



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Modelamiento de la relación entre la
población humana y el recurso natural
Erythroxylum Coca

Alvaro Raúl Córdoba Belalcazar

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemáticas y Estadística
Manizales, Colombia
2015

Modelamiento de la relación entre la población humana y el recurso natural *Erythroxylum Coca*

Alvaro Raúl Córdoba Belalcazar

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias-Matemática Aplicada

Director:

Dr. Gerard Olivar Tost

Codirector:

Dr. Johan Manuel Redondo

Línea de Investigación:

Dinámica de Sistemas y Sistemas Dinámicos

Grupos de Investigación:

ABCDynamics, Percepción y Control Inteligente
Universidad Nacional de Colombia

Manizales, Colombia
2015

Modeling of the relationship between
human population and natural resource
Erythroxylum Coca

Alvaro Raúl Córdoba Belalcazar

Thesis for the degree of:
Master in Science-Applied Mathematics

Supervisors:
Dr. Gerard Olivar Tost
Dr. Johan Manuel Redondo

Líne of Research:
System Dynamics and Dynamical Systems

Research Groups:
ABCDynamics, Percepción y Control Inteligente
Universidad Nacional de Colombia

Manizales, Colombia
2015

Dedicatoria

A la memoria de mi abuela María Torres.
A mis padres Esperanza B. y Alvaro T.
A mi compañera Daniela M.
A mi hermano Guillermo C.
A mi hijo Santiago C.

Agradecimientos

A Dios por permitirme alcanzar todos los logros que me he propuesto y a mi familia por brindarme su apoyo y sabios consejos.

A los profesores Gerard Olivar Tost y Johan Manuel Redondo por su acertada dirección y por brindarme su apoyo y ayuda incondicional haciendome crecer como persona y profesional.

A mi compañera Yudy Daniela Melendez Diaz por su apoyo moral para alcanzar esta meta.

A mis compañeros y amigos por su ayuda directa o indirecta en el desarrollo de esta investigación.

A la Dirección de Investigaciones de la Universidad Nacional de Colombia por el apoyo económico para difundir algunos resultados de la investigación.

Resumen

La siguiente investigación se enfoca en el planteamiento de un modelo matemático que representa la dinámica entre la población humana y el recurso natural *erythroxylum coca* mediante un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, utilizando para la construcción del modelo la dinámica de sistemas, luego se hace la calibración del modelo, se presentan simulaciones numéricas variando parámetros sensibles y finalmente el análisis de estabilidad de los puntos de equilibrio y el problema de control óptimo para contrarrestar la problemática de los cultivos ilícitos.

Palabras clave: (sistemas dinámicos, dinámica de sistemas, bucle de realimentación, erradicación, grupos armados ilegales.).

Abstract

The following research focuses on the approach of a mathematical model It represents the dynamic between the human population and natural resource *erythroxylum coca* through a system of nonlinear ordinary differential equations, using to build the system dynamics model, after model calibration is done, numerical simulations are presented varying sensitive parameters and finally the stability analysis of equilibrium points and the problem optimal control to counter the problem of illicit crops.

Keywords: (dynamical systems, system dynamics, feedback loop, eradication, illegal armed groups.).

Contenido

Agradecimientos	ix
Resumen	xi
1. Introducción	2
2. Elementos para el modelado	6
2.1. Diagramas Causales	7
2.2. Diagramas de Niveles y Flujos	11
3. El modelo matemático	15
3.1. Diagrama Causal	15
3.2. Diagrama de Niveles y Flujos	16
3.2.1. Ecuaciones de Nivel	16
3.2.2. Ecuaciones de Flujo	16
3.2.3. Ecuaciones Auxiliares	18
3.2.4. Sistema de Ecuaciones Diferenciales	19
3.3. Parámetros	19
3.4. Simulaciones Numéricas	24
3.4.1. Escenario I	25
3.4.2. Escenario II	26
4. Análisis y control óptimo del modelo	27
4.1. Puntos de equilibrio	27
4.1.1. Estabilidad local de X_1 del sistema (3-2)	28
4.1.2. Estabilidad local de X_2 del sistema (3-2)	29
4.2. Control óptimo	30
5. Conclusiones y recomendaciones	36
5.1. Conclusiones	36
5.2. Recomendaciones	37
Bibliografía	38

1 Introducción

El negocio de los cultivos ilícitos es una de las más importantes problemáticas en Colombia; sus efectos sociales, económicos y ambientales, forman parte de la agenda política nacional y de las naciones que se ven afectadas.

Desde comienzos de los años 70's se fue conformando en Colombia un sector de la economía ilegal basada en el negocio de los cultivos ilícitos, en particular en el departamento del Putumayo, el cultivo de hoja de coca se inscribe como parte de un proceso histórico, caracterizado por la dinámica económica de apropiación selectiva de recursos naturales a través de sistemas de bajo costo, para beneficio de grupos ajenos a la región [21]. Lo anterior explica que en las décadas (80's-90's) se presentó un sensible incremento poblacional en la Amazonía-Orinoquía implicando la ampliación de la frontera agrícola. Por ejemplo, en los años de 1996 a 2000 el Putumayo pasó de tener 7.000 hectáreas cultivadas de coca a 66.022, consolidándose en el 2000 como el principal departamento cultivador de hoja de coca a nivel nacional, los cultivos representaban el 40.4 % del total del área nacional [15]. Esta investigación considera como hipótesis el incremento poblacional, representado por habitantes foráneos dedicados al negocio de los cultivos ilícitos, aunque existen otras causas de ampliación de la frontera agrícola como: el incremento de las NBI, la falencia institucional de la agricultura. Este trabajo sólo considera aquellos factores representativos y de mayor influencia en el contexto espacial y temporal de la investigación.

La dinámica económica derivada de este cultivo se desarrolla en cinco etapas: cultivo, la producción de la pasta o base, la refinación de la coca en cocaína, su exportación a los mercados consumidores y su distribución dentro de los mercados importadores [21]. De estas cinco etapas, en el Putumayo se surten las dos primeras y en algunos casos la tercera. Alrededor de esta economía se han generado dos fenómenos dramáticos proporcionales, el primero de ellos relacionado con la cultura del negocio de la coca caracterizada por el ajuste de cuentas con la vida misma, lo cual ha elevado las tasas de homicidio por encima de las tasas nacionales. Es así como en el año 1998, la tasa de mortalidad general para el Putumayo es 262 por 100 mil habitantes, sobrepasa la nacional 80 por 100 habitantes [18]. El segundo fenómeno tiene que ver con la vinculación directa de los sectores armados ilegales con el negocio, a comienzos de los ochenta grupos al margen de la ley se disputan los territorios donde hay presencia de cultivos ilícitos, por ser regiones con alto potencial económico y de riqueza, utilizadas como fuentes de financiación para fortalecer sus tropas y enfrentar el

Estado, entre los grupos al margen de la ley se tiene las Fuerzas Armadas Revolucionarias de Colombia (FARC), el Ejército de Liberación Nacional (ELN) y los Paramilitares (AUC).

La mayoría de los territorios con presencia y actividad de las FARC poseen cultivos ilícitos como se evidencia en la Figura (1-1). Durante los noventa el ELN también se posesiona de ciertas partes del país, concentrándose principalmente en la parte norte. Este grupo armado se enfoca hacia zonas con recursos naturales de extracción, tales como petróleo, el carbón, el oro y las esmeraldas. Su relación con la producción de las drogas ilícitas se concentra en el sur de Bolívar y región Caribe. Las autodefensas también han venido creciendo de manera sostenida desde mediados de los años noventa. Los grupos de autodefensas han basado su financiación principalmente en los cultivos de coca y en el narcotráfico, aunque también extraen rentas de extorsión de agricultores y ganaderos. Entre estas se encuentra el establecimiento de un sistema de extorsión en las zonas cocaleras y amapoleras que están bajo su control; en efecto, en el sur de Bolívar, en el valle del Catatumbo, Meta, Guaviare, Caquetá y Putumayo ver Figura (1-1), los miembros de las autodefensas cobran cuotas de seguridad a los campesinos cocaleros [21]. En la confrontación armada por el control del territorio la más perjudicada ha sido la población civil, que ha tenido que someterse a las exigencias comerciales y militares del respectivo bando posicionado en una determinada región [1].

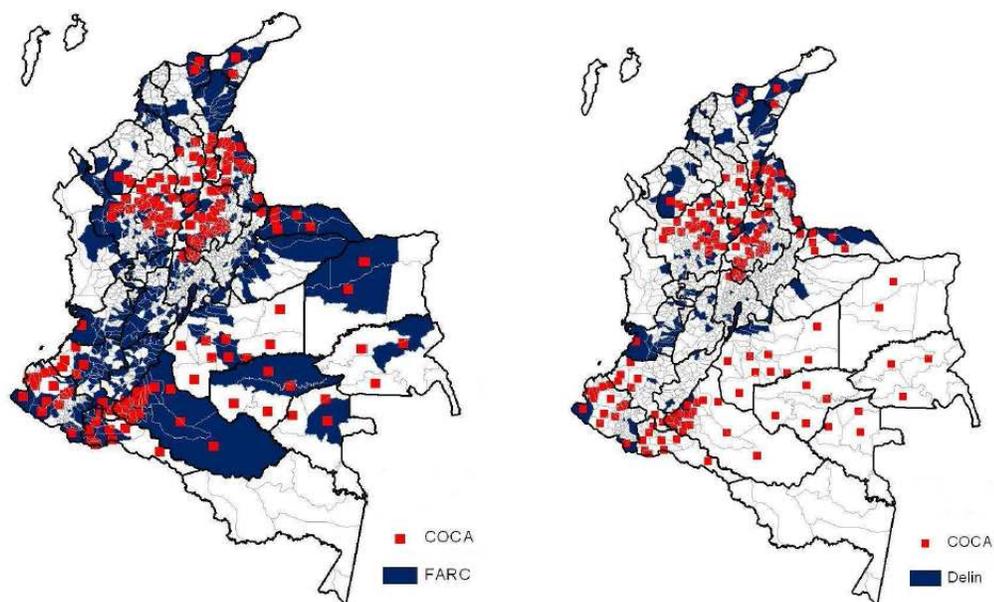


Figura 1-1: Actividad de las FARC, Paramilitares y Presencia se Cultivos de Coca [1].

En Colombia, a principios del siglo XX se inició la prohibición legal a la producción y comercio de sustancias psicoactivas. En las tres últimas décadas se ha incrementado alarmantemente el consumo de psicoactivos en el mundo y en las últimas dos décadas Colombia se ha convertido en uno de los principales productores de materia prima de estos. La alarma mundial por el consumo y producción de drogas psicoactivas ha generado por parte de los

Gobiernos dos tipos de políticas: contra la demanda y contra la oferta. Las segundas han sido desarrolladas en Colombia, las políticas contra la oferta incluyen acciones jurídico políticas contra la producción de materia prima e insumos para la transformación de ésta en psicoactivo, entre estas estrategias de controlar esta situación y quizás la más polémica es la aspersión aérea o la fumigación de los cultivos de coca, por sus efectos ambientales, sociales y por sus cuestionados resultados. Entre estos efectos, considerando los de tipo social, está la emigración de las personas dedicadas a la siembra de hoja de coca y la producción de la pasta o base, consecuencia que va de la mano con la violencia y el desplazamiento de los cultivos por causa de la fumigación que se contrasta de la siguiente manera: Entre 1991 y 1996 el Departamento del Guaviare tenía la mayor extensión de cultivos de hoja de coca en el País, llegando aproximadamente a 40.000 hectáreas en 1996 y durante 1995 y 1996 fue objeto de aspersión aérea hasta el punto de que en 1998 sus cultivos se expandían en aproximadamente 7.000 hectáreas y eran sustancialmente menores que los del Putumayo y Caquetá. A partir de 1998 se inicia la fumigación en el Putumayo y a partir de ese mismo año refflorece la coca en el Guaviare para llegar a 28.435 hectáreas en 1999 [20]. El último informe del SIMCI Sistema Integrado de Monitoreo de Cultivos Ilícitos en Colombia en sus resultados muestra un avance importante en materia de reducción de hectáreas de coca en el Putumayo, advierte un incremento significativo de estos cultivos en el departamento de Nariño, representando el 27 % del total nacional de cultivos de coca en el año 2013 [22]. Así, la problemática de los cultivos ilícitos es un círculo vicioso que se presenta en determinado tiempo en regiones diferentes del país. Por esta razón es pertinente e importante plantear un modelo matemático que explique la dinámica entre la población y el recurso natural *Erythroxylum Coca* desde el punto de vista socioeconómico para comprender la relación entre los principales actores involucrados y establecer políticas para contrarrestar esta problemática. Esta dinámica considera relación causa efecto entre factores de tipo social como: la emigración, la inmigración, violencia y los principales actores que la dinamizan, los grupos armados ilegales. También considera factores relacionados con la producción de la hoja de coca: la siembra, cosecha y la erradicación. Todas estas relaciones recogen los elementos clave del sistema que modela la problemática de los cultivos ilícitos, para luego tomar de decisiones y plantear políticas gubernamentales.

