

# **CUBRIMIENTOS RAMIFICADOS Y FIBRACIONES ELÍPTICAS**

JUAN D. VÉLEZ  
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA, SEDE MEDELLÍN

OCTUBRE DE 2007



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>v</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Haces fibrados . . . . .	1
1.1.1. Ejemplos de fibrados . . . . .	7
1.1.2. Fibrado asociado a un fibrado principal . . . . .	11
1.1.3. Descripción combinatoria de un fibrado con fibra discreta . . . . .	11
1.1.4. Monodromía de un fibrado . . . . .	16
1.2. Fibraciones singulares . . . . .	24
1.2.1. Recubrimientos ramificados . . . . .	24
1.2.2. Fibraciones elípticas singulares . . . . .	28
<b>2. Fibraciones discretas</b>	<b>33</b>
2.1. Introducción . . . . .	33
2.2. Conceptos y lemas básicos . . . . .	33
2.3. El problema de coalescencia de fibras singulares . . . . .	42
<b>3. Fibraciones elípticas</b>	<b>51</b>
3.1. Introducción . . . . .	51
3.2. El problema de factorización minimal . . . . .	51
3.3. Clasificación de Kodaira de fibras singulares . . . . .	54
3.3.1. Deformaciones de familias (Morsificación) . . . . .	56
3.4. El grupo de clases de mapeos del toro . . . . .	60
3.5. El teorema de coalescencia para fibraciones elípticas . . . . .	71
3.6. Preguntas abiertas . . . . .	74

**AGRADECIMIENTOS**

El autor quiere agradecer a las personas e instituciones que hicieron posible este trabajo. Primero que todo, al profesor Carlos Cadavid de la Universidad de EAFIT, sin el cual este trabajo hubiese sido imposible, al Profesor Mizuho Ishizaka, de la Universidad de Waseda, Japón, por sus comentarios y sugerencias y al Profesor David Mond, de la Universidad de Warwick, por su generosa colaboración y sugerencias. Quiero agradecer muy especialmente a la Facultad de Ciencias y La Escuela de Matemáticas de la Universidad Nacional, Sede Medellín (Proyecto de Investigación SFC 0-30).

# Introducción

Sea  $E$  una 4-variedad compacta y orientada y sea  $D$  el disco abierto unitario. Una *fibración de Lefschetz* sobre  $D$ ,  $f : E \rightarrow D$ , es una función suave con sólo un número finito de valores críticos  $Q = \{q_1, \dots, q_k\}$  tal que en cada fibra singular es *simple de tipo Lefschetz*. Esto significa que hay un sólo punto crítico  $p_i$  en la fibra y existen cartas a abiertos de  $\mathbb{C}^2$  que preservan orientación,  $(U_{p_i}, \varphi_i) \rightarrow (V_{f(p_i)}, \psi_i)$ , para las cuales  $\psi_i f \varphi_i^{-1}(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2$ . Si además para cada  $q$  que no sea un valor crítico la fibra  $f^{-1}(q)$  es difeomorfa a una superficie orientada y cerrada de género 1 (un toro) entonces se dice que  $f$  es una *fibración de Lefschetz elíptica*.

Por otro lado, si  $E$  es una superficie orientada y compacta de dimensión 2 y  $\psi_i f \varphi_i^{-1}(z) = z^2$ , se dice que  $f$  es una *función recubridora ramificada simple*. Esta noción puede pensarse como análoga a la noción de fibración de Lefschetz pero en la situación en la que la fibra tiene dimensión cero. En este caso, si  $E$  es una superficie conexa, la fibra es discreta de dimensión cero y con cardinalidad fija.

Una gran variedad de fenómenos y preguntas relacionadas con las fibraciones elípticas tienen sus correspondientes análogos en la teoría de cubrimientos ramificados. Esto hace posible tratar en forma unificada muchos problemas que aparecen en ambas teorías bajo una sola óptica, así como conjeturar e intuir fenómenos sobre fibraciones elípticas por ser estos más transparentes y sencillos en la teoría de recubrimientos ramificados, una dimensión (compleja) más baja. Un ejemplo de ello es el *teorema de coalescencia* (teorema 2.3.6), el cual aparece en forma natural en la teoría de recubrimientos ramificados y que permite conjeturar su análogo en fibraciones elípticas (teorema 3.5.3), del cual se dará una demostración en el capítulo 3. Como se verá en este trabajo, las analogías que naturalmente ocurren en ambas categorías se reflejan en una serie de problemas algebraicos en el grupo modular  $PSL(2, \mathbb{Z})$  que tienen su contraparte en el grupo simétrico  $\mathcal{S}_n$ , con  $n$  igual a la cardinal-

idad de la fibra, como se puede ver, por ejemplo, si se compara el lema 2.3.4 y el teorema 3.4.2.

Uno de los problemas centrales que ha motivado este trabajo es la llamada *conjetura de factorización minimal*, formulada por el profesor M Ishizaka [15] y en forma independiente por el profesor C. Cadavid y demostrada por el autor. Esta conjetura apareció originalmente como una propuesta para generalizar el *número de Milnor* [8], y como veremos, está íntimamente relacionada con otras conjeturas importantes, tales como la conjetura de Szpiro [37]. Para explicar su contenido quiero comenzar por fijar la notación: sea  $\phi : E \rightarrow D$  una función holomorfa, sobreyectiva y propia de una superficie compleja y conexa  $E$  en el disco unitario abierto  $D \subset \mathbb{C}$  que tenga a  $0 \in D$  como su único valor crítico. Un teorema clásico de Ehresman (observación 1.2.6) garantiza que la restricción  $\phi : E - \phi^{-1}(0) \rightarrow D - \{0\}$  es un fibrado con fibra difeomorfa a una superficie cerrada, conexa y orientable de género  $g$ . Se supondrá en este trabajo que  $g \geq 1$  y que  $E$  es *relativamente minimal* lo que significa que no es posible encontrar una esfera embebida en  $E$  con auto intersección  $-1$  (ver definición 1.2.7). En algunos casos especiales es posible deformar a  $\phi$  en una nueva función  $\phi' : E' \rightarrow D$  la cual tiene un número finito de valores singulares y en la que cada fibra singular es *simple de tipo Lefschetz* o es una fibra suave múltiple. Que una fibra sea suave múltiple significa que  $\phi^{-1}(q)$  es un divisor de la forma  $mI_0$ , donde  $I_0$  denota un *divisor primo suave*. Un teorema debido a Moishezon afirma que si  $g = 1$  entonces  $\phi$  puede *deformarse* a una función con estas propiedades [27]. La función  $\phi' : E' \rightarrow D$  es llamada una *morsificación* de  $\phi : E \rightarrow D$ , que se supondrá sin fibras múltiples suaves en el caso en el que  $g > 1$ . No es difícil ver que en el caso elíptico ( $g = 1$ ) el número de fibras singulares simples de Lefschetz de la fibración  $\phi : E' \rightarrow D$ ,  $N(\phi)$ , es igual a la característica de Euler de  $E'$  y por tanto igual a la característica de Euler de  $E$ , lo que muestra que es *independiente de la morsificación* (ver la introducción del capítulo 3). Por otro lado, la *monodromía total* de la fibración  $\phi$  se define como la representación de monodromía de un bucle simple cerrado, recorrido en dirección positiva, y que encierre a  $0$ , el único punto crítico de  $\phi$  (definición 1.1.4). Ahora, cada morsificación  $\phi' : E' \rightarrow D$  induce una factorización de esta monodromía como producto de  $N(\phi)$  giros de Dehn derechos en el grupo de difeomorfismos de la fibra genérica, módulo isotopía, *el mapping class group de la fibra*, (ver sección 1.1.4 del capítulo 1 y la introducción del capítulo 3). *El hecho de que dicho número sea independiente de la escogencia de la factorización particular sugiere que esta factorización deba ser en cierta forma distinguida entre*

todas las posibles factorizaciones de la monodromía total en giros de Dehn derechos en el grupo de clases de mapeos. Ha sido conjeturado que dicha factorización es minimal. Es decir, que cualquier factorización en el grupo de clases de mapeos de la monodromía total en giros de Dehn derechos tiene por lo menos  $N(\phi)$  factores. En el capítulo 3 se dará una prueba de esta conjetura para fibraciones elípticas (teorema 3.4.11). Esta prueba es diferente a la prueba original dada en [7] y descansa en teoremas más fuertes sobre el grupo modular que han sido encontrados por el autor recientemente y que serán presentados en el capítulo 3, sección 3.4, teoremas 3.4.1 y 3.4.2. Si el género de la fibra genérica es mayor que 1, la conjetura resulta ser falsa y un contraejemplo fue dado recientemente por M. Ishizaka [15].

Este problema es un ejemplo de una clase especial de problemas en teoría de grupos llamados *problemas de crecimiento* (*growth problems*) que pueden ser descritos en forma general como sigue: sea  $G$  un grupo y sea  $S \subset G$  tal que cada  $f \in G$  puede ser escrito como  $f = s_1 \cdots s_r$ , en donde cada  $s_i \in S$ . La  $S$ -longitud de  $f$  se define como

$$l_S(f) = \min\{r : f = s_1 \cdots s_r \text{ para algún } s_i \in S\}$$

y la  $S$ -longitud estable de  $f$  se define como

$$\|f\|_S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_S(f^n)}{n}.$$

El objetivo es calcular o al menos estimar estos números en términos de información sobre  $f$ . En el caso donde  $G$  es el grupo de clases de mapeos  $\mathcal{M}_g$  y donde  $S$  es la colección de elementos de torsión o la colección de conmutadores  $C_g$  o la colección de los giros de Dehn derechos  $D_g^+$ , estos problemas han sido estudiados intensamente en investigaciones recientes, ya que ocurren naturalmente en distintos contextos topológicos [1], [18], [19], [21], [35] y las referencias que allí se dan. El caso  $S = D_g^+$  está relacionado con preguntas sobre la *geografía de 4-manifolds simplécticos cerrados* y el caso  $S = PD_g^+$  de todas las potencias positivas de giros de Dehn derechos está relacionado con los análogos de la *desigualdad de Szpiro* [40], la cual mide la obstrucción a coalescer fibras singulares en una *fibración elíptica semiestable sobre una curva algebraica* [20].

La conjetura de factorización minimal está relacionada con otros dos problemas que se discutirán en este trabajo, a los que he denominado *problemas de la coalescencia de fibras singulares*. El problema para fibraciones discretas es el siguiente: dado un cubrimiento ramificado general al disco cerrado

unitario  $\Phi : X \rightarrow \overline{D}$ , de grado  $d$ , ¿bajo que condiciones es posible coalescer o reunir todas las fibras singulares en una sola? En forma precisa, ¿cuándo es posible encontrar un recubrimiento ramificado con *una sola fibra singular*,  $\Phi' : X' \rightarrow \overline{D}$ , que sea  $b$ -equivalente (ver definición 2.2.3) a  $\Phi : X \rightarrow \overline{D}$ ? El teorema 2.3.6 da condiciones necesarias y suficientes para que ello ocurra. En forma precisa el resultado demostrado es el siguiente: sea  $\Phi : X \rightarrow \overline{D}$  un recubrimiento ramificado general de grado  $d$  con valores críticos  $Q = \{q_1, \dots, q_k\} \subset D$ , sea  $\sigma = \lambda(S^1)$  la monodromía alrededor del círculo frontera, recorrido en sentido positivo y sea  $l(\sigma)$  la longitud de la permutación  $\sigma$ . Entonces  $\chi(X) = l(\sigma)$  si y sólo si existe un recubrimiento ramificado  $\Phi' : X' \rightarrow \overline{D}$   $b$ -equivalente a  $\Phi : X \rightarrow \overline{D}$ , donde  $\chi$  denota la característica de Euler del espacio correspondiente.

Para fibraciones elípticas se demostrará un resultado análogo para todas las fibraciones sin fibras singulares múltiples. Este teorema es demostrado en el capítulo 3 y en forma precisa afirma lo siguiente (teorema 3.5.3): sea  $\phi : E \rightarrow D$  una fibración elíptica singular al disco abierto sin fibras múltiples. Denótese por  $C_r$  a la frontera de un disco cerrado  $\overline{D}_r$  (orientada en sentido positivo) que contenga todos los valores críticos de  $\phi$  en su interior. *Entonces  $\phi$  es  $b$ -equivalente a una fibración singular con una sola fibra singular sobre 0,  $\phi' : E' \rightarrow D$ , si y sólo si la monodromía total  $\lambda([C_r])$  es conjugada a una de las ocho posibles matrices de la lista de Kodaira (3.3) y  $\chi(E)$  es igual al número de factores en la factorización canónica minimal correspondiente a dicha matriz.*

Este problema ha sido estudiado por algunos autores para el caso particular en el que la fibración sólo posee tres fibras singulares [31] y tiene una gran importancia por estar relacionado con la famosa desigualdad de Szpiro, demostrada por Szpiro en 1984, y la cual afirma lo siguiente: sea  $f : E \rightarrow C$  una fibración elíptica no trivial de una superficie suave definida sobre un campo algebraicamente cerrado de característica cero, donde  $f$  es un mapeo plano y propio a una curva proyectiva suave de género  $g$  definida sobre  $k$ . Entonces si  $s$  denota el número de fibras singulares y  $\Delta_E$  el divisor discriminante, se tiene que  $\text{grad}(\Delta_E) \leq 6(2g - 2 + s)$ . Esta desigualdad le permitió a Szpiro formular su famosa conjetura la cual tiene profundas consecuencias en teoría de números, entre ellas la de implicar una de las más importantes conjeturas de la matemática, la *conjetura ABC*, [37]. La *conjetura de Szpiro* puede pensarse como una generalización a esquemas aritméticos de la de-

sigualdad anterior. En forma precisa: sea

$$E : y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$$

una curva elíptica sobre  $\mathbb{Z}$ . Sea  $\Delta_E$  el discriminante de un modelo minimal. Para cada divisor  $p$  de  $\Delta_E$ , supóngase que la reducción mod  $p$  es suave o tienen singularidades de tipo nodal. Sea  $\Gamma_E$  el conductor de  $E$ , (definido como  $\prod_{p|\Delta_E} p$ ). Entonces, para cada  $\varepsilon > 0$  existe una constante  $C(\varepsilon)$  tal que para todas las curvas elípticas se tiene que

$$\log |\Delta_E| \leq C(\varepsilon) + (6 + \varepsilon) \log \Gamma_E.$$

La relación del teorema de Szpiro con nuestro trabajo se da en el caso en el que  $C$  es la esfera  $S^2$  y en el que el teorema puede reformularse como una pregunta en el grupo modular. Su formulación equivalente es la siguiente: si  $I = G_1^{b_1} \cdots G_s^{b_s}$  es una factorización de la identidad en conjugados de  $U$  en  $SL(2, \mathbb{Z})$ , con  $b_i \geq 1$ , entonces debe darse que  $\sum b_i \leq 6(s - 2)$ . En el capítulo 3, sección 3.4, se desarrollarán métodos que permiten atacar este estilo de pregunta usando métodos puramente combinatorios.

En el siguiente capítulo se presentarán los preliminares topológicos y algebraicos necesarios para la comprensión de este trabajo.



# Capítulo 1

## Preliminares

Este capítulo tiene como propósito fijar la notación y presentar algunos conceptos especializados que no son estándar en la literatura, y por ende de difícil acceso, y sin los cuales se dificultaría la comprensión de este trabajo de investigación. Para aquellas proposiciones estándar daré referencias, principalmente [6], donde el lector podrá encontrar pruebas detalladas y [36], para un tratamiento más general y completo del tema. Se supondrá que el lector está familiarizado con conceptos básicos de la topología diferencial y la geometría algebraica. Referencias estándar para este material son [5], [13] y [14].

### 1.1. Haces fibrados

En esta sección se darán las definiciones y resultados básicos sobre haces fibrados y su monodromía. Se hará una presentación que permita tratar de manera unificada fibraciones con fibra de dimensión cero (espacios recubridores) y elípticas de dimensión uno no singulares, dos tipos de objetos centrales en esta investigación.

Se entenderá por *n-variedad* un espacio topológico  $M$  Hausdorff, segundo contable, que admite un cubrimiento con abiertos homeomorfos a  $\mathbb{R}^n$  o al semiespacio superior (con borde)  $\mathbb{H}^n$  en  $\mathbb{R}^n$ , de todos los elementos  $(u_1, \dots, u_n)$  con  $u_n \geq 0$ , permitiendo de esta manera que  $M$  posea frontera. Se supondrá que el entero  $n$  es el mismo para todos los abiertos y se llamará la *dimensión* de  $M$ . Si  $M$  carga además una estructura suave o compleja se llamará variedad *suave o compleja*, respectivamente. Recuérdese que una estructura

suave (respectivamente, compleja) está dada por un atlas  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  para  $M$  con funciones de transición  $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$  suaves (respectivamente, holomorfas). Dar una estructura suave o diferenciable equivale a dotar a  $M$  de un haz (sheaf) estructural  $\mathcal{O}_M$ , sub-haz (subsheaf) del haz de funciones continuas a  $\mathbb{R}$  (respectivamente,  $\mathbb{C}$ ) localmente isomorfa al haz de funciones suaves en un abierto de  $\mathbb{H}^n$  (respectivamente,  $\mathbb{C}^n$ ) ([6], Pág. 54), en el caso en el que  $M$  sea una variedad suave (respectivamente, compleja). Cuando  $M$  sea un compleja se supondrá que  $M$  no posee frontera. Como es costumbre, una variedad de dimensión compleja 1 se llamará una *superficie de Riemann*, y si su dimensión es 2, una *superficie compleja*.

**Definición 1.1.1** Sea  $M$  una  $n$ -variedad. Un haz fibrado sobre  $M$  (o simplemente un fibrado) es una cuádrupla  $(E, \pi, F, M)$ , donde  $E$  y  $F$  son manifolds y  $\pi : E \rightarrow M$  es una función continua y sobreyectiva. Además, para cada punto de  $M$  debe existir un entorno abierto  $U \subset M$  y un homeomorfismo  $\Phi_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$  que satisfaga las siguientes dos condiciones:

1. El diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\Phi_U} & U \times F \\ \pi \searrow & & \swarrow \text{pr}_1 \\ & U & \end{array}$$

conmuta, donde  $\text{pr}_1$  denota la proyección en la primera componente. Es decir,  $\pi \circ \Phi_U^{-1}(p, v) = p$ , para todo  $p \in U$  y  $v \in F$ .

2. Para cada  $p \in U$ , si  $E_p = \pi^{-1}(p)$ , denota la fibra sobre  $p$ , la función  $\Phi_{U,p}$  definida como

$$\Phi_{U,p} = \Phi_U|_{E_p} : E_p \rightarrow \{p\} \times F,$$

es un homeomorfismo.

Si  $M$  es una variedad suave se supondrá adicionalmente que  $F$  es suave,  $\pi$  es suave y que  $\Phi_U$  y  $\Phi_{U,p}$  son difeomorfismos.  $E$  se denomina el *espacio total*,  $M$  el *espacio base*,  $F$  la *fibra genérica* y  $\pi$  la *proyección*. Si  $E$  y  $F$  son además manifolds orientados, el fibrado se llama *orientado* si cada  $\Phi_{U,p}$  puede escogerse de tal manera que preserve la orientación.

De ahora en adelante, y para evitar repeticiones, la palabra *morfismo* hará referencia a una función continua en la categoría topológica o a una

Figura 1.1: Haz fibrado

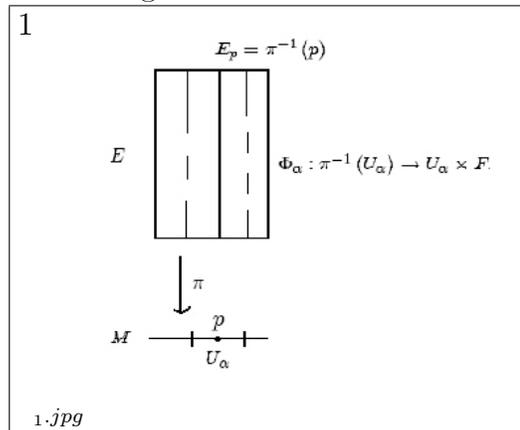


Figura 1.2: Haz fibrado

función suave (respectivamente, holomorfa) en la categoría de los manifolds suaves (respectivamente, complejos). Por *isomorfismo* se entenderá un morfismo invertible cuya inversa también sea un morfismo de la misma categoría.

Cada difeomorfismo  $\Phi_U$  recibe el nombre de *trivialización local de  $E$  en  $U$* . Por brevedad, y cuando no haya peligro de confusión, en lugar de  $(E, \pi, F, M)$  se escribirá  $E \xrightarrow{\pi} M$  o simplemente  $E$  para denotar el fibrado. Un cubrimiento abierto  $\mathcal{A} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  para  $M$  se llama *trivializante* si existe una trivialización local en cada  $U_\alpha$ .

Se denotará por  $\text{Iso}(F)$  al grupo de isomorfismos de  $F$ , y si  $F$  es orientado, por  $\text{Iso}^+(F)$  al grupo de isomorfismos de  $F$  que preservan orientación. Sea  $\pi : E \rightarrow M$  un fibrado y sea  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  un cubrimiento abierto de  $M$ , tal que para cada  $\alpha \in A$ , exista una trivialización  $\Phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F$ . Si  $U_\alpha \cap U_\beta$  es no vacío, la función

$$\Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times F$$

envía cada punto  $(p, v)$  en otro, que será denotado por  $(p, \eta(p, v))$ . Para cada  $p \in U_\alpha \cap U_\beta$  fijo, la función que envía  $v$  en  $\eta(p, v)$  es un isomorfismo de  $F$ . Por consiguiente existen morfismos  $g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Iso}(F)$ , tales que  $\Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1}(p, v) = (p, g_{\beta\alpha}(p)v)$ . En la categoría suave, muchas veces es conveniente exigir que los morfismos  $\Phi_{U,p}$  pertenezcan a un determinado grupo  $G$  especificado de antemano, llamado el *grupo estructural del fibrado*,

que se supondrá con estructura de grupo topológico, en la categoría continua, y de Lie, en la categoría suave, y el cual actúa a izquierda en forma fiel, es decir,  $g \cdot u = u$ , para todo  $u \in F$  implica  $g = 1$ . Esta condición equivale a afirmar que  $G$  pueda verse como un subgrupo de  $\text{Iso}(F)$ . Este grupo actúa en forma natural (a izquierda) sobre  $F$ , vía  $\phi \cdot u = \phi(u)$ , para  $u \in F$  y  $\phi \in G$ .

Las funciones  $g_{\beta\alpha}$  son llamadas *funciones de transición* del fibrado  $E$  y dependen obviamente de la trivialización escogida. Es fácil verificar que las  $g_{\beta\alpha}$  satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$g_{\alpha\alpha} = \text{Id}_{r \times r} \text{ en } U_\alpha, \quad g_{\gamma\beta}g_{\beta\alpha} = g_{\gamma\alpha} \text{ en } U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset, \quad (1.1)$$

llamadas *condiciones de cociclo*. Se llamará *cociclo* a cualquier colección de funciones suaves  $\mathcal{C} = \{g_{\beta\alpha}\}$ , donde  $g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$ , y  $\mathcal{A} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  es un cubrimiento abierto de  $M$  que satisfaga las condiciones (1.1).

El siguiente lema muestra cómo se relacionan las funciones de transición para dos trivializaciones asociadas a un mismo cubrimiento.

**Lema 1.1.2** Sean  $\{g_{\beta\alpha}\}$  y  $\{g'_{\beta\alpha}\}$  los cociclos provenientes de trivializaciones  $\{\Phi_\alpha\}_{\alpha \in A}$  y  $\{\Phi'_\alpha\}_{\alpha \in A}$ , en un cubrimiento abierto  $\mathcal{A} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  de  $M$ . Entonces existen morfismos  $f_\alpha : U_\alpha \rightarrow G$  tales que

$$g_{\beta\alpha}f_\alpha = f_\beta g'_{\beta\alpha} \text{ en } U_\alpha \cap U_\beta. \quad (1.2)$$

**Prueba.** ([6], capítulo 3, lema 3.18). ■

**Definición 1.1.3** De dos cociclos  $\{g_{\beta\alpha}\}$  y  $\{g'_{\beta\alpha}\}$  para un mismo cubrimiento abierto  $\mathcal{A} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  de  $M$  se dice que son *equivalentes* si satisfacen (1.2), para alguna colección de morfismos  $\{f_\alpha : U_\alpha \rightarrow G\}_{\alpha \in A}$ .

Sean  $E \xrightarrow{\pi} M$  y  $E' \xrightarrow{\pi'} M$  fibrados con grupo estructural  $G$ . Se dice que una función  $\tau : E \rightarrow E'$  es un *morfismo de fibrados* si  $\tau$  es un morfismo (de manifolds) de  $E$  en  $E'$ ,  $\pi' \circ \tau = \pi$  y si para cada  $p \in M$  la restricción de  $\tau$  a  $E_p$ ,  $\tau_p : E_p \rightarrow E'_p$ , es un morfismo en  $G$ .

Una *equivalencia* entre fibrados es un morfismo  $\tau$  para el cual existe un inverso, es decir, existe otro morfismo  $\rho : E' \rightarrow E$  tal que  $\tau \circ \rho$  y  $\rho \circ \tau$  son los morfismos identidad de  $E'$  y  $E$ , respectivamente. En este caso se dice que  $E$  es *equivalente* a  $E'$ . Se denotará por  $[E]$  la clase de equivalencia del fibrado vectorial  $E$ . El conjunto de clases de equivalencia de fibrados sobre  $M$  con fibra  $F$  y grupo estructural  $G$  será denotado por  $\text{Fib}(M, F, G)$ .

Una noción más laxa de equivalencia, que se llamará *cuadrado equivalencia*, exige que  $\tau$  sea un isomorfismo (de manifolds) de  $E$  en  $E'$  y que exista un isomorfismo  $h : M \rightarrow M$  de tal manera que el siguiente cuadrado conmute

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\tau} & E' \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi' \\ M & \xrightarrow{h} & M \end{array}$$

$E$  se llama *trivial* si es equivalente al fibrado  $M \times F$ .

Claramente  $E$  y  $E'$  son equivalentes si y sólo si son cuadrado equivalentes con  $h$  igual al morfismo identidad.

**Proposición 1.1.4** Sean  $E \xrightarrow{\pi} M$  y  $E' \xrightarrow{\pi'} M$  fibrados con la misma fibra genérica y sea  $\mathcal{A} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  un cubrimiento abierto de  $M$  para el que existen trivializaciones locales  $\Phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F$  y  $\Phi'_\alpha : \pi'^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F$  de  $E$  y  $E'$ . Entonces  $E$  y  $E'$  son isomorfos si y sólo si  $\{g_{\beta\alpha}\}$  y  $\{g'_{\beta\alpha}\}$  son cociclos equivalentes.

**Prueba.** [6], teorema 3.1.10. ■

La definición de equivalencia entre cociclos correspondientes a un mismo cubrimiento abierto de una variedad puede ser generalizada a cociclos que no necesariamente corresponden al mismo cubrimiento.

Sean  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  y  $\{V_a\}_{a \in A'}$  cubrimientos abiertos de  $M$ . Recuérdesse que  $\{V_a\}_{a \in A'}$  se denomina un refinamiento de  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  si para cada  $V_a$  existe un abierto  $U_\alpha$  tal que  $V_a \subset U_\alpha$ . Defínase  $\varepsilon : A' \rightarrow A$ , una *función de escogencia* tal que  $V_a \subset U_{\varepsilon(a)}$ , para cada  $a \in A'$ . En lo que sigue se llamará *refinamiento* de  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  al par  $(\{V_a\}_{a \in A'}, \varepsilon)$ . Si  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  y  $\{U'_a\}_{a \in A'}$  son dos cubrimientos de  $M$ , se llamará un *refinamiento común* a un cubrimiento  $\{V_b\}_{b \in B}$  junto con dos funciones de escogencia  $\varepsilon : B \rightarrow A$  y  $\varepsilon' : B \rightarrow A'$ , que se denotarán por  $(\{V_b\}_{b \in B}, \varepsilon, \varepsilon')$ .

Para cualquier cociclo  $\{g_{\beta\alpha}\}$  en  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  se puede definir el cociclo  $\{g'_{ba}\}$  en  $\{V_a\}_{a \in A'}$ , llamado el *cociclo inducido* por  $\{g_{\beta\alpha}\}$  en el refinamiento, mediante la prescripción  $g'_{ba} = g_{\varepsilon(b)\varepsilon(a)}|_{V_a \cap V_b}$ .

**Definición 1.1.5** De dos cociclos,  $\{g_{\beta\alpha}\}$  en  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ , y  $\{g'_{ba}\}$  en  $\{U'_a\}_{a \in A'}$  se dice que son *equivalentes* si existe un refinamiento común tal que los cociclos inducidos en este refinamiento sean equivalentes de acuerdo con la definición 1.1.3. El conjunto de clases de equivalencia de cociclos será denotado por  $H^1(M, F, G)$ .

El siguiente lema proporciona una manera que nos será útil para construir fibrados.

**Lema 1.1.6** *Sea  $M$  una variedad,  $E$  un conjunto arbitrario,  $F$  una variedad y  $\pi : E \rightarrow M$  una función sobreyectiva. Supóngase que existe una colección de biyecciones*

$$\mathfrak{B} = \{\Phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F\}_{\alpha \in A}$$

que satisfacen las siguientes condiciones:

1.  $\pi \circ \Phi_\alpha^{-1}(p, v) = p$ , para todo  $p \in U_\alpha$ ,  $v \in F$ .
2. La función  $\Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times F$  es un morfismo, para todo  $\alpha, \beta \in A$  con  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ .

Entonces la colección  $\mathfrak{B}$  determina un fibrado sobre  $M$  con espacio total  $E$ , fibra  $F$ , proyección  $\pi$  y trivializaciones locales  $\{\Phi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ .

**Prueba.** [6], proposición 3.1.3. ■

A continuación se verá que todo fibrado  $E \rightarrow M$  es determinado completamente por el cociclo asociado a cualquiera de sus trivializaciones.

**Proposición 1.1.7** *Supóngase que  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  es un cubrimiento abierto de  $M$  y que para cada  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ,  $g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$  es un morfismo. Supóngase además que estos morfismos satisfacen las condiciones de cociclo*

$$g_{\alpha\alpha} = Id_{r \times r} \text{ en } U_\alpha, \quad g_{\gamma\beta}g_{\beta\alpha} = g_{\gamma\alpha} \text{ en } U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma. \quad (1.3)$$

Usando la colección  $g_{\beta\alpha}$  como “instrucciones de pegado” se puede construir un fibrado cuyas funciones de transición son precisamente las  $g_{\beta\alpha}$ .

**Prueba.** [6], Proposición 3.1.12. ■

El fibrado construido en la proposición anterior se denomina el *fibrado determinado por el cociclo*  $\{g_{\beta\alpha}\}$ .

La siguiente proposición nos muestra que a cada clase de equivalencia de cociclos le corresponde un único fibrado, salvo isomorfismos.

