior del segmento L_k . Las

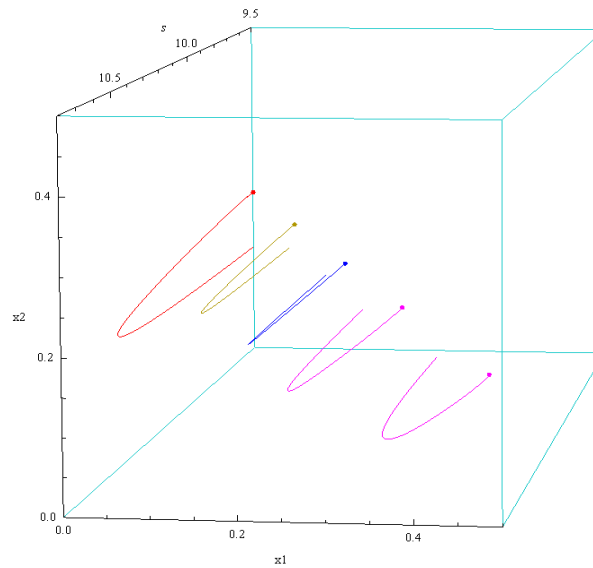


Figura B.197: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b11} = 12.5782$ y campo f_j .

trayectorias del sistema con condiciones iniciales en el octante positivo permanecen en éste, son acotadas y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios L_k ; por lo tanto el segmento L_k es a un *atractor* del sistema y su cuenca de atractividad es el octante positivo. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el *k-estratega*, el *r-estratega* y la presa.

Un comportamiento semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.198, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro bifurcación $k = k_{b11}$. Como se puede observar en las Figuras B.197 y B.198, los retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ no se puede afirmar que

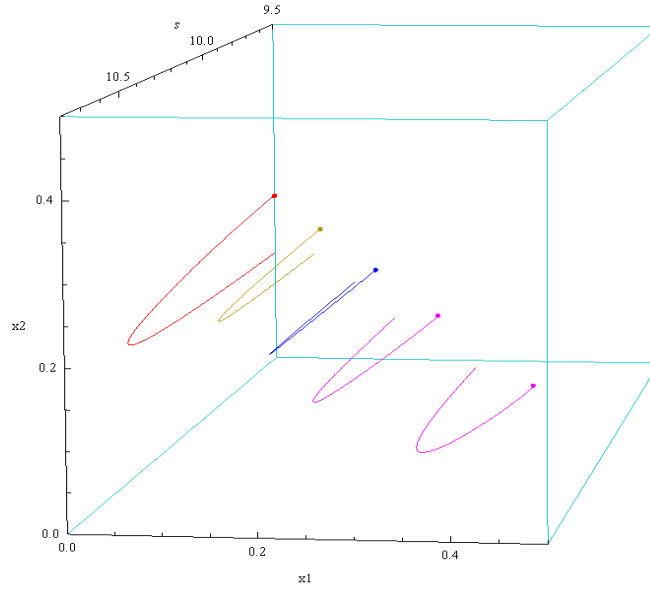


Figura B.198: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b11} = 12.5782$ y campo \tilde{f}_j .

son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k , porque el Corolario 101 no aplica en este caso, ya que no existen variedades invariantes estables para el sistema no suave (2.1) que contengan los puntos del interior del segmento de equilibrios L_k .

Condición para $k_{b21} = 13.208$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned}
 L_k &\leftrightarrow \xi_2 = 1.66667(0.2744 - 0.5\xi_1). \\
 La_{k1} &\leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.833333(-0.0431846 - 0.00167531\xi_1). \\
 La_{k2} &\leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.833333((1.(-0.0444799 - 0.00226\xi_1). \\
 Lb_{k1} &\leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.8333\sqrt{2.4(0.0007 + 0.0006\xi_1) - (-0.04318 - 0.0016\xi_1)^2}. \\
 Lb_{k2} &\leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.8333\sqrt{2.4(0.00155 + 0.00066\xi_1) - (-0.0444 - 0.002\xi_1)^2}.
 \end{aligned}$$

$$La_k \leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{-0.0444799 - 0.00226496\xi_1}{\sqrt{2.4.(0.00155 + 0.0006\xi_1) - ((1.(-0.04447 - 0.00226\xi_1))^2}} + \frac{(-0.0431846 - 0.00167531\xi_1)}{\sqrt{2.4.(0.000777047 + 0.0006016\xi_1) - ((-0.0431846 - 0.001675\xi_1))^2}}.$$

$$0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.$$

En la Figura B.199 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k . Como los segmentos de curva Lb_{k1} , Lb_{k2} están definidas en el

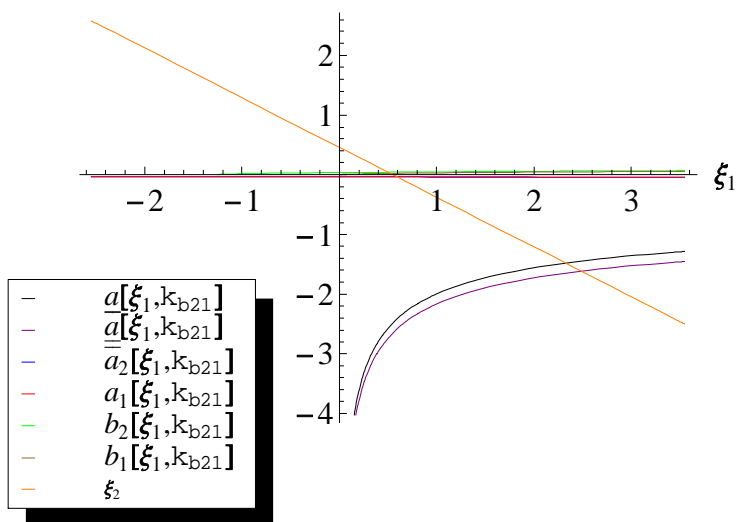


Figura B.199: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k para $k_{b21} = 13.208$.

dominio de L_k y el segmento de curva La_k se encuentran debajo del eje ξ_1 en el dominio de L_k , entonces en los subsistemas del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_1(s, x_1, x_2)$ y $f_2(s, x_1, x_2)$, los puntos del segmento de equilibrios L_k se comportan como focos estables, Corolario 80. Por consiguiente existe una vecindad del segmento de equilibrios para el cual las soluciones con condiciones iniciales en esta vecindad tienden a puntos del segmento L_k cuando t tiende a infinito, Teorema 141. Además el retrato de fase se asemeja al del sistema no suave (2.1) cuando existen variedades invariantes y los puntos del segmento del equilibrios L_k son del tipo foco-foco

asintóticamente estable; sin embargo en este caso no existen variedades invariantes estables locales que contengan puntos de equilibrios del interior del segmento L_k (con la topología inducida de L_k). Como la variación media del radio de oscilación es alta debido a los valores relativamente altos de las componentes reales de sus valores propios μ_{1j} y μ_{2j} (véase Definición 3.6); el retrato de fase da la falsa impresión de tener el comportamiento de los puntos del segmento de equilibrios L_k del tipo nodo-nodo asintóticamente estable, como se observa en el retrato de fase de la Figura B.200. Las

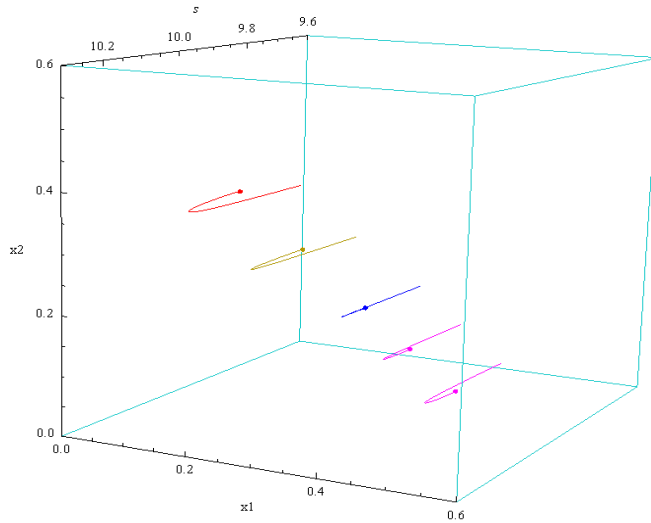


Figura B.200: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b21} = 13.208$ y campo f_j .

trayectorias del sistema con condiciones iniciales en el octante positivo permanecen en éste, son acotadas y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios L_k ; por lo tanto el segmento L_k es a un *atractor* del sistema y su cuenca de atractividad es el octante positivo. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el *k-estratega*, el *r-estratega* y la presa.

Un comportamiento semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.201, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{b21}$. Como se puede observar en las Figuras B.200 y B.201, los retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los

del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ no se puede afirmar que son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k , porque el Corolario 101 no aplica en este caso, ya que no existen variedades invariantes estables para el sistema no suave (2.1) que contengan los puntos del interior del segmento de equilibrios L_k .

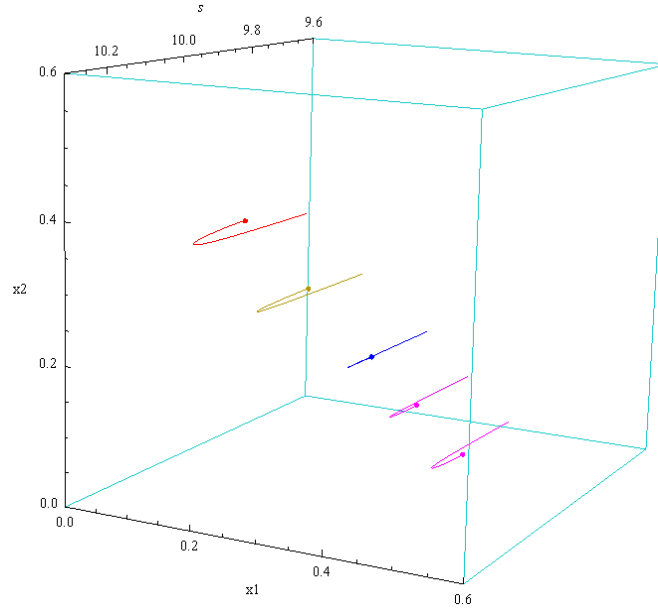


Figura B.201: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{b21} = 13.208$ y campo \tilde{f}_j .

Condición para $k_{a21} = 28.0224$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned}
 L_k &\leftrightarrow \xi_2 = 1.66667(0.979107 - 0.5\xi_1). \\
 La_{k1} &\leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.833333(5.11743 \times 10^{-17} - 0.00167531\xi_1). \\
 La_{k2} &\leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.833333(-0.00462176 - 0.00226496\xi_1). \\
 Lb_{k1} &\leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.8333\sqrt{2.4(0.0027 + 0.0006\xi_1) - (5.1174 \times 10^{-17} - 0.0016\xi_1)^2}. \\
 Lb_{k2} &\leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.8333\sqrt{2.4(0.00554 + 0.0006\xi_1) - (-0.00462 - 0.00226\xi_1)^2}.
 \end{aligned}$$

$$La_k \leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{-0.00462176 - 0.00226496\xi_1}{\sqrt{2.4.(0.00554 + 0.0006\xi_1) - ((1.(-0.004621 - 0.0022\xi_1))^2 + (5.11743 \times 10^{-17} - 0.00167531\xi_1))}} + \frac{(5.11743 \times 10^{-17} - 0.00167531\xi_1)}{\sqrt{2.4.(0.00277264 + 0.000601\xi_1) - ((5.11743 \times 10^{-17} - 0.00167\xi_1))^2}}$$

$$0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.$$

En la Figura B.202 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k . Como los segmentos de curva Lb_{k1} , Lb_{k2} están definidos en el

