GUILLERMO JIMÉNEZ LOZANO
VÍCTOR MANUEL QUESADA IBARGÜEN

CIEN PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MANIZALES

I.S.B.N 958-8280-04-4

AUTORES:

GUILLERMO JIMÉNEZ LOZANO
Administrador de Empresas
Especialista en Administración de Sistemas Informáticos
Especialista en Estadística
Profesor Asociado
Universidad Nacional de Colombia
Sede Manizales
gjimenezl@unal.edu.co

VÍCTOR MANUEL QUESADA IBARGÜEN
Ingeniero Industrial
Especialista en Administración Financiera
Especialista en Investigación Social
Magíster en Economía
Ph.D Ingeniería de la Organización
Profesor Titular
Universidad de Cartagena
quesastoque@une.net.co

REVISADO:

DIEGO CHAVEZ CHAMORRO
Matemático
Especialista en Matemáticas
Profesor Asociado
Universidad Nacional de Colombia
Sede Manizales

LUIS FERNANDO MOTATO
Ingeniero Industrial
Especialista en Administración de Sistemas Informáticos
Instructor Asociado
Universidad Nacional de Colombia
Sede Manizales

IMPRESO:

Centro de Publicaciones
Universidad Nacional de Colombia
Sede Manizales
Noviembre de 2006
Primera Edición

Quedo en deuda con Albanery (quien siempre me ha perdonado
mi inclinación por la Investigación Operacional), Xiomara Alexandra y Angélica.
Sin su dedicación, entendimiento y persistencia
no hubiera podido publicar este texto.

A Camila Honoria, mi madre.
A la memoria de Víctor Rodolfo, mi padre.
A Ana Cristina, Juan Manuel y David Leonardo, esposa e hijos.
A mis hermanos.
A los alumnos, cuyas inquietudes me han motivado
a investigar sobre el tema.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

El presente escrito tiene la intención de servir a las personas dedicadas al planteamiento de modelos de Programación Lineal, en especial a los estudiantes que cursan Investigación de Operaciones I.

Se aspira que en este volumen se puedan recoger una extensa colección de problemas que se presentan en Programación Lineal. La mayoría de los modelos que se encuentran escritos en el presente texto y el planteamiento de los mismos corresponden a la experiencia desarrollada a lo largo del tiempo dentro de los cursos de Programación Lineal, Investigación de Operaciones, Optimización, tanto a nivel de pregrado como de posgrado, que se han impartido en varias Universidades del país.

Nuestra intención es presentar obras de Matemáticas Aplicadas accesibles a gran número de personas de diferentes niveles científicos. Cada uno a nivel de iniciación, intermedio o finalización alcanzará el nivel que quiera de acuerdo a sus necesidades.

No quisiéramos terminar este texto, sin antes agradecer en primera instancia a los docentes de Investigación de Operaciones, como también a todos nuestros estudiantes de la Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales y de la Universidad de Cartagena, tanto de pregrado, como de posgrado.

Finalmente no queremos finalizar estas líneas sin agradecer de una manera muy especial a todas las personas que laboran en el Centro de Publicaciones de la Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales el empeño colocado para la publicación de la presente obra, especialmente a su actual jefe.

GUILLERMO JIMÉNEZ LOZANO
VÍCTOR MANUEL QUESADA IBARGÜEN

PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

MODELOS EN PROGRAMACIÓN LINEAL

En general, el problema que resuelve la programación lineal se plantea así:

Función Objetivo: OPTIMIZAR $Z = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + \ldots + C_nX_n$

$$C_i \in \mathbb{R}, \; i = 1,2,3,\ldots,n$$

Con las siguientes restricciones:

Restricciones Físicas (Estructurales):

$$\begin{aligned}
a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \ldots + a_{1n}X_n &\geq b_1 \\
a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + \ldots + a_{2n}X_n &\geq b_2 \\
a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + \ldots + a_{3n}X_n &\geq b_3 \\
a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + a_{m3}X_3 + \ldots + a_{mn}X_n &\geq b_m
\end{aligned}$$

$$a_{ij} \in \mathbb{R}, \; i = 1, 2, 3, \ldots, m$$
$$j = 1, 2, 3, \ldots, n$$
$$b_i \in \mathbb{R}$$

Restricciones Formales (De rango):

$X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n \geq 0$

RECURSOS: $b_1, \ldots, b_m$

CARACTERÍSTICAS DE LOS PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

Los supuestos en que se basa la programación lineal y que ayudan a concluir sobre la formulación presentada de un problema son:

- **Proporcionalidad.** Implica que en la función objetivo Z, la utilización del recurso j es $a_{ij}X_j$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, son directamente proporcionales al valor de la actividad j determinada.

- **Aditividad.** Dados los niveles de actividad, el uso total de cada recurso y el valor resultante de Z deben igualar la suma correspondiente a las cantidades generadas por el valor de cada actividad.

- **No negatividad.** El resultado de cada una de las variables de decisión en la solución óptima debe ser positivo. Cuando se presentan variables negativas, éstas se deben expresar como la adición de variables positivas.
- **Optimalidad.** En algunos casos las variables reales que describen las actividades tienen sentido únicamente con valores enteros; debemos tener en cuenta que en programación lineal se aceptan valores reales positivos.

MODELIZACIÓN

Un modelo es una abstracción, una representación de la realidad, un concepto o una idea con la que se pretende aumentar su comprensión, hacer predicciones o controlar/analizar un sistema. Cuando el sistema no existe, sirve para definir la estructura ideal de ese sistema futuro indicando las relaciones funcionales entre sus elementos. En la actualidad un modelo se define como un constructo basado en nuestras propias percepciones pasadas y actuales; la anterior representación puede ser holista o reduccionista.

Clasificación de modelos

Los modelos se clasifican desde diversos puntos de vista. Es de advertir que las siguientes divisiones y subdivisiones no fueron realizadas en forma exhaustiva.

1. Por su grado de abstracción: se dividen en abstractos (no físicos) y concretos (físicos). Los primeros en general se apartan de la realidad y los segundos generalmente emulan los sistemas reales. Los abstractos se clasifican en verbales, diagramáticos y matemáticos. Los verbales, corresponden a la representación del modelo en prosa; diagramáticos, el modelo es expresado por medio de diagramas; los modelos matemáticos se subdividen su vez en algebraicos, trascendentes, continuos, discretos, lineales y no lineales. Los modelos algebraicos trabajan con funciones algebraicas. Los trascendentes utilizan funciones trascendentes. Los modelos continuos emplean valores correspondientes a distribuciones de probabilidad mientras que en los modelos discretos los cambios que sufre un sistema se hacen en intervalos de tiempo. Los modelos lineales trabajan con funciones lineales en tanto que los modelos no lineales utilizan funciones no lineales.

   Además, los modelos matemáticos también pueden ser estáticos, dinámicos, determinísticos y probabilísticos (estocásticos): un modelo es estático, cuando sus atributos no muestran variación en el tiempo, los modelos dinámicos permiten observar el comportamiento del sistema a través del tiempo, los modelos determinísticos no tienen funciones de probabilidad; mientras que los modelos estocásticos existen en ellos funciones de probabilidad.

2. Por su esencia: son normativos y descriptivos. Los modelos primeros indican normas que se deben cumplir, mientras que los segundos nos definen una situación real.

3. Por sus características: pueden ser réplicas, cuasirréplicas, analógicos, formalización, isomorfos y simulación. Réplica, representación estricta de la realidad a escala; cuasirréplica, su representación se realiza en dos dimensiones; analógicos, utilizan unas propiedades para representar otras; formalización, emplean lenguaje abstracto; isomorfos, número de variables que emplea el modelo; simulación, no se reproducen características físicas.

PLANTEAMIENTO DE MODELOS EN PROGRAMACIÓN LINEAL

A continuación se plantean modelos usuales en nuestro medio, como aplicaciones industriales o comerciales.

En Investigación de Operaciones es importante plantear modelos, que luego de estandarizarlos queden estructurados como problemas de programación lineal para proceder a su solución.

Problemas

1. Una empresa, especializada en la fabricación de mobiliario para casas de muñecas, produce cierto tipo de minimesas y minisillas que vende a 2000 unidades monetarias (u. m.) y 3000 u. m. por cada artículo, respectivamente. Desea saber cuántas unidades de cada artículo debe fabricar diariamente un operario para maximizar los ingresos, teniendo las siguientes restricciones:

- El número total de unidades de los dos tipos no podrá exceder de cuatro por día y operario.
- Cada minimesa requiere dos horas para su fabricación; cada minisilla, tres horas. La jornada laboral máxima es de diez horas.
- El material utilizado en cada minimesa cuesta 400 u.m. El utilizado en cada minisilla cuesta 200 u.m. Cada operario dispone de 1200 u.m. diarias para material.

Plantear y resolver el anterior problema como un modelo de programación lineal.

INFORMACIÓN

Precio de venta de minimesas	2000 u.m.
Precio de venta de minisillas	3000 u.m.
Tiempo de fabricación de una minimesa	2 horas
Tiempo de fabricación de una minisilla	3 horas
Jornada laboral máxima	10 horas
Costo de material de una minimesa	400 u.m.
Costo de material de una minisilla	200 u.m.
Total minisillas y minimesas no deben exceder cuatro unidades por día y operario	

PLANTEAMIENTO

X_1	$\rightarrow$	Número de minimesas a producir diariamente por operario
X_2	$\rightarrow$	Número de minisillas a producir diariamente por operario

Modelo (primal):

$$MAX\ Z = 2000\ X_1 + 3000\ X_2$$

Sujeta a:

1.	X_1	+	X_2	$\leq$	4
2.	$2X_1$	+	$3X_2$	$\leq$	10
3.	$400\ X_1$	+	$200\ X_2$	$\leq$	1200
			X_1, X_2	$\geq$	0

Este problema tiene solución óptima múltiple:

Una de las soluciones es:

$X_1^* = 0$ No se deben producir minimesas diariamente

$X_2^* = \frac{10}{3} =$ Se deben fabricar por día $\frac{10}{3}$ minisillas

$Z_1^* = 10000$ La utilidad a obtener es de 10000 u.m. (unidades monetarias)

Otra de las soluciones es:

$X_1^* = 2$ se deben producir dos minimesas diariamente

$X_2^* = 2$ se deben fabricar por día dos minisillas por día

$Z_2^* = 10000$ la utilidad a obtener es de 10000 u.m. (unidades monetarias)

2. En un almacén de frutas hay 800 kg de naranjas, 800 kg de manzanas y 500 kg de plátanos. Para su venta se hacen dos lotes (A y B). El lote A contiene 1 kg de naranjas, 2 kg de manzanas y 1 kg de plátanos; el lote B se compone de 2 kg de naranjas, 1 kg de manzanas y 1 kg de plátanos. El beneficio por kilogramo que se obtiene con el lote A es de 1200 u.m. y con el lote B de 1400 u.m. Determinar el número de kilogramo de cada tipo para conseguir beneficios máximos.

Plantear y resolver el anterior problema como un modelo de programación lineal.

INFORMACIÓN

Existencias	800 kg naranjas		
	800 kg manzanas		
	500 kg plátanos		
Lote A	1 kg naranjas	Lote B	2 kg naranjas
	2 kg manzanas		1 kg manzanas
	1 kg plátanos		1 kg plátanos
Beneficios lote A	1200 u.m.		
Beneficios lote B	1400 u.m.		

PLANTEAMIENTO

X_A	Número de lotes clase A para formar en kg
X_B	Número de lotes clase B para formar en kg

Modelo (primal):

$MAX\ Z = 1200\ X_A + 1400\ X_B$

Sujeta a:

1. $X_A + 2X_B < 800$
2. $2X_A + X_B < 800$
3. $X_A + X_B < 500$

$X_A, X_B > 0$

$X_A^* = 200$ se deben formar 200 lotes de clase A

$X_B^* = 300$ se deben formar 300 lotes de clase B

$Z^* = 660000$ el beneficio máximo a obtener es de 660000 u.m.

3. La región factible de un problema de programación lineal es la intersección del primer cuadrante del plano cartesiano con los tres semiplanos definidos por las siguientes inecuaciones:

$$\frac{X}{10}+\frac{Y}{8}\leq 1;\quad \frac{X}{5}+\frac{Y}{8}\geq 1;\quad \frac{X}{10}+\frac{Y}{4}\geq 1$$

a. Dibuje dicha región y determine sus vértices.

b. Calcule el mínimo de la función objetivo F(x,y) = 4 X + 5 Y y el recinto anterior.

SOLUCIÓN

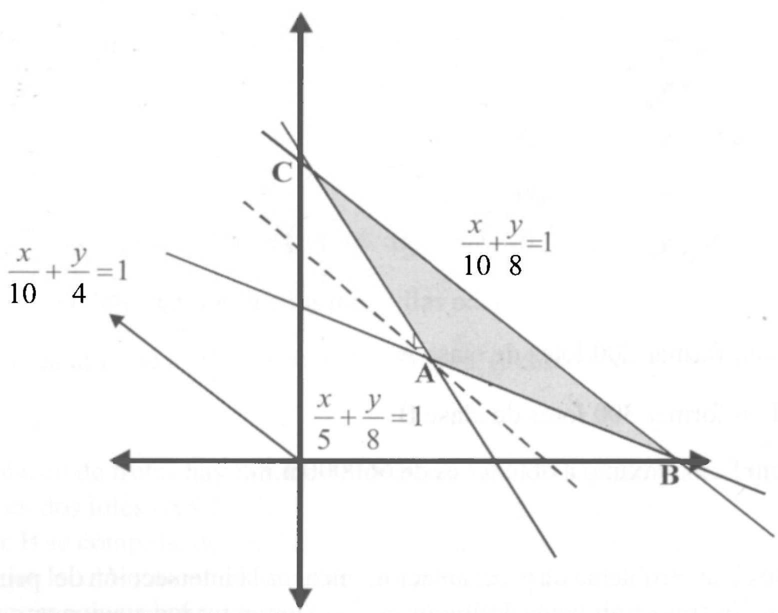
$$\frac{X}{10}+\frac{Y}{8}<1;\ 8X+10Y\leq 80$$

$$\frac{X}{5}+\frac{Y}{8}>1;\ 8X+5Y>40$$

$$\frac{X}{10}+\frac{Y}{4}>1;\ 4X+10Y>40$$

Representamos las rectas:

$$\frac{X}{10}+\frac{Y}{8}=1;\quad \frac{X}{5}+\frac{Y}{8}=1;\quad \frac{X}{10}+\frac{Y}{4}=1$$



La región factible es la sombreada. Las coordenadas de los vértices son:

B(10,0) y C(0,8). Las coordenadas del punto A son las del punto de intersección de las rectas:

$$\begin{cases} \frac{x}{5}+\frac{y}{8}=1 \\ \frac{x}{10}+\frac{y}{4}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x+5y=40 \\ 2x+5y=20 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{20}{6}=\frac{10}{3}; \; y=\frac{40}{15}=\frac{8}{3}$$

En la representación el signo menor o igual (<) corresponde al barrido en la dirección y sentido que indiquen las ecuaciones. b) El mínimo de la función objetivo es: Mín W = 4 X + 5 Y; W = $\frac{80}{3}$

4. Un frutero necesita 16 cajas de naranjas, 5 de plátanos y 20 de manzanas. Dos mayoristas pueden suministrarle para satisfacer sus necesidades, pero sólo venden la fruta en contenedores completos. El mayorista A envía en cada contenedor 8 cajas de naranjas, 1 de plátanos y 2 de manzanas. El mayorista B envía en cada contenedor 2 cajas de naranjas, una de plátanos y 7 de manzanas. Sabiendo que el mayorista A se encuentra a 150 km de distancia y el mayorista B a 300 km, calcular cuántos contenedores habrá de comprar a cada mayorista, con objeto de ahorrar tiempo y dinero, reduciendo al mínimo la distancia de lo solicitado.

INFORMACIÓN

NECESIDADES (demanda)		16 cajas de naranja
		5 cajas de plátano
		20 cajas de manzanas
OFERTA	Mayorista A (contenedor a 150 km)	8 cajas de naranja
		1 caja de plátano
		2 cajas de manzana
	Mayorista B (contenedor a 300 km)	2 cajas de naranja
		1 caja de plátano
		7 cajas de manzana

PLANTEAMIENTO

Se debe establecer cuántos contenedores ha de comprar a cada mayorista con objeto de ahorrar tiempo y dinero, reduciendo al mínimo la distancia de lo solicitado.

Plantear y resolver el anterior problema como un modelo de programación lineal.

SOLUCIÓN

X_1	Cantidad de contenedores a comprar al mayorista A
X_2	Cantidad de contenedores a comprar al mayorista B

$$\text{Sea } Y_i = \begin{cases} 1 \rightarrow \text{Si se le compra al proveedor i,} \quad i = A, B \\ \phi \rightarrow \text{En caso contrario} \end{cases}$$

Modelo (primal):

$$\text{MIN } W = 150\, Y_A + 300\, Y_B$$

Sujeta a:

$$\begin{array}{llcll}
1. & 8X_1 & + & 2X_2 & \geq & 16 \\
2. & X_1 & + & X_2 & \geq & 5 \\
3. & 2X_1 & + & 7X_2 & \geq & 20 \\
4. & X_1 & & & \leq & MY_A \\
5. & & & X_2 & \leq & MY_B \\
 & & & X_1, X_2 & \geq & 0 \\
 & & & Y_A, Y_B & > & 0;\ Y_A, Y_B \leq 1;\ Y_A, Y_B \in \mathbb{Z}
\end{array}$$

M es un valor numérico demasiado alto.

Resumiendo:

$$\text{MIN } W = 150\, Y_A + 300\, Y_B$$

Sujeta a:

$$\begin{array}{llcll}
1. & 8X_1 & + & 2\,X_2 & \geq & 16 \\
2. & X_1 & + & X_2 & \geq & 5 \\
3. & 2X_1 & + & 7\,X_2 & > & 20 \\
4. & X_1 & - & M\,Y_A & \leq & 0 \\
5. & X_2 & - & M\,Y_B & \leq & 0 \\
 & & & X_1, X_2 & > & 0 \\
 & & & Y_A, Y_B & \geq & 0;\ Y_A, Y_B \leq 1;\ Y_A, Y_B \in \mathbb{Z}
\end{array}$$

$Y_A^* = 1$ Se le compra al proveedor

$Y_B^* = 1$ Se le compra al proveedor

$X_1^* = 3$ Se deben comprar tres contenedores al proveedor A

$X_2^* = 2$ Se deben comprar dos contenedores al proveedor B

$W^* = 450$ Los costos se pueden bajar en 450 u.m.

5. Una compañía tiene dos minas: la mina A produce diariamente 1 tonelada de carbón de antracita de alta calidad, 2 toneladas de carbón de calidad media y 4 toneladas de carbón de baja calidad; la mina B produce 2 toneladas de cada una de las tres clases. Esta compañía necesita 70 toneladas de carbón de alta calidad, 130 de calidad media y 150 de baja calidad. Los gastos diarios de la mina A ascienden a 500 u.m. y los de la mina B a 750 u.m. ¿Cuántos días deberán trabajar en cada mina para que la función de coste sea mínima?

Plantear y resolver el anterior problema como un modelo de programación lineal.

INFORMACIÓN

	Producción en toneladas de carbón			
Mina	Alta calidad	Calidad media	Baja calidad	Gastos/día
A	1	2	4	500 u.m.
B	2	2	2	750 u.m.
Requerido	70	130	150	

PLANTEAMIENTO

X_1	Número de días a explotar la mina A
X_2	Número de días a explotar la mina B

Modelo (primal):

$$\text{MIN } W = 500\,X_1 + 750\,X_2$$

Sujeta a:

1. $X_1 + 2X_2 \geq 70$
2. $2X_1 + 2X_2 \geq 130$
3. $4X_1 + 2X_2 \geq 150$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

$X_1^* = 60$ La mina A se debe explotar 60 días

$X_2^* = 5$ La mina B se debe explotar 5 días

$W^* = 33750$ Los costos mínimos son de 33750 u.m.

6. Imaginemos que las necesidades semanales mínimas de una persona en proteínas, hidratos de carbono y grasas son, respectivamente, 8, 12 y 9 unidades. Supongamos que debemos obtener un preparado con esa composición mínima mezclando dos productos A y B, cuyos contenidos por kilogramo son los que se indican en la siguiente tabla:

	Proteínas	Hidratos	Grasas	Costo/kg
A	2	6	1	600
B	1	1	3	400

¿Cuántos kilogramos de cada producto deberán comprarse semanalmente para que el costo de preparar la dieta sea mínimo?

Plantear y resolver el anterior problema como un modelo de programación lineal.

INFORMACIÓN

	Proteínas	Hidratos	Grasas	Costo/kg
Producto A	2	6	1	600
Producto B	1	1	3	400
Necesidades (unidades)	8	12	9	

PLANTEAMIENTO

X_A	Cantidad en kg de producto A a utilizar semanalmente
X_B	Cantidad en kg de producto B a utilizar semanalmente

Modelo (primal):

MIN $W = 600\,X_A + 400\,X_B$

Sujeta a:

1. $2X_A + X_B > 8$
2. $6X_A + X_B > 12$
3. $X_A + 3X_B > 9$

$X_A, X_B > 0$

$X_A^* = 3$ Se deben utilizar 3 kg de producto A a la semana

$X_B^* = 2$ Se deben usar 2 kg de producto A semanalmente

$W^* = 2600$ Los costos mínimos en la semana son de 2600 u.m.

7. En la elaboración de un producto A se necesita una sustancia B. La cantidad de A obtenida es menor o igual que el doble de B utilizada, y la diferencia entre las cantidades del producto B y A no supera los 2 g mientras que la suma no debe sobrepasar los 5 g. Además se utiliza por lo menos 1 g de B y se requiere 1 g de A. La sustancia A se vende a 5 millones de u.m. y la B cuesta 4 millones de u.m. el gramo. Calcular la cantidad de sustancia B necesaria para que el beneficio sea máximo.

Plantear y resolver el anterior problema como un modelo de programación lineal.

INFORMACIÓN

Producto		Requiere sustancia
A		B
Cantidad de A	$\leq$	2B utilizada
B – A	<	2 g
A + B	$\leq$	5 g

La cantidad de B utilizada ha de ser por lo menos 1 g	
Se requiere 1 g de A	
Precio de venta de A	5 millones u.m./g
Costo de B	4 millones u.m./g

PLANTEAMIENTO

X_A	Cantidad en gramos del producto A a producir
X_B	Cantidad en gramos de la sustancia B a utilizar

Modelo (primal):

$$MAX\ Z = 5X_A - 4X_B$$

Sujeta a:

$$
\begin{array}{lrcrcl}
1. & X_A & & & < & 2X_B \\
2. & -X_A & + & X_B & \leq & 2 \\
3. & X_A & + & X_B & < & 5 \\
4. & & & X_B & = & 1 \\
 & & & X_A, X_B & \geq & 0
\end{array}
$$

Resumiendo:

$$MAX\ Z = 5\ X_A - 4\ X_B$$

Sujeta a:

$$\begin{array}{lrcl} 1. & X_A - 2X_B & < & 0 \\ 2. & -X_A + X_B & < & 2 \\ 3. & X_A + X_B & < & 5 \\ 4. & X_B & > & 1 \\ & X_A, X_B & > & 0 \end{array}$$

8. En una encuesta realizada por una televisión local se detectó que un programa con 20 minutos de variedades y un minuto de publicidad capta 30000 espectadores, mientras que otro programa con 10 minutos de variedades y 1 minuto de publicidad capta 10000 espectadores.

Para un determinado período, la dirección de la red decide dedicar 80 minutos de variedades y los anunciantes 6 minutos de publicidad. ¿Cuántas veces deberá aparecer cada programa con objeto de captar el máximo número de espectadores?

INFORMACIÓN

Programa (contenido)	Captación de espectadores
20 minutos variedades + 1 minuto publicidad	30000
10 minutos de variedades + 1 minuto de publicidad	10000

PLANTEAMIENTO

X_1	Número de exposiciones del programa 1 en el período
X_2	Número de exposiciones del programa 2 en el período

Modelo (primal):

$$MAX\ Z = 30000\ X_1 + 10000\ X_2$$

Sujeta a:

$$\begin{array}{lrcl} 1. & 20X_1 + 10X_2 & = & 80 \\ 2. & X_1 + X_2 & = & 6 \\ & X_1, X_2 & > & 0 \end{array}$$

9. • Una empresa tiene dos factorías A y B. En ellas se fabrica un determinado producto, a razón de 500 y 400 unidades por día respectivamente. El producto ha de ser distribuido posteriormente a tres centros I, II y III, que requieren, respectivamente, 200, 300 y 400 unidades. Los costos de transportar cada unidad del producto desde cada factoría a cada centro distribuidor son los indicados en la tabla siguiente:

Factoría	I	II	III	Fabricación (unidades)
A	50	60	10	500 u
B	25	40	20	400 u
Demanda	200	300	400	

¿De qué manera deben organizar el transporte a fin de que los gastos sean mínimos?

PLANTEAMIENTO

X_{ij}	Cantidad de producto a enviar desde la factoría i (i = A, B) hasta el centro j (j = 1, 2, 3)

Modelo (primal):

$$\text{MIN } W = 50\,X_{A1} + 60\,X_{A2} + 10\,X_{A3} + 25\,X_{B1} + 40\,X_{B2} + 20\,X_{B3}$$

Sujeta a:

1. $X_{A1} + X_{A2} + X_{A3} < 500$
2. $X_{B1} + X_{B2} + X_{B3} < 400$
3. $X_{A1} + X_{B1} > 200$
4. $X_{A2} + X_{B2} > 300$
5. $X_{A3} + X_{B3} > 400$

$$X_{ij} > 0$$

10. • Una multinacional farmacéutica desea fabricar un compuesto nutritivo a base de dos productos A y B. El producto A contiene 30% de proteínas, un 1% de grasas y un 10% de azúcares. El producto B contiene un 5% de proteínas, un 7% de grasas y un 10% de azúcares.

El compuesto tiene que tener, al menos, 25g de proteínas, 6g de grasas y 30g de azúcares.

El coste del producto A es de 0.6 u.m./g. y el de B es de 0.2 u.m./g.

¿Cuántos gramos de cada producto debe tener el compuesto para que el coste total sea mínimo?

INFORMACIÓN

	% Proteínas	% Grasas	% Azúcar	Costo (u.m/kg)
Producto A	30	1	10	0,6
Producto B	5	7	10	0,2
Requerido en el compuesto	25 g	6 g	30 g	

PLANTEAMIENTO

X_A	Cantidad en gramos del producto A a utilizar
X_B	Cantidad en gramos del producto B a utilizar

Modelo (primal):

$$\text{MIN } W = 0{,}6\ X_A + 0{,}2\ X_B$$

Sujeta a:

1. $0{,}3\ X_A + 0{,}05\ X_B > 25$

2. $0{,}01 X_A + 0{,}07\ X_B \geq 6$

3. $0{,}1\ X_A + 0{,}1\ X_B > 30$

$$X_A, X_B > 0$$

11. • Una asociación agrícola tiene dos parcelas: la parcela P_1 tiene 400 Ha de tierra utilizable y dispone de 500 m³ de agua, mientras la parcela P_2 tiene 900 Ha de tierra utilizable y dispone de 1200 m³ de agua. Los cultivos aconsejados son: remolacha y algodón. La remolacha consume 3 m³ de agua por Ha, con un beneficio de 700 u.m. por Ha; el algodón consume 2 m³ de agua por Ha, con un beneficio de 500 u.m. por Ha. Se ha establecido una cuota máxima por Ha para cada cultivo: 800 para la remolacha y 600 para el algodón, siendo el porcentaje total de terreno cultivado el mismo en cada parcela.

Plantear el problema de programación lineal.

INFORMACIÓN

PARCELAS	HECTÁREAS	AGUA (m^3)
P_1	400	500
P_2	900	1200

	CULTIVOS	
CONSUMOS	REMOLACHA	ALGODÓN
Agua (m^3/Ha)	3	2
Beneficios (u.m./Ha)	700	500
Máx. cultivable (Ha)	800	600

PLANTEAMIENTO

X_{ij} Número de hectáreas dedicadas al cultivo i (i = 1(remolacha), 2 (algodón)) en la parcela j (j = 1, 2).

Modelo (primal):

$$\text{MAX } Z = 700\,(X_{11} + X_{12}) + 500\,(X_{21} + X_{22})$$

Sujeta a:

1. $X_{11} + X_{21} < 400$
2. $X_{12} + X_{22} \leq 900$
3. $3X_{11} + 2X_{21} \leq 500$
4. $3X_{12} + 2X_{22} < 1200$
5. $X_{11} + X_{12} < 800$
6. $X_{21} + X_{22} \leq 600$
7. $\dfrac{X_{11} + X_{21}}{400} = \dfrac{X_{12} + X_{22}}{900}$

$$X_{ij} \geq 0$$

Resumiendo:

$$MAX\ Z = 700\ X_{11} + 700\ X_{12} + 500\ X_{21} + 500\ X_{22}$$

Sujeta a:

1. $X_{11} + X_{21} \leq 400$
2. $X_{12} + X_{22} \leq 900$
3. $3X_{11} + 2X_{21} \leq 500$
4. $3X_{12} + 2X_{22} \leq 1200$
5. $X_{11} + X_{12} \leq 800$
6. $X_{21} + X_{22} \leq 600$
7. $9X_{11} - 4X_{12} + 9X_{21} - 4X_{22} = 0$

$$X_{ij} \geq 0$$

12. Una empresa constructora dispone de dos tipos de camiones C_1 y C_2 y quiere transportar 100 toneladas de arena a una obra. Sabiendo que dispone de 6 camiones tipo C_1 con capacidad para 15 toneladas y con un coste de 4000 u.m. por viaje y de 10 camiones tipo C_2 con una capacidad de 5 toneladas y con un coste de 3000 u.m. por viaje.

¿Cuál es el número posible de camiones que debe usar para que el coste sea mínimo?

INFORMACIÓN

CAMIONES	NÚMERO	CAPACIDAD (toneladas)	COSTO / VIAJE
C_1	6	15	4000 u.m.
C_2	10	5	3000 u.m.
Debe transportar 100 toneladas			

PLANTEAMIENTO

X_i	Número de camiones tipo i (i = 1, 2) que se utiliza

Modelo (primal):

$$\text{MIN } W = 4000\, X_1 + 3000\, X_2$$

Sujeta a:

$$\begin{array}{llcr}
1. & X_1 & \leq & 6 \\
2. & X_2 & \leq & 10 \\
3. & 15\, X_1 + 5\, X_2 & \leq & 100 \\
 & X_1, X_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Nota: Se supone que cada camión se puede utilizar sólo una vez. Por lo tanto, la expresión "camión utilizado" es equivalente a viaje realizado.

13.

Una compañía aérea dispone de dos tipos de aviones A_1 y A_2 para cubrir un determinado trayecto. El avión A_1 debe hacer el trayecto más veces que el avión A_2 pero no puede sobrepasar 120 viajes. Entre los dos aviones deben hacer más de 60 vuelos, pero menos de 200. En cada vuelo, A_1 consume 900 litros de combustible y A_2 700 litros. En cada viaje del avión A_1 la empresa gana 30.000 u.m. y 20.000 u.m. por cada viaje del avión A_2.

¿Cuántos viajes debe hacer cada avión para obtener el máximo de ganancias?

INFORMACIÓN

A_1	Debe hacer más viajes que A_2 y no puede sobrepasar 120 viajes
Entre los dos aviones deben hacer más de 60 viajes y menos de 200	

CONSUMO DE COMBUSTIBLE POR VIAJE	
A_1	900 litros de combustible
A_2	700 litros de combustible

GANANCIAS	
A_1	30000 u.m. por viaje
A_2	20000 u.m. por viaje

PLANTEAMIENTO

X_1	Número de viajes a realizar el avión A_1
X_2	Número de viajes a realizar el avión A_2

Modelo (primal):

$$MAX\ Z = 30000\ X_1 + 20000\ X_2$$

Sujeta a:

1. $X_1 \geq X_2$
2. $X_1 \leq 120$
3. $X_1 + X_2 \geq 60$
4. $X_1 + X_2 \leq 200$

$X_1, X_2 \geq 0$

Resumiendo:

$$MAX\ Z = 30000\ X_1 + 20000\ X_2$$

Sujeta a:

1. $X_1 - X_2 \geq 0$
2. $X_1 \leq 120$
3. $X_1 + X_2 \geq 60$
4. $X_1 + X_2 \leq 200$

$X_1, X_2 \geq 0$

14. Una industria vinícola produce vino y vinagre. El doble de la producción de vino es siempre menor o igual que la producción de vinagre más cuatro unidades. Por otra parte, el triple de la producción de vinagre sumado con cuatro veces la producción de vino se mantiene siempre menor o igual a 18 unidades.

Hallar el número de unidades de cada producto que se deben producir para alcanzar un beneficio máximo, sabiendo que cada unidad de vino deja un beneficio de 800 u.m. y cada unidad de vinagre de 200 u.m.

INFORMACIÓN

Dos veces la producción de vino es menor o igual que la producción de vinagre más cuatro unidades	
El triple de la producción de vinagre más cuatro (producción de vino) es siempre menor que 18 unidades	
BENEFICIOS	
VINO	800 u.m. por unidad
VINAGRE	200 u.m. por unidad

PLANTEAMIENTO

X_1	Cantidad en botellas de vino a producir
X_2	Cantidad en botellas de vinagre a producir

Modelo (primal):

$$MAX\ Z = 800\ X_1 + 200\ X_2$$

Sujeta a:

1. $2\ X_1 \quad \leq \quad X_2 + 4$
2. $4\ X_1 + 3\ X_2 \quad < \quad \cancel{120}$ 18

$$X_1, X_2 \quad \geq \quad 0$$

Resumiendo:

$$MAX\ Z = 800\ X_1 + 200\ X_2$$

Sujeta a:

1. $2X_1 - X_2 < 4$
2. $4X_1 + 3X_2 \leq 18$

$$X_1, X_2 > 0$$

15. Una fábrica de carrocerías de automóviles y camiones tiene dos naves. En la nave A, para hacer la carrocería de un camión, se invierten siete días-operario, para fabricar la de un coche se precisan dos días-operario. En la nave B se invierten tres días operario tanto en carrocerías de camión como de coche. Por limitaciones de mano de obra y maquinaria, la nave A dispone de 300 días operario, y la nave B de 270 días-operario. Si los beneficios que se obtienen por cada camión son de 6 millones de u.m. y por cada automóvil 2 millones de u.m., ¿cuántas unidades de cada uno se deben producir para maximizar las ganancias?

INFORMACIÓN

	DIAS OPERARIO		
NAVE	Camión	Automóvil	DISPONIBLE
A	7	2	300
B	3	3	270
Beneficios	6 millones	2 millones	

PLANTEAMIENTO

X_{ij}	Número de carrocerías tipo i (i = 1, 2) a producir en la nave j (j = A, B)

Modelo (primal):

$$MAX\ Z = 6\ X_{1A} + 6\ X_{1B} + 2\ X_{2A} + 2\ X_{2B}$$

Sujeta a:

$$
\begin{array}{lllllll}
1. & 7\ X_{1A} & & + 2\ X_{2A} & & \leq & 300 \\
2. & & 6\ X_{1B} & & + 2\ X_{2B} & \leq & 270 \\
 & & & X_{1A}, X_{1B}, X_{2A}, X_{2B} & & \geq & 0
\end{array}
$$

16. Una entidad financiera capta depósitos y presta dinero. La captación de depósitos lleva una hora para convencer al cliente y otra de trabajo burocrático. El préstamo de dinero lleva una hora para convencer al cliente y dos horas de trabajo burocrático. El máximo número de horas de trabajo disponibles es de 40 horas para convencer a los clientes y 60 horas para el trabajo burocrático. El beneficio obtenido por prestar dinero es 1/3 mayor que el de captar depósitos. ¿Cuántas operaciones de cada tipo le conviene realizar a la entidad para obtener el máximo beneficio?

Seguir los siguiente pasos:

Expresar mediante inecuaciones el recinto definido.
Dar la función objetivo.
¿Cuántas operaciones realiza de cada tipo?

INFORMACIÓN

	HORAS REQUERIDAS		
OPERACION	Convencimiento	Trámites	BENEFICIOS
Captación de depósitos	1	1	a
Préstamos	1	2	(1+1/3)a
Disponibilidad de tiempo	40	60	

PLANTEAMIENTO

X_1	Número de operaciones de captación a realizar en el período
X_2	Número de operaciones de colocación a realizar en el período

El beneficio a $X_1 + \left(1+\frac{1}{3}\right)$ a X_2 sería:

$$a\,X_1 + a\,X_2 + \frac{a\,X_2}{3} = \frac{3a\,X_1 + 3a\,X_2 + a\,X_2}{3} = \frac{3a\,X_1 + 4a\,X_2}{3}$$

Siendo a un valor positivo: $Z = \frac{a\,(3X_1 + 4X_2)}{3}$

Cualquiera que sea el valor de **a**, afecta por igual tanto **a X_1** como **a X_2**, por tanto se puede omitir. Su único efecto es en el valor de la función objetivo que resultará dividida entre **a**.

$$\text{MAX } Z = X_1 + \frac{4}{3} X_2$$

Sujeta a:

1. $X_1 + X_2 \leq 40$
2. $X_1 + 2X_2 \leq 60$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

17. Una persona tiene 500000 u.m. para invertir en dos tipos de acciones A y B. El tipo A tiene bastante riesgo con un interés anual del 10% y el tipo B es bastante seguro con un interés anual del 7%. Decide invertir como máximo 300000 u.m. en A y como mínimo 100000 u.m. en B, e invertir en A por lo menos tanto como en B. ¿Cómo deberá invertir sus 500000 u.m. para maximizar sus intereses anuales?

INFORMACIÓN

ACCIONES	INTERES ANUAL	CONDICIONES DE INVERSION
A	10%	No más de 300000 u.m. Por lo menos tanto como en B
B	7%	No menos de 100000 u.m.

PLANTEAMIENTO

X_1	Cantidad a invertir en acciones A
X_2	Cantidad a invertir en acciones B

Modelo (primal):

$$MAX\ Z = 0{,}1\ X_1 + 0{,}07\ X_2$$

Sujeta a:

$$
\begin{array}{lrcrcr}
1. & X_1 & + & X_2 & \leq & 500000 \\
2. & X_1 & & & \leq & 300000 \\
3. & & & X_2 & \geq & 100000 \\
4. & X_1 & & & \geq & X_2 \\
 & & & X_1, X_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Resumiendo:

$$MAX\ Z = 0{,}1\ X_1 + 0{,}07\ X_2$$

Sujeta a:

$$
\begin{array}{lrcrcr}
1. & X_1 & + & X_2 & \leq & 500000 \\
2. & X_1 & & & \leq & 300000 \\
3. & & & X_2 & \geq & 100000 \\
4. & X_1 & - & X_2 & \geq & 0 \\
 & & & X_1, X_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

18. • Se está programando la producción de un producto para cada una de las próximas cuatro semanas. El costo de la producción de una unidad es de 100 u.m. para las dos primeras semanas y 150 u.m. para las dos últimas. Las demandas son de 70, 80, 90 y 100 unidades semanales y tienen que ser satisfechas. La planta puede producir un máximo de 90 unidades; además se pueden emplear horas extra durante la tercera y cuarta semana. Esto incrementa la producción semanal en 20 unidades pero el costo de producción también sube en 58 u.m. por unidad producida en horas extra. El exceso de producción puede ser almacenado a un costo unitario de 3 u.m. por semana. ¿Cómo programar la producción de tal manera que minimice los costos totales? Formular el modelo.

INFORMACIÓN

COSTO DE PRODUCCIÓN					
Semana	Producción normal	Producción extra	Demandas	Costo de almacenaje	Capacidad producción
1	100	-	70	3	90
2	100	-	80	3	90
3	150	208	90	3	110
4	150	208	100	3	110

PLANTEAMIENTO

X_i	Número de unidades producidas en tiempo normal en la semana i (i = 1, 2, 3, 4)
Y_i	Número de unidades producidas en tiempo extra en la semana j (j = 3, 4)
I_i	Inventario final para el período i (i = 1, 2, 3, 4)

Modelo (primal):

$$MIN\ W = 100\ X_1 + 100\ X_2 + 150\ X_3 + 150\ X_4 + 208\ Y_3 + + 208\ Y_4 + 3\ I_1 + 3\ I_2 + 3\ I_3 + 3\ I_4$$

Sujeta a:

1. $X_1 \leq 90$
2. $X_2 \leq 90$
3. $X_3 \leq 90$
4. $X_4 \leq 90$
5. $Y_3 \leq 20$
6. $Y_4 \leq 20$
7. $X_1 - I_1 = 70$
8. $X_2 + I_1 - I_2 = 80$
9. $X_3 + Y_3 + I_2 - I_3 = 90$
10. $X_4 + Y_4 + I_3 - I_4 = 100$

$$X_1, X_2, X_3, X_4, Y_3, Y_4, I_1, I_2, I_3, I_4 \geq 0$$

19. • Un pastelero tiene 150 kg de harina, 22 kg de azúcar y 275 kg de mantequilla para hacer dos tipos de pasteles P y Q. Para hacer una docena de pasteles de tipo P necesita 3 kg de harina, 1 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla y para hacer una docena de tipo Q necesita 6 kg de harina, 0,5 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla.

El beneficio que obtiene por una docena de tipo P es 20 kg y por una docena de tipo Q es 30. Hallar, utilizando las técnicas de programación lineal, el número de docenas que tiene que hacer de cada clase para que el beneficio sea máximo.

INFORMACIÓN

Pasteles	Harina	Azúcar	Mantequilla	Beneficio/docena
P	3	1	1	20
Q	6	0,5	1	30
Disponibles	150	22	275	

PLANTEAMIENTO

X_i	Número de docenas de pasteles de tipo i (i = p, q) a producir en el período

Modelo (primal):

$$MAX\ Z = 20\ X_P + 30\ X_Q$$

Sujeta a:

1. $3X_P + 6\ X_Q \leq 150$
2. $X_P + 0{,}5\ X_Q \leq 22$
3. $X_P + X_Q < 275$

$$X_P, X_Q \geq 0$$

20. • Una compañía manufactura tres productos A, B y C. Cada unidad de A requiere una hora de ingeniería, ocho horas de mano de obra directa y cuatro libras de material. Una unidad de B necesita tres horas de ingeniería, tres horas de manó de obra directa y tres libras de material. Cada unidad de producto C requiere dos horas de ingeniería, cuatro horas de mano de obra directa y dos libras de material. Se dispone de 80 horas de ingeniería, 800 horas de mano de obra directa o 300 libras de material cada mes. Las utilidades son como sigue:

Producto A		Producto B		Producto C	
Ventas (unid)	Utilidad /unid	Ventas (unid)	Utilidad /unid	Ventas (unid)	Utilidad /unid
0-40	10	0-50	6	0-100	5
41-100	9	51-100	4	Más de 100	4
101-150	8	Más de 3	100		
Más de 150	6				

PLANTEAMIENTO

Dado que las utilidades están por rango de ventas, la definición de variables se hará explícita así:

X_{1A}	Número de unidades del producto A vendidas con utilidad de 10 u.m.
X_{2A}	Número de unidades del producto A vendidas con utilidad de 9 u.m.
X_{3A}	Número de unidades del producto A vendidas con utilidad de 8 u.m.
X_{4A}	Número de unidades del producto A vendidas con utilidad de 6 u.m.
X_{1B}	Número de unidades del producto B vendidas con utilidad de 6 u.m.
X_{2B}	Número de unidades del producto B vendidas con utilidad de 4 u.m.
X_{3B}	Número de unidades del producto B vendidas con utilidad de 3 u.m.
X_{1C}	Número de unidades del producto C vendidas con utilidad de 5 u.m.
X_{2C}	Número de unidades del producto C vendidas con utilidad de 4 u.m.

Modelo (Primal):

$$MAX\ Z = 10\,X_{1A} + 9\,X_{2A} + 8\,X_{3A} + 6\,X_{4A} + 6\,X_{1B} + 4\,X_{2B} + 3\,X_{3B} + 5\,X_{1C} + 4\,X_{2C}$$

Sujeta a:

1. $X_{1A} < 40$
2. $X_{2A} > 41$
3. $X_{2A} < 100$
4. $X_{3A} > 101$
5. $X_{3A} < 150$
6. $X_{4A} > 151$
7. $X_{1B} < 50$
8. $X_{2B} > 51$
9. $X_{2B} < 100$
10. $X_{3B} > 101$
11. $X_{1C} < 100$
12. $X_{2C} > 101$

$X_{1A}, X_{2A}, X_{3A}, X_{4A}, X_{1B}, X_{2B}, X_{3B}, X_{1C}, X_{2C} \geq 0$

21. La compañía *El Cóndor* opera un avión que transporta tanto a pasajeros como carga entre los aeropuertos de Bogotá, Medellín y Cali. Debido a los elevados costos de operación, el avión no sale hasta que todas sus bodegas hayan sido cargadas. El avión tiene tres bodegas: inferior, media y superior. Debido a las limitaciones de espacio que hay, el avión no puede llevar más de 100 toneladas de carga en cada viaje: la bodega inferior debe llevar máximo 40 toneladas de carga, la bodega intermedia debe transportar un tercio de la carga de la bodega inferior y la bodega superior debe llevar 2/5 partes de la carga de la bodega inferior. Sin embargo, no se deben llevar más de 60 toneladas de carga entre las bodegas media y superior.

Las utilidades por el transporte son de 8000 u.m. por tonelada de carga en la bodega inferior, 10000 u.m. por tonelada en la intermedia y 12000 u.m. en la superior, después de deducir los gastos. Plantear un modelo de PL para determinar la forma de cargar el avión que maximice las utilidades.

INFORMACIÓN

BODEGAS	LIMITE (toneladas)		UTILIDADES / TONELADA
Superior	2/5 de bodega inferior	$\leq$ 60	12 000
Media	1/3 de bodega inferior		10 000
Inferior	40		8 000
Total toneladas: debe ser menor o igual a 100			

PLANTEAMIENTO

X_1	Toneladas de carga a transportar en la bodega inferior
X_2	Toneladas de carga a transportar en la bodega intermedia
X_3	Toneladas de carga a transportar en la bodega superior

Modelo (primal):

$$\text{MAX } Z = 8000\,X_1 + 10000\,X_2 + 12000\,X_3$$

Sujeta a:

1. $X_1 + X_2 + X_3 \leq 100$
2. $X_1 \leq 40$
3. $X_1 = 3X_2$
4. $X_1 = \frac{5}{2} X_3$
5. $X_2 + X_3 \leq 60$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

Resumiendo:

$$MAX\ Z = 8000\ X_1 + 10000\ X_2 + 12000\ X_3$$

Sujeta a:

$$\begin{array}{lllllll}
1. & X_1 & + & X_2 & + & X_3 & \leq & 100 \\
2. & X_1 & & & & & \leq & 40 \\
3. & X_1 & - & 3X_2 & & & = & 0 \\
4. & X_1 & & & - & \frac{5}{2}X_3 & = & 0 \\
5. & & & X_2 & + & X_3 & \leq & 60 \\
 & & & X_1, X_2, X_3 & & & \geq & 0
\end{array}$$

22. Se va a organizar una planta de un taller de automóviles donde van a trabajar electricistas y mecánicos; por necesidades de mercado, es necesario que el número de mecánicos sea igual o mayor al número de electricistas y que el número de mecánicos no supere al doble quē el de electricistas. En total hay disponibles 20 electricistas y 30 mecánicos. El beneficio de la empresa por jornada es 25000 u.m. por electricista y 20000 por mecánico. ¿Cuántos trabajadores de cada clase deben elegirse para obtener el máximo beneficio?

INFORMACIÓN

Número de mecánicos > Número de electricistas
Número de mecánicos < Doble número de electricistas

Disposición	Beneficios por jornada
20 electricistas	25000
30 mecánicos	20000

PLANTEAMIENTO

X_1	Número de mecánicos a elegir por jornada
X_2	Número de electricistas a elegir por jornada

Modelo (primal):

$$MAX\ Z = 20000\ X_1 + 25000\ X_2$$

Sujeta a:

1. $X_1 \leq 30$
2. $X_2 \leq 20$
3. $X_1 - X_2 \geq 0$
4. $X_1 - 2X_2 \leq 0$

$X_1, X_2 \geq 0$

23. Un carpintero tiene que construir mesas rectangulares de tal manera que las dimensiones no sobrepasen 2 m y la suma de su dimensión mayor y el doble de la menor no sobrepase 4 m. ¿Cuál es el máximo valor del perímetro de dichas mesas?

INFORMACIÓN

Ninguna dimensión supera 2 m
Suma de la dimensión mayor + dos veces la menor no sobrepase 4 m

PLANTEAMIENTO

X_1	Dimensión menor de una mesa
X_2	Dimensión mayor de una mesa

Modelo (primal):

$$MAX\ Z = 2\ X_1 + 2\ X_2$$

Sujeta a:

1. $X_1 \leq 2$
2. $X_2 \leq 2$
3. $2X_1 + X_2 \leq 4$

$X_1, X_2 \geq 0$

24. Una empresa fabrica dos tipos de colonia: A y B. La primera contiene un 15% de extracto de jazmín, un 20% de alcohol y el resto es agua; la segunda lleva un 30% de extracto de jazmín, un 15% de alcohol y el resto es agua. Diariamente se dispone de 60 litros de extracto de jazmín y de 50 litros de alcohol. Cada día se pueden producir como máximo 150 litros de la colonia B. El precio de venta por litro de la colonia A es de 500 u.m. y el de la colonia B es 2000 u.m. Hallar los litros de cada tipo que deben producirse diariamente para que el beneficio sea máximo.

INFORMACIÓN

Colonia	Jazmín	Alcohol	Precio venta/litro	Producción máxima
A	15%	20%	500	-
B	30%	15%	2000	150 litros
Disponible (litro/día)	60	50		

PLANTEAMIENTO

X_A	Número de litros de colonia A a preparar diariamente
X_B	Número de litros de colonia B a preparar diariamente

Modelo (primal):

$$MAX\ Z = 500\ X_A + 2000\ X_B$$

Sujeta a:

1. $0{,}15\ X_A + 0{,}3 X_B \leq 60$
2. $0{,}2 X_A + 0{,}15\ X_B \leq 50$
3. $X_B \leq 150$

$$X_A, X_B \geq 0$$

25. En una división de productos químicos de la empresa Química Colombia se elaboran los productos A y B que requieren de dos operaciones que son las mismas para cada uno. De la producción de B resulta un subproducto C, parte del cual puede ser vendido hasta 12 unidades. Lo demás tiene que ser destruido por carencia de demanda. Las utilidades unitarias para los productos A y B son 4 u.m. y 9 u.m. respectivamente. El subproducto C se vende a 2 u.m. la unidad (es utilidad). Si C no se puede vender, el costo de destrucción es de 1 u.m. El proceso aporta 3,1 unidades de C por cada unidad de B producida. Los pronósticos indican que la demanda de A y B es limitada. Los tiempos de proceso unitarios son: A, 2,6 horas en operación 1 y 3,3 horas en operación 2; B, 4,7 horas en la operación uno y 4,6 horas en operación dos. Tiempos disponibles: 60 horas para la operación 1 y 65 horas en la operación 2. Suponga que los productos son divisibles. La siguiente formulación resuelve el problema.

Modelo (primal):

$$\text{MAX } Z = 4\,X_1 + 9\,X_2 + 2\,X_3 - X_4$$

Sujeta a:

1. $2{,}6\,X_1 + 4{,}7\,X_2 \leq 60$
2. $3{,}3\,X_1 + 4{,}6\,X_2 \leq 65$
3. $X_3 \leq 12$
4. $3{,}1\,X_2 = X_3 + X_4$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

Resumiendo :

$$\text{MAX } Z = 4\,X_1 + 9\,X_2 + 2\,X_3 - X_4$$

Sujeta a:

1. $2{,}6\,X_1 + 4{,}7\,X_2 \leq 60$
2. $3{,}3\,X_1 + 4{,}6\,X_2 \leq 65$
3. $X_3 \leq 12$
4. $3{,}1\,X_2 - X_3 - X_4 = 0$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

Se pide:

a) Explicar el significado de cada variable y cada restricción en el modelo anterior.

b) Qué se puede pronosticar del valor de X_4 según la convención de ser positivo y dado que X_3 es menor o igual que 12.

SOLUCIÓN

X_1 Cantidad de producto A a producir

X_2 Cantidad de producto B a producir

X_3 Cantidad de subproducto C obtenido a partir del producto B

X_4 Cantidad de subproducto C destruido

a) Las restricciones 1 y 2 señalan la capacidad de los procesos. La restricción 3 indica la máxima demanda de subproducto C. El lado derecho de la restricción 4 es la totalidad de subproducto C que se genera; el lado izquierdo indica cuánto de C se produce por cada unidad de B.

b) Si la cantidad medida de C es menor que 12 unidades, esto es, $X_3 < 12$ entonces X_4=0.

26. Una fábrica que produce paraguas tiene dos tipos de inspectores (A y B), quienes deben ser asignados para control de calidad. La política de la fábrica exige que por lo menos 18000 paraguas sean inspeccionados a diario (ocho horas de trabajo). Los inspectores de clase A pueden revisar 250 paraguas por hora, con una precisión del 98%, mientras que los inspectores clase B pueden revisar 150 con 95% de precisión. En el mercado actual un inspector clase A cobra 450 u.m. por hora y el B, 350 u.m. por hora. Cada equivocación del inspector cuesta 100 u.m. a la fábrica. Hay ocho inspectores clase A y 10 clase B. El director de la fábrica quiere determinar la asignación óptima del personal de inspección.

INFORMACIÓN

Inspector	Inspecciones/día	Precisión	Costo/hora	Costo falla	Disponibilidad
A	250*8 = 2000	98%	450	100	8
B	150*8 = 1200	95%	350		10
	18000 / día				

PLANTEAMIENTO

X_A	Número de inspectores de clase A a utilizar en un día de ocho horas
X_B	Número de inspectores de clase B a utilizar en un día de ocho horas

Modelo (primal):

$$\text{MIN } W = 3600\ X_A + 2800\ X_B + 100 * 0{,}02 * 2000\ X_A + 100 * 0{,}05 * 1200\ X_B$$

Sujeta a:

$$
\begin{array}{llcccl}
1. & 2000X_A & + & 1800\,X_B & \geq & 18000\\
2. & X_A & & & \leq & 8\\
3. & & & X_B & \leq & 10\\
 & & & X_A, X_B & \geq & 0
\end{array}
$$

Resumiendo:

$MIN\ W = 7600\ X_A + 8800\ X_B$

$$
\begin{array}{llcccl}
1. & 2000X_A & + & 1800\,X_B & \geq & 18000\\
2. & X_A & & & \leq & 8\\
3. & & & X_B & \leq & 10\\
 & & & X_A, X_B & \geq & 0
\end{array}
$$

27. Una fábrica textil elabora prendas de punto de calidades A y B. Las de calidad A se fabrican con una unidad de lana y dos unidades de fibra sintética y las de calidad B con dos unidades de lana y una de fibra sintética. Los beneficios obtenidos en la venta de las prendas son de 1500 u.m. para las de calidad A y 1000 u.m. para las de calidad B. Sabiendo que sólo se dispone de 180 unidades de lana y 240 de fibra sintética, se pide:

a) Determinar cuántas prendas de cada tipo deben elaborarse para obtener un beneficio máximo si la producción no puede ser superior a 1000 prendas.

INFORMACIÓN

Calidad de prenda	Lana (unidades)	Fibra sintética (unidades)	Beneficios
A	1	2	1500 u.m.
B	2	1	1000 u.m.
Disponible	180	240	

PLANTEAMIENTO

X_A	Número de prendas tipo A a elaborar
X_B	Número de prendas tipo B a elaborar

Modelo (primal):

$$MAX\ Z = 1500\ X_A + 1000\ X_B$$

Sujeta a:

1. $X_A + 2X_B \leq 180$
2. $2X_A + X_B \leq 240$
3. $X_A + X_B \leq 1000$

$$X_A, X_B \geq 0$$

28.

Una compañía fabrica dos modelos de sombrero: Bae y Viz. La fabricación de los sombreros se realiza en las secciones de moldeado, pintura y montaje. La fabricación de cada modelo Bae requiere dos horas de moldeado, tres de pintura y una de montaje; la fabricación del modelo Viz requiere tres horas de moldeado, dos de pintura y una de montaje. Las secciones de moldeado y pintura disponen, cada una, de un máximo de 1500 horas cada mes y la de montaje de 600.

Si el modelo Bae se vende a 10000 u.m. y el modelo Viz a 12000 u.m., ¿qué cantidad de sombreros de cada tipo ha de fabricar para maximizar el beneficio mensual?

INFORMACIÓN

Modelo	Moldeado	Pintura	Montaje	Precio venta (u.m.´)
BAE	2	3	1	10000
VIZ	3	2	1	12000
Disponible (horas)	1500	1500	600	

PLANTEAMIENTO

X_1	Número de sombreros modelo BAE a producir mensualmente
X_2	Número de sombreros modelo VIZ a producir mensualmente

Modelo (primal):

$$MAX\ Z = 10000\ X_1 + 12000\ X_2$$

Sujeta a: