

## SOBRE OPERADORES DE INTEGRACION FRACCIONAL Y ALGORITMOS COMPUTACIONALES.

por

Omar E. MEYER C. y Shyam KALLA

**Resumen.** Algunos autores como Kalla, Saxena y Saigo, han definido y estudiado operadores de integración fraccional que tienen como núcleo la función hipergeométrica de Gauss. El propósito de este trabajo es estudiar tales operadores con la función  $R_{-\alpha}(b_1, b_2; t, x)$  de Carlson como núcleo, así como también presentar algoritmos para el cálculo de semidiferintegrales.

**Abstract.** Kalla, Saxena, Saigo and some other authors, have defined and studied fractional operators with the Gauss hypergeometric function as nucleus. The object of this paper is to study operators containing the Carlson's function  $R_{-\alpha}(b_1, b_2; t, x)$ ; as well as to present and discuss algorithms for numerical calculations of semidiferintegrals.

**§1. Introducción.** El tópico de Cálculo Fraccional (sus operadores y aplicaciones) ha sido estudiado desde hace mucho tiempo por un gran número de autores [6-15].

Durante las últimas cuatro décadas ha sido significativo el interés de matemáticos y otros científicos e investigadores en el Cálculo Fraccional debido a la sencillez y elegancia con que se pueden abordar y solucionar una gran cantidad de problemas tanto de matemática como de otras ramas científicas, de las cuales se pueden citar [12]: Teoría de líneas de transmisión eléctrica, análisis químico de so-

luciones acuosas, análisis electroquímico, diseño de contadores de flujo de calor, desarrollo y crecimiento de ranuras intergranulares en superficies metálicas, cálculo en mecánica cuántica y diseminación de la polución atmosférica, entre otras.

Los operadores básicos del Cálculo Fraccional son los de Riemann-Liouville [12]:

$$R_{0x}^{\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad \alpha \geq 0, \quad (1)$$

$$= \frac{d^N}{dx^N} R_{0x}^{\alpha+N} f, \quad \alpha < 0, \quad N = [1-\alpha], \quad (2)$$

Weyl [13]:

$$w_{\infty}^{\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad \alpha \geq 0, \quad (3)$$

$$= (-1)^N \frac{d^N}{dx^N} w_{\infty}^{\alpha+N} f, \quad \alpha < 0, \quad N = [1-\alpha], \quad (4)$$

donde  $[\cdot]$  indica la parte entera.

Generalizaciones interesantes de estos operadores y también de los de Erdelyi-Kober [13] fueron consideradas por Kalla & Saxena [7,16] y Saigo [14,15]. Los operadores de Kalla & Saxena son:

$$I[\alpha, \beta, \gamma; m, u, n, a; f(x)] = \quad (5)$$

$$\frac{u x^{-n-1}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x F(\alpha, \beta+m; \gamma; a t^u/x^u) t^n f(t) dt, \quad \operatorname{Re}(\alpha) \geq 0,$$

$$R[\alpha, \beta, \gamma; m, u, \delta, a; f(x)] = \quad (6)$$

$$\frac{u x^{\delta}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\infty} F(\alpha, \beta+m; \gamma; a x^u/t^u) t^{-\delta-1} f(t) dt, \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 0,$$

donde  $F(p, q; r; z)$  es la función hipergeométrica de Gauss [1].

Nótese que para  $\beta = \gamma$ ,  $a = u = 1$ , los anteriores operadores se reducen a los dados por Saxena [16, pag.288], en tanto que para  $\beta = \gamma$ ,  $m = 0$ ,  $a = u = 1$ , se obtienen los de Erdelyi-Kober [13].

Similarmente, Saigo [14,15] define sus operadores de la siguiente manera:

$$I_{0x}^{\alpha, \beta, n} f = \frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} F(\alpha+\beta, -n; \alpha; 1-t/x) f(t) dt, \quad \alpha \geq 0 \quad (7)$$

$$= \frac{d^N}{dx^N} I_{0x}^{\alpha+N, \beta-N, n-N} f, \quad \alpha < 0, \quad N = [1-\alpha]; \quad (8)$$

$$J_{\infty}^{\alpha, \beta, n} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} (t-x)^{\alpha-1} F(\alpha+\beta, -n, \alpha; 1-x/t) t^{-\alpha-\beta} f(t) dt, \quad \alpha \geq 0 \quad (9)$$

$$= (-1)^N \frac{d^N}{dx^N} J_{\infty}^{\alpha+N, \beta+N, n} f, \quad \alpha < 0, \quad N = [1-\alpha]. \quad (10)$$

Nótese que para  $\alpha = -\beta$  se tienen los operadores de Riemann-Liouville y Weyl, respectivamente, en tanto que para  $\beta = 0$  se obtienen los de Erdelyi-Kober.

## §2. Función $R_{\alpha}(b; z)$ de Carlson [3,4].

**DEFINICION 2.1.** Sea  $E$  un simplex standard de  $\mathbb{R}^{k-1}$ ,  $k > 2$ ,  $H$  un semiplano de  $\mathbb{C} - \{0\}$ ; sea  $\Omega = H$  si  $\alpha \in \mathbb{C} - \mathbb{N}$ , pero  $\Omega = \mathbb{C}$  si  $\alpha \in \mathbb{N}$ . Sean  $b = (b_1, b_2, \dots, b_k) \in \mathbb{C}^k$ ,  $z = (z_1, z_2, \dots, z_k) \in \Omega^k$ . Si  $u \cdot z$  es una combinación convexa en  $\Omega^k$  se define la función  $R_{\alpha}(b; z)$  de Carlson [2,3] así:

$$R_{\alpha}(b; z) = \int_E (u \cdot z)^{\alpha} d\mu_b(u), \quad (11)$$

donde

$$d\mu_b(u) = \frac{1}{\beta(b)} u_1^{b_1-1} u_2^{b_2-1} \dots u_{k-1}^{b_{k-1}-1} \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} u_i\right)^{b_k-1} du_1 du_2 \dots du_{k-1} \quad (12)$$

es la medida de Dirichlet [3, pág.64],  $\beta(b) = \frac{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\dots\Gamma(b_k)}{\Gamma(b_1+b_2+\dots+b_k)}$ , es la función beta en varias variables, y  $\Gamma$  es la función gamma.

