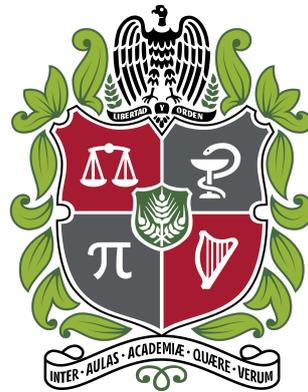


Ecuaciones diferenciales estocásticas conservativas
sobre grafos: Distribución invariante y relación con
la topología del grafo



Catalina Jaramillo Villalba

Bajo la dirección de

Jorge Mario Ramirez Osorio

Facultad de Ciencias

Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín

Tesis entregada como requisito parcial para optar por el título de

Magíster en Ciencias - Matemáticas Aplicadas

Septiembre 2019

Agradecimientos

A mis padres, por su amor y apoyo incondicional. Gracias por enseñarme a luchar sin cansancio e ir siempre tras nuestros sueños. Ustedes son mi ejemplo a seguir y mi mayor motivación. A mi abuela por su sonrisa eterna. A mi hermana por su compañía en los caminos de la vida. A Álex, por sus palabras de ánimo y por llenar de sonrisas mi vida.

A mi profesor Jorge por su tiempo, disposición y por hacer posible este proyecto.

Resumen

En este trabajo abordaremos las condiciones de necesidad y suficiencia para la existencia de una medida invariante para el proceso estocástico que da solución a la ecuación diferencial

$$dX = LX dt + dY, \quad X \in \mathbb{R}^n,$$

donde $Y = \{Y(t) : t \geq 0\}$ es un proceso de Lévy n -dimensional y $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una variación de la matriz Laplaciana de un grafo G de n vértices. L es una matriz que induce un sistema conservativo, es decir

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n X_i(t) = 0, \quad t \geq 0.$$

El objetivo es calcular la distribución invariante y analizar la relación con la topología del grafo G .

Índice general

| | |
|--|-----------|
| Introducción | 1 |
| 1. Preliminares | 5 |
| 1.1. Conceptos de álgebra lineal y ecuaciones diferenciales ordinarias | 5 |
| 1.2. Teoría de grafos | 8 |
| 1.3. Teoría de la probabilidad | 11 |
| 1.4. Procesos de Lévy | 16 |
| 1.4.1. Ejemplos de procesos de Lévy | 18 |
| 1.4.2. Medidas aleatorias de Poisson | 19 |
| 1.4.3. Descomposición de procesos de Lévy | 20 |
| 1.5. Integración estocástica | 21 |
| 2. Procesos del tipo Ornstein–Uhlenbeck y su densidad invariante | 25 |
| 3. Aplicación | 35 |
| 3.1. Convergencia | 36 |
| 3.2. Primer y segundo momentos de la distribución invariante | 44 |
| 4. Ejemplos | 47 |
| 4.1. Grafo estrella | 47 |
| 4.1.1. Simulaciones | 54 |
| 4.2. Grafo completo | 58 |
| 4.2.1. Simulaciones | 62 |
| 4.3. Grafo bipartido completo | 65 |
| 4.3.1. Simulaciones | 73 |
| Conclusiones | 77 |
| Bibliografía | 79 |

Introducción

Cuando estudiamos la dinámica de un sistema o fenómeno en la ciencia, es posible modelarla a partir de un grafo, donde cada nodo representa un individuo y las aristas manifiestan la interacción entre dos elementos del sistema. Además de la relación y comunicación generada internamente, los individuos pueden verse afectados por impulsos recibidos aleatoriamente por parte de agentes externos al grafo. Por lo tanto, para cada instante de tiempo podemos indagar sobre la probabilidad de ocurrencia de eventos sobre cada individuo, es decir, es una probabilidad que depende del tiempo.

Quisiéramos saber si existe una distribución μ_∞ asociada al sistema modelado tal que sea invariante en el tiempo, en otras palabras, si inicialmente el sistema está regido por esa distribución μ_∞ , entonces el sistema se distribuye con μ_∞ en cualquier instante de tiempo. Adicionalmente, nos interesa saber si dicha distribución invariante tiene alguna relación con la topología del grafo que modela el sistema.

Este tipo de estudios es común en diversas áreas, por ejemplo, en [2] se plantea la dinámica evolutiva de la estructura de una población finita de dos especies regidas por un proceso estocástico, que es interpretado como la presencia de mutación. Obtienen una distribución estacionaria que resulta ser para una de las especies, independiente de la estructura de la población. Otro ejemplo de aplicación es en el área de hidrología en [23], donde el modelo describe la evolución de una red interconectada del flujo entre las laderas y los arroyos en escalas de tiempo diarias; el sistema estocástico es interpretado como eventos de precipitación instantánea. Se obtiene una fórmula para la densidad invariante del flujo en función de los parámetros geofísicos de la red fluvial y las propiedades estadísticas del campo de precipitación.

Para ser más precisos, consideremos G un grafo conexo de n vértices y $L = (l_{ij})_{n \times n}$ una variación de la matriz Laplaciana de G , dada por:

$$l_{i,j} = \begin{cases} -1 & \text{si } \{i, j\} \in E, i = j \\ \frac{1}{\text{deg}(j)} & \text{si } \{i, j\} \in E, i \neq j \text{ y } v_i \text{ es adyacente a } v_j \\ 0 & \text{otro caso,} \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

donde $\text{deg}(j)$ es el grado del vértice j .

Definamos $X : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que $X_i(t)$ representa cierta cantidad presente en el nodo i en el tiempo t . Consideremos la ecuación diferencial determinista

$$dX = LXdt, \quad t \geq 0, \quad (\text{I.2})$$

que se interpreta como la dinámica de un sistema que satisface para cada nodo j

$$\sum_{i=1}^n L_{ij} X_j(t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (\text{I.3})$$

es decir, cada vértice entrega a sus vecinos el total de la cantidad $X_i(t)$ presente en el tiempo t ; a su vez, este nodo recibe una cantidad $\frac{X_j(t)}{\text{deg}(j)}$ de cada vecino j . De la Ecuación (I.3), obtenemos un sistema conservativo, es decir, para todo $t \geq 0$ la cantidad total $\sum_{i=1}^n X_i(t)$ permanece constante.

Con el fin de modelar el caso donde los nodos reciben impulsos por parte de agentes externos, consideremos ahora la ecuación diferencial estocástica

$$dX = LXdt + dY, \quad (\text{I.4})$$

en la cual $Y = \{Y(t) : t \geq 0\}$ es un proceso de Lévy n -dimensional. En este proyecto consideramos Y tal que $\mathbb{E}Y(t) = 0$, para todo $t \geq 0$; es decir, el sistema es conservativo en promedio. Resolviendo la Ecuación (I.4), obtenemos el proceso estocástico

$$X(t) = e^{Lt}X(0) + \int_0^t e^{L(t-r)}dY(r) \quad t \geq 0, \quad (\text{I.5})$$

donde X es un proceso del tipo Ornstein–Uhlenbeck de acuerdo a la definición dada en el Capítulo 1.

La medida de probabilidad límite μ_∞ de X de acuerdo al artículo [14] es

$$\mu_\infty \stackrel{d}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left[e^{Lt}X(0) + \int_0^t e^{L(t-r)}dY(r) \right], \quad (\text{I.6})$$

siempre que el límite exista, donde $\stackrel{d}{=}$ significa que son iguales en distribución.

La medida de probabilidad μ_∞ es invariante para el proceso X si, $X(0)$ tiene distribución μ_∞ , es decir, $X(0) \stackrel{d}{=} \mu_\infty$, implica que $X(t) \stackrel{d}{=} \mu_\infty$, para todo $t \geq 0$. Veremos en este trabajo que la distribución límite es invariante.

El objetivo de este proyecto es establecer las condiciones sobre el proceso Y , para garantizar la existencia del límite (I.6). Posteriormente calcularlo y relacionarlo con la topología del grafo G .

Este tipo de problemas es estudiado en [26], cuyo resultado es obtenido en particular para matrices L definidas positivas. En [14] se aborda el mismo problema de una manera más general.

Para el caso particular del presente proyecto, obtenemos que la matriz L definida en la Ecuación (I.1) tiene un valor propio $\lambda = 0$ con multiplicidad uno. La existencia de este va ligada a la condición de conservación de la cantidad presente en el sistema. Este valor propio establece las condiciones que debe satisfacer el proceso de Lévy Y para certificar la existencia de la distribución invariante. Las principales condiciones están sobre las matrices de covarianza asociadas a la descomposición del proceso Y , las cuales deben ser semidefinidas positivas; esto significa que una de las coordenadas del proceso Y puede conocerse a partir de las $n - 1$ restantes.

Para abordar el objetivo principal de este trabajo, en el primer capítulo citamos una teoría preliminar requerida para el desarrollo del proyecto. Esto incluye resultados de álgebra lineal, teoría de grafos y procesos estocásticos. En la sección de álgebra lineal citamos resultados sobre matrices semidefinidas positivas y la descomposición Canónica de Jordan. En teoría de grafos definimos la matriz Laplaciana asociada a un grafo. En la sección de probabilidad y procesos estocásticos principalmente se citan varios lemas que demuestran la existencia de una sucesión de medidas de probabilidad $\{\mu_n\}_n$ tal que convergen a la distribución límite μ_∞ ; concluyendo además que este es infinitamente divisible y puede ser caracterizado por medio de la Fórmula de Lévy-Khintchine 1.3.7. Además definimos en esta sección los procesos de Lévy y la integral estocástica.

En el segundo capítulo se citan resultados de la sección de procesos estocásticos de los preliminares con el fin de demostrar el Teorema principal 2.0.5, basados en [31]. En este teorema se exponen las condiciones de necesidad y suficiencia para la existencia de una distribución invariante asociada al proceso estocástico (I.5). Para eso

se utilizó una descomposición de \mathbb{R}^n definida en la Ecuación (2.0.22) y se obtuvo una expresión de la función característica de la distribución invariante μ_∞ en términos de la matriz L y las componentes del proceso de Lévy Y .

Teniendo conocimiento de las condiciones para la existencia de μ_∞ , en el tercer capítulo se aplican los requerimientos sobre un proceso de Lévy Y en particular, para dar una expresión de la distribución invariante del sistema modelado a partir de la ecuación diferencial estocástica (I.5). Se obtiene una expresión en términos de la topología del grafo, en particular, de los valores propios de la matriz L definida en (I.1). Además se calcularon el primer y segundo momento de μ_∞ .

Con el objetivo de comparar la teoría obtenida en este proyecto, en el último capítulo se exponen los resultados de simulaciones numéricas para algunas familias de grafos. Estos tipos de grafos fueron el estrella, el completo y el bipartido completo, los cuales fueron seleccionados por la posibilidad de caracterizar teóricamente los valores propios asociados a la matriz L y por los sistemas que estos pueden representar; por ejemplo, el grafo bipartido completo es utilizado para el modelamiento de problemas de recomendación y citación de autores, como en [15] y [7], asignación de tareas a personas [10], recrear la conectividad de dos tipos de hábitat con su modelo de selección y configuración espacial [13], entre otras. El grafo estrella puede modelar redes de abastecimiento de materias primas de una empresa. El grafo completo puede representar problemas como los estudiados en [1], que recrea la competición de tres especies en un ambiente.

Para los tres grafos se realiza una comparación de la distribución invariante respecto a cada tipo de nodo. Esto fue calculado numéricamente a través de la Transformada inversa de Fourier discreta. Además se calculó la varianza para cada grafo, presentando un análisis del cambio de la varianza respecto al tipo de nodo y la cantidad de vértices que forman el grafo.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Conceptos de álgebra lineal y ecuaciones diferenciales ordinarias

Si tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma

$$\frac{dX}{dt} = AX, \quad t \geq 0, \quad (1.1.1)$$

donde $X \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y condición inicial $X(0)$, entonces la solución es

$$X(t) = e^{At}X(0), \quad t \geq 0, \quad (1.1.2)$$

donde e^{At} se define en (1.1.3).

Definición 1.1.1. Sea A una matriz $n \times n$. Para $t \geq 0$ definimos el operador lineal exponencial de la matriz A

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}. \quad (1.1.3)$$

Con el fin de caracterizar la exponencial de una matriz, vamos a utilizar una descomposición de matrices. Antes de eso, citemos algunas características de las matrices semidefinidas positivas, cuya prueba se encuentra en [18].

Proposición 1.1.2. *Sea A una matriz real simétrica tal que el rango de A es r , que en adelante escribiremos $\text{rank } A = r$. Lo siguiente es equivalente:*

- $x^T Ax \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

- Todos los valores propios son no negativos.
- $A = B^T B$ para algún B tal que $\text{rank } B = r$.
- Todos los menores principales dominantes de A son no negativos.

Lema 1.1.3. Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es semidefinida positiva si y solo si la parte simétrica es semidefinida positiva.

Demostración. Podemos reescribir la matriz A como

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T). \quad (1.1.4)$$

donde $\frac{1}{2}(A + A^T)$ es la parte simétrica de A y $\frac{1}{2}(A - A^T)$ es la parte antisimétrica de A .

Definamos $S = \frac{1}{2}(A - A^T)$, entonces para $x \neq \mathbf{0}$

$$\begin{aligned} x^T S x &= \sum_{i,j} x_i S_{ij} x_j = - \sum_{i,j} x_i S_{ji} x_j \\ &= - \sum_{i,j} x_j S_{ji} x_i = -x^T S x. \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

De lo anterior obtenemos que $x^T S x = 0$.

Por otro lado, como la matriz $M = \frac{1}{2}(A + A^T)$ es simétrica, entonces, por resultados dados en [18], la matriz M es diagonalizable, es decir, existe matriz unitaria U y una matriz diagonal D tal que $M = U^T D U$. Además, la matriz D se puede descomponer como $D = \sqrt{D} \sqrt{D}$, donde \sqrt{D} es matriz diagonal.

Teniendo en cuenta lo anterior, obtenemos para $x \neq \mathbf{0}$

$$\begin{aligned} x^T M x &= x^T \left(U^T \sqrt{D} \sqrt{D} U \right) x \\ &= \left(\sqrt{D} U x \right)^T \left(\sqrt{D} U x \right). \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

La Ecuación (1.1.6) representa la norma del vector $\sqrt{D} U x$; por lo tanto, obtenemos $x^T M x \geq 0$.

Teniendo en cuenta lo anterior, para $x \neq \mathbf{0}$ se sigue

$$\begin{aligned} x^T A x &= x^T \frac{1}{2}(A + A^T)x + \frac{1}{2}x^T(A - A^T)x \\ &= x^T \frac{1}{2}(A + A^T)x \geq 0. \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

Logrando así el resultado esperado. ☑

Definición 1.1.4. Una matriz $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nilpotente de orden k es aquella tal que $N^{k-1} \neq 0$ y $N^k = 0$.

El siguiente teorema es fundamental para el proyecto. El objetivo de este es extraer una caracterización de la exponencial de una matriz A . La prueba de este teorema se encuentra en [18] (Sección 7.8).

Teorema 1.1.5 (Descomposición Canónica de Jordan). Para cada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con distintos valores propios $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$ y para P matriz no singular dada por

$$P_s = \begin{bmatrix} | & & | & | \\ v_1 & \dots & v_{n-1} & v_n \\ | & & | & | \end{bmatrix}, \quad (1.1.8)$$

siendo $\{v_1, \dots, v_n\}$ los valores propios de A , definimos la matriz Λ

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} J(\lambda_1) & & & \\ & J(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\lambda_s) \end{bmatrix}. \quad (1.1.9)$$

Esta matriz Λ es diagonal por bloques, donde cada $J(\lambda_j) = N(\lambda_j) + \lambda_j I$ con $N(\lambda_j)$ matriz nilpotente dada por

$$N(\lambda_j) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.1.10)$$

La submatriz $J(\lambda_j)$ se denomina el segmento de Jordan asociado al valor propio λ_j . Cada bloque es de la forma

$$J(\lambda_j) = \begin{bmatrix} J_1(\lambda_j) & & & \\ & J_2(\lambda_j) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s(\lambda_j) \end{bmatrix} \quad (1.1.11)$$

donde $s = \dim(A - \lambda_j I)$ y con

$$J_i(\lambda_j) = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_j \end{bmatrix}. \quad (1.1.12)$$

El número de bloques de tamaño $i \times i$ es $v_i(\lambda_j) = r_{i-1} - 2r_i + r_{i+1}$, donde $r_k = \text{rank}((A - \lambda_j I)^k)$.

Teniendo en cuenta el Teorema anterior, de la definición de exponencial de una matriz, cada bloque $e^{J(\lambda_i)t} = e^{\lambda_i I t} e^{N_i t}$ satisface

$$e^{J(\lambda_i)t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & e^{\lambda_i t} t & e^{\lambda_i t} \frac{t^2}{2!} & \dots & e^{\lambda_i t} \frac{t^{k_i}}{k_i!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & e^{\lambda_i t} \frac{t^2}{2!} \\ & & & \ddots & e^{\lambda_i t} t \\ & & & & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}. \quad (1.1.13)$$

Así pues, por la forma de Jordan, la ecuación (1.1.2) puede escribirse como

$$X(t) = P \text{diag} [e^{J(\lambda_1)t}, \dots, e^{J(\lambda_s)t}] P^{-1} X(0) \quad t \geq 0. \quad (1.1.14)$$

La ecuación anterior nos servirá para caracterizar el problema de interés dado en el Capítulo 2.

1.2. Teoría de grafos

Un grafo es una pareja ordenada $G = (V, E)$ tal que $E \subseteq [V]^2$, esto es, los elementos de E son parejas pertenecientes a V . Los elementos de V son **vértices** o nodos del grafo G y los elementos de E son las **aristas** o líneas. El boceto de un grafo consta de puntos que representan los vértices y se unen por medio de líneas correspondientes a las aristas.

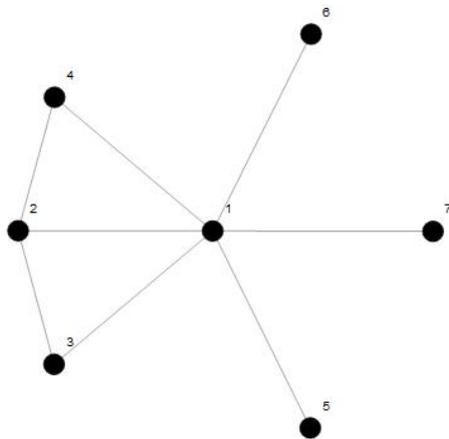


Figura 1.1: $V = \{1, 2, \dots, 7\}$, $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{1, 7\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}\}$

El ejemplo de la Figura 1.1 tiene 7 nodos y 8 aristas. Decimos que un vértice es adyacente o **vecino** a otro nodo v si están conectados mediante una arista. El conjunto vecino o **vecindad** de un vértice v , denotado $N(v)$ son aquellos vértices que se conectan con v . De la Figura 1.1 el vértice 6 es vecino de 1 y el vecindad de 2 es $N(2) = \{1, 3, 4\}$. El **grado** de un vértice v , denotado $\deg(v)$ es el número de aristas incidentes a v . Del ejemplo del grafo dado en la Figura 1.1, $\deg(1) = 6$.

Un **camino** es una secuencia de vértices de un grafo, siempre que exista una arista entre cada vértice y el siguiente. Del ejemplo anterior, uno de los caminos que conectan los vértices 2 y 5 es $(2, 4, 1, 5)$. Decimos que un grafo G es **conexo** si para cada par de vértices existe un camino de uno hacia el otro. El grafo de la Figura 1.1 es conexo y el de la Figura 1.2 es no conexo. Cada subgrafo conexo maximal lo llamamos **componente**.

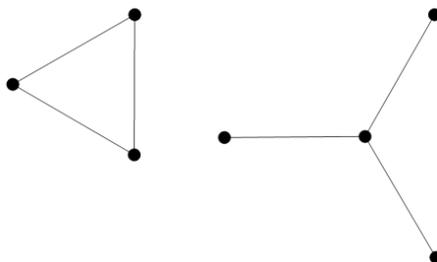


Figura 1.2: Grafo no conexo de 2 componentes

Dado un grafo G de n vértices, la **matriz Laplaciana** $\tilde{L} := (\tilde{l}_{ij})_{n \times n}$ se define como

$$\tilde{l}_{i,j} = \begin{cases} \deg(i) & \text{si } \{i, j\} \in E, i = j \\ -1 & \text{si } \{i, j\} \in E, i \neq j \text{ y } v_i \text{ es adyacente a } v_j \\ 0 & \text{otro caso,} \end{cases} \quad (1.2.1)$$

Del ejemplo dado por la Figura 1.1, la matriz Laplaciana asociada al grafo es

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.2.2)$$

Si G es un grafo no conexo, entonces la matriz Laplaciana es diagonal por bloques, donde cada bloque representa la matriz Laplaciana de cada componente. Veamos un resultado referente a los valores propios de la matriz Laplaciana de un grafo G dado en [12] (Sección 1) y [17] (Sección 2).