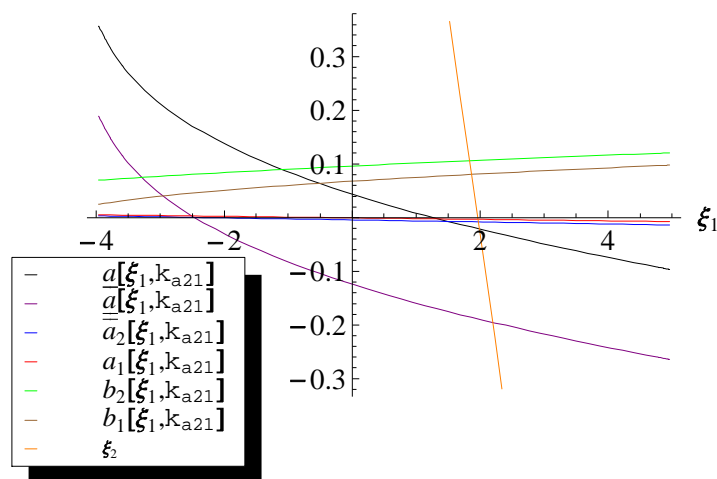


Figura B.202: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , para $k_{a21} = 28.0224$.

dominio de L_k y los segmentos de curva $L\underline{a}_k$, $L\underline{a}_k$, decrecen por el Lema 132, por lo tanto la intersección de las curva $L\underline{a}_k$ y $L\underline{a}_k$ con el eje ξ_1 , puntos $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a21}), \tilde{\xi}_2(k_{a21}))$ y $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a21}), \tilde{\xi}_2(k_{a21}))$ respectivamente, dividen L_k en tres partes (*dos de las cuales pueden ser vacías*). Luego existe un entorno tubular de los puntos del segmento de equilibrios $\hat{L}_k \subset L_k$ a la derecha del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a21}), \tilde{\xi}_2(k_{a21}))$, en el cual las soluciones con condición iniciales en esta vecindad se acercan al segmento L_k cuando t crece, es decir la parte de L_k a la derecha del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a21}), \tilde{\xi}_2(k_{a21}))$ es un atractor del sistema, Teorema 141. El entorno tubular de los puntos del segmento de equilibrios $\hat{L}_k \subset L_k$ a la izquierda del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a21}), \tilde{\xi}_2(k_{a21}))$ del segmento

de equilibrios L_k es vacío en este caso, ya que $\tilde{\xi}_1(k_{a21}) < 0$; sin embargo las órbitas en la zona de transición formada por el entorno tubular de los puntos del segmento de equilibrios $\widehat{L}_k \subset L_k$ entre los puntos $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a21}), \tilde{\xi}_2(k_{a21}))$ y $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a21}), \tilde{\xi}_2(k_{a21}))$ ascienden a lo largo del segmento de equilibrios por la Observación 134 y la parte vi) de la Proposición 137, ya que $\left(\frac{\partial_s p_2(\lambda, a_2)}{\partial_s p_2(\lambda, a_1)} - \frac{\partial_s p_1(\lambda, a_2)}{\partial_s p_1(\lambda, a_1)} = 0.109102\right) > 0$, y pueden tender al segmento L_k o alcanzar el plano coordenado $x_1 = 0$, el cual es una variedad invariante del sistema no suave (2.1), luego allí converge asintóticamente al punto equilibrios de la variedad, ya que curva La_k se encuentra debajo del segmento L_k en desarrollo de la bifurcación de Hopf-Zou & Küpper no-suave de acuerdo con el Teorema 121, significando la coexistencia estable entre el k -estratega y la presa, como se observa en el retrato de fase de la Figura B.203. Las trayectorias del sistema

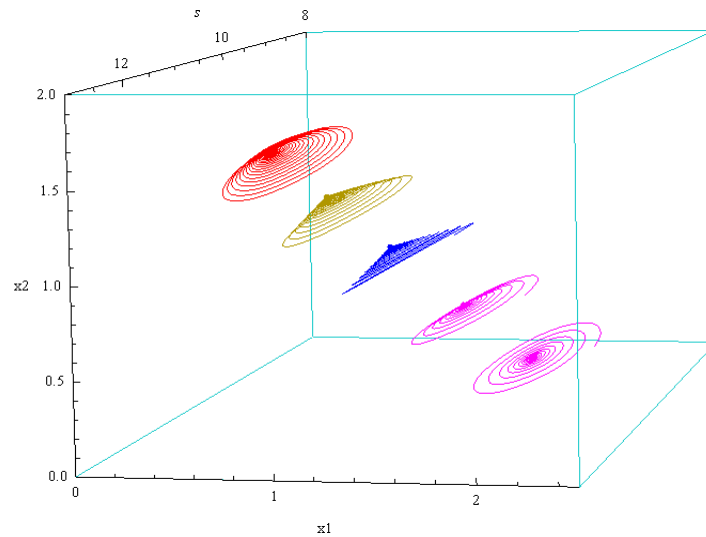


Figura B.203: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a21} = 28.0224$ y campo f_j .

con condiciones iniciales en el octante positivo permanecen en éste, son acotadas y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios L_k ; por lo tanto el segmento L_k es a un *atractor* del sistema y su cuenca de atractividad es el octante positivo. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el k -estratega, el r -estratega y la presa.

Un comportamiento semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.204, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{a21}$. Como se puede observar en las Figuras B.203 y B.204, los retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ no se puede afirmar que son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k , porque el Corolario 101 no aplica en este caso, ya que no existen variedades invariantes estables para el sistema no suave (2.1) que contengan los puntos del interior del segmento de equilibrios L_k .

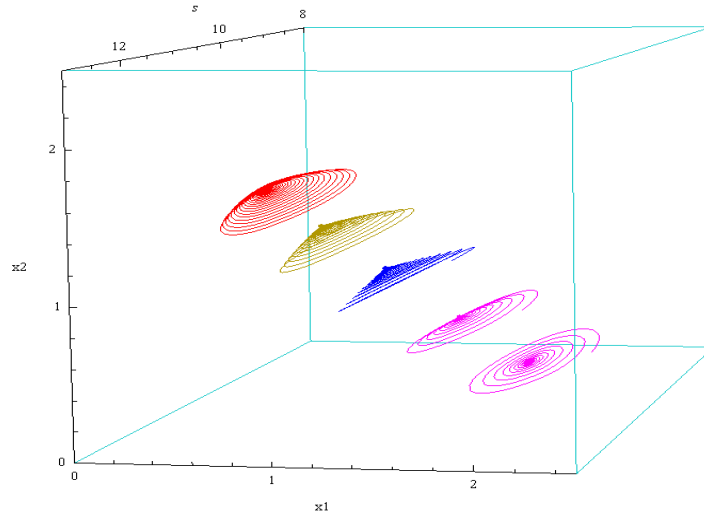


Figura B.204: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a21} = 28.0224$ y campo \tilde{f}_j .