Es claro que si en (11)  $k = 1$ , se tiene  $R_{\alpha}(b; z) = z^{\alpha}$ , y si  $\alpha = 0$ ,  $R_0(b; z) = 1$ .

De la definición (2.1) se desprenden las siguientes proposiciones dadas por Carlson [3]:

**PROPOSICION 2.1.** Sean  $H$  un semiplano de  $\mathbb{C} - \{0\}$ ,  $\alpha, \beta, \gamma, x, y$  parámetros complejos, tales que  $\text{Re}(\gamma) > \text{Re}(\beta) > 0$ , con  $(x, y) \in H$ , si  $\alpha \in \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0, -1, -2, \dots\}$ , o con  $(x, y) \in H$  si  $\alpha \in \mathbb{N}$ . Entonces:

$$R_{-\alpha}(\beta, \gamma - \beta; (x, y)) = y^{-\alpha} F(\alpha, \beta; \gamma; 1 - x/y) \quad (13)$$

$$R_{-\alpha}(\gamma - \beta, \beta; (y, x)) = x^{-\alpha} F(\alpha, \gamma - \beta; \gamma; 1 - y/x). \quad (14)$$

**PROPOSICION 2.2.** Sean  $\alpha, \alpha' \in \mathbb{C}, \beta, \beta' \in \mathbb{C}_>$ , donde  $\mathbb{C}_> = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0, |\arg z| < \pi/2\}$  y supóngase que  $\alpha + \alpha' = \beta + \beta'$ . Si  $H$  es un semiplano de  $\mathbb{C} - \{0\}$  y además  $(x, y) \in H$ , entonces:

$$R_{-\alpha}(\beta, \beta'; (x, y)) = y^{\beta - \alpha} R_{-\beta}(\alpha, \alpha'; (x, y)) \alpha, \alpha' \in \mathbb{C}_> \quad (15)$$

$$R_{-\alpha}(\beta, \beta'; (x, y)) = x^{\beta' - \alpha} R_{-\beta'}(\alpha', \alpha; (x, y)) \alpha, \alpha' \in \mathbb{C}_> \quad (16)$$

$$R_{-\alpha}(\beta; \beta'; (x, y)) = x^{\beta' - \alpha} y^{\beta - \alpha} R_{-\alpha'}(\alpha', \alpha; (x, y)) \quad (17)$$

$$R_{-\beta - \beta'}(\beta, \beta'; (x, y)) = x^{-\beta} y^{-\beta'}. \quad (18)$$

### §3. Operadores de Integración Fraccional con la Función

$R_{-\delta}(b; t, x)$  como núcleo. Supóngase que  $\alpha$  y  $\delta$  son números reales,  $(b_1, b_2), z, z' \in \mathbb{C}$ , con  $z, z'$  simétricos respecto de la recta  $y = x$  del plano  $\mathbb{C}$ . Se definen ahora los siguientes operadores de integración fraccional que involucran la función  $R_{-\delta}(b_1, b_2; z)$  como núcleo:

$$I_{0x; z}^{\alpha; -\delta; (b_1, b_2)} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} R_{-\delta}(b_1, b_2; z) f(t) dt, \quad \alpha \geq 0 \quad (19)$$

$$= \frac{d^N}{dx^N} I_{0x; z}^{\alpha+N; -\delta; (b_1, b_2)} f, \quad \alpha < 0, N = [\alpha] \quad (20)$$

$$J_{\infty; z}^{\alpha; -\delta; (b_1, b_2)} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} (t-x)^{\alpha-1} R_{-\delta}(b_1, b_2; z') f(t) dt, \quad \alpha \geq 0, \quad (21)$$

$$= (-1)^N \frac{d^N}{dx^N} J_{\infty; z}^{\alpha+N; -s; (b_1, b_2)} f, \quad \alpha < 0, N = [1-\alpha], \quad (22)$$

donde  $f$  pertenece a la clase de funciones reales que son continuamente diferenciales sobre  $(0, \infty)$ , de manera que las integrales (19) y (20) existen y son tales que si  $f \in L_p(0, \infty)$  con  $p > 0, q < \infty, p^{-1} + q^{-1} = 1$ , entonces los operadores  $I$  y  $J$  así definidos existen y también pertenecen a  $L_p(0, \infty)$  [8].