Proposición 1.2.1. *Sea G un grafo de n vértices. Si G es conexo, entonces el segundo valor propio de la matriz Laplaciana satisface $\lambda_2 > 0$. Si $\lambda_i = 0$ y $\lambda_{i+1} \neq 0$, entonces el grafo G es no conexo y tiene i componentes.*

Definición 1.2.2. Sean G un grafo conexo de n vértices y $L(G) := (l_{ij})_{n \times n}$ dada por la siguiente variación de la matriz Laplaciana de G

$$l_{i,j} = \begin{cases} -1 & \text{si } \{i, j\} \in E, i = j \\ \frac{1}{\deg(j)} & \text{si } \{i, j\} \in E, i \neq j \text{ y } v_i \text{ es adyacente a } v_j \\ 0 & \text{otro caso,} \end{cases} \quad (1.2.3)$$

Veamos algunas características de esta matriz L .

Lema 1.2.3. *Si G es un grafo conexo de n vértices, entonces $L(G)$ tiene valor propio cero de multiplicidad geométrica uno.*

Demostración. Dado que G es conexo, entonces la matriz Laplaciana de G no es diagonal por bloques. Por construcción de $L(G)$, las columnas de la matriz suman cero, es decir

$$L(G)^T \mathbf{1} = \mathbf{0}; \quad (1.2.4)$$

por lo tanto es una matriz singular. Como $\mathbf{1}$ es vector propio de $L(G)^T$, entonces cada i -ésima fila es combinación lineal de las $n - 1$ filas restantes. En consecuencia $\text{rank}(L^T) = \text{rank}(L) = n - 1$. Luego, $\dim(\ker(L)) = n - \text{rank}(L) = 1$, es decir, el valor propio $\lambda = 0$ tiene multiplicidad geométrica 1.

□

Proposición 1.2.4. *La matriz $L(G)$ es semidefinida negativa.*

Demostración. La proposición es equivalente a probar que $-L$ es semidefinida positiva. Con base en el Lema 1.1.3, procedemos a demostrar que la parte simétrica de $-L$ es semidefinida positiva utilizando las equivalencias de la Proposición 1.1.2. Vamos a verificar que todos los menores principales dominantes son no negativos.

Probemos entonces por inducción sobre el índice de la submatriz.

Para $n = 2$: Existen dos casos, si la arista v_1v_2 existe o no. Denotemos

$$\mathbb{1}_{v_iv_j} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{i, j\} \in E, i \neq j \text{ y } v_i \text{ es adyacente a } v_j \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (1.2.5)$$

Así que el menor principal de la parte simétrica de $-L$ es

$$\det \left\{ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\mathbb{1}_{v_1v_2}}{\deg(v_2)} \\ -\frac{\mathbb{1}_{v_1v_2}}{\deg(v_1)} & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\mathbb{1}_{v_1v_2}}{\deg(v_1)} \\ -\frac{\mathbb{1}_{v_1v_2}}{\deg(v_2)} & 1 \end{bmatrix} \right\} \geq 0. \quad (1.2.6)$$

Supongamos por hipótesis de inducción que se cumple para k . De tal manera que el menor principal de orden $k + 1$ está dado por

$$\det \left[\begin{array}{ccc|ccc} & & & -\frac{\mathbb{1}_{v_1v_{k+1}}}{2 \deg(k+1)} & -\frac{\mathbb{1}_{v_{k+1}v_1}}{2 \deg(1)} & \\ & & & \vdots & \vdots & \\ & & & \vdots & \vdots & \\ & & & & & \\ & & -\widehat{L}_k & & & \\ \hline -\frac{\mathbb{1}_{v_{k+1}v_1}}{2 \deg(1)} & -\frac{\mathbb{1}_{v_1v_{k+1}}}{2 \deg(k+1)} & \dots & & & 1 \end{array} \right]. \quad (1.2.7)$$

Si realizamos operaciones elementales entre filas para que la última columna tenga ceros en las primeras k filas, se sigue por hipótesis de inducción

$$\det(-\widehat{L}_{k+1}) = (-1)^{2k+2} \det(-\widehat{L}_k) \geq 0. \quad (1.2.8)$$

Por lo tanto, los menores principales dominantes son no negativos. Por la Proposición 1.1.2 obtenemos el resultado.

☑

1.3. Teoría de la probabilidad

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Una variable aleatoria es una función $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, para todo $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, donde \mathcal{B} denota la sigma álgebra de Borel de \mathbb{R}^n . Definamos algunos atributos de la variable aleatoria X .

La **distribución** μ_X de X es la medida de probabilidad de Borel en \mathbb{R}^n dada por

$$\mu_X = \mathbb{P} \circ X^{-1}. \quad (1.3.1)$$

Definimos el valor medio o **valor esperado** de la variable aleatoria X

$$\mathbb{E} \{X\} = \int_{\Omega} X(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} x \mu_X(dx). \quad (1.3.2)$$

Establecemos también el p -ésimo momento de la variable aleatoria X dada por $\mathbb{E}\{X^p\}$. Otro atributo de la variable aleatoria X es la **función característica** definida

$$\phi_X(s) := \mathbb{E}\{e^{is \cdot X}\}, \quad s \in \mathbb{R}^n, i = \sqrt{-1}. \quad (1.3.3)$$

Nótese que $\phi_X(0) = 1$. La transformada de Fourier de la distribución de X es igual a

$$\widehat{\mu}_X(s) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot s} \mu_X(dx). \quad (1.3.4)$$

Así que en el presente documento, para referirnos a la función característica de X usaremos ϕ_X ó $\widehat{\mu}_X$.

Si X y Y son variables aleatorias independientes, entonces $\mu_{XY} = \mu_X \times \mu_Y$, donde \times denota la medida producto. Escribimos $X \perp\!\!\!\perp Y$. La distribución de $X + Y$ satisface

$$\mu_{X+Y}(A) = (\mu_X * \mu_Y)(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \mu_Y(A - x) \mu_X(dx), \quad A \in \mathcal{F}, \quad (1.3.5)$$

asimismo, la función característica satisface

$$\phi_{X+Y}(s) = \phi_X(s) \phi_Y(s), \quad s \in \mathbb{R}^n. \quad (1.3.6)$$

Otro resultado importante que se puede extraer a partir de las funciones características es el Teorema de Inversión de Lévy presentado en [28] (Corolario 6.13).

Teorema 1.3.1 (Teorema de Inversión de Lévy). *Dos variables aleatorias tienen la misma distribución si y solo si tienen la misma función característica.*

Existe una relación entre la derivada de la función característica en $s = \mathbf{0}$ y el p -ésimo momento de X citada en la siguiente proposición, cuya prueba se encuentra en [28] (Teorema 6.4) y [3] (Sección 1.1.6).

Proposición 1.3.2. *Sea ϕ la función característica de la variable aleatoria $X \in \mathbb{R}^n$. Si $\mathbb{E}\{|X|^k\} < \infty$ para $k \in \mathbb{N}$, entonces ϕ es k veces diferenciable y además para $n = 1, \dots, k$*

$$\left. \frac{\partial^n}{\partial s_j^n} \phi(s) \right|_{s=0} = i^n \mathbb{E}\{X_j^n\}. \quad (1.3.7)$$

Definición 1.3.3. Una sucesión de medidas de probabilidad $\{\mu_n\}_n$ converge **débilmente** a una medida μ_∞ si para toda función continua y acotada,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f d\mu_n = \int f d\mu_\infty. \quad (1.3.8)$$

Escribimos $\mu_n \Rightarrow \mu_\infty$.

El siguiente Teorema nos guiará en el establecimiento de las condiciones que deben satisfacer las funciones características de una sucesión de variables aleatorias para la existencia de la distribución límite. La prueba se encuentra en [28] (Teorema 1.1.14).

Teorema 1.3.4 (Continuidad de Lévy). Si $\{\phi_n\}_n$ es una sucesión de funciones características y existe una función $\phi_\infty : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ tal que ϕ_∞ es continua en $s = 0$, y para todo $s \in \mathbb{R}^n$ $\phi_n(s) \rightarrow \phi_\infty(s)$ cuando $n \rightarrow \infty$, entonces ϕ_∞ es la función característica de una variable aleatoria, es decir $\mu_n \Rightarrow \mu_\infty$.

Ya contamos con unos requerimientos para la existencia del límite de una sucesión de medidas de probabilidad. Vamos a definir la siguiente caracterización de variables aleatorias.

Definición 1.3.5. Una variable aleatoria X se dice *infinitamente divisible* si para cada $n \in \mathbb{N}$, existen n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $Y_1^{(n)}, Y_2^{(n)}, \dots, Y_n^{(n)}$, cuya suma tiene igual distribución a la de X . Denotemos $\stackrel{d}{=}$ para especificar que dos variables aleatorias tienen la misma distribución. Por lo tanto, para X escribimos

$$X \stackrel{d}{=} Y_1^{(n)} + \dots + Y_n^{(n)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.3.9)$$

De la definición anterior podemos concluir que toda variable aleatoria cuya función característica sea una exponencial, es infinitamente divisible. Si la función característica está dada por

$$\phi_X(s) = e^{\rho(s)}, \quad s \in \mathbb{R}^n, \quad (1.3.10)$$

podemos reescribirlo como

$$\phi_X(s) = \underbrace{e^{\rho(s)/n} \dots e^{\rho(s)/n}}_{n \text{ veces}}, \quad n \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{R}^n, \quad (1.3.11)$$

donde cada $e^{\rho(s)/n} = \phi_{Y_i}$ es la función característica de una variable aleatoria Y_i . Como obtenemos el producto de n funciones ϕ_{Y_i} para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, entonces por

la propiedad dada en la Ecuación (1.3.6), se sigue que las variables aleatorias $\{Y_i\}_{i=1}^n$ son independientes y por el Teorema de Inversión de Lévy 1.3.1 son idénticamente distribuidas; concluyendo que X es infinitamente divisible. En la Sección 1.4 citamos algunos ejemplos de este tipo de variables aleatorias.

Veamos ahora una fórmula que nos da una caracterización de las variables aleatorias infinitamente divisibles de acuerdo a su función característica. Primero definamos lo siguiente.

Definición 1.3.6. Sea π una medida de Borel definida en $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Decimos que π es una medida de Lévy si

$$\int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} \min\{|x|^2, 1\} \pi(dx) < \infty. \quad (1.3.12)$$

De la definición anterior, si tomamos $0 < \epsilon \leq 1$, entonces $\min\{|x|^2, \epsilon\} \leq \min\{|x|^2, 1\}$, por lo tanto

$$\pi((-\epsilon, \epsilon)^c) < \infty, \quad \forall \epsilon > 0. \quad (1.3.13)$$

Por lo cual, $\min\{|x|^2, 1\}$ puede ser reemplazado por cualquier función que tenga un comportamiento cuadrático al rededor del cero y acotada en el complemento. Además, en [3] (Sección 1.2.4) se puede verificar toda medida finita en $\mathbb{R}^n - \{0\}$ es una medida de Lévy. Teniendo en cuenta lo anterior, lo siguiente es equivalente para definir una medida de Lévy

$$\int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} \frac{|x|^2}{1 + |x|^2} \pi(dx) < \infty. \quad (1.3.14)$$

Veamos ahora la caracterización de las variables aleatorias infinitamente divisibles y su función característica. La demostración del siguiente teorema se puede revisar en [25] (Teorema 8.1). Denotemos

$$B_r := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}. \quad (1.3.15)$$

Teorema 1.3.7 (Fórmula de Lévy-Khintchine). *Una variable aleatoria X es infinitamente divisible si y solo si existe una tripleta (a, R, π) , donde $a \in \mathbb{R}^n$, $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz semidefinida positiva y π es una medida de Lévy, tales que para*

todo $s \in \mathbb{R}^n$ la función característica está dada por

$$\phi_X(s) = \exp \left\{ i \langle a, s \rangle - \frac{1}{2} \langle s, R s \rangle + \int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} [e^{i \langle s, x \rangle} - 1 - i \langle s, x \rangle \mathbb{1}_{B_1}(x)] \pi(dx) \right\}. \quad (1.3.16)$$

Escribiendo la ecuación anterior $\phi_X(s) = e^{\eta(s)}$, llamamos $\eta : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C}$ como el **Símbolo de Lévy de X** , escribimos $\text{Symb}(X) = \eta$.

Citemos ahora un resultado dado en [31] (Lema 3), en el cual se caracteriza la convergencia de variables aleatorias infinitamente divisibles. Para eso tendremos en cuenta el siguiente concepto.

Definición 1.3.8. Una sucesión de medidas $\{\mu_n\}_n$ es creciente si para todo A perteneciente a la σ -álgebra de Borel de \mathbb{R}^n y para todo $n \in \mathbb{N}$ satisface

$$\pi_{n+1}(A) \geq \pi_n(A). \quad (1.3.17)$$

Teorema 1.3.9. Tomemos una sucesión $\{\mu_n\}_n$ de distribuciones infinitamente divisibles, tal que cada $\widehat{\mu}_n(s)$ es representado a través de la Fórmula de Lévy-Khintchine por medio de la tripleta (a_n, R_n, π_n) . Sea μ una medida de probabilidad en \mathbb{R}^n . Entonces $\mu_n \rightarrow \mu$ si y solo si μ es infinitamente divisible y $\widehat{\mu}$ se representa a través de la tripleta (a, R, π) obtenida de la Fórmula de Lévy-Khintchine, donde a, R, π satisfacen las siguientes condiciones

I) Si f es acotada, continua y se anula en 0, entonces

$$\int f(x) \frac{|x|^2}{1 + |x|^2} \pi_n(dx) \rightarrow \int f(x) \frac{|x|^2}{1 + |x|^2} \pi(dx). \quad (1.3.18)$$

II) Para $s \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle R_n s, s \rangle + \int \frac{\langle s, x \rangle^2}{1 + |x|^2} \pi_n(dx) \rightarrow \langle R s, s \rangle + \int \frac{\langle s, x \rangle^2}{1 + |x|^2} \pi(dx). \quad (1.3.19)$$

Si $\{\pi_n\}_n$ es creciente, entonces es equivalente a $\langle R_n s, s \rangle \rightarrow \langle R s, s \rangle$.

III) $a_n \rightarrow a$.

1.4. Procesos de Lévy

Sean $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $\{X(t) : t \geq 0\}$ colección de variables aleatorias definidas todas en el mismo espacio de probabilidad. A esta sucesión la llamamos **proceso estocástico**. Estos son utilizados para modelar la evolución en el tiempo de fenómenos aleatorios.

Definición 1.4.1. Un proceso estocástico $\{X(t) : t \geq 0\}$ tiene incrementos independientes si $X(t_2) - X(t_1) \perp\!\!\!\perp X(t_1) - X(t_0)$, para todo $t_0 < t_1 < t_2$. Los incrementos son estacionarios si para cada t , la distribución de $X(s+t) - X(s)$ es independiente de s .

Definición 1.4.2. $Y = \{Y(t) : t \geq 0\}$ es un proceso de Lévy si satisface

- I) $Y(0) = 0$ con probabilidad 1 (escribimos c.p.1),
- II) tiene incrementos independientes y estacionarios,
- III) X es estocásticamente continuo, es decir, para todo $a > 0$ y $s \geq 0$

$$\lim_{t \rightarrow s} \mathbb{P}(|X(t) - X(s)| > a) = 0. \quad (1.4.1)$$

- IV) Las trayectorias son continuas por derecha y el límite por izquierda, denotado como $X(t^-)$, existe c.p.1 para todo $t \geq 0$.

La condición de incrementos independientes y estacionarios sobre los procesos de Lévy implica que este es un proceso de Markov. La prueba de la existencia de una medida de probabilidad que satisface las condiciones que definen un proceso de Lévy se puede revisar en [25] y [3].

Vamos a establecer una de las caracterizaciones más importantes de procesos de Lévy que relaciona variables aleatorias infinitamente divisibles, su función característica y dichos procesos. Para eso tomamos un proceso de Lévy X y calculamos la función característica de $X(t)$ con $t \geq 0$. Para eso necesitamos el siguiente lema dado en [3] (Lema 1.3.2).

Lema 1.4.3. Si $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es un proceso estocásticamente continuo, entonces el mapeo $t \mapsto \phi_{X(t)}(s)$ es continuo para cada $s \in \mathbb{R}^n$, donde $\phi_{X(t)}$ es la función característica de $X(t)$.

Teniendo en cuenta la Fórmula de Lévy-Khintchine, a partir de la siguiente proposición podemos concluir que para toda variable aleatoria infinitamente divisible existe un Proceso de Lévy con la misma distribución. La prueba está basada en los resultados de [3].

Teorema 1.4.4. *Si X es un proceso de Lévy, entonces $X(t)$ es infinitamente divisible para cada $t \geq 0$. En particular, podemos escribir la función característica de $X(t)$ de la forma*

$$\phi_{X(t)}(u) = e^{t\eta(u)} \quad u \in \mathbb{R}^n, t \geq 0, \quad (1.4.2)$$

donde la función η es el símbolo de Lévy de $X(1)$.

Demostración. Por definición X tiene incrementos estacionarios e independientes, por lo tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $t \geq 0$ podemos escribir

$$X(t) = X\left(\frac{t}{n}\right) + \left(X\left(\frac{2t}{n}\right) - X\left(\frac{t}{n}\right)\right) + \cdots + \left(X(t) - X\left(\frac{(n-1)t}{n}\right)\right), \quad (1.4.3)$$

obteniendo que es infinitamente divisible. Por otro lado, por definición de función característica y teniendo en cuenta que los incrementos son independientes y estacionarios, podemos escribir para $u \in \mathbb{R}^n$ y $t, s \geq 0$

$$\begin{aligned} \phi_{X(t+s)}(u) &= \mathbb{E} \left\{ e^{iuX(t+s)} \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ e^{iu(X(t+s)-X(t))} e^{iuX(t)} \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ e^{iuX(s)} e^{iuX(t)} \right\} \\ &= \phi_{X(s)}(u) \phi_{X(t)}(u). \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

Por definición de función característica $\phi_{X(t)}(0) = 1$. Dado que X es proceso de Lévy, entonces es estocásticamente continua, así que por Lema 1.4.3, $\phi_{X(t)}$ es continua. Por resultados dados en [3], la única solución a la Ecuación (1.4.4) es $\phi_{X(t)}(u) = e^{t\eta(u)}$. Dado que $X(1)$ es infinitamente divisible, entonces por la Fórmula de Lévy-Khintchine, η es el Símbolo de Lévy de $X(1)$.

□

Dado un proceso de Lévy $X = \{X(t) : t \geq 0\}$, denotemos φ_X como el símbolo de $X(1)$. En adelante escribiremos el Símbolo de Lévy de $X(t)$ como

$$\text{Symb}(X(t)) = t\text{Symb}(X(1)) = t\varphi_X, \quad t \geq 0. \quad (1.4.5)$$

1.4.1. Ejemplos de procesos de Lévy

Los siguientes son procesos de Lévy:

Definición 1.4.5. Sea $W = \{W(t) : t \geq 0\}$ un proceso estocástico con $W(t) \in \mathbb{R}^n$. W es un **movimiento Browniano** estándar con matriz de covarianza $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si la función característica de $W(t)$ satisface

$$\phi_{W(t)}(s) = \exp \left\{ t \left(-\frac{1}{2} s^T \Sigma s \right) \right\}, \quad s \in \mathbb{R}^n, t \geq 0. \quad (1.4.6)$$

W se caracteriza por $W(0) = 0$ c.p.1, el mapeo $t \mapsto W(t)$ es continuo c.p.1, los incrementos son independientes y estacionarios y $W(t+s) - W(t)$ es distribuido como normal con media cero y matriz de covarianza tI , escribimos $N(\mathbf{0}, tI)$.

Sean $a \in \mathbb{R}^n$ y $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica y semidefinida positiva. Decimos que X es un movimiento Browniano con deriva a o el cambio promedio de X y matriz de difusión $\sqrt{\Sigma}$, si la función característica de $X(t)$ satisface

$$\phi_{X(t)}(s) = \exp \left\{ t \left(i \langle a, s \rangle - \frac{1}{2} s^T \Sigma s \right) \right\}, \quad s \in \mathbb{R}^n, t \geq 0. \quad (1.4.7)$$

Podemos escribir $X(t) = at + \sqrt{\Sigma}W(t)$. Los incrementos de X se distribuyen como una normal con media $t\mu$ y matriz de covarianza $t\Sigma = t\sqrt{\Sigma} \cdot (\sqrt{\Sigma})^T$.