**Proposición 1.1.8** *Existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto  $\text{Fib}(M, F, G)$  y  $H^1(M, F, G)$ .*

**Prueba.** [6], Teorema 3.1.14. ■

Sean  $E \rightarrow M$  y  $E' \rightarrow M$  fibrados, y sea  $\tau : E \rightarrow E'$  un morfismo. Es claro que siempre es posible encontrar un cubrimiento  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  que sea simultáneamente trivializante para  $E$  y  $E'$ . Sean  $\Phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F$  y  $\Phi'_\alpha : \pi'^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F$  las correspondientes trivializaciones locales. La función  $\tau$  nos proporciona, para cada  $\alpha$ , una función dada por la compuesta

$$U_\alpha \times F \xrightarrow{\Phi_\alpha^{-1}} \pi^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\tau} \pi'^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\Phi'_\alpha} U_\alpha \times F.$$

Además, la composición de estos morfismos debe enviar a  $(p, v)$  en  $(p, h_\alpha(p)v)$ , donde  $h_\alpha : U_\alpha \rightarrow G$  es un morfismo.

**Proposición 1.1.9** *Con la notación anterior, cada morfismo de fibrados  $\tau : E \rightarrow E'$  induce funciones  $h_\alpha : U_\alpha \rightarrow G$ , donde cada  $h_\alpha$  se define como  $\Phi'_\alpha \circ \tau \circ \Phi_\alpha^{-1}(p, v) = (p, h_\alpha(p)v)$ . Estas satisfacen las relaciones de compatibilidad*

$$h_\beta = g'_{\beta\alpha} h_\alpha g_{\beta\alpha}^{-1} \text{ en } U_\alpha \cap U_\beta. \quad (1.4)$$

*Recíprocamente, toda familia de funciones  $\mathcal{H} = \{h_\alpha\}_{\alpha \in A}$  que satisfaga estas relaciones define un morfismo  $\tau : E \rightarrow E'$  que a su vez induce a  $\mathcal{H}$ .*

**Prueba.** [6], proposición 3.1.15. ■

### 1.1.1. Ejemplos de fibrados

#### Mapeos recubridores

Sea  $F$  un conjunto cualquiera dotado de la *topología discreta* (cada punto es un abierto de  $F$ ) y  $M$  una variedad. Un fibrado sobre  $M$ ,  $\pi : E \rightarrow M$ , con fibra  $F$ , se denomina un *mapeo recubridor*, *un cubrimiento* o *un recubrimiento de  $M$* . A la cardinalidad de  $F$  se le llama el *grado del recubrimiento*. Nótese que en este caso  $\text{Iso}(F)$  coincide con el conjunto  $B(F)$  de biyecciones de  $F$  y que la condición de trivialización local implica que  $M$  admite un cubrimiento abierto  $\mathcal{U}$  tal que para cada  $U \in \mathcal{U}$ ,  $\pi^{-1}(U)$  es la unión disjunta de abiertos  $W_v$

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{v \in F} W_v, \quad (1.5)$$

donde  $W_v = \varphi^{-1}(U \times \{v\})$ , para cada  $v \in F$ , y tal que  $\pi|_{W_v} : W_v \rightarrow U$  es un homeomorfismo. Se verifica fácilmente que, recíprocamente, la condición anterior (1.5) garantiza que  $\pi : E \rightarrow M$  es un fibrado con fibra  $F$ .

### Fibraciones elípticas

Si  $M$  es una variedad suave y  $\pi : E \rightarrow F$  es una fibración con fibra  $F$ , una superficie suave, cerrada, orientada y de género 1, se dice que la fibración es una *fibración elíptica*.

### Fibrados principales

Si  $\pi : E \rightarrow M$  es un fibrado en el que la fibra  $F$  es igual al grupo estructural  $G$ , el fibrado se denomina un *fibrado principal* o un  *$G$ -fibrado*. En este caso  $G$  define una *acción a derecha en cada fibra*  $E_p$ , definida de la siguiente manera: se escoge una trivialización  $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ . Para cada  $p \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ ,  $g \in G$  y  $u \in E_p$ , si  $\phi_\alpha(u) = (p, g_\alpha)$ , se define  $u \cdot g = \phi_\alpha^{-1}(p, g_\alpha g)$ . Si  $p \in U_\alpha \cap U_\beta$  entonces  $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}(p, g_\alpha g) = (p, g_{\beta\alpha}(p)(g_\alpha g)) = (p, g_\beta g)$  y por consiguiente  $\phi_\alpha^{-1}(p, g_\alpha g) = \phi_\beta^{-1}(p, g_\beta g)$  y la acción está bien definida. Esta acción es claramente *transitiva y libre* ( $u \cdot g = u$  implica  $g = 1$ ) y por consiguiente si se fija  $u_0 \in E_p$  se ve que  $E_p = \{u_0 \cdot g : g \in G\}$ .

### $G$ -fibrados discretos vía la acción de un grupo sobre una variedad

Un ejemplo importante de un  $G$ -fibrado (con fibra discreta) lo proporciona la acción de un grupo  $G$  sobre una variedad  $M$ . Recuérdese primero que una acción (a izquierda) de  $G$  sobre  $M$  se llama *fiel* si  $g \cdot x = x$ , para todo  $x \in M$  implica que  $g$  es el elemento identidad. Esta condición equivale a afirmar que la representación natural  $\rho : G \rightarrow \text{Iso}(M)$  que envía a  $g$  en el isomorfismo definido por la acción,  $\rho(g)(x) = g \cdot x$ , es inyectiva, lo que nos permite identificar a  $G$  con un subgrupo del grupo de isomorfismos de  $M$ . Se dice que  $G$  define una *buena acción* sobre  $M$  si para cada  $x \in M$  existe una vecindad  $U_x$  de  $x$  tal que

$$g \cdot U_x \cap h \cdot U_x = \emptyset, \text{ si } g \neq h. \quad (1.6)$$

Si además se cumple que para cada par de puntos  $x, y \in M$  que estén en distintas órbitas existen abiertos  $U_x$  y  $U_y$  de  $x$  y  $y$  tales que

$$g \cdot U_x \cap h \cdot U_y = \emptyset, \quad \forall g, h \in G, \quad (1.7)$$

se dice que la acción es *muy buena*.

Es fácil ver que si  $G$  actúa bien sobre  $M$  entonces  $G$  define una acción fiel. Lo que aquí se llamará una *buena acción* corresponde al concepto más

estándar en la literatura de acción *propriadamente discontinua* (properly discontinuous). Un resultado bien conocido garantiza que si  $G$  actúa bien en  $M$ , el conjunto de órbitas  $M/G$  en  $M$  o de clases de equivalencia bajo la relación  $x \sim y$  si y sólo si existe  $g \in G$  tal que  $g \cdot x = y$ , dotado de la topología cociente ( $W \subset M/G$  es abierto si y sólo si  $\pi^{-1}(W) \subset M$  es abierto en  $M$ ), donde  $\pi$  denota la función canónica  $\pi : M \rightarrow M/G$ , es una variedad ([6], Pág. 72), no necesariamente Hausdorff. Como nuestro convenio es exigir que todos los manifolds sean Hausdorff, se ha incluido la condición (1.7) para garantizar que dicha propiedad se satisfaga, lo cual puede verificarse sin ninguna dificultad.

Veamos que  $\pi : M \rightarrow M/G$  es un  $G$ -fibrado: de la condición (1.7) se sigue que para cada punto de  $M/G$  se puede tomar un entorno abierto  $\bar{U}_\alpha = \pi_G(U_\alpha)$ , con  $U_\alpha \subset M$  abierto, de tal manera que su preimagen bajo  $\pi$  consiste en la unión disjunta de todos los abiertos de la forma  $g \cdot U_\alpha$ . Además, si  $M$  es una variedad suave, puede demostrarse que el cubrimiento  $\mathcal{U} = \{\bar{U}_\alpha\}_{\alpha \in A}$  puede escogerse de tal forma que cada intersección  $U_\alpha \cap U_\beta$  sea conexa (más aún, puede garantizarse que toda intersección finita de abiertos de  $\mathcal{U}$  sea difeomorfa a  $\mathbb{R}^n$  ([5], Pág 42). Ahora, para cada  $u \in \pi_G^{-1}(\bar{U}_\alpha)$  existe un único  $g \in G$ , tal que  $u \in g \cdot U_\alpha$ . Por tanto la función  $\phi_\alpha : \pi_G^{-1}(\bar{U}_\alpha) \rightarrow \bar{U}_\alpha \times G$  que envía  $u$  en  $(\pi_G(u), g^{-1})$  define un trivialización local de  $\pi_G$ . Supóngase que  $\bar{U}_\alpha, \bar{U}_\beta$  son dos de estos abiertos con intersección no vacía y sea  $b$  un punto en dicha intersección y  $v_\alpha, v_\beta$  los únicos puntos en  $\pi_G^{-1}(b)$  que están en  $U_\alpha$  y  $U_\beta$ , respectivamente. Entonces, existe un único  $t_{\beta\alpha} \in G$ , tal que  $v_\beta \in t_{\beta\alpha} \cdot U_\alpha$ , y en consecuencia  $v_\beta = t_{\beta\alpha} v_\alpha$ . Ahora, cualquier otro elemento  $v'$  en esta fibra puede escribirse en forma única como  $v' = g v_\alpha$ , y por tanto  $v' = (g t_{\beta\alpha}^{-1}) v_\beta$  de lo cual se deduce entonces que

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}(b, g^{-1}) = \phi_\beta(v') = (b, (g t_{\beta\alpha}^{-1})^{-1}) = (b, t_{\beta\alpha} g^{-1}),$$

y por tanto los elementos del cociclo asociado al cubrimiento  $\mathcal{U}$  son las funciones constantes  $g_{\beta\alpha} \equiv t_{\beta\alpha}$ .

Ahora se definirá el grupo de automorfismos de un fibrado.

**Definición 1.1.10** *Sea  $E \xrightarrow{\pi} M$  un fibrado con fibra  $F$  y grupo estructural  $G$ . El grupo de automorfismos de  $E$  sobre  $M$  se define como*

$$\text{Aut}(E/M) = \{\varphi : E \rightarrow E \text{ donde } \varphi \text{ es un morfismo tal que } \pi \circ \varphi = \pi\}.$$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & E \\ \pi \searrow & & \swarrow \pi \\ & M & \end{array}$$

Nótese que si  $u \in M$  y si se define  $\pi(u) = p$ , entonces  $\pi(\varphi(u)) = \pi(u) = p$ . Es decir,  $\varphi(u) \in E_p$ ,  $\forall u \in E_p$  y en consecuencia  $\varphi$  envía cada fibra en sí misma. Esto implica que  $\varphi$  restringido a  $E_p$  es un isomorfismo de la fibra y por tanto un elemento de  $G$ .

Si  $\pi : E \rightarrow M$  es un  $G$ -fibrado, la acción a derecha de  $G$  sobre  $E$  definida más arriba proporciona un embebimiento canónico de  $G$  en  $\text{Aut}(E/M)$  donde la imagen de cada  $g$  es el automorfismo de  $E$  definido como multiplicación a derecha por  $g$ . Si la fibra de  $\pi$  es discreta este embebimiento es de hecho un isomorfismo ([28], Pág 398 y [12], Pág. 163). Por otro lado, si  $E \xrightarrow{p} M$  es un  $G$ -fibrado con fibra discreta y  $E$  es conexo, entonces  $G = \text{Aut}(E/M)$  define en forma natural una muy buena acción sobre  $E$  dada por  $\varphi \cdot u = \varphi(u)$ . Si  $\pi : E \rightarrow E/G$  denota el morfismo canónico y si se supone que  $G$  actúa transitivamente sobre cada fibra, entonces los  $G$ -fibrados  $E \xrightarrow{p} M$  y  $E \xrightarrow{\pi} E/G$  resultan ser cuadrado-equivalentes ([12], Pág. 164). Este resultado también se deduce inmediatamente del teorema de clasificación de recubrimientos que se enunciará a continuación.

### Teorema fundamental de la teoría de espacios recubridores.

Se supondrá en esta sección que *todos los espacios topológicos son conexos y que  $X$  es un espacio para el cual existe un recubrimiento universal*  $(E_X, p, X)$  (por ejemplo, esto se garantiza si  $X$  es una variedad). La categoría natural para enunciar este teorema es la categoría de pares  $(X, x)$ , donde  $x \in X$  y cuyos morfismos son las funciones continuas  $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ , tales que  $f(x) = y$ . Las nociones de equivalencia (respectivamente cuadrado equivalencia) se extienden en forma natural a esta categoría. Como es usual  $\pi_1(Z, z_0)$  denotará el grupo fundamental de  $Z$  con punto base  $z_0$ . Si  $l : (Z, z_0) \rightarrow (A, a_0)$  es continua,  $l_* : \pi_1(Z, z_0) \rightarrow \pi_1(A, a_0)$  denotará el correspondiente homomorfismo inducido (Ver [12], capítulo 11-14, [28], capítulo 8). Con estas definiciones se tiene el siguiente teorema.

**Teorema 1.1.11** *Sea  $X$  y  $E_X \xrightarrow{p} X$  un recubrimiento universal, y sean  $x_0 \in X$  y  $e_0 \in E_X$ , con  $p(e_0) = x_0$ . Si el grupo fundamental de  $X$  con base  $x_0$ ,  $\pi_1(X, x_0)$ , se denota por  $G$ , entonces:*

1. *Existe una correspondencia biyectiva entre subgrupos  $H$  de  $G$  y clases de equivalencia de morfismos recubridores  $(Y_H, y_H) \xrightarrow{p_H} (X, x_0)$  tales que  $(p_H)_* \pi_1(Y_H, y_H) = H$ .*

2. Esta correspondencia reversa inclusiones, es decir, si  $H_1 \subset H_2$  entonces existe un morfismo  $(Y_{H_1}, y_{H_1}) \xrightarrow{p_{2,1}} (Y_{H_2}, y_{H_2})$  tal que

$$\begin{array}{ccc} (Y_{H_2}, y_{H_1}) & \xrightarrow{p_{2,1}} & (Y_{H_1}, y_{H_2}) \\ p_{H_2} \searrow & & \swarrow p_{H_1} \\ & (X, x_0) & \end{array}$$

conmuta.

3. El subgrupo  $H$  es normal en  $G$  si y sólo si el diagrama

$$\begin{array}{ccc} (Y_H, y_H) & \xrightarrow{Id} & (Y_H, y_H) \\ \pi \downarrow & & \downarrow p_H \\ (Y_H/\overline{G}, \overline{y}_H) & \xrightarrow{\cong} & Y_H/\overline{G} \\ & \overline{p}_H & \end{array}$$

es conmutativo, donde  $\overline{G}$  denota el grupo cociente  $G/H$  y  $\overline{p}_H$  es un isomorfismo.

(Ver [12], Pág. 189).

### 1.1.2. Fibrado asociado a un fibrado principal

Sea  $\pi : E \rightarrow M$  un fibrado principal con fibra  $G$ ,  $F$  una variedad y sea  $\rho : G \rightarrow \text{Iso}(F)$  una representación de  $G$  en el grupo de isomorfismos de  $F$ . Tómese una trivialización cualquiera  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  de  $\pi : E \rightarrow M$  con cociclo asociado  $\{g_{\beta\alpha}\}$ . La proposición 1.1.7 nos permite construir un fibrado con fibra  $F$  a partir de los cociclos  $\{\rho(g_{\beta\alpha})\}$ , denominado *el fibrado asociado al fibrado principal*  $(\pi, E, G)$  vía la representación  $\rho$ , que se denotará abreviadamente por  $\pi_F : E_F \rightarrow M$ .

### 1.1.3. Descripción combinatoria de un fibrado con fibra discreta

Se verá ahora que todo fibrado con fibra discreta sobre una variedad  $X$  puede describirse mediante un procedimiento puramente combinatorio. Para comodidad del lector, se ha incluido una discusión en detalle de este material al no encontrarse una referencia apropiada y completa en la literatura.

Sea  $p : E \rightarrow X$  un *recubrimiento universal* para  $X$ ,  $x_0 \in X$  un punto base y denotemos por  $G$  al grupo fundamental de  $X$  en  $x_0$ ,  $\pi_1(X, x_0)$ . Supóngase que  $F$  es un conjunto sobre el que está definido una acción a izquierda, lo cual sabemos equivale a dar una representación  $\rho : G \rightarrow B(F)$  en el grupo  $B(F)$  de biyecciones de  $F$  (definida como  $\rho(g)(u) = g \cdot u$ ). A uno cualquiera de estos conjuntos se le llamará un  $G$ -conjunto. Un *morfismo entre  $G$ -conjuntos*  $F_1$  y  $F_2$  es entonces una función  $\phi : F_1 \rightarrow F_2$  tal que  $\phi(g \cdot u) = g \cdot \phi(u)$ , para todo  $g \in G$  y  $u \in F_1$  ( $G$ -linealidad). Un *isomorfismo* será entonces un morfismo con inversa lo cual equivale a que  $\phi$  sea una biyección  $G$ -lineal.

Dotemos a  $F$  con la topología discreta. Del teorema 1.1.11 se deduce que  $p : E \rightarrow X$  es cuadrado-equivalente al cubrimiento canónico  $\pi_G : E \rightarrow E/G$  de lo cual se sigue que es un  $G$ -fibrado. En lo que sigue se identificará a  $X$  con  $E/G$ . Sea  $\mathcal{U} = \{\bar{U}_\alpha\}_{\alpha \in A}$  un cubrimiento de  $E/G$  y  $\{(\bar{U}_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  una trivialización para  $\pi_G : E \rightarrow E/G$  con cociclo asociado  $\{g_{\beta\alpha}\}$ . El fibrado asociado a este  $G$ -fibrado,  $p_F : E_F \rightarrow X$ , es entonces un cubrimiento de  $X$  con fibra  $F$  que, recordemos, se define (Proposición 1.1.7) como la unión disjunta  $\bigcup_{\alpha \in A} \{\alpha\} \times \bar{U}_\alpha \times F$ , modulo la relación de equivalencia  $(\alpha, b, u) \sim (\beta, b, g_{\beta\alpha} \cdot u)$ , para cada  $b \in \bar{U}_\alpha \cap \bar{U}_\beta$  y  $u \in F$ , y  $p_F$  es la proyección natural que envía la clase de  $(\alpha, b, u)$  en  $b$ , que se denotará por  $[(\alpha, b, u)]$ . Fijemos un punto base  $e_0 \in E$ , tal que  $\pi_G(e_0) = x_0 \in X = E/G$ . Por el teorema fundamental de la teoría de espacios recubridores, (teorema 1.1.11) existe una correspondencia biyectiva entre los subgrupos  $H \subset G$  y los recubrimientos conexos  $p_H : (Y_H, y_H) \rightarrow (X, x_0)$  (salvo equivalencia de pares) tales que  $(p_H)_*(\pi_1(Y_H, y_H)) = H$ . Más aún, para cada  $H$  la clase de equivalencia tiene como representante el morfismo canónico  $p_H : (E/H, \pi_H(e_0)) \rightarrow (E/G, \pi_G(e_0))$ , donde  $\pi_H : E \rightarrow E/H$  denota el recubrimiento canónico cociente. Nuestro objetivo es ver que todos los posibles recubrimientos  $p_H$  pueden obtenerse como fibrados asociados a  $\pi_G$ . Supongamos que la acción de  $G$  en  $F$  es *transitiva*, que recordemos, significa que existe un elemento en  $F$  tal que su órbita es todo  $F$ . Fijemos un  $u_0$  cualquiera tal que  $G \cdot u_0 = F$ , y sea  $\alpha \in A$  cualquier índice tal que  $x_0 \in \bar{U}_\alpha$ . Sabemos que existe un único  $g_\alpha$  tal que  $e_0 = g_\alpha v_\alpha$ , donde  $v_\alpha$  es el único elemento en la fibra sobre  $x_0$  en  $E$  que está en  $U_\alpha$ . Denótese por  $\varepsilon(u_0)$  al elemento  $[(\alpha, x_0, w)] \in E_F$ , donde  $w = g_\alpha^{-1} \cdot u_0$ . Nótese que este elemento queda bien definido sin importar la escogencia del índice, ya que si  $x_0 \in \bar{U}_\beta$  se tiene que  $g_\alpha = g_\beta g_{\beta\alpha}$ . De aquí se sigue que  $g_{\beta\alpha} g_\alpha^{-1} \cdot u_0 = g_\beta^{-1} \cdot u_0$  lo que implica que  $[(\alpha, x_0, g_\alpha^{-1} \cdot u_0)] = [(\beta, x_0, g_{\beta\alpha} g_\alpha^{-1} \cdot u_0)]$ . Denotemos por  $H$  al subgrupo estabilizador de  $u_0$  en  $G$ . Es decir,  $H = \{g \in G : g \cdot u_0 = u_0\}$ . Con

esta notación es posible demostrar la siguiente proposición.

**Proposición 1.1.12** *Existe un isomorfismo entre los espacios  $(E_F, \varepsilon(u_0))$  y  $(E/H, \pi_H(e_0))$ .*

**Prueba.** Para cada elemento  $[(\alpha, b, u)] \in E_F$  definimos  $\psi([( \alpha, b, u)]) = g_u^{-1}v_\alpha$ , donde recuérdese que  $v_\alpha$  fue definido como el único elemento de  $E$  en la fibra  $\pi_G^{-1}(b)$  que está en  $U_\alpha$  y donde  $g_u$  es un elemento cualquiera de  $G$  tal que  $u = g_u \cdot u_0$ . En general, este elemento no está determinado unívocamente. No obstante, si  $g' \cdot u_0 = g_u \cdot u_0$ , entonces  $(g_u^{-1}g') \cdot u_0 = u_0$  y por consiguiente  $g_u^{-1}g' \in H$ , lo cual muestra que la clase de  $g_u^{-1}v_\alpha$  es igual a la clase de  $(g')^{-1}v_\alpha$  en  $E/H$ . Por otro lado, si  $(\beta, b, u')$  es otro representante de  $[(\alpha, b, u)]$  entonces es porque  $b \in \bar{U}_\alpha \cap \bar{U}_\beta$  y  $u' = g_{\beta a} \cdot u$ . Para este representante  $\psi$  está definida como  $g_{u'}^{-1}v_\beta$ . Pero  $v_\beta = g_{\beta a}v_\alpha$  y  $u' = g_{\beta a} \cdot u = g_{\beta a}g_u \cdot u_0$ . Por tanto  $g_{u'}^{-1} = h(g_{\beta a}g_u)^{-1}$ , para cierto  $h \in H$ . De aquí se obtiene que

$$\begin{aligned} g_{u'}^{-1}v_\beta &= h(g_{\beta a}g_u)^{-1}g_{\beta a}v_\alpha \\ &= hg_u^{-1}g_{\beta a}^{-1}g_{\beta a}v_\alpha = h(g_u^{-1}v_\alpha), \end{aligned}$$

de lo cual se sigue la buena definición de  $\psi$ . Es inmediato verificar que  $\psi$  es continua. Por otro lado, es claro que

$$\psi(\varepsilon(u_0)) = (g_{e_0}^{-1})^{-1}v_{\alpha_0} = g_{e_0}v_{\alpha_0} = e_0,$$

y que  $(p_H \circ \psi)([(\alpha, b, u)]) = p_H(g_u^{-1}v_\alpha) = b$ .

Una inversa para  $\psi$  puede definirse de la siguiente manera: sea  $\bar{z} \in E/H$  y sea  $b = p_H(\bar{z}) \in E/G$ . Tómese un  $\bar{U}_\alpha$  cualquiera tal que  $b \in \bar{U}_\alpha$ , y sea  $v_\alpha$  el único elemento en la fibra de  $b$  en  $E$  tal que  $\pi_H(v_\alpha) = \bar{z}$ . Fijemos un levantamiento  $z \in E$  de  $\bar{z}$ . Existe un único  $g_{\alpha z}$  con  $g_{\alpha z}v_\alpha = z$ . Definimos  $\rho(\bar{z}) = [(\alpha, b, g_{\alpha z}^{-1} \cdot u_0)]$ . Si  $z'$  es otro levantamiento de  $\bar{z}$  entonces  $z' = hz$ , para algún  $h \in H$  y por tanto  $g_{\alpha z'} = hg_{\alpha z}$ . Pero en este caso

$$(hg_{\alpha z})^{-1} \cdot u_0 = g_{\alpha z}^{-1}h^{-1} \cdot u_0 = g_{\alpha z}^{-1} \cdot u_0.$$

Por otro lado, si  $\beta$  es otro índice para el cual  $b \in \bar{U}_\beta$  y  $v_\beta \in E$  y  $g_{\beta z}$  son tales que  $g_{\beta z}v_\beta$ , entonces  $g_{\beta z} = g_{\alpha z}g_{\alpha\beta}$  y por consiguiente  $g_{\beta z}^{-1} = g_{\alpha\beta}^{-1}g_{\alpha z}^{-1} = g_{\beta a}g_{\alpha z}^{-1}$  de donde se sigue que  $g_{\beta z}^{-1} \cdot u_0 = g_{\beta a}g_{\alpha z}^{-1} \cdot u_0$  y por consiguiente  $[(\alpha, b, g_{\alpha z}^{-1} \cdot u_0)] = [(\beta, b, g_{\beta z}^{-1} \cdot u_0)]$ . Esto nos muestra que  $\rho$  está bien definida.

Se verifica inmediatamente que  $\rho$  es continua y que conmuta con las proyecciones. Finalmente,

$$\psi(\rho(\bar{z})) = \psi([\alpha, b, g_{\alpha z}^{-1} \cdot u_0]) = g_{\alpha z} v_\alpha = \bar{z}.$$

Igualmente se verifica que  $\rho \circ \psi$  es la identidad. ■

**Observación 1.1.13** 1. En la proposición anterior, si se escoge otro  $u'_0$  tal que  $G \cdot u'_0 = F$ , entonces su estabilizador es conjugado del estabilizador de  $u_0$ . Esto ya que si  $u'_0 = a \cdot u_0$  entonces  $g \cdot u'_0 = u'_0$  si y sólo si  $a^{-1}ga$  pertenece al estabilizador de  $H$ . Por tanto al variar el generador para la (única) órbita de  $F$  se obtiene el espacio recubridor  $(E_F, \varepsilon(u'_0))$ , isomorfo a  $(E/H', \pi_{H'}(e_0))$ , donde  $H' = a^{-1}Ha$ .

2. Si la acción de  $G$  sobre  $F$  no es transitiva, se puede partir a  $F$  en la unión disjunta de sus distintas órbitas  $F = \bigcup_{s \in S} F_s$ . Es fácil ver que en este caso el recubrimiento  $E_F \rightarrow X$  resulta ser la unión disjunta de los recubrimientos  $E_{F_s} \rightarrow X$  que se obtienen restringiendo a  $p_F$  a cada una de estas componentes.
3. Si la acción de  $G$  en  $F$  es transitiva y si  $H$  es un subgrupo normal de  $G$  y por consiguiente  $E_F \rightarrow X$  es un recubrimiento normal, entonces si  $\rho : G \rightarrow B(F)$  es la representación asociada a la acción de  $G$  en  $F$  se tiene que  $\text{Ker}(\rho) = H$ : si  $F = G \cdot u_0$  entonces el estabilizador de  $b \cdot u_0$  es precisamente  $bHb^{-1}$ . Por tanto si  $H$  es normal,  $\rho(g) \in H$  equivale a afirmar que  $\rho(g)$  es la identidad. Por tanto el grupo de automorfismos del recubrimiento es en este caso  $G/H$  que es isomorfo a  $\rho(G) \subset B(F)$ .
4. Si  $\lambda : F_1 \rightarrow F_2$  es un morfismo de  $G$ -conjuntos y fijamos  $u_0 \in F$ , entonces  $\lambda$  induce en forma natural un morfismo entre los recubrimientos  $(E_{F_1}, \varepsilon(u_0))$  y  $(E_{F_2}, \varepsilon(\lambda(u_0)))$ . Si  $\lambda$  es un  $G$ -isomorfismo estos dos pares resultan ser isomorfos.

Ahora se pasará a demostrar el teorema que garantiza que la construcción combinatoria anterior da cuenta de todos los posibles fibrados con fibra discreta.

**Teorema 1.1.14** Sea  $X$  una variedad y fijemos un punto  $x_0 \in X$  y un recubrimiento universal cualquiera  $f : (E, e_0) \rightarrow (X, x_0)$ .

1. Para cada subgrupo  $H \subset \pi_1(X, x_0)$  existe un  $G$ -conjunto  $F$  y un punto  $u_0 \in F$  tal que  $p_F : (E_F, \varepsilon(u_0)) \rightarrow (X, x_0)$  es un recubrimiento de  $(X, x_0)$  con  $(p_F)_*(\pi_1(E_F, \varepsilon(u_0))) = H$ .
2. Si  $l : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$  es otro recubrimiento tal que  $l_*(\pi_1(Y, y_0)) = H$  entonces existe un isomorfismo entre  $(E_F, \varepsilon(u_0))$  y  $(Y, y_0)$ .

**Prueba.** La primera afirmación se sigue directamente de la proposición anterior. Para demostrar la segunda, fijemos  $H \subset G = \pi_1(X, x_0)$  y sea  $l : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$  un recubrimiento tal que  $l_*(\pi_1(Y, y_0)) = H$ . Por el teorema fundamental de la teoría de espacios recubridores existen isomorfismos  $h_1$  y  $h_2$  tales que el siguiente diagrama (de pares) conmuta

$$\begin{array}{ccc} (Y, y_0) & \xleftarrow{h_1} & (E/H, \pi_H(e_0)) \\ l \downarrow & & p_H \downarrow \\ (X, x_0) & \xleftarrow{h_2} & (E/G, \pi_G(e_0)) \end{array}$$

Sea  $F$  el conjunto  $G/H$  de todas las clases laterales a izquierda, con la acción natural  $g \cdot (g'H) = gg'H$ . Tomemos  $u_0$  como la clase de  $H$ , escojamos cualquier índice  $\alpha$  tal que  $\pi_G(e_0) \in \overline{U}_\alpha$ , y  $v_\alpha \in U_\alpha$  tal que  $e_0 = g_\alpha v_\alpha$  (existe un único  $g_\alpha \in G$  con esta propiedad) y hagamos  $\varepsilon(u_0) = [(\alpha, \pi_G(e_0), g_\alpha^{-1}H)]$ . Por la proposición anterior  $p_F : (E_F, \varepsilon(u_0)) \rightarrow (E/G, \pi_G(e_0))$  es isomorfo a  $p_H : (E/H, \pi_H(e_0)) \rightarrow (E/G, \pi_G(e_0))$ , es decir, existe un homeomorfismo  $\lambda : (E_F, \varepsilon(u_0)) \rightarrow (E/H, \pi_H(e_0))$  tal que  $\pi_H \circ \lambda = p_F$ . Claramente  $h_2 \circ p_F$  es también un mapeo recubridor y por consiguiente  $h_1 \circ \lambda$  es un isomorfismo de recubrimientos

$$\begin{array}{ccc} (Y, y_0) & \xleftarrow{h_1 \circ \lambda} & (E_F, \varepsilon(u_0)) \\ l \downarrow & \swarrow & h_2 \circ p_F \\ (X, x_0) & & \end{array}$$

y obviamente  $(h_2 \circ p_F)_*(\pi_1(E_F, \varepsilon(u_0))) = \pi_1(X, x_0)$ . ■

**Observación 1.1.15** En el teorema anterior  $(E_F, \varepsilon(u_0))$  también puede construirse de la siguiente manera: dado un recubrimiento  $l : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$  sea  $F = l^{-1}(x_0)$ , la fibra sobre  $x_0$ , con la acción natural de  $G$ , que, recuérdese, puede definirse de la siguiente manera: si  $u \in F$  y  $g \in G$ ,  $g \cdot u$  se define como el punto final de un levantamiento de un representante cualquiera de  $g$  que comience en  $u$ . Es claro que el estabilizador de  $y_0$  es precisamente

$H = l_*(\pi_1(Y, y_0))$  y por consiguiente, si  $\varepsilon(y_0) = [(\alpha, x_0, g_\alpha^{-1} \cdot y_0)]$  (con la misma notación que en la prueba del teorema anterior) se tiene que  $(E_F, \varepsilon(y_0))$  es isomorfo a  $(Y, y_0)$ .