Condición para $k_{a11} = 29.8438$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$L_k \leftrightarrow \xi_2 = 1.66667(1.03574 - 0.5\xi_1).$$

$$La_{k1} \leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.833333(0.00347037 - 0.00167531\xi_1).$$

$$La_{k2} \leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.833333(-0.00141871 - 0.00226496\xi_1).$$

$$\begin{aligned}
 Lb_{k_1} &\leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.8333\sqrt{2.4(0.0029 + 0.00060\xi_1) - (0.0034 - 0.001\xi_1)^2}. \\
 Lb_{k_2} &\leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.8333\sqrt{2.4(0.0058 + 0.0006\xi_1) - (-0.0014 - 0.0022\xi_1)^2}. \\
 La_k &\leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{-0.00141871 - 0.00226496\xi_1}{\sqrt{2.4(0.0058 + 0.00066\xi_1) - ((1.(-0.00141 - 0.00226\xi_1))^2 + 0.00347037 - 0.00167531\xi_1)}} \\
 &\quad + \frac{0.00347037 - 0.00167531\xi_1}{\sqrt{2.4(0.002933 + 0.000601672\xi_1) - (0.00347037 - 0.00167531\xi_1)^2}}. \\
 0 &\leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.
 \end{aligned}$$

En la Figura B.205 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k . Como los segmentos de curva Lb_{k_1} , Lb_{k_2} están definidas en el do-

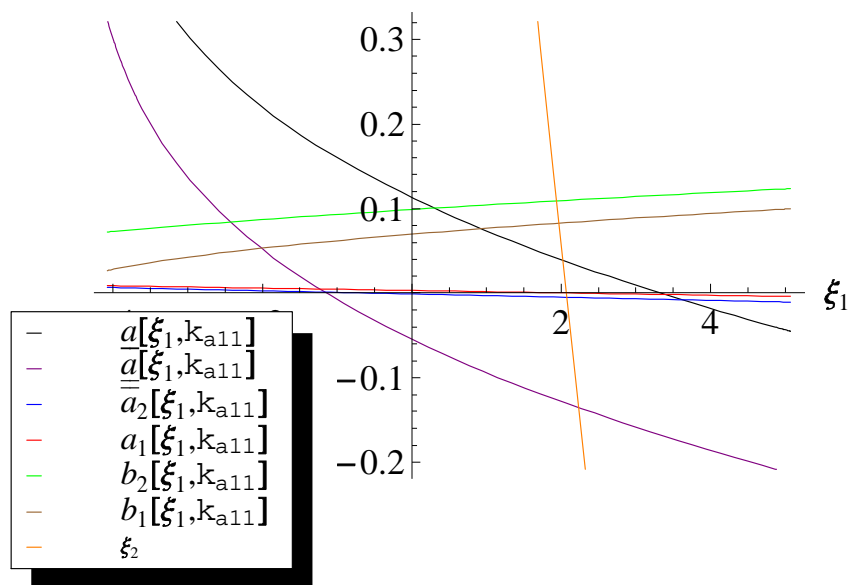


Figura B.205: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , para $k_{a11} = 29.8438$.

minio de L_k y los segmentos de curva $La_{\underline{k}}$, $L\underline{a}_k$ decrecen por el Lema 132, entonces la intersección de las curva $L\underline{a}_k$ y $La_{\underline{k}}$ con el eje ξ_1 , puntos $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a11}), \tilde{\xi}_2(k_{a11}))$ y

$(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a11}), \tilde{\xi}_2(k_{a11}))$ respectivamente, dividen L_k en tres partes (dos de las cuales pueden ser vacías). El entorno tubular de $\widehat{\widehat{L}}_k \subset L_k$ a la izquierda del punto

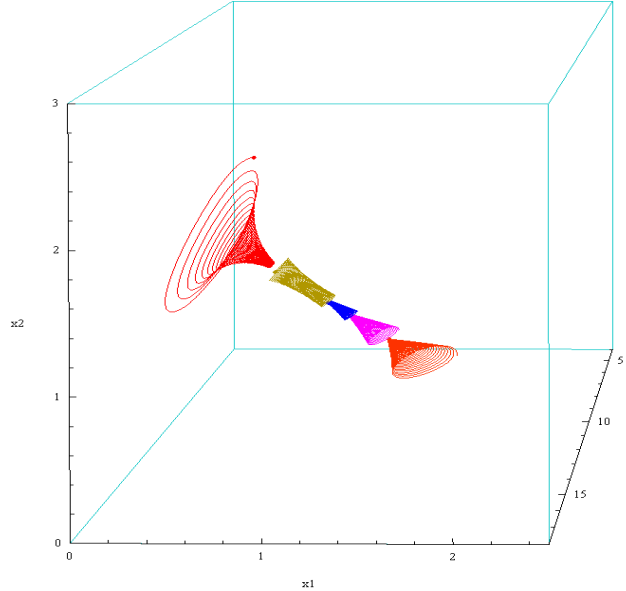


Figura B.206: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a11} = 29.8438$ y campo f_j .

$(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a11}), \tilde{\xi}_2(k_{a11}))$ del segmento de equilibrios L_k y el entorno tubular de $\widehat{\widehat{L}}_k \subset L_k$ a la derecha del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a11}), \tilde{\xi}_2(k_{a11}))$ del segmento de equilibrios L_k son vacíos en este caso, ya que $\tilde{\xi}_1(k_{a11}) < 0$ y $\tilde{\xi}_2(k_{a11}) > 0$, respectivamente; sin embargo las dinámicas de las órbitas en la zona de transición formada por un entorno tubular de los puntos del segmento de equilibrios $\widehat{\widehat{L}}_k \subset L_k$ entre los puntos $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a11}), \tilde{\xi}_2(k_{a11}))$ y $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k_{a11}), \widehat{\xi}_2(k_{a11}))$, que en este caso es todo L_k , parece definirse por el comportamiento del segmento de curva La_k , es decir, existen dos entornos tubulares, uno es de los puntos del segmento de equilibrios $\widehat{\widehat{L}}_k \subset L_k$ a la derecha del punto $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k_{a11}), \widehat{\xi}_2(k_{a11}))$, en el cual las soluciones con condiciones iniciales en esta vecindad se acercan al segmento L_k cuando t crece. Por consiguiente la parte de L_k a la derecha del punto $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k_{a11}), \widehat{\xi}_2(k_{a11}))$ es un atractor del sistema, pero esto no se puede afirmar por Teorema 141. El otro entorno tubular de los puntos del segmento de equilibrios $\widehat{\widehat{L}}_k \subset L_k$ a la izquierda del punto $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k_{a11}), \widehat{\xi}_2(k_{a11}))$ en el cual las soluciones con condiciones iniciales en esta vecindad se alejan del segmento L_k cuando

t crece, por lo tanto la parte de L_k a la derecha del punto $(\lambda, \widehat{\xi}_1(k_{a11}), \widehat{\xi}_2(k_{a11}))$ es un repulsor del sistema. Estas órbitas que se alejan del segmento L_k también ascienden a lo largo del segmento de equilibrios por la Observación 134, y la parte vi) de la Proposición 137; ya que $\left(\frac{\partial_s p_2(\lambda, a_2)}{\partial_s p_2(\lambda, a_1)} - \frac{\partial_s p_1(\lambda, a_2)}{\partial_s p_1(\lambda, a_1)} = 0.109102\right) > 0$, y pueden alcanzar el plano coordenado $x_1 = 0$, el cual es una variedad invariante del sistema no suave (2.1) y un ciclo límite puede aparecer el cual es orbitalmente asintóticamente estable en desarrollo de la bifurcación de Hopf-Zou & Küpper no-suave de acuerdo con el Teorema 121; significando la oscilación de coexistencia entre el k -estratega y la presa, ya que el segmento de curva La_k a diferencia del caso anterior se encuentra encima del segmento L_k . Si Las órbitas que se alejan alcanzan el plano coordenado $s = 0$, el cual es también una variedad invariante, entonces convergen asintóticamente al origen cuando t tiende a más infinito, significando que la extinción de las tres especies es posible, como se observa en el retrato de fase de la Figura B.206.

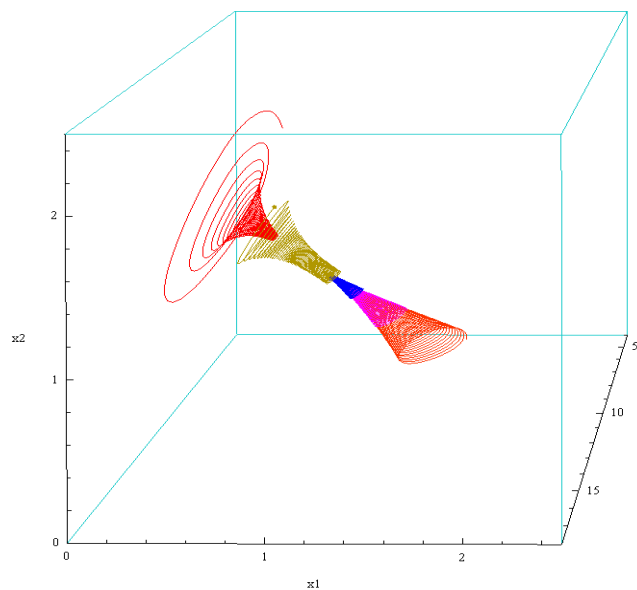


Figura B.207: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a11} = 29.8438$ y campo \tilde{f}_j .

Un comportamiento semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.207, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro

de bifurcación $k = k_{a11}$. Como se puede observar en las Figuras B.206 y B.207, los retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ no se puede afirmar que son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k , porque el Corolario 101 no aplica en este caso, ya que no existen variedades invariantes estables para el sistema no suave (2.1) que contengan los puntos del interior del segmento de equilibrios L_k .

Condición para $k_{api} = 30$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned}
 L_k &\leftrightarrow \xi_2 = 1.66667(1.04042 - 0.5\xi_1). \\
 La_{k1} &\leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.833333(0.003757 - 0.00167531\xi_1). \\
 La_{k2} &\leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.833333(-0.00115416 - 0.00226496\xi_1). \\
 Lb_{k1} &\leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.8333\sqrt{2.4(0.00294 + 0.00060\xi_1) - (0.0037 - 0.00167\xi_1)^2}. \\
 Lb_{k2} &\leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.8333\sqrt{2.4(0.0058 + 0.0006\xi_1) - (-0.0011 - 0.00226\xi_1)^2}. \\
 La_k &\leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{-0.00115416 - 0.00226496\xi_1}{\sqrt{2.4(0.0058 + 0.00066\xi_1) - (-0.00115416 - 0.00226\xi_1)^2}} \\
 &\quad + \frac{0.003757 - 0.00167531\xi_1}{\sqrt{2.4(0.00294625 + 0.000601\xi_1) - (0.003757 - 0.001675\xi_1)^2}}. \\
 0 &\leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.
 \end{aligned}$$

En la Figura B.208 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k . Este caso es similar al anterior sólo que en la zona de transición, el segmentos de curva La_k se sitúa más arriba del eje ξ_1 , por lo cual se omite su descripción y sólo se presenta los retratos de fase respectivos del sistema no suave (2.1) generado por los campos f_j , Figura B.209.

Un comportamiento semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.210, se presenta un

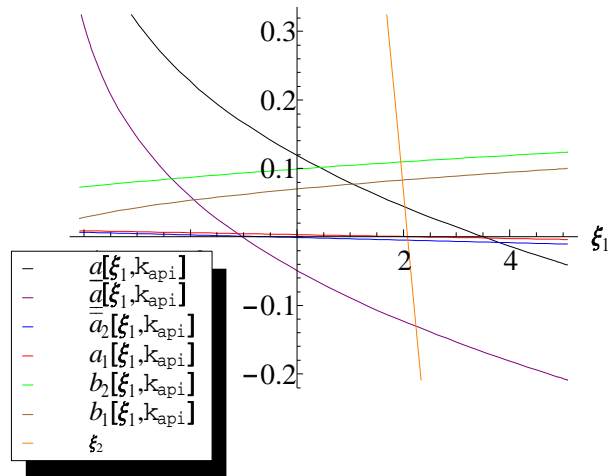


Figura B.208: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , para $k_{api} = 30$

retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{api}$. Como se puede observar en las Figuras B.209 y B.210, los retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los

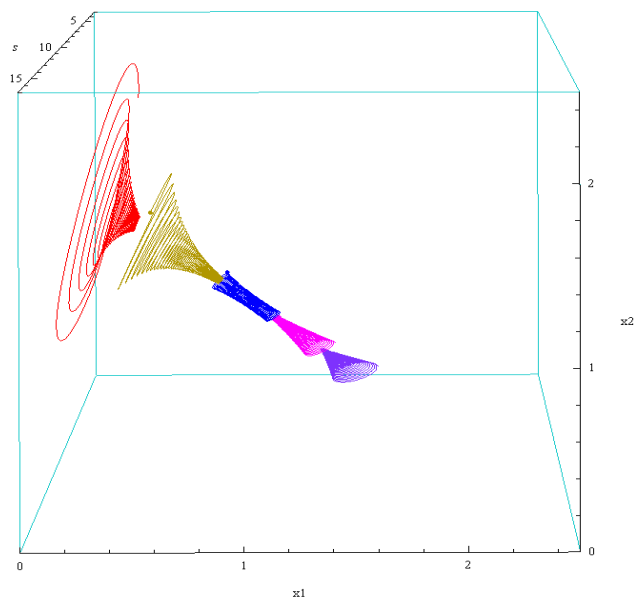


Figura B.209: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{api} = 30$ y campo f_j .

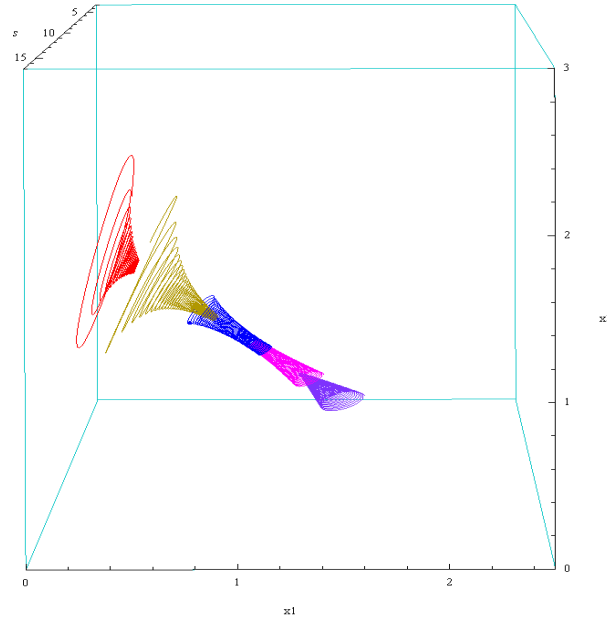


Figura B.210: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{api} = 30$ y campo \tilde{f}_j .

del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ no se puede afirmar que son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k , porque el Corolario 101 no aplica en este caso, ya que no existen variedades invariantes estables para el sistema no suave (2.1) que contengan los puntos del interior del segmento de equilibrios L_k .

Condición para $k_{a22} = 30.6919$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$L_k \leftrightarrow \xi_2 = 1.66667(1.06082 - 0.5\xi_1).$$

$$La_{k1} \leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.833333(0.00500748 - 0.00167531\xi_1).$$

$$La_{k2} \leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.833333(-3.64292 \times 10^{-17} - 0.00226496\xi_1).$$

$$Lb_{k1} \leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.83333\sqrt{2.4(0.0030 + 0.000601\xi_1) - (0.00500 - 0.0016\xi_1)^2}.$$

$$Lb_{k2} \leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.83333\sqrt{2.4(0.006 + 0.006\xi_1) - (-3.6429 \times 10^{-17} - 0.0022\xi_1)^2}.$$

$$La_k \leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{-3.64292 \times 10^{-17} - 0.00226496\xi_1}{\sqrt{2.4(0.00600 + 0.00066\xi_1) - (-3.6429 \times 10^{-17} - 0.00226\xi_1)^2}} + \frac{0.00500748 - 0.00167531\xi_1}{\sqrt{2.4(0.00300403 + 0.0006016\xi_1) - (0.0050074 - 0.00167\xi_1)^2}}$$

$$0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.$$

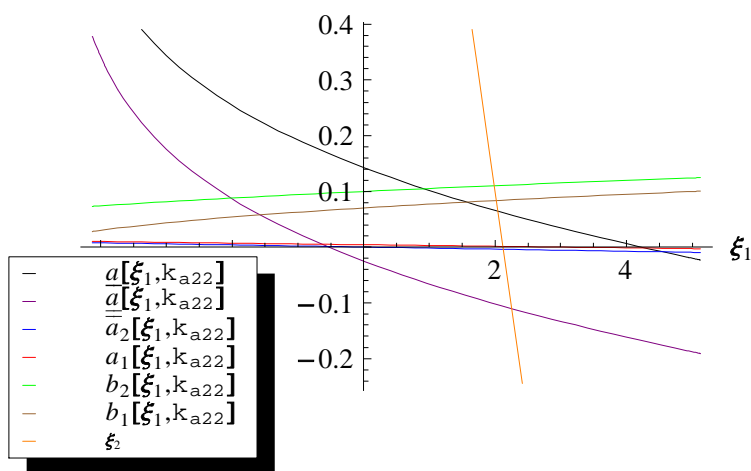


Figura B.211: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , para $k_{a22} = 30.6919$.

En la Figura B.211 se presenta la línea de equilibrios L_k y de curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k . Este caso también es similar al anterior sólo que en la zona de transición el segmento de curva La_k se sitúa más arriba del eje ξ_1 , por lo cual se omite su descripción y sólo se presenta los retratos de fase respectivos del sistema no suave (2.1) generado por los campos f_j , Figura B.212.

Un comportamiento semejante al anterior se tiene para el sistema no suave (4.2) asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.213, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{a22}$. Como se puede observar en las Figuras B.212 y B.213, los retratos fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ no se puede afirmar que

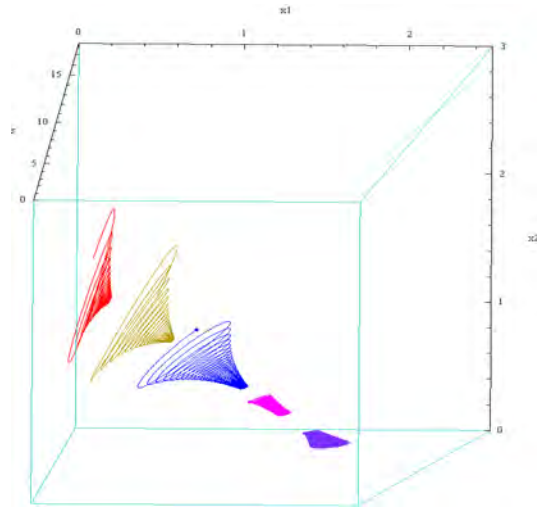


Figura B.212: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a22} = 30.6919$ y campo f_j .

son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k , porque el Corolario 101 no aplica en este caso, ya que no existen variedades invariantes estables para el sistema no suave (2.1) que contengan los puntos del interior del segmento de equilibrios L_k .

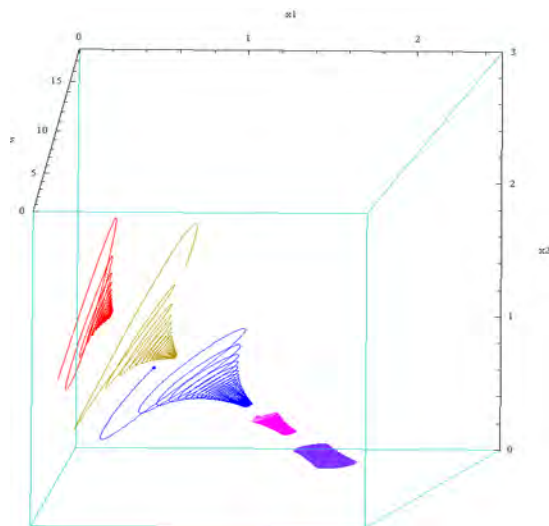


Figura B.213: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a22} = 30.6919$ y campo \tilde{f}_j .

Condición para $k_{a12} = 34.0509$:

Las ecuaciones de la línea de equilibrios L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k en el plano $s = \lambda$, están dadas respectivamente por:

$$L_k \leftrightarrow \xi_2 = 1.66667(1.15318 - 0.5\xi_1).$$

$$La_{k1} \leftrightarrow a_1(\xi_1, k) = 0.833333(0.0106673 - 0.00167531\xi_1).$$

$$La_{k2} \leftrightarrow a_2(\xi_1, k) = 0.833333(0.00522382 - 0.00226496\xi_1).$$

$$Lb_{k1} \leftrightarrow b_1(\xi_1, k) = 0.8333\sqrt{2.4(0.00326 + 0.000601672\xi_1) - (0.0106 - 0.001\xi_1)^2}.$$

$$Lb_{k2} \leftrightarrow b_2(\xi_1, k) = 0.8333\sqrt{2.4(0.0065 + 0.00066\xi_1) - (0.00522 - 0.0022\xi_1)^2}.$$

$$La_k \leftrightarrow a(\xi_1, k) = \frac{0.00522382 - 0.00226496\xi_1}{\sqrt{2.4(0.00653 + 0.000660\xi_1) - (0.00522 - 0.00226\xi_1)^2}} + \frac{0.0106673 - 0.00167531x_1}{\sqrt{2.4(0.00326558 + 0.000601672\xi_1) - (0.0106673 - 0.00167531\xi_1)^2}}.$$

$$0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma\lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}.$$

En la Figura B.214 se presenta la línea de equilibrios L_k y las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k que muestran la dinámica de los valores propios del sistema alrededor del segmento de equilibrios L_k . Como los segmentos de curva Lb_{k1} , Lb_{k2} están definidos en el dominio de L_k y los segmentos de curva $La_{\underline{k}}$, $L\underline{a}_k$ decrecen por el Lema 132, entonces la intersección de las curva $L\underline{a}_k$ y $L\underline{a}_k$ con el eje ξ_1 , puntos $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a12}), \tilde{\xi}_2(k_{a12}))$ y $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a12}), \tilde{\xi}_2(k_{a12}))$ respectivamente, dividen L_k en tres partes (*dos de los cuales pueden ser vacíos*). Existen dos entornos tubulares, uno del segmento de equilibrios $\widehat{L}_k \subset L_k$ a la izquierda del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a12}), \tilde{\xi}_2(k_{a12}))$, en el cual las soluciones con condiciones iniciales en esta vecindad se alejan del segmento L_k cuando t crece, es decir la parte de L_k a la izquierda del punto $(\lambda, \tilde{\xi}_1(k_{a12}), \tilde{\xi}_2(k_{a12}))$ es un repulsor del sistema; sin embargo las órbitas ascienden a lo largo del segmento de equilibrios por la Observación 134, y la parte vi) de la Proposición 137, ya que $\left(\frac{\partial_s p_2(\lambda, a_2)}{\partial_s p_2(\lambda, a_1)} - \frac{\partial_s p_1(\lambda, a_2)}{\partial_s p_1(\lambda, a_1)} = 0.109102\right) > 0$, y pueden alcanzar el plano coordenado $x_1 = 0$, el cual es una variedad invariante del sistema no suave (2.1), por consiguiente un ciclo límite puede aparecer el cual es orbitalmente asintóticamente estable en desarrollo de la bifurcación de Hopf-Zou & Küpper de acuerdo con el Teorema 121,