Definición 1.4.6. Sea $\lambda > 0$. $\{N(t) : t \geq 0\}$ es un proceso de **Poisson** con intensidad λ si su función característica satisface

$$\phi_{N(t)}(s) = \exp \{ \lambda t (e^{is} - 1) \}, \quad s \in \mathbb{R}, t \geq 0. \quad (1.4.8)$$

N es un proceso estocástico que toma valores en $\mathbb{N} \cup \{0\}$, es constante a tramos y creciente, continuo por derecha y tiene incrementos independientes, tales que $N(t) - N(s)$ se distribuyen Poisson($\lambda(t-s)$), para $t > s \geq 0$. Decimos que N tiene un salto en t si $N(t) > N(t^-)$. Los tiempos entre saltos siguen una distribución exponencial con parámetro λ .

Definición 1.4.7. Sean $\lambda > 0$ y $\{Y_n : n \geq 0\}$ una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con $Y_n \sim f_Y$ y con función característica ϕ_Y . Decimos que Z es un proceso de **Poisson compuesto** si la función característica de $Z(t)$ satisface

$$\phi_{Z(t)}(s) = \exp \{ \lambda t (\phi_Y(s) - 1) \}, \quad s \in \mathbb{R}^n, t \geq 0. \quad (1.4.9)$$

El proceso estocástico Z se puede escribir

$$Z(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n \quad t \geq 0, \quad (1.4.10)$$

donde $N(t)$ es una variable aleatoria que representa el número de saltos que han ocurrido hasta el instante t .

1.4.2. Medidas aleatorias de Poisson

Sea $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ un proceso de Lévy. Sabemos que X es continuo y $X(t^-)$ existe. El proceso de los saltos $\Delta X = \{\Delta X(t) : t \geq 0\}$ se define

$$\Delta X(t) = X(t) - X(t^-), \quad t \geq 0. \quad (1.4.11)$$

Con el propósito de contar el número de saltos del proceso X de un tamaño específico, definimos el siguiente concepto.

Definición 1.4.8. La **medida aleatoria de Poisson** N asociada a los saltos de X es

$$N(t, A) = \sum_{0 \leq s \leq t} \mathbb{1}_A(\Delta X(s)), \quad t \geq 0, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n - \{0\}). \quad (1.4.12)$$

Por lo tanto, para $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n - \{0\})$, $N(t, A)$ es el número de parejas $(s, \Delta X(s)) \in [0, t] \times A$.

Para cada $t > 0$ y $\omega \in \Omega$, $N(t, \cdot)(\omega)$ es una medida de conteo en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n - \{0\})$. Por otro lado,

$$\mathbb{E} \{N(t, A)\} = \int N(t, A)(\omega) \mathbb{P}(d\omega) \quad (1.4.13)$$

es una medida de Borel en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n - \{0\})$. Denotamos $\pi(\cdot) = \mathbb{E} \{N(1, \cdot)\}$ como la medida de intensidad de N . De acuerdo a resultados obtenidos en [3], π es una medida de Lévy.

A partir de la siguiente proposición podemos concluir que los procesos de Poisson pueden ser construidos a partir de la medida de Poisson. Este resultado se sigue en [3].

Proposición 1.4.9. *Si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n - \{0\})$ tal que $0 \notin \bar{A}$, entonces $\{N(t, A) : t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson con intensidad $\pi(A)$.*

Sean $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función Borel medible y $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n - \{0\})$ tal que $0 \notin \bar{A}$. Definimos la **integral de Poisson** de f :

$$\int_A f(x)N(t, dx) := \sum_{0 \leq u \leq t} f(\Delta X(u)) \mathbb{1}_{\Delta X(u) \in A}. \quad (1.4.14)$$

A través de la siguiente proposición dada en [3], concluimos que un proceso de Poisson compuesto puede formarse a través de la integral de Poisson.

Proposición 1.4.10. *Sea $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n - \{0\})$ tal que $0 \notin \bar{A}$. Para cada $t \geq 0$, $\int_A f(x)N(t, dx)$ es un proceso de Poisson compuesto tal que para cada $s \in \mathbb{R}^n$*

$$\mathbb{E} \left\{ \exp \left[i \left\langle s, \int_A f(x)N(t, dx) \right\rangle \right] \right\} = \exp \left[t \int_A (e^{i\langle s, x \rangle} - 1) \pi_f(dx) \right], \quad (1.4.15)$$

donde $\pi_f = \pi \circ f^{-1}$.

Definición 1.4.11. Sea N una medida de Poisson. Para cada $t \geq 0$ y $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n - \{0\})$ tal que $0 \notin \bar{A}$, definimos la **medida de Poisson compensada**

$$\tilde{N}(t, A) = N(t, A) - t\pi(A), \quad (1.4.16)$$

donde $\pi(A) = \mathbb{E}(N(1, A))$ es la intensidad del proceso de Poisson $\{N(t, A) : t \geq 0\}$.

De acuerdo a resultados obtenidos en [3], $\{\tilde{N}(t, A) : t \geq 0\}$ es una martingala respecto a la filtración natural del mismo proceso X dada por $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X(s) : s \leq t\}$.

1.4.3. Descomposición de procesos de Lévy

Continuemos con otras caracterizaciones de los procesos de Lévy. El teorema expuesto a continuación nos proporciona una forma de escribir todo proceso de Lévy. La demostración del resultado se encuentra en [3]. En el presente trabajo nos restringimos a procesos de Lévy con medida finita.

Teorema 1.4.12 (Descomposición de Lévy-Itô). *Si Y es un proceso de Lévy, entonces existe $b \in \mathbb{R}^n$, un movimiento Browniano W , una matriz $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$, una*

medida de Poisson N en $\mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R}^n - \{0\})$ y una medida de Lévy π tal que ,

$$Y(t) = at + \sqrt{R}W(t) + \int_{|x| \geq 1} xN(t, dx) + \int_{|x| < 1} x\tilde{N}(t, dx), \quad t \geq 0, \quad (1.4.17)$$

donde $\tilde{N}(t, \cdot) = N(t, \cdot) - t\pi(\cdot)$ es la medida de Poisson compensada.

Los dos primeros términos los podemos interpretar como un movimiento Browniano con deriva a y matriz de difusión \sqrt{R} . Ya sabemos que la primera integral representa un proceso de Poisson compuesto y la última simboliza la suma compensada de saltos "pequeños". Reescribiendo la Ecuación (1.4.17), obtenemos

$$Y(t) = at + \sqrt{R}W(t) + \int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} xN(t, dx) - t \int_{|x| < 1} x(\pi(dx)). \quad (1.4.18)$$

Nótese que el primer y último término de Y son deterministas; además en [3] se puede verificar que las componentes que definen el proceso Y son independientes.

Por otro lado, recordemos que $Y(t)$ es infinitamente divisible para todo $t \geq 0$, entonces, por Fórmula de Lévy-Khintchine 1.3.7, existe una tripleta (b, M, ν) , con $b \in \mathbb{R}^n$, $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y ν medida de Lévy, tal que la función característica de $Y(1)$ para $s \in \mathbb{R}^n$ satisface

$$\phi_{Y(1)}(s) = \exp \left\{ i \langle b, s \rangle - \frac{1}{2} \langle s, Ms \rangle + \int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} [e^{i \langle s, x \rangle} - 1 - i \langle u, s \rangle \mathbb{1}_{B_1}(x)] \nu(dx) \right\}. \quad (1.4.19)$$

Si calculamos la función característica de $Y(1)$ a partir de la Definición 1.3.3, teniendo en cuenta que las componentes de Y son independientes, obtenemos que $a = b$, $M = R$ y $\pi = \nu$. Eso significa que toda variable aleatoria infinitamente divisible tiene asociado una componente Browniana con matriz de covarianza R , deriva $a \in \mathbb{R}^n$ y medida de Lévy π .

1.5. Integración estocástica

Centrándonos en el proceso X que se trabajará en el presente proyecto dado por la ecuación

$$X(t) = e^{Lt}X(0) + \int_0^t e^{L(t-r)}dY(r), \quad t \geq 0, \quad (1.5.1)$$

donde Y es un proceso de Lévy; la pregunta que nos concierne en el momento es saber cómo resolver la integral de la ecuación anterior. En particular, cómo computar

integrales respecto al proceso estocástico Y . Este tipo de integral, se conoce como **Integral de Itô**. La cual se define inicialmente para un conjunto de funciones “simples” $F : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ y finalmente se define la integral para el resto de funciones vía límite. Este resultado se sigue en [3] y [14].

Con el fin de obtener una expresión para el símbolo asociado a la integral de Itô, definimos una función simple $F : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$

$$F(t) = \sum_{k=0}^m F_k \mathbb{1}_{E_k}(t), \quad E_k = \left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m} \right), F_k \in \mathbb{R}^{n \times n}, m \geq 1. \quad (1.5.2)$$

La prueba del siguiente lema está basada en resultados de [14].

Lema 1.5.1. *Sea F una función simple y Y un proceso de Lévy n -dimensional, entonces la integral de F respecto a Y , dada por*

$$I_F(t) = \int_0^t F(r) dY(r) := \sum_k F(r_k)(Y(r_{k+1}) - Y(r_k)),$$

satisface

$$\mathbb{E} \{ e^{is \cdot I_F(t)} \} = \exp \left\{ \int_0^t \varphi_Y(F^T(r)) dr \right\}, \quad s \in \mathbb{R}^n, t \geq 0, \quad (1.5.3)$$

siendo φ_Y el Símbolo de Lévy de $Y(1)$.

Demostración. Definamos $F^T : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, tal que $F^T(t)$ es la traspuesta de la matriz $F(t)$ para $t \geq 0$. Ya que F es una función simples, entonces :

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_{I_F(t)}(s) &= \mathbb{E} \exp \left\{ is \cdot \sum_k F(r_k)(Y(r_{k+1}) - Y(r_k)) \right\} \\ &= \mathbb{E} \exp \left\{ i \sum_k F^T(r_k) s \cdot (Y(r_{k+1}) - Y(r_k)) \right\}. \end{aligned}$$

Dado que los incrementos de Y son independientes, entonces:

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_{I_F(t)}(s) &= \prod_k \mathbb{E} \exp \{ i F^T(r_k) s \cdot Y(r_{k+1} - r_k) \} \\ &= \prod_k \widehat{\mu}_{Y(r_{k+1} - r_k)}(F^T(r_k) s). \end{aligned}$$

Del Teorema 1.4.4 y por homogeneidad

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}_{I_F(t)}(s) &= \prod_k \exp \{ (r_{k+1} - r_k) \varphi_Y(F^T(r_k)s) \} \\ &= \exp \left\{ \sum_k \varphi_Y(F^T(r_k)s) \Delta r \right\}\end{aligned}$$

Nuevamente, como F es una función "simples", entonces

$$\widehat{\mu}_{I_F(t)}(s) = \exp \left\{ \int_0^t \varphi_Y(F^T(r)) dr \right\}.$$

Lo cual demuestra el lema. □

Sean $\|\cdot\|_2$ la norma 2 de una matriz y $H^2(t, \mathbb{R}^{n \times n})$ el espacio de funciones tal que si $F \in H^2(t, \mathbb{R}^{n \times n})$, entonces satisface

$$\int_0^t \|F(s)\|_2 ds < \infty. \quad (1.5.4)$$

En [14] se verifica que las funciones simples son densas en $H^2(t, \mathbb{R}^{n \times n})$. Así que podemos definir la Integral de Itô para toda función $F \in H^2(t, \mathbb{R}^{n \times n})$ vía límite basados en el artículo [14].

Teorema 1.5.2. *Sea $\{F_n\}_n$ una sucesión de funciones simples tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(s) = F(s), \quad \text{para todo } s \in [0, t], \quad (1.5.5)$$

entonces $I_{F_n}(t)$ converge en probabilidad para $t \geq 0$. Es decir, obtenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left\{ \int_0^t \varphi_Y(F_n^T(r)) dr \right\} = \exp \left\{ \int_0^t \varphi_Y(F^T(r)) dr \right\}. \quad (1.5.6)$$

Ya conociendo la definición de la integral de Itô para cualquier función, entonces con el fin de analizar las componentes del símbolo de $I_F(t)$ para $F \in H^2(t, \mathbb{R}^{n \times n})$, reescribimos para $s \in \mathbb{R}^n$ y $t \geq 0$

$$\begin{aligned}\text{Symb}(I_F(t))(s) &= \int_0^t i \langle F(r)a, s \rangle dr - \frac{1}{2} \int_0^t \langle F^T(r)s, RF^T(r)s \rangle dr \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} (e^{i \langle F(r)x, s \rangle} - 1 - i \langle F(r)x, s \rangle \mathbb{1}_{B_1}(x)) \pi(dx) dr \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} i [\langle F(r)x, s \rangle \mathbb{1}_{B_1}(F(r)x) - \langle F(r)x, s \rangle \mathbb{1}_{B_1}(F(r)x)] \pi(dx) dr.\end{aligned} \quad (1.5.7)$$

Con el fin de agrupar los términos, definamos una nueva medida π_t^F

$$\pi_t^F := \int_0^t F(r) \pi dr \quad (1.5.8)$$

en el sentido que para cada $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) - \{0\}$

$$\pi_t^F(A) = \int_0^t F(r) \pi(A) dr. \quad (1.5.9)$$

Por lo tanto, el símbolo de $I_F(t)$ en términos de π_t^F está dado por

$$\begin{aligned} \text{Symb}(I_F(t))(s) &= i \int_0^t \left\langle F(r) \left[a + \int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} (x \mathbb{1}_{B_1}(F(r)x) - x \mathbb{1}_{B_1}(x)) \pi(dx) \right], s \right\rangle dr \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} (e^{i\langle x, s \rangle} - 1 - i \langle x, s \rangle \mathbb{1}_{B_1}(x)) \pi_t^F(dx) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^t \langle F^T(r)s, RF^T(r)s \rangle dr. \end{aligned} \quad (1.5.10)$$

Puesto que $I(t)$ es infinitamente divisible para todo $t \geq 0$, entonces por Fórmula de Lévy-Khintchine 1.3.7, obtenemos la tripleta

$$R_t = \int_0^t F(r) RF^T(r) dr \quad (1.5.11)$$

$$\pi_t = \int_0^t F(r) \pi dr \quad (1.5.12)$$

$$a_t = \int_0^t F(r) \left(a + \int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} x [\mathbb{1}_{B_1}(F(r)x) - \mathbb{1}_{B_1}(x)] \pi(dx) \right) dr. \quad (1.5.13)$$

Esta caracterización del símbolo de $I(t)$ está basada en resultados del artículo [14].

Capítulo 2

Procesos del tipo Ornstein–Uhlenbeck y su densidad invariante

En el presente capítulo basados en el artículo [31], estudiamos las condiciones para la existencia de una medida finita invariante de la solución a la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dX = AXdt + dY \quad (2.0.1)$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz semidefinida negativa y $\{Y(t) : t \geq 0\}$ es un proceso de Lévy n -dimensional.

Basados en la descomposición de Lévy-Itô dada en la Sección 1.4.12, Y se puede reescribir

$$Y(t) = at + \sqrt{R}W(t) + \int_{|x| \geq 1} xN(t, dx) + \int_{|x| < 1} x(N(t, dx) - t\pi(dx)) \quad t \geq 0, \quad (2.0.2)$$

donde $a \in \mathbb{R}^n$, W es un movimiento Browniano con matriz de covarianza $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$, N es una medida de Poisson y π es una medida de Lévy.

Definición 2.0.1. Sea X un proceso de Lévy. Si Q es una matriz cuyos valores propios tienen parte real no negativa, entonces el proceso estocástico que da única solución a la ecuación diferencial estocástica

$$dY(t) = -QY(t)dt + dX(t), \quad t \geq 0. \quad (2.0.3)$$

es

$$Y(t) = e^{-Qt}Y(0) + \int_0^t e^{-Q(t-s)}dX(s) \quad t \geq 0, \quad (2.0.4)$$

donde e^{-Q} es la exponencial de la matriz Q definida en la Sección 1.1 y la integral estocástica tiene sentido de acuerdo a la Sección 1.5. Al proceso estocástico (2.0.4) lo llamamos del tipo **Ornstein-Uhlenbeck**.

El proceso estocástico de interés que tiene solución a la ecuación diferencial (2.0.1) es

$$X(t) = e^{At}X(0) + \int_0^t e^{A(t-r)}dY(r) \quad t \geq 0, \quad (2.0.5)$$

Por definición, X es un proceso estocástico del tipo Ornstein-Uhlenbeck.

Denotemos $Z(t) = \int_0^t e^{A(t-r)}dY(r)$ como la componente estocástica de X y $e^{At}X(0)$ como la componente determinista de X . Del Teorema 1.5.2, el símbolo de $Z(t)$, para $t \geq 0, s \in \mathbb{R}^n$ satisface

$$\begin{aligned} \text{Symb} \{Z(t)\} (s) &= \int_0^t \varphi_Y(e^{A^T r} s) dr \\ &= \int_0^t i \langle e^{Ar} a, s \rangle dr - \frac{1}{2} \int_0^t \langle s, e^{Ar} R e^{A^T r} s \rangle dr \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} (e^{i\langle x, s \rangle} - 1 - i \langle x, s \rangle \mathbb{1}_{B_1}(x)) \left(\int_0^t e^{Ar} \pi dr \right) (dx) \\ &\quad + i \int_0^t \left\langle \int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} e^{Ar} x (\mathbb{1}_{B_1}(e^{Ar} x) - \mathbb{1}_{B_1}(x)) \pi(dx), s \right\rangle dr. \end{aligned} \quad (2.0.6)$$

Con el objetivo de simplificar la Expresión (2.0.6), definamos

$$R_t \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t e^{Ar} R e^{A^T r} dr \quad (2.0.7)$$

$$\pi_t \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t e^{Ar} \pi dr \quad (2.0.8)$$

$$a_t \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t e^{Ar} \left(a + \int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} x [\mathbb{1}_{B_1}(e^{Ar} x) - \mathbb{1}_{B_1}(x)] \pi(dx) \right) dr, \quad (2.0.9)$$

donde la medida π_t satisface para funciones $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} f(x) \pi_t(dx) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} f(e^{Ar} x) \pi(dx) dr \quad (2.0.10)$$

Así podemos reescribir la Ecuación (2.0.6), para $s \in \mathbb{R}^n$

$$\text{Symb} \{Z(t)\} (s) = i \langle a_t, s \rangle - \frac{1}{2} \langle s, R_t s \rangle + \int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} (e^{i\langle x, s \rangle} - 1 - i \langle x, s \rangle \mathbb{1}_{B_1}(x)) \pi_t(dx). \quad (2.0.11)$$

Si la distribución límite μ_∞ del proceso X definido en la Ecuación (2.0.5) existe, entonces por independencia de la componente determinista y estocástica, μ_∞ está dada por

$$\mu_\infty \stackrel{d}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left[e^{At} X(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} dY(s) \right] = \nu * \epsilon, \quad (2.0.12)$$

con ν como la distribución límite de la componente determinista y ϵ como la distribución límite asociada a la componente estocástica. Queremos indagar entonces sobre las condiciones que debe cumplir el proceso Y para que la integral y el límite de la Ecuación (2.0.12) exista. Así que, a continuación se plantearán resultados basados en el artículo [31] requeridos para el teorema principal.

Definición 2.0.2. Decimos que μ es una distribución invariante para un proceso estocástico X , si dado que $X(0) \stackrel{d}{=} \mu$, entonces $X(t) \stackrel{d}{=} \mu$ para todo $t \geq 0$.

La siguiente proposición concluye que la distribución límite es invariante.

Proposición 2.0.3. 1) Una medida de probabilidad μ es invariante para el proceso (2.0.5) si y solo si para todo $t \geq 0$ y $s \in \mathbb{R}^n$

$$\widehat{\mu}(s) = \widehat{\mu}(e^{A^T t} s) \exp \left\{ \int_0^t \varphi_Y(e^{A^T r} s) dr \right\}. \quad (2.0.13)$$

II) Sean $a, s \in \mathbb{R}^n$ y ν_0 medida de la componente determinista dada por $e^{At} X(0)$. Si existen los siguientes límites

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \exp \left\{ \int_0^t \varphi_Y(e^{A^T r} s) dr - i \int_0^t \langle e^{A^T r} s, a \rangle dr \right\} = \widehat{\epsilon}(s), \quad (2.0.14)$$

y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \widehat{\nu}_0(e^{A^T t} s) \exp \left\{ i \int_0^t \langle e^{A^T r} s, a \rangle dr \right\} = \widehat{\nu}(s), \quad (2.0.15)$$

entonces $\nu * \epsilon$ es invariante para (2.0.5) y ν es medida invariante para $\dot{x} = Ax + a$.