**Casos Particulares.** Nótese que, en virtud de que  $R_0(b_1, b_2; z) = 1$ , la proposición 2,1 y las transformaciones para la función  $F(p, q; \nu; z)$  [1, págs. 556, 557] se tiene:

$$\text{i)} \quad I_{0x; z}^{\alpha; 0; (b_1, b_2)} f = R_{0x}^{\alpha} f \quad (\text{Riemann-Liouville}) \quad (23)$$

$$\text{ii)} \quad J_{\infty; z}^{\alpha; 0; (b_1, b_2)} f = W_{\infty}^{\alpha} f \quad (\text{Weyl}) \quad (24)$$

$$\text{iii)} \quad I_{0x; z}^{\alpha; -\alpha; (-n, \alpha+n)} f = I_{n, \alpha} f \quad (\text{Erdelyi-Kober}) \quad (25)$$

$$\text{iv)} \quad J_{\infty; z}^{\alpha; -\alpha; (-n, \alpha+n)} f = K_{n, \alpha} f \quad (\text{Erdelyi-Kober}) \quad (26)$$

$$\text{v)} \quad I_{0x; z}^{\alpha; -\alpha-\beta; (-n, \alpha+n)} f = I_{0x}^{\alpha, \beta, n} f \quad (\text{Saigo}) \quad (27)$$

$$\text{vi)} \quad J_{\infty; z}^{\alpha; -\alpha-\beta; (-n, \alpha+n)} f = J_{\infty}^{\alpha, \beta, n} f \quad (\text{Saigo}). \quad (28)$$

**Propiedades.** Usando la proposición 2.1 y las fórmulas de Erdelyi [5, págs. 78, 79], se tiene la siguiente ley de composición para estos operadores cuando  $\text{Re}(\alpha+\beta) > \text{Re}(\alpha) > 0$ :

$$I_{0x; z}^{\alpha; -s; (\alpha-\delta, \delta)} I_{0x; z}^{\beta; -n; (-\delta, \beta+\delta)} f = I_{0x; z}^{\alpha+\beta; -s-n; (\alpha-\delta, \beta+\delta)} f \quad (29)$$

$$J_{\infty; z}^{\alpha; -s; (\alpha-\delta, \delta)} J_{\infty; z}^{\beta; -n; (-\delta, \beta+\delta)} f = J_{\infty; z}^{\alpha+\beta; -s-n; (\alpha-\delta, \beta+\delta)} f. \quad (30)$$

**Demostración.** El lado izquierdo de (29) es:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} R_{-\delta}(\alpha-\delta, \delta; t, x) \int_0^t (t-w)^{\beta-1} R_{-n}(-\delta, \beta+\delta; w, t)^* dx$$

$$\int_0^x f(w) dw dt. \quad (31)$$

Aplicando (14) y (13) a la primera y segunda integral, respectivamente, y el Teorema de Fubini [3], la expresión (31) es:

$$\frac{x^{-\delta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x f(w) dw \int_w^x (x-t)^{\alpha-1} (t-w)^{\beta-1} t^{-n} F(\delta, \alpha-\delta; \alpha; 1-t/w) * F(n, -\delta; \beta; 1-w/t) dt. \quad (32)$$

Con el cambio de variable  $t = x - (x-w)v$  y la aplicación de las fórmulas de Erdelyi [5, pág.78] con  $\text{Re}(\alpha+\beta) > \text{Re}(\alpha) > 0$  y  $|\arg(w/x)| < \pi$ , la segunda integral de (32) es:

$$x^{-n} (x-w)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} F(\delta+n, \alpha-\delta; \alpha+\beta; 1-w/x). \quad (33)$$

Reemplazando este último resultado en (32) y aplicando nuevamente (13) se completa la demostración.

Una demostración similar vale para el operador  $J$ . ▲

Con las mismas condiciones bajo las cuales se definieron los operadores  $I$  y  $J$  se definen ahora los operadores identidad

$$I_{0x; z}^{0; 0; (b_1, b_2)} f \quad \text{y} \quad J_{\infty; z}^{0; 0; (b_1, b_2)} f \quad \text{para todo} \quad (b_1, b_2) \in \mathbb{C}.$$

En efecto:

$$I_{0x; z}^{0; 0; (b_1, b_2)} f = J_{\infty; z}^{0; 0; (b_1, b_2)} f = f(x) \quad (34)$$

por tanto, los operadores inversos son respectivamente:

$$\left[ I_{0x; z}^{\alpha; -\delta; (\alpha-\delta, \delta)} f \right]^{-1} = I_{0x; z}^{-\alpha; \delta; (\delta, \alpha-\delta)} f, \quad \alpha \geq 0, \quad (35)$$

$$\left[ J_{\infty; z}^{\alpha; -\delta; (\alpha-\delta, \delta)} f \right]^{-1} = J_{\infty; z}^{-\alpha; \delta; (\delta, \alpha-\delta)} f, \quad \alpha \geq 0. \quad (36)$$

**Propiedades Adicionales.** Haciendo uso de los resultados de la proposición 2.2 se consiguen las siguientes propiedades:

$$I_{0x; z}^{\delta; -\alpha; (\beta, \beta')} \delta = x^{\beta-\alpha} I_{0x; z}^{\delta; -\beta; (\alpha, \alpha')} \delta, \quad \alpha, \alpha' \in \mathbb{C}_> \quad (37)$$

$$I_{0x; z}^{\delta; -\alpha; (\beta, \beta')} \delta = I_{0x; z}^{\delta; -\beta'; (\alpha', \alpha)} x^{\beta' - \alpha} \delta, \quad \alpha, \alpha' \in \mathbb{C}_> \quad (38)$$

$$I_{0x; z}^{\delta; -\alpha; (\beta, \beta')} \delta = x^{\beta-\alpha} I_{0x; z}^{\delta; -\alpha'; (\alpha', \alpha)} x^{\beta' - \alpha} \delta \quad (39)$$

$$I_{0x; z}^{\delta; -\beta-\beta'; (\beta, \beta')} \delta = x^{-\beta'} R_{0x}^{\delta} x^{-\beta} \delta \quad (40)$$

$$J_{\infty; z}^{\delta; -\alpha; (\beta, \beta')} \delta = J_{\infty; z}^{\delta; -\beta; (\alpha, \alpha')} x^{\beta-\alpha} \delta, \quad \alpha, \alpha' \in \mathbb{C}_> \quad (41)$$

$$J_{\infty; z}^{\delta; -\alpha; (\beta, \beta')} \delta = x^{\beta' - \alpha} J_{\infty; z}^{\delta; -\beta'; (\alpha', \alpha)} \delta, \quad \alpha, \alpha' \in \mathbb{C}_> \quad (42)$$

$$J_{\infty; z}^{\delta; -\alpha; (\beta, \beta')} \delta = x^{\beta' - \alpha} J_{\infty; z}^{\delta; -\alpha'; (\beta', \beta)} x^{\beta - \alpha} \delta \quad (43)$$

$$J_{\infty; z}^{\delta; -\beta-\beta'; (\beta, \beta')} \delta = x^{-\beta} W_{\infty}^{\delta} x^{-\beta'} \delta. \quad (44)$$

**Resultados Particulares.** A partir de las anteriores propiedades se pueden obtener los siguientes resultados particulares:

i) Para  $\delta = \alpha$ ,  $\beta = -n$ ,  $\beta' = \alpha + n$ :

$$I_{n, \alpha} \delta = x^{-n-\alpha} I_{0x; z}^{\alpha; n; (\alpha, \alpha')} \delta, \quad \alpha, \alpha' \in \mathbb{C}_> \quad (45)$$

$$I_{n, \alpha} \delta = I_{0x; z}^{\alpha; -\alpha-n; (\alpha', \alpha)} x^n \delta, \quad \alpha, \alpha' \in \mathbb{C}_> \quad (46)$$

$$I_{n, \alpha} \delta = x^{-n-\alpha} I_{0x; z}^{\alpha; -\alpha'; (\alpha', \alpha)} x^n \delta \quad (47)$$

$$I_{n, \alpha} \delta = x^{-\alpha-n} R_{0x}^{\alpha} x^n \delta \quad (48)$$

$$K_{n, \alpha} \delta = J_{\infty; z}^{\alpha; n; (\alpha, \alpha')} x^{-n-\alpha} \delta, \quad \alpha, \alpha' \in \mathbb{C}_> \quad (49)$$

$$K_{n, \alpha} \delta = x^n J_{\infty; z}^{\alpha; -\alpha-n; (\alpha', \alpha)} \delta, \quad \alpha, \alpha' \in \mathbb{C}_> \quad (50)$$

$$K_{n, \alpha} \delta = x^n J_{\infty; z}^{\alpha; -\alpha'; (\alpha', \alpha)} x^{-n-\alpha} \delta \quad (51)$$

$$K_{n, \alpha} \delta = x^n W_{\infty}^{\alpha} x^{-n-\alpha} \delta. \quad (52)$$

ii) Para  $s = \gamma$ ,  $\alpha = \gamma + \delta$ ,  $\beta = -n$ ,  $\beta' = \gamma + n$  se tiene:

$$I_{0x}^{\gamma, \delta, n} f = x^{-n-\gamma-\delta} I_{0x; z}^{\gamma; n; (\gamma+\delta, \alpha')} f, \quad \gamma + \delta, \alpha' \in \mathbb{C}_> \quad (53)$$

$$I_{0x}^{\gamma, \delta, n} f = I_{x; z}^{\gamma; -(\gamma+n); (\alpha', \gamma+\delta)} x^{n-\delta} f, \quad \gamma + \delta, \alpha' \in \mathbb{C}_> \quad (54)$$

$$I_{0x}^{\gamma, \delta, n} f = x^{-n-\gamma-\delta} I_{0x; z}^{\gamma; -\alpha'; (\gamma+n, \alpha')} x^{n-\delta} f; \quad (55)$$

$$J_{\infty}^{\gamma, \delta, n} f = J_{\infty; z}^{\gamma; n; (\gamma+\delta, \alpha')} x^{-n-\gamma-\delta} f, \quad \gamma + \delta, \alpha' \in \mathbb{C}_> \quad (56)$$

$$J_{\infty}^{\gamma, \delta, n} f = x^{n-\delta} J_{\infty; z}^{\gamma; -\gamma-n; (\alpha', \gamma+\alpha)} f, \quad \gamma + \delta, \alpha' \in \mathbb{C}_> \quad (57)$$

$$J_{\infty}^{\gamma, \delta, n} f = x^{n-\delta} J_{\infty; z}^{\gamma; -\alpha'; (\gamma+n, \alpha')} x^{-n-\gamma-\delta} f. \quad (58)$$

**Descomposición de Operadores.** Haciendo uso de la fórmula integral para la función hipergeométrica de Gauss [1], es fácil conseguir la siguiente descomposición de los operadores  $I$  y  $J$ :

$$I_{0x; z}^{\alpha; -\gamma; (\beta, \alpha-\beta)} f = R_{0x}^{\beta} x^{-\gamma} R_{0x}^{\alpha-\beta} f, \quad \operatorname{Re}(\alpha) > \operatorname{Re}(\beta) > 0 \quad (59)$$

$$J_{\infty; z}^{\alpha; -\gamma; (\beta, \alpha-\beta)} f = W_{\infty}^{\alpha-\beta} x^{-\gamma} W_{\infty}^{\beta} f, \quad \operatorname{Re}(\alpha) > \operatorname{Re}(\beta) > 0. \quad (60)$$

**Demostración.** El segundo miembro de (59) es:

$$\frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha-\beta)} \int_0^x (x-t)^{\beta-1} t^{-\gamma} \int_0^t (t-w)^{\alpha-\beta-1} f(w) dw dt.$$

Aplicando el Teorema de Fubini [3], obtenemos:

$$\frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha-\beta)} \int_0^x f(w) dw \int_w^x (x-t)^{\beta-1} (t-w)^{\alpha-\beta-1} t^{-\gamma} dt.$$

Con el cambio de variable  $v = (x-t)/(x-w)$ , la representación integral de la función hipergeométrica de Gauss [1, pág. 558] y la aplicación de (13) se tiene:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-w)^{\alpha-1} R_{-\gamma}(\beta, \alpha-\beta; w, x) f(w) dw = I_{0x; z}^{\alpha; -\gamma; (\beta, \alpha-\beta)} f.$$

La demostración de (60) es semejante.



**54. Algoritmos Computacionales.** La necesidad de conseguir la diferintegral de un conjunto de datos experimentales discretos, conlleva al desarrollo de técnicas computacionales para tal fin. Usando diversas técnicas de integración se han desarrollado varios algoritmos para aproximar la diferintegral de orden  $\alpha$  de una función  $f$  [12, cap.8].

De todos ellos se restringirá la atención del presente trabajo a los algoritmos de Riemann-Liouville (RL) y Grünwald con interpolación de Lagrange de tres puntos (G2) cuyas fórmulas de aproximación son respectivamente [12]:

$$\frac{d^\alpha f}{dx^\alpha} \sim \frac{(x/n)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(j+1)\delta_{j-j}\delta_{j+1}}{\alpha} \left[ (j+1)^{\alpha-j\alpha} + \frac{\delta_{j+1}-\delta_j}{1-\alpha} \right] ((j+1)^{\alpha+1-j\alpha+1}) \quad (61)$$

$$\frac{d^\alpha f}{dx^\alpha} \sim \left(\frac{x}{N}\right)^\alpha \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(\alpha, j)}{\Gamma(j+1)} \left[ \delta_j - \frac{\alpha}{4}(\delta_{j-1} + \delta_{j+1}) + \frac{\alpha^2}{8}(\delta_{j-1} - 2\delta_j + \delta_{j+1}) \right] \quad (62)$$

donde  $(\alpha, j) = \Gamma(\alpha+j)/\Gamma(\alpha)$ .

Buscando una mejor aproximación que las dadas por las fórmulas RL y G2, se desarrolla, a partir de la fórmula de Grünwald modificada [12] y la fórmula de interpolación de Lagrange de cuatro puntos [2], el algoritmo G3.

Para el efecto, se considerará el intervalo  $(0, x)$  con  $x > 0$  dividido en  $N+1$  puntos igualmente espaciados y la nomenclatura utilizada para los valores numéricos de  $f$  es la misma que utiliza Oldham y Spanier [12], esto es:

$$\delta_N = f(0), \delta_{N-1} = f(x/N), \dots, \delta_j = f(x-jx/N), \dots, \delta_0 = f(x)$$

como se muestra en la figura 1.

**TEOREMA.** Si  $\delta_N, \delta_{N-1}, \dots, \delta_1, \delta_0$  son  $N+1$  valores de una función  $f$  en los puntos  $0, h, 2h, \dots, Nh, (N+1)h, (n+2)h$ , con  $h = x/N$ ,  $x > 0$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , entonces la fórmula de aproximación G3 de la diferintegral de orden  $\alpha$  en el punto  $x = Nh$  es:

$$\frac{d^\alpha f}{dx^\alpha} \sim h^\alpha \left[ \omega_0 \delta_0 + \omega_{N-2} \delta_{N-2} + \omega_{N-1} \delta_{N-1} + \omega_N \delta_N + \omega_{-2} \delta_{-2} + \omega_{-1} \delta_{-1} + \sum_{j=1}^{N-1} \omega_j \delta_j \right] \quad (63)$$

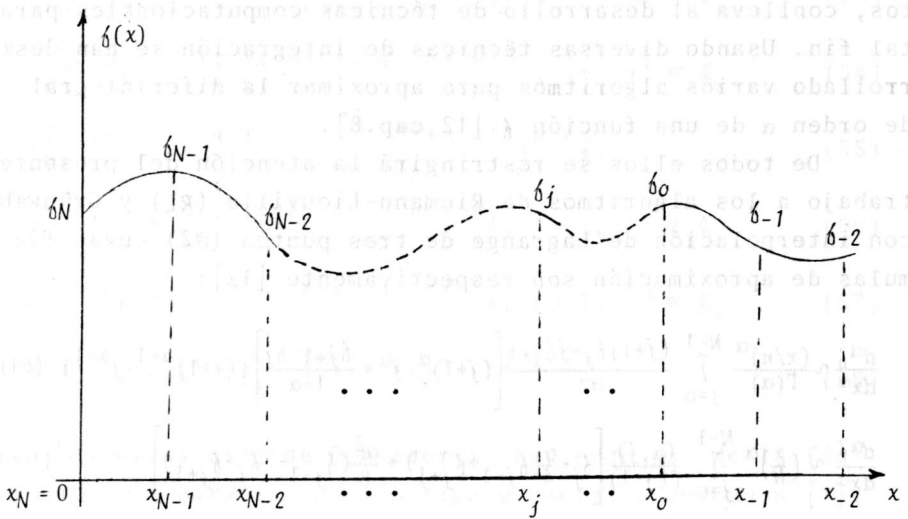


Figura 1

Nótese los valores añadidos  $x_{-1}$  y  $x_{-2}$  cuando se aplica el algoritmo G3.

donde:

$$w_0 = \frac{\alpha}{2}(\alpha+1)A_4 + \alpha A_3 + A_2 \quad (64)$$

$$w_{N-2} = \frac{(\alpha, N-1)}{\Gamma(N)} \left[ \frac{N-1}{\alpha+N-2} \frac{N-2}{\alpha+N-3} A_1 + A_2 \right] + A_3 \quad (65)$$

$$w_{N-1} = \frac{(\alpha, N-1)}{\Gamma(N)} \left[ \frac{N-1}{\alpha+N-2} A_1 + A_2 \right] \quad (66)$$

$$w_N = \frac{(\alpha, N-1)}{\Gamma(N)} A_1 \quad (67)$$

$$w_{-2} = A_4 \quad (68)$$

$$w_{-1} = \alpha A_4 + A_3 \quad (69)$$

$$w_j = \frac{(\alpha, j)}{\Gamma(j)} \left[ \frac{A_1}{\alpha+j-1} + \frac{A_2}{j} + \frac{\alpha+j}{j(j+1)(j+2)} \right] \left[ (j+2)A_3 + (\alpha+j+1)A_4 \right] \quad (70)$$

$$(18) \quad A_1 = \frac{\alpha^3}{48} + \frac{\alpha^2}{8} + \frac{\alpha}{6} \quad (71)$$

$$A_2 = -\frac{\alpha^3}{16} - \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha}{4} + 1 \quad (72)$$

$$A_3 = \frac{\alpha^3}{16} + \frac{\alpha^2}{8} - \frac{\alpha}{2} \quad (73)$$

$$A_4 = -\frac{\alpha^3}{48} + \frac{\alpha}{12} \quad (74)$$

**Demostración.** De la fórmula de Grünwld modificada [12]:

$$\frac{d^\alpha f}{dx^\alpha} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^\alpha}{N^\alpha} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(\alpha, j)}{\Gamma(j+1)} \delta \left( x - \frac{jx}{N} - \frac{\alpha x}{2N} \right) \right] \quad (75)$$

y de la fórmula de interpolación de Lagrange para cuatro puntos [2]:

$$f(x+ph) \sim \frac{p(p-1)(p-2)}{6} \delta_{-1} + \frac{(p+1)(p-2)}{2} \delta_0 - \frac{p(p+1)(p-2)}{2} \delta_1 + \frac{p(p-1)}{6} \delta_2,$$

se deduce que :

$$x = x(1-j/N)$$

$$p = -\alpha/2$$

$$h = x/N,$$

con lo cual:

$$f(x-jx/N-\alpha x/2N) \sim A_1(\alpha) \delta_{j+1} + A_2(\alpha) \delta_j + A_3(\alpha) \delta_{j-1} + A_4(\alpha) \delta_{j-2}, \quad (76)$$

donde

$$A_1(\alpha) = \alpha^3/48 + \alpha^2/8 + \alpha/6 \quad (77)$$

$$A_2(\alpha) = -\alpha^3/16 - \alpha^2/4 + \alpha/4 + 1 \quad (78)$$

$$A_3(\alpha) = \alpha^3/16 + \alpha^2/8 - \alpha/2 \quad (79)$$

$$A_4(\alpha) = -\alpha^3/48 + \alpha/12. \quad (80)$$

Reemplazando (76) en (75) y reorganizando la sumatoria se tiene:

$$\frac{d^\alpha f}{dx^\alpha} \sim \left[ \sum_{k=1}^N \frac{(\alpha, k-1)}{\Gamma(k)} A_1(\alpha) \delta_k + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(\alpha, k)}{\Gamma(k+2)} A_2(\alpha) \delta_k + \right.$$

$$+ \sum_{k=-1}^{N-2} \frac{(\alpha, k+1)}{\Gamma(k+2)} A_3(\alpha) \delta_k - \sum_{k=-2}^{N-3} \frac{(\alpha, k+2)}{\Gamma(k+3)} A_4(\alpha) \delta_k \left[ \frac{x}{N} \right]^\alpha. \quad (81)$$

Nótese ahora que para:

$$k = -2 : w_{-2} = A_4(\alpha)$$

$$k = -1 : w_{-1} = \alpha A_4(\alpha) + A_3(\alpha)$$

$$k = 0 : w_0 = 0.5\alpha(\alpha+1)A_4(\alpha) + \alpha A_3(\alpha) + A_2(\alpha)$$

$$k = N : w_N = \frac{(\alpha, N-1)}{\Gamma(N)} A_1(\alpha)$$

$$k = N-1 : w_{N-1} = \frac{(\alpha, N-1)}{\Gamma(N)} \left[ \frac{N-1}{\alpha+N-2} A_1(\alpha) + A_2(\alpha) \right]$$

$$k = N-2 : w_{N-2} = \frac{(\alpha, N-1)}{\Gamma(N)} \left[ \frac{N-1}{\alpha+N-2} \left[ \frac{N-2}{\alpha+N-3} A_1(\alpha) + A_2(\alpha) \right] + A_3(\alpha) \right]$$

$$k = j : w = \frac{(\alpha, j)}{\Gamma(j)} \left[ \frac{A_1(\alpha)}{\alpha+j-1} + \frac{A_2(\alpha)}{j} + \frac{\alpha+j}{j(j+1)(j+2)} \right] *$$

$$((j+2)A_3(\alpha) + (\alpha+j+1)A_4(\alpha)),$$

con lo cual se completa la demostración. ▲

Para todos los propósitos numéricos se tomó  $\alpha = \pm 0.5$  (semiintegral y semiderivada, respectivamente) y todo el trabajo computacional se hizo en Lenguaje Fortran de punto flotante de doble precisión, para lo cual se utilizó un equipo Burroughs B-25 con rango de almacenamiento:

$$\begin{array}{lll} 3.0D-39 & \text{a} & 1.7D-38 & \text{(Rango positivo)} \\ -1.7D-38 & \text{a} & -3.0D-39 & \text{(Rango negativo)}. \end{array}$$

Los algoritmos fueron probados con el conjunto de funciones:  $x^5$ ,  $x^8$ ,  $\ln(x)$ ,  $x \ln(x)$ , para 35 iteraciones y con valores de  $x$  comprendidos entre 0.001 y 100.00, estimándose la bondad de los mismos con la expresión del error relativo dada por Oldham y Spanier [12, pág.141].

En las páginas que siguen se muestran tablas comparativas de los valores numéricos obtenidos al aplicar los tres algoritmos mencionados, notándose la mejoría que se presenta

en el cálculo de la semidiferintegral al aplicar el algoritmo G3, contándose además con que una buena aproximación se consigue con pocas iteraciones.

Cabe hacer notar que el parámetro **opción** en el encabezamiento de las tablas que siguen, se refiere a **Semiderivada** si **SD = -1** y **Semiintegral** si **SD = 1**.

**Agradecimientos.** S.L. Kalla agradece al CONDES. y O. Meyer C. agradece a la Universidad Nacional Abierta, así como a la empresa UNISYS de Venezuela por la colaboración y el apoyo que prestaron en la realización de este trabajo.

CUADRO COMPARATIVO DE LOS VALORES CONSEGUIDOS CON LOS ALGORITMOS  
 RL, G2, G3 Y EL VALOR EXACTO DE LA SEMIDIFERINTEGRAL DE UNA FUNCION  
 PARA VALORES DE X ENTRE 0.001 Y 100.000

Nro. de Iteraciones : 35  
 Funcion a Diferintegrar :  $x^5$   
 Opcion (S.D.= -1 \*\*\* S.I.= 1) :-1

X	VAL. SDI.	VAL. ALG RL	VAL. ALG G2	VAL. ALG G3	ERR ALG RL	ERR ALG G2	ERR ALG G3
.001	.90850D-22	.89185D-22	.90947D-22	.90924D-22	.18333D-01	.10678D-02	.81509D-03
.002	.16446D-19	.16144D-19	.16463D-19	.16459D-19	.18333D-01	.10678D-02	.81509D-03
.004	.29770D-17	.29224D-17	.29802D-17	.29794D-17	.18333D-01	.10678D-02	.81509D-03
.006	.62296D-16	.61154D-16	.62363D-16	.62347D-16	.18333D-01	.10678D-02	.81509D-03
.008	.53889D-15	.52901D-15	.53947D-15	.53933D-15	.18333D-01	.10678D-02	.81509D-03
.010	.28729D-14	.28203D-14	.28760D-14	.28753D-14	.18333D-01	.10678D-02	.81509D-03
.020	.52006D-12	.51052D-12	.52061D-12	.52048D-12	.18333D-01	.10678D-02	.81509D-03
.040	.94140D-10	.92415D-10	.94241D-10	.94217D-10	.18333D-01	.10678D-02	.81509D-03
.060	.19700D-08	.19339D-08	.19721D-08	.19716D-08	.18333D-01	.10678D-02	.81509D-03
.080	.17041D-07	.16729D-07	.17059D-07	.17055D-07	.18333D-01	.10678D-02	.81509D-03
.100	.90850D-07	.89185D-07	.90947D-07	.90924D-07	.18333D-01	.10678D-02	.81509D-03
.200	.16446D-04	.16144D-04	.16463D-04	.16459D-04	.18333D-01	.10678D-02	.81509D-03
.400	.29770D-02	.29224D-02	.29802D-02	.29794D-02	.18333D-01	.10678D-02	.81509D-03
.600	.62296D-01	.61154D-01	.62363D-01	.62347D-01	.18333D-01	.10678D-02	.81509D-03
.800	.53889D+00	.52901D+00	.53947D+00	.53933D+00	.18333D-01	.10678D-02	.81509D-03
1.000	.28729D+01	.28203D+01	.28760D+01	.28753D+01	.18333D-01	.10678D-02	.81509D-03
10.000	.90850D+08	.89185D+08	.90947D+08	.90924D+08	.18333D-01	.10678D-02	.81509D-03
20.000	.16446D+11	.16144D+11	.16463D+11	.16459D+11	.18333D-01	.10678D-02	.81509D-03
50.000	.15871D+14	.15580D+14	.15888D+14	.15884D+14	.18333D-01	.10678D-02	.81509D-03
100.000	.28729D+16	.28203D+16	.28760D+16	.28753D+16	.18333D-01	.10678D-02	.81509D-03

REFERENCIAS

CUADRO COMPARATIVO DE LOS VALORES CONSEGUIDOS CON LOS ALGORITMOS  
RL, G2, G3 Y EL VALOR EXACTO DE LA SEMIDIFERINTEGRAL DE UNA FUNCION  
PARA VALORES DE X ENTRE 0.001 Y 100.000

Nro. de Iteraciones : 5  
Función a Diferintegrar :  $x \ln x$   
Opción (S.D. = -1 \*\*\* S.I. = 1) : 1

X	VAL. SDI.	VAL. ALG RL	VAL. ALG G2	VAL. ALG G3	ERR ALG RL	ERR ALG G2	ERR ALG G3
.001	-.17099D-03	-.17065D-03	-.17087D-03	-.17092D-03	.20356D-02	.70207D-03	.45294D-03
.002	-.43701D-03	-.43602D-03	-.43668D-03	-.43680D-03	.22528D-02	.74858D-03	.47288D-03
.004	-.11041D-02	-.11013D-02	-.11032D-02	-.11036D-02	.25220D-02	.80622D-03	.49757D-03
.006	-.18867D-02	-.18815D-02	-.18851D-02	-.18857D-02	.27115D-02	.84680D-03	.51496D-03
.008	-.27498D-02	-.27420D-02	-.27474D-02	-.27484D-02	.28642D-02	.87949D-03	.52897D-03
.010	-.36752D-02	-.36642D-02	-.36718D-02	-.36732D-02	.29950D-02	.90750D-03	.54097D-03
.020	-.89201D-02	-.88890D-02	-.89111D-02	-.89149D-02	.34902D-02	.10135D-02	.58640D-03
.040	-.21059D-01	-.20971D-01	-.21034D-01	-.21045D-01	.41815D-02	.11616D-02	.64984D-03
.060	-.34204D-01	-.34043D-01	-.34161D-01	-.34180D-01	.47295D-02	.12789D-02	.70012D-03
.080	-.47764D-01	-.47515D-01	-.47698D-01	-.47729D-01	.52144D-02	.13828D-02	.74461D-03
.100	-.61444D-01	-.61096D-01	-.61353D-01	-.61396D-01	.56649D-02	.14792D-02	.78594D-03
.200	-.12715D+00	-.12617D+00	-.12691D+00	-.12703D+00	.77427D-02	.19241D-02	.97658D-03
.400	-.22773D+00	-.22495D+00	-.22708D+00	-.22742D+00	.12227D-01	.28845D-02	.13881D-02
.600	-.27662D+00	-.27150D+00	-.27545D+00	-.27607D+00	.18494D-01	.42263D-02	.19630D-02
.800	-.27103D+00	-.26315D+00	-.26927D+00	-.27023D+00	.29060D-01	.64889D-02	.29325D-02
1.000	-.21091D+00	-.19990D+00	-.20850D+00	-.20984D+00	.52188D-01	.11442D-01	.50546D-02
10.000	.48105D+02	.48453D+02	.48167D+02	.48124D+02	.72357D-02	.12833D-02	.39773D-03
20.000	.18270D+03	.18368D+03	.18286D+03	.18274D+03	.53887D-02	.88773D-03	.22825D-03
50.000	.96588D+03	.96977D+03	.96646D+03	.96598D+03	.40291D-02	.59659D-03	.10351D-03
100.000	.32533D+04	.32643D+04	.32548D+04	.32535D+04	.33833D-02	.45832D-03	.44257D-04

## REFERENCIAS

- [1] Abramowitz, M., Stegun, I., *Handbook of Mathematical Functions*, Nat. Bur. Std. Appl. Math. Ser. 55. U. S. Govt. Printing Office, Washington, D.C., 1964.
- [2] Atkinson, K.E., *An Introduction to numerical Analysis*, John Wiley and Sons, New York, 1988.
- [3] Carlson, B.C., *Special Functions of Applied Mathematics* Academic Press, New York, 1977.
- [4] Carlson, B.C., *The Laplace transform of a product of Bessel functions*, SIAM J. Math. Anal., **2**, (1980), 428-435.
- [5] Erdelyi-Oberhettinger, *Higher Transcendental Functions*, Vol. 1, Mc Graw-Hill, New York, 1953.
- [6] Erdelyi, A., *Tables of Integral Transforms*, Vol 2, Mc-Graw-Hill, New York, 1954.
- [7] Kalla, S.L. and Saxena, R.K., *Integral operators involving hypergeometric functions*, Math. Z., **108**, (1969), 231-234.
- [8] Kalla, S.L., *Operators of fractional integration*, Lecture Notes in Math.798, Springer-Verlag, 1980, (Proc. Conf. on Analytic Functions). Kozubnik (Poland), 1979, 258-280.
- [9] Lether, F.G., *Algorithm for numerical calculation of semiintegral and semiderivatives*, Technical Report WLI, Math. Dept. Univ. of Georgia, (1980) 1-5.
- [10] McBride, A.C., Roach, G.F., (Ed.), *Fractional Calculus*, Pitman Advanced Publishing Program, London, 1985.
- [11] Meyer, O.E., *Estudio de Operadores de Integración Fraccional*, Tesis de Maestría, Universidad del Zulia, Facultad de Ingeniería, 1987.
- [12] Oldham, K.B., and Spanier, J., *The Fractional Calculus*, Academic Press, New York, 1974.
- [13] Ross, B., (Ed.), *Fractional Calculus and Its Applications*, Springer-Verlag, 1974.
- [14] Saigo, M.A., *A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric function*, Math. Rep., Kyushu Univ., **11**, (1978).
- [15] Saigo, M.A., *A generalization of fractional calculus*, A.C. McBride and G.F. Roach (Ed.), *Fractional Calculus*, Pitman, London, (1985), 188-198.
- [16] Saxena, R.K., *On fractional integration operators*, Math. Z., **96**, (1967), 289-291.

\*

División de Posgrado  
Facultad de Ingeniería  
Universidad del Zulia  
Maracaibo, Venezuela.

(Recibido en octubre de 1988, versión revisada en mayo de 1989).