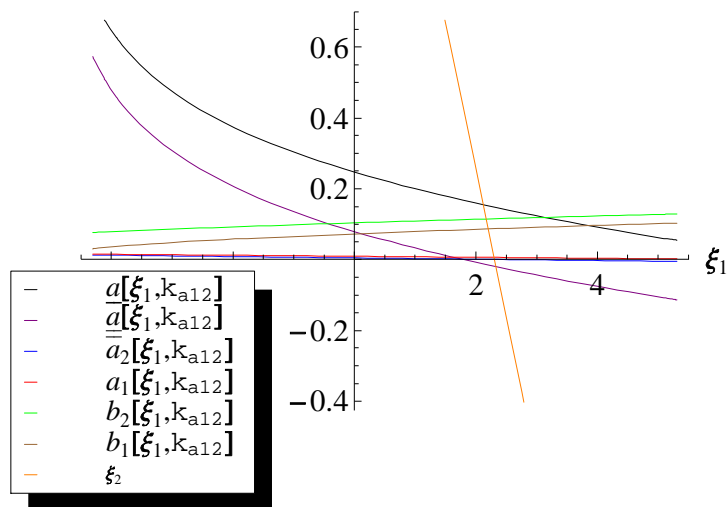


Figura B.214: Gráfica de la línea de equilibrio L_k y de las curvas $La_{k,j}$, $Lb_{k,j}$, La_k , para $k_{a12} = 34.0509$.

significando la oscilación de coexistencia entre el k -estratega y la presa, porque el segmento de curva La_k se encuentra encima del segmento L_k como en el caso anterior, ó alcanza el plano coordenado $s = 0$, el cual es también una variedad invariante y convergen asintóticamente al origen cuando t tiende a más infinito, significando que la extinción de las tres especies es posible, como se observa en el retrato de fase de la Figura B.215, y Teorema 141. El otro entorno tubular de los puntos del segmento de equilibrio $\widehat{L}_k \subset L_k$ a la derecha del punto $(\lambda, \widetilde{\xi}_1(k_{a12}), \widetilde{\xi}_2(k_{a12}))$ es vacío en este caso ya que $\widetilde{\xi}_1(k_{a12}) > 0$, sin embargo las órbitas en la zona de transición también ascienden a lo largo del segmento de equilibrios por la misma observación anterior y alcanzan el entorno tubular de los puntos del segmento de equilibrios $\widehat{L}_k \subset L_k$ a la izquierda del punto $(\lambda, \widetilde{\xi}_1(k_{a12}), \widetilde{\xi}_2(k_{a12}))$ en el cual las soluciones con condición iniciales en esta vecindad se alejan del segmento L_k cuando t crece. Dado que crece la inestabilidad del segmento de equilibrios con el parámetro de bifurcación k , se observa en la Figura B.215, una mayor oscilación de las órbitas en su ascenso a lo largo del segmento de equilibrios con respecto al caso anterior.

Un comportamiento semejante al anterior se realiza para el sistema no suave (4.2)

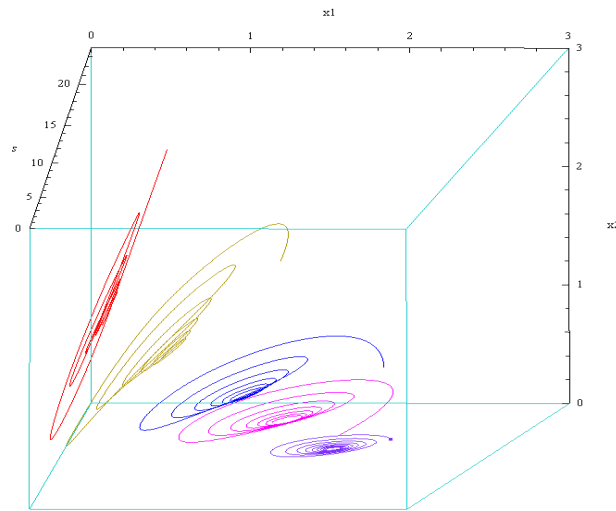


Figura B.215: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a12} = 34.0509$ y campo f_j .

asociado a los campos aproximados $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$. En la Figura B.216, se presenta un retrato de fase para este sistema con idénticas condiciones iniciales en el parámetro de bifurcación $k = k_{a12}$. Como se puede observar en las Figuras B.215 y B.216, los retratos de fase del sistema no suave (2.1) asociado a los campos $f_j(s, x_1, x_2)$, y los

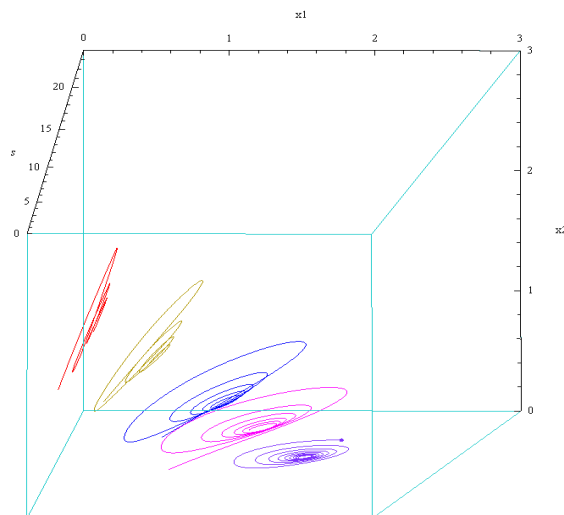


Figura B.216: Retrato de fase con parámetro de bifurcación $k_{a12} = 34.0509$ y campo \tilde{f}_j .

del sistema no suave (4.2) asociado a los campos $\tilde{f}_j(s, x_1, x_2)$ no se puede afirmar que son topológicamente equivalentes en un entorno tubular del segmento de equilibrios L_k , porque el Corolario 101 no aplica en este caso, ya que no existen variedades invariantes estables para el sistema no suave (2.1) que contengan los puntos del interior del segmento de equilibrios L_k .