Investigaciones sobre el comportamiento de los cultivos ilícitos desde la perspectiva de la Dinámica de Sistemas, examinan la interacción entre la oferta y la demanda de la cocaína frente a políticas como: legalización del consumo, penalización del consumo, legalización de la coca en toda su cadena productiva, reducción de la demanda mundial por estupefacientes, potenciación de las políticas de desarrollo alternativo, potenciación de las políticas de erradicación forzosa y dar fin a las aspersiones de cultivos ilícito, concluyendo que en Colombia el problema no es la implementación de las políticas en la lucha contra los cultivos ilícitos, sino su poco análisis cuando se desarrolla la formulación en lo que respecta a la sostenibilidad y las posibles consecuencias de las políticas implementadas, cuando se desarrolla su formu-

lación [7]. Se han estudiado propuestas de políticas de desarrollo alternativo cuyo objetivo es erradicar los cultivos ilícitos de subsistencia, garantizando que los campesinos, colonos e indígenas se desvinculen definitivamente de estas actividades como medio de subsistencia, reemplazando los cultivos ilícitos por uno lícito [2]. Una de las políticas que más ha dado resultado es la erradicación forzosa que implica un aumento en la fumigación de los cultivos existentes, buscando, de esta manera que la dinámica de la aspersión y la erradicación forzosa supere la velocidad a la cual se están cultivando ilícitos en el país, frente a esta política se ha hecho un estudio que explora la conducta de los cultivadores en el tiempo, frente a un evento aleatorio de fumigación, utilizando las herramientas del control óptimo para maximizar sus beneficios, e incorporando al análisis la probabilidad de erradicación, concluyendo que la erradicación puede generar efectos no previstos sobre la dinámica de los cultivos que tienden a reducir el ritmo de extracción de las cosechas, y acelerar el crecimiento en el tiempo del área cultivada [25].

De los estudios citados [7], [2] en ningún momento al implementar una política frente a la problemática de los cultivos ilícitos, se tiene en cuenta dinámica entre la población humana ¹ y el cultivo ilícito *Erythroxylum Coca*, aspecto que tampoco se considera en el estudio de la política de erradicación forzosa.

Este documento de investigación se centra en el planteamiento y análisis de un modelo matemático de la relación entre la población y el recurso natural *Erythroxylum Coca* y está organizada como se presenta a continuación.

En el primer capítulo se describe la problemática que conlleva el negocio de los cultivos ilícitos, sus actores, alternativas de solución y el objetivo de este trabajo. En el segundo capítulo se hace una compilación teórica de la Dinámica de Sistemas. En el tercer capítulo se plantea, se calibra y se presentan resultados numéricos de un modelo matemático de la problemática en cuestión, las simulaciones se hacen con ayuda del software Vensim y en el cuarto capítulo se hace el análisis cualitativo del modelo, se plantea y analiza un problema de control óptimo y se hacen simulaciones numéricas con el software Matlab.

¹En adelante sólo se utiliza el término población para referirnos a la especie de interés los humanos.

2 Elementos para el modelado

Este capítulo pretende desarrollar el entorno conceptual sobre la teoría de *Dinámica de Sistemas* utilizada en este trabajo para la modelación de la relación entre la población y el recurso natural *Erythroxylum Coca*. El estudio profundo y el consecuente aprovechamiento de la *Dinámica de Sistemas* parte del entendimiento por separado de las acepciones de *dinámica* y *sistema* para luego integrarlos dentro de un concepto global y unificado. Conviene definir el sentido en que se emplea estos dos conceptos. Empecemos por sistema.

Definición 2.0.1. *Un sistema es una dupla (X, R) , donde X es un conjunto dotado de elementos y R es una relación entre ellos [13].*

Un *sistema* es un objeto dotado de alguna complejidad, formado por partes coordinadas, de modo que en conjunto posea una cierta unidad. Por ejemplo, el sistema planetario, formado por los planetas unidos mediante las fuerzas gravitatorias; un sistema económico, formado por agentes económicos, relacionados entre sí por el intercambio de bienes y servicios; un sistema ecológico, formado por distintas poblaciones, relacionadas mediante cadenas alimentarias o vínculos de cooperación son ejemplos claros del término sistema que vamos a adoptar [4].

El término *dinámica* se emplea en oposición a estática, expresando el carácter cambiante de lo que adjetivamos con él. Al hablar de dinámica de un sistema nos referimos a que las distintas variables que podemos asociar a sus partes sufren cambios a lo largo del tiempo, como consecuencia de las interacciones que se producen entre ellas.

La Dinámica de Sistemas fue desarrollada por el profesor Jay Forrester en la década de los 50's en el Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT). Esta metodología se basa en la construcción de sistemas mediante grafos dirigidos bivaluados, que pueden ser transformados en representaciones denominadas diagramas de niveles y flujos, por medio de los cuales se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden dependientes del tiempo, con las que se dice haber obtenido el modelo matemático del sistema que se estudia [19].

Para un observador O un objeto M es un modelo de un objeto S (un sistema), si O se puede servir de M para responder a cuestiones que le importan con relación a S [13].

Así, el modelado es un proceso de codificación mediante el cual el observador O asocia a un objeto S concreto un modelo M abstracto o formal. Este proceso tiene un carácter eminen-

temente constructivo y consiste en un largo proceso de reelaboración de hipótesis respecto a los mecanismos de interacción en el seno del sistema, para adaptarlos a las necesidades de representación de la realidad modelada. El producto final es la construcción de un modelo de esa realidad.

Tres aspectos son indispensables en la elaboración de un modelo: coherencia argumentativa, coherencia dimensional y validación [19]. A continuación comentamos cada uno de ellos.

- **Coherencia argumentativa:** el modelo debe construirse sobre unas hipótesis coherentes, es decir, las relaciones entre los diferentes atributos que se puedan establecer en un sistema deben ser consistentes. Esta coherencia depende de la conceptualización de quien hace el modelo y de su capacidad para encontrar relaciones ciertas.
- **Coherencia dimensional:** es la coherencia en el tratamiento de las unidades del sistema. Si las unidades del modelo no son coherentes, el modelo no puede representar sistema alguno.
- **Validación:** este aspecto debe considerarse en una doble vía. Por un lado, consiste en la discusión de las hipótesis de construcción del modelo con expertos en modelado y con expertos en el tema que se desea modelar. En este sentido, la validación es una evaluación constante de pares. Por otro lado, consiste en ensayar a partir de simulaciones, las hipótesis sobre las que se ha construido el modelo, así como la consistencia de las mismas [13].

Cuando se hace modelación matemática con Dinámica de Sistemas, en primer lugar se debe hacer un análisis cuidadoso de los elementos del sistema, a dichos elementos se los denomina atributos del sistema, una vez identificados se plantea un diagrama causal el cual da lugar al diagrama de niveles y flujos en los que cada atributo se distingue como nivel (o variable de estado), flujo (o razón de cambio), variable auxiliar y parámetro, la discriminación de estos componentes son importantes para obtener el sistema de ecuaciones diferenciales como resultado final del problema que se quiere modelar.

2.1. Diagramas Causales

El conjunto de los elementos que tienen relación con nuestro problema y permiten en principio explicar el comportamiento observado, se llaman *atributos* del Sistema y a las relaciones que se utilizan en Dinámica de Sistemas para articularlos, se denominan *relaciones causales*, el conjunto de las relaciones entre los elementos de un sistema recibe la denominación de estructura del sistema y se representa mediante el *diagrama de influencias o causal*.

Definición 2.1.1. *Dados dos atributos x_i y x_j , de un sistema X . Definimos las siguientes como relaciones causales entre x_i y x_j :*

- *Relación causal positiva: Si x_i aumenta, entonces x_j aumenta notado como*

$$x_i \rightarrow^+ x_j.$$

- *Relación causal negativa: Si x_i aumenta, entonces x_j disminuye notado como*

$$x_i \rightarrow^- x_j.$$

Cada relación causal r_k que se establece entre dos atributos x_i y x_j , conforma una hipótesis (x_i, x_j, r_k) del sistema. Estas relaciones nos dicen cuanto cambia un atributo x_j bajo incrementos del atributo x_i , lo cual se representa como $x_i, \partial x_j / \partial x_i$. Cuyo símbolo se corresponde con el concepto de derivada parcial, pero cuida la idea de dirección. De este modo, las relaciones causales son las relaciones que satisfacen:

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_i} \neq 0,$$

donde se presentan dos casos: para $\partial x_j / \partial x_i > 0$ la relación se denomina causal positiva, mientras que para $\partial x_j / \partial x_i < 0$, la relación se denomina causal negativa. Las relaciones en las que:

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = 0$$

se denominan correlativas, es decir, no existe una relación causa-efecto de x_i con respecto a x_j .

La mayoría de los sistemas que existen incluso por muy simples que sean no pueden circunscribirse a sólo un par de variables, así como tampoco podría esperarse que la interacción entre ellas fuese en un sólo sentido, de este modo los problemas que trabaja la Dinámica de Sistemas se caracterizan por la aparición de cadenas cerradas de relaciones causales que reciben el nombre de *bucles de realimentación* cuya estructura es de la forma $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_i \rightarrow \dots \rightarrow x_1$.

Definición 2.1.2. Causalidad lineal y causalidad no lineal *Supongamos dos atributos $x_i, x_j \in X$ en una cadena causal de la forma $\dots \rightarrow x_i \rightarrow \dots \rightarrow x_j \rightarrow \dots$ de un cierto sistema X . Si para cualquier i, j tenemos $x_i \neq x_j$, entonces se dice que la cadena representa una causalidad lineal, pero si existe algún i, j que satisface $x_i = x_j$, entonces se dice que el bucle representa una causalidad no lineal. Las causalidades no lineales conforman bucles que suelen denominarse realimentaciones del sistema.*

En dinámica de sistemas, tiene principal interés aquellas estructuras en las que existe la realimentación. A continuación presentamos un resultado importante en esta metodología.

Teorema 2.1.1. [19] *El signo de un bucle de realimentación es el producto del signo de sus relaciones causales.*

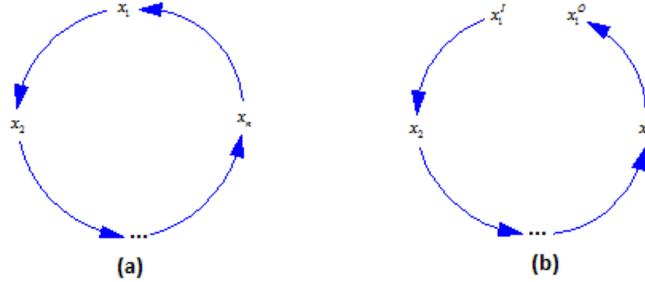


Figura 2-1: Un n-lazo de realimentación. (a) Realimentación con n atributos. (b) Representación de la realimentación como un lazo abierto.