El teorema anterior permite clasificar los recubrimientos de  $(X, x_0)$  en términos de las representaciones de  $\pi_1(X, x_0)$  en el grupo de biyecciones de un  $G$ -conjunto  $F$ . Dos representaciones  $\rho_i : G \rightarrow B(F_i)$ ,  $i = 1, 2$  son equivalentes si  $F_1$  y  $F_2$  son isomorfos como  $G$ -conjuntos. Puede verse fácilmente que esto equivale a afirmar que existe una biyección  $\phi : F_1 \rightarrow F_2$  tal que si  $C_\phi : B(F_2) \rightarrow B(F_1)$  es la función que envía  $h$  en  $\phi^{-1}h\phi$  entonces  $\rho_1 = C_\phi\rho_2$ . De lo anterior se sigue que las clases de equivalencia de representaciones de  $G$  están en correspondencia con las clases de equivalencia de recubrimientos asociados a un subgrupo de  $G$ .

#### 1.1.4. Monodromía de un fibrado

En una variedad suave y orientada  $X$  (posiblemente con frontera) existen varios grupos topológicos que juegan un papel importante en la representación de la monodromía de un fibrado (ver [29], Pág. 339, [32], Pág. 157). El primero,  $\text{Diff}^+(X)$  está conformado por todos los difeomorfismos que preservan la orientación bajo la operación de composición. El segundo es el subgrupo  $\text{Isot}(X)$  de  $\text{Diff}^+(X)$  formado por aquellos difeomorfismos que son isotópicos a la identidad. Recordemos que  $h \in \text{Diff}^+(X)$  es isotópico a la identidad si existe una familia suave  $H = \{h_t \in \text{Diff}^+(X)\}_{t \in [0,1]}$  de difeomorfismos que preservan orientación tales que  $h_0 = h$  y  $h_1 = \text{Id}_X$ . Puede verse sin dificultad que  $\text{Isot}(M)$  es un subgrupo normal de  $\text{Diff}^+(X)$ . El tercer grupo relevante a nuestra discusión es el grupo cociente  $\mathcal{M}(X) = \text{Diff}^+(X)/\text{Isot}(X)$ , llamado el *grupo de clases de mapeos de  $X$*  (*mapping class group of  $X$* ). Si  $X$  tiene frontera, es interesante considerar el subgrupo  $\text{Diff}^+(X, \partial X)$  de  $\text{Diff}^+(X)$  formado por aquellos elementos cuya restricción a la frontera de  $X$ ,  $\partial X$ , es igual a la identidad. Finalmente, puede verse que  $\text{Diff}^+(X, \partial X) \cap \text{Isot}(X)$  es un subgrupo normal de  $\text{Diff}^+(X, \partial X)$ , y su cociente, que denotaremos por  $\mathcal{M}(X, \partial X)$ , es llamado el *grupo de clases de mapeos relativos a  $\partial X$* . Un argumento elemental muestra que  $\mathcal{M}(X, \partial X)$  se inyecta canónicamente en  $\mathcal{M}(X)$  y puede por lo tanto verse como un subgrupo de  $\mathcal{M}(X)$ . Para un discusión completa de  $\mathcal{M}(X)$  en el caso en el que  $X$  es una superficie suave, el lector puede consultar [4], capítulo 4.

Ahora, sea  $f : E \rightarrow B$  un fibrado orientado con fibra  $F$ , una variedad orientada (posiblemente con frontera). Escojamos una trivialización

$\mathcal{T} = \{U_\alpha, \phi_\alpha\}_{\alpha \in A}$  para  $f$  en la cual  $U_\alpha$  sea conexo y tal que cada  $\phi_\alpha$  es un difeomorfismo que preserve orientación (fibra a fibra) de  $f^{-1}(U_\alpha)$  a  $U_\alpha \times F$ . Sea  $g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Diff}^+(F)$  el cociclo determinado por la trivialización  $\mathcal{T}$ . Si fijamos un punto base  $x_0 \in B$  para el grupo fundamental  $\pi_1(x_0, B)$  y un par cualquiera  $(U_{\alpha_0}, \phi_{\alpha_0})$  en  $\mathcal{T}$  tal que  $x_0 \in U_{\alpha_0}$ , la *representación de monodromía* de  $f : E \rightarrow B$ , relativa a  $\mathcal{T}$  se define como el anti-homomorfismo

$$\lambda_{\mathcal{T}} : \pi_1(B, x_0) \rightarrow \mathcal{M}(F)$$

definido de la siguiente manera: tomemos una curva cerrada gama  $\gamma$  con base en  $x_0$  y dividámosla en arcos  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$  tales que  $\gamma_0$  tiene su punto inicial en  $x_0$ ,  $\gamma_i$  finaliza donde comienza  $\gamma_{i+1}$  para  $i = 0, \dots, n-1$ , y  $\gamma_n$  termina en  $x_0$ , y para las cuales existen conjuntos abiertos  $U_{\alpha_0}, U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}$  en  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ , con  $\gamma_i \subset U_{\alpha_i}$  para cada  $i = 0, \dots, n$ . Denotemos el comienzo de cada  $\gamma_i$  por  $x_i$ . Sea  $g_{i+1,i}$  la función de transición en  $U_{\alpha_i} \cap U_{\alpha_{i+1}}$  para  $i = 0, \dots, n-1$ , y  $g_{0,n}$  la función de transición en  $U_{\alpha_n} \cap U_{\alpha_0}$ , entonces la imagen de la clase de  $\gamma$ ,  $[\gamma]$ , en  $\pi_1(B, x_0)$  está definida como el elemento en  $\mathcal{M}(F)$  determinado por el difeomorfismo

$$\lambda_{\mathcal{T}}([\gamma]) = g_{0,n}(x_0)g_{n,n-1}(x_n) \cdots g_{2,1}(x_2)g_{1,0}(x_1) \quad (1.8)$$

en  $\text{Diff}^+(F)$ . Es un ejercicio elemental demostrar que  $\lambda$  es un antihomomorfismo bien definido, es decir, no depende del representante escogido para  $[\gamma]$  y  $\lambda_{\mathcal{T}}([\alpha][\beta]) = \lambda_{\mathcal{T}}([\beta])\lambda_{\mathcal{T}}([\alpha])$ . Ahora, si  $\{g'_{\beta\alpha}\}$  es el cociclo asociado a otra trivialización  $\mathcal{T}' = \{U_\alpha, \phi_\alpha\}_{\alpha \in A}$  que preserve orientación, entonces sabemos que se satisface (1.2) y por tanto existen funciones suaves  $f_i : U_{\alpha_i} \rightarrow \text{Diff}^+(F)$  tales que

$$g'_{i+1,i}(x_{i+1}) = f_{i+1}^{-1}(x_{i+1})g_{i+1,i}(x_{i+1})f_i(x_{i+1}), i = 0, \dots, n-1$$

y  $g'_{0,n}(x_0) = f_0^{-1}(x_0)g_{n,0}(x_0)f_n(x_0)$ . Como cada  $\gamma_i(0) = x_i$  y  $\gamma_i(1) = x_{i+1}$ , y está contenida en  $U_{\alpha_i}$ , se tiene que  $\{f_i(\gamma(t))\}_{t \in [0,1]}$  proporciona una isotopía entre  $f_i(x_i)$  y  $f_i(x_{i+1})$  de donde se sigue que  $f_i(x_{i+1})f_i^{-1}(x_i)$  es isotópico a la identidad y por consiguiente el producto  $g'_{0,n}(x_0)g'_{n,n-1}(x_n) \cdots g'_{2,1}(x_2)g'_{1,0}(x_1)$  es igual al producto  $f_0^{-1}(x_0)\lambda_{\mathcal{T}}([\gamma])f_0(x_0)$  en  $\mathcal{M}(F)$ . Esto nos muestra que la representación de monodromía está bien definida (no depende de la trivialización escogida), *salvo por conjugancia* en  $\mathcal{M}(F)$ . De ahora en adelante se escribirá  $\lambda$  en vez de  $\lambda_{\mathcal{T}}$  para denotar la representación de monodromía.

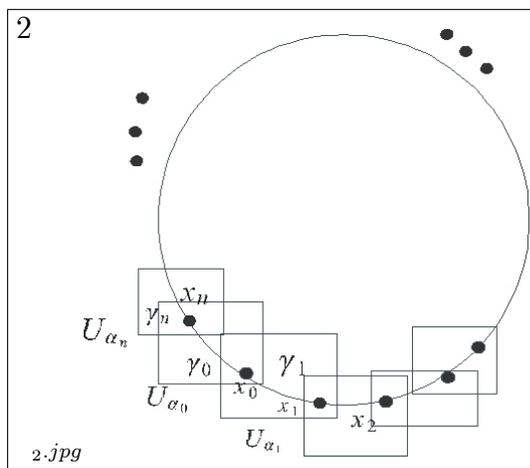


Figura 1.3: Monodromía

**Observación 1.1.16** Es posible hacer que  $\lambda_{\mathcal{T}}$  sea un *homomorfismo* en lugar de un antihomomorfismo mediante el artificio trivial de redefinir la multiplicación en  $\pi_1(B, x_0)$  intercambiando el orden de los factores. Es decir, se define una nueva operación en  $\pi_1(B, x_0)$ ,  $[\alpha] \cdot [\beta]$ , como  $[\beta][\alpha]$ . No hay entonces ningún problema en suponer que *la representación de monodromía es un homomorfismo de grupos*, lo que se supondrá de ahora en adelante.

### Monodromía en un fibrado con fibra discreta

Es un resultado estándar de la teoría de espacios recubridores que si  $p : Y \rightarrow B$  es un fibrado con fibra discreta,  $v_0 \in Y_{x_0}$  es un punto en la fibra de  $x_0 \in B$ , entonces para cada curva cerrada gama  $\gamma$  que comience y termine en  $x_0$ , existe un único levantamiento de  $\gamma$  a  $Y$  que comienza en  $v_0$ , es decir, una única curva  $\gamma'$  en  $Y$  tal que  $p \circ \gamma' = \gamma$  y  $\gamma'(0) = v_0$ . Además, el punto final de  $\gamma$ ,  $v_1 = \gamma(1)$ , no depende de su clase de homotopía, ya que toda homotopía en  $B$  se puede “levantar” a una homotopía en  $Y$  ([12], Pág. 157).

Sea  $f : E \rightarrow X$  un recubrimiento universal de una variedad  $X$ ,  $F$  un conjunto cualquiera dotado de la topología discreta y sea  $\rho(X, x_0) \rightarrow B(F)$  una representación del grupo fundamental con base  $x_0 \in X$  en el grupo de biyecciones de  $F$ . Si  $p : E_F \rightarrow X$  denota el fibrado asociado a  $(E, f)$  se tiene entonces la siguiente afirmación.

**Observación 1.1.17** Para cada punto en la fibra  $v_0 \in (E_F)_{x_0}$ , el punto  $v_1$  donde termina el único levantamiento de  $\gamma$  de  $E_F$  que comienza en  $v_0$  es precisamente  $v_1 = \lambda_{\mathcal{T}}([\gamma])$ .

**Prueba.** (Con la notación del párrafo anterior)

Denotemos por  $\phi_i : p^{-1}(U_{\alpha_i}) \rightarrow U_{\alpha_i} \times F$  trivializaciones sobre un cubrimiento  $\mathcal{T} = \{U_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$  de  $X$ . Vemos que  $\gamma'_0 = \phi_0^{-1}(\gamma_0(t), v_0)$  es un levantamiento del arco  $\gamma_0$  que comienza en  $v_0$ . De igual forma,  $\gamma'_1 = \phi_1^{-1}(\gamma_1(t), g_{10}(x_1) \cdot v_0)$  es un levantamiento del arco  $\gamma_1$  que comienza donde termina  $\gamma'_0$ . Se puede continuar de esta manera y definir

$$\gamma'_i = \phi_i^{-1}(\gamma_{i-1}(t), g_{i,i-1}(x_n) \cdots g_{2,1}(x_2)g_{1,0}(x_1) \cdot v_0), \quad i = 0, \dots, n-1$$

que será un levantamiento de  $\gamma_i$  que comienza donde termina  $\gamma_{i-1}$ . Es claro entonces que  $\gamma'_n$  termina precisamente en el punto  $\lambda_{\mathcal{T}}([\gamma])(v_0)$  lo cual demuestra la afirmación debido a que sólo existe un levantamiento de  $\gamma$  ■

### Monodromía en una fibración elíptica

Sea  $f : E \rightarrow X$  una fibración elíptica sobre una variedad suave  $M$ , con fibra  $T^2$ , una superficie suave, cerrada y orientada de género 1. Entonces una representación de monodromía  $\lambda : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \mathcal{M}(F)$  será un homomorfismo al grupo de clases de mapeo del toro. Este grupo resulta ser  $SL(2, \mathbb{Z})$ , el grupo de matrices  $2 \times 2$  con entradas enteras y determinante 1. Si se fija un punto base  $u_0 \in T^2$ ,  $\pi_1(T^2, u_0)$  es isomorfo a  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . Si se fija una base  $\mathcal{B}$  para este grupo, por ejemplo, aquella conformada por el meridiano y la longitud  $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ , escogidos con orientaciones de tal forma que su producto de intersección sea positivo, entonces cada difeomorfismo  $h : T^2 \rightarrow T^2$  que preserve la orientación determina un automorfismo  $h_*$  del grupo fundamental el cual tiene entonces una representación matricial  $[h_*]_{\mathcal{B}}$  relativa a  $\mathcal{B}$ . Esta matriz tendrá entradas en  $\mathbb{Z}$  y determinante  $\pm 1$ . Como  $h$  preserva orientación, el determinante es 1 lo cual nos proporciona un homomorfismo de grupos

$$\begin{aligned} \tau : \text{Diff}^+(T^2) &\longrightarrow SL(2, \mathbb{Z}) \\ h &\longmapsto [h_*]_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

Es obvio que todo difeomorfismo isotópico a la identidad está en el kernel de  $\tau$ . No es difícil ver que el subgrupo de homomorfismos isotópicos a la identidad es precisamente el kernel ([33], Pág. 26). Por otro lado, como se verá

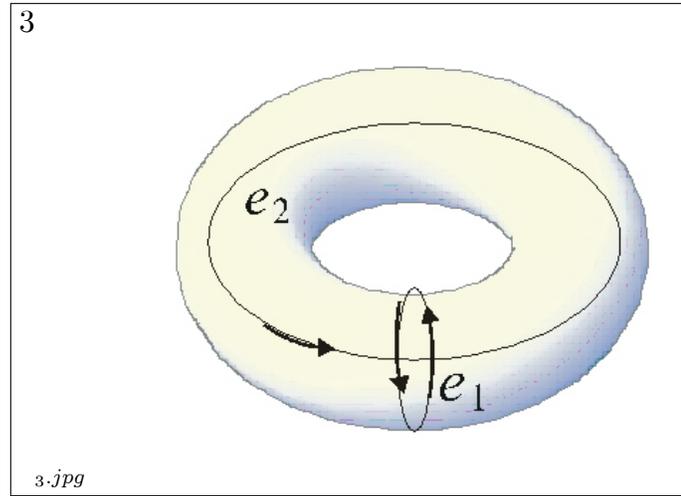


Figura 1.4: Toro

a continuación, el subgrupo generado por todos los *giros de Dehn derechos* tiene como imagen a todo el subgrupo  $SL(2, \mathbb{Z})$  lo cual muestra que  $\tau$  es un isomorfismo.

### El grupo de clases de mapeos del toro y giros de Dehn

Denotemos por  $A = \{z : 1 \leq |z| \leq 2\}$  el anulo en el plano complejo con su orientación estándar. Un giro de Dehn derecho en  $A$  es un elemento de  $D$  de  $\text{Diff}^+(A)$  definido como  $D(re^{i\theta}) = re^{i(\theta - 2\pi\psi(r))}$ , donde  $\psi : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función suave que toma el valor constante cero en el intervalo  $[1, 1 + 1/3]$ , monótona creciente en el intervalo  $[1 + 1/3, 2 - 1/3]$ , y toma el valor constante 1 en el intervalo  $[2 - 1/3, 2]$ . Intuitivamente, un giro de Dehn corresponde a ir girando (en sentido del reloj) cada círculo que compone el anulo un cierto ángulo, de tal forma que el círculo frontera interior  $|z| = 1$  gira cero grados, cada círculo interior gira un cierto ángulo que va aumentando gradualmente en forma suave hasta completar un giro completo de 360 grados para el círculo exterior  $|z| = 2$ .

Ahora, sea  $F$  cualquier superficie suave, orientada, posiblemente con frontera y sea  $\alpha$  una curva cerrada simple en  $\text{int}(F)$ , esto es, un embebimiento de un círculo en  $F$  que no toca la frontera. Si se toma la clausura  $\bar{T}_\alpha$  de un entorno tubular del submanifold  $\alpha$ , y un difeomorfismo que preserve la orien-

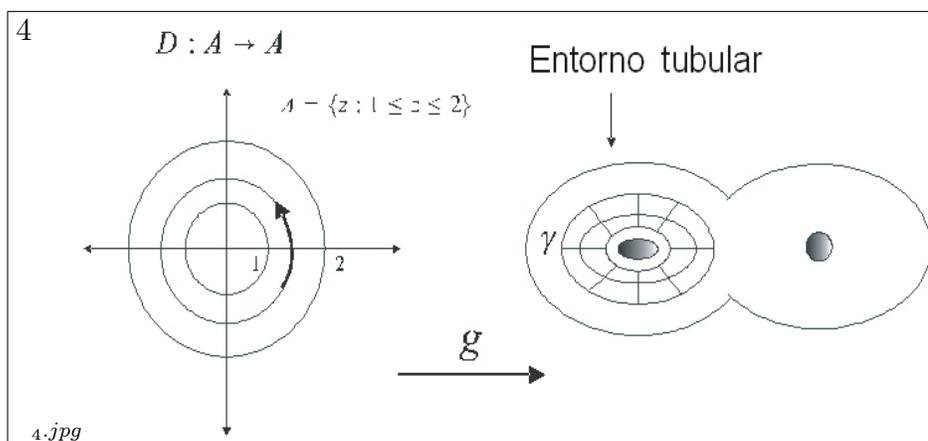


Figura 1.5: Giro de Dehn

tación  $g : A \rightarrow \bar{T}_\alpha$ , entonces *un giro derecho alrededor de  $\alpha$*  es el elemento  $D_\alpha$  de  $\text{Diff}^+(F)$  definido como

$$D_\alpha(p) = \begin{cases} gDg^{-1}(p) & \text{si } p \text{ está en } \bar{T}_\alpha \\ p & \text{si } p \text{ está en } F - \bar{T}_\alpha \end{cases}$$

Se puede demostrar sin dificultad que la clase de isotopía de  $D_\alpha$  en  $\text{Diff}^+(F)$  no depende de  $g$  ni tampoco del entorno tubular escogido. Más aún, si  $\alpha$  es isotópica a  $\beta$  (como embebimientos de  $S^1$ ) entonces  $D_\alpha$  y  $D_\beta$  determinan el mismo elemento en  $\mathcal{M}(F)$ . Todo esto sigue siendo cierto si  $D_\alpha$  es considerado como un elemento de  $\text{Diff}^+(F, \partial F)$  ([4], capítulo 4).

En el caso en el que  $F$  es una superficie suave, cerrada, orientada y de género 1,  $T^2$ , los giros de Dehn positivos a lo largo de el meridiano y la longitud,  $e_1$  y  $e_2$ , tienen como imagen bajo  $\tau$  a las matrices

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Cualquier otro giro a lo largo de otra curva tendrá como imagen la matriz identidad o un conjugado de una de estas dos matrices ([4], capítulo 4). Por otro lado, un computo muestra que si  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  es una matriz cualquiera en  $SL(2, \mathbb{Z})$ , el efecto de multiplicar a izquierda a  $A$  por  $U^\varepsilon$  y  $V^\varepsilon$ , donde  $\varepsilon = \pm 1$ , es, en el primer caso, el de reemplazar la primera fila de  $A$ ,  $[a, b]$ ,

por  $[a + \varepsilon c, b + \varepsilon d]$ , y en el segundo, el de reemplazar la segunda fila por  $[c - \varepsilon a, d - \varepsilon b]$ . En forma similar,  $AU^\varepsilon$  y  $AV^\varepsilon$  son matrices que se pueden obtener de  $A$  reemplazando la segunda columna

$$\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \text{ por } \begin{bmatrix} b + \varepsilon a \\ d + \varepsilon c \end{bmatrix},$$

en el primer caso, y reemplazando la primera columna

$$\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \text{ por } \begin{bmatrix} a - \varepsilon b \\ d - \varepsilon d \end{bmatrix}.$$

Iterando estas operaciones se ve entonces que *multiplicando a izquierda y derecha por  $U^\varepsilon$  y  $V^\varepsilon$  se pueden realizar todas las operaciones fila y columna estándar “del tercer tipo”, es decir, reemplazo de una fila o columna por su suma con un múltiplo entero de la otra fila o columna.* Esto permite demostrar el siguiente teorema.

**Teorema 1.1.18** *Todo elemento de  $SL(2, \mathbb{Z})$  puede escribirse como un producto finito de las matrices  $U$  y  $V$  y por consiguiente como un producto finito de conjugados de  $U$ .*

**Prueba.** Dada cualquier matriz  $A$  en  $SL(2, \mathbb{Z})$ , veamos que después de realizar un número finito de operaciones fila y columna del tercer tipo  $A$  siempre puede llevarse a una de las formas siguientes:  $\pm Id$  o  $\pm W$ , donde  $Id$  denota la matriz identidad y  $W$  la matriz  $W = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ . Razonemos por inducción sobre la siguiente “norma” para  $A$ :

$$\mu(A) = |a| + |b| + |c| + |d| + \text{número de entradas no nulas de } A.$$

Si la afirmación no fuese cierta existiría un contraejemplo  $B$ , con  $\mu(B)$  minimal. Distingamos dos casos:

i) Si  $B$  tiene alguna entrada  $e \neq 0$  en la diagonal principal, cualquier otra entrada de la diagonal no principal, digamos  $z$ , deberá ser divisible por  $e$ , ya que de otra forma al dividir por  $e$ ,  $z = ne + r$ , se obtendría un residuo no nulo  $|r| < |e|$ . Pero al restar  $n$  veces la fila (o columna) donde está  $e$  de la otra fila (o columna) se obtendría otra matriz contraejemplo  $B'$  que tendría como entrada a  $r$  en alguna de las dos posibles posiciones de la diagonal no principal. Pero como  $|r| < |e|$ , entonces obviamente la norma de  $B'$  sería

menor que la de  $B$ . Luego  $r = 0$  y  $B'$  tendría una entrada no nula menos que  $B$ , lo que la haría un contraejemplo con menor norma, a menos que  $B$  tenga entradas nulas en la diagonal no principal. Pero como  $\det(B) = 1$ , se debe tener entonces que  $B = \pm Id$ , que ciertamente no es un contraejemplo.

ii) Si  $B$  tiene alguna entrada  $e \neq 0$  en la diagonal no principal, el razonamiento es similar, y se llegaría a que un contraejemplo minimal tendría que tener entradas nulas en la diagonal principal, y al tener determinante 1, tendrá que ser igual a  $\pm W$ , que tampoco es un contraejemplo.

Como se observó más arriba, toda operación fila y columna del tercer tipo puede realizarse multiplicando sucesivamente a izquierda y derecha por las matrices  $U^{\pm 1}$  y  $V^{\pm 1}$ . De aquí se sigue entonces que para toda matriz  $A$  existen productos  $P$  y  $Q$  de  $U^{\pm 1}$  y  $V^{\pm 1}$  tales que  $PAQ = \pm Id$ , ó  $PAQ = \pm W$ . Ahora, un computo directo muestra que se dan las siguientes identidades:  $-Id = (VU)^3$ ,  $VUV = W$ , de lo cual se sigue que  $Id = (VU)^6$ ,  $(VUV)(VU)^3 = -W$ . Luego en cualquier caso  $A = P^{-1}RQ^{-1}$ , donde  $R$  es un producto de las matrices  $U$  y  $V$ . Como  $(VU) = Id$  se sigue entonces que  $V^{-1} = U(VU)^5$  y  $U^{-1} = (VU)^5V$ , de donde se sigue que todo producto de  $U^{\pm 1}$  y  $V^{\pm 1}$  puede escribirse como producto de las matrices  $U$  y  $V$  y en particular esto es cierto para  $P^{-1}RQ^{-1}$ , lo cual demuestra la primera afirmación del teorema.

La segunda afirmación se sigue inmediatamente del hecho de que  $V = W^{-1}UW$  es un conjugado de  $U$ . ■

Como se verá más adelante, la monodromía alrededor de una fibra singular en una fibración elíptica es siempre de la clase de conjugancia de alguna de las matrices de la siguiente lista, que se llamará *lista de Kodaira*:

Lista de Kodaira,  $n \geq 0$

$$\begin{aligned}
 U^n &= \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & -U^n &= \begin{bmatrix} -1 & n \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\
 VU &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} & -VU &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 VUV &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} & -VUV &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 (VU)^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} & -(VU)^2 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

En el caso en el que  $F$  es una superficie suave de género  $\geq 2$ , su grupo

de clases de difeomorfismos es mucho más complicado. Un teorema profundo afirma que  $\mathcal{M}(F)$  es isomorfo al grupo de automorfismos del grupo fundamental de la superficie, módulo el subgrupo de automorfismos internos (que se obtienen por conjugación),  $\text{Aut}(\pi_1(F, x_0))/\text{Inn}(\pi_1(F, x_0))$ . Una descripción explícita de  $\mathcal{M}(F)$  la proporciona un teorema de Lickorish ([4], Pág. 168), el cual afirma que los giros de Dehn son generadores de este grupo, y en el caso en el que el género de  $F$  es 2, se muestra explícitamente un conjunto de generadores y relaciones.

## 1.2. Fibraciones singulares

### 1.2.1. Recubrimientos ramificados

En esta sección se definirán las nociones básicas sobre cubrimientos ramificados. Por comodidad nos restringiremos a la categoría suave, aunque estas nociones puedan definirse sin necesidad de introducir una estructura diferenciable. En lo que sigue nos restringiremos a la categoría de manifolds suaves dos dimensionales orientables que simplemente se llamarán *superficies*.

**Definición 1.2.1** Sean  $X$  y  $B$  dos superficies compactas (posiblemente con frontera) donde se supondrá que  $B$  es conexa y donde se permitirá en general que  $X$  no lo sea. Se dirá que una función suave  $\Phi : X \rightarrow B$  es un recubrimiento ramificado general si el conjunto  $Q = \{q_1, \dots, q_k\}$  de valores críticos de  $\Phi$  es finito y está contenido en el interior de  $B$ , y si además la restricción  $\Phi^\circ : X^\circ \rightarrow B^\circ$  es un recubrimiento de grado finito, donde  $X^\circ, B^\circ$  denotan los conjuntos  $X - \Phi^{-1}Q$  y  $B - Q$ , respectivamente.

Veamos a continuación que  $\Phi$  satisface las siguientes propiedades:

**Teorema 1.2.2** Sea  $\Phi : X \rightarrow B$  un recubrimiento ramificado general. Entonces se tiene que:

1.  $\Phi$  es sobreyectiva
2.  $\Phi(\text{int}(X)) = \text{int}(B)$  y  $\Phi(\partial X) = \partial B$
3. Para cada  $p \in \text{int}(X)$  existen cartas que preservan orientación alrededor de  $p$  y  $\Phi(p)$  que van a vecindades abiertas de  $0 \in \mathbb{C}$ , de tal manera que  $p$  y  $\Phi(p)$  son enviados en  $0 \in \mathbb{C}$ , y en las que  $\Phi$  toma la forma

$z \rightarrow z^{d_p}$  para cierto entero  $d_p \geq 1$ . Cuando esto ocurre se dirá que  $\Phi$  es modelada localmente por la función  $z \rightarrow z^{d_p}$ .

4.  $\partial X$  y  $\partial B$  son uniones disjuntas de un número finito de círculos orientados, y la restricción  $\Phi : \partial X \rightarrow \partial B$  es un recubrimiento cuyo grado coincide con el de  $\Phi^\circ$

**Prueba.** La sobreyectividad se sigue inmediatamente de la definición. Veamos entonces que  $\Phi$  envía el interior de  $X$  en el de  $B$ . Si ocurriera que  $p \in \text{int}(X)$  y  $\Phi(p) \in \partial B$  entonces existirían cartas  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  alrededor de  $p$  y  $\Phi(p)$ , con  $\sigma_1(p) = \sigma_2(\Phi(p)) = 0$ ,  $\text{im}\sigma_1 = D$  e  $\text{im}\sigma_2 = H$ , donde  $D$  denota el disco unitario y  $H$  el semiplano superior, para las cuales  $\phi = \sigma_2\Phi\sigma_1^{-1}$  sería una función suave. Pero  $p$  no es punto crítico de  $\Phi$ , ya que de serlo su imagen sería un valor crítico que no estaría en el interior de  $B$ . Entonces, el teorema de la función implícita aplicado a  $\phi$  garantiza la existencia de entornos alrededor de  $\sigma_1(p)$  y  $\sigma_2(\Phi(p))$  donde  $\phi$  es un difeomorfismo lo cual contradice el hecho de que la imagen de  $\phi$  está contenida en  $H$ .

Para ver que la frontera se envía en la frontera, demostremos primero la afirmación 3. Tomemos un entorno  $U_{\Phi(p)}$  de  $\Phi(p)$  difeomorfo al disco unitario  $D$  de tal manera que si  $V$  denota la preimagen de  $U_{\Phi(p)}^\circ = U_{\Phi(p)} - \{\Phi(p)\}$  bajo  $\Phi$ ,  $\Phi : V \rightarrow U_{\Phi(p)}^\circ$  sea un cubrimiento. Pero por el teorema fundamental de la teoría de recubrimientos, todos los posibles finitos y conexos del disco abierto sin el punto origen,  $D^\circ$  son equivalentes a uno de los recubrimientos que envían  $z \in D^\circ$  en  $z^{d_p} \in D^\circ$ , para cierto  $d_p \geq 1$ . Por tanto  $V$  es difeomorfo a una unión disjunta de discos sin punto origen para los cuales la restricción de  $\Phi$  tiene la forma  $z \rightarrow z^{d_j}$ . Esto demuestra 3.

Supongamos por el contrario que  $p \in \partial X$  se enviara en  $\Phi(p) \in \text{int}(B)$ . Existen cartas  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  alrededor de  $p$  y  $\Phi(p)$ , con  $\sigma_1(p) = \sigma_2(\Phi(p)) = 0$  y cuyas imágenes son  $H$  y  $D$ , respectivamente. Al quitar el origen en ambos conjuntos, el mapeo  $\phi = \sigma_2\Phi\sigma_1^{-1} : H^\circ \rightarrow D^\circ$  sería un cubrimiento del disco sin origen. Pero esto forzaría a que  $H^\circ$  fuera homeomorfo a  $D^\circ$  lo cual es absurdo.

Finalmente, 4 se sigue inmediatamente de la definición. ■

El próximo objetivo es ver que *el recubrimiento  $\Phi^\circ$  determina completamente el recubrimiento ramificado original*. Considerando por separado cada componente conexa de  $X$  podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $X$  es conexa. La afirmación precisa es la siguiente:

**Teorema 1.2.3** *Sea  $X^\circ$  una superficie conexa,  $Y$  una superficie compacta,  $Q \subset Y$  un subconjunto finito y  $\phi^\circ : X^\circ \rightarrow Y^\circ$  un recubrimiento con fibra finita, donde  $Y^\circ = Y - Q$ . Entonces existe una superficie compacta  $X$ , un embebimiento abierto  $X^\circ \xrightarrow{i} X$  y un mapeo ramificado  $\phi : X \rightarrow Y$  de tal forma que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{array}{ccc} X^\circ & \xrightarrow{i} & X \\ \downarrow \phi^\circ & & \downarrow \phi \\ Y^\circ & \subset & Y \end{array} \quad (1.10)$$

Más aún, el par  $(X, \phi)$  es único, es decir, si  $(X', \phi')$  es otro par con esta propiedad, existe un difeomorfismo  $\lambda : X \rightarrow X'$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} X^\circ & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{\phi} & Y \\ & \searrow i' & \downarrow \lambda & \nearrow \phi' & \\ & & X' & & \end{array}$$

**Prueba.** Sea  $Q = \{q_1, \dots, q_k\}$ . Por el teorema anterior, alrededor de cada punto  $q_i$  podemos escoger una vecindad  $U_i$  tal que si  $U_i^\circ = U_i - \{q_i\}$ , entonces  $\phi^{-1}(U_i^\circ) = V_{i1}^\circ \cup \dots \cup V_{im(i)}^\circ$  es la unión disjunta de abiertos conexos  $V_{ij}^\circ$  tales que  $\phi$  restringido a  $V_{ij}^\circ$  es un recubrimiento de grado  $d_{ij}$ . Por la condición 4 del teorema anterior podemos escoger cartas orientación preservantes  $\sigma_1 : D^\circ \rightarrow U_i^\circ$ ,  $\sigma_2 : D^\circ \rightarrow V_{ij}^\circ$  tales que el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{array}{ccc} D^\circ & \xrightarrow{\sigma_1} & V_{ij}^\circ \\ z^{d_{ij}} \downarrow & & \downarrow \phi \\ D^\circ & \xrightarrow{\sigma_2} & U_i^\circ \end{array}$$

Para cada  $i = 1, \dots, k$ , escojamos puntos  $p'_{ij}$ ,  $j = 1, \dots, m(i)$  y definamos  $X = X^\circ \cup \{p'_{ij}\}$ . A este conjunto se le da la única topología con la siguiente propiedad: si  $\{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$  es una base alrededor de  $q_i$  entonces  $\{p'_{ij}\} \cup (\phi^{-1}(W_\alpha) \cap V_{ij}^\circ)$  es una base alrededor de  $p_{ij}$  y la topología de  $X$  es precisamente la inducida por dichas bases locales. El mapeo  $\lambda$  se define en forma obvia, como la única extensión de  $\phi$  que envía a  $p_{ij}$  en  $q_i$ . Es inmediato verificar que (1.10) conmuta y que es ramificado. La unicidad del mapeo se sigue sin dificultad. ■

En muchos de los problemas que se considerarán en el capítulo siguiente, se tendrá una fibración singular al disco unitario abierto o cerrado en vez

de una fibración a la esfera  $S^2$ . Sin embargo, cuando la fibra es discreta, es posible pasar de una situación a la otra sin que ninguno de los problemas en cuestión cambie fundamentalmente. Esto gracias a la siguiente proposición que será enunciada para el disco abierto. La prueba para el disco cerrado sigue exactamente las mismas líneas y será omitida.

**Proposición 1.2.4** *Si  $\phi : E \rightarrow D$  es una fibración singular discreta al disco abierto, con fibra discreta  $F$ . Entonces existe otra fibración singular con fibra discreta  $\psi : Y \rightarrow S^2$  tal que si  $D'$  denota el hemisferio superior (abierto) de  $S^2$  y  $Y'$  denota a  $\psi^{-1}(D')$  entonces  $\psi|_{Y'} : Y' \rightarrow D'$  es cuadrado equivalente a  $\phi : E \rightarrow D$ .*

**Prueba.** Sea  $Q = \{q_1, \dots, q_k\}$  el conjunto de valores singulares de  $\phi$  y sea  $\lambda : \pi_1(D^\circ, q_0) \rightarrow \text{Diff}^+(F)$  la representación de monodromía, donde  $q_0$  es un punto cualquiera en  $D^\circ = D - Q$ . fijemos  $\overline{D}_1, \dots, \overline{D}_k$  discos cerrados con centro  $q_1, \dots, q_k$  y disjuntos por pares, y un punto  $q_0$  en  $S^2$  que no esté en  $Q$ . Sean  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  arcos de Jordan mutuamente disjuntos, contenidos en  $S^2 - \bigcup \overline{D}_i$ , que comienzan en  $q_0$  y terminan en un punto  $z_i \in \partial \overline{D}_i$ . Sea  $\alpha_i$  el bucle que comienza en  $q_0$  recorre  $\gamma_i$  hasta  $z_i$ , luego recorre a  $\partial \overline{D}_i$  en dirección positiva y regresa a  $q_0$  siguiendo a  $\gamma_i$ . Escojamos la base para  $\pi_1(D^\circ, q_0)$  conformada por clases de arcos  $[\alpha_1], \dots, [\alpha_k]$ . Denotemos por  $(S^2)^\circ$  a la esfera a la que se le han removido  $k + 1$  puntos  $q'_1, \dots, q'_k$  en el hemisferio superior  $D'$  y otro punto más  $q'_{k+1}$  en el hemisferio inferior. Sea  $j : D \rightarrow D'$  un embebimiento que envíe a  $q_i$  en  $q'_i$ , para  $i = 0, \dots, k$ . Si  $\alpha'_{k+1}$  es un arco de Jordan que parte de  $q'_0$  y rodea a  $q'_{k+1}$  disjunto de los arcos  $\alpha'_i = j(\alpha_i)$ , entonces es bien conocido que la colección  $[\alpha'_1], \dots, [\alpha'_{k+1}]$  genera el grupo fundamental  $\pi_1((S^2)^\circ, q'_0)$  y dichos generadores están sujetos a una única relación  $[\alpha'_1] \cdots [\alpha'_{k+1}] = 1$ .

Escojamos un espacio recubridor universal para  $(S^2)^\circ$ ,  $X \rightarrow (S^2)^\circ$ , el cual será considerado como un  $\pi_1((S^2)^\circ, q'_0)$ -fibrado principal sobre  $(S^2)^\circ$  y definamos  $\rho : \pi_1((S^2)^\circ, q'_0) \rightarrow \text{Diff}^+(F)$  como el homomorfismo que envía cada  $[\alpha'_i]$  en  $\lambda([\alpha_i])$ , para  $i = 1, \dots, k$  y a  $\lambda([\alpha'_{k+1}]) = \lambda([\alpha'_1] \cdots [\alpha'_k])^{-1}$ , esto último con el fin de que la única relación entre los generadores del grupo fundamental de  $(S^2)^\circ$  sea enviada en la identidad y por ende  $\rho$  quede bien definido. Como se vio en las secciones 1.1.2 y 1.1.3 la representación  $\rho$  puede usarse para construir un fibrado asociado a  $Y = X_F$ ,  $\psi : Y \rightarrow (S^2)^\circ$  con fibra  $F$ . Como se demostró en la observación 1.1.17 la monodromía en la fibra sobre  $q'_0$  para cualquier clase  $[\alpha'] \in \pi_1((S^2)^\circ, q'_0)$  es precisamente  $\rho([\alpha'])$ . Ahora, si

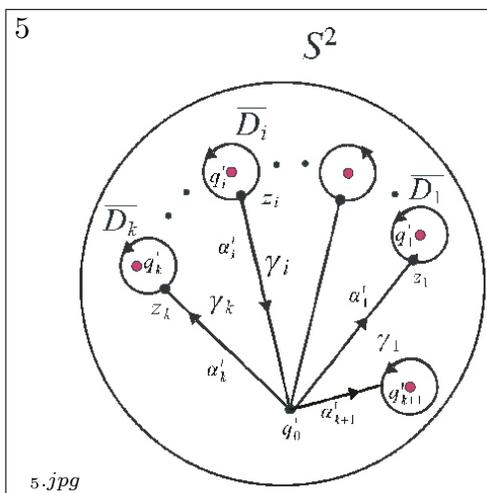


Figura 1.6: Proposición 1.2.4

$Y'$  denota a  $\psi^{-1}(D')$  entonces, por la observación 1.1.15, la restricción de  $\psi$  a  $Y'$ ,  $\psi|_{Y'} : Y' \rightarrow D'$ , es un fibrado equivalente a  $j \circ \phi : E' \rightarrow (D')^\circ$ , donde  $(D')^\circ = D' - \{q'_1, \dots, q'_k\}$  y  $E' = \phi^{-1}((D')^\circ)$ . Pero el teorema 1.2.3 implica que  $j \circ \phi : E \rightarrow D'$  y  $\psi|_{Y'} : Y' \rightarrow D'$  también son equivalentes y en consecuencia  $\phi : E \rightarrow D$  y  $\psi|_{Y'} : Y' \rightarrow D'$  son cuadrado equivalentes.

■

## 1.2.2. Fibraciones elípticas singulares

La noción análoga de recubrimiento ramificado para fibraciones con fibra un toro es la siguiente.

**Definición 1.2.5** Sean  $E, B$  manifolds suaves y orientados, donde  $B$  es una superficie conexa sin frontera. Una función suave  $p : E \rightarrow B$  se denomina una *fibración elíptica singular* si  $p$  es una función propia, sobreyectiva con finitos valores críticos  $Q = \{q_1, \dots, q_k\}$  y tal que la restricción  $p^\circ : E^\circ \rightarrow B^\circ$  es una *fibración elíptica*, donde  $E^\circ, B^\circ$  denotan los conjuntos  $E - p^{-1}(Q)$  y  $B - Q$ , respectivamente. A las fibras sobre los puntos crítico se le llamará *fibras singulares*.

**Observación 1.2.6** Si  $p^\circ$  es un mapeo propio, sobreyectivo, suave y sin puntos críticos, un teorema clásico de C. Ehresman ([10]) garantiza que

$p^\circ : E^\circ \rightarrow B^\circ$  es una fibración. Por tanto, en la definición anterior basta entonces con suponer la condición más débil de que cada fibra de  $p^\circ$  sea un toro para que  $p^\circ : E^\circ \rightarrow B^\circ$  sea una fibración elíptica.

Existe un análogo del teorema 1.2.3 para fibraciones elípticas sobre el disco cerrado menos el origen,  $D^\circ = D - Q$ , con  $Q = \{0\}$ . Para el caso en el que el género de la fibra genérica es mayor que 1, su demostración es mucho más difícil [23] y [24]. Para enunciar este teorema es necesario antes definir la noción de fibra singular relativamente minimal.

**Definición 1.2.7** *Si  $p : E \rightarrow B$  es una fibración elíptica singular, una fibra singular  $p^{-1}(q_i)$  se llama relativamente minimal si no es posible encontrar una esfera embebida en  $E$  con auto intersección  $-1$ .*

La minimalidad es una condición natural ya que siempre es posible hacer una explosión (*blow up*) en cualquier punto de una fibra singular e introducir de este modo una esfera con auto intersección  $-1$  sin cambiar la monodromía alrededor de la fibra singular (véase por ejemplo [2] y [11]). Este condición se requiere, por ejemplo, cuando se quiera tener unicidad en una “completación”, como se verá en el teorema siguiente [17].

**Teorema 1.2.8 (Kodaira)** *Sea  $p^\circ : E^\circ \rightarrow D^\circ$  una fibración elíptica sobre el disco unitario abierto sin el origen donde  $p^\circ$  es holomorfa. Fijemos un punto cualquiera  $q_0 \in D^\circ$  y sea un  $C$  una curva simple cerrada que contenga a  $q_0$  y rodee el origen. Por ejemplo, para cada escogencia  $1 > r > 0$  se puede tomar  $q_0 = 1 - r$  y  $C$  el círculo de radio  $1 - r$  recorrido en sentido positivo. Sea  $f = \lambda([C])$  la monodromía alrededor de  $C$ , donde*

$$\lambda : \pi_1(D^\circ, q_0) \rightarrow \mathcal{M}(T^2)$$

*es la representación de monodromía del fibrado. Entonces, si  $f$  es de la clase de conjugancia de un elemento de la lista e Kodaira, existe una fibración elíptica singular  $p : E \rightarrow D$  y un embebimiento  $i : E^\circ \hookrightarrow E$  en un abierto de  $E$  que hace conmutar el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} E^\circ & \xhookrightarrow{i} & E \\ \downarrow p^\circ & & \downarrow p \\ D^\circ & \subset & D \end{array} \quad (1.11)$$

Más aún: en el caso en el que la monodromía sea la identidad o  $U^n$  es posible escoger la fibra central con multiplicidad arbitraria (de tipo  $mI_0$ , respectivamente de tipo  $mI_n$  para cualquier  $m > 0$ , ver sección 3.3) y dotar a  $E$  de estructura holomorfa de tal forma que si le damos a  $D$  su estructura holomorfa estándar,  $p$  resulta ser una función holomorfa.

Además, dos pares  $(E, p)$  y  $(E', p')$  que hagan conmutar a (1.11) son únicos si las fibras singulares ( $p^{-1}(0)$  y  $p'^{-1}(0)$ ) son minimales y no son múltiples (ver sección 3.3). En forma precisa, la unicidad quiere decir que existe un difeomorfismo  $l : E \rightarrow E'$  que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} E^\circ & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{\phi} & D \\ & \searrow i' & \downarrow l & \nearrow \phi' & \\ & & E' & & \end{array}$$

Matsumoto y Montesinos muestran que este teorema es cierto para cualquier fibración sobre  $D^\circ$  con fibra una superficie cerrada  $F$  de género  $g > 0$  bajo la hipótesis de que  $\lambda([C])$  sea un elemento *pseudo-periódico de giro derecho* (para ver una definición de este concepto así como la prueba de este teorema el lector puede consultar [23]). En el caso que interesa a esta investigación, es decir cuando  $g = 1$ , la condición anterior equivale a que  $\lambda([C])$  sea de la *clase de conjugancia de un elemento en la lista de Kodaira* (1.9).

Este teorema permite completar localmente cada fibración sobre  $D^\circ$  a una fibración sobre  $D$  con una fibra central singular que está unívocamente determinada, salvo conjugancia, por la monodromía alrededor del origen y por tanto puede generalizarse sin dificultad para demostrar el análogo del teorema 1.2.1 en el caso en el que  $Y = S^2$  es la esfera. En este caso, si  $Q = \{q_1, \dots, q_k\}$  es un conjunto finito de puntos de  $S^2$ , fijemos como en la prueba de la proposición 1.2.4  $\bar{D}_1, \dots, \bar{D}_k$ , discos cerrados con centro  $q_1, \dots, q_k$  y disjuntos por pares, y un punto  $q_0$  en  $S^2$  que no esté en  $Q$ . Sean  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  arcos de Jordan mutuamente disjuntos, contenidos en  $S^2 - \bigcup \bar{D}_i$ , que comienzan en  $q_0$  y terminan en un punto  $z_i \in \partial \bar{D}_i$ . Sea  $\alpha_i$  el bucle que comienza en  $q_0$  recorre  $\gamma_i$  hasta  $z_i$ , luego recorre a  $\partial \bar{D}_i$  en dirección positiva y regresa a  $q_0$  siguiendo a  $\gamma_i$ . Con esta notación tenemos el siguiente teorema.

**Teorema 1.2.9** *Sea  $p^\circ : E^\circ \rightarrow (S^2)^\circ$  una fibración elíptica sobre la esfera a la que se le ha quitado un conjunto finito de puntos  $Q = \{q_1, \dots, q_k\}$ . Supóngase que la monodromía alrededor de  $q_i$ ,  $\lambda([\alpha_i])$ , es un elemento conjugado de una matriz de la lista de Kodaira (1.9). Entonces existe una fibración singular  $p : E \rightarrow S^2$  única, salvo isomorfismos,  $p : E \rightarrow S^2$  y un embebimiento*

abierto  $i : E^\circ \hookrightarrow E$  que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} E^\circ & \xhookrightarrow{i} & E \\ \downarrow p^\circ & & \downarrow p \\ (S^2)^\circ & \subset & S^2 \end{array}$$

**Prueba.** Para cada disco perforado  $D_i^\circ = D_i - \{q_i\}$  en  $S^2$  escojamos un embebimiento  $\phi_i : D_i^\circ \rightarrow D$  en el disco abierto unitario  $D$ , con imagen el disco menos el origen,  $D^\circ$ . Considérese el diagrama conmutativo siguiente

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(D_i^\circ) & \xhookrightarrow{\lambda_i} & X_i \\ p \downarrow & & \downarrow p_i \\ D_i^\circ & \xrightarrow{\phi_i} & D \end{array}$$

donde  $p_i : X_i \rightarrow D$  es la fibración singular cuya existencia garantiza el teorema anterior.

El espacio total  $E$  buscado se obtiene “pegando” inductivamente cada  $X_i$  a lo largo de la región abierta  $\text{im}(\lambda_i)$  que es la imagen del embebimiento  $\lambda_i$ , vía su inversa. En forma precisa, sea  $E_1 = E^\circ \cup_{\lambda_1} X_1$  el espacio cociente que se obtiene de la unión disjunta  $E^\circ \cup X_1$ , módulo la relación de equivalencia  $x \sim \lambda_1(x)$ , para cada  $x \in (p)^{-1}(D_1^\circ)$

$$E_1 = (E^\circ \cup X_1) / \sim .$$

Se verifica sin dificultad que  $E_1$  es una variedad compleja y que la función  $p_1 : E_1 \rightarrow (S^2 - \{q_2, \dots, q_k\})$  que envía la fibra singular (definida como el conjunto de todas las clases de equivalencia de los elementos de  $p_1^{-1}(0)$ ) en  $q_1$  y que está definida como  $p^\circ$  en cualquier otro punto, está bien definida y que también es suave. Este procedimiento se continua inductivamente hasta obtener un espacio total  $E = E^\circ \cup_{\lambda_1} X_1 \cdots \cup_{\lambda_k} X_k$  en el cual hay definida en forma canónica una proyección  $p : E \rightarrow S^2$ .

La unicidad se sigue sin dificultad de la unicidad local que garantiza el teorema anterior.

■

**Observación 1.2.10** La prueba del teorema, por ser una construcción esencialmente local, puede repetirse sin ningún cambio fundamental reemplazando  $S^2$  por el disco unitario abierto o cerrado. Este teorema da condiciones

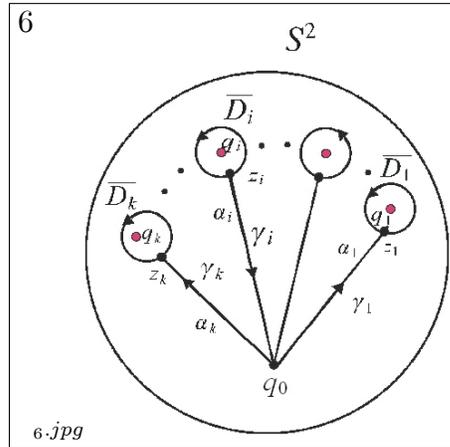


Figura 1.7: teorema 1.2.9

suficientes para que un haz fibrado pueda completarse a una fibración elíptica singular, la cual es esencialmente única. Como se verá en el capítulo 3, toda fibra singular de una fibración elíptica tiene que ser de un tipo particular de la lista de Kodaira y por tanto la condición de que cada monodromía  $\lambda([\alpha_i])$  sea la de un conjugado de una de las matrices de la lista (1.9) es también necesaria.

En este punto es natural preguntarse si existe una descripción puramente combinatoria de la parte no ramificada de una fibración elíptica singular. En forma precisa, si existe un análogo de la observación 1.1.15 en el sentido de que la monodromía determine la parte no ramificada de la fibración, y por el teorema anterior, determine la fibración. La respuesta a esta pregunta sólo se conoce en algunos casos particulares, como se verá más adelante en el lema 3.5.2, y como puede verse en ([23], teorema 2.4 y [27], Pág. 163).

# Capítulo 2

## Fibraciones discretas

### 2.1. Introducción

En este capítulo se discutirá el *problema de coalescencia de puntos críticos para fibraciones discretas*. El resultado central se ha condensado en el teorema 2.3.6. Este problema está estrechamente relacionado con el *problema clásico de Hurwitz* y el llamado *problema de la  $\pi$ -geografía*. El lector interesado puede consultar [38]. Se introducen a continuación la terminología y los conceptos básicos necesarios para la prueba del teorema.

### 2.2. Conceptos y lemas básicos

**Definición 2.2.1** Denotemos por  $J_d$  al conjunto de los enteros  $\{1, \dots, d\}$  y sea  $\pi : J_d \rightarrow J_d$  una biyección cualquiera, es decir un elemento del grupo simétrico  $\mathcal{S}_d$ . La permutación  $\pi$  admite una única descomposición en ciclos disjuntos que pueden ordenarse de tal forma que sus longitudes estén en orden decreciente. Esta descomposición determina entonces una partición  $d_1, \dots, d_l$  de  $d$ , donde  $d_i$  es la longitud del  $i$ -ésimo ciclo, y donde el número de ciclos,  $l$ , se denominará la longitud de  $\pi$  y se denotará por  $l(\pi)$ .

Para cada  $\pi \in \mathcal{S}_d$  se define una 1-variedad suave, cerrada y orientada que se denotará por  $M_\pi$ , tomando la 1-variedad producto  $J_d \times \mathbb{R}$ , orientada de tal manera que cada  $\{j\} \times \mathbb{R}$  tenga la orientación usual de  $\mathbb{R}$ , e identificando aquellos pares de puntos  $(r, t)$  y  $(r', t')$  tales que  $t' - t \in \mathbb{Z}$  y  $\pi^{t'-t}(r) = r'$ . Es fácil ver que  $M_\pi$  resulta ser la unión disjunta de  $l(\pi)$  círculos orientados. Sea

$\phi_\pi : M_\pi \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$  la función definida por  $\phi_\pi([j, r]) = [r]$ . Esta función es un recubrimiento de grado  $d$  que respeta las orientaciones, y es tal que los grados de sus restricciones a cada una de las componentes conexas de  $M_\pi$ , debidamente ordenadas, forman la partición de  $d$  determinada por la descomposición en ciclos disjuntos de  $\pi$ .

**Definición 2.2.2** Se llamará completación de  $\phi_\pi : M_\pi \rightarrow S^1$  a cualquier recubrimiento ramificado general (definición 1.2.1)  $\Phi : X \rightarrow \overline{D}$ , donde  $X$  es una 2-variedad suave con frontera, compacta y orientada,  $\overline{D}$  es el disco unitario cerrado, dotado de la orientación estándar (aquella inducida por la estructura compleja) y tal que la restricción  $\Phi|_{\partial X} : \partial X \rightarrow S^1$  es cuadrado-equivalente a  $\phi_\pi : M_\pi \rightarrow S^1$ . Recuérdese que esto último significa que existen difeomorfismos (que preservan orientación)  $H : \partial X \rightarrow M_\pi$  y  $h : S^1 \rightarrow S^1$  tales que  $\phi_\pi \circ H = h \circ \Phi|_{\partial X}$ .

A la colección formada por todas las completaciones de  $\phi_\pi : M_\pi \rightarrow S^1$  se le denotará por  $\mathcal{C}_\pi$ .

**Definición 2.2.3** Dos recubrimientos ramificados generales  $\Phi_i : X_i \rightarrow Y$ , con  $i = 1, 2$ , se dice que son topológicamente equivalentes ó  $T$ -equivalentes si el número de componentes conexas de  $X_1$  es igual al número de componentes conexas de  $X_2$  y éstas pueden ser enumeradas como  $\{X_{1,j} : 1 \leq j \leq r\}$  y  $\{X_{2,j} : 1 \leq j \leq r\}$ , de tal manera que la restricción de  $\Phi_1$  a  $X_{1,j}$  es cuadrado-equivalente a la restricción de  $\Phi_2$  a  $X_{2,j}$ , para cada  $j = 1, \dots, r$ .

Dos elementos en una familia de recubrimientos cualquiera  $\mathcal{F}$ ,  $\Phi_i : X_i \rightarrow Y$ ,  $i = 1, 2$ , se dice que son  $b$ -equivalentes en  $\mathcal{F}$  si existe una función suave  $F : X_1 \times [0, 1] \rightarrow Y$  de tal manera que para cada  $t \in [0, 1]$  la función  $F_t : X_1 \rightarrow Y$  definida por  $F_t(p) = F(p, t)$  es un elemento de  $\mathcal{F}$ ,  $F_0 = \Phi_1$  y  $F_1 : X_1 \rightarrow Y$  es  $T$ -equivalente a  $\Phi_2 : X_2 \rightarrow Y$ .

Dos recubrimientos de  $\mathcal{C}_\pi$   $b$ -equivalentes en la familia  $\mathcal{C}_\pi$  se llamarán simplemente  $b$ -equivalentes.

**Definición 2.2.4** Se dirá que un elemento  $\Phi \in \mathcal{C}_\pi$  es semiestable si alrededor de cada punto crítico,  $\Phi$  es modelada por la función  $z \rightarrow z^2$ . Se dirá que  $\Phi$  es simple, si es semiestable, y si la fibra de cada valor crítico solo contiene un punto crítico de  $\Phi$ .

Ahora, sean  $X$  y  $B$  2-variedades suaves, cerradas (esto es, compactas y sin frontera), conexas y orientadas y sea  $\Phi : X \rightarrow B$  un recubrimiento ramificado

general. Para cada  $p \in X$  el entero no negativo  $r_p = d_p - 1$  se llama *índice de ramificación de  $\Phi$  en  $p$* , donde  $d_p$  denota el grado local del mapeo  $\Phi$  en  $p$  ( $\Phi$  es modelado localmente alrededor de  $p$  como  $z \rightarrow z^{d_p}$ ). Es bien conocido que la siguiente relación, conocida como *fórmula de Riemann-Hurwitz* se satisface:

$$\chi(X) = d\chi(B) - \sum_{p \in X} r_p \quad (2.1)$$

Otras maneras alternativas de escribir esta relación son las siguientes:

$$\chi(X) = d\chi(B) - \sum_{i=1}^k \sum_{p \in \Phi^{-1}(q_i)} r_p \quad (2.2)$$

$$\chi(X) = d(\chi(B) - k) + \sum_{i=1}^k l_i \quad (2.3)$$

donde  $l_i$  es igual al número de preimágenes de  $q_i$ . La fórmula de Hurwitz es un resultado clásico de la teoría de superficies de Riemann y es común encontrar en la literatura una demostración combinatoria de esta fórmula. Sin embargo, haciendo uso de propiedades elementales de la característica de Euler se puede obtener una demostración elegante y elemental que presentaré a continuación.

Sean  $\overline{D}_1, \dots, \overline{D}_k$  discos cerrados embebidos en  $B$ , con  $q_i \in D_i$ , el interior de  $\overline{D}_i$ , y tales que  $\overline{D}_i \cap \overline{D}_j$  sea vacío, siempre que  $i \neq j$ . Entonces

$$\begin{aligned} \chi(X) &= \chi(\Phi^{-1}(B - \cup D_i) \cup \Phi^{-1}(\cup \overline{D}_i)) \\ &= \chi(\Phi^{-1}(B - \cup D_i)) + \chi(\Phi^{-1}(\cup \overline{D}_i)) - \chi(\Phi^{-1}(\cup \partial \overline{D}_i)). \end{aligned}$$

Analicemos cada uno de los sumandos en esta última expresión. Como la restricción

$$\Phi : \Phi^{-1}(B - \cup D_i) \rightarrow B - \cup D_i$$

es un recubrimiento de grado  $d$ , entonces

$$\chi(\Phi^{-1}(B - \cup D_i)) = d\chi(B - \cup D_i) = d(\chi(B) - k).$$

Y como cada  $\Phi^{-1}(D_i)$  se puede retraer continuamente a  $\Phi^{-1}(q_i)$ , sus características de Euler son iguales  $\chi(\Phi^{-1}(D_i)) = \chi(\Phi^{-1}(q_i))$ . Por tanto

$$\begin{aligned} \chi(\Phi^{-1}(\cup \overline{D}_i)) &= \sum_{i=1}^k \chi(\Phi^{-1}(\overline{D}_i)) \\ &= \sum_{i=1}^k \chi(\Phi^{-1}(q_i)) \\ &= \sum_{i=1}^k l_i. \end{aligned}$$

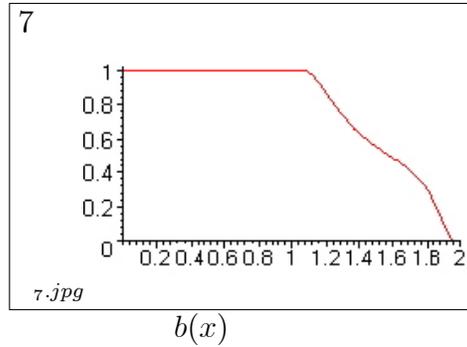
Finalmente, como  $\Phi^{-1}(\cup \partial \overline{D}_i)$  es una unión disjunta de círculos, entonces  $\chi(\Phi^{-1}(\cup \partial \overline{D}_i)) = 0$ . Así es posible obtener la relación (2.3). Las relaciones (2.2) y (2.1) se obtienen si observamos que

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^k \sum_{p \in \Phi^{-1}(q_i)} r_p &= \sum_{i=1}^k \sum_{p \in \Phi^{-1}(q_i)} (d_p - 1) \\
 &= \sum_{i=1}^k \left( \sum_{p \in \Phi^{-1}(q_i)} d_p - \sum_{p \in \Phi^{-1}(q_i)} 1 \right) \\
 &= \sum_{i=1}^k \left( \sum_{p \in \Phi^{-1}(q_i)} d_p - l_i \right) \\
 &= \sum_{i=1}^k (d - l_i) \\
 &= dk - \sum_{i=1}^k l_i
 \end{aligned}$$

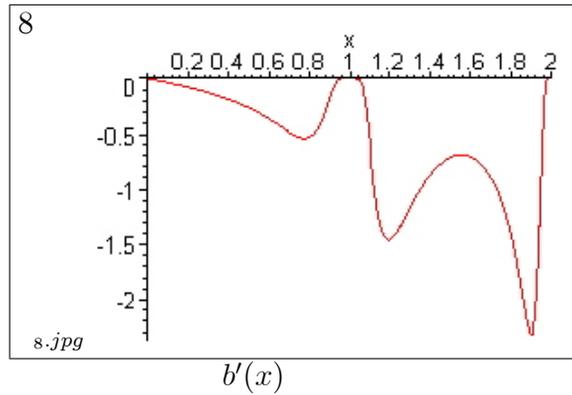
Los siguientes lemas de *deformación* serán necesarios para la demostración del teorema de coalescencia que daré en la siguiente sección.

**Lema 2.2.5** *Dados enteros  $0 < a < b < 1$ , tales que  $(b - a) > 3/4$ , existe una función suave  $\rho(x)$  definida en  $[0, 1]$  tal que  $\rho(x) = 1$ , si  $0 \leq x \leq a$ ,  $\rho(x) = 0$ , si  $x \geq b$  y  $|\rho'(x)| < 4$ , si  $a \leq x \leq b$ .*

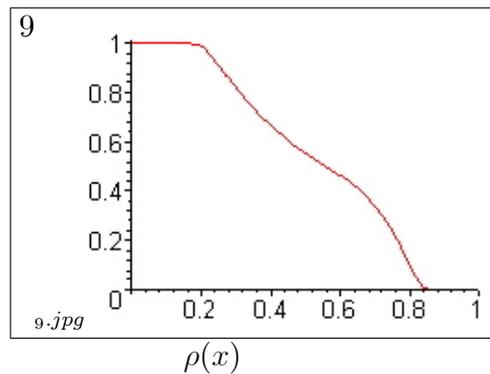
**Prueba.** Definamos  $h(x) = e^{-1/x}$ , si  $x > 0$  y  $h(x) = 0$ , si  $x \leq 0$ , y sea  $b(x) = h(4 - x^2)/(h(4 - x^2) + h(x^2 - 1))$ . El gráfico de esta función tiene la forma que se muestra en la figura siguiente:



Un cómputo muestra que el gráfico de su derivada es el siguiente:



y otro cómputo que  $|b'(x)| < 3$ . Finalmente, si  $l(x) = 1 + (x - a)/(b - a)$  es la recta que envía a  $a$  y  $b$  en 1 y 2, respectivamente, entonces  $\rho(x) = b(l(x))$  es una función que satisface  $\rho(x) = 1$ , si  $0 \leq x \leq a$ ,  $\rho(x) = 0$ , si  $x \geq b$ . Además,  $|\rho'(x)| = |b'(x)| \frac{1}{(b-a)} < 3 \times \frac{4}{3} = 4$ , ya que  $(b - a) > 3/4$ .



■

**Lema 2.2.6** *Es posible escoger números reales  $0 < a < b < 1$  tales que  $(b - a) > 3/4$ , y tales que para cada  $n \geq 3$  y  $0 \leq t \leq 1$  la función  $f_t(z) = z^n - nta/2(n-1)\rho(|z|)z^{n-1}$  es un recubrimiento ramificado del disco cerrado con exactamente dos puntos críticos,  $z = 0$  y  $z = ta/2$ .*

**Prueba.** Escojamos cualquier  $b$  que satisfaga  $3/4 < b < (4/7)^{1/n}$  y  $0 < a < b$  tal que  $b - a > 3/4$ . Esto es posible ya que si  $n \geq 3$  se da que  $4/7 > (3/4)^3 \geq (3/4)^n$ .

Veamos en primer lugar que  $f_t(\bar{D}) \subset \bar{D}$ . Es decir, para todo  $z \in \bar{D}$  se tiene que

$$|z^n - nta/2(n-1)\rho(|z|)z^{n-1}| \leq 1. \quad (2.4)$$

La desigualdad anterior se cumple para todo  $|z| > b$ , ya que fuera del disco de radio  $b$  se da que  $\rho(|z|) = 0$  y en consecuencia  $f_t(z) = z^n$ . Por otro lado, si  $|z| \leq b$ , como  $n/2(n-1) \leq 3/4$ , se cumple que

$$|z^n - nta/2(n-1)\rho(|z|)z^{n-1}| \leq b^n(1 + 3/4) < 1,$$

donde esta última desigualdad se garantiza por la forma como se ha escogido  $b$ .

En segundo lugar, veamos que cada  $f_t(z)$  no tiene valores críticos por fuera del disco  $|z| < a$ : si  $f_t$  se escribe en coordenadas polares,  $z = re^{i\theta}$ , un cálculo muestra que

$$\begin{aligned} \partial f_t / \partial \theta &= niz^{n-1}(z - ta/2\rho(|z|)) \\ \partial f_t / \partial r &= n/rz^{n-1}(z - ta/2\rho(|z|) - ta|z|/2(n-1)\rho'(|z|)). \end{aligned}$$

Luego  $z$  es un punto crítico si existe un real  $\lambda$  con  $\partial f_t / \partial \theta = \lambda \partial f_t / \partial r$  lo cual equivale a que

$$i(z - ta/2\rho(|z|)) = \lambda/r(z - ta/2\rho(|z|) - ta|z|/2(n-1)\rho'(|z|))$$

O lo que es equivalente a que los vectores

$$z - ta/2\rho(|z|) \quad \text{y} \quad z - ta/2\rho(|z|) - ta|z|/2(n-1)\rho'(|z|)$$

sean ortogonales. Hagamos  $A(z) = ta|z|/2(n-1)\rho'(|z|)$ ,  $B(z) = ta/2\rho(|z|)$  y  $\omega = z - B(z)$ . Notemos que  $A(z) \leq 0$  y  $0 \leq B(z) \leq a/2$ . Queremos que  $\omega$  sea ortogonal a  $\omega - A(z)$ . Como  $A(z)$  es un número real, esto equivale a afirmar que  $|\omega|^2 - A \operatorname{Re}(\omega) = 0$ . Fijemos un círculo  $C_r(0)$ , centrado en el origen y de radio  $r > a$ . Notemos que sobre este círculo las funciones  $A(z)$  y  $B(z)$  son constantes, las cuales denotaremos simplemente como  $A$  y  $B$ . El locus de la ecuación  $|\omega|^2 - A \operatorname{Re}(\omega) = 0$  es un círculo de centro  $A/2$  y radio  $|A|/2$ . Por tanto el locus de la ecuación  $|z - A|^2 - A \operatorname{Re}(z - a) = 0$  es un círculo,  $C_{A/2+B}(|A|/2)$ , de centro  $A/2 + B$  y radio  $|A|/2$ . De aquí

que cualquier punto crítico de  $f_t(z)$  en  $C_r(0)$  deberá estar en la intersección de  $C_r(0)$  y  $C_{A/2+B}(|A|/2)$ . Para ver que dicha intersección es vacía, veamos que los puntos de intersección de  $C_{A/2+B}(|A|/2)$  con el eje real están en el intervalo  $[-a, a]$  y por lo tanto este círculo está contenido en el interior del disco cuya frontera es  $C_r$ . Pero  $C_{A/2+B}(|A|/2)$  corta el eje real en los puntos  $B$  y  $A + B$ . Ahora,  $B = ta/2\rho(r) < a/2 < a$ . Por otro lado,

$$A + B = \frac{at\rho'(r)r}{2(n-1)} + \frac{at\rho(r)}{2} > -a$$

si y sólo si

$$\frac{t\rho'(r)r}{2(n-1)} + \frac{t\rho(r)}{2} + 1 > 0$$

o equivalentemente,

$$-\frac{\rho'(r)r}{2(n-1)} < \frac{1}{t} + \frac{\rho(r)}{2}, \quad t \neq 0.$$

Como  $\rho'(r) \leq 0$ , el término de la izquierda es precisamente  $r|\rho'(r)|/2(n-1)$ . Por el lema anterior, como  $|\rho'(r)| < 4$ ,  $\rho(r) \geq 0$ ,  $r < 1$  y  $n \geq 3$ , se tiene que

$$\frac{r|\rho'(r)|}{2(n-1)} < \frac{(4 + 2\rho(r))}{2(n-1)} \leq \frac{4 + 2\rho(r)}{4} = 1 + \frac{\rho(r)}{2} \leq \frac{1}{t} + \frac{\rho(r)}{2}, \quad t \neq 0,$$

lo cual demuestra que  $-a < A + B$ . Finalmente, como  $A \leq 0$  se tiene que  $A + B \leq B < a$  y en consecuencia que

$$-a < A + B \leq B < a.$$

Ahora, en el círculo  $|z| \leq a$  la función  $\rho(|z|)$  toma el valor constante 1 y en consecuencia  $f_t(z) = z^n - nta/2(n-1)z^{n-1}$  tiene un punto crítico en  $z$  si

$$nz^{n-1} - nta/2z^{n-2} = nz^{n-2}(z - ta/2) = 0$$

que tiene soluciones  $z = 0$  y  $z = ta/2$ .

En tercer y último lugar, veamos que  $f_t$  es un recubrimiento ramificado del disco cerrado. Notemos que  $f_t$  es una función abierta: en el disco  $|z| \leq a$  esta función es holomorfa y por tanto es abierta, y como por fuera de este disco, no tiene ningún valor crítico, es localmente un difeomorfismo y en consecuencia abierta. Como  $f_t(\overline{D})$  es un conjunto compacto y abierto en  $\overline{D}$  tiene que ser igual a todo el disco lo que muestra que  $f_t$  es sobreyectiva y por tanto es un recubrimiento ramificado. ■

**Observación 2.2.7** El lema anterior proporciona una deformación entre  $f_0(z) = z^n$  y  $f_1(z)$ , un recubrimiento ramificado de  $\overline{D}$  con dos puntos críticos  $z = 0$  y  $z = a/2$ . Además, como  $f_t(z) = z^n$  para todo  $z$  con  $b < |z| \leq 1$ , esta familia es una b-equivalencia entre  $f_0$  y  $f_1$ .

Fijemos  $q_0 = -i$  en  $\partial\overline{D}$  y una numeración arbitraria de la fibra  $f_1^{-1}(q_0)$ . Las preimágenes de 0 son los puntos  $z = 0$  y  $z = na/2(n-1)$ , con grado local de ramificación igual a  $n-1$  y 1, respectivamente. Por tanto la monodromía alrededor del origen tendrá que ser un  $n-1$  ciclo. Por otro lado,  $f_1(a/2) = -a^n/2^n(n-1)$  tiene  $n-1$  preimágenes distintas, que corresponden a las soluciones de la ecuación  $z^n - an/2(n-1)z^{n-1} + a^n/2^n(n-1) = 0$ , la cual tiene  $n-1$  raíces simples y una raíz doble,  $z = a/2$  (ya que este valor es el único que es solución de esta ecuación y de la derivada  $nz^{n-1} - an/2z^{n-2} = 0$ ). Por tanto la monodromía alrededor del valor crítico  $-a^n/2^n(n-1)$  es una transposición y este punto es simple. Para una escogencia de numeración de la fibra  $f_t^{-1}(q_0)$  la monodromía alrededor de ambos valores críticos puede entonces escribirse como  $(1n)(1 \cdots n-1)$ .

**Lema 2.2.8** *Es posible escoger números reales  $0 < a < b < 1$  tales que  $(b-a) > 3/4$ , tales que para cada  $n \geq 2$ ,  $0 \leq t \leq 1$  y cualquier real  $z_0$  tal que  $0 < z_0 < a^{n-1}$ , la función  $f_t(z) = z^n + ta/2\rho(|z|)z_0$  es un recubrimiento ramificado del disco cerrado con exactamente un punto crítico,  $z = taz_0/2$ .*

**Prueba.** Escojamos cualquier  $b$  que satisfaga  $3/4 < b < (1 - z_0/2)^{1/n}$  y  $0 < a < b$  tal que  $b-a > 3/4$ . Esto es posible ya que  $(3/4)^n \leq 3/4 < 1 - z_0/2$ , donde la última desigualdad se da ya que  $z_0 < a^{n-1} \leq a < 1/4$ .

Veamos en primer lugar que  $f_t(\overline{D}) \subset \overline{D}$ . Es decir, para todo  $z \in \overline{D}$  se tiene que

$$|z^n + ta/2\rho(|z|)z_0| \leq 1.$$

La desigualdad anterior se cumple para todo  $|z| > b$ , ya que fuera del disco de radio  $b$  se da que  $\rho(|z|) = 0$  y en consecuencia  $f_t(z) = z^n$ . Por otro lado, si  $|z| \leq b$ , se cumple que

$$|z^n + ta/2\rho(|z|)z_0| \leq b(b^{n-1} + \frac{z_0}{2}) < (b^{n-1} + \frac{z_0}{2}) < 1,$$

donde esta última desigualdad se garantiza ya que  $b < (1 - z_0/2)^{1/n}$ .

En segundo lugar, veamos que cada  $f_t(z)$  no tiene valores críticos por fuera del disco  $|z| < a$ : si  $f_t$  se escribe en coordenadas polares,  $z = re^{i\theta}$ , un

cálculo muestra que

$$\begin{aligned}\partial f_t / \partial \theta &= niz^n \\ \partial f_t / \partial r &= n/rz^n + \rho'(|z|)/2atz_0.\end{aligned}$$

Luego  $z$  es un punto crítico si existe un real  $\lambda$  con  $\partial f_t / \partial \theta = \lambda \partial f_t / \partial r$  lo cual equivale a que los vectores  $\omega = z^n$  y  $\omega - A(z)$ , donde  $A(z) = -atz_0 |z| \rho'(|z|)/2n$ , sean ortogonales. Veamos que esto nunca ocurre para valores de  $z$  en un círculo  $C_r$  de radio  $r > a$ . Para los puntos de este círculo  $A(z)$  es una constante que denotaremos simplemente por  $A \geq 0$ . Como en la prueba del lema anterior, el conjunto de todos los  $z$  para los cuales  $\omega = z^n$  y  $\omega - A$  son ortogonales es exactamente el conjunto de aquellos  $z \in C_r$  tales que  $z^n$  esté contenido en el círculo  $C_{|A|/2}(A/2)$ , de centro  $A/2$  y radio  $A/2$ . Pero como  $z_0 < a^{n-1}$ ,  $|\rho'(|z|)| < 4$  y  $n \geq 2$ , se tiene que  $A \leq az_0 < a^n < r^n$  y en consecuencia dicho círculo está contenido en el interior del disco de radio  $r^n$  y por tanto  $C_{r^n} \cap C_{|A|/2}(A/2) = \emptyset$ , lo que demuestra la afirmación.

Ahora, en el disco  $|z| \leq a$  la función  $f_t$  es igual a  $z^n + ta/2z_0$ , que es holomorfa y tiene como puntos críticos aquellos valores para los cuales  $nz^{n-1} = 0$ , es decir, sólomente el valor  $z = 0$ . Como  $f_t(0) = ta/2z_0$  vemos que éste es el único valor crítico de  $f_t$ .

Finalmente,  $f_t$  es un recubrimiento ramificado por la misma razón que en el lema anterior. ■

**Lema 2.2.9** *Sea  $\Phi : X \rightarrow \bar{D}$  un recubrimiento ramificado general que no sea simple. Entonces existe otro recubrimiento ramificado general  $\Phi'$ , que es  $b$ -equivalente a  $\Phi$ , y tal que  $k(\Phi') = k(\Phi) + 1$ .*

**Prueba.** Si suponemos que  $\Phi : X \rightarrow \bar{D}$  no es simple, entonces existe un punto crítico cuyo grado local es  $n \geq 3$  o existen dos puntos críticos cuyas imágenes coinciden.

Supongamos que existe un punto crítico  $p$  cuyo grado local es  $n \geq 3$ . Esto implica que existen embebimientos que preservan orientación  $f : \bar{D} \rightarrow \text{int}X$  y  $g : \bar{D} \rightarrow D$ , con  $f(0) = p$  y  $g(0) = \Phi(p)$ , y tales que  $g \circ \Phi_n = \Phi \circ f$ . Definamos

$$G(x, t) = \begin{cases} \Phi(x) & \text{si } x \notin \text{Im}(f) \\ g \circ f_t \circ f^{-1}(x) & \text{si } x \in \text{Im}(f) \end{cases}$$

donde  $f_t$  es la función construida en el lema 2.2.6. Resulta inmediato verificar que la función  $G : X \times [0, 1] \rightarrow \bar{D}$  así definida tiene todas las propiedades

requeridas en la definición 2.2.3. Además, la función  $G_1 : X \rightarrow \overline{D}$  tiene  $k(\Phi) + 1$  valores críticos. Entonces podemos tomar a  $\Phi'$  como esta función  $G_1$ .

Supongamos ahora que existen dos puntos críticos  $p_1$  y  $p_2$  tales que  $\Phi(p_1) = \Phi(p_2)$ . Existen embebimientos  $f : \overline{D} \rightarrow \text{int}X$  y  $g : \overline{D} \rightarrow D$  que preservan orientación, con  $f(0) = p_1$  y  $g(0) = \Phi(p_1)$ , y tales que  $g \circ \Phi_n = \Phi \circ f$ , para un cierto  $n \geq 2$ . Escojamos  $0 < z_0 < a^{n-1}$  y tal que  $g(z_0)$  no sea un valor crítico de  $\Phi$ . Esto es posible debido a la finitud del número de valores críticos de cualquier recubrimiento ramificado. Definimos

$$G(x, t) = \begin{cases} \Phi(x) & \text{si } x \notin \text{im}(f) \\ g \circ f_t \circ f^{-1}(x) & \text{si } x \in \text{im}(f) \end{cases}$$

donde  $f_t$  es la función construida en el lema 2.2.8. Resulta inmediato verificar que la función  $G : X \times [0, 1] \rightarrow \overline{D}$  así definida, tiene todas las propiedades requeridas en la definición 2.2.3, y la función  $G_1 : X \rightarrow \overline{D}$  tiene  $k(\Phi) + 1$  valores críticos. Entonces podemos tomar a  $\Phi'$  como esta función  $G_1$ . ■

### 2.3. El problema de coalescencia de fibras singulares

En esta sección se dará la solución al siguiente problema: dado un cubrimiento ramificado general al disco cerrado unitario  $\Phi : X \rightarrow \overline{D}$ , de grado  $d$ , ¿bajo que condiciones es posible coalescer o reunir todas las fibras singulares en una sola? En forma precisa, ¿cuándo es posible encontrar un recubrimiento ramificado con *una sola fibra singular*,  $\Phi' : X' \rightarrow \overline{D}$ , que sea b-equivalente a  $\Phi : X \rightarrow \overline{D}$ ? Sea  $Q = \{q_1, \dots, q_k\} \subset D$  el conjunto de valores críticos de  $\Phi$  y sea  $\lambda : \pi_1(\overline{D}, q_0) \rightarrow \mathcal{S}_d$  una representación de monodromía para el recubrimiento, que recordemos, se puede obtener numerando arbitrariamente la fibra  $\Phi^{-1}(q_0)$  (lo que equivale a escoger una biyección con el conjunto  $J_d = \{1, \dots, d\}$ ) sobre el punto  $q_0 = (1, 0) \in \partial\overline{D}$  e identificando el conjunto de sus biyecciones con el grupo simétrico  $\mathcal{S}_d$ . fijemos  $\overline{D}_1, \dots, \overline{D}_k$  discos cerrados con centro  $q_1, \dots, q_k$  y disjuntos por pares, y sean  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  arcos de Jordan mutuamente disjuntos, contenidos en  $\overline{D} - \cup_i \overline{D}_i$ , que comienzan en  $q_0$  y terminan en un punto  $z_i \in \partial\overline{D}_i$ . Sea  $\alpha_i$  el bucle que comienza en  $q_0$  recorre  $\gamma_i$  hasta  $z_i$ , luego recorre a  $\partial\overline{D}_i$  en dirección positiva y regresa a  $q_0$

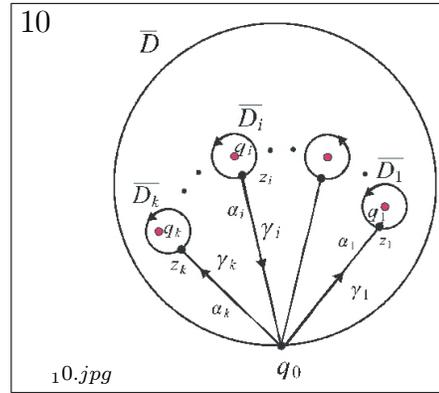


Figura 2.1: Coalescencia

siguiendo a  $\gamma_i$ . Como la característica de Euler del disco es 1, la fórmula de Riemann-Hurwitz (2.3) nos dice que

$$\chi(X) = d(1 - k) + \sum_{i=1}^k l_i \quad (2.5)$$

donde  $l_i$  es igual al número de preimágenes en la fibra sobre  $q_i$ , que es exactamente igual al número de ciclos en la descomposición en ciclos disjuntos de la monodromía alrededor de  $q_i$ . En otras palabras,  $l_i = l(\sigma_i)$ , donde  $\sigma_i = \lambda([\alpha_i])$ . La fórmula anterior puede escribirse en la forma

$$\chi(X) = d(1 - k) + \sum_{i=1}^k l(\sigma_i) \quad (2.6)$$

Para determinar qué condición es necesaria para la coalescencia de las fibras de  $\Phi : X \rightarrow \bar{D}$ , supongamos que existiera un cubrimiento ramificado b-equivalente,  $\Phi' : X' \rightarrow \bar{D}$ , y sin pérdida de generalidad, supóngase que su única fibra singular es la fibra sobre el origen,  $\Phi'^{-1}(0)$ . La fórmula anterior nos dice que en este caso  $\chi(X') = l(\sigma_1) = l(\lambda(\partial\bar{D}))$ , la longitud de la monodromía alrededor del círculo frontera,  $S^1 = \partial\bar{D}$ , recorrido en sentido positivo. Como en el proceso de deformación de  $\Phi$  a  $\Phi'$  es obvio que la característica de Euler no cambia se tiene que

$$\chi(X) = \chi(X') = l(\lambda(\partial\bar{D})) \quad (2.7)$$

y esta condición deberá entonces darse para que sea posible la coalescencia de las fibras singulares.

Para demostrar que esta condición es suficiente es necesario primero demostrar que todos los recubrimientos simples del disco cerrado en sí mismo de igual grado son T-equivalentes. A pesar de que esta afirmación se deduce de los resultados demostrados en [16] he encontrado una prueba original, elegante y más simple que la que allí se presenta en la que de paso se demuestra un teorema no trivial sobre *factorización minimal de ciclos en el grupo simétrico*. Esta prueba es notable porque dicho resultado es un problema combinatorio sin aparente conexión con la teoría de recubrimientos ramificados y su solución se puede derivar de la teoría aquí desarrollada. Los problemas de factorización minimal juegan un papel destacado en la comprensión de muchos fenómenos sobre fibraciones. En el próximo capítulo se generalizarán los problemas discutidos en esta sección, al caso de fibraciones elípticas, y se verá cómo problemas combinatorios que aparecen en  $\mathcal{S}_d$  tienen sus análogos en el grupo  $SL(2, \mathbb{Z})$ , con la diferencia de que allí son mucho más difíciles de tratar.

El siguiente teorema garantiza que la factorización más corta en transposiciones de un ciclo de longitud  $d$  es  $d - 1$ . Sin pérdida de generalidad se puede suponer que este ciclo es  $(1 \cdots d)$ . Notemos que este ciclo se puede factorizar como

$$(1 \cdots d) = (1d)(1d - 1) \cdots (12), \quad (2.8)$$

con exactamente  $d - 1$  transposiciones como factores. Más abajo se verá que esta factorización es única, salvo movimientos de Hurwitz, definidos en (2.3.2).

**Teorema 2.3.1** *Sean  $\tau_1, \dots, \tau_k$  transposiciones en  $\mathcal{S}_d$  tales que su producto sea igual a un ciclo de longitud  $d$ . Entonces  $k \geq d - 1$ .*

**Prueba.** Sin pérdida de generalidad se puede suponer que el  $d$ -ciclo es  $(1 \cdots d)$ . Fijemos puntos  $q_1, \dots, q_k$  en  $D$  y  $q_0 = (1, 0)$  como en la figura 11. Las clases  $[\alpha_i]$   $i = 1, \dots, k$  forman una base para el grupo libre  $\pi_1(\overline{D}, q_0)$  y por tanto existe un único homomorfismo de grupos  $\rho : \pi_1(\overline{D}, q_0) \rightarrow \mathcal{S}_d$  que envía a  $[\alpha_i]$  en  $\tau_i$ . En la sección 1.1.3 vimos cómo construir un fibrado asociado a esta representación  $\phi : E_{J_d} \rightarrow \overline{D}$  con fibra genérica  $J_d = \{1, \dots, d\}$ . Vimos también en la sección 1.1.4, Nota 1.1.17, que para este fibrado, la monodromía alrededor de cada  $q_i$  es precisamente  $\tau_i$ . Aplicando la fórmula de

### 2.3. EL PROBLEMA DE COALESCENCIA DE FIBRAS SINGULARES 45

Riemann-Hurwitz a este fibrado se obtiene

$$\begin{aligned}\chi(E_{J_d}) &= d(1 - k) + \sum_{i=1}^k l(\tau_i) \\ &= d(1 - k) + k(d - 1) \\ &= d - k.\end{aligned}$$

Por otro lado, como la monodromía alrededor del círculo frontera  $S^1$  es igual a  $\tau_1 \cdots \tau_k = (1 \cdots d)$ , entonces  $E_{J_d}$  es una superficie con una única componente de frontera, difeomorfa a un disco ( $\phi|_{\phi^{-1}(S^1)} : \phi^{-1}(S^1) \rightarrow S^1$  es un fibrado con fibra  $J_d$ , y por el teorema fundamental de la clasificación de fibrados (teorema 1.1.11) sólo existe uno, salvo isomorfismos, dado por el círculo mismo con su mapeo canónico  $x \mapsto x^d$ ). Por tanto, si  $g$  denota el género de  $E_{J_d}$  se tiene que  $\chi(E_{J_d}) = 2 - 2g - 1 = 1 - 2g = d - k$ . Pero  $1 - 2g \leq 1$ , de donde se sigue que  $d - 1 \leq k$ . ■

**Definición 2.3.2** Sea  $G$  un grupo cualquiera y sean  $g_1, \dots, g_k$  elementos de  $G$ . Un movimiento de Hurwitz (m.h.) consiste en reemplazar en la lista  $g_1, \dots, g_i, g_{i+1}, \dots, g_k$  a los elementos  $g_i$  y  $g_{i+1}$  por  $g'_i = g_{i+1}$  y  $g'_{i+1} = g_{i+1}^{-1}g_i g_{i+1}$ .

Notemos que un movimiento de Hurwitz produce una nueva lista

$$g_1, \dots, g'_i, g'_{i+1}, \dots, g_k$$

con el mismo número de elementos y en la que el producto ordenado de todos sus elementos es el mismo que el de la lista original,  $g_1 \cdots g_k$ , ya que  $g'_i g'_{i+1} = g_{i+1} g_{i+1}^{-1} g_i g_{i+1} = g_i g_{i+1}$ .

Denotemos por  $g_i$  a la clase de  $\alpha_i$  en  $\pi_1(\overline{D}, q_0)$ . Es un resultado estándar que  $\pi_1(\overline{D}, q_0)$  es un grupo libre y que  $L = \{g_1, \dots, g_k\}$  es una base para este grupo. Veamos ahora que cualquier movimiento de Hurwitz transforma una base en otra de donde se concluye que si  $L' = \{g'_1, \dots, g'_k\}$  se obtiene de  $L$  mediante finitos m.h., entonces existe un automorfismo de  $\pi_1(\overline{D}, q_0)$  que envía a  $g'_i$  en  $g_i$ . La razón la proporciona la siguiente proposición.

**Proposición 2.3.3** Sea  $L' = \{g_1, \dots, g'_i, g'_{i+1}, \dots, g_k\}$  la lista ordenada que se obtiene de  $L = \{g_1, \dots, g_i, g_{i+1}, \dots, g_k\}$  después de efectuar un movimiento de Hurwitz, ( $g'_i = g_{i+1}$  y  $g'_{i+1} = g_{i+1}^{-1}g_i g_{i+1}$  y el resto de los elementos permanece igual). Entonces existe un difeomorfismo  $h$  del disco  $\overline{D}$  en sí mismo que deja fija la frontera y tal que el automorfismo inducido  $h_* : \pi_1(\overline{D}, q_0) \rightarrow \pi_1(\overline{D}, q_0)$  envía la base  $L$  en  $L'$ .

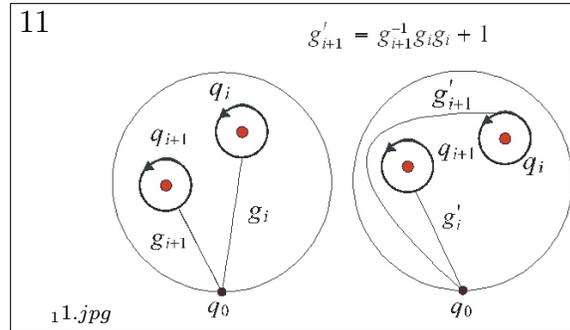
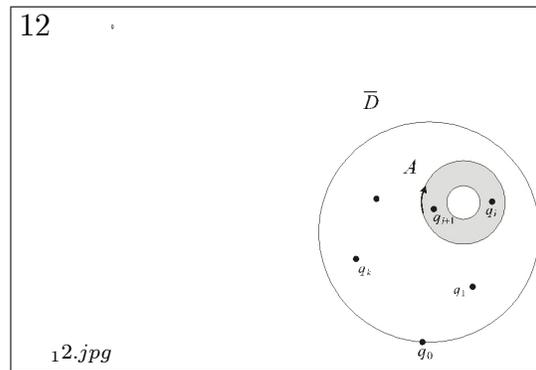


Figura 2.2: Movimiento de Hurwitz

**Prueba.** Sea  $A$  un ánulo cerrado embebido en  $D$  que contenga a  $q_i$  y a  $q_{i+1}$  y que no contenga ningún otro de los puntos  $q_j$ .



Proposición 2.3.3

La función  $h$  puede definirse como medio giro de Dhen (en sentido negativo) (sección 1.1.4) en  $A$  y como la identidad por fuera de él. El efecto de este difeomorfismo es el de intercambiar a  $q_i$  con  $q_{i+1}$  y de enviar a  $g_{i+1}$  en  $g_i$  y a  $g_i$  en  $g_{i+1}^{-1} g_i g_{i+1}$ , como se ilustra en la figura 12. ■

El siguiente lema nos muestra que toda factorización minimal de un ciclo en transposiciones puede transformarse mediante movimientos e Hurwitz a la factorización canónica (2.8).

**Lema 2.3.4** Sean  $\tau_1, \dots, \tau_{d-1}$  transposiciones en  $\mathcal{S}_d$  tales que su producto sea igual a  $(1 \cdots d)$ . Entonces, después de un número finito de movimientos

### 2.3. EL PROBLEMA DE COALESCENCIA DE FIBRAS SINGULARES 47

de Hurwitz,  $\tau_1 \cdots \tau_{d-1}$  puede transformarse en  $(1d)(1d-1) \cdots (12)$ .

**Prueba.** Primero notemos que si  $\tau_i = (a, b)$  y  $\tau_{i+1} = (c, d)$ , entonces al cambiar a  $\tau_i$  y  $\tau_{i+1}$  mediante un movimiento de Hurwitz, se obtienen dos nuevas transposiciones  $\tau'_i = (c, d)$  y  $\tau'_{i+1} = (c, d)(a, b)(c, d)$ . Si  $(a, b)$  y  $(c, d)$  no comparten ningún símbolo se tiene que  $\tau_{i+1} = (a, b)$ , y si comparten un solo símbolo, digamos,  $d = a$ , entonces  $\tau_{i+1} = (b, c)$ . Notemos que estas dos transposiciones no pueden compartir ambos símbolos, ya que de ser así, su producto sería la identidad lo cual implicaría la existencia de una factorización de  $(1 \cdots d)$  en transposiciones con menos de  $d - 1$  factores.

Ahora, el símbolo  $d$  aparece en una de las transposiciones  $\tau_1, \dots, \tau_{d-1}$ , digamos en  $\tau_i = (d, a_1)$ . Mediante finitos m.h. podemos escribir el producto  $\tau_1 \cdots \tau_{d-1}$  como  $(d, a_1)\tau'_2 \cdots \tau'_{d-1}$ . Si  $a_1 = 1$ , podemos cancelar esta transposición a ambos lados de la ecuación

$$(d, 1)\tau'_2 \cdots \tau'_{d-1} = (1d)(1d-1) \cdots (12)$$

y obtener una nueva ecuación  $\tau'_2 \cdots \tau'_{d-1} = (1 \cdots d - 1)$ , lo que permite continuar la prueba por inducción. Si  $a_1 \neq 1$ , entonces, como  $(d, a_1)(1 \cdots d)$  es una permutación que envía a  $d$  en 1, se sigue que la permutación  $\tau'_2 \cdots \tau'_{d-1}$  deberá también mover a  $d$  lo que implica que alguna de sus transposiciones contiene el símbolo  $d$ . Nuevamente, después de un número finito de m.h. este producto se puede reescribir como  $\tau'_2 \cdots \tau'_{d-1} = (d, a_2)\tau''_3 \cdots \tau''_{d-1}$ . Si  $a_2 = 1$ , entonces después de hacer un m.h. adicional se obtiene que:

$$(d, 1)\tau''_3 \cdots \tau''_{d-1} = (1d)(1d-1) \cdots (12),$$

y podríamos cancelar a  $(d, 1)$  y proseguir la prueba por inducción. Si  $a_2 \neq 1$ , se continua con este procedimiento hasta que *debe ocurrir en algún momento que  $a_r = 1$* . Si esto nunca ocurriera, podríamos transformar el producto original a un producto de la forma

$$(d, a_1) \cdots (d, a_r)\tau'''_{r+1} \cdots \tau'''_{d-1} = (1 \cdots d) \quad (2.9)$$

en el que  $a_i \neq 1$ , para todo  $i = 1, \dots, r$ , y en el que la permutación  $\tau'''_{r+1} \cdots \tau'''_{d-1}$  no mueve el elemento  $d$ . Ahora, los elementos  $a_i$  deber ser distintos dos a dos, ya que de otra forma, si  $a_i = a_j$ , mediante movimientos de Hurwitz el producto  $(d, a_1) \cdots (d, a_r)$  podría cambiarse a un producto en el que  $(d, a_i)$  y  $(d, a_j)$  estén contiguos haciendo que su producto sea la identidad, lo cual

permitiría reducir en uno el número de factores en la factorización original, contradiciendo la minimalidad de la factorización original. Luego

$$\tau_{r+1}''' \cdots \tau_{d-1}''' = (a_1 a_2 \cdots a_r d)(1 \cdots d).$$

Pero en el producto de la derecha  $d$  es enviado en 1 y en el de la izquierda  $d$  permanece quieto, lo cual es una contradicción.

Por tanto,  $a_r = 1$ , para algún  $r$ . Ahora, con movimientos de Hurwitz podemos cambiar a  $(d, a_1) \cdots (d, a_r)$  por un producto de transposiciones de la forma  $(d, 1)t_2 \cdots t_{r-1}$  y por tanto cambiar el lado izquierdo de (2.9) por

$$(d, 1)t_2 \cdots t_{r-1} \tau_{r+1}''' \cdots \tau_{d-1}''' = (1 \cdots d)$$

Cancelando  $(d, 1)$  a ambos lados se puede continuar la prueba por inducción.

■

**Lema 2.3.5** *Sea  $\rho : \overline{D} \xrightarrow{z^d} \overline{D}$  el recubrimiento ramificado del disco cerrado en sí mismo que envía cada  $z$  en  $z^d$ . Entonces este recubrimiento es b-equivalente a un recubrimiento  $\psi : \overline{D} \rightarrow \overline{D}$  que tiene exactamente  $d - 1$  fibras singulares simples. Si  $\psi' : \overline{D} \rightarrow \overline{D}$  es otro recubrimiento con  $d - 1$  fibras singulares simples se tiene que  $\psi$  y  $\psi'$  son cuadrado equivalentes.*

**Prueba.** Después de aplicar el lema 2.2.6 al recubrimiento  $\rho$  se obtiene otro recubrimiento b-equivalente  $\rho_1 : \overline{D} \rightarrow \overline{D}$  que tiene dos puntos críticos y dos valores críticos, uno de ellos, el origen, con grado local  $d - 1$  y el otro, un punto simple. Si repite este mismo procedimiento  $d - 2$  veces se llega a un recubrimiento  $\psi : \overline{D} \rightarrow \overline{D}$ , con  $d - 1$  puntos críticos y  $d - 1$  valores críticos, todos simples, y con monodromía alrededor de cada  $q_i$ ,  $\lambda(g_i) = (1, i)$ .

Veamos ahora la unicidad. Si  $\psi' : \overline{D} \rightarrow \overline{D}$  es otro recubrimiento con  $d - 1$  fibras singulares simples, denotemos por  $\tau_1, \dots, \tau_k$  la monodromía alrededor de cada uno de los valores singulares de  $\psi'$ ,  $q_1, \dots, q_{d-1}$ , es decir, si  $\lambda$  denota la representación de monodromía se tiene que  $\lambda(g_i) = \tau_i$ . Por la proposición 2.3.3, para cada m.h. que reemplace la pareja  $\tau_i, \tau_{i+1}$  por  $\tau_{i+1}, \tau_{i+1}^{-1} \tau_i \tau_{i+1}$  existe un difeomorfismo  $h_i$  de  $\overline{D}$  que fija la frontera y tal que el isomorfismo  $h_{i*}$  inducido en  $\pi_1(\overline{D}, q_0)$ , es tal que  $h_{i*}(g'_i) = g_i$  y  $h_{i*}(g'_{i+1}) = g_{i+1}$ , donde  $g'_i = g_{i+1}$  y  $g'_{i+1} = g_{i+1}^{-1} g_i g_{i+1}$ . Por el lema anterior, después de un número finito de m.h. la base  $L = \{g_1, \dots, g_{d-1}\}$  puede transformarse en  $L' = \{g'_1, \dots, g'_{d-1}\}$ , con  $\lambda(g'_i) = (1, i)$ , para  $i = 2, \dots, d - 1$ . La proposición 2.3.3, nos garantiza entonces que después de componer finitos difeomorfismos  $h_i$  se obtiene un

### 2.3. EL PROBLEMA DE COALESCENCIA DE FIBRAS SINGULARES 49

difeomorfismo  $h : \bar{D} \rightarrow \bar{D}$  que fija la frontera y tal que  $h_*(g'_j) = g_j$ , para todo  $j = 1, \dots, d-1$ . Es trivial ver que  $h \circ \psi' : \bar{D} \rightarrow \bar{D}$  es T-equivalente a  $\psi'$ . Más aún, para este recubrimiento la monodromía alrededor de cada  $q_i$ ,  $\lambda(g_i)$ , es igual  $\lambda(g'_i) = (1, i)$  y en consecuencia igual a la monodromía de  $\psi$ . De la observación 1.1.15 se sigue que  $h \circ \psi'$  y  $\psi$  son equivalentes y en consecuencia  $\psi$  y  $\psi'$  son T-equivalentes. ■

El teorema siguiente nos garantiza que la condición (2.7) también es suficiente.

**Teorema 2.3.6 (De Coalescencia)** *Sea  $\Phi : X \rightarrow \bar{D}$  un recubrimiento ramificado general de grado  $d$  con valores críticos  $Q = \{q_1, \dots, q_k\} \subset D$ , sea  $\sigma = \lambda(S^1)$  la monodromía alrededor del círculo frontera, recorrido en sentido positivo y sea  $l(\sigma)$  la longitud de la permutación  $\sigma$ . Entonces,  $\chi(X) = l(\sigma)$  si y sólo si existe un recubrimiento ramificado  $\Phi' : X' \rightarrow \bar{D}$  b-equivalente a  $\Phi : X \rightarrow \bar{D}$ .*

**Prueba.** Sólo falta por demostrar que la condición  $\chi(X) = l(\sigma)$  es suficiente. Después de aplicar repetidas veces el lema 2.2.6 a  $\Phi : X \rightarrow \bar{D}$  podemos encontrar un recubrimiento ramificado b-equivalente  $\Phi_1 : X^1 \rightarrow \bar{D}$  en el cual todas sus fibras singulares sean *simples* (el número de valores críticos aumenta en el proceso, lo que pareciera que va en dirección contraria a nuestro propósito, pero como veremos, esto no tiene ninguna importancia). En el proceso de deformación, el mapeo restringido a la preimagen de  $S^1$  se mantiene inalterado, lo cual implica que  $\Phi_1^{-1}(S^1)$  consiste en la unión disjunta de  $l(\sigma)$  círculos embebidos  $C_1, \dots, C_{l(\sigma)}$  los cuales constituyen la frontera de  $X^1$ . Como la característica de Euler tampoco cambia vemos que  $\chi(X^1) = l(\sigma)$ . Luego la característica de Euler de  $X^1$  coincide con su número de componentes de frontera. Demostremos que esto fuerza a que  $X^1$  sea difeomorfo a la unión disjunta de  $l(\sigma)$  discos.

Sean  $X_1^1, \dots, X_r^1$  las componentes conexas de  $X^1$ , y denotemos por  $g_i$  al género de  $X_i^1$ . Claramente cada componente conexa contiene por lo menos a uno de los círculos  $C_i$  (porque  $\Phi_1|_{X_i^1} \rightarrow S^1$  también es un recubrimiento ramificado) y en consecuencia el número de dichas componentes es  $\leq l(\sigma)$ . Ahora, si denotamos por  $l_i$  al número de círculos  $C_i$  que están contenidos en  $X_i^1$  vemos que  $\chi(X_i^1) = 2 - 2g_i - l_i$  y que  $l_1 + \dots + l_r = l(\sigma)$ . Luego

$$\begin{aligned} \chi(X^1) &= \chi(X_1^1) + \dots + \chi(X_r^1) \\ &= \sum_{i=1}^r (2 - 2g_i - l_i) = 2r - 2\sum_{i=1}^r g_i - l(\sigma). \end{aligned}$$

En consecuencia

$$l(\sigma) = \chi(X^1) = 2r - 2\sum_{i=1}^r g_i - l(\sigma) \leq 2l(\sigma) - 2\sum_{i=1}^r g_i - l(\sigma), \quad (\text{ya que } r \leq l(\sigma))$$

y en consecuencia  $2\sum_{i=1}^r g_i \leq 0$ . Pero como cada  $g_i$  es un entero no negativo, deberá ser igual a 0. Esto muestra que cada  $X_i^1$  es topológicamente un disco y en consecuencia  $X^1$  es la unión disjunta de  $l(\sigma)$  discos cerrados,  $X_i^1$ , con  $\partial X_i^1 = C_i$ . Finalmente, como cada restricción  $\Phi_1|_{X_i^1} \rightarrow S^1$  es simple, el lema anterior garantiza que dicho recubrimiento es  $\mathbb{T}$ -equivalente al recubrimiento  $\psi_i : \overline{D} \rightarrow \overline{D}$  que se obtiene de perturbar el recubrimiento estándar  $\overline{D} \xrightarrow{z^{d_i}} \overline{D}$ , con  $d_i$  igual al grado de  $\psi_i$  y en consecuencia  $\Phi_1 : X^1 \rightarrow \overline{D}$  es b-equivalente a  $\Phi' : X' \rightarrow \overline{D}$ , donde  $X'$  es la unión disjunta de  $l(\sigma)$  copias de  $\overline{D}$ ,  $\Phi'$  restringida a cada copia es el mapeo  $\overline{D} \xrightarrow{z^{d_i}} \overline{D}$  y  $d_1 + \cdots + d_{l(\sigma)} = d$ .

Vemos entonces que  $\Phi : X \rightarrow \overline{D}$  es b-equivalente a un cubrimiento ramificado general con una única fibra central singular. ■

# Capítulo 3

## Fibraciones elípticas

### 3.1. Introducción

En este capítulo se demostrará la conjetura de factorización minimal y se generalizará el teorema de coalescencia (teorema 2.3.6) a fibraciones elípticas sin fibras múltiples. Los resultados centrales están condensados en los teoremas 3.4.2, 3.4.11 y 3.5.3.

Se supondrá que en toda fibración elíptica singular  $\phi : E \rightarrow D$ ,  $E$  es una superficie compleja, que  $\phi$  es holomorfa al disco con su estructura compleja estándar y que cada fibra genérica es una superficie de Riemann de género 1. Sin pérdida de generalidad puede suponerse además que  $E$  es relativamente minimal (definición 1.2.7) ya que esto siempre puede lograrse después de realizar sucesivas descompresiones (blows down) (ver [2], capítulo III). La lectura de este capítulo requiere de conocimientos más avanzados de geometría algebraica que en los capítulos anteriores. El lector encontrará todos los conceptos necesarios para su comprensión en dos referencias estándar [13] y [14].

### 3.2. El problema de factorización minimal

Sea  $\phi : E \rightarrow D$  una función holomorfa, sobreyectiva y propia de una superficie compleja y conexa  $E$  en el disco unitario abierto  $D \subset \mathbb{C}$  que tenga a  $0 \in D$  como su único valor crítico. El teorema de Ehresman [10] (observación 1.2.6) garantiza que la restricción  $\phi : E - \phi^{-1}(0) \rightarrow D - \{0\}$  es un fibrado con fibra difeomorfa a una superficie cerrada, conexa y orientable de género  $g$ . Se

supondrá de ahora en adelante que  $g \geq 1$  y que  $E$  es relativamente minimal (definición 1.2.7). En algunos casos especiales es posible deformar o *morsificar* esta función en una nueva función  $\phi' : E' \rightarrow D$  con un número finito de valores singulares y tal que cada fibra singular es *simple de tipo Lefschetz o suave múltiple*. Lo primero significa que la fibra contiene exactamente un punto crítico  $p$  y existen coordenadas apropiadas alrededor de  $p$  y  $q = \phi(p)$  para las cuales la función luce como  $\phi(z, w) = z^2 + w^2$ . Que la fibra sea suave múltiple significa que  $\phi^{-1}(q)$  es un divisor de la forma  $mI_0$ , donde  $I_0$  denota un divisor primo suave. Un teorema debido a Moishezon afirma que si  $g = 1$  entonces  $\phi$  puede deformarse (ver definición abajo) a una función con estas propiedades [27]. La función  $\phi' : E' \rightarrow D$  es llamada una *morsificación* de  $\phi : E \rightarrow D$ . Cuando el genero de la fibra genérica es  $\geq 2$ , la morsificación se llama *especial* si no contiene fibras múltiples suaves. No es difícil ver que el número de fibras simples de tipo Lefschetz en una fibración de Lefschetz elíptica  $\phi : E' \rightarrow D$  es igual a la característica de Euler de  $E'$ . Esto último se deduce de la generalización de la fórmula de Riemann-Hurwitz (2.1) a fibraciones elípticas.

**Proposición 3.2.1 (Riemann-Hurwitz)** *Sea  $\phi : E \rightarrow D$  una fibración elíptica de tipo Lefschetz sobre el disco abierto unitario con  $r$  fibras simples de tipo Lefschetz. Denotemos por  $D^\circ = D - Q$ , donde  $Q = \{q_1, \dots, q_k\}$ , el disco al que se le han quitado los  $k \geq r$  valores singulares de  $\phi$ . Denotemos por  $E^\circ$  a  $E - \phi^{-1}(Q)$ . Entonces la característica de Euler de  $E$  es igual al número de fibras simples de Lefschetz de  $\phi$ , que se denotará por  $N(\phi)$ .*

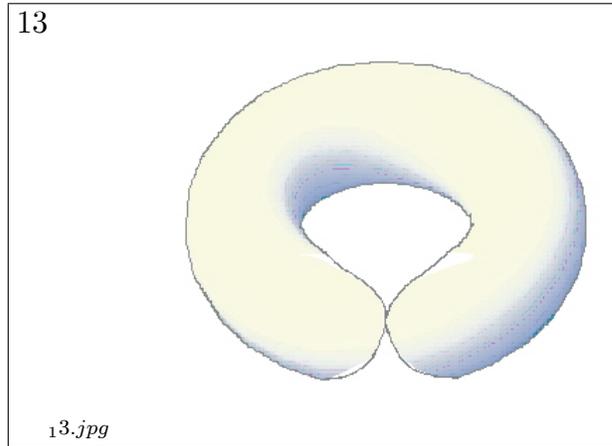
**Prueba.** Como se hizo en la sección 2.2 podemos tomar  $\overline{D}_1, \dots, \overline{D}_k$  discos cerrados embebidos en  $D$ , con  $q_i \in D_i$ , el interior de  $\overline{D}_i$ , y tales que  $\overline{D}_i \cap \overline{D}_j$  sea vacío, siempre que  $i \neq j$ . Entonces

$$\begin{aligned} \chi(E^\circ) &= \chi(D^\circ)\chi(\text{fibra genérica}) \\ &= \chi(D^\circ)\chi(T) = 0, \end{aligned}$$

ya que la característica de Euler del toro  $T$  es 0. Por otro lado, la frontera de cada  $\phi^{-1}(\partial\overline{D}_i)$  es una 3-variedad y por consiguiente su característica de Euler también es 0. De aquí que

$$\begin{aligned} \chi(E) &= \chi(E^\circ) + \sum_{i=1}^k \chi(\phi^{-1}(\partial\overline{D}_i)) \\ &= 0 + \sum_{i=1}^k \chi(F_i), \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde esta última igualdad se da debido a que cada  $F_i$  es un retracto de deformación de  $\phi^{-1}(\partial D_i)$ . Pero cada una de estas fibras singulares es, o bien múltiple suave, en cuyo caso  $F_i$  es un toro y por consiguiente  $\chi(F_i) = 0$ , o simple de tipo Lefschetz, en cuyo caso es topológicamente un *toro pinchado*, es decir, una esfera con un punto identificado y su característica de Euler es por tanto igual a  $\chi(S^2) - 1 = 1$ . De aquí que  $\chi(E) = r$



Fibra de Lefschetz

@ ■

Es importante señalar que si la fibra genérica tiene género mayor que 1 entonces en general no se conoce la existencia de una morsificación.

Definamos la *monodromía total* como la representación de monodromía de un bucle simple cerrado,  $h = \lambda([\gamma])$  recorrido en dirección positiva y que encierre a 0 (el único punto crítico de  $\phi$ ). Por ejemplo,  $\gamma$  podría tomarse como el círculo de radio  $1/2$ ,  $\gamma(t) = 1/2e^{it}$  y como punto base podríamos tomar a  $q_0 = -i/2$ . Ahora, cada morsificación  $\phi' : E' \rightarrow D$  de  $\phi : E \rightarrow D$  induce una factorización de  $h$  como producto de  $E_\phi$  giros de Dehn derechos, cada uno dado por la monodromía alrededor de  $q_i$ ,  $h = \lambda([\alpha_1]) \cdots \lambda([\alpha_k])$  (esto ya que  $[\alpha_1] \cdots [\alpha_k] = h$ ). El hecho de que dicho número sea independiente de la escogencia de la factorización particular sugiere que esta factorización deba ser en cierta forma distinguida entre todas las posibles factorizaciones de la monodromía total en giros de Dehn derechos en el grupo de clases de mapeos. *Ha sido conjeturado que dicha factorización es minimal. Es decir, que cualquier factorización en el grupo de clases de mapeos de la monodromía total en giros de Dehn derechos tiene por lo menos  $N(\phi)$  factores.* El propósito en esta sección es dar una prueba de esta conjetura para fibraciones elípticas. La demostración que se presentará se basa en un análisis combi-

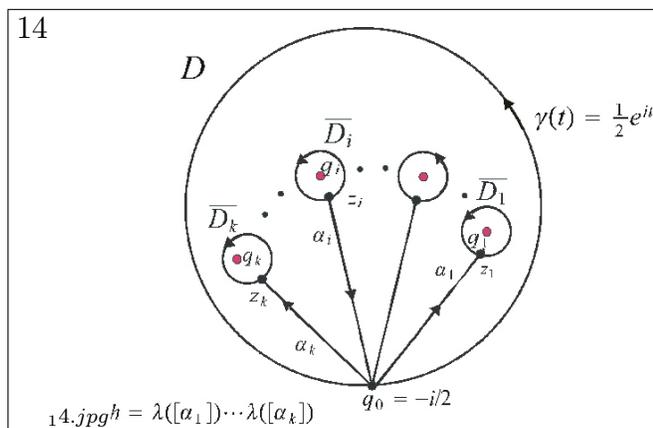


Figura 3.1: Monodromía total

natorio cuidadoso de la presentación del grupo modular  $PSL(2, \mathbb{Z})$  como el producto libre  $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ .

### 3.3. Clasificación de Kodaira de fibras singulares

**Definición 3.3.1** *Dos fibraciones elípticas singulares  $(\phi_1, E_1, D)$  y  $(\phi_2, E_2, D)$  se dice que son topológicamente equivalentes (respectivamente, cuadrado equivalentes) si existen homeomorfismos (respectivamente, difeomorfismos) que preservan orientación  $h : E_1 \rightarrow E_2$  y  $h' : D \rightarrow D$  tales que  $\phi_2 \circ h = h' \circ \phi_1$ .*

Para cualquier familia de curvas elípticas escojamos un disco cerrado de radio  $0 < r < 1$  centrado en el origen,  $\bar{D}_r$  y tal que todos los valores críticos de  $\phi$  estén en su interior, y denotemos por  $q_0$  al punto  $(r, 0)$ , y por  $C_r$  a su frontera orientada en forma positiva. Se denotará por

$$\lambda : \pi_1(D - \{q_1, \dots, q_n\}, q_0) \rightarrow SL(2, \mathbb{Z})$$

a la representación de monodromía donde se ha identificado al grupo de clases de mapeos de la fibra genérica con  $SL(2, \mathbb{Z})$  (sección 1.1.4) Sabemos que  $\lambda$  está determinado por su acción en una base del grupo libre de rango  $n$   $\pi_1(D - \{q_1, \dots, q_n\}, q_0)$ . Sean  $\{[\alpha_1], \dots, [\alpha_n]\}$  la base estándar que consiste de

las clases de arcos disjuntos por pares (excepto en  $q_0$ ), donde cada  $\alpha_i$  rodea exclusivamente a  $q_i$  y donde los  $\alpha_i$  se numeran apropiadamente de tal forma que el producto  $[\alpha_1] \cdots [\alpha_n]$  es igual a la clase de  $C_r$ .

Cada fibra  $\phi^{-1}(q) = \sum m_i X_i$  será considerada como un divisor efectivo (el pull back) donde los  $X_i$  son sus *componentes irreducibles* y los  $m_i$  las *multiplicidades*. La *multiplicidad* de  $\phi^{-1}(q)$  se define como el máximo común divisor de los  $m_i$ . El divisor se llamará *múltiple* si  $m > 1$ , y de otra forma se llamará *simple*.

**Definición 3.3.2** *Se denominará el tipo de la fibra,  $\phi^{-1}(q)$ , al tipo de homeomorfismo del par  $(\phi^{-1}(q), \sum m_i [X_i])$  que consiste del espacio topológico (triangulable)  $\phi^{-1}(q)$  y su clase de homología en  $H_2(\phi^{-1}(q), \mathbb{Z})$  determinada por el 2-ciclo  $\sum m_i [X_i]$ . En general, dos pares  $(X, \alpha)$  y  $(Y, \beta)$  donde  $X, Y$  son espacios topológicos y  $\alpha \in H_*(X, \mathbb{Z})$  y  $\beta \in H_*(Y, \mathbb{Z})$  se dice que tienen e mismo tipo de homeomorfismo si existe un homomorfismo  $f : X \rightarrow Y$  tal que  $f_* : H_*(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H_*(Y, \mathbb{Z})$  envía a  $\alpha$  en  $\beta$  [17].*

El siguiente resultado es un teorema clásico de Kodaira el cual clasifica las posibles fibras singulares en una fibración elíptica ([17], teorema 6.2).

**Teorema 3.3.3** *Sea  $(\phi, E, D)$  una fibración elíptica singular relativamente minimal y sea  $q$  un valor crítico de  $\phi$ . Entonces el tipo de la fibra  $\phi^{-1}(q)$  es necesariamente uno de la siguiente lista:*

- $mI_0: mX_0, m > 1$ , donde  $X_0$  es una curva elíptica no singular.
- $mI_1: mX_0, m \geq 1$  donde  $X_0$  es una curva racional con un punto doble ordinario.
- $mI_2: mX_0 + mX_1, m \geq 1$ , donde  $X_0$  y  $X_1$  son curvas no singulares con intersección  $X_0 \cdot X_1 = p_1 + p_2$ .
- II:  $1X_0$  donde  $X_0$  es una curva racional con una cúspide
- III:  $X_0 + X_1$  donde  $X_0$  y  $X_1$  son curvas racionales no singulares con  $X_0 \cdot X_1 = 2p$ .
- IV:  $X_0 + X_1 + X_2$ , donde  $X_0, X_1, X_2$  son curvas racionales no singulares y  $X_0 \cdot X_1 = X_1 \cdot X_2 = X_2 \cdot X_0 = p$ .

Los tipos restantes son denotados por  $mI_b, b \geq 3, I_b^*, II^*, III^*, IV^*$  y están compuestos de curvas racionales no singulares  $X_0, X_1, \dots, X_s, \dots$  tales que  $X_s \cdot X_t \leq 1$  (esto es,  $X_s$  y  $X_t$  tienen a lo sumo un punto de intersección simple) para  $s < t$  y  $X_r \cap X_s \cap X_t$  es vacío para  $r < s < t$ . Estos pares son descritos sin ambigüedad con el dato  $X_s, X_t$  con  $X_s \cdot X_t = 1$ , junto con  $\sum m_i X_i$ .

$mI_b$ :  $mX_0 + mX_1 + \dots + mX_{b-1}$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$ ,  $b = 3, 4, 5, \dots$ ,  $X_0 \cdot X_1 = X_1 \cdot X_2 = \dots = X_s \cdot X_{s+1} = \dots = X_{b-2} \cdot X_{b-1} = X_{b-1} \cdot X_0 = 1$ .

$I_b^*$ :  $X_0 + X_1 + X_2 + X_3 + 2X_4 + \dots + 2X_{4+b}$  donde  $b \geq 0$ , y  $X_0 \cdot X_4 = X_1 \cdot X_4 = X_2 \cdot X_{4+b} = X_3 \cdot X_{4+b} = X_4 \cdot X_5 = X_5 \cdot X_6 = \dots = X_{3+b} \cdot X_{4+b} = 1$ .

$II^*$ :  $X_0 + 2X_1 + 3X_2 + 4X_3 + 5X_4 + 6X_5 + 4X_6 + 3X_7 + 2X_8$ , donde  $X_0 \cdot X_1 = X_1 \cdot X_2 = X_2 \cdot X_3 = X_3 \cdot X_4 = X_4 \cdot X_5 = X_5 \cdot X_7 = X_5 \cdot X_6 = X_6 \cdot X_8 = 1$ .

$III^*$ :  $X_0 + 2X_1 + 3X_2 + 4X_3 + 3X_4 + 2X_5 + 2X_6 + X_7$ , donde  $X_0 \cdot X_1 = X_1 \cdot X_2 = X_2 \cdot X_3 = X_3 \cdot X_5 = X_3 \cdot X_4 = X_4 \cdot X_6 = X_6 \cdot X_7 = 1$ .

$IV^*$ :  $X_0 + 2X_1 + 3X_2 + 2X_3 + 2X_4 + X_5 + X_6$ , donde  $X_0 \cdot X_1 = X_1 \cdot X_2 = X_2 \cdot X_3 = X_2 \cdot X_4 = X_3 \cdot X_5 = X_4 \cdot X_6 = 1$ .

Se sabe además que la clase de  $\lambda([\alpha_i])$  depende (excepto por conjugancia) del tipo de la fibra  $\phi^{-1}(q_i)$ . La siguiente tabla contiene representantes de cada clase de conjugancia de la monodromía alrededor de cada tipo de fibra singular, así como la correspondiente característica de Euler [2].

Tipo	Representante	$\chi$	Tipo	Representante	$\chi$
$mI_n$	$\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$n$	$I_n^*$	$\begin{bmatrix} -1 & -n \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$n + 6$
$II$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$	$2$	$II^*$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$10$
$III$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$	$3$	$III^*$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$9$
$IV$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$	$4$	$IV^*$	$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$8$

(3.2)

### 3.3.1. Deformaciones de familias (Morsificación)

**Definición 3.3.4** Por una deformación de una fibración elíptica singular  $\phi : E \rightarrow D$  al disco abierto entenderemos una función holomorfa, sobreyectiva y propia  $\Phi : \mathcal{E} \rightarrow D \times \Delta_\epsilon$ , donde  $\mathcal{E}$  es una variedad compleja tres dimensional y  $\Delta_\epsilon = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \epsilon\}$ , tal que:

1. Si  $D_t = D \times \{t\}$ ,  $E_t = \Phi^{-1}(D_t)$  y  $\phi_t = \Phi|_{E_t} : E_t \rightarrow D_t$  entonces  $\phi_t : E_t \rightarrow D_t$  es una fibración elíptica singular.
2. Existe un real  $0 < r_0 < 1$  tal que todos los valores críticos de  $\phi_t$  están contenidos en  $D_{r_0} \subset D$ , el disco abierto de radio  $r_0$  centrado en el origen.
3. La función  $\mathcal{E} \xrightarrow{\Phi} D \times \Delta_\epsilon \xrightarrow{pr_2} \Delta_\epsilon$  no tiene puntos críticos.
4. Las fibraciones elípticas singulares  $(\phi, E, D)$  y  $(\phi_0, E_0, D_0)$  son cuadrado equivalentes.

La deformación  $(\Phi, \mathcal{E}, D \times \Delta_\epsilon)$  es llamada una morsificación de  $(\phi, E, D)$  si para cada  $s \neq 0$ , cada fibra singular del mapeo  $\phi_s : E_s \rightarrow D_s$  es de tipo  $mI_0$ ,  $m > 1$  (múltiple suave) o de tipo simple de Lefschetz  $I_1$ .

En lo que sigue se identificará a  $D_t$  con el disco unitario  $D$  y se escribirá  $\phi_t : E_t \rightarrow D$  en vez de  $\phi_t : E_t \rightarrow D_t$ .

**Proposición 3.3.5** *Todos los  $E_t$  son difeomorfos a  $E$ . Sea  $C_r$  un círculo de radio  $r$ , con  $r_0 < r < 1$ , y  $q_0$  el punto  $(r, 0)$ . Para cada  $t \in \Delta_\epsilon$  denotemos por  $\lambda_t$  a la representación de monodromía del fibrado  $\phi_t : E_t \rightarrow D$ . Entonces existe un  $0 < \delta < \epsilon$  tal que para todo  $t$  con  $|t| < \delta$  se cumple que  $\lambda_t([C_r])$  es un conjugado de  $\lambda_0([C_r])$  en  $SL(2, Z)$ .*

**Prueba.** El teorema de Ehresman (1.2.6) garantiza que  $p = pr_2 \circ \Phi : \mathcal{E} \rightarrow \Delta_\epsilon$  es un haz fibrado y por tanto la deformación es localmente trivial. Luego para cada  $t_0$  fijo existe un abierto  $U_{t_0} \subset \Delta_\epsilon$  y un difeomorfismo  $\psi : p^{-1}(U_{t_0}) \rightarrow U_{t_0} \times E_{t_0}$  que conmuta con la proyección en la primera coordenada. Por tanto todas las fibras de  $p$  sobre puntos  $t \in U_{t_0}$ ,  $p^{-1}(t) = E_t$ , son isomorfas a  $E_{t_0}$ . Ahora sea  $t$  un punto cualquiera en  $\Delta_\epsilon$  y sea  $l$  el segmento que conecta el origen con  $t$ .

Por el párrafo anterior,  $l$  puede cubrirse con finitos abiertos  $U_i \subset \Delta_\epsilon$  sobre los cuales  $p$  es trivial y en consecuencia todas las fibras  $E_t$  son difeomorfas entre sí, para aquellos  $t \in U_i$ . Entonces claramente todas deberán también serlo a lo largo de  $l$  y por consiguiente  $E_t$  es difeomorfo a  $E_0$ , que es difeomorfo a  $E$ .

Denotemos por  $A$  al anulo abierto  $A = \{z : r_0 < |z| < 1\}$ . Fijemos  $q \in A \times \{0\}$  y denotemos por  $E'_0$  al submanifold de  $E_0$ ,

$$\Phi^{-1}(A \times \{0\}) = \phi_0^{-1}(A) \subset E_0.$$

Como  $\phi_0$  no tiene puntos críticos en  $A$  se sigue que la diferencial de  $\phi_0|_{E'_0} : E'_0 \rightarrow A \times \{0\}$  en  $x = \phi_0^{-1}(q)$  es sobreyectiva, es decir,

$$d\phi_0(x) : T_x(E'_0) \rightarrow T_q(A \times \{0\}),$$

es sobreyectiva. Por otro lado, la condición 3 de la definición anterior garantiza que

$$dp(x) = pr_2 \circ d\Phi(x) : T_x(E_0) \rightarrow T_0(\Delta_\epsilon)$$

también lo es. De aquí se sigue entonces que

$$d\Phi(x) : T_x(E_0) \rightarrow T_{q \times \{0\}}(A \times \Delta_\epsilon) = T_q(A) \times T_0(\Delta_\epsilon)$$

es sobreyectiva y en consecuencia, si denotamos por  $\mathcal{E}'$  a  $\Phi^{-1}(A \times \Delta_\epsilon)$ , se tiene que  $\Phi : \mathcal{E}' \rightarrow A \times \Delta_\epsilon$  es propia, sobreyectiva sin puntos críticos. Nuevamente, por el teorema de Ehresman se deduce que  $\Phi : \mathcal{E}' \rightarrow A \times \Delta_\epsilon$  es localmente trivial.

Fijemos un anillo compacto  $A' \subset A$  que contenga el círculo  $C_r$ . Alrededor de cada punto  $q \times \{0\} \in A' \times \Delta_\epsilon$  se puede escoger un abierto trivializante para  $\Phi : \mathcal{E}'' \rightarrow A' \times \Delta_\epsilon$ , donde  $\mathcal{E}'' \subset \mathcal{E}'$  denota la preimagen  $\Phi^{-1}(A' \times \Delta_\epsilon)$ . Escojamos finitos abiertos trivializantes  $U_i \times V_i \subset A' \times \Delta_\epsilon$  ( $i = 1, \dots, n$ ) que cubran a  $A' \times \{0\}$  y un  $\epsilon > \delta > 0$  tal que si  $\Delta_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \delta\}$  entonces  $U_i \times \Delta_\delta$ ,  $i = 1, \dots, n$ , cubren a  $A' \times \{0\}$  y sobre los cuales  $\Phi : \mathcal{E}'' \rightarrow A' \times \Delta_\epsilon$  es trivial. Si  $\{g_{ji}(q, t)\}$  son los cociclos de este fibrado en cada intersección  $U_i \times \Delta_\delta \cap U_j \times \Delta_\delta$ , entonces para cada  $t \in \Delta_\delta$  fijo, las restricciones  $\{g_{ji}|_{U_i \cap U_j \times \{t\}}\}$  son cociclos de  $\phi_t$  en  $U_i \cap U_j$ . Pero es claro que la clase de isotopía de  $g_{ji}|_{U_i \cap U_j \times \{t\}}$  y de  $g_{ji}|_{U_i \cap U_j \times \{0\}}$  en el grupo de clases de mapeos del toro es la misma, ya que para cada  $q$  fijo la familia  $g_{ij}(q, s)$ , con  $0 < s < t$  es un camino de difeomorfismos que lleva de una clase a la otra, por tanto la monodromía computada a lo largo de  $C_r$ ,  $\lambda_t([C_r])$  y  $\lambda_0([C_r])$  (ver ecuación 1.8) es la misma.

■

El siguiente teorema es un resultado clásico de Moishezon (teorema 8 y 8a de [27]) el cual garantiza que toda fibración elíptica al disco abierto admite una morsificación.

**Teorema 3.3.6 (Moishezon)** *Toda fibración elíptica singular  $\phi : E \rightarrow D$  al disco unitario abierto admite una morsificación. Más aún, al deformar cada fibra múltiple suave  $mI_0$  da origen a otra fibra de esta misma clase*

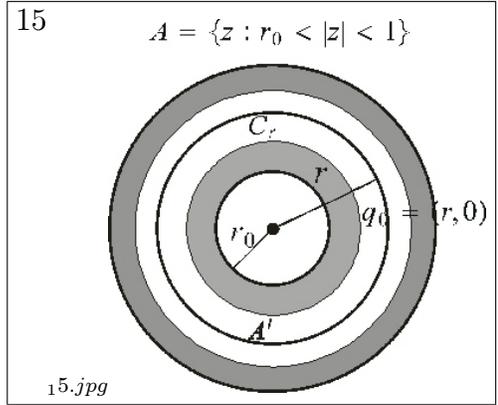


Figura 3.2: Proposición 3.3.5

y cada fibra múltiple  $mI_1$  da origen a una fibra  $mI_0$  y  $n$  fibras de tipo  $I_1$ . Cualquier otra fibra singular (no múltiple) da origen a  $r$  fibras de tipo  $I_1$ , donde  $r$  denota la característica de Euler ( $\chi$  de la tabla 3.2).

Como se vio en la proposición 3.2.1, el número de fibras simples de Lefschetz (tipo  $I_1$ ) en  $E_t \rightarrow D_t$  es igual a la característica de Euler de  $E_t$ . Como todos los  $E_t$  son difeomorfos entre sí, se sigue que este número es constante, y será denotado por  $N(\phi)$ . Nuestro próximo objetivo es demostrar la conjetura de factorización minimal. Con la notación de la proposición 3.3.5, el teorema en forma precisa es el siguiente:

**Teorema 3.3.7 (Factorización minimal)** *Sea  $\phi : E \rightarrow D$  una fibración elíptica singular al disco abierto que tenga a  $\phi^{-1}(0)$  como su única fibra singular. Entonces la factorización más corta de la monodromía total  $\lambda([C_r])$  en giros de Dehn derechos tiene  $N(\phi)$  términos.*

La prueba de este teorema involucra un estudio algebraico detallado del grupo de clases de mapeos del toro y del grupo modular. Quiero señalar que la demostración que presentaré descansa en hechos más generales que los usados en [7] los que además permitirán demostrar el *teorema de coalescencia* para fibraciones sin fibras múltiples.

### 3.4. El grupo de clases de mapeos del toro

En esta sección se demostrarán algunos hechos fundamentales sobre el grupo de clases de mapeos del toro  $SL(2, \mathbb{Z})$ , y del grupo modular  $PSL(2, \mathbb{Z})$ , definido como el cociente  $SL(2, \mathbb{Z})/\{\pm Id_{2 \times 2}\}$  por el subgrupo generado por  $-Id_{2 \times 2}$ , donde  $Id_{2 \times 2}$  denota la matriz identidad. Se discutirán algunos resultados combinatorios que tiene que ver con secuencias de elementos en este grupo los que servirá para demostrar el resultado principal (teorema 3.4.2). A lo largo de esta discusión se ha hecho uso del hecho de que  $PSL(2, \mathbb{Z})$  es isomorfo al producto libre  $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$  y en consecuencia todo elemento puede ser escrito en forma única reducida en términos de generadores fijos de cada factor. Referencias para los resultados estándar pueden consultarse en [27], [11] y [25].

Recordemos que en la sección 1.1.4 definimos

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$V = W^{-1}UW = -WUW = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El propósito es demostrar varios resultados que conciernen la factorización de aquellas matrices que aparecen como monodromías alrededor de fibras singulares en fibraciones elípticas, y que como ya se había visto (teorema 3.3.3), son precisamente las que aparecen en la siguiente tabla (lista de Kodaira,  $n \geq 0$ ).

Tipo	Representante matricial	Factorización canónica
$I$	$\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$U^n$
$II$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$	$VU$
$III$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$	$VUV$
$IV$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$	$(VU)^2$

Tipo	Representante matricial	Factorización canónica
$I^*$	$\begin{bmatrix} -1 & -n \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$U^n(VU)^3 = -U^n$
$IV^*$	$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$VU(VU)^3 = -VU$ (3.3)
$III^*$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$VUV(VU)^3 = -VUV$
$II^*$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$(VU)^2(VU)^3 = -(VU)^2$

El resultado principal de esta sección afirma que para cada matriz de esta lista hay esencialmente una única factorización en giros de Dehn derechos (es decir, en conjugados de  $U$  en  $SL(2, \mathbb{Z})$ ), excepto por movimientos de Hurwitz, que es precisamente aquella dada en la tabla. A esta factorización se le denominará la *factorización canónica minimal*. El teorema que se quiere demostrar es el siguiente:

**Teorema 3.4.1** *Sea  $A$  una de las matrices de la lista de Kodaira. Si  $A = G_1 \cdots G_r$  es una factorización de  $A$  en conjugados de  $U$  en  $SL(2, \mathbb{Z})$ , entonces  $r$  es mayor e igual al número de factores de la factorización canónica minimal de  $A$ . Más aún, si llamamos  $n$  a este número, entonces después de finitos movimientos de Hurwitz el producto de los  $G_i$  puede cambiarse en un nuevo producto  $A = C_1 \cdots C_n D_{n+1} \cdots D_r$  donde:*

- *En los casos  $I - IV$ ,  $C_1 \cdots C_n$  es la factorización canónica de  $A$  y  $D_{n+1} \cdots D_r$  es igual a la matriz identidad  $Id_{2 \times 2}$ ,*
- *En los casos  $I^* - IV^*$ ,  $C_1 \cdots C_n$  es la factorización canónica de  $-A$  y  $D_{n+1} \cdots D_r$  es igual a  $-Id_{2 \times 2} = (VU)^3$ .*

Por ejemplo, para

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{Caso } III^*)$$

cualquier factorización  $A = G_1 \cdots G_r$  se puede cambiar a la factorización  $A = VUV D_{10} \cdots D_r$ , donde  $D_{10} \cdots D_r = (VU)^3 = -Id_{2 \times 2}$ . El teorema anterior es un vasta generalización de un teorema de Moishezon [27], el cual afirma que cualquier factorización de la identidad puede reescribirse con movimientos de Hurwitz en un producto de la forma  $(VU)^{6s}$ ,  $s \geq 0$ . Teniendo esto en cuenta es posible reformular el teorema anterior de la siguiente manera.

**Teorema 3.4.2** *Sea  $A$  un matriz que corresponda a la monodromía alrededor de una fibra singular en una fibración elíptica. Si  $A = G_1 \cdots G_r$  es una factorización de  $A$  en conjugados de  $U$  en  $SL(2, \mathbb{Z})$  entonces  $r$  es mayor o igual al número de factores de la factorización canónica minimal de  $A$ . Más aún, si  $n$  es este número, después de un número finito de movimientos de Hurwitz el producto se puede cambiar a otro producto  $A = C_1 \cdots C_n (VU)^{6s}$ , donde  $C_1 \cdots C_n$  es la factorización canónica minimal de  $A$  y  $s = (r - n)/12$ , en los casos I-IV, y al producto  $A = C_1 \cdots C_n (VU)^{6s+3}$ , donde  $C_1 \cdots C_n$  es la factorización canónica minimal de  $-A$  y  $s = (r - n - 6)/12$ , en los casos  $I^* - IV^*$ .*

En lo que sigue se hará referencia a cada clase particular en  $PSL(2, \mathbb{Z})$  especificando uno de sus representantes. *Se usarán letras mayúsculas para los elementos de  $SL(2, \mathbb{Z})$  y minúsculas para sus correspondientes imágenes en el grupo modular.*

Es un hecho bien conocido [34] que el grupo modular es isomorfo al producto libre  $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$  donde el isomorfismo puede escogerse de tal forma que toma cada factor y lo envía en los subgrupos generados por los elementos  $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , y  $b = wu$ , respectivamente. Por tanto,

$$G = PSL(2, \mathbb{Z}) = \langle w, b \mid w^2 = b^3 = 1 \rangle.$$

De aquí se sigue que la abelianización de  $G$  es  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$  y en consecuencia la abelianización de  $SL(2, \mathbb{Z})$  es el grupo cíclico  $\mathbb{Z}_{12}$ , donde cada conjugado de la matriz  $U$  es enviado al 1.

También es bien conocido que cada elemento  $a$  en este grupo puede ser escrito en forma única como un producto  $a = t_k \cdots t_1$ , donde cada  $t_i$  es, o bien  $w, b$ , o  $b^2$  y tal que ningún par consecutivo  $t_i t_{i+1}$  esté formado por dos potencias de  $b$  o por dos copias de  $w$ . Llamaremos al producto  $t_k \cdots t_1$  la *expresión reducida* de  $a$  y a  $k$  la *longitud* de  $a$ , que será denotada por  $l(a)$ . Sea  $c = t'_1 \cdots t'_l$  la expresión reducida de un elemento cualquiera  $c$ . Si exactamente

los primeros  $m - 1$  términos de  $c$  se cancelan con los de  $a$ , esto es,  $t'_i = t_i^{-1}$ , para  $1 \leq i \leq m - 1$ , y si  $m \leq \min(k, l)$ , entonces  $ac = t_k \cdots t_m t'_m \cdots t'_l$  y  $t_m t'_m$  tiene que ser igual a una potencia no trivial de  $b$ . Esto ya que si  $t_m$  no fuese una potencia de  $b$  tendría que ser igual a  $w$  y en consecuencia  $t_{m-1}$  sería igual a  $b$  o a  $b^2$  y por tanto lo sería  $t'_{m-1}$ . Luego,  $t'_m$  tendría que ser  $w$ , pero en este caso habría  $m$  cancelaciones en vez de  $m - 1$  en la juntura entre  $a$  y  $c$ . Por tanto,  $t_m$  y  $t'_m$  son ambas potencias de  $b$ , y como hay exactamente  $m - 1$  cancelaciones, el producto es no trivial lo que implica que la expresión reducida de  $ac$  es de la forma

$$ac = t_k \cdots t_{m+1} b^r t'_{m+1} \cdots t'_l, \quad r = 1 \text{ o } 2, \quad \text{si } m \leq \min(k, l). \quad (3.4)$$

Denotemos por  $s_1$  al elemento  $bwb$ . Los conjugados más cortos de  $s_1$  en  $G$  son precisamente  $s_0 = b^2(bwb)b = wb^2$  y  $s_2 = b(bwb)b^2 = b^2w$ . El elemento  $s_1$  es trivialmente conjugado de sí mismo de longitud 3, y puede verse fácilmente que si  $g$  es un conjugado de más longitud su expresión reducida tiene que tener la forma  $q^{-1}s_1q$ , donde  $q$  es una palabra reducida que comienza con  $w$  (véase [11]), y tal que  $l(g) = 2l(q) + 3$ . Llamaremos a un conjugado de  $s_1$  *corto*, si  $g \in \{s_0, s_1, s_2\}$ , y si no es corto, se llamará *largo*.

**Observación 3.4.3** Sea  $c_b(a) = b^{-1}ab$  la conjugación por  $b$ . Este es un automorfismo de  $G$  que envía a  $u = wb$  en  $b^2wb^2$ . El mapeo  $\varphi : \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$  que se obtiene enviando el primer factor en sí mismo y a  $b$  en  $b^2$ , esto es,  $\varphi = Id * \psi$ , donde  $\psi$  es el automorfismo de  $\mathbb{Z}_3$  que envía a  $b$  en  $b^2$ , es un automorfismo que envía a  $b^2wb^2$  en  $s_1$ . Por tanto la compuesta de estos dos automorfismos es un automorfismo  $\rho$  que envía  $u$  y  $v$  en  $s_1$  y  $s_0$ , respectivamente.

La siguiente noción es fundamental en el análisis combinatorio que sigue.

**Definición 3.4.4** Se dirá que dos conjugados  $g$  y  $h$  de  $s_1$  juntan bien si  $l(gh) \geq \max(l(g), l(h))$ .

El siguiente lema es demostrado en ([11], lema 4.10).

**Lema 3.4.5** Supongamos que  $g = t_k \cdots t_1$  y  $h = t'_1 \cdots t'_l$  son las expresiones reducidas de dos conjugados de  $s_1$  y supongamos que junten bien. Entonces al computar  $gh$  se da alguna de las siguientes posibilidades:

1. no ocurre ninguna cancelación y en este caso  $t_k \cdots t_1 t'_1 \cdots t'_l$  es la expresión reducida de  $gh$ , o
2. exactamente los primeros  $m - 1$  términos de  $g$  y  $h$  se cancelan en cuyo caso  $m \leq \min(k, l)$ . Más aún, si  $g$  y  $h$  son conjugados cortos, entonces ellos tienen que ser  $s_2$  y  $s_0$ , respectivamente. Si ambos son conjugados largos con expresiones reducidas de la forma  $g = q_1^{-1} s_1 q_1$  y  $h = q_2^{-1} s_1 q_2$ , y por tanto con longitudes iguales a  $2l(q_i) + 3$ , entonces la expresión reducida de  $gh$  es de la forma

$$gh = t_k \cdots t_{m+1} b^r t'_{m+1} \cdots t'_l, \quad r = 1 \text{ o } 2,$$

y la desigualdad (2) puede mejorarse de tal forma que  $m \leq \min((k - 1)/2, (l - 1)/2)$  lo cual implica que  $m - 1 \leq \min(l(q_1), l(q_2))$ .

Ahora suponga que  $g$  y  $h$  son dos conjugados que no junten bien y que ninguno de ellos sea corto. El siguiente lema muestra que en ese caso existen  $g'$  y  $h'$  conjugados de  $s_1$  tales que  $gh = g'h'$  y tales que  $l(g') + l(h') < l(g) + l(h)$  ([11], Proposición 4.15).

**Lema 3.4.6** *Suponga que  $g$  y  $h$  son conjugados de  $s_1$  que satisfacen la desigualdad  $l(gh) < \max(l(g), l(h))$ , y supongamos que al menos uno de ellos es largo. Entonces  $l(h) \neq l(g)$ . Si  $l(h) > l(g)$ , los elementos  $g' = ghg^{-1}$ ,  $h' = g$  son conjugados de  $s_1$  y satisfacen:*

1.  $gh = g'h'$ , y
2.  $l(g') + l(h') < l(g) + l(h)$ .

*Si ocurre que  $l(h) < l(g)$ , entonces se sigue la misma conclusión tomando  $g' = h$ , y  $h' = h^{-1}gh$ .*

Nótese que el reemplazamiento  $(g, h)$  por el par  $(g', h')$  es un movimiento de Hurwitz (definición 2.3.2). Usando este lema es posible demostrar que un producto  $g_1 \cdots g_r$  de conjugados de  $s_1$  siempre puede cambiarse a un nuevo producto  $g'_1 \cdots g'_r$  de conjugados en donde cada par consecutivo junta bien.

**Proposición 3.4.7** *Sea  $\{g_1, \dots, g_r\}$  sea un conjunto de  $r$  conjugados de  $s_1$ . Entonces después de un número finito de m.h. se puede obtener un nuevo conjunto de  $r$  conjugados  $\{g'_1, \dots, g'_r\}$  tales que  $g_1 \cdots g_r = g'_1 \cdots g'_r$  y tales que todos son cortos o cualquier par consecutivo  $g'_i, g'_{i+1}$  junta bien.*

Antes de dar la demostración es necesario saber como tratar productos de conjugados cortos que no junten bien.

**Proposición 3.4.8** *Sea  $p = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_l}$  un producto de conjugados cortos donde hay al menos un par consecutivo de elementos que no juntan bien. Entonces, después de un número finito de m.h.,  $p$  puede ser escrito en la forma  $p = s_{j_1} s_{j_2} \cdots s_{j_l}$  con el mismo número de términos y donde el primer conjugado  $s_{j_1}$  puede ser escogido arbitrariamente del conjunto  $\{s_0, s_1, s_2\}$ . En forma similar, mediante m.h.  $s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_l}$  puede reescribirse como un producto con igual número de términos y donde el último conjugado puede ser escogido arbitrariamente.*

**Prueba.** Usemos inducción en  $l$ . Para  $l = 2$  un computo directo muestra que los pares  $s_2 s_0$ ,  $s_0 s_1$ , y  $s_1 s_2$  son los únicos que no juntan bien y que el producto es igual a  $b$ . De esto se sigue la afirmación notando que cada uno de estos productos puede cambiarse en otro por medio de un m.h., ya que  $s_2 s_0 = s_0(s_0^{-1} s_2 s_0)$ ,  $s_0^{-1} s_2 s_0 = s_1$ ,  $s_0 s_1 = s_1(s_1^{-1} s_0 s_1) = s_1 s_2$ , y  $s_1 s_2 = s_2(s_2^{-1} s_1 s_2) = s_2 s_0$ .

Ahora, sea  $l > 2$ . Si el primer par de  $p$  no junta bien, el mismo argumento del párrafo anterior puede aplicarse. Por tanto podemos suponer que hay al menos un par que no junta bien en el producto  $s_{i_2} \cdots s_{i_l}$ . Entonces, por inducción podemos cambiar este producto en uno nuevo  $s_{j_2} \cdots s_{j_l}$ , donde  $s_{j_2}$  puede escogerse arbitrariamente. En consecuencia, si  $s_{i_1}$  es  $s_0$  ( $s_1, s_2$ , respectivamente) podemos escoger  $s_{j_2}$  igual a  $s_1$  ( $s_2, s_0$ , respectivamente) de tal forma que el primer par no junte bien. y por ende puede ser cambiado nuevamente por otro par con primer término escogido arbitrariamente.

Un argumento similar muestra que  $s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_l}$  puede ser cambiado a otro producto con el mismo número de términos en el que el último elemento es escogido en forma arbitraria. ■

**Demostración de la proposición 3.4.7.** Entre los conjuntos de  $r$  conjugados  $\{g'_1, \dots, g'_r\}$  obtenidos mediante m.h. del conjunto  $\{g_1, \dots, g_r\}$ , y que satisfagan  $g_1 \cdots g_r = g'_1 \cdots g'_r$ , escojamos uno de tal forma que la suma  $\sum_{i=1}^r l(g'_i)$  sea tan pequeña como sea posible. Si todos los  $g'_k$  son cortos, hemos terminado. Si no, uno cualquiera  $g'_k$  que sea largo tiene que juntar bien con cualquiera de los términos antes o después de él (si es que existe alguno), ya que de otra forma, por el lema 3.4.6, el par correspondiente puede ser cambiado en otro haciendo más pequeño el valor de la suma  $\sum_{i=1}^r l(g'_i)$ .

Por otro lado, sea  $s_{i_1} \cdots s_{i_l}$  un producto consecutivo de conjugados cortos que aparezcan en  $g'_1 \cdots g'_r$ . Si este producto precede un conjugado largo  $g'_k$ , es

decir,  $s_{i_1} \cdots s_{i_l} g'_k$  es un segmento del producto  $g'_1 \cdots g'_r$ , entonces por el lema anterior se tiene que todo par de elementos consecutivos en  $s_{i_1} \cdots s_{i_l}$  junta bien o en caso contrario dicho producto puede cambiarse a  $s_{j_1} s_{j_2} \cdots s_{j_l}$ , donde  $s_{j_i}$  puede ser escogido arbitrariamente. Si la expresión reducida de  $g'_k$  es de la forma  $w b^e t_3 \cdots t_m$ ,  $e = 1, 2$ , podemos escoger  $s_{j_i} = s_2$  tal que  $s_{j_i}$  y  $g'_k$  no junten bien. Aplicando nuevamente el lema 3.4.6, podemos cambiar el par  $g'_{k-1}, g'_k$  por otro haciendo que la suma  $\sum_{i=1}^r l(g'_i)$  sea más pequeña. Similarmente, si la expresión reducida de  $g'_k$  es de la forma  $b^e w t_3 \cdots t_m$ , entonces, si  $e = 1$ , podemos escoger a  $s_{j_i}$  igual a  $s_2$  de tal forma que  $s_{j_i}$  y  $g'_k$  no junten bien; y si  $e = 2$ ,  $s_{j_i}$  puede ser escogido como  $s_1$ . Por tanto concluimos que cualquier par de elementos consecutivos de  $s_{i_1} \cdots s_{i_l}$  deben juntar bien. El argumento es completamente similar si  $g'_k s_{i_1} \cdots s_{i_l}$  es un segmento del producto  $g'_1 \cdots g'_r$ . Por tanto, vemos que si el conjunto  $\{g'_1, \dots, g'_r\}$  con suma minimal  $\sum_{i=1}^r l(g'_i)$  contiene al menos un conjugado largo entonces todo par consecutivo debe juntar bien, lo que demuestra la proposición. ■

Definamos el extremo izquierdo de un conjugado como sigue.

**Definición 3.4.9** Si  $g$  es un conjugado de  $s_1$ , su extremo izquierdo,  $\text{Izq}(g)$ , se define como sigue: si  $g$  es largo de la forma  $g = q^{-1} s_1 q$ , definimos  $\text{Izq}(g) = q^{-1} s_1$ . Si  $g$  es  $s_0 = w b^2$ ,  $s_1 = b w b$ , o  $s_2 = b^2 w$ , definimos su extremo izquierdo como  $w, b, b^2$ , respectivamente.

**Lema 3.4.10** Si en el producto de conjugados de  $s_1$ ,  $p = g_1 \cdots g_r$  dos términos consecutivos cualesquiera  $g_i, g_{i+1}$  juntan bien, entonces la expresión reducida de  $p$  es de la forma  $\text{Izq}(g_1) t_2 \cdots t_l$ , donde cada  $t_i$  es uno de los elementos  $b, b^2$  o  $w$ .

**Prueba.** La prueba es por inducción sobre  $r$ . La afirmación es trivial para  $r = 1$ . Distinguiamos varios casos:

1.  $g_1 = s_0$ . Como  $g_1$  y  $g_2$  juntan bien, el conjugado  $g_2$ , si es corto deberá ser igual a  $s_0$  o bien a  $s_2$ . En el primer caso, por la hipótesis de inducción, debemos tener que la expresión reducida de  $g_2 \cdots g_r$  es de la forma  $w t_2 \cdots t_l$ , y consecuentemente  $g_1 \cdots g_r = w b^2 w t_2 \cdots t_l = \text{Izq}(s_0) t'_2 \cdots t'_k$  de lo cual se sigue la afirmación. Por otro lado, si  $g_2$  es igual a  $s_2$  entonces  $g_2 \cdots g_r = b^2 t_2 \cdots t_l$  y el resultado también se sigue, ya que

$$g_1 \cdots g_r = w b t_2 \cdots t_l = \text{Izq}(s_0) t'_2 \cdots t'_k.$$

Finalmente, si  $g_2$  es largo, digamos que  $g_2 = q^{-1}s_1q$  entonces  $g_2 \cdots g_r = q^{-1}s_1t_2 \cdots t_l$ . Pero como  $g_1$  y  $g_2$  juntan bien, la expresión reducida de  $q^{-1}$  no puede comenzar con  $bw$ . Por tanto, comienza con  $b^2w$  o con  $w$ . En cualquiera de los dos casos la expresión reducida de  $g_1 \cdots g_r$  tiene la forma

$$wbwt_4 \cdots t_k = \text{Izq}(s_0)t'_2 \cdots t'_k, \text{ o } wb^2wt_4 = \text{Izq}(s_0)t'_2 \cdots t'_v.$$

2.  $g_1 = s_2$ . En este caso, si  $g_2$  es corto deberá ser igual a  $s_2$  o igual a  $s_1$  y en cualquiera de los dos casos la expresión reducida de  $g_1 \cdots g_r$  es de la forma  $b^2wb^2t_4 \cdots t_l$ ,  $b^2wbt_4 \cdots t_l$ , respectivamente, y el resultado se sigue. Si  $g_2$  es largo, por el lema 3.4.5 (2) y como  $g_1$  y  $g_2$  juntan bien, no ocurren cancelaciones y por ende la expresión reducida de  $g_1 \cdots g_r$  tiene la forma  $b^2wt_2 \cdots t_v$  y el resultado también se sigue.
3. El caso  $g_1 = s_1$  puede ser tratado de igual forma que el caso anterior.
4.  $g_1$  es largo. Si  $g_2$  es corto, por el lema 3.4.5 tiene que ser igual a  $s_2$ , o no ocurren cancelaciones. En este último caso el lema se sigue inmediatamente. En el primer caso, la expresión reducida de  $q$  no puede terminar en  $wb$ , ya que esto implicaría que  $g_1$  y  $g_2$  no junten bien. Por tanto  $q = cwb^2$ , o  $q = cb^r w$ , para algún  $c$  y  $r = 1, 2$ . Por inducción  $g_2 \cdots g_r = b^2t_2 \cdots t_s$ , y en consecuencia  $p = q^{-1}s_1cwb^2t_2 \cdots t_s$ , o  $p = q^{-1}s_1cb^rwb^2t_2 \cdots t_s$ . En cada caso, la expresión reducida comienza con  $\text{Izq}(g_1)$ .

Finalmente, supongamos que  $g_2$  también es largo. Si  $g_1 = q_1^{-1}s_1q_1$  y  $g_2 = q_2^{-1}s_1q_2$  entonces por el lema 3.4.5 (2), o no ocurre ninguna cancelación, o el número de términos que se cancela en el producto  $g_1g_2$  es  $\leq \min(l(q_1), l(q_2))$ . Por inducción  $g_2 \cdots g_r = q_2^{-1}s_1t_2 \cdots t_s$ , y en cualquier caso la expresión reducida de  $p = g_1 \cdots g_r$  comienza con  $q_1^{-1}s_1$ .

■

Con estos preliminares se pasará a demostrar el teorema 3.4.1.

**Prueba.** Debemos probar la afirmación del teorema para cada una de las ocho matrices de la lista 3.3. Trataremos los casos *I-IV* primero, y una vez estos se hayan establecido, un argumento relativamente simple permite demostrar la afirmación en los casos *I\*-IV\**. En los primeros cuatro casos,

para cada factorización  $A = G_1 \cdots G_r$  en  $SL(2, \mathbb{Z})$  sea  $a = g_1 \cdots g_r$  la correspondiente factorización en el grupo modular.

**Afirmación (A):** después de un número finito de m.h. el producto  $g_1 \cdots g_r$  puede cambiarse en otro de la forma

$$a = (g'_1 \cdots g'_n)(g'_{n+1} \cdots g'_r)g'_n(g'_{n+1} \cdots g'_r),$$

donde  $g'_1 \cdots g'_n$  es la imagen de la factorización canónica de  $A$  en el grupo modular ( $n$  es su longitud) y  $g'_{n+1} \cdots g'_r$  es la clase  $i_{2 \times 2}$  de la matriz identidad. Para mostrar esto, podemos primero aplicar el automorfismo  $\rho$  (definido en la observación 3.4.3) y luego demostrar la afirmación equivalente para  $\rho(a)$ . Notemos que después de hacer esto, la imagen de la factorización canónica de  $A$  se convierte en la factorización de  $\rho(a)$  en términos de los elementos  $\rho(u) = s_1$  y  $\rho(v) = s_0$ .

Bajo el supuesto de que esta afirmación es cierta podemos demostrar los casos *I-IV* del teorema como sigue. Notemos primero que cada movimiento de Hurwitz (m.h.) en las  $g_i$  puede levantarse a un movimiento de Hurwitz en las  $G_i$ . Esto nos dice que podemos encontrar elementos  $G'_i$ ,  $i = 1, \dots, r$ , en  $SL(2, \mathbb{Z})$  tales que  $A = \pm G'_1 \cdots G'_n G'_{n+1} \cdots G'_r$ , y  $G'_{n+1} \cdots G'_r = Id_{2 \times 2}$ , donde  $G'_1 \cdots G'_n$  es la factorización canónica de  $A$ . Pero cada  $G_i$  es un conjugado de  $U$  y cada m.h. reemplaza a  $G_i$  por uno de sus conjugados y en consecuencia por un conjugado de  $U$ . Luego cada  $G'_i$  es un conjugado de  $U$ . Pero para  $i = 1, \dots, n$ , la clase de  $G_i$  en el grupo modular es uno de los dos elementos  $u$  o  $v$ , y por consiguiente  $G_i = \pm U$  o  $G_i = \pm V$ . Finalmente, el signo deberá ser positivo, ya que  $-U$  y  $-V$  no son conjugados de  $U$  (ambos elementos tienen traza negativa).

Los casos *I\*-IV\** puede ser tratados como sigue: supongamos que  $-A = G_1 \cdots G_r$ , donde  $A$  es una de las matrices de los casos *I-IV*. Al pasar al grupo modular obtenemos una ecuación  $a = g_1 \cdots g_r$  que, después de finitos m.h. puede ser levantada a los  $G_i$ , lo que nos permite escribir  $A = G'_1 \cdots G'_n G'_{n+1} \cdots G'_r$ , donde  $G'_1 \cdots G'_n$  es la factorización canónica de  $A$  y  $G'_{n+1} \cdots G'_r = \pm Id_{2 \times 2}$  ( $\#$ ). Como cada m.h. preserva el producto se debe tener que  $G'_1 \cdots G'_r = -A$ , y en consecuencia el signo de ( $\#$ ) deberá ser negativo y por tanto  $-A = G'_1 \cdots G'_n(-Id_{2 \times 2})$ . Esto concluye la prueba del teorema.

Pasemos ahora a demostrar la afirmación (A) analizando cada uno de los posibles cuatro casos.

**Caso 1:**  $a = u^n$ ; entonces  $\rho(a) = \rho(u)^n = s_1^n$ . Supongamos que  $s_1^n = g_1 \cdots g_r$  (e.1). Por la proposición 3.4.7, después de finitos m.h. podemos

suponer que cualquier par de elementos consecutivos  $g_i$  en este producto junta bien o que todos los  $g_i$  son conjugados cortos de  $s_1$ . En el primer caso, por el lema 3.4.10 sabemos que la expresión reducida de este producto deberá ser de la forma  $\text{Izq}(g_1)t_2 \cdots t_l$ . Por otro lado, como la expresión reducida de  $s_1^n$  es  $b(wb^2)^{n-1}wb$  se sigue que  $g_1$  no puede ser un conjugado largo  $q^{-1}s_1q$ , esto ya que la expresión reducida de  $\text{Izq}(q^{-1}s_1q) = q^{-1}s_1$  tiene la forma  $l_1 \cdots l_s bwb$  y la secuencia  $bwb$  no aparece en la expresión reducida de  $s_1^n$ . En forma similar,  $g_1$  no puede ser  $s_0$  o  $s_2$  tampoco, ya que  $\text{Izq}(s_0) = w$  y  $\text{Izq}(s_2) = b^2$ . Pero la expresión reducida de  $s_1^n$  comienza con el elemento  $b$ . Luego  $g_1 = s_1$ , y podemos cancelar este elemento en ambos lados de la ecuación (e.1) y aplicar inducción sobre  $n$  para obtener el resultado.

En el segundo caso, esto es, cuando todos los  $g'_i$  son cortos, podemos suponer que al menos un par de elementos consecutivos no junta bien, ya que de no ocurrir estaríamos justamente en el caso anterior. Pero por la proposición 3.4.8, después de efectuar finitos m.h. podemos suponer que  $g_1 = s_1$ . Cancelando  $s_1$  a ambos lados podemos continuar la prueba por inducción.

**Caso 2:**  $a = vu$ ; luego  $\rho(a) = s_0s_1$ . Supongamos que  $s_0s_1 = g_1 \cdots g_r$  (e.2). Nuevamente, por la proposición 3.4.7, después de finitos m.h. podemos suponer que cualquier par de elementos consecutivos junta bien o todos son conjugados cortos de  $s_1$ . En el primer caso, como  $s_0s_1 = b$ , entonces  $g_1$  no puede ser largo ni igual a  $s_0$  o igual a  $s_2$  por exactamente las mismas razones que en el caso anterior. Si  $g_1 = s_1$ , entonces, como  $s_0s_1 = s_1s_2$ , podemos cancelar a  $s_1$  en ambos lados de (e.2) y obtener así  $s_2 = g_2 \cdots g_r$ . Nuevamente, por el lema 3.4.10 sabemos que la expresión reducida de este producto debe tener la forma  $\text{Izq}(g_2)t_3 \cdots t_k$  y esto debe ser igual a  $\text{Izq}(s_2) = b^2$ . Esto descarta la posibilidad de que  $g_2$  sea un conjugado largo o que sea igual a  $s_1$  o igual a  $s_0$ . Por tanto,  $g_2 = s_2$  y (e.2) puede ser escrita en la forma  $s_0s_1 = s_1s_2g'_3 \cdots g'_r$ , después de finitos m.h. Como en la demostración de la proposición 3.4.8, un movimiento de Hurwitz extra nos permite escribir  $s_1s_2$  como  $s_0s_1$  de lo que se sigue la afirmación.

En el caso en el que todos los  $g_i$  sean cortos podemos suponer que al menos un par de elementos consecutivos no juntan bien. Por la proposición 3.4.8 podemos suponer que  $g_1 = s_0$ , después de efectuar finitos m.h. Si cancelamos este elemento en ambos lados de la ecuación (e.2) obtenemos  $s_1 = g_2 \cdots g_r$ . Pero por el Caso 1 (con  $n = 1$ ) se tendría que el producto puede ser cambiado mediante m.h. en otro producto con  $g_2 = s_1$ , de lo cual se sigue la afirmación.

La estrategia para la demostración de los casos restantes es la misma. Para hacer más corta la presentación, llamaremos *caso  $*i$*  a la situación en la

que cualquier par de elementos consecutivos  $g_i$  en la factorización junto bien, y por *case \*ii*, a la situación en la que todos los  $g_i$  son cortos y al menos un par consecutivo de elementos no junta bien.

**Caso 3:**  $a = vuv$ ; luego  $\rho(a) = s_0s_1s_0$ . Supongamos que  $s_0s_1s_0 = g_1 \cdots g_r$  (e.3).

Caso 3i: como  $s_0s_1s_0 = bw^2$ , después de finitos m.h., y comparando ambos lados de la expresión reducida de (e.3),  $g_1$  se puede suponer igual a  $s_1$  (los casos en los que  $g_1$  es largo o igual a  $s_0$  o igual a  $s_2$  se descartan de igual forma que en el párrafo anterior). Ahora,  $s_0s_1s_0 = s_1s_2s_0$  y podemos cancelar a  $s_1$  para obtener  $s_2s_0 = g_2 \cdots g_r$ . Ahora,  $s_2s_0 = s_0s_1$ ; luego  $s_0s_1 = g_2 \cdots g_r$ , lo que nos lleva al caso anterior. Ya sabemos que después de finitos m.h. esta factorización puede ser cambiada en otra de la forma  $s_0s_1g'_3 \cdots g'_r$  con  $g'_3 \cdots g'_r = i_{2 \times 2}$  y en consecuencia  $s_0s_1s_0 = s_1s_0s_1g'_3 \cdots g'_r$ . Pero después de finitos m.h. en el lado derecho, éste puede transformarse en  $s_1s_2s_0g'_3 \cdots g'_r$  y este a su vez en  $s_0s_1s_0g'_3 \cdots g'_r$ , de lo cual se sigue la afirmación.

Caso 3ii: en este caso  $g_r$  se puede suponer igual a  $s_0$  (por la proposición 3.4.8) y puede ser cancelado para obtener  $s_0s_1 = g_1 \cdots g_{r-1}$  lo que nos lleva nuevamente al caso anterior. Después de finitos m.h.  $g_1, g_2$  puede escogerse igual a  $s_0$  y  $s_1$ , y  $g_3 \cdots g_{r-1} = i_{2 \times 2}$ . Por tanto

$$s_0s_1s_0 = s_0s_1g_3 \cdots g_{r-1}s_0 = s_0s_1s_0g_3 \cdots g_{r-1}$$

con  $g_3 \cdots g_{r-1} = i_{2 \times 2}$ , como se quería.

**Caso 4:**  $a = (vu)^2$ ; por tanto  $\rho(a) = (s_0s_1)^2$ . Supongamos  $(s_0s_1)^2 = g_1 \cdots g_r$  (e.4).

Caso 4i: como  $(s_0s_1)^2 = b^2$  después de finitos m.h. y comparando las expresiones reducidas de ambos lados de la ecuación (e.4),  $g_1$  puede suponerse igual a  $s_2$ . Ahora,  $(s_0s_1)^2 = s_2s_0s_0s_1$  y en consecuencia  $s_2$  puede cancelarse en ambos lados de (e.4) para obtener  $s_0s_0s_1 = g_2 \cdots g_r$ . Pero el lado izquierdo de esta última ecuación es igual a  $w$ , por tanto después de finitos m.h. podemos suponer que  $g_2 = s_0$ . Después de cancelar este elemento se obtiene  $s_0s_1 = g_3 \cdots g_r$ . Por el Caso 2, después de finitos m.h. podemos suponer que  $g_3 = s_0$  y  $g_4 = s_1$ . Luego  $(s_0s_1)^2 = s_2s_0s_0s_1g_5 \cdots g_r$ , con  $g_5 \cdots g_r = id_{2 \times 2}$ . Pero con un movimiento más  $s_2s_0s_0s_1$  puede cambiarse en  $s_0s_1s_0s_1$  de lo cual se sigue la afirmación.

Caso 4ii: en este caso, por la proposición 3.4.8, podemos suponer que  $g_r = s_1$  y este elemento puede cancelarse en ambos lados de (e.4) para obtener  $s_0s_1s_0 = g_1 \cdots g_{r-1}$  lo cual nos lleva al caso anterior, lo que concluye la prueba de la afirmación. ■

### 3.5. EL TEOREMA DE COALESCENCIA PARA FIBRACIONES ELÍPTICAS 71

Pasemos ahora a dar una prueba de la conjetura de factorización minimal para fibraciones elípticas. Con la notación de la proposición 3.3.5, se supondrá que  $\phi : E \rightarrow D$  es una fibración elíptica singular al disco abierto con una única fibra singular sobre el origen y que  $\Phi : \mathcal{E} \rightarrow D \times \Delta_\epsilon$  es una morsificación. Por definición, existe un real  $0 < r_0 < 1$  tal que todos los valores críticos de cualquier elemento de la familia  $\phi_t$  están contenidos en  $D_{r_0} \subset D$ , el disco abierto de radio  $r_0$  centrado en el origen, y escogemos un  $r_0 < r < 1$ , y a  $C_r$  el círculo de radio  $r$  orientado positivamente. Por esta proposición sabemos que todos los miembros  $E_t$  de  $\mathcal{E}$  tienen el mismo número de fibras simples de tipo Lefschetz  $N(\phi)$ , que es igual a  $\chi(E)$ .

**Teorema 3.4.11** *Sea  $\phi : E \rightarrow D$  una fibración elíptica singular al disco abierto que tenga a  $\phi^{-1}(0)$  como su única fibra singular. Entonces la factorización más corta de la monodromía total  $\lambda([C_r])$  en giros de Dehn derechos tiene  $N(\phi)$  términos.*

**Prueba.** Supongamos una factorización  $\lambda([C_r]) = G_1 \cdots G_l$  en giros de Dehn derechos (es decir, conjugados de  $U$ ) de la monodromía total. Por el teorema de clasificación de Kodaira  $\lambda([C_r])$  es un matriz conjugada a una cierta matriz  $A$ , una de las ocho matrices de la lista 3.3. La factorización anterior proporciona entonces una factorización de  $A$  en  $l$  conjugados de  $U$ . Entonces, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $\lambda([C_r])$  es una de estas ocho matrices. Pero por el teorema 3.4.2, mediante movimientos de Hurwitz, el producto  $G_1 \cdots G_l$  puede cambiarse a un nuevo producto  $G'_1 \cdots G'_l$  donde  $l \geq n$ , con  $n =$  el número de factores de la factorización canónica minimal de  $A$ . Pero la tabla 3.2 muestra que  $n = \chi(E) = N(\phi)$ , la característica de Euler de  $E$  en cada uno de los ocho casos. Luego  $l \geq N(\phi)$ , como se quería. ■

## 3.5. El teorema de coalescencia para fibraciones elípticas

En esta última sección se demostrará el análogo del teorema 2.3.6 para fibraciones elípticas sin fibras múltiples. Nótese que por el teorema de clasificación de Kodaira, las únicas fibras múltiples posibles son todas de tipo  $mI_0$  o de tipo  $mI_n$  de la tabla 3.2, con monodromías asociadas iguales a la identidad, en el primer caso, y a  $U^n$  en el segundo.

Supóngase que  $\phi : E \rightarrow D$  es una fibración elíptica singular al disco abierto. Se quieren dar condiciones necesarias y suficientes para garantizar que  $\phi$  pueda *deformarse* a una fibración singular con un único valor singular, que sin pérdida de generalidad puede suponerse como el origen. El concepto de equivalencia bajo deformación es el análogo al concepto de  $b$ -equivalencia para recubrimientos ramificados. En la siguiente definición  $\sim$  denotará la relación de cuadrado equivalencia.

**Definición 3.5.1** *Se dirá que dos fibraciones elípticas singulares al disco abierto,  $\phi : E \rightarrow D$  y  $\phi' : E' \rightarrow D$  son  $b$ -equivalentes si existe una familia de deformaciones  $(\Phi^1, \mathcal{E}^1), \dots, (\Phi^k, \mathcal{E}^k)$  donde  $\phi \sim \Phi_0^1$ ,  $\Phi_0^i \sim \Phi_{t_{i-1}}^{i-1}$  con  $t_{i-1} \neq 0$  y  $\Phi_0^k \sim \phi'$ .*

Si  $\phi$  fuera  $b$ -equivalente a una fibración singular con una sola fibra singular  $\phi' : E' \rightarrow D$  entonces la monodromía total de  $\phi$  alrededor de la frontera  $C_r$  (recorrida en sentido positivo) de un disco que contenga todos sus valores críticos tendría que ser igual a la monodromía total de  $\phi'$  y en consecuencia sería un conjugado de una de las ocho posibles matrices de la tabla 3.3. Así mismo, la característica de Euler de  $E$  sería la misma que la de  $E'$  y en consecuencia igual al número de términos de la correspondiente factorización canónica minimal. El teorema de coalescencia afirma que esta condición también es suficiente si  $\phi$  no posee ninguna fibra múltiple. La prueba descansa en el siguiente lema, demostrado en [26].

**Lema 3.5.2** *Sean  $(E_1, \phi_1, D)$  y  $(E_2, \phi_2, D)$  dos fibraciones elípticas sin fibras múltiples y con los mismos valores críticos  $Q = \{q_1, \dots, q_k\}$ ,  $k \geq 1$ , los cuales se supondrán que están todos contenidos en el disco abierto  $D_r$ , con  $0 < r < 1$ . Supóngase que la monodromía alrededor de cada  $q_i$  es la misma para ambas fibraciones. Entonces las dos fibraciones son cuadrado equivalentes.*

**Teorema 3.5.3** *Sea  $\phi : E \rightarrow D$  una fibración elíptica singular al disco abierto sin fibras múltiples. Sea  $C_r$  la frontera de un disco cerrado  $\bar{D}_r$  (orientada en sentido positivo) que contenga todos los valores críticos de  $\phi$  en su interior. Entonces  $\phi$  es  $b$ -equivalente a una fibración singular con una sola fibra singular sobre 0,  $\phi' : E' \rightarrow D$ , si y sólo si la monodromía total  $\lambda([C_r])$  es conjugada a una de las ocho posibles matrices de la lista de Kodaira (3.3) y  $\chi(E)$  es igual al número de factores en la factorización canónica minimal correspondiente a dicha matriz.*

### 3.5. EL TEOREMA DE COALESCENCIA PARA FIBRACIONES ELÍPTICAS 73

**Prueba.** Que la condición sea necesaria se sigue de la discusión en el párrafo anterior.

Para ver que es suficiente, basta ver que cualquier morsificación de  $\phi$  es  $b$ -equivalente a una fibración singular con una sola fibra singular sobre 0. Sin pérdida de generalidad podemos suponer entonces que cada fibra singular de  $\phi$  es de tipo  $I_1$ . Sean  $Q = \{q_1, \dots, q_k\}$  los valores críticos de  $\phi$  y escojamos una base  $L = \{[\alpha_1], \dots, [\alpha_k]\}$  para  $\pi_1(D_r - Q, q_0)$  exactamente como se hizo en la sección 2.3. La monodromía total  $\lambda([C_r])$  factoriza como producto de las monodromías  $G_i = \lambda([\alpha_i])$ , donde cada  $G_i$  es un conjugado de  $U$ . Por hipótesis  $\lambda([C_r])$  es una matriz conjugada a una cierta matriz  $A$  de las ocho posibles matrices de la lista de Kodaira (3.3) y  $\chi(E)$  es igual al número de factores en la factorización canónica minimal correspondiente a dicha fibra. Pero vimos en la proposición 3.2.1 que  $\chi(E) = k$ , luego la factorización canónica minimal de  $A$  tiene exactamente  $k$  factores. Como  $\lambda([C_r]) = L^{-1}AL$  para una cierta matriz  $L$  en  $SL(2, \mathbb{Z})$ , y como  $\lambda([C_r]) = G_1 \cdots G_k$ , se tiene entonces que  $A = LG_1L^{-1} \cdots LG_kL^{-1}$  donde cada  $G'_i = LG_iL^{-1}$  es un conjugado de la matriz  $U$  (ver lista 3.3). Por el teorema 3.4.2, existen movimientos de Hurwitz que llevan este producto a otro producto  $G''_1 \cdots G''_k$ , con  $k =$  número de factores en la factorización canónica minimal de  $A$ , y donde  $G''_1 \cdots G''_k$  es precisamente la factorización canónica minimal de  $A$ , en los casos I-IV, y es la factorización canónica minimal de  $-A$ , en los casos  $I^*$ - $IV^*$ . Por la proposición 2.3.3 existe un difeomorfismo  $h$  del disco  $\overline{D}_r$  en sí mismo que deja fija la frontera y tal que el automorfismo inducido  $h_* : \pi_1(\overline{D}_r, q_0) \rightarrow \pi_1(\overline{D}_r, q_0)$  envía la base  $L$  en la base  $L'$  que se obtiene de  $L$  después de realizar los correspondientes movimientos de Hurwitz que transforman los  $G'_i$  en los  $G''_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Componiendo con  $h$  se obtiene una fibración (suave, pero no necesariamente holomorfa)  $h \circ \phi : E \rightarrow D_r$  con valores críticos  $q'_i = h(q_i)$  tal que la monodromía alrededor de cada  $q'_i$  es  $G''_i$ .

Por otro lado, el teorema de existencia de Kodaira (teorema 1.2.8) garantiza que existe una única fibración singular con una sola fibra singular sobre 0,  $\phi' : E' \rightarrow D$  y con monodromía total  $A$ . Más aún, dicha fibra puede tomarse sin multiplicidad de tal forma que al morsificarla ésta se parta en  $\chi(E)$  fibras de Lefschetz simples. Nuevamente, aplicando el teorema 3.4.2,  $\phi'$  puede hacerse cuadrado equivalente a un fibrado (suave)  $h' \circ \phi' : E' \rightarrow D_r$  cuya monodromía es exactamente la misma que la del fibrado  $h \circ \phi : E \rightarrow D_r$ .

El lema anterior garantiza que  $h \circ \phi$  y  $h' \circ \phi'$  son  $b$ -equivalentes y en consecuencia lo son  $\phi$  y  $\phi'$ . ■

### 3.6. Preguntas abiertas

1. Es natural preguntarse bajo que condiciones el teorema de coalescencia es válido para fibraciones elípticas con fibras múltiples.
2. Intimamente relacionado con este problema está la famosa desigualdad de Szpiro. Esta desigualdad, demostrada por Szpiro en 1984 afirma lo siguiente:

**Teorema 3.6.1 (Szpiro)** *Sea  $f : E \rightarrow C$  una fibración elíptica no trivial de una superficie suave definida sobre un campo algebraicamente cerrado de característica cero, donde  $f$  es un mapeo plano y propio a una curva proyectiva suave de género  $g$  definida sobre  $k$ . Entonces si  $s$  denota el número de fibras singulares y  $\Delta_E$  el divisor discriminante se tiene que  $\text{grad}(\Delta_E) \leq 6(2g - 2 + s)$ .*

Este teorema ha motivado la siguiente conjetura, conocida como conjetura de Szpiro, la cual tiene profundas consecuencias en teoría de números, entre ellas la de implicar la famosa conjetura ABC, [37]

**Conjetura 3.6.2 (Szpiro)** *Sea  $E : y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$  una curva elíptica sobre  $\mathbb{Z}$ . Sea  $\Delta_E$  el discriminante de un modelo minimal. Para cada divisor  $p$  de  $\Delta_E$ , supongamos que la reducción mod  $p$  es suave o tienen singularidades de tipo nodal. Sea  $\Gamma_E$  el conductor de  $E$ , (definido como  $\prod_{p|\Delta_E} p$ ). Entonces, para cada  $\varepsilon > 0$  existe una constante  $C(\varepsilon)$  tal que para todas las curvas elípticas se tiene que  $\log |\Delta_E| \leq C(\varepsilon) + (6 + \varepsilon) \log \Gamma_E$ .*

El teorema de Szpiro, en el caso en el que  $C$  es la esfera  $S^2$ , puede reformularse como una pregunta sobre el grupo modular. Su formulación equivalente es la siguiente:

**Problema 3.6.3** *Si  $I = G_1^{b_1} \cdots G_s^{b_s}$  es una factorización de la identidad en conjugados de  $U$  en  $SL(2, \mathbb{Z})$ , con  $b_i \geq 1$ , entonces ¿será posible extender los métodos de la sección 3.4 para demostrar que  $\sum b_i \leq 6(s - 2)$  ?*

Una respuesta afirmativa a esta pregunta sería de la mayor importancia, ya que podría proporcionar un camino para demostrar la conjetura de Szpiro mediante un análisis similar al que se hizo en este trabajo, pero en el grupo modular  $PSL(2, \widehat{\mathbb{Z}}_p)$ , sobre los enteros  $p$ -ádicos  $\widehat{\mathbb{Z}}_p$  [22].

# Bibliografía

- [1] Amorós, J., Bogomolov, F., Katzarkov, L., Pantev, T. *Symplectic Lefschetz fibrations with arbitrary fundamental groups*. With an appendix by Ivan Smith. J. Differential Geom. 54 (2000), no. 3, 489–545.
- [2] Barth W., Hulek K., Peters C., Van de Ven A., *Compact Complex Surfaces*. Second Edition. Springer-Verlag. 2004.
- [3] Baranski K. *On realizability of branched coverings of the sphere*, Topology Appl. 116 (2001), 279-291.
- [4] Birman J., *Braids, Links and Mapping Class groups*, Princeton U. Press, 1975.
- [5] Bott Raul, Wu Tu. *Differential Forms in Algebraic Topology*, Springer-Verlag, 1982.
- [6] Cadavid C. y Vélez J.D., *Topología y geometría diferenciales en el lenguaje de sheaves*, Todográficas, ISBN 958825608-9, 2005.
- [7] Cadavid C. y Vélez J.D., *On a Minimal Factorization Conjecture*, Topology and Its Applications, Vol 154, No. 15, 2786-2794, 2007.
- [8] Cadavid C. y Vélez J.D., *Towards a New interpretation of Milnor's Number*, Memorias del XV Congreso Colombiano de Matemáticas, Abril, 2006.
- [9] Edmonds A. L, Kulkarni, R, Stong E. *Realizability of branched coverings of surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 282 (1984), 773-790, 2005.
- [10] Ehresmann C., *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable*, Colloque de Topologie, Bruxelles (1950), 29-55.

- [11] Friedman R., Morgan, J. W. *Smooth four-manifolds and complex surfaces*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grnezegebiete 3. Folge · Band 27. Springer-Verlag, 1994.
- [12] Fulton W., *Algebraic Toplogy, A first Course*, Springer-Verlag, 1995.
- [13] Griffiths & Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley & Sons, 1978.
- [14] Hartshorne R, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1977.
- [15] Ishizaka, M., *One parameter families of Riemann surfaces and presentations of elements of mapping class group by Dehn twists*. Journal of the mathematical society of Japan, to appear.
- [16] Khovanskii A.G., Zdravkovska S., *Branched covers of  $S^2$  and braid groups*, J. Knot Theory Ramifications 5 (1995), 55-75.
- [17] Kodaira K., *On Compact Analytic Surfaces: II*. The Annals of Mathematics, 2nd Ser., Vol. 77, No. 3 (May 1963), 563-626.
- [18] Korkmaz M., *On stable torsion length of a Dehn twist*. Math. Res. Lett. 12 (2005), no. 2-3, 335–339.
- [19] Korkmaz M., *Stable commutator length of a Dehn twist*. Michigan Math. J. 52 (2004), no. 1, 23–31.
- [20] Kotschick, D. *Quasi-homomorphisms and stable lengths in mapping class groups*. Proc. Amer. Math. Soc. 132 (2004), no. 11, 3167–3175 (electronic).
- [21] Kotschick, D. *Clustering of critical points in Lefschetz fibrations and the symplectic Szpiro inequality*. Trans. Amer. Math. Soc. 355 (2003), no. 8, 3217–3226 (electronic).
- [22] McMullen C., *From Dynamics of Surfaces to rational Points on Curves*, Bulletin AMS, Vol. 37, No. 2, 119-140, December 21, 1999.
- [23] Matsumoto Y and Montesinos J.M., *Pseudo-Periodic homomorphisms and degenerations of Riemann Surfaces*, Bulletin of the A.M.S., Vol. 30, No. 1, January 1994.

- [24] Matsumoto Y and Montesinos J.M., *Pseudo-periodic maps and degeneration of Riemann Surfaces, I, II*, U. of Tokio, U. Complutense de Madrid, 1991-92.
- [25] Matsumoto Y. *Diffeomorphism types of elliptic surfaces*. Topology, 25 (1986), No. 4, 549-563.
- [26] Matsumoto Y., *Lefschetz fibration of genus 2, a topological approach*, Proc. of the 37th Taniguchi Symp. on Topology and Teichmuller Spaces, (S Kojima et al, ed.) World Scientific 1996, 123-148.
- [27] Moishezon B., *Complex surfaces and connected sums of complex projective planes*. Lecture Notes in Mathematics 603, Springer-Verlag, 1977.
- [28] Munkres J., *Topology a First Course*, Prentice-Hall, 1975.
- [29] Nakahara M., *Geometry, Topology and Physics*, IOP Publishing Ltd, 1990.
- [30] Natanzon S.M., *Topology of 2-dimensional Coverings and Meromorphic Functions on Real and Complex Algebraic Curves*, Selecta Mathematica (antes *Sovietica*), Vol. 12, No. 3 (1993), 251-291.
- [31] Naruki I., *On Confluence of Singular fiber in Elliptic Fibration*, Publ. RIMS, Kyoto University 23, 1987, 409-431.
- [32] Novikov et al., *Modern Geometry-Methods and Applications Part II*, Springer-Verlag, 1985.
- [33] Rolfsen D., *Knots and Links*, Math. Lecture Series, Publish or Perish, Inc., Sec. Edition, 1990.
- [34] Serre, J.P., *A Course in Arithmetic*, Springer-Verlag, 1973.
- [35] Stipsicz A., *Singular fibers in Lefschetz fibrations on manifolds with  $b_2^+ = 1$* . Topology Appl. 117 (2002), no. 1, 9-21.
- [36] Steenrod, N., *The Topology of Fiber Bundles*, Princeton U. Press, 1951.
- [37] Szpiro L., *Discriminant et Conducteur des Courbes Elliptiques.*, Soc. Math. France, Asterisque 183, 1990.07.

- [38] Vélez J.D., *El problema de Hurwitz y el problema de la  $\pi$ -geografía*, Preimpreso, (En preparación).
- [39] Vélez J.D., *The Problem of Coalescence of Critical Points in Ramified Coverings and Singular Elliptic Fibrations*, Preprint, (En preparación).
- [40] Vélez J.D., *Problemas de Factorización en el grupo modular, fibraciones elípticas y la conjetura de Szpiro*, Memorias del XVII Coloquio Latinoamericano de Álgebra, Quirama, Julio 23-27, 2007.