Demostración. 1) Dado que μ es una distribución invariante, entonces si $X(0) \stackrel{d}{=} \mu$, se sigue que $X(t) \stackrel{d}{=} \mu$ para todo $t \geq 0$. De la definición de función caracte-

rística de $X(t)$ con $t \geq 0$ y $s \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}\phi_{X(t)}(s) &= \mathbb{E} \left\{ e^{iX(t) \cdot s} \right\} = \mathbb{E} \left\{ \exp \left[i \langle e^{At} X(0), s \rangle \right] \exp \left[i \int_0^t e^{A(t-s)} dY(s) \right] \right\}, \\ &= \mathbb{E} \left\{ \exp \left[i \langle X(0), e^{A^T t} s \rangle \right] \exp \left[i \int_0^t e^{A(t-s)} dY(s) \right] \right\}.\end{aligned}\tag{2.0.16}$$

Dado que μ es distribución invariante y las componente estocástica y determinista son independientes, entonces por el Teorema 1.5.2, se satisface para $s \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}\phi_{X(t)}(s) &= \mathbb{E} \left\{ \exp \left[i \langle X(t), e^{A^T t} s \rangle \right] \right\} \exp \left\{ \int_0^t \varphi_Y(e^{A^T r} s) dr \right\} \\ &= \phi_{X(t)}(e^{A^T t} s) \exp \left\{ \int_0^t \varphi_Y(e^{A^T r} s) dr \right\}.\end{aligned}\tag{2.0.17}$$

II) De la Ecuación (2.0.15), para $s \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}\widehat{\nu}(e^{A^T u} s) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \widehat{\nu}_0(e^{A^T(t+u)} s) \exp \left\{ i \int_0^t \langle e^{A^T(r+u)} s, a \rangle dr \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \widehat{\nu}_0(e^{A^T(t+u)} s) \exp \left\{ i \int_0^{t+u} \langle e^{A^T z} s, a \rangle dz - i \int_0^u \langle e^{A^T z} s, a \rangle dz \right\} \\ &= \widehat{\nu}(s) \exp \left\{ -i \int_0^u \langle e^{A^T z} s, a \rangle dz \right\}.\end{aligned}\tag{2.0.18}$$

La ecuación (2.0.18), se puede reescribir

$$\widehat{\nu}(s) = \widehat{\nu}(e^{A^T u} s) \exp \left\{ i \int_0^u \langle e^{A^T z} s, a \rangle dz \right\},\tag{2.0.19}$$

así que por literal (i) aplicado a $\varphi_Y(s) = i \langle a, s \rangle$, obtenemos que ν es invariante para $\dot{x} = Ax + a$.

De la Ecuación (2.0.14), para $s \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}\widehat{\epsilon}(e^{A^T u} s) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \exp \left\{ \int_0^t \varphi_Y(e^{A^T(r+u)} s) dr - i \int_0^t \langle e^{A^T(r+u)} s, a \rangle dr \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \exp \left\{ \int_u^{t+u} \varphi_Y(e^{A^T r} s) dr - i \int_u^{u+t} \langle e^{A^T r} s, a \rangle dr \right\} \\ &= \widehat{\epsilon}(s) \exp \left\{ - \int_0^u \varphi_Y(e^{A^T r} s) dr + i \int_0^u \langle e^{A^T r} s, a \rangle dr \right\}.\end{aligned}\tag{2.0.20}$$

Luego, para cada $s \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \widehat{\nu * \epsilon}(s) &= \widehat{\epsilon}(s) \cdot \widehat{\nu}(s) \\ &= \widehat{\epsilon}(e^{A^T u} s) \exp \left\{ \int_0^u \varphi_Y(e^{A^T r} s) dr - i \int_0^u \langle e^{A^T r} s, a \rangle dr \right\} \\ &\quad \widehat{\nu}(e^{A^T u} s) \exp \left\{ i \int_0^u \langle e^{A^T r} s, a \rangle dr \right\} \end{aligned} \quad (2.0.21)$$

Por literal (1), $\nu * \epsilon$ es medida invariante del proceso definido en la Ecuación (2.0.5).

□

En adelante nos referiremos a la distribución límite como la distribución invariante.

El siguiente lema que compete la distribución invariante de la componente determinista complementa el resultado anterior. La prueba se encuentra en el artículo [31].

Lema 2.0.4. *Existe una medida invariante ν para $\dot{x} = Ax + a$ si y solo si $a = -Ab$, para $b \in \mathbb{R}^n$. La medida ν está dada por (2.0.15) en la Proposición 2.0.3.*

Definamos el siguiente subespacio de \mathbb{R}^n

$$K_0 = \{x \in \mathbb{R}^n | e^{At} x \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty\}. \quad (2.0.22)$$

Tengamos en cuenta la descomposición ortogonal dada por $\mathbb{R}^n = K_0 \oplus K_0^\perp$ para la prueba del siguiente teorema.

Teorema 2.0.5. *Sea X el proceso estocástico definido en la Ecuación (2.0.5), con deriva $a \in \mathbb{R}^n$, matriz de covarianza del movimiento Browniano R y medida de Lévy π ; entonces existe una medida invariante para X , si y solo si se satisfacen las siguientes condiciones*

I)

$$\int_0^\infty \langle Re^{A^T t} s, e^{A^T t} s \rangle dt < \infty, \quad s \in \mathbb{R}^n. \quad (2.0.23)$$

II) *Descomponiendo $a = a_1 + a_0$, donde $a_0 \in K_0$ y $a_1 \in K_0^\perp$; existe un vector $b \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ab = -a_1$.*

III) *Existe medida de Lévy π_∞ tal que para toda función f continua, acotada y que se anula en 0 satisface*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} f(x) \frac{|x|^2}{1 + |x|^2} \pi_m(dx) = \int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} f(x) \frac{|x|^2}{1 + |x|^2} \pi_\infty(dx), \quad (2.0.24)$$

donde π_m está dado por (2.0.8) tomando $t = m$.

IV) *Existe*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{Ar} \left(a + \int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} x (\mathbb{1}_{B_1}(e^{Ar}x) - \mathbb{1}_{B_1}(x)) \pi(dx) \right) dr. \quad (2.0.25)$$

Demostración. Supongamos que μ_∞ es distribución invariante para el proceso (2.0.5). Por lo tanto, del literal (I) de la Proposición 2.0.3 y de la caracterización de φ_Y dada en (2.0.11) obtenemos:

$$\begin{aligned} |\widehat{\mu}_\infty(s)|^2 &= \left| \widehat{\mu}_\infty(e^{A^T t} s) \right|^2 \left| \exp \left\{ \int_0^t \varphi_Y(e^{A^T r} s) dr \right\} \right|^2 \\ &= \left| \widehat{\mu}_\infty(e^{A^T t} s) \right|^2 \left| \exp \left\{ 2 \int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} (e^{\langle x, s \rangle} - 1 - i \langle x, s \rangle \mathbb{1}_{B_1}(x)) \pi_t(dx) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2i \langle a_t, s \rangle - \langle s, R_t s \rangle \right\} \right|^2 \\ &= \left| \widehat{\mu}_\infty(e^{A^T t} s) \right|^2 \left| \exp \left\{ - \langle s, R_t s \rangle + 2 \int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} (\cos \langle x, s \rangle + i \sin \langle x, s \rangle - 1) \pi_t(dx) \right\} \right|^2 \\ &= \left| \widehat{\mu}_\infty(e^{A^T t} s) \right|^2 \exp \left\{ - \langle s, R_t s \rangle - 2 \int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} (1 - \cos \langle x, s \rangle) \pi_t(dx) \right\} \end{aligned} \quad (2.0.26)$$

La igualdad (2.0.26) vale para todo t en $[0, \infty)$. En particular variando t en los naturales obtenemos una sucesión acotada satisfaciendo que el término $\left| \widehat{\mu}_\infty(e^{A^T n} s) \right|^2$ converge a 1 mientras que el término restante, denotado temporalmente como μ_n , es decreciente y coincide con la función característica de distribuciones infinitamente divisibles. Más aún, como μ_n es decreciente y acotado, es convergente y su límite es la función característica de una variable aleatoria μ en virtud del Teorema de Continuidad de Lévy 1.3.4.

Considere las tripletas (a_n, R_n, π_n) dadas por la Fórmula de Lévy-Khintchine (Teorema 1.3.7) correspondientes a cada μ_n . De esta manera, obtenemos que se satisfacen las hipótesis del Teorema 1.3.9, por lo cual, existen los límites

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} f(x) \frac{|x|^2}{1 + |x|^2} \pi_m(dx) = \int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} f(x) \frac{|x|^2}{1 + |x|^2} \pi_\infty(dx) \quad (2.0.27)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_\infty \quad (2.0.28)$$

para toda función f continua, acotada y que se anula en 0. Por lo tanto se cumple la condición (III).

Veamos ahora que la sucesión de medidas de Lévy $\{\pi_n\}$ es creciente de acuerdo a la Definición 1.3.8. Sea Ω perteneciente a la σ -álgebra de Borel de \mathbb{R}^n , entonces

$$\pi_n(\Omega) = \int \mathbb{1}_\Omega(x) \pi_n(dx) \quad (2.0.29)$$

$$= \int_0^n \int \mathbb{1}_\Omega(e^{Ar}x) \pi(dx) dr \quad (2.0.30)$$

$$= \int_0^n \pi(x : e^{Ar}x \in \Omega) dr. \quad (2.0.31)$$

Dado que $\pi(x : e^{Ar}x \in \Omega) \geq 0$, entonces $\pi_{n+1}(\Omega) \geq \pi_n(\Omega)$; es decir, la sucesión de medidas de Lévy es creciente. Luego, por el Teorema 1.3.9 tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle u, R_n u \rangle = \langle u, R_\infty u \rangle, \quad u \in \mathbb{R}^n, \quad (2.0.32)$$

por lo tanto, la condición (I) se satisface.

Por otra parte, dado que μ_∞ es invariante, entonces existe una medida ν invariante de la componente determinista. Por el Lema 2.0.4, la condición (II) se satisface.

Veamos ahora que la medida de Lévy π está soportada en K_0 . Sea $r > 0$, por el teorema de Fubini

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} \mathbb{1}_{B_r^c}(e^{At}x) \pi(dx) dt &= \int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} \int_0^\infty \mathbb{1}_{B_r^c}(e^{At}x) dt \pi(dx) \\ &= \int_{B_r^c} \pi_\infty(dx). \end{aligned} \quad (2.0.33)$$

Dado que π_∞ es medida de Lévy, tenemos que la integral de la Ecuación (2.0.33) es finita. Por tanto

$$\pi \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \int_0^\infty \mathbb{1}_{B_r^c}(e^{At}x) dt = \infty \right\} = 0; \quad (2.0.34)$$

es decir, para $x \in \mathbb{R}^n$, tenemos $e^{At}x \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, por tanto la medida de Lévy π está soportada en K_0 . Sabiendo lo anterior, de la descomposición $\mathbb{R}^n = K_0 \oplus K_0^\perp$, tomando $s \in \mathbb{R}^n$ como $s = s_0 + s_1$, con $s_0 \in K_0$ y $s_1 \in K_0^\perp$, el Símbolo de Lévy de la función característica de $Y(t)$ se puede reescribir

$$\begin{aligned} \varphi_Y(s) &= \int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} [e^{i\langle s_0 + s_1, x \rangle} - 1 - i\langle s_0 + s_1, x \rangle \mathbb{1}_{B_1}] \pi(dx) \\ &\quad + i\langle a_0 + a_1, s_0 + s_1 \rangle - \frac{1}{2} \langle Rs, s \rangle \\ &= i\langle a_0, s_0 \rangle + i\langle a_1, s_1 \rangle - \frac{1}{2} \langle Rs, s \rangle + \int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} [e^{i\langle s_0, x \rangle} - 1 - i\langle s_0, x \rangle \mathbb{1}_{B_1}] \pi(dx). \end{aligned} \quad (2.0.35)$$

Adicionalmente, del literal (I) de la Proposición 2.0.3, la función característica de $X(t)$ para $t \geq 0$ debe satisfacer

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}_X(s_0 + s_1) &= \widehat{\mu}_X(e^{A^T t} s_0 + e^{A^T t} s_1) \exp \left\{ \int_0^t \varphi_Y(e^{A^T r} s_0 + e^{A^T r} s_1) dr \right\} \\ &= \widehat{\mu}_X(e^{A^T t} s_0 + e^{A^T t} s_1) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^t \langle R e^{A^T r} s, e^{A^T r} s \rangle dr \right. \\ &\quad \left. + i \int_0^t \langle e^{A^T r} s a_0, s_0 \rangle dr + i \int_0^t \langle e^{A^T r} s a_1, s_1 \rangle dr + \int_0^t \varphi_0(e^{A^T r} s_0) dr \right\}.\end{aligned}\tag{2.0.36}$$

con

$$\varphi_0(s_0) = \int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} [e^{\langle s_0, x \rangle} - 1 - i \langle s_0, x \rangle \mathbb{1}_{B_1}] \pi(dx).\tag{2.0.37}$$

En particular, evaluando $\widehat{\mu}_X(s_0)$ y $\widehat{\mu}_X(s_1)$ y escribiendo R_t

$$R_t = \begin{bmatrix} R_t^{00} & R_t^{01} \\ R_t^{10} & R_t^{11} \end{bmatrix},\tag{2.0.38}$$

obtenemos

$$\widehat{\mu}_X(s_1) = \widehat{\mu}_X(e^{A^T t} s_1) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle R_t^{11} s_1, s_1 \rangle + i \int_0^t \langle e^{A^r} a_1, s_1 \rangle dr \right\},\tag{2.0.39}$$

$$\widehat{\mu}_X(s_0) = \widehat{\mu}_X(e^{A^T t} s_0) \exp \left\{ i \int_0^t \langle e^{A^r} a_0, s_0 \rangle dr - \frac{1}{2} \langle R_t^{00} s_0, s_0 \rangle + \int_0^t \varphi_0(e^{A^T r} s_0) dr \right\}.\tag{2.0.40}$$

De la Ecuación (2.0.32), se sigue que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle R_t^{11} s, s \rangle = \langle R_\infty^{11} s, s \rangle, \quad s \in \mathbb{R}^n,\tag{2.0.41}$$

por lo tanto, si tomamos límite cuando $t \rightarrow \infty$ en la Ecuación (2.0.39), sabiendo que la medida μ es invariante, entonces existe el límite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \widehat{\mu}_X(e^{A^T t} s_1) \exp \left\{ i \int_0^t \langle e^{A^r} a_1, s_1 \rangle dr \right\}.\tag{2.0.42}$$

Por otro lado, de (2.0.40), como $a_0 \in K_0$, entonces $e^{A^t} a_0 \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$, por lo tanto es integrable, es decir existe el límite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{A^r} a_0 dr = \int_0^\infty e^{A^r} a_0 dr.\tag{2.0.43}$$

Además, por resultado obtenido en la Ecuación (2.0.32), se sigue que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle R_t^{00} s, s \rangle = \langle R_\infty^{00} s, s \rangle, \quad s \in \mathbb{R}^n.\tag{2.0.44}$$

Por (2.0.43) y (2.0.44), concluimos que el siguiente límite converge

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \widehat{\mu}_X(e^{A^T t} s_0) \exp \left\{ \int_0^t \varphi_0(e^{A^T r} s_0) dr \right\} = \widehat{\epsilon}(s_0). \quad (2.0.45)$$

Luego, por la Ecuación (2.0.28), se sigue que la condición (IV) se cumple.

Supongamos ahora que se satisfacen las condiciones (I) – (IV). Por condición (III) se sigue que la medida de Lévy π está soportada en K_0 . Sea ν_1 la medida invariante de la componente determinista. De la condición (II), existe $b \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ab = -a_1$, entonces, por el Lema 2.0.4, se sigue que existe medida invariante ν para $\dot{x} = Ax + a_1$. Luego, se sigue por la Proposición 2.0.3

$$\widehat{\nu}(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} \widehat{\nu}_1(e^{A^T r} s) \exp \left\{ i \int_0^t \langle e^{A^T r} s, a_1 \rangle dr \right\}, \quad s \in \mathbb{R}^n. \quad (2.0.46)$$

Por otro lado, teniendo en cuenta los literales (I), (III), (IV) y de los resultados de convergencia de la Sección 1.3, obtenemos que existe el límite

$$\widehat{\epsilon}(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} \exp \left\{ \int_0^t \varphi_Y(e^{A^T r} s) dr - i \int_0^t \langle e^{A^T r} s, a_1 \rangle dr \right\}, \quad s \in \mathbb{R}^n. \quad (2.0.47)$$

donde φ_Y es el símbolo de Lévy de $Y(1)$.

Finalmente, por la Proposición 2.0.3, obtenemos que la medida $\widehat{\mu}_\infty = \widehat{\epsilon} * \nu$ es invariante para el proceso (2.0.5).

□

Teniendo ya las condiciones para la existencia de la distribución invariante, procedemos dar una expresión para $\widehat{\mu}_\infty$. De (2.0.47), para $s \in \mathbb{R}^n$

$$\widehat{\epsilon}(s) = \exp \left\{ i \langle a_\infty, s \rangle - \frac{1}{2} \langle s, R_\infty s \rangle + \int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} (e^{i \langle s, x \rangle} - 1 - i \langle s, x \rangle \mathbb{1}_{B_1}) \pi_\infty(dx) \right\}; \quad (2.0.48)$$

con la tripleta $(a_\infty, R_\infty, \pi_\infty)$ dadas por

$$a_\infty = \int_0^\infty \left(e^{At} a + \int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} e^{At} x (\mathbb{1}_{B_1}(e^{At} x) - \mathbb{1}_{B_1}(x)) \pi(dx) \right) dt, \quad (2.0.49)$$

$$R_\infty = \int_0^\infty e^{At} R e^{A^T t} dt, \quad (2.0.50)$$

$$\pi_\infty = \int_0^\infty e^{At} \pi dt. \quad (2.0.51)$$

donde π_∞ es medida de Lévy por hipótesis. Por lo tanto, concluimos por Fórmula de Lévy-Khintchine 1.3.7 que la distribución invariante asociada a la componente estocástica es infinitamente divisible. Por otro lado, si ν es la medida invariante de la componente determinista, obtenemos que la función característica de la distribución invariante $\hat{\mu}_\infty$ del proceso (2.0.5) para $s \in \mathbb{R}^n$ está dada por

$$\hat{\mu}_\infty(s) = \hat{\nu}(s) \exp \left\{ i \langle a_\infty, s \rangle - \frac{1}{2} \langle s, R_\infty s \rangle + \int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} (e^{i \langle s, x \rangle} - 1 - i \langle s, x \rangle \mathbb{1}_{B_1}) \pi_\infty(dx) \right\}. \quad (2.0.52)$$

Obteniendo una expresión para la distribución invariante del proceso estocástico dado en la Ecuación (2.0.5).

Capítulo 3

Aplicación

En este capítulo vamos a aplicar los resultados obtenidos en el Teorema 2.0.5. Sean G un grafo conexo de n vértices y $X : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que $X_i(t)$ representa cierta cantidad física del nodo i en el tiempo t . Sea $L = (l_{i,j})_{n \times n}$ la matriz de G dada por la Ecuación (1.2.3). Consideremos la ecuación diferencial determinista

$$dX = LXdt, \quad t \geq 0. \quad (3.0.1)$$

Para cada nodo j , $\frac{dX_j(t)}{dt}$ se interpreta como el intercambio de la cantidad presente en el vértice con sus vecinos. Además se satisface

$$\sum_{i=1}^n L_{ij} X_j(t) = 0 \quad t \geq 0, \quad (3.0.2)$$

es decir,

$$L^T \mathbf{1} = \mathbf{0}. \quad (3.0.3)$$

La caracterización del sistema dada por la Ecuación (3.0.2) significa que cada nodo entrega el total de cantidad que posee en el tiempo t a todos sus vecinos de forma equitativa. Este a su vez recibe una cantidad $\frac{X_i(t)}{\deg(i)}$ de cada vecino i . De lo anterior se obtiene un sistema conservativo, es decir, la cantidad total $\sum_{i=1}^n X_i(t)$ permanece constante en cada instante t .

Consideremos la ecuación diferencial estocástica

$$dX = LXdt + dY, \quad (3.0.4)$$

con condición inicial $X(0) = \mathbf{0}_n$ y donde Y es un proceso de Lévy n -dimensional tal que $\mathbb{E}Y(t) = \mathbf{0}$, para todo $t \geq 0$ y está dado por

$$Y(t) = \sqrt{R}W(t) + Z(t), \quad t \geq 0, \quad (3.0.5)$$

donde W es un movimiento Browniano con matriz de difusión $\sqrt{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, Z es un proceso de Poisson compuesto con parámetro $\lambda > 0$ y el tamaño de los saltos está dado por la sucesión de variables aleatorias $\{\Delta_n\}_n$ independientes e idénticamente distribuidas con $\Delta_n \sim f_\Delta$ para cada $n \in \mathbb{N}$, donde f_Δ es Gaussiana multivariada con media $\mu = \mathbf{0}_n$ y matriz de covarianza $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$, que puede ser escrita como $\Sigma = \sqrt{\Sigma}\sqrt{\Sigma}^T$. Dadas las características de Y , la ecuación diferencial estocástica se puede escribir

$$dX = LXdt + \sqrt{R}dW(t) + dZ(t). \quad (3.0.6)$$

Teniendo en cuenta que Y es un proceso de Lévy, entonces por Teorema de Descomposición de Lévy-Itô 1.4.12, existe vector $a \in \mathbb{R}^n$, matriz semidefinida positiva $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$, una medida de Lévy π y una medida de Poisson N tales que Y se puede escribir

$$Y(t) = at + \sqrt{R}W(t) + \int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} xN(t, dx) - t \int_{|x| < 1} x\pi(dx), \quad t \geq 0. \quad (3.0.7)$$

Por lo tanto, para el proceso Y en consideración $a = \mathbb{E}\{Z\mathbb{1}_{|Z| < 1}\} = \mathbf{0}_n$, la matriz de covarianza del movimiento Browniano es R , la medida de Poisson N es la inducida por el proceso de Poisson compuesto Z y la medida de Lévy π es

$$\pi(dx) = \lambda f_\Delta(x)dx. \quad (3.0.8)$$

Verifiquemos que se satisfagan las condiciones para que π sea una medida de Lévy:

$$\int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} \frac{|x|^2}{1 + |x|^2} \pi(dx) \leq \int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} \pi(dx) = \lambda < \infty. \quad (3.0.9)$$

De acuerdo a resultados obtenidos en el Capítulo 1, el proceso estocástico que da solución a la Ecuación (3.0.4) es del tipo Ornstein-Uhlenbeck y está dado por:

$$X(t) = e^{Lt}X(0) + \int_0^t e^{L(t-s)}dY(s) \quad t \geq 0, \quad (3.0.10)$$

donde e^{Lt} es la matriz exponencial de L . Definamos $e^{Lt}X(0)$ como la componente determinista de X y $\int_0^t e^{L(t-s)}dY(s)$ como la componente estocástica de X .

3.1. Convergencia

El objetivo se centra ahora en encontrar la función de distribución de probabilidad invariante μ_∞ asociada al proceso X . Sabemos de la Ecuación (2.0.12) que μ_∞ está dada por

$$\mu_\infty \stackrel{d}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left[e^{Lt}X(0) + \int_0^t e^{L(t-s)}dY(s) \right]; \quad (3.1.1)$$

por tanto, nos interesa indagar sobre las condiciones de convergencia de la componente determinista y estocástica dadas por el Teorema 2.0.5.

Con el fin de caracterizar la matriz exponencial de L , utilicemos la descomposición Canónica de Jordan de la matriz L basados en el Teorema 1.1.5. Sabemos que L es una matriz semidefinida negativa por la Proposición 1.2.4 y el vector propio $\lambda_n = 0$ tiene multiplicidad uno por el Lema 1.2.3. Por lo tanto, si los valores propios de L son $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 0\}$ y los vectores propios son $\{v_1, \dots, v_{n-1}, v_n\}$, entonces por el Teorema de Descomposición de Jordan 1.1.5, la matriz P dada por

$$P = \begin{bmatrix} | & & | & | \\ v_1 & \dots & v_{n-1} & v_n \\ | & & | & | \end{bmatrix}, \quad (3.1.2)$$

es aquella que satisface $L = P\Lambda P^{-1}$, con $\Lambda = \text{diag}[J(\lambda_1), \dots, J(\lambda_{n-1}), 0]$ y donde $J(\lambda_i)$ es el bloque de Jordan asociado al valor propio λ_i . Así que podemos reescribir el proceso X dado en (3.0.10) como

$$X(t) = Pe^\Lambda P^{-1}X(0) + \int_0^t e^{L(t-s)} dY(s) \quad t \geq 0. \quad (3.1.3)$$

Si nos centramos en la componente determinista, dado que los valores propios de L son no positivos, entonces para cada valor propio negativo se sigue que $\frac{e^{\lambda t} t^k}{k!} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ con $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Luego, cada bloque de Jordan $e^{J(\lambda_i)t}$ es tal que converge a la matriz nula. Así que el límite cuando $t \rightarrow \infty$ de la componente determinista es

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{Lt} X(0) &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n-1) \times (n-1)} & \mathbf{0}_{(n-1) \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times (n-1)} & 1 \end{bmatrix} X(0) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n-1) \times 1} \\ X_n(0) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Conociendo ya el límite de la componente determinista, procedemos a indagar sobre la convergencia de la componente estocástica de X basados en el Teorema 2.0.5. Con el objetivo de simplificar cálculos y teniendo en cuenta que las columnas de la matriz P forman una base de \mathbb{R}^n , entonces definimos la base \mathcal{B}_P como la generada por las columnas de P . Así que para cada $x \in \mathbb{R}^n$, el vector en la base \mathcal{B}_P está dado por

$$\tilde{x} = P^{-1}x. \quad (3.1.5)$$

Luego, la ecuación diferencial (3.0.6) puede escribirse en términos de \tilde{X} :

$$d\tilde{X} = \Lambda \tilde{X} dt + \sqrt{\tilde{R}} d\tilde{W}(t) + d\tilde{Z}(t). \quad (3.1.6)$$

donde el proceso de Lévy en la base \mathcal{B}_P es

$$\tilde{Y}(t) = P^{-1}\sqrt{\tilde{R}}W(t) + P^{-1}Z(t) \quad (3.1.7)$$

$$= \sqrt{\tilde{R}}\tilde{W}(t) + \tilde{Z}(t). \quad (3.1.8)$$

La solución a la Ecuación (3.1.6) es

$$\tilde{X}(t) = e^{\Lambda t}\tilde{X}(0) + \int_0^t e^{\Lambda(t-s)}d\tilde{Y}(s), \quad t \geq 0. \quad (3.1.9)$$

La matriz de covarianza de los incrementos asociada al movimiento Browniano en la base \mathcal{B}_P es $\tilde{R} = P^{-1}R(P^{-1})^T$ y la matriz de covarianza de la intensidad de los saltos es $\tilde{\Sigma} = P^{-1}\Sigma(P^{-1})^T$.

Cuando $t \rightarrow \infty$, la componente determinista tiende a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\Lambda t}\tilde{X}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n-1) \times 1} \\ \tilde{X}_n(0) \end{bmatrix}. \quad (3.1.10)$$

Para evaluar la convergencia de la componente estocástica del problema en la base \mathcal{B}_P , de acuerdo al Teorema 2.0.5 del capítulo anterior, debemos establecer condiciones sobre la deriva \tilde{a} , las matrices de covarianza \tilde{R} y $\tilde{\Sigma}$ del movimiento Browniano y de la intensidad de los saltos respectivamente. Las condiciones se sintetizan en el siguiente teorema.

Teorema 3.1.1. *Para que exista una medida de distribución invariante para el proceso estocástico definido en la Ecuación (3.1.9), con \tilde{Y} un proceso de Lévy n -dimensional definido en (3.1.7), es necesario que:*

- I) Las matrices de covarianza $\tilde{\Sigma}$ y \tilde{R} tengan ceros en las filas y columnas n .
- II) $\mathbb{E}\{\Delta_n^2\} < \infty$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. La presente prueba se basa en establecer las condiciones que se deben satisfacer sobre el proceso de Lévy Y para la existencia de una distribución invariante basados en el Teorema 2.0.5.

- 1) Inicialmente vamos a establecer los requerimientos para satisfacer la Condición (IV) del Teorema 2.0.5, el cual requiere que exista

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{\Lambda r} \left(\tilde{a} + \int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} x (\mathbb{1}_{B_1}(e^{\Lambda r}x) - \mathbb{1}_{B_1}(x)) \pi(dx) \right) dr. \quad (3.1.11)$$

Veamos las condiciones que se debe satisfacer un vector $s \in \mathbb{R}^n$ para que el Límite (3.1.11) exista. Dado que P es base de \mathbb{R}^n , podemos escribir $s \in \mathbb{R}^n$ como $s = \sum_{k=1}^n c_k \tilde{v}_k$, para $c_k \in \mathbb{R}$ y $\tilde{v}_i = P^{-1}v_i$ con v_i vector propio de L y $i \in \{1, \dots, n\}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} e^{\Lambda t} s &= e^{\Lambda t} \left(\sum_{k=1}^n c_k \tilde{v}_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^n c_k e^{\Lambda t} P^{-1} v_k. \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

Si calculamos la integral de la matriz exponencial de Λ aplicada a \tilde{v}_k , para $1 \leq k < n$ obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^t (e^{\Lambda r} P^{-1} v_k)_k dr &= \int_0^t (e^{\Lambda t} \hat{\mathbf{k}})_k dr \\ &= (-\lambda_k)^k (-k\Gamma(k) + \Gamma(k+1, -t\lambda_k)), \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

donde $\hat{\mathbf{k}}$ es el vector unitario en la dirección k y Γ es la función Gamma. Y cuando $t \rightarrow \infty$

$$\int_0^\infty (e^{\Lambda t} P^{-1} v_k)_k dt = (-\lambda_k)^{-k-1}. \quad (3.1.14)$$

Ahora, para \tilde{v}_n :

$$\begin{aligned} \int_0^t (e^{\Lambda r} P^{-1} v_n)_n dr &= \int_0^t (e^{\Lambda t} \hat{\mathbf{n}})_n dr \\ &= t \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

Por ende, cuando $t \rightarrow \infty$ la integral de la Ecuación (3.1.15) no converge. Es decir, para que se cumpla la Condición (IV) del Teorema 2.0.5, requerimos que $s \in \mathbb{R}^n$ sea ortogonal a \tilde{v}_n .

Inicialmente nos vamos a centrar en

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{\Lambda r} \left(\int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} x (\mathbb{1}_{B_1}(e^{\Lambda r} x) - \mathbb{1}_{B_1}(x)) \pi(dx) \right) dr. \quad (3.1.16)$$

Sabemos por resultados del Teorema 2.0.5 que la medida π está soportada en K_0 , por lo tanto, satisface

$$\pi \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \int_0^\infty \mathbb{1}_{B_r^c}(e^{\Lambda t} x) dt = \infty \right\} = 0; \quad (3.1.17)$$

es decir toma los vectores $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $e^{At}x \rightarrow 0$. Este límite lo podemos reescribir en términos de la matriz Λ

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} P e^{At} P^{-1} x &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} P e^{At} \tilde{x} &= 0. \end{aligned} \tag{3.1.18}$$

Por caracterización de la matriz exponencial de Λ , el límite (3.1.18) converge si y solo si \tilde{x} tiene cero en la componente n . Por lo tanto, para que exista el Límite (3.1.16), requerimos que la medida π sea tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} x \pi(dx) < \infty. \tag{3.1.19}$$

Para el caso de la medida de Lévy definida en el presente proyecto dada en (3.0.8), tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} x \pi(dx) = \lambda \mathbb{E}X < \infty. \tag{3.1.20}$$

Por lo tanto, se satisface la condición para la existencia del límite (3.1.16).

Por otro lado, recordemos que $\tilde{a} = \mathbf{0}$ es el valor esperado de los saltos "pequeños" del proceso de Poisson Compuesto \tilde{Z} . Como \tilde{a} debe ser ortogonal a \tilde{v}_n , entonces la matriz de covarianza $\tilde{\Sigma}$ de la intensidad de los saltos en la base B_P debe tener ceros en la dirección del vector propio asociado a $\lambda_n = 0$, es decir, la fila y columna n debe tener ceros. Analizando este resultado desde el punto de vista de la base original, de la definición de $\tilde{\Sigma}$

$$\tilde{\Sigma} = P^{-1} \sqrt{\Sigma} \left(P^{-1} \sqrt{\Sigma} \right)^T, \tag{3.1.21}$$

concluimos que la matriz $\sqrt{\Sigma}$ debe satisfacer

$$\sum_{j=1}^n P_{nj}^{-1} \sqrt{\Sigma_{ji}} = 0, \quad i \in \{1, \dots, n\}. \tag{3.1.22}$$

Antes de continuar con las condiciones de la matriz de covarianza \tilde{R} del movimiento Browniano, procedamos a verificar que la deriva \tilde{a} satisface la Condición (II) del Teorema 2.0.5. Sea

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{3.1.23}$$

por lo tanto $\Lambda b = -\tilde{a}_1 = \mathbf{0}_n$. Cumpliendo así esta condición.

Analicemos ahora las condiciones de convergencia sobre la matriz de covarianza del movimiento Browniano \tilde{W} . Requerimos por el Literal (i) del Teorema 2.0.5 que la siguiente integral converja cuando $t \rightarrow \infty$:

$$\int_0^t \left(e^{\Lambda r} \tilde{R} e^{\Lambda^T r} s \right)_j dr, \quad j \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (3.1.24)$$

El producto matricial para la matriz exponencial de Λ y \tilde{R} está dado por

$$e^{\Lambda r} \tilde{R} e^{\Lambda^T r} = \begin{bmatrix} e^{J(\lambda_1)t} & & & \\ & \ddots & & \\ & & e^{J(\lambda_s)t} & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \tilde{R} \begin{bmatrix} e^{J(\lambda_1)^T t} & & & \\ & \ddots & & \\ & & e^{J(\lambda_s)^T t} & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1.25)$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & & \tilde{r}_{nn} \end{bmatrix}, \quad (3.1.26)$$

donde los elementos c_{ij} son combinaciones lineales del tipo $r_{ij} \frac{t^{k+m}}{m!k!} e^{(\lambda_i + \lambda_j)t}$, para $k, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, los cuales dependen de la multiplicidad del valor propio λ_i y λ_j respectivamente. La integral de estos términos está dada por

$$\int_0^\infty \frac{t^{k+m}}{m!k!} e^{(\lambda_i + \lambda_j)t} dt = \frac{(k+m)!}{k!m!} \left(\frac{-1}{\lambda_i + \lambda_j} \right)^{1+k+m}. \quad (3.1.27)$$

Obteniendo así que la integral de las componentes c_{ij} converge en t . Dado que $\tilde{r}_{nn} \in \mathbb{R}$, entonces obtenemos que este no converge en t . Por tal motivo, para garantizar la convergencia de la integral dada en la Ecuación (3.1.24) requerimos que la matriz de covarianza \tilde{R} del movimiento Browniano \tilde{W} debe satisfacer $\tilde{R}_{nn} = 0$.

Recordemos $\tilde{R} = P^{-1} \sqrt{R} \left(P^{-1} \sqrt{R} \right)^T$, donde \sqrt{R} es la matriz de difusión del movimiento Browniano. Por lo tanto, para satisfacer la condición $\tilde{R}_{nn} = 0$ requerimos que la n -ésima fila de la matriz $P^{-1} \sqrt{R}$ sea igual al vector fila de ceros, es decir

$$\sum_{j=1}^n P_{nj}^{-1} \sqrt{R_{ji}} = 0, \quad i \in \{1, \dots, n\}. \quad (3.1.28)$$

Concluyendo que la n -ésima fila y columna de la matriz \tilde{R} debe ser igual al vector de ceros.

Sabiendo las condiciones sobre la deriva \tilde{a} , el movimiento Browniano \tilde{W} y el proceso de Poisson compuesto \tilde{Z} , concluimos que $\tilde{Y}_n(t) = 0$ c.p.1 para todo $t \geq 0$.

Desde el punto de vista de la base original, las matrices de covarianza Σ de la intensidad de los saltos del proceso de Poisson Z y R del movimiento Browniano W deben satisfacer que las n -ésimas filas y columnas de las matrices $P^{-1}\Sigma(P^{-1})^T$ y $P^{-1}R(P^{-1})^T$ sean ceros, es decir, sean semidefinidas positivas. Lo anterior nos indica que existe una combinación lineal de los elementos matrices R y Σ tal que es igual a cero, es decir, la cantidad presente en un nodo se puede conocer a través de los demás vértices. Esto es consecuencia directa de la propiedad conservativa del sistema.

II) Del Literal (III) del Teorema 2.0.5, para la medida π_∞ requerimos

$$\int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} \frac{|x|^2}{1 + |x|^2} \pi_\infty dt < \infty. \quad (3.1.29)$$

De la expresión de π_∞ , tenemos

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} \frac{\|e^{\Lambda t} x\|^2}{1 + \|e^{\Lambda t} x\|^2} \pi(dx) dt \leq \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} \|e^{\Lambda t} x\|^2 \pi(dx) dt. \quad (3.1.30)$$

Por resultados anteriores, sabemos que la medida de Lévy π está soportada en K_0 . Además por las características de la matriz exponencial de Λ y por definición de la medida de Lévy del presente proyecto dada en (3.0.8) se sigue

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} \left\| \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} x_1 \\ \vdots \\ e^{\lambda_{n-1} t} x_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix} \right\|^2 \pi(dx) dt &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} \sum_{i=1}^{n-1} e^{2\lambda_i t} x_i^2 \pi(dx) dt \\ &= \int_0^\infty \lambda \sum_{i=1}^{n-1} e^{2\lambda_i t} \mathbb{E}(X_i^2) dt. \end{aligned} \quad (3.1.31)$$

Dado que $\lambda_i < 0$, entonces para satisfacer la Condición (III), necesitamos $\mathbb{E}\{X_i^2\} < \infty$. Lo cual demuestra el teorema.

□

Ya teniendo establecidas las condiciones sobre el proceso de Lévy \tilde{Y} para la existencia de la distribución invariante μ_∞ , obtenemos por el Teorema 2.0.5 que $\widehat{\mu}_\infty = \widehat{\epsilon * \delta}$, donde ϵ es la distribución de la componente estocástica y δ la distribución de la componente determinista. Para todo $s \in \mathbb{R}^n$, tenemos

$$\begin{aligned} \widehat{\epsilon}(s) &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle s, \tilde{R}_\infty s \rangle + \int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} (e^{i\langle s, x \rangle} - 1) \pi_\infty(dx) \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^\infty \langle e^{\Lambda^T t} s, \tilde{R} e^{\Lambda^T t} s \rangle dt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} (e^{i\langle e^{\Lambda^T t} s, x \rangle} - 1) \pi(dx) dt \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^\infty \langle e^{\Lambda^T t} s, \tilde{R} e^{\Lambda^T t} s \rangle dt + \lambda \int_0^\infty (\widehat{f}_\Delta(e^{\Lambda^T t} s) - 1) dt \right\}. \end{aligned} \quad (3.1.32)$$

Por otro lado, conociendo el límite de la componente determinista dada por (3.1.10) y teniendo en cuenta que la condición inicial es el vector de ceros, entonces $\widehat{\delta} = 1$. Por lo tanto, la función característica de la distribución invariante del proceso \tilde{X} definido en la Ecuación (3.1.9) es

$$\widehat{\mu}_{\tilde{X}}(s) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^\infty \langle s, e^{\Lambda t} \tilde{R} e^{\Lambda^T t} s \rangle dt + \lambda \int_0^\infty (\widehat{f}_\Delta(e^{\Lambda^T t} s) - 1) dt \right\}, \quad s \in \mathbb{R}^n. \quad (3.1.33)$$

Obtenemos entonces una expresión para la función característica de la distribución invariante asociada al proceso \tilde{X} en términos de la matriz de covarianza del movimiento Browniano \tilde{W} , la función característica de la distribución de la intensidad de los saltos y los valores propios de la matriz L .

Teniendo en cuenta lo anterior, procedemos a dar una expresión para la distribución invariante del proceso original (3.0.10). Para $s \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_X(s) &= \widehat{\mu}_{\tilde{X}}(P^T s) \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^\infty \langle P^T s, e^{\Lambda t} \tilde{R} e^{\Lambda^T t} P^T s \rangle dt + \lambda \int_0^\infty (\widehat{f}_\Delta(e^{\Lambda^T t} P^T s) - 1) dt \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^\infty \langle e^{A^T t} s, R e^{A^T t} s \rangle dt + \lambda \int_0^\infty (\widehat{f}_\Delta(e^{A^T t} s) - 1) dt \right\}. \end{aligned} \quad (3.1.34)$$

Expresión en términos de la matriz de covarianza del movimiento Browniano R y la función característica de la distribución asociada a la intensidad de los saltos.

3.2. Primer y segundo momentos de la distribución invariante

El primer momento de una variable aleatoria corresponde al valor esperado o media de la variable aleatoria. El segundo momento central de una variable aleatoria se denomina varianza. Esta es una medida de la dispersión respecto a la media.

Para obtener una expresión del segundo momento de la distribución invariante, nos basaremos en la Proposición 1.3.2 que relaciona la derivada de la función característica en $s = \mathbf{0}$ y los momentos. Por lo tanto, para calcularlo requerimos encontrar el Jacobiano de la función característica. Para computar las derivadas necesitamos las siguientes proposiciones, cuyas pruebas se pueden revisar en el libro [24]:

Proposición 3.2.1. *Sea $f(x, t)$ una función continua y $|f(x, t)| \leq g(t)$ para todo $t \geq c$ y todo $x \in E$. Supongamos $\int_c^\infty g(t)dt$ converge, entonces $\int_c^\infty f(x, t)dt$ converge uniformemente para todo $x \in E$.*

Proposición 3.2.2. *Si $\int_c^\infty f(x, t)dt$ converge a $F(x)$ para todo x , tal que $a \leq x \leq b$, si f y $f_1 = \frac{\partial f}{\partial x}$ son continuas, y si $\int_0^\infty f_1(x, t)dt$ es uniformemente continua para $x \in [a, b]$, entonces, para cualquier $x \in [a, b]$*

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty f(x, t)dt = \int_0^\infty f_1(x, t)dt.$$

El resultado que caracteriza el primer y segundo momento asociado a la distribución invariante μ_∞ del proceso X definido en la Ecuación (3.0.10) se sintetiza en el siguiente teorema.

Teorema 3.2.3. *Si μ_∞ es la distribución invariante del proceso estocástico (3.0.10), entonces*

I) $\mathbb{E} \{X_\infty(t)\} = 0.$

II) *El segundo momento satisface para cada nodo k*

$$\mathbb{E} \{X_\infty^2(t)\}_k = - \left. \frac{\partial^2 \hat{\mu}}{\partial s_i^2} \right|_{s=0} = - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{P_{ki} P_{kj} (\tilde{R}_{ji} + \lambda \tilde{\Sigma}_{ji})}{\lambda_i + \lambda_j}. \quad (3.2.1)$$

Demostración. 1) Si μ_∞ representa el proceso en la distribución invariante, entonces su valor esperado está dado por

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{X_\infty(t)\} &= \mathbb{E}\left\{e^{Lt}X(0) + \int_0^t e^{L(t-s)}dY(s)\right\} \\ &= \mathbf{0}.\end{aligned}\tag{3.2.2}$$

II) De acuerdo a las Proposiciones 3.2.1 y 3.2.2, necesitamos que la función $f(s, t) = \langle e^{\Lambda t}P^T s, \tilde{R}e^{\Lambda t}P^T s \rangle$ posea una derivada acotada por una función en términos de t , tal que sea integrable. Resaltamos que este cálculo es equivalente para la matriz $\tilde{\Sigma}$. Para realizar este cálculo debemos recordar que la matriz \tilde{R} tiene ceros en la n -ésima fila y columna. La primera derivada parcial de f es

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial s_i} &= \underbrace{\sum_{j=1}^n \sum_{k < j} \sum_{m=1}^n \left(\tilde{R}_{kj} + \tilde{R}_{jk} \right) e^{(\lambda_k + \lambda_j)t} s_m (P_{mk}P_{ij} + P_{mj}P_{ik})}_{B_i} \\ &\quad + 2 \underbrace{\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^n \tilde{R}_{jj}P_{ij}P_{kj}S_k e^{2\lambda_j t}}_{A_i}.\end{aligned}\tag{3.2.3}$$

Veamos ahora que satisface las hipótesis de las Proposiciones 3.2.1 y 3.2.2. Ya que nos interesa conocer la derivada en cero, supongamos $\|s_i\| \leq 1$.

$$\begin{aligned}\left\| \frac{\partial f}{\partial s_i} \right\| &\leq \|A_i\| + \|B_i\| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \sum_{k < j} \sum_{m=1}^n \left(\left| \tilde{R}_{kj} + \tilde{R}_{jk} \right| \right) e^{(\lambda_k + \lambda_j)t} (|P_{mk}P_{ij}| + |P_{mj}P_{ik}|) \\ &\quad + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^n \left| \tilde{R}_{jj}P_{ij}P_{kj} \right| e^{2\lambda_j t};\end{aligned}\tag{3.2.4}$$

Recordando que la matriz \tilde{R} satisface que $\tilde{R}_{n,\cdot} = \tilde{R}_{\cdot,n} = 0$, se sigue que (3.2.4) queda una combinación lineal de términos de la forma $ke^{\lambda_j t}$ con $k \in \mathbb{R}$ y $\lambda_j < 0$. Si definimos la Ecuación (3.2.4) como $g(t)$, entonces $g(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, por lo cual es integrable; así que se satisfacen las hipótesis de las Proposiciones 3.2.1 y 3.2.2. Del razonamiento anterior obtenemos que la primera derivada parcial de la función característica es

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{\mu}}{\partial s_i} &= \hat{\mu}_{\tilde{X}}(P^T s) \left[-\frac{\lambda}{2} \int_0^\infty (A_i + B_i) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle e^{\Lambda t}P^T s, \tilde{\Sigma}e^{\Lambda t}P^T s \rangle \right\} dt \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_0^\infty (A_i + B_i) dt \right].\end{aligned}\tag{3.2.5}$$

De lo anterior verificamos también lo que habíamos calculado en el literal anterior para el valor esperado asociado a la distribución invariante. Si evaluamos en $s_i = 0$, obtenemos que el primer momento es cero para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Continuemos ahora con el Jacobiano de la función característica con el fin de calcular el segundo momento de la distribución invariante. Nos interesa en particular conocer la segunda derivada parcial para la función $f(s, t) = \langle e^{\Lambda t} P^T s, \tilde{R} e^{\Lambda t} P^T s \rangle$. Sabiendo que \tilde{R} posee ceros en la fila y columna n , entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s_z \partial s_y} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} P_{zi} P_{yj} \tilde{R}_{ji} e^{(\lambda_i + \lambda_j)t} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} P_{yi} P_{zj} \tilde{R}_{ji} e^{(\lambda_i + \lambda_j)t}. \quad (3.2.6)$$

De acuerdo a las características de \tilde{R} , en la Ecuación (3.2.6) se tiene que $\lambda_i + \lambda_j < 0$ para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Así que definiendo esta ecuación como $g(t)$, se sigue que $g(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, de tal forma que es integrable. De esta manera, se satisfacen las hipótesis de las Proposiciones 3.2.1 y 3.2.2. En consecuencia, el Jacobiano de la función característica es

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{\mu}}{\partial s_z \partial s_y} &= \frac{\partial \hat{\mu}}{\partial s_z} \left[-\frac{\lambda}{2} \int_0^\infty (A_y + B_y) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle e^{\Lambda t} P^T s, \tilde{\Sigma} e^{\Lambda t} P^T s \rangle \right\} dt \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_0^\infty (A_y + B_y) dt \right] + \hat{\mu}_{\tilde{X}}(P^T s) \left[-\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial s_z \partial s_y} dt \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda}{4} \int_0^\infty (A_z + B_z)(A_y + B_y) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle e^{\Lambda t} P^T s, \tilde{\Sigma} e^{\Lambda t} P^T s \rangle \right\} dt \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda}{2} \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial s_z \partial s_y} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle e^{\Lambda t} P^T s, \tilde{\Sigma} e^{\Lambda t} P^T s \rangle \right\} dt \right]. \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Por lo cual, el segundo momento de la distribución invariante es

$$\mathbb{E}(X_\infty^2(t))_k = - \frac{\partial^2 \hat{\mu}}{\partial s_i^2} \Big|_{s=0} = - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{P_{ki} P_{kj} (\tilde{R}_{ji} + \lambda \tilde{\Sigma}_{ji})}{\lambda_i + \lambda_j}. \quad (3.2.8)$$

La expresión (3.2.8) es dada en términos de los valores propios de la matriz L , la matriz P asociada a la descomposición de Jordan de L y las matrices de covarianza \tilde{R} del movimiento Browniano \tilde{W} y $\tilde{\Sigma}$ de la distribución de los saltos.

□

Capítulo 4

Ejemplos

De acuerdo al capítulo anterior, pudimos concluir que la distribución invariante del proceso

$$X(t) = e^{Lt}X(0) + \int_0^t e^{L(t-s)}dY(s), \quad t \geq 0, \quad (4.0.1)$$

dada en la Ecuación (3.1.34), está ligada a topología del grafo, explícitamente a la matriz P asociada a la Forma Canónica de Jordan de L y a los valores y vectores propios de L .

En el presente capítulo vamos a tomar tres tipos de grafos, con el fin de establecer las condiciones para la existencia de la distribución invariante de cada uno.

Basados en el Teorema 3.1.1, para cada tipo de grafo, requerimos determinar las características que deben cumplir las matrices de covarianza R del movimiento Browniano y Σ de la intensidad de los saltos, para satisfacer las hipótesis del literal (I) del Teorema 3.1.1.

Respecto a la condición (II) del Teorema 3.1.1, necesitamos que la distribución de los saltos satisfaga $\mathbb{E}\{X^2\} < \infty$. Ya que estamos tomando una distribución Gaussiana multivariada, por resultados dados en [20], se satisface esta condición.

4.1. Grafo estrella

Este tipo de grafo es un caso particular del bipartido. Se caracteriza por tener un vértice conectado a todos los demás, pero no existe conexión entre los nodos de la

periferia. En la Figura 4.1 se observa un ejemplo gráfico.

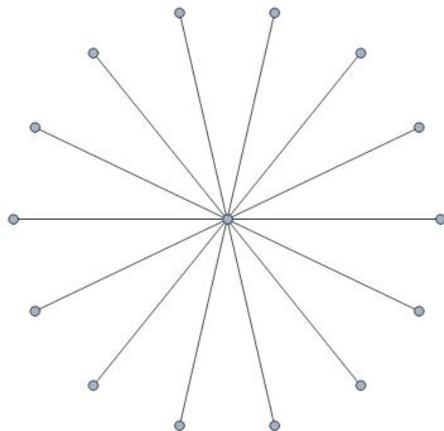


Figura 4.1: Grafo estrella de 15 vértices.

La matriz L de este grafo de n vértices es de la forma

$$L = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \frac{1}{n-1} & -1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \frac{1}{n-1} & & & & -1 \end{bmatrix}_{n \times n}. \quad (4.1.1)$$

Proposición 4.1.1. *Los valores propios de L son 0 , -1 y -2 con multiplicidad geométrica 1 , $n - 2$ y 1 respectivamente.*

Demostración. Por proposición 1.2.3, el $\lambda = 0$ es valor propio de L con multiplicidad 1.

Para verificar que $\lambda = -1$ es un valor propio, se puede observar a continuación que la matriz $L + I$ es singular

$$L + I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \frac{1}{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \frac{1}{n-1} & 0 & \dots & & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}. \quad (4.1.2)$$

Puesto que la matriz tiene dos filas linealmente independientes, se sigue que $\text{rank}(L + I) = 2$, por lo tanto, $\dim(\ker(L + I)) = n - 2$, es decir, la multiplicidad geométrica

del valor propio $\lambda = -1$ es $n - 2$.

Por otro lado, para $\lambda = -2$, la matriz $L + 2I$ es singular y está dada por

$$L + 2I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \frac{1}{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \frac{1}{n-1} & 0 & \dots & & 1 \end{bmatrix}_{n \times n} . \quad (4.1.3)$$

Como se observa, es posible escribir cada fila en términos de las $n - 1$ restantes, por lo cual este valor propio tiene multiplicidad 1.

☑

Basados en el Teorema de descomposición de Jordan [1.1.5](#), para el valor propio $\lambda = -1$, el número de bloques de tamaño 1×1 es $n - 2$; por lo tanto, la matriz Λ asociada a la forma de Jordan de L está dada por

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -2 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}_{n \times n} . \quad (4.1.4)$$

Conociendo ya los valores propios, podemos continuar caracterizando los vectores propios. Para $\lambda = -2$, de [\(4.1.3\)](#) se sigue que el siguiente es vector propio

$$v_1 = \begin{bmatrix} -(n-1) \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_n . \quad (4.1.5)$$

De forma similar, para $\lambda = 0$

$$v_0 = \begin{bmatrix} (n-1) \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_n . \quad (4.1.6)$$

Por otro lado, para $\lambda = -1$, si escalonamos la matriz (4.1.2), obtenemos

$$L + I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.1.7)$$

Luego, los vectores propios son:

$$v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_n, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_n, \dots, v_{n-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_n. \quad (4.1.8)$$

En consecuencia, la matriz P asociada a la descomposición canónica de Jordan de L es

$$P = \begin{bmatrix} -(n-1) & 0 & \dots & 0 & n-1 \\ 1 & -1 & \dots & -1 & 1 \\ 1 & 1 & & & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & & & 1 & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}. \quad (4.1.9)$$

Teniendo una expresión para la matriz P , queremos caracterizar P^{-1} en la fila n . Realizamos este procedimiento para definir las condiciones que deben satisfacer las matrices de covarianza R del movimiento Browniano y Σ de la distribución de la intensidad de los saltos basados en las Ecuaciones (3.1.22) y (3.1.28). Para calcular la inversa utilizaremos el método de cofactores; por tal motivo, computamos inicialmente el determinante de P utilizando el siguiente lema:

Lema 4.1.2. *Si tenemos una matriz de la forma*

$$B = \begin{bmatrix} -1 & \dots & -1 & 1 \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 1 \end{bmatrix}_{k \times k} \quad (4.1.10)$$

con $k \geq 3$, entonces $\det B = (-1)^{k-1}k$.

Demostración. Probemos por inducción sobre el tamaño de la matriz. Caso base, si $n = 3$, entonces

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad (4.1.11)$$

se sigue $\det B = 3$. Supongamos ahora que se cumple para k y probemos para una matriz de tamaño $k + 1$. Por lo tanto, el determinante es

$$\begin{aligned} |B| &= (-1)^{2k+2} \begin{vmatrix} -1 & \dots & -1 & 1 \\ 1 & & & 1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 1 \end{vmatrix}_{k \times k} + (-1)^{2k+1} \begin{vmatrix} -1 & \dots & -1 & -1 \\ 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 \end{vmatrix}_{k \times k} \\ &= (-1)^k (k + 1). \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

Logrando el resultado. ☑

Proposición 4.1.3. *El determinante de la matriz P definida en la Ecuación (4.1.9) es $(-1)^{2n-1} 2(n-1)^2$.*

Demostración. Realizando operaciones entre filas, obtenemos que el determinante está dado por

$$|P| = (-1)^{n+1} 2(n-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & 1 \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}. \quad (4.1.13)$$

Por el Lema 4.1.2, el resultado se sigue. ☑

Proposición 4.1.4. *La n -ésima fila de la matriz inversa de P es de la forma*

$$P_{n*}^{-1} = \left[\frac{1}{2(n-1)} \quad \dots \quad \frac{1}{2(n-1)} \right]_n. \quad (4.1.14)$$

Demostración. Calculando la inversa de la matriz a través de cofactores existen cuatro posibles casos para la dirección de v_0 :

- $P_{n,n}^{-1}$:

$$P_{n,n}^{-1} = \frac{(-1)^{2n}|P_{1,n}|}{|P|} \quad (4.1.15)$$

con

$$|P_{1,n}| = \begin{vmatrix} -(n-1) & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & & & 1 & 0 \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} ; \quad (4.1.16)$$

por lo tanto, el elemento P_{nn}^{-1} es

$$P_{nn}^{-1} = \frac{1}{2(n-1)}. \quad (4.1.17)$$

■ P_{n1}^{-1} :

$$P_{n1}^{-1} = \frac{(-1)^{n+1}|P_{1,n}|}{|P|} \quad (4.1.18)$$

para

$$|P_{1,n}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & 1 \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}. \quad (4.1.19)$$

Obteniendo entonces por el Lema 4.1.2

$$P_{n1}^{-1} = \frac{1}{2(n-1)}. \quad (4.1.20)$$

■ P_{n2}^{-1} :

$$P_{n2}^{-1} = \frac{(-1)^{n+2}|P_{2,n}|}{|P|} \quad (4.1.21)$$

para

$$|P_{2,n}| = \begin{vmatrix} -(n-1) & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & 1 \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}. \quad (4.1.22)$$

Luego, se sigue que la componente P_{n2}^{-1} de la matriz inversa es igual a

$$P_{n2}^{-1} = \frac{1}{2(n-1)}. \quad (4.1.23)$$

- P_{nj}^{-1} , para $2 < j < n$. Realizando intercambio entre columnas, obtenemos la misma submatriz para cada j , por lo tanto:

$$P_{nj}^{-1} = \frac{(-1)^{n+1}|P_{j,n}|}{|P|} \quad (4.1.24)$$

donde

$$|P_{j,n}| = \begin{vmatrix} -(n-1) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ 1 & & & 1 & 0 \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}. \quad (4.1.25)$$

Luego, esta componente está dada por

$$P_{nj}^{-1} = \frac{1}{2(n-1)}. \quad (4.1.26)$$

Obteniendo el resultado que se quería. ☑

Conociendo ya una expresión para P^{-1} , recordemos de la sección anterior del Teorema 3.1.1, que para garantizar la existencia de la distribución invariante requerimos que la fila n de las matrices $P^{-1}\sqrt{R}$ y $P^{-1}\sqrt{\Sigma}$ deben ser igual al vector fila de ceros, por lo tanto, para el caso del grafo estrella \sqrt{R} y $\sqrt{\Sigma}$ no pueden ser diagonales y, además deben cumplir

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sqrt{R_{ij}} &= 0, \\ \sum_{i=1}^n \sqrt{\Sigma_{ij}} &= 0, \quad j \in \{1, 2, \dots, n\}, \end{aligned} \quad (4.1.27)$$

es decir, estas matrices deben sumar cero en las columnas y ser semidefinidas positivas.

Por otro lado, de los momentos de la distribución invariante del proceso estocástico (3.0.10) asociada al grafo estrella, obtenemos que la media es cero de acuerdo a la Ecuación (3.2.2). El segundo momento, con base en el resultado obtenido en la Ecuación (3.2.1) queda en términos las matrices de covarianza $\tilde{\Sigma}$ y \tilde{R} y de los valores propios caracterizados en la Proposición 4.1.1.

Teorema 4.1.5. *La varianza para cada nodo k en términos de las matrices $\tilde{\Sigma}$ y \tilde{R} se divide en tres casos*

- Si $k = 1$

$$\text{Var}(X_\infty(t))_k = \frac{(n-1)^2}{2}(\tilde{R} + \lambda\tilde{\Sigma})_{11}. \quad (4.1.28)$$

- Si $k = 2$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_\infty(t))_k &= \frac{1}{4} \frac{(n-1)^2}{4} (\tilde{R} + \lambda\tilde{\Sigma})_{11} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} (\tilde{R} + \lambda\tilde{\Sigma})_{ji} \\ &\quad - \frac{1}{3} \sum_{j=2}^{n-1} \left[\frac{(n-1)^2}{4} (\tilde{R} + \lambda\tilde{\Sigma})_{j1} + \frac{(n-1)^2}{4} (\tilde{R} + \lambda\tilde{\Sigma})_{1j} \right] \end{aligned} \quad (4.1.29)$$

- Si $3 \leq k \leq n$:

$$\text{Var}(X_\infty(t))_k = \frac{1}{4}(\tilde{R} + \lambda\tilde{\Sigma})_{11} + \frac{1}{3} \left[(\tilde{R} + \lambda\tilde{\Sigma})_{k-1,1} + (\tilde{R} + \lambda\tilde{\Sigma})_{1,k-1} \right] + \frac{1}{2}(\tilde{R} + \lambda\tilde{\Sigma})_{k-1,k-1}. \quad (4.1.30)$$

4.1.1. Simulaciones

Teniendo caracterizada la información requerida para la existencia de la distribución invariante μ_∞ y la varianza de esta para cada nodo, en esta sección vamos a analizar numéricamente el cambio que experimenta μ_∞ respecto al tipo de vértice y al número de total de nodos del grafo.

Tomamos $\lambda = 1$ como la intensidad del proceso de Poisson. Recordemos por el Teorema 3.1.1 y la Ecuación (4.1.27), que las matrices de covarianza del movimiento Browniano $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y de la intensidad de los saltos $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ asociadas al proceso de Lévy son semidefinidas positivas y además tienen $n - 1$ grados de libertad. Para la simulación tomamos el caso $\sqrt{R} = \sqrt{\Sigma}$ con el fin de analizar el cambio que tiene la varianza respecto al número total de vértices del grafo. La siguiente matriz satisface la condición (4.1.27) y tiene en cuenta los grados de libertad

$$\sqrt{\Sigma} = \sqrt{R} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n-1} & -\frac{1}{(n-1)^2} & \cdots & -\frac{1}{(n-1)^2} \\ -\frac{1}{(n-1)^2} & \frac{1}{n-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\frac{1}{(n-1)^2} \\ -\frac{1}{(n-1)^2} & \cdots & -\frac{1}{(n-1)^2} & \frac{1}{n-1} \end{bmatrix}_{n \times n}. \quad (4.1.31)$$

La matriz es construida de esta manera para excluir los grados de libertad y para que sea proporcional a la cantidad de nodos que conforman el grafo, con el fin de tener una clara percepción del cambio de la distribución invariante y su varianza respecto al número de vértices. Además, para otorgar a todos los nodos la misma varianza y covarianza.

Para cumplir con el propósito de esta sección, se realizó inicialmente un histograma obtenido a partir de simulaciones del proceso estocástico X y se comparó con la distribución invariante μ_∞ . Esta fue calculada a partir de la transformada inversa de Fourier discreta, utilizando el algoritmo de Transformada Rápida de Fourier. Para la implementación de este algoritmo, se realizó una discretización de la expresión de $\hat{\mu}_\infty$ y posteriormente se interpolaron los datos obtenidos.

En la Figura 4.2 se puede visualizar la trayectoria de los dos tipos de vértices; en las cuales las líneas verticales simbolizan los saltos del proceso de Poisson compuesto. En la Figura 4.3 se observa la comparación del histograma con la distribución invariante para los vértices de la periferia y el nodo central.

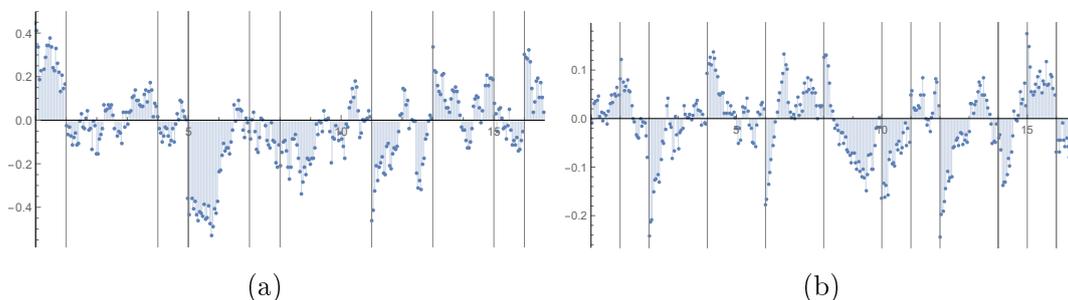


Figura 4.2: Trayectoria para un grafo estrella de 10 vértices de (a) vértice central y (b) vértice de la periferia.

A partir de la Figura 4.4 concluimos que si un sistema es modelado a partir de un grafo estrella y el proceso de Lévy tiene asociado a sí matrices de la forma (4.1.31), entonces la distribución invariante es igual para los vértices de la periferia y el nodo central, es decir, la distribución invariante es indiferente a la clase de nodo.

Analizando el resultado desde el punto de vista de la varianza asociada al nodo central y nodo de la periferia, en la Figura 4.5 se observa que la varianza para cada tipo de nodo tiene un cambio marginal respecto al incremento del número de

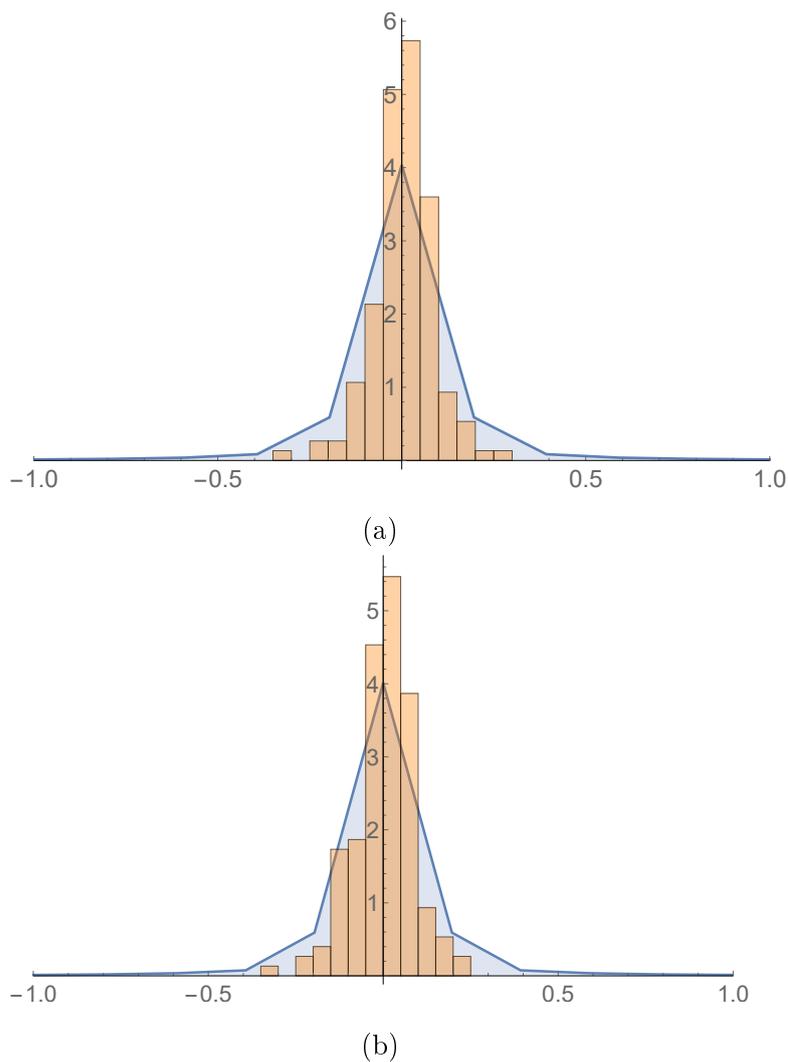
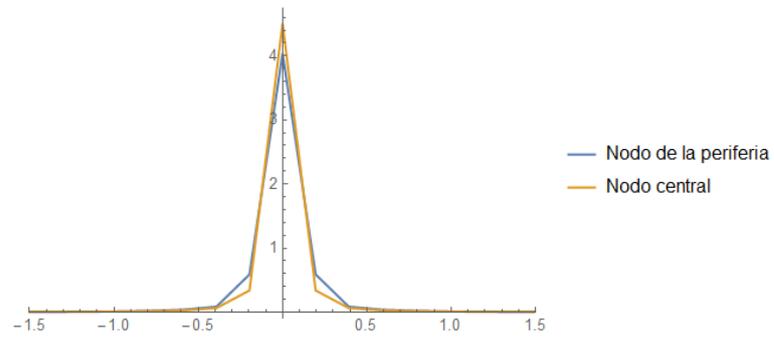


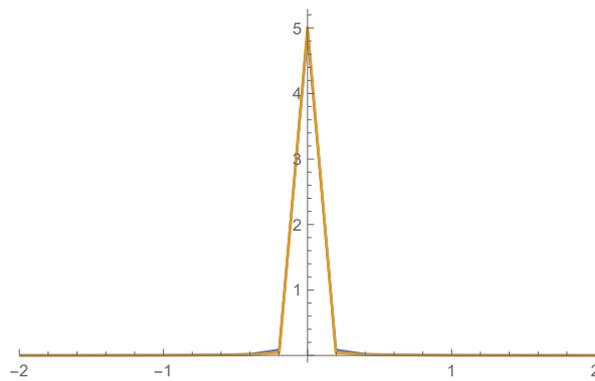
Figura 4.3: Histograma y distribución invariante para un grafo de 10 vértices (a) del nodo central y (b) del nodo de la periferia.

vértices. Esto se debe a la forma de creación de las matrices \sqrt{R} y $\sqrt{\Sigma}$, las cuales tienen en cuenta los grados de libertad. Además concluimos que las varianzas para los dos tipos de nodos son aproximadamente iguales. Asimismo, en la Figura 4.5 se incluye una comparación de la varianza muestral y la obtenida a partir del Teorema 4.1.5.

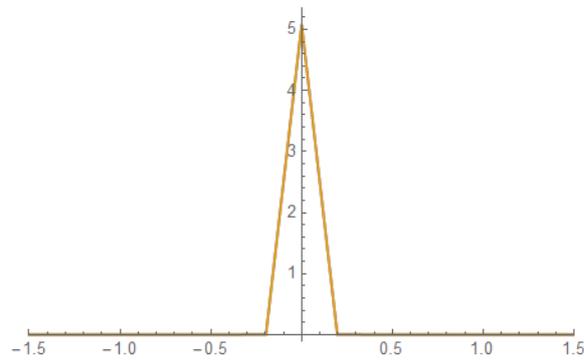
Concluimos a partir de esta información que la distribución invariante de (4.0.1) para un sistema modelado con un grafo estrella, cuyas matrices \sqrt{R} del movimiento Browniano y $\sqrt{\Sigma}$ de la distribución de la intensidad de los saltos son de la forma (4.1.31), la distribución invariante es igual para los vértices de la periferia y del centro y, además la varianza disminuye en menor escala a medida que el número de



(a)



(b)



(c)

Figura 4.4: Comparación de la distribución invariante de los dos tipos de nodo, para grafos de diferente tamaño. (a) 10 vértices. (b) 50 vértices. (c) 120 vértices.

vértices aumenta.

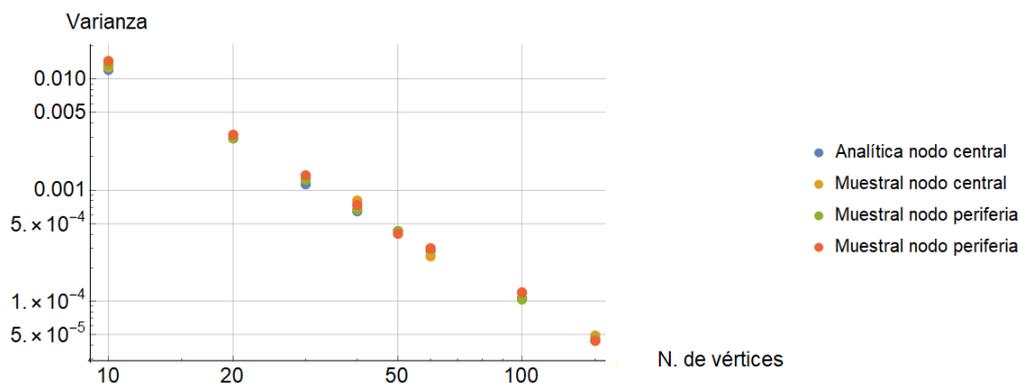


Figura 4.5: Varianza vs. Número de nodos

4.2. Grafo completo

Un grafo completo de n vértices satisface que cada nodo está conectado con los restantes $n - 1$ vecinos. En la Figura 4.6 se observa un ejemplo gráfico.

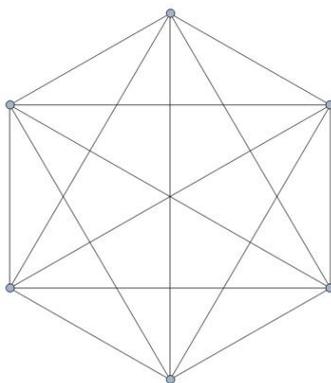


Figura 4.6: Grafo completo de 5 vértices.

La matriz L de este grafo de n vértices es de la forma

$$L = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & -1 & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & & -1 \end{bmatrix}_{n \times n} . \tag{4.2.1}$$

Proposición 4.2.1. *Los valores propios de la matriz L son 0 y $-\frac{n}{n-1}$ con multiplicidad geométrica 1 y $n-1$ respectivamente.*

Demostración. Por Proposición 1.2.3, el valor propio $\lambda = 0$ tiene multiplicidad 1 . Analicemos ahora la matriz asociada a $\lambda = -\frac{n}{n-1}$:

$$L + \frac{n}{n-1}I = \begin{bmatrix} \frac{n}{n-1} & \cdots & \frac{n}{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{n}{n-1} & \cdots & \frac{n}{n-1} \end{bmatrix}_{n \times n}. \quad (4.2.2)$$

Se observa que es una matriz singular, por lo tanto es valor propio. Además, $\dim(\text{rank}(L + \frac{n}{n-1}I)) = n - 1$.

□

De acuerdo al Teorema de descomposición de Jordan 1.1.5, el número de bloques de tamaño 1×1 asociado al valor propio $\lambda = -\frac{n}{n-1}$ es $n - 1$, luego, la matriz Λ asociada a la forma de Jordan de la matriz L es

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \frac{-n}{n-1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \frac{-n}{n-1} & \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}. \quad (4.2.3)$$

El vector propio asociado a $\lambda = 0$ es

$$v_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_n. \quad (4.2.4)$$

Por otro lado, para $\lambda = -\frac{n}{n-1}$, procedemos a escribir la forma escalonada de la matriz

$$L + \frac{n}{n-1}I = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}; \quad (4.2.5)$$

concluyendo así que los vectores propios son

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_n, v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_n, \dots, v_{n-1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_n. \quad (4.2.6)$$

Por ende, la matriz P asociada a la descomposición de Jordan de la matriz L que representa un grafo completo es

$$P = \begin{bmatrix} -1 & \dots & \dots & -1 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 1 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}. \quad (4.2.7)$$

Como hicimos en la sección anterior, nos interesa conocer la fila n de P^{-1} , ya que esta nos dará las condiciones que deben satisfacer las matrices $\sqrt{\Sigma}$ asociada a la intensidad de los saltos del proceso de Poisson compuesto y \sqrt{R} del movimiento Browniano.

Teorema 4.2.2. *La n -ésima fila de la matriz P^{-1} asociada a la descomposición de Jordan de la matriz L que representa el grafo completo satisface*

$$P_{n*}^{-1} = \left[\frac{1}{n} \quad \dots \quad \frac{1}{n} \right]_n. \quad (4.2.8)$$

Demostración. Recordemos por el Lema 4.1.2 que el determinante de P es igual a $(-1)^{n-1}n$. Utilizando el método de cofactores, para esta matriz P existen tres posibles casos:

- P_{nj} , con $1 < j < n$:

$$P_{nj}^{-1} = \frac{(-1)^{n+j}|P_{jn}|}{|P|} \quad (4.2.9)$$

donde

$$|P_{jn}| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & \dots & \dots & -1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & 1 & 0 \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}. \quad (4.2.10)$$

Por lo tanto, el elemento de la inversa está dado por

$$P_{nj}^{-1} = \frac{1}{n}. \quad (4.2.11)$$

- P_{nn}^{-1} :

$$P_{nn}^{-1} = \frac{(-1)^{2n}|P_{nn}|}{|P|} \quad (4.2.12)$$

para

$$|P_{nn}| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & & & \vdots \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}. \quad (4.2.13)$$

Por ende, este componente es igual a

$$P_{nn}^{-1} = \frac{1}{n}. \quad (4.2.14)$$

- P_{n1}^{-1} :

$$P_{nn}^{-1} = \frac{(-1)^{2n}}{|P|} \det I_{(n-1)} \quad (4.2.15)$$

$$= \frac{1}{n}. \quad (4.2.16)$$

Completando el resultado. ☑

Debido a que la n -ésima fila de la matriz P^{-1} es constante como en el caso del grafo estrella, teniendo en cuenta las condiciones requeridas para las matrices \sqrt{R} y $\sqrt{\Sigma}$ dadas por el Teorema 3.1.1, concluimos que estas matrices no pueden ser diagonales y deben satisfacer la Ecuación (4.1.27).

Ya teniendo identificadas las condiciones que deben satisfacer las matrices $\sqrt{\Sigma}$ y \sqrt{R} , procedemos a analizar los momentos de este tipo de grafo. Sabemos que la media es cero de acuerdo al resultado obtenido en (3.2.2).

El segundo momento, basados en la Ecuación (3.2.1) depende de los valores propios de L caracterizados en la Proposición 4.2.1 y de las matrices P , $\tilde{\Sigma}$ y \tilde{R} .

Teorema 4.2.3. *La varianza para cada nodo i en términos de las matrices $\tilde{\Sigma}$ y \tilde{R} se divide en dos casos*

- Si $2 < i \leq n$:

$$\text{Var}(X_\infty(t))_i = \frac{n-1}{n} \left(\tilde{R} + \lambda \tilde{\Sigma} \right)_{i-1, i-1} \quad (4.2.17)$$

- Si $i = 1$ o $i = 2$

$$\text{Var}(X_\infty(t))_i = \frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \left(\tilde{R} + \lambda \tilde{\Sigma} \right)_{ji}. \quad (4.2.18)$$

4.2.1. Simulaciones

En esta sección analizaremos numéricamente los resultados obtenidos, con el fin de concluir la relación entre la distribución invariante y el número de vértices del grafo. Como en el caso del grafo estrella, se realizaron simulaciones del proceso y se comparó el histograma con la distribución invariante, que fue calculada a través de la transformada inversa de Fourier discreta a través del algoritmo de Transformada Rápida de Fourier, tal como se realizó en el grafo estrella.

Tomamos $\lambda = 1$ como la intensidad del proceso de Poisson. Para el caso del grafo completo las matrices de covarianza del movimiento Browniano $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y de la intensidad de los saltos $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ deben satisfacer las condiciones dadas por el Teorema 3.1.1 y la Ecuación (4.1.27). Por tal motivo, definimos $\sqrt{R} = \sqrt{\Sigma}$ dadas en la Ecuación (4.1.31).

Para el caso del grafo completo todos los nodos son iguales respecto a la estructura del grafo. Además, de acuerdo a la matriz definida en (4.1.31), los vértices tienen igual varianza y covarianza; por tal motivo, expondremos resultados de un único nodo.

En la Figura 4.7 se observa una comparación del histograma y la distribución invariante; además se incluye la trayectoria asociada a un vértice, en el cual las líneas verticales indican el instante de tiempo en el cual se presentó un salto del proceso de Poisson compuesto. Por otro lado, en la Figura 4.8 se realiza una comparación de la distribución en relación con el número total de vértices.

En la Figura 4.9 se realiza la comparación entre la varianza obtenida en el Teorema 4.2.3 y la muestral. A partir de esta gráfica observamos que se presenta una leve disminución de la varianza respecto al incremento del número de nodos. Como en el caso del grafo estrella, esto es debido a la construcción de las matrices \sqrt{R} y $\sqrt{\Sigma}$ que fueron creadas teniendo en cuenta los grados de libertad y fue escalada con el número de nodos.

De estos resultados podemos concluir que para los sistemas modelados a partir del grafo completo, la distribución invariante de (4.0.1) es igual para todos los vértices. La varianza disminuye levemente cuando el número de nodos aumenta, siempre que las matrices de covarianza R y Σ del movimiento Browniano y de la distribución de los saltos respectivamente tengan en cuenta los grados de libertad, es decir, sean de la forma (4.1.31).

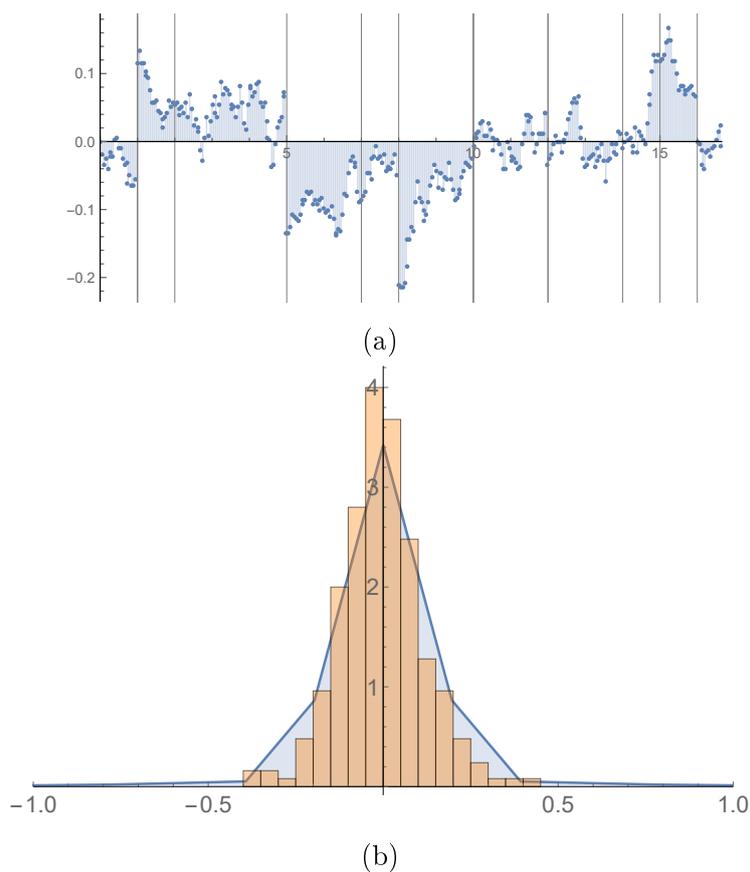
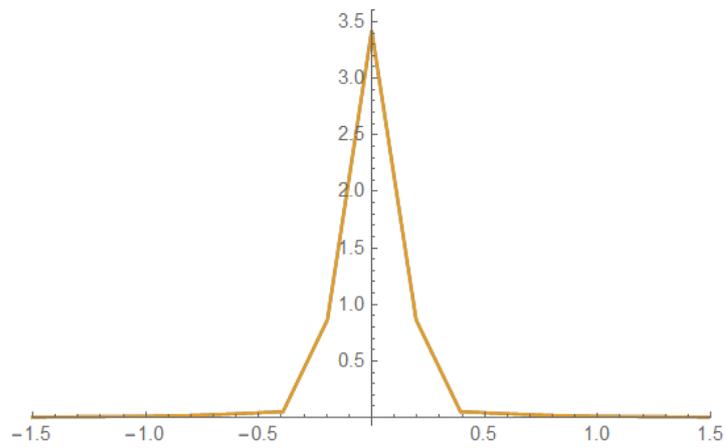
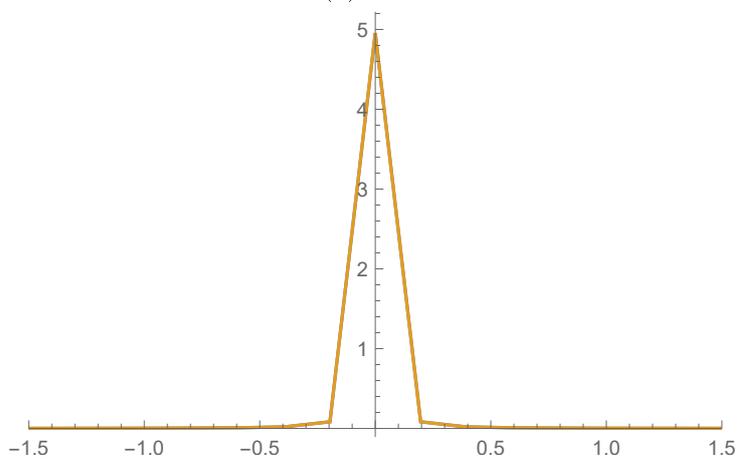


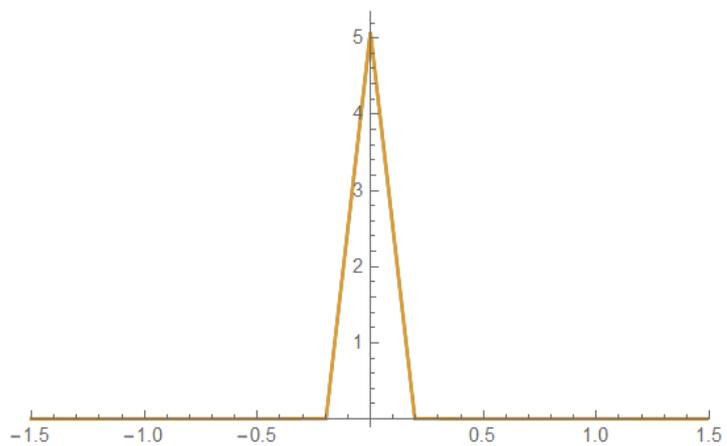
Figura 4.7: (a) Trayectoria de un vértice perteneciente a un grafo de 10 nodos. (b) Histograma y distribución invariante de un nodo perteneciente a un grafo completo de 10 vértices.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.8: Comparación de la distribución invariante para grafos de diferente tamaño. (a) 10 vértices. (b) 50 vértices. (c) 120 vértices

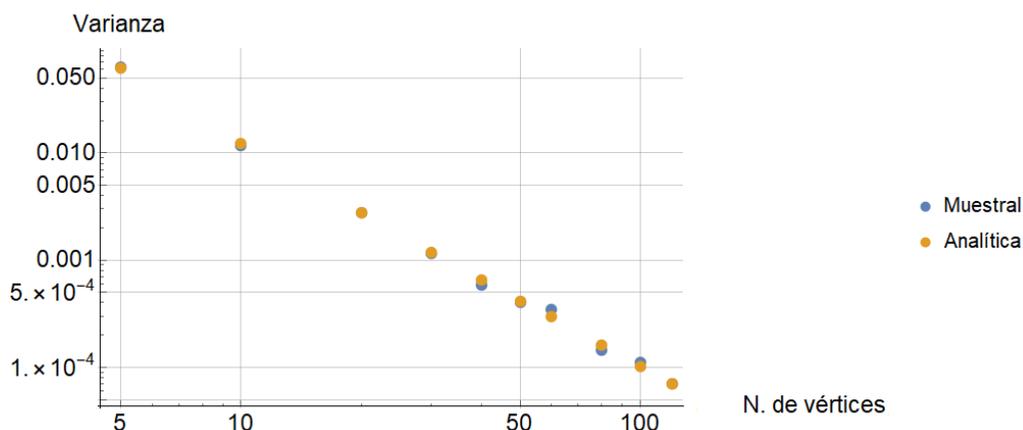


Figura 4.9: Varianza vs. Número de nodos.

4.3. Grafo bipartido completo

Un grafo bipartido es aquel cuyos vértices se pueden separar en conjuntos disjuntos A y B , es decir, las aristas crean conexiones entre los dos conjuntos. En particular, para el grafo bipartido completo, todos los elementos del conjunto A están conectados con cada uno de los nodos de B y viceversa. En la Figura 4.10 se observa un ejemplo gráfico.

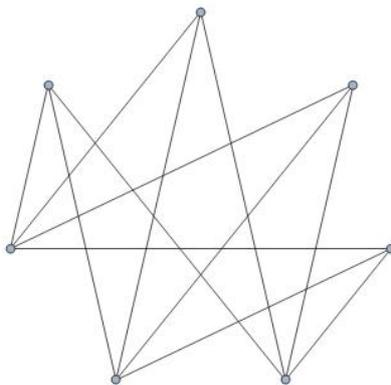


Figura 4.10: Grafo bipartido completo $K_{5,2}$.

Si suponemos que la cardinalidad de los conjuntos A y B son k y r respectivamente,

con $k \geq r$, entonces la matriz L del grafo está dada por

$$L = \left[\begin{array}{c|c} -\mathbf{I}_{k \times k} & \left(\frac{1}{k}\right)_{k \times r} \\ \hline \left(\frac{1}{r}\right)_{r \times k} & -\mathbf{I}_{r \times r} \end{array} \right]_{(k+r) \times (k+r)}. \quad (4.3.1)$$

Proposición 4.3.1. *Los valores propios de L son $-2, -1, 0$ con multiplicidad geométrica $1, r + k - 2$ y 1 respectivamente.*

Demostración. El resultado del valor propio $\lambda = 0$ se sigue de la Proposición 1.2.3.

Por otro lado, para $\lambda = -1$,

$$L + I = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0}_{k \times k} & \left(\frac{1}{k}\right)_{k \times r} \\ \hline \left(\frac{1}{r}\right)_{r \times k} & \mathbf{0}_{r \times r} \end{array} \right]_{(k+r) \times (k+r)}. \quad (4.3.2)$$

es evidentemente una matriz singular, obteniendo entonces que este es un valor propio. Se observa que tenemos dos filas linealmente independientes, así que la multiplicidad de este es $r + k - 2$.

Finalmente, para $\lambda = -2$,

$$L + 2I = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_{k \times k} & \left(\frac{1}{k}\right)_{k \times r} \\ \hline \left(\frac{1}{r}\right)_{r \times k} & \mathbf{I}_{r \times r} \end{array} \right]_{(k+r) \times (k+r)}, \quad (4.3.3)$$

de donde se observa que es posible escribir una fila en términos de las $r + k - 1$ restantes, así que este es un valor propio y tiene multiplicidad 1.

✓

Basados en el Teorema de descomposición de Jordan 1.1.5, el número de bloques de tamaño 1×1 asociados al valor propio $\lambda = -1$ es $n - 2$, obteniendo entonces que la matriz Λ de la forma de Jordan asociada a la matriz L para este tipo de grafos es

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -2 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -1 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}_{(k+r) \times (k+r)}. \quad (4.3.4)$$

Continuemos ahora con la caracterización de los vectores propios de la matriz L . El vector propio asociado a $\lambda = -2$ es

$$v_1 = \begin{bmatrix} \left(-\frac{r}{k}\right)_k \\ \mathbf{1}_r \end{bmatrix}_{k+r}. \quad (4.3.5)$$

Por otro lado, con el fin de caracterizar los vectores propios correspondientes a $\lambda = -1$ escalonamos la matriz L :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \dots & 1 & & & \\ 0 & \dots & 0 & & \mathbf{0}_{k \times r} & \\ \vdots & & \vdots & & & \\ 0 & \dots & 0 & & & \\ \hline & & & \mathbf{0}_{r \times k} & 1 & \dots & 1 \\ & & & & 0 & \dots & 0 \\ & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & 0 & \dots & 0 \end{array} \right]_{(k+r) \times (k+r)}. \quad (4.3.6)$$

Por lo tanto los vectores propios son:

$$v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{r+k}, \dots, v_k = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{r+k} \leftarrow k \quad (4.3.7)$$

$$v_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{r+k} \leftarrow k+1, \dots, v_{k+r-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{r+k} \leftarrow k+1. \tag{4.3.8}$$

Finalmente, el vector propio asociado a $\lambda = 0$ es

$$v_0 = \begin{bmatrix} \left(\frac{r}{k}\right)_k \\ \hline \mathbf{1}_r \end{bmatrix}_{k+r}. \tag{4.3.9}$$

De lo anterior obtenemos que la matriz P de la descomposición de Jordan de L es

$$P = \left[\begin{array}{cccc|cccc} -\frac{r}{k} & -1 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 & \frac{r}{k} \\ \vdots & 1 & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & & & \vdots \\ -\frac{r}{k} & & & 1 & 0 & \dots & 0 & \frac{r}{k} \\ \hline 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & -1 & 1 \\ \vdots & & & & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & & & 1 & 1 \end{array} \right]_{(r+k) \times (r+k)}. \tag{4.3.10}$$

Como se ha realizado en las secciones anteriores, procedemos a caracterizar la fila $(r + k)$ de la matriz inversa de P . Para eso, utilizamos el método de cofactores.

Con el fin de facilitar el cálculo del determinante de la matriz P , realizamos opera-

ciones elementales entre filas y columnas extrayendo la siguiente matriz:

$$P = \left[\begin{array}{cccc|cccc} -r & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & r \\ -\frac{r}{k} & 1 & & & & & & \frac{r}{k} \\ \vdots & & \ddots & & & & & \vdots \\ -\frac{r}{k} & & & 1 & & & & \frac{r}{k} \\ \hline & & & & -1 & \dots & -1 & 2 \\ & & & \mathbf{0}_{r \times k} & 1 & & & \vdots \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 1 & 2 \end{array} \right]_{(r+k) \times (r+k)} \quad (4.3.11)$$

Obteniendo una matriz triangular superior por bloques, la cual tiene como determinante el producto de las diagonales. Se sigue que el determinante del primer bloque es $(-1)^{k+1}r$. Por otro lado, el segundo bloque de la diagonal tiene la forma de la Proposición 4.1.2, presentando una diferencia en la última columna, así que el determinante es $(-1)^{r-1}2r$. Por lo tanto,

$$\det P = (-1)^{k+r}2r^2. \quad (4.3.12)$$

Teorema 4.3.2. *La n -ésima fila de la inversa de la matriz P de la descomposición canónica de Jordan de L satisface*

$$P_{n*}^{-1} = \left[\frac{1}{2r} \quad \dots \quad \frac{1}{2r} \right]_{(r+k)}. \quad (4.3.13)$$

Demostración. Dividimos en cuatro casos los elementos de la inversa:

i) $P_{r+k,r+k}^{-1}$:

$$P_{r+k,r+k}^{-1} = \frac{(-1)^{2r+2k}|P_{r+k,r+k}|}{|P|} \quad (4.3.14)$$

donde

$$|P_{r+k,r+k}| = \left| \begin{array}{cccc|cccc} -r & 0 & \dots & 0 & & & & \\ -\frac{r}{k} & 1 & & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & & \\ -\frac{r}{k} & & & 1 & & & & \\ \hline & & & & -1 & \dots & -1 & -1 \\ & & & \mathbf{0}_{r \times k} & 1 & & & 0 \\ & & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & & 1 & 0 \end{array} \right|_{(r-1+k) \times (r-1+k)} ; \quad (4.3.15)$$

por lo tanto

$$P_{r+k,r+k}^{-1} = \frac{1}{2r}. \quad (4.3.16)$$

II) $P_{r+k,1}^{-1}$:

$$P_{r+k,1}^{-1} = \frac{(-1)^{r+k+1}|P_{1,r+k}|}{|P|} \quad (4.3.17)$$

$$|P_{1,r+k}| = \left| \begin{array}{ccccc|cccc} -\frac{r}{k} & & & & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & & & & \\ -\frac{r}{k} & & & & & & & & & & \\ \hline -\frac{r}{k} & 0 & \dots & 0 & 1 & & & & & & \\ 1 & -1 & \dots & -1 & 0 & & & & & & \\ \vdots & 1 & & & \vdots & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & & & \\ 1 & & & & 1 & 0 & & & & & \end{array} \right|_{(r+k-1) \times (r+k-1)} \quad (4.3.18)$$

por lo cual

$$P_{r+k,1}^{-1} = \frac{1}{2r}. \quad (4.3.19)$$

III) $P_{r+k,j}^{-1}$, para $1 < j \leq k$. Realizando operaciones elementales entre filas y columnas de manera adecuada en la matriz adjunta, entonces:

$$P_{r+k,j}^{-1} = \frac{(-1)^{r+k+j}|P_{j,r+k}|}{|P|} \quad (4.3.20)$$

para

$$|P_{j,r+k}| = \left| \begin{array}{ccccc|cccc} -\frac{r}{k} & & & & & -1 & \dots & & -1 & & \\ \vdots & & & & & 1 & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & & & \vdots \\ -\frac{r}{k} & & & & & & & & & 1 & 0 \\ \hline 1 & -1 & \dots & -1 & & & & & & & \\ \vdots & 1 & & & & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & & & \\ 1 & & & & 1 & & & & & & \end{array} \right|_{(r+k-1) \times (r+k-1)} \quad (4.3.21)$$

Así pues, el elemento de la inversa está dado por

$$P_{r+k,j}^{-1} = \frac{1}{2r}. \quad (4.3.22)$$

IV) $P_{r+k,j}^{-1}$, para $k + 1 \leq j < k + r$. Realizando operaciones elementales entre filas y columnas de manera adecuada en la matriz adjunta, se sigue:

$$P_{r+k,j}^{-1} = \frac{(-1)^{r+k+j} |P_{j,r+k}|}{|P|} \tag{4.3.23}$$

donde

$$|P_{j,r+k}| = \left| \begin{array}{c|ccc} -\frac{r}{k} & & & \\ \vdots & & & \\ -\frac{r}{k} & & & \\ \hline -r & & & \\ 1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ \vdots & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ 1 & & & 1 & 0 \end{array} \right|_{(r+k-1) \times (r+k-1)} ; \tag{4.3.24}$$

obteniendo finalmente

$$P_{r+k,j}^{-1} = \frac{1}{2r}. \tag{4.3.25}$$

Consiguiendo finalmente el resultado.



Resaltamos que los vectores propios asociados a $\lambda = 0$ y a $\lambda = -2$ pueden reescribirse como

$$v_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_k \\ \hline \left(-\frac{k}{r}\right)_r \end{bmatrix}_{k+r}, v_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_k \\ \hline \left(\frac{k}{r}\right)_r \end{bmatrix}_{k+r}. \tag{4.3.26}$$

Así que el resultado de la n -ésima fila de la matriz inversa P^{-1} es equivalente a

$$P_{n*}^{-1} = \left[\frac{1}{2k} \quad \dots \quad \frac{1}{2k} \right]_{(r+k)}. \tag{4.3.27}$$

Sabiendo que la n -ésima fila de P^{-1} es constante como en los tipos de grafos estudiados anteriormente, obtenemos entonces que para garantizar las condiciones sobre las matrices $\sqrt{\Sigma}$ y \sqrt{R} dadas en el Teorema 3.1.1, estas deben satisfacer la Ecuación (4.1.27).

El valor esperado de la distribución invariante del sistema que es modelado a partir de un grafo bipartido completo es cero, de acuerdo a la Ecuación (3.2.2). Y el segundo momento que depende de los valores propios de L dados en la Proposición 4.3.1, el parámetro λ y las matrices $\tilde{\Sigma}$ y \tilde{R} se resume en el siguiente teorema.

Teorema 4.3.3. *La varianza para cada nodo m en términos de las matrices $\tilde{\Sigma}$ y \tilde{R} se divide en cuatro casos*

- Si $m = 1$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_\infty(t))_m &= \frac{r^2}{4k^2} \left(\tilde{R} + \lambda \tilde{\Sigma} \right)_{11} + \frac{r}{3k} \sum_{j=1}^k \left[\left(\tilde{R} + \lambda \tilde{\Sigma} \right)_{j1} + \left(\tilde{R} + \lambda \tilde{\Sigma} \right)_{1j} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \left(\tilde{R} + \lambda \tilde{\Sigma} \right)_{ji}. \end{aligned} \quad (4.3.28)$$

- Si $2 \leq m \leq k$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_\infty(t))_m &= \frac{r^2}{4k^2} \left(\tilde{R} + \lambda \tilde{\Sigma} \right)_{11} - \frac{r}{3k} \left[\left(\tilde{R} + \lambda \tilde{\Sigma} \right)_{m1} + \left(\tilde{R} + \lambda \tilde{\Sigma} \right)_{1m} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\tilde{R} + \lambda \tilde{\Sigma} \right)_{mm}. \end{aligned} \quad (4.3.29)$$

- Si $m = k + 1$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_\infty(t))_m &= \frac{1}{4} \left(\tilde{R} + \lambda \tilde{\Sigma} \right)_{11} - \frac{1}{3} \sum_{j=k+1}^{k+r-1} \left[\left(\tilde{R} + \lambda \tilde{\Sigma} \right)_{j1} + \left(\tilde{R} + \lambda \tilde{\Sigma} \right)_{1j} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=k+1}^{k+r-1} \sum_{j=k+1}^{k+r-1} \left(\tilde{R} + \lambda \tilde{\Sigma} \right)_{ji}. \end{aligned} \quad (4.3.30)$$

- Si $k + 2 \leq m \leq r + k$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_\infty(t))_m &= \frac{1}{4} \left(\tilde{R} + \lambda \tilde{\Sigma} \right)_{11} + \frac{1}{3} \left[\left(\tilde{R} + \lambda \tilde{\Sigma} \right)_{m1} + \left(\tilde{R} + \lambda \tilde{\Sigma} \right)_{1m} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\tilde{R} + \lambda \tilde{\Sigma} \right)_{mm}. \end{aligned} \quad (4.3.31)$$

4.3.1. Simulaciones

Tal cual como se realizó en la sección 4.2.1, procedemos a analizar numéricamente la relación entre el número de vértices y el cambio que se efectúa sobre la distribución invariante. Definimos $\lambda = 1$ como parámetro del proceso de Poisson compuesto. Para garantizar la existencia de la distribución invariante asociada este tipo de grafo de acuerdo al Teorema 3.1.1 y la Ecuación (4.1.27), tomamos las matrices $\sqrt{R} = \sqrt{\Sigma}$ definidas en (4.1.31), con el fin de analizar el cambio que tiene la varianza de cada tipo de nodo respecto al número total de vértices. Dadas las características de la matriz (4.1.31), todos los nodos tienen la misma varianza.

Recordemos el grafo bipartido completo posee dos conjuntos de vértices disjuntos; uno de ellos lo denotaremos con el conjunto menor y el otro el conjunto mayor.

En la Figura 4.11, se observan las trayectorias para cada tipo vértice, donde las líneas verticales muestran la ocurrencia de un salto asociado al proceso de Poisson compuesto. Y en la Figura 4.12 se observa la comparación entre la distribución invariante de los dos tipos de nodos con su