Demostración. Para la prueba consideremos un bucle de realimentación con n atributos, como se ve en la Figura (2-1) parte (a). Fijemos un de los atributos, por ejemplo x_1 , hagamos la distinción x_1^I , para denotar la entrada de x_1 , y x_1^O para denotar su salida. Así, la realimentación puede verse como un lazo abierto de $n + 1$ atributos, como se ve en la Figura (2-1) parte (b). El signo del bucle de realimentación calculado en x_1 lo denotamos

$$\text{sign} \left(\frac{\partial x_1^O}{\partial x_1^I} \right)$$

Se sabe que $\partial x_1^O / \partial x_1^I$ representa una flecha de x_1^I a x_1^O y como un atributo x_n depende del atributo x_{n-1} , al aplicar la regla de la cadena se obtiene

$$\begin{aligned} \text{sign} \left(\frac{\partial x_1^O}{\partial x_1^I} \right) &= \text{sign} \left(\left(\frac{\partial x_1^O}{\partial x_n} \right) \cdot \left(\frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}} \right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{\partial x_2}{\partial x_1^I} \right) \right) \\ &= \text{sign} \left(\frac{\partial x_1^O}{\partial x_n} \right) \cdot \text{sign} \left(\frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}} \right) \cdot \dots \cdot \text{sign} \left(\frac{\partial x_2}{\partial x_1^I} \right) \end{aligned}$$

expresión que determina el signo del bucle, note que el signo del bucle es el mismo si tomamos como elemento inicial cualquiera de sus elementos. \square

Teniendo en cuenta el teorema anterior los bucles se clasifican en bucles de realimentación positiva y bucles de realimentación negativa.

Definición 2.1.3. *Un bucle de realimentación es negativo si el producto del signo de sus relaciones causales es también negativo.*

Este bucle tiene la notable propiedad de que si, por una acción exterior, se perturba alguno de sus elementos, el sistema en virtud de su estructura reacciona tendiendo a anular esa perturbación.

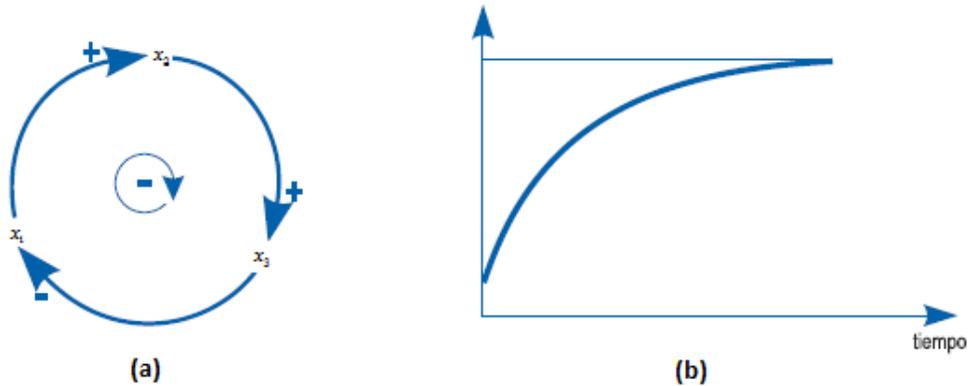


Figura 2-2: Estructura de realimentación negativa en (a) y comportamiento correspondiente en (b).

Consideremos el sistema conformado por los atributos x_1 , x_2 y x_3 como se ve en la Figura (2-2) parte (a), si se supone que x_2 se incrementa, en virtud de las relaciones de influencia, el incremento de x_2 determinará el de x_3 , ya que la relación de influencia correspondiente es positiva. A su vez, el incremento de x_3 determinará el decrecimiento de x_1 , ya que así lo determina el carácter negativo de la influencia. El decrecimiento de x_1 dará lugar al de x_2 , pues la relación es positiva. Por tanto, el incremento inicial de x_2 le «vuelve», a lo largo de la cadena de realimentación, como un decremento; es decir, la propia estructura de realimentación tiende a anular la perturbación inicial, que era un incremento, generando un decremento. De este modo se comprende que los bucles de realimentación negativa son bucles estabilizadores, que tienden a anular las perturbaciones exteriores; este comportamiento se refleja en la convergencia del sistema, como se ve en la Figura (2-2) parte (b).

Definición 2.1.4. *Un bucle de realimentación es positivo si el producto del signo de sus relaciones causales es también positivo.*

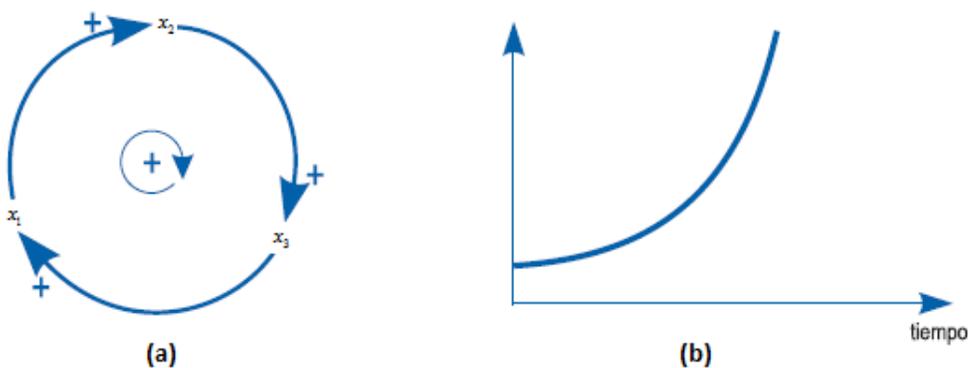


Figura 2-3: Estructura de realimentación positiva en (a) y comportamiento correspondiente en (b).

Consideremos el sistema conformado por los atributos x_1 , x_2 y x_3 como se ve en la Figura

(**2-3**) parte (a), si se supone que x_1 crece, entonces en virtud del signo de influencia, lo hará x_2 , lo que a su vez determinará el crecimiento de x_3 y, de nuevo, el de x_1 . Por lo tanto, la propia estructura del sistema determina que el crecimiento inicial de x_1 «vuelva» reforzado a x_1 , iniciándose de este modo un proceso sin fin que determinará el crecimiento de x_1 , de esta manera si cualquiera de sus elementos sufre una perturbación, esta se propaga, reforzándose a lo largo del bucle. Así, los bucles de realimentación positiva son bucles inestabilizadores, comportamiento reflejado en la divergencia del sistema como se ve en la Figura (**2-3**) parte (b).

No es común encontrar un sistema con una estructura que sólo involucre un bucle de realimentación positiva o negativa estos ejemplos constituyen los más simples, generalmente en los sistemas que habitualmente encontramos son complejos y su comportamiento responde a la acción de múltiples bucles de realimentación, tanto positivos como negativos. En tal caso, el comportamiento resultante dependerá de cuáles de los bucles sean dominantes en cada momento.

En Dinámica de Sistemas, si tenemos un conjunto de flechas, $x_i \rightarrow y$, $i = 1 \dots n$, decimos que el atributo y es una función de los atributos x_i , es decir, $y = f(x_i, \dots, x_n)$. Esta representación debe tenerse en mente cuando se construyen los diagramas causales y es definitiva en la construcción de los diagramas de niveles y flujos que presentamos a continuación.

2.2. Diagramas de Niveles y Flujos

Es una traducción del Diagrama Causal a una terminología que permite la escritura de las ecuaciones en el ordenador para así poder validar el modelo, observar la evolución temporal de las variables y hacer análisis de sensibilidad. De este modo los atributos del diagrama causal se distinguen en

- Niveles: representan las variables de estado del sistema, estos elementos muestran en cada instante la situación del modelo, presentan una acumulación y varían solo en función de otros elementos denominados flujos.
- Flujos: son razones de cambio del sistema, es decir, aquellas que producen la acumulación de las variables de estado.
- Variables auxiliares: una cantidad con un cierto significado físico en el mundo real y con un tiempo de respuesta instantáneo [13].
- Parámetros: son valores que permanecen constantes en el sistema.

La Figura (**2-4**) nos indica las convenciones que utilizaremos en este documento para notar niveles, flujos y variables auxiliares. Los parámetros se representan por el nombre que entran

o salen del modelo a través de flechas dirigidas.

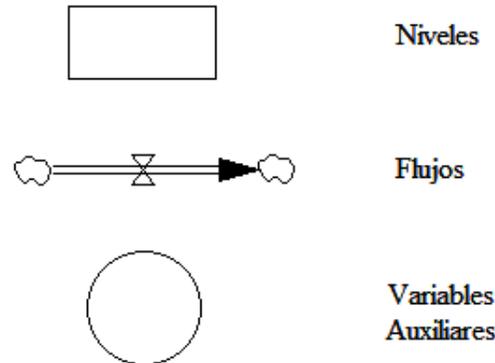


Figura 2-4: Convenciones utilizadas en los diagramas de niveles y flujos. Las nubes en los extremos de la representación de un flujo representan una fuente inagotable de recurso o información, a la izquierda, y un sumidero inagotable de recurso o información, a la derecha.

Una variable de estado x para cualquier tiempo t , está dada por la acumulación desde un tiempo inicial $t_i = 0$, hasta un tiempo final $t_f = t$ de la diferencia entre el flujo de entrada y salida, a partir de un valor inicial $x(0)$ como se muestra en la Figura (2-5).

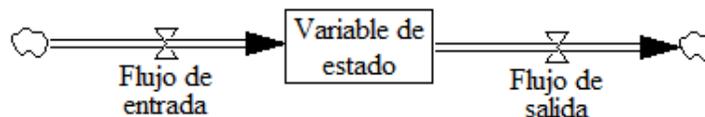


Figura 2-5: Representación de flujos. El flujo de entrada se representa con una válvula que permite la entrada de materia o información desde una fuente inagotable de recurso hacia el nivel, representado con la caja. Por otro lado, el flujo de salida se representa con una válvula que permite la salida de materia o información desde el nivel hacia un sumidero inagotable de recurso.

de donde, se deduce la ecuación integral

$$x(t) = x(0) + \int_0^t (\text{Flujo de entrada} - \text{Flujo de salida}) ds, \quad (2-1)$$

que representa la evolución temporal de la variable de estado x desde un tiempo inicial cero hasta t en un intervalo cerrado I . Derivando a ambos lados de la igualdad, obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = \text{Flujo de entrada} - \text{Flujo de salida} \quad (2-2)$$

que define un campo vectorial sobre el espacio de estados de x . Las ecuaciones (2-1) y (2-2) se denominan ecuaciones de nivel. Las razones de cambio suelen definirse como el producto de una tasa de cambio c y una o unas variables. Estas variables pueden ser, de acuerdo al

problema, variables de estado, variables auxiliares o incluso otra razón de cambio. La tasa de cambio, por su parte, suele ser considerada como un parámetro, pero también puede ser tomada como una función.

Consideremos como ejemplo la Figura (2-6). La razón de cambio F_1 es función de la variable de estado x_1 , la variable auxiliar A_1 y el parámetro c_1 .

$$F_1 = c_1 \cdot A_1 \cdot x_1 \quad (2-3)$$

La razón de cambio F_2 es función de la variable de estado x_1 y el parámetro c_2 .

$$F_2 = c_2 \cdot x_1 \quad (2-4)$$

La razón de cambio F_3 es función de la variable de estado x_1 , la variable auxiliar A_2 y el parámetro c_3 .

$$F_3 = c_3 \cdot A_2 \cdot x_1 \quad (2-5)$$

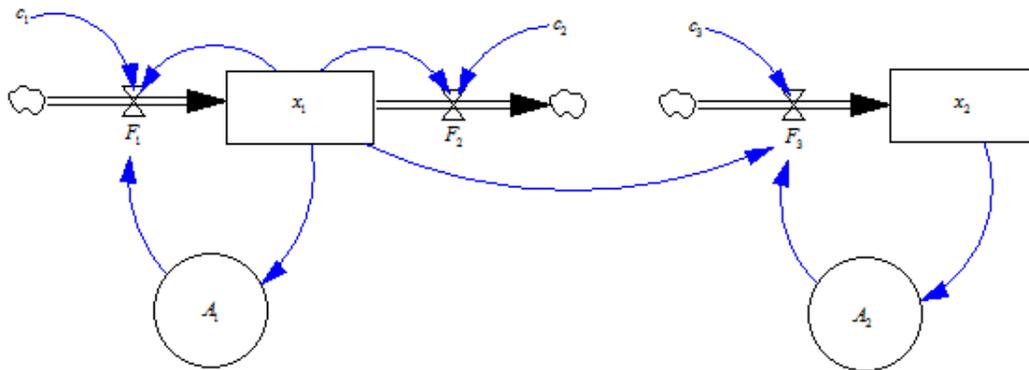


Figura 2-6: Ejemplo de un Diagrama de Niveles y Flujos.

Las ecuaciones (2-3), (2-4) y (2-6) se denominan ecuaciones de flujo.

Luego se escriben las ecuaciones auxiliares que tienen dependencia funcional de las variables de estado, otras variables auxiliares, razones de cambio y parámetros que se conectan a ella. El tratamiento de las variables auxiliares exige una gran experiencia por parte del modelador puesto que su papel es colaborar en la definición de las variables de flujo y en documentar el modelo haciéndolo más comprensible.

Finalmente, se escribe el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, esto se hace reemplazando las ecuaciones auxiliares en las ecuaciones de flujo, y las ecuaciones de flujo en las de nivel. La dimensión del sistema lo da el número de variables de estado.

Para el ejemplo anterior se tiene el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= c_1 \cdot A_1 \cdot x_1 - c_2 \cdot x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= c_3 \cdot A_2 \cdot x_1\end{aligned}\tag{2-6}$$

que nos habla de un sistema de dimensión dos planteado desde la Dinámica de Sistemas.

3 El modelo matemático

El planteamiento del modelo se realizó utilizando Dinámica de Sistemas, se plantea primero el diagrama causal, luego el diagrama de niveles y flujos para obtener finalmente el sistema de ecuaciones diferenciales.

3.1. Diagrama Causal

El conjunto de relaciones entre los atributos del sistema es representado mediante un bucle de realimentación positiva y dos bucles de realimentación negativa según se muestra en la (Figura 3-1).

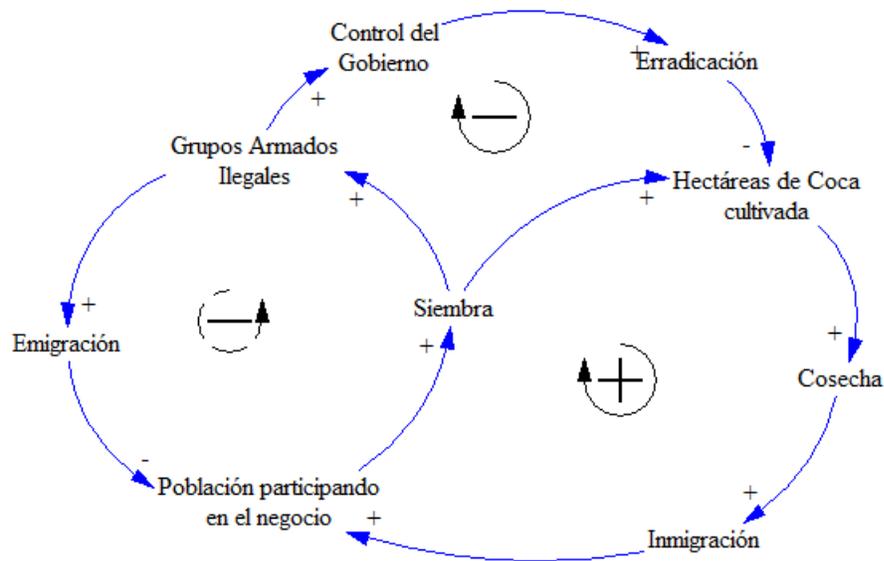


Figura 3-1: Diagrama causal.

En el bucle de realimentación positiva vemos que la siembra de la planta de coca incrementa el número de hectáreas de coca cultivada, aumentando la cosecha. Para realizar la cosecha se hace fundamental mano de obra, que debido a la falta de capacidad de la región y a los buenos pagos de cosecha, incentiva la inmigración de mano de obra foránea, haciendo que

aumente el número de personas que participan del negocio. Es así como la mayor población participando en el negocio, motivada por los ingresos, incrementa la siembra.

Uno de los bucles de realimentación negativa muestra que la población participando en el negocio de la coca incrementa la siembra. La siembra de la planta de coca por ser un negocio rentable llama a la presencia de grupos armados ilegales quienes fortalecen sus tropas con el dinero del narcotráfico. La presencia de cultivos ilícitos conlleva a la lucha por el control del territorio por parte de los diferentes grupos alzados en armas, este conflicto se ve reflejado por el incremento de actos violentos, y es así como la población por temor abandona el territorio, es decir, aumenta la emigración disminuyendo el número de personas dedicadas al negocio de los cultivos ilícitos.

El otro bucle de realimentación negativa se complementa al observar que a mayor cantidad de grupos armados ilegales el control del gobierno aumenta y si este control es efectivo hay erradicación y por ende menor cantidad de hectáreas de coca cultivada.

3.2. Diagrama de Niveles y Flujos

La Figura (3-2) representa el diagrama de niveles y flujos del sistema, en el cual están implícitas las ecuaciones de nivel, ecuaciones de flujo y ecuaciones auxiliares que modelan la relación entre la población y los cultivos ilícitos.

3.2.1. Ecuaciones de Nivel

Para nuestro modelo, las variables de estado son las hectáreas de coca cultivada R y la población P . De este modo, y siguiendo el diagrama de niveles y flujos de la Figura (3-2), las ecuaciones de nivel están dadas por:

$$\begin{aligned}\dot{P} &= I + N - E \\ \dot{R} &= S - C - E_r\end{aligned}$$

Donde, I es la inmigración, N es el incremento neto de la población, E es la emigración, S es la siembra, C es la cosecha y E_r es la erradicación.

3.2.2. Ecuaciones de Flujo

Las funciones para los flujos fueron definidas como sigue.

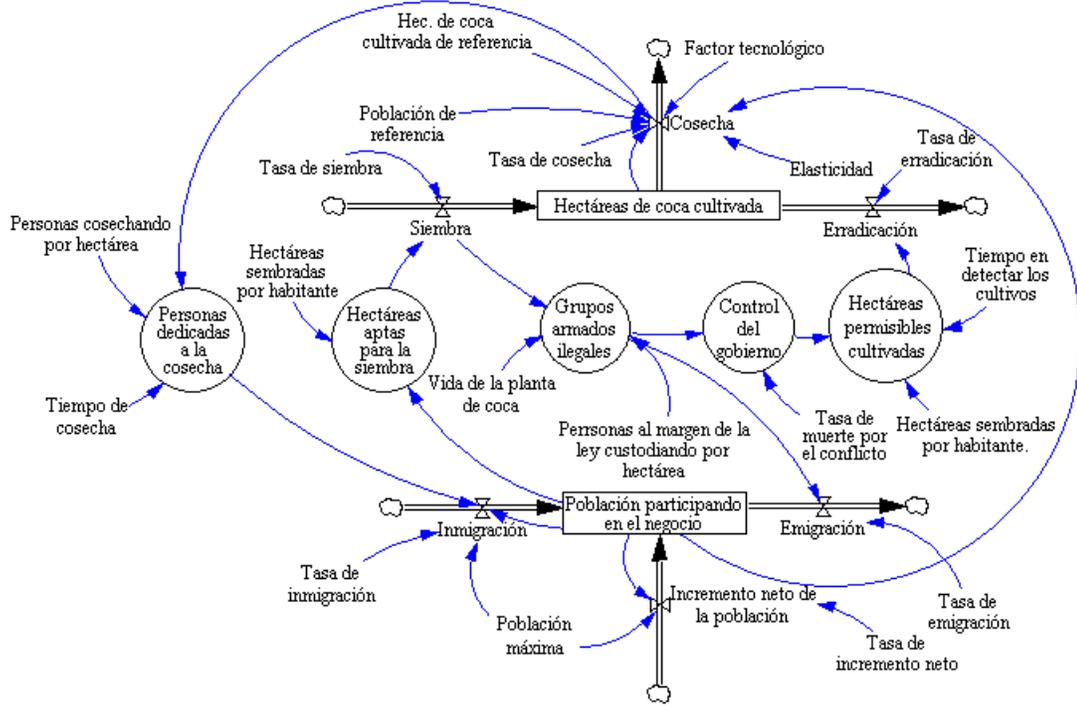


Figura 3-2: Diagrama de Niveles y Flujos.

- La inmigración I es definida de manera logística, donde la población crece hasta una capacidad de soporte K como se muestra a continuación:

$$I = \phi J \left(1 - \frac{P}{K} \right)$$

Donde ϕ dada en [año⁻¹] es la tasa de inmigración y J dada en [habitantes] representa las personas dedicadas a la cosecha.

- El incremento neto de la población N es definido de manera logística, donde la población crece hasta una capacidad de soporte K como se muestra a continuación:

$$N = \gamma P \left(1 - \frac{P}{K} \right)$$

Donde γ dada en [año⁻¹] es la tasa de incremento neto de la población.

- La emigración E generada por los grupos armados ilegales, se define como el producto entre la tasa de emigración φ dada en [año⁻¹] y los grupos armados ilegales G dados en [habitantes].

$$E = \varphi G$$

- La siembra S es definida como el producto entre la tasa de siembra α dada en [año⁻¹] y las hectáreas aptas para la siembra H dada en [hectáreas], la palabra "hectáreas

aptas"se interpreta como el área de tierra donde la planta de coca se desarrolla en mejores condiciones, puesto que la región del Putumayo es tropical húmeda y no toda extensión de tierra es apta para el cultivo debido a la presencia de pantanos.

$$S = \alpha H$$

- La cosecha C es definida con una función de Cobb-Douglas para representar la cosecha como una función de producción que depende de los factores de producción: población P y hectáreas de coca cultivada R , como se muestra a continuación:

$$C = \beta f \frac{R^\delta}{\bar{R}} \frac{P^{1-\delta}}{\bar{P}} \quad (3-1)$$

Donde β es la tasa de cosecha dada en [año⁻¹], f es el factor tecnológico dado en [hectáreas], \bar{R} son las hectáreas de coca cultivada de referencia dada en [hectáreas], \bar{P} la población de referencia dada en [habitantes] y δ es un factor adimensional de productividad.

Se considera el caso particular, $0 < \delta < 1$, de esta forma la ecuación (3-1) es homogénea de grado uno, esto significa que si se aumenta la población participando en el negocio y las hectáreas de coca cultivada en una misma proporción, la cosecha también aumenta en esta misma proporción [11], [5].

- La erradicación E_r es definida como el producto entre la tasa de erradicación θ dada en [año⁻¹] y las hectáreas permisibles cultivadas L dada en [hectáreas].

$$E_r = \theta L$$

3.2.3. Ecuaciones Auxiliares

Las ecuaciones auxiliares del sistema se presentan a continuación.

- Las personas dedicadas a la cosecha J es definida como el producto entre las personas cosechando por hectárea a , dada en [habitantes/hectáreas], el tiempo de cosecha m dado en [año] y la cosecha C .

$$J = amC$$

- Las hectáreas aptas para la siembra H es definida como el producto entre las hectáreas sembradas por habitante b , dada en [hectáreas/habitantes] y la población P .

$$H = bP$$

- Los grupos armados ilegales G son definidos como el producto entre el tiempo de vida de la planta de coca v , dado en [año], el número de personas al margen de la ley custodiando por hectárea d , dado en [habitantes/hectáreas] y la siembra S .

$$G = vdS$$

- El control del gobierno Q se define como el producto entre la tasa de muerte por el conflicto λ , dada en [año⁻¹] y los grupos armados ilegales G .

$$Q = \lambda G$$

- Las hectáreas permisibles cultivadas L se definen como el producto entre el tiempo en detectar los cultivos e , dado en [año], las hectáreas sembradas por habitante b y el control del gobierno Q .

$$L = ebQ$$

3.2.4. Sistema de Ecuaciones Diferenciales

La relación entre la población dedicada al negocio de los cultivos ilícitos y el recurso natural *erythroxylum coca*, se representa mediante el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales.

$$\begin{cases} \dot{P} = \left(\phi am \beta f \frac{R^\delta}{\bar{R}} \cdot \frac{P^{1-\delta}}{\bar{P}} \right) \left(1 - \frac{P}{K} \right) - \varphi v d \alpha b P \\ \dot{R} = \alpha b P - \beta f \frac{R^\delta}{\bar{R}} \cdot \frac{P^{1-\delta}}{\bar{P}} - \theta e b^2 \lambda v d \alpha P \end{cases} \quad (3-2)$$

La región de interés del modelo es,

$$\Omega = \{(P, R) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq P \leq K, R \geq 0\}$$

3.3. Parámetros

Se analiza la problemática en departamento del Putumayo en el espacio temporal 1997 - 2007. Los valores de los parámetros se estimaron de información consignada en los censos, hechos en Colombia con el apoyo de distintas entidades gubernamentales como: La Dirección Nacional de Estupefacientes (DNE), La Policía Antinarcóticos de Colombia (DIRAN), Oficina de Naciones Unidas contra la Droga y el Delito (UNODC), Programa de Monitoreo de Cultivos Ilícitos (PMCI) y el Sistema Integrado de Monitoreo de Cultivos Ilícitos (SIMCI). Los valores de parámetros demográficos son tomados del censo hecho por el DANE.

- **Tasa de Siembra (α):** El departamento del Putumayo cubre un área aproximada de $25.950Km^2$ divididos en trece municipios, de los cuales nueve prestan las condiciones climáticas para el cultivo de la coca, esta zona es denominada bajo Putumayo y tiene una extensión de $24.830Km^2$. Para determinar la tasa de siembra se considera la información de la Tabla **3-1**.

Año	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Total Hectáreas	19.574	34.049	63.277	79.530	79.626	85.616	15.902	21.910	20.726	38.475	41.579

Tabla 3-1: Hectáreas de Coca Cultivadas en el Putumayo 1997 – 2007 [15],[8],[9].

Se calculan las tasas de variación de coca cultivada mediante la fórmula (3-3), los resultados se presentan en la Tabla **3-2**.

$$\alpha = \frac{HC_{t+n} - HC_t}{HC_t} \quad (3-3)$$

donde,

HC_t = hectáreas cultivadas al principio del periodo,

HC_{t+n} = hectáreas cultivadas después de un periodo n .

Año	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Tasa de Variación		0,740	0,858	0,257	0,001	0,075	-0,814	0,378	-0,054	0,869	0,073

Tabla 3-2: Tasa de Variación de los Cultivos de Coca en el Putumayo 1997 – 2007.

De la información anterior se tiene que la tasa promedio de variación del cultivo de coca es $\alpha = 0,238 \text{ año}^{-1}$.

- **Tasa de cosecha (β):** Para determinar este parámetro se lo considera proporcional a la tasa de siembra, teniendo en cuenta que no todo lo sembrado se cosecha debido a factores climáticos, geográficos, desarrollo de la planta, entre otros; la tasa de cosecha para el modelo se estima $\beta = 0,2 \text{ año}^{-1}$.
- **Factor tecnológico (f):** Se estima a partir del porcentaje óptimo de producción y buen manejo del cultivo determinado por la experiencia del cultivador, el intervalo de variación de este parámetro es $0 < f \leq 1$, para el modelo se estima en $f = 1$ hectárea.
- **Factor de productividad (δ):** La función de cosecha $C(R, P)$ se consideró como una función de producción tipo Cobb-Douglas en la cual existen rendimientos constantes a escala, es decir, $0 < \delta < 1$, para el modelo se estima $\delta = 0,6$.
- **Hectáreas de coca cultivada de referencia (\bar{R}):** Para el modelo se tendrá en cuenta la extensión de tierra cultivada de coca correspondiente a $\bar{R} = 1$ hectárea, puesto que en base a esta medida se realiza la estimación de otros parámetros del modelo.

- **Población de referencia (\bar{P}):** Se considera el número de personas del núcleo familiar, es decir, $\bar{P} = 5$ habitantes.
- **Tasa de erradicación (θ):** Para el modelo se tiene en cuenta la erradicación de los cultivos de coca por aspersión aérea, las fumigaciones se inician en el Putumayo a partir de 1997, vea Tabla 3-3.

Año	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Total Hectáreas	19.574	34.049	63.277	79.530	79.626	85.616	15.902	21.910	20.726	38.475	41.579
Hec. Fumigadas	574	3.949	4.980	13.508	32.506	71.891	8.343	17.524	11.763	26.491	26.766

Tabla 3-3: Hectáreas de Coca Fumigadas en el Putumayo 1997 – 2007 [8],[9].

La Tabla 3-4 muestra el porcentaje de hectáreas fumigadas respecto al total de hectáreas por año y las tasas de variación de hectáreas fumigadas calculadas mediante la fórmula (3-4).

$$\theta = \frac{HF_{t+n} - HF_t}{HF_t} \quad (3-4)$$

donde,

HF_t = hectáreas fumigadas al principio del periodo,

HF_{t+n} = hectáreas fumigadas después de un periodo n .

Año	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Hec. Fumigadas/Total Hec.	0,029	0,116	0,079	0,170	0,408	0,840	0,525	0,800	0,568	0,684	0,644
Tasa de Variación		2,955	-0,321	1,158	1,404	1,057	-0,375	0,524	-0,290	0,205	-0,058

Tabla 3-4: Tasa de Variación de las Hectáreas de Coca Fumigadas en el Putumayo 1997 – 2007.

De la información anterior se tiene que la tasa promedio de fumigación es $\theta = 0,626$ año⁻¹.

- **Tiempo en detectar los cultivos (e):** Teniendo en cuenta que comienzos de los años 70's se fue conformando en Colombia un sector de la economía ilegal basada en el negocio de los cultivos ilícitos, en particular en el departamento del Putumayo el cultivo de la planta de coca aparece de manera significativa en los años 80's, para determinar el tiempo en detectar los cultivos ilícitos, se considera el año para el cual empiezan las fumigaciones, a partir del año de 1997, de esta manera se estima $e = 17$ años.
- **Tiempo de vida de la planta de coca (v):** Se estima el tiempo de vida de la planta en, $v = 40$ años.
- **Personas cosechando por hectárea (a) y tiempo de cosecha (m):** Los parámetros son dependientes en la medida que uno se estima dependiendo del valor del otro,

para el modelo se estima $a = 10$ y $m = 0,041$; es decir, 10 personas tardan 0,041 años en cosechar una hectárea de coca (\bar{R}).

- **Tasa de crecimiento poblacional (γ):** Teniendo en cuenta la información de la Tabla 3-5, la tasa de crecimiento poblacional se calcula por medio del método exponencial bajo el supuesto que el crecimiento se produce en forma continua y no cada unidad de tiempo [24].

Año	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Población	279.434	284.526	289.225	293.525	297.363	300.865	304.095	307.144	310.132	313.126	316.209

Tabla 3-5: Población del Putumayo 1997 – 2007 [6].

Se calculan las tasas de crecimiento poblacional mediante la fórmula (3-5), los resultados se presentan en la Tabla 3-6.

$$\gamma = \frac{\ln P^{t+n} - \ln P^t}{n} \quad (3-5)$$

donde,

P^t = población inicial,

P^{t+n} = población después de un periodo n .

Año	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Tasa de crecimiento		0,018	0,017	0,015	0,013	0,012	0,011	0,010	0,010	0,10	0,10

Tabla 3-6: Tasa de Crecimiento de la Población del Putumayo 1997 – 2007.

De la información anterior se tiene que la tasa promedio de crecimiento de la población es $\gamma = 0,012$ año⁻¹.

- **Tasa de emigración(φ) :** La tabla 3-7 muestra la cantidad de población emigrante en el putumayo durante los años 1997 y 2007, para calcular la tasa promedio de emigración de la población en este periodo de tiempo se emplea la fórmula (3-6).

Año	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Población	279.434	284.526	289.225	293.525	297.363	300.865	304.095	307.144	310.132	313.126	316.209
P. Emigrante	264	830	1.985	13.910	20.703	29.266	16.613	11.944	13.615	15.065	17.258

Tabla 3-7: Población Emigrante del Putumayo 1997 – 2007 [26].

$$\varphi = \frac{PE}{\frac{1}{2}(P^t + P^{t+n})} \quad (3-6)$$

donde,

PE = población emigrante al inicio del periodo n ,

P^t = población inicial,

P^{t+n} = población después de un periodo n .

Año	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Tasa de emigración	0,001	0,003	0,007	0,047	0,069	0,097	0,054	0,039	0,044	0,048	

Tabla 3-8: Tasa de Emigración de la Población del Putumayo 1997 – 2007.

De la información de la tabla **3-8** se tiene que la tasa promedio de emigración ¹ es $\varphi = 0,041$ año⁻¹.

- **Tasa de inmigración (ϕ):** Este parámetro está relacionado con la tasa de emigración φ y la tasa de erradicación θ . Si no hay erradicación la población inmigrante supera a la población emigrante; esto es $\phi > \varphi$, para este modelo se estima $\phi = 0,041$ año⁻¹ y si hay erradicación la población emigrante supera a la población inmigrante. Es decir, $\phi < \varphi$ y se estima $\phi = 0,031$ año⁻¹.
- **Hectáreas sembradas por habitante (b):** Para calcular este parámetro se considera que el 50 % de la población del bajo Putumayo participa directamente en el negocio de la coca, población que corresponde al 39.25 % de la población total.

Año	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Total Hectáreas	19.574	34.049	63.277	79.530	79.626	85.616	15.902	21.910	20.726	38.475	41.579
Población (39,25 %)	109.678	111.676	113.521	115.209	116.715	118.090	119.357	120.524	121.727	122.902	124.112
Hec./Pob.	0,178	0,305	0,557	0,690	0,682	0,725	0,133	0,182	0,170	0,315	0,335

Tabla 3-9: Hectáreas Sembradas por Habitante 1997 – 2007.

La tabla **3-9** presenta el cociente entre la población y las hectáreas cultivadas, el promedio de estos valores es $b = 0,389$ hectáreas/habitantes.

- **Población máxima (K):** La capacidad de soporte de población para el modelo se estima en $K = 70000$ habitantes, este valor se determina a partir del porcentaje de población que participa en el negocio y las condiciones iniciales que se estimaran para el modelo.
- **Personas al margen de la ley custodiando por hectárea (d):** Este parámetro se estima en $d = 0,2$ habitantes/hectáreas.

¹El valor $\varphi = 0,041$ año⁻¹ representa que por cada 100 habitantes 4 emigran.

- **Tasa de muerte por el conflicto (λ):** Este parámetro se estima a partir de la información de la tabla **3-10**, para calcular la tasa de muerte por el conflicto se aplica la fórmula (3-7).

Año	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Población	279.434	284.526	289.225	293.525	297.363	300.865	304.095	307.144	310.132	313.126	316.209
Muertos en el conflicto	280	373	429	292	196	196	297	265	409	384	400

Tabla 3-10: Muertos en Conflicto en el Departamento del Putumayo 1997 – 2007 [3].

$$\lambda = \frac{M^t}{P^t} \quad (3-7)$$

donde,

M^t = muertos en conflicto en el tiempo t ,

P^t = población en el tiempo t .

Las tasas de muerte por el conflicto se presentan en la tabla **3-11**.

Año	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Tasa de muerte	0,0010	0,0013	0,0015	0,0010	0,0007	0,0007	0,0010	0,0009	0,0013	0,0012	0,0013

Tabla 3-11: Tasas de Muerte en el Departamento del Putumayo 1997 – 2007.

De la información anterior se obtiene la tasa promedio de muerte ², $\lambda = 0,0011$ año⁻¹. se tiene que la tasa de homicidio, $\lambda = 0,0011$ año⁻¹.

Los parámetros que se estiman para la simulación del modelo se presentan en La tabla **3-12**.

3.4. Simulaciones Numéricas

Los resultados numéricos se realizan con ayuda del software Vensim configurado así: Initial time = 0, final time = 120, time step = 0.0625, units for time = año y integration type = RK4 Auto. Se consideran dos escenarios que ilustran gráficamente la evolución de las variables de estado al cambiar ciertos parámetros considerados significativos en el modelo. Teniendo en cuenta la cantidad de hectáreas sembradas por habitante, para las simulaciones se toma como condición inicial $R = 19.574$ hectáreas y $P = 50.319$ habitantes.

²El valor $\lambda = 0,0011$ año⁻¹ representa que por cada 1000 habitantes 1 muere.

Parámetro	Valor
Tasa de Siembra (α)	0,238 año ⁻¹
Tasa de cosecha (β)	0,2 año ⁻¹
Factor tecnológico (f)	1 hectárea
Factor de productividad (δ)	0,6
Hectáreas de coca cultivada de referencia (\bar{R})	1 hectárea
Población de referencia (\bar{P})	5 habitantes
Tiempo en detectar los cultivos (e)	17 años
Tiempo de vida de la planta de coca (v)	40 años
Personas cosechando por hectárea (a)	10 habitantes
Tiempo de cosecha (m)	0,041 años
Tasa de crecimiento poblacional (γ)	0,012 año ⁻¹
Tasa de emigración (φ)	0,041 año ⁻¹
Tasa de inmigración (ϕ)	0,31 año ⁻¹
Hectáreas sembradas por habitante (b)	0,389 hectáreas/habitantes
Población máxima (K)	70.000 habitantes
Personas al margen de la ley custodiando por hectárea (d)	0,2 habitantes/hectáreas
Tasa de muerte por el conflicto (λ)	0,0011 año ⁻¹

Tabla 3-12: Parámetros estimados para el departamento del Putumayo 1997 – 2007.

3.4.1. Escenario I

En este escenario se simulan las evoluciones de las variables de estado sin y con presencia de la erradicación. Si $\theta = 0$ implica que las personas dedicadas al negocio de la coca no se desplacen y permanezcan en la región, obtenemos que $\phi = 0$. Esta situación se representa gráficamente en la Figura (3-5), se observa que la población crece naturalmente hasta la capacidad de soporte $K = 70.000$ habitantes, y el recurso natural *erythroxylum coca* hasta que se erradique.

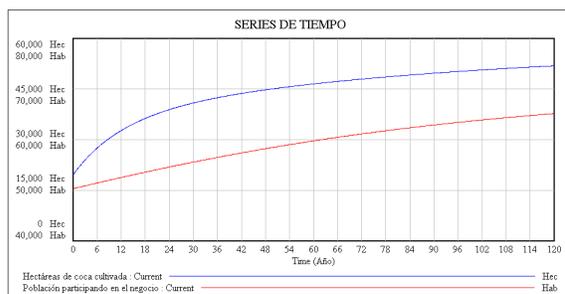


Figura 3-3: Simulación para $\theta = 0$ y $\phi = 0$.



Figura 3-4: Simulación para $\theta = 0,626$.

Si se tiene en cuenta la erradicación, la tasa se estima en $\theta = 0,626$, esto cambia la dinámica del sistema puesto que no es posible acabar de manera inmediata el recurso natural debido a

que los cultivadores optan por métodos alternativos para proteger la planta de coca antes o después de la fumigación, así crecerá hasta que la reincidencia de las fumigaciones acabe con los cultivos, en la Figura (3-4) se observa que las hectáreas de coca cultivada se incrementan en 7.570,7 hectáreas en 13,25 años luego de este tiempo la cantidad de hectáreas cultivadas decrecen hasta extinguirse. En esta dinámica la población que atiende los cultivos después de la erradicación corresponde a los habitantes oriundos de la región puesto que las personas dedicadas a este negocio emigran inmediatamente de la región para dedicarse al mismo negocio en otro departamento de Colombia.

3.4.2. Escenario II

Para este caso se analiza la evolución de las variables de estado sin y con presencia de personas al margen de la ley custodiando por hectárea. Si $d = 0$ la población que participa en el negocio crece hasta su capacidad de soporte y las hectáreas de coca crecen hasta que una acción de erradicación actúe, ver Figura (3-5).

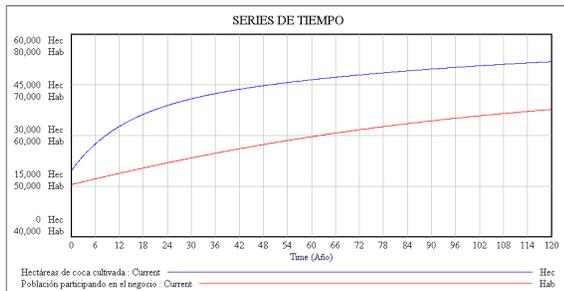


Figura 3-5: Simulación para $d = 0$.



Figura 3-6: Simulación para $d = 0,5$.

Si se tiene en cuenta el número de personas al margen de la ley custodiando por hectárea, para $d = 0,5$ la dinámica del sistema es semejante a la del escenario I, pero hay una menor proporción en el crecimiento de las hectáreas de coca cultivada representando 3.089,4 en 6,0625 años, luego decrecen de forma más rápida que en el escenario I. Este comportamiento también se da para las personas dedicadas al negocio de la coca, ver Figura (3-6).

4 Análisis y control óptimo del modelo

4.1. Puntos de equilibrio

Los puntos de equilibrio del sistema (3-2) se obtienen igualando a cero la parte derecha de cada una de las ecuaciones, es decir, hallando la solución del sistema homogéneo,

$$\begin{aligned} \left(\phi am \beta f \frac{R^\delta}{R} \cdot \frac{P^{1-\delta}}{P} + \gamma P \right) \left(1 - \frac{P}{K} \right) - \varphi v d \alpha b P &= 0 \\ \alpha b p - \beta f \frac{R^\delta}{R} \cdot \frac{P^{1-\delta}}{P} - \theta e b^2 \lambda v d \alpha b P &= 0 \end{aligned}$$

Operaciones algebraicas, muestran que las soluciones son

$$X_1 = (0, 0) \quad \text{y} \quad X_2 = (P^*, R^*)$$

donde

$$P^* = \frac{\varphi v d \alpha b K - \gamma K - \phi a m \alpha b K + \theta e b^2 \lambda v d \alpha \phi a m K}{\theta e b^2 \lambda v d \alpha \phi a m - \alpha b \phi a m - \gamma}, \quad R^* = \sqrt[\delta]{\frac{\bar{R} \bar{P} (\alpha b - \theta e b^2 \lambda v d \alpha)}{\beta f}} \cdot P^*$$

La matriz jacobiana asociada a la linealización del sistema (3-2) en el punto de equilibrio genérico (R,P) es,

$$J(P, R) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{P}}{\partial P} & \frac{\partial \dot{P}}{\partial R} \\ \frac{\partial \dot{R}}{\partial P} & \frac{\partial \dot{R}}{\partial R} \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{P}}{\partial P} &= \frac{\phi am \beta f}{\bar{R} \bar{P}} \left[(1 - \delta) R^\delta P^{-\delta} - \frac{(2 - \delta)}{K} R^\delta P^{1-\delta} \right] - \frac{2\gamma}{K} P - \varphi v d a b + \gamma \\ \frac{\partial \dot{P}}{\partial R} &= \left(1 - \frac{P}{K} \right) \left(\frac{\phi am \beta f \delta}{\bar{R} \bar{P}} R^{\delta-1} P^{1-\delta} \right) \\ \frac{\partial \dot{R}}{\partial P} &= \alpha b - \frac{\beta f}{\bar{R} \bar{P}} (1 - \delta) R^\delta P^{-\delta} - \theta e b^2 \lambda v d \alpha \\ \frac{\partial \dot{R}}{\partial R} &= -\frac{\beta f \delta}{\bar{R} \bar{P}} R^{\delta-1} P^{1-\delta}\end{aligned}$$

4.1.1. Estabilidad local de X_1 del sistema (3-2)

La estabilidad de X_1 se analiza teniendo en cuenta el criterio *Traza-Determinante* [16], [27] para sistemas bidimensionales y evaluando la matriz jacobiana en el equilibrio X_1 se obtiene,

$$J(X_1) = \begin{pmatrix} -\varphi v d a b + \gamma & 0 \\ \alpha b - \theta e b^2 \lambda v d \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

La traza y determinante respectivamente son,

$$T = -\varphi v d a b + \gamma \quad \text{y} \quad D = 0$$

Se tiene un sistema degenerado, presenta tres casos.

- i. El equilibrio X_1 es estable pero no asintóticamente estable si $T < 0$; es decir,

$$\gamma < \varphi v d a b$$

Considerando los valores de los parámetros estimados en el capítulo 2, para $\gamma < 0,0303668960$, se tiene que cualquier condición inicial tiende al equilibrio $(0, 0)$ cuando $t \rightarrow \infty$, ver Figura (4-1).

- ii. El equilibrio X_1 es inestable si $T > 0$; es decir,

$$\gamma > \varphi v d a b$$

Para los valores de los parámetros estimados, cuando $\gamma > 0,0303668960$, en la Figura (4-2) se ve que el equilibrio $(0, 0)$ es inestable y cualquier condición inicial tiende al equilibrio $(P^*, R^*) = (3.849, 1112913635, 14.653, 5806787014)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

- iii. El equilibrio X_1 es inestable si $T = 0$; es decir,

$$\gamma = \varphi v d a b$$

Para $\gamma = 0,0303668960$, el equilibrio $(0, 0)$ es inestable, ver Figura (4-3) y para cualquier condición inicial, está tiende al equilibrio $(P^*, R^*) = (2.519, 6065060141, 9.592, 1511277943)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

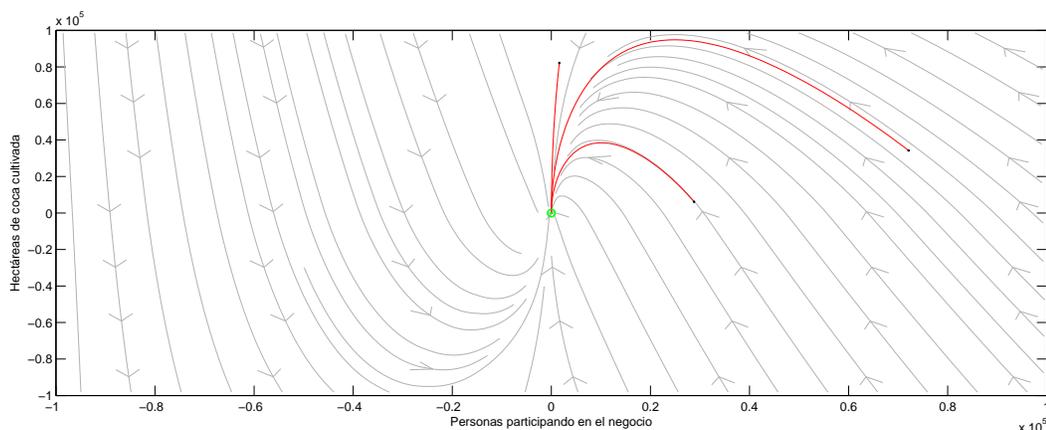


Figura 4-1: Campo vectorial, el punto en verde indica el equilibrio al cual tiende cualquier condición inicial de la región Ω , en rojo se muestra la trayectoria para tres condiciones iniciales hasta el punto de equilibrio.

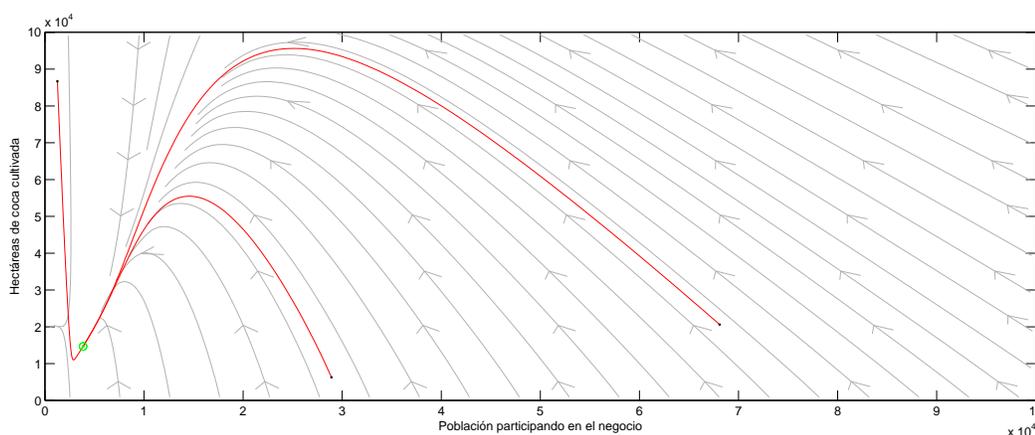


Figura 4-2: Campo vectorial, el punto en verde indica el equilibrio al cual tiende cualquier condición inicial de la región Ω , en rojo se muestra la trayectoria para tres condiciones iniciales hasta el punto de equilibrio.

4.1.2. Estabilidad local de X_2 del sistema (3-2)

El análisis se hace de forma numérica puesto que las operaciones algebraicas son extensas. Este punto de equilibrio está relacionado con el equilibrio X_1 , en su análisis se identifican tres casos.

- i. Resultados numéricos muestran que para el caso de X_1 estable el equilibrio $X_2 \notin \Omega$, por esta razón no es de interés hacer su análisis. Simulaciones muestran que $X_2 = (-91.847, 6499288301, -349.664, 3371681953)$, no tiene sentido hablar de población y recursos naturales negativos.

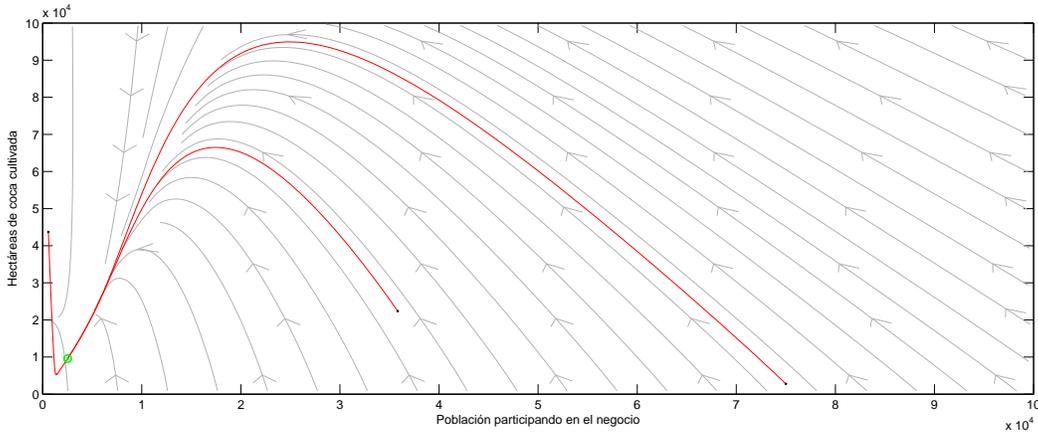


Figura 4-3: Campo vectorial, el punto en verde indica el equilibrio al cual tiende cualquier condición inicial de la región Ω , en rojo se muestra la trayectoria para tres condiciones iniciales hasta el punto de equilibrio.

- ii. Si $\gamma > 0,0303668960$ el equilibrio X_1 es inestable, para este caso el equilibrio $X_2 \in \Omega$ es estable. Los valores propios asociados al equilibrio X_2 son: $-0,001679724820067$ y $-0,014789890983651$ y tienen parte real negativa, entonces el equilibrio X_2 es estable, ver (Figura 4-2).
- iii. Si $\gamma = 0,0303668960$ el equilibrio X_1 es inestable, para este caso el equilibrio $X_2 \in \Omega$ es estable. Los valores propios asociados al equilibrio X_2 son: $-0,001079318398959$ y $-0,014770114479303$ y tienen parte real negativa, entonces el equilibrio X_2 es estable, ver (Figura 4-3).

4.2. Control óptimo

En esta sección se plantea un problema de control óptimo para el sistema (3-2) considerando el parámetro d como un control dependiente del tiempo. Se analiza utilizando el Principio del Máximo de Pontryagin [17].

El sistema de ecuaciones diferenciales que representa relación entre la población y el recurso natural *Erythroxylum Coca* con control es

$$\begin{cases} \dot{P} = \left(\phi a m \beta f \frac{R^\delta}{R} \cdot \frac{P^{1-\delta}}{P} \right) \left(1 - \frac{P}{K} \right) - \varphi v d(t) \alpha b P = f_1 \\ \dot{R} = \alpha b P - \beta f \frac{R^\delta}{R} \cdot \frac{P^{1-\delta}}{P} - \theta e b^2 \lambda v d(t) \alpha P = f_2 \end{cases} \quad (4-1)$$

Donde $d(t)$ representa la proporción de personas al margen de la ley custodiando por hectárea en un tiempo t . Para el sistema sin control se hace $d(t) = 0$.

El problema a resolver está formado por una función ligada al sistema de control (4-1) que determina los costos directos e indirectos de aplicar dichos controles.

Para este caso, la función de costos es:

$$\begin{aligned} J(d) &= \int_0^{\tau} L(X(t), d(t)) dt \\ &= \int_0^{\tau} \left[A_1 P(t) + A_2 R(t) + \frac{\eta}{2} d^2 \right] dt \end{aligned}$$

Los dos primeros términos del integrando representan los costos indirectos que se adquieren al aplicar los controles en cada variable de estado (las constantes positivas A_1 y A_2 equilibran estos costos) y el otro término los costos directos. En este caso, el control d está definido en una escala entre 0 y 1. Este valor representa el porcentaje de costo de la aplicación del control en un determinado periodo de tiempo, y la constante positiva η equilibra este costo directo, es decir, el costo que el gobierno tiene presupuestado para los controles (en miles o millones de pesos) [12].

Se trata de hallar un control óptimo $\bar{d}(t)$ tal que, $J(\bar{d}(t)) = \min_{\psi} J(d(t))$ donde,

$$\psi = \{d \in L^2(0, \tau) : 0 \leq d \leq 1\}$$

El objetivo de aplicar este control es reducir a cero tanto el número de personas dedicadas al negocio como la cantidad de hectáreas cultivadas de coca.

Por el teorema 4.1 de [10] (p. 68-69), dado el problema de control:

$$\begin{cases} J(X(t), u(t)) = \int_0^{\tau} L(X(t), d(t)) \\ \frac{dX(t)}{dt} = F(X(t), d(t)), \quad \forall t \geq 0, \forall d \in \psi \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

existe $\bar{d} = \bar{d}(t)$ tal que,

$$J(\bar{d}) = \min_{\Psi} J(d) \quad (4-2)$$

Para obtener los controles óptimos del sistema (4-1) se utiliza el Principio del Máximo de Pontryagin presentado en [17]. La función Hamiltoniana o función de Pontryagin está definida como:

$$H(X(t), d(t), u(t)) = L(X(t), d(t)) + \sum_{i=1}^2 u_i f_i$$

donde $X(t) = (P(t), R(t))$ es el vector de variables de estado, $d(t)$ es el control, $u(t)$ el vector de variables adjuntas o conjugadas, f_i el lado derecho de la ecuación i del sistema

(4-1) y $L(X(t), d(t))$ el Lagrangiano definido en J . En lo que sigue del texto se obviará (t) de las expresiones que dependen del tiempo. De esta manera,

$$H(X, d, u) = A_1P + A_2R + \frac{\eta}{2}d^2 + u_1 \left[\left(\phi am \beta f \frac{R^\delta}{\bar{R}} \cdot \frac{P^{1-\delta}}{\bar{P}} + \gamma P \right) \left(1 - \frac{P}{K} \right) - \varphi v d \alpha b P \right] \\ + u_2 \left[\alpha b p - \beta f \frac{R^\delta}{\bar{R}} \cdot \frac{P^{1-\delta}}{\bar{P}} - \theta e b^2 \lambda v d \alpha P \right]$$

Teorema 4.2.1. *Dado el control óptimo \bar{d} y la solución $X(t)$ de (4-1), existen variables adjuntas u_1 y u_2 al sistema (4-1) que satisfacen*

$$\frac{du_1}{dt} = -A_1 - u_1 \frac{\phi am \beta f}{\bar{R}\bar{P}} \left[(1-\delta) R^\delta P^{-\delta} - \frac{(2-\delta)}{K} R^\delta P^{1-\delta} \right] + \frac{2\gamma u_1}{K} P + \varphi v d \alpha b u_1 - \gamma u_1 \\ - u_2 \left[\alpha b - \frac{\beta f}{\bar{R}\bar{P}} (1-\delta) R^\delta P^{-\delta} - \theta e b^2 \lambda v d \alpha \right] \\ \frac{du_2}{dt} = -A_2 - u_1 \left(1 - \frac{P}{K} \right) \left(\frac{\phi am \beta f \delta}{\bar{R}\bar{P}} R^{\delta-1} P^{1-\delta} \right) + u_2 \left(\frac{\beta f \delta}{\bar{R}\bar{P}} R^{\delta-1} P^{1-\delta} \right)$$

con las condiciones de transversalidad: $u_1(\tau) = 0$, $u_2(\tau) = 0$.

Además,

$$\bar{d} = \min \left(\max \left(0, \frac{u_1 \varphi v \alpha b P + u_2 \theta e b^2 \lambda v \alpha P}{\eta} \right), 1 \right)$$

Demostración. La forma de las ecuaciones asociadas a las variables adjuntas del sistema (4-1) son los resultados normales del Principio del Máximo de Pontryagin presentado en [17], las cuales se definen como $\frac{du}{dt} = -H_X(X, u, d)$. Es decir,

$$\frac{du_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial P} = -A_1 - u_1 \frac{\phi am \beta f}{\bar{R}\bar{P}} \left[(1-\delta) R^\delta P^{-\delta} - \frac{(2-\delta)}{K} R^\delta P^{1-\delta} \right] + \frac{2\gamma u_1}{K} P \\ + \varphi v d \alpha b u_1 - \gamma u_1 - u_2 \left[\alpha b - \frac{\beta f}{\bar{R}\bar{P}} (1-\delta) R^\delta P^{-\delta} - \theta e b^2 \lambda v d \alpha \right] \\ \frac{du_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial R} = -A_2 - u_1 \left(1 - \frac{P}{K} \right) \left(\frac{\phi am \beta f \delta}{\bar{R}\bar{P}} R^{\delta-1} P^{1-\delta} \right) + u_2 \left(\frac{\beta f \delta}{\bar{R}\bar{P}} R^{\delta-1} P^{1-\delta} \right)$$

con $u_1(\tau) = 0$ y $u_2(\tau) = 0$.

Aplicando las condiciones de primer orden

$$\frac{\partial H}{\partial d} = 0$$

la ecuación óptima de H respecto a d es

$$\frac{\partial H}{\partial d} = \eta d - u_1 \varphi v \alpha b P - u_2 \theta e b^2 \lambda v \alpha P = 0$$

Despejando d se obtiene

$$d = \frac{u_1 \varphi v \alpha b P + u_2 \theta e b^2 \lambda v \alpha P}{\eta}$$

Por lo tanto,

$$\bar{d}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{u_1 \varphi v \alpha b P + u_2 \theta e b^2 \lambda v \alpha P}{\eta} \leq 0 \\ \frac{u_1 \varphi v \alpha b P + u_2 \theta e b^2 \lambda v \alpha P}{\eta} & \text{si } 0 < \frac{u_1 \varphi v \alpha b P + u_2 \theta e b^2 \lambda v \alpha P}{\eta} < 1 \\ 1 & \text{si } \frac{u_1 \varphi v \alpha b P + u_2 \theta e b^2 \lambda v \alpha P}{\eta} \geq 1 \end{cases}$$

Es equivalente a tener

$$\bar{d} = \min \left(\max \left(0, \frac{u_1 \varphi v \alpha b P + u_2 \theta e b^2 \lambda v \alpha P}{\eta} \right), 1 \right)$$

□

El problema a resolver (problema de contorno) está formado por el sistema (4-1) con sus respectivas condiciones iniciales, el sistema conjugado o sistema adjunto con las condiciones terminales o de frontera, y el control óptimo. Es decir,

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = F(X, \bar{d}) \\ \frac{du}{dt} = G(X, \bar{d}, u) \\ X(0) = X_0, u(\tau) = 0 \\ \bar{d} = \min \left(\max \left(0, \frac{u_1 \varphi v \alpha b P + u_2 \theta e b^2 \lambda v \alpha P}{\eta} \right), 1 \right) \end{cases}$$

La Figura (4-4) muestra las soluciones numéricas que se obtienen al resolver el problema de contorno. Allí se observa la efectividad del control d sobre la población dedicada al negocio y las hectáreas de coca cultivada. . Para cualquier valor de t la imagen $P(t)$ y $R(t)$ siempre es mayor en el sistema sin control, además para los dos casos se observa la convergencia a cero, cumpliendo el objetivo del control.

Para que la acción del control sea óptima y minimizar los costos de su aplicación se debe aplicar al 100 % en los primeros 32 años, luego habrá intervalos donde no se aplique y se vuelva aplicar ver Figura (4-5).

El costo de aplicar el control está dado por

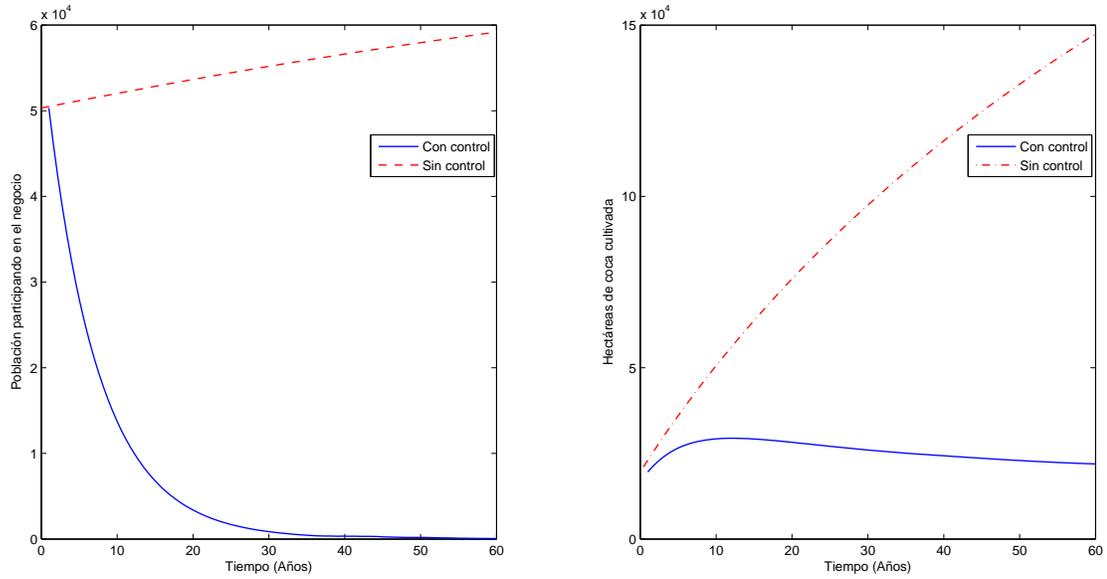


Figura 4-4: Evolución de las variables de estado.

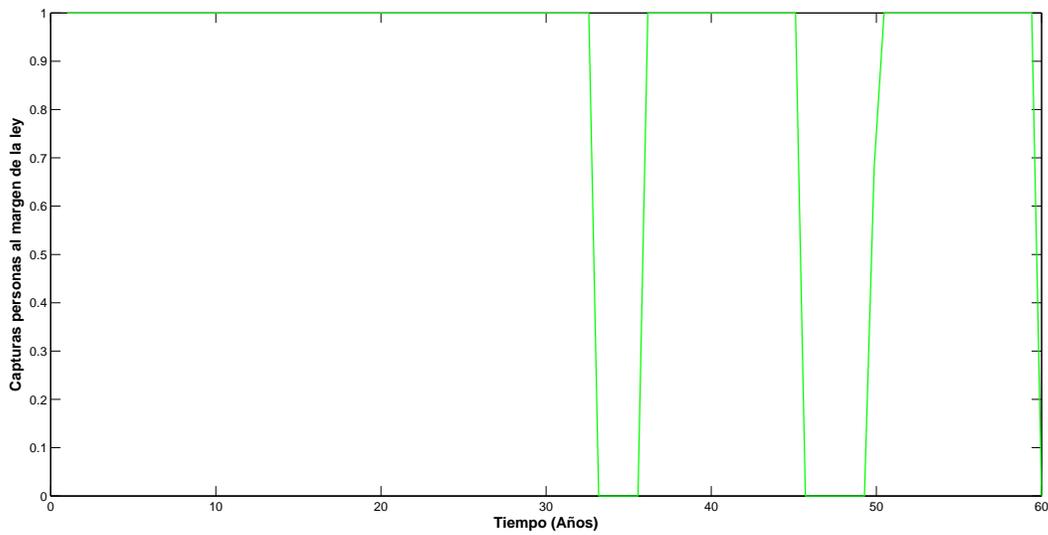


Figura 4-5: Control.

$$\begin{aligned}
 J(d) &= \int_0^{60} \left(A_1 P + A_2 R + \frac{\eta}{2} d^2 \right) dt \\
 &= 184.790.000
 \end{aligned}$$

donde A_1 , A_1 y $\frac{\eta}{2}$ se estiman en 1, estos valores son hipotéticos y el costo $J(d)$ esta dado en valor monetario.

5 Conclusiones y recomendaciones

5.1. Conclusiones

En esta investigación se ve la potencialidad de la teoría de Dinámica de Sistemas en la construcción de modelos matemáticos, se modeló la relación entre la población y el recurso natural *Erythroxylum Coca*. Simulaciones numéricas hechas con el software especializado Vensim muestran que para disminuir la cantidad de personas dedicadas al negocio y las hectáreas de coca cultivada es importante que dentro de las políticas gubernamentales se incluya las capturas de las personas al margen de la ley custodiando por hectárea, este parámetro responde de mejor forma que la erradicación por fumigación ver Figuras (3-4), (3-6).

El sistema planteado tiene dos puntos de equilibrio, el equilibrio trivial $X_1 = (0, 0)$ representa el comportamiento esperado puesto que para acabar la problemática de los cultivos ilícitos las variables de estado consideradas en el modelo deben tender a cero. El equilibrio X_1 es estable si d es mayor que 0,7 este valor indica que al identificar 0,7 personas al margen de la ley custodiando por hectárea implica que para cualquier condición inicial las solución del sistema tiendan a X_1 . Identificar menos o 0,7 personas al margen de la ley custodiando por hectárea hace que el equilibrio X_1 sea inestable y que cualquier condición inicial tienda al equilibrio X_2 .

Las simulaciones hechas con Vensim implican estudiar el problema de control óptimo tomando el parámetro d como una función que representa las capturas de personas al margen de la ley custodiando por hectárea en función del tiempo, simulaciones numéricas hechas con el software Matlab evidencian la efectividad del control presentando un fuerte decrecimiento la cantidad de población participando en el negocio y un decrecimiento suave después de 10 años y asintótico a cero para la cantidad de hectáreas cultivadas ver Figura (4-4) . Se simula el control óptimo para un periodo de 60 años el cual es efectivo si se aplica en un 100 % en un periodo de 32 años ver Figura (4-5), esta política concuerda con la política de seguridad democrática impuesta en gobiernos anteriores en cuyos periodos se observó un decrecimiento de los cultivos ilícitos.

5.2. Recomendaciones

Este trabajo de investigación conlleva a realizar trabajos futuros como:

- Adaptar el modelo construido a otras regiones donde haya presencia de cultivos ilícitos y plantear un modelo que analice la interacción entre regiones dedicadas al negocio de los cultivos ilícitos por medio de una red compleja.
- Desarrollar un análisis de bifurcaciones teniendo en cuenta el cambio de estabilidad entre los puntos de equilibrio X_1 y X_2 al hacer variar parámetros sensibles del modelo.
- Establecer otros controles para el modelo y estimar el costo de su aplicación haciendo un estudio de costos directos e indirectos con datos reales y establecer el control más rentable.

Bibliografía

- [1] ANA DIAZ, Favio S. ; ELECTRÓNICA, Edición (Ed.): *Geografía de los Cultivos Ilícitos y Conflicto Armado en Colombia*. 2004
- [2] DE LOS ANGELES MACIAS MARTINEZ, María: *El programa de desarrollo alternativo en Colombia, una opción racional en la erradicación de cultivos ilícitos y su sustitución en el Putumayo. Caso palmito de chontaduro*, Pontificia Universidad Javeriana, Tesis de Grado, 2005
- [3] ANGÉLICA ORTIZ, Sol G. ; DE DEMOCRACIA DE LA MISIÓN DE OBSERVACIÓN ELECTORAL, Observatorio (Ed.): *Monografía Político Electoral: Departamento de Putuayo 1997 a 2007*. Colombia, 2007
- [4] ARACIL, Javier ; MARTE, Gráficas (Ed.): *Dinámica de Sistemas*. Madrid, 1995
- [5] BRITO HERNÁNDEZ, Steve A.: *Productividad y Crecimiento Económico: El Caso de Guatemala 1970-2008*, Pontificia Universidad Católica De Chile, Tesis de Grado, 2010
- [6] DANE: *Estimaciones de Población 1985-2005 y Proyecciones de Población 2005-2020 Nacional y Departamental Desagregado por Área, Sexo y Grupos Quinquenales de Edad.*, 2011
- [7] DÍAZ, Fabio: *Análisis del Comportamiento de los Cultivos Ilícitos en Colombia Mediante la Dinámica de Sistemas*. En: *II Encuentro Colombiano de Dinámica de Sistemas*, 2004
- [8] DE LAS NACIONES UNIDAS CONTRA LA DROGA Y EL DELITO UNODC, Oficina: *Colombia Monitoreo de Cultivos de Coca 2006*. Colombia, 2007
- [9] DE LAS NACIONES UNIDAS CONTRA LA DROGA Y EL DELITO UNODC, Oficina: *Colombia Monitoreo de Cultivos de Coca 2012*. Colombia, 2013
- [10] FLEMING W, Raymond R. ; SPRINGER (Ed.): *Deterministic and stochastic optimal control*. New York, 1975
- [11] GONZÁLEZ, Eduardo E. ; TRES, Digital @. (Ed.): *Apuntes Sobre Historia Del Pensamiento Económico*. 2006
- [12] HATTAF H, Saadi S Tabit Y Yousfi Y.: *Optimal control of tuberculosis with exogenous reinfection*. En: *Applied mathematical sciences* 3(5) (2009), p. 231–240

-
- [13] JAVIER ARACIL, Francisco G. ; S.A., Alianza E. (Ed.): *Dinámica de Sistemas*. Madrid, 1997
- [14] KUZNETSOV, Y ; SPRINGER-VERLAG (Ed.): *Elements of Applied Bifurcation Theory*. New York, 1998
- [15] MEZA, Ricardo V. ; NUEVA, Gente (Ed.): *Drogas, conflicto armado y desarrollo alternativo alternativo. Una perspectiva desde el sur de Colombia*. Colombia, 2003
- [16] PERKO, Lawrence ; SPRINGER-VERLAG (Ed.): *Differential Equations and Dynamical Systems*. 3. New York
- [17] PONTRYAGIN L, Gamkrelidze R Mishchenko E.: The mathematical theory of optimal processes. En: *Gordon and Breach Science 4* (1986)
- [18] RAMÍREZ, María C. ; DE ANTROPOLOGÍA E HISTORIA. COLCIENCIAS, Instituto C. (Ed.): *Entre el estado y la guerrilla: identidad y ciudadanía en el movimiento de los campesinos cocaleros del Putumayo*. 2001
- [19] REDONDO, Johan: *Modelado de Mercados de Electricidad*, Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales, Tesis de Grado, 2012
- [20] DE LA REPÚBLICA, Contraloría G.: *Plan Colombia Segundo Informe de Evaluación*. 2001
- [21] RIVERA, Guillermo. *Cultivos de coca, conflicto y deslegitimación del estado en el Putumayo*. 1998
- [22] SIMCI: *Cultivos de Coca Estadísticas Municipales Censo 31 de Diciembre de 2013*. Colombia, 2014
- [23] STERMAN, John ; HILL, Mc G. (Ed.): *Business Dynamics, Systems thinking and modelling for a complex world*. 2000
- [24] TORRES-GEGRÓ, Arnaldo: Tasas de crecimiento poblacional: Una mirada desde el modelo lineal, geométrico y exponencial. En: *CIDE digital* (2011)
- [25] VARGAS, Carlos: Cultivos Ilícitos y Erradicación Forzosa en Colombia. En: *Cuadernos de Economía, Universidad Nacional de Colombia XXIII* (2004), p. 109–141
- [26] PARA LA ATENCIÓN Y REPARACIÓN INTEGRAL A LAS VÍCTIMAS, Unidad: *Informe Nacional de Desplazamiento Forzado en Colombia 1985 a 2012*. Colombia, 2013
- [27] WIGGINS, S ; SPRINGER-VERLAG (Ed.): *Introduction to Applied Non Linear Dynamical Systems and Chaos*. New York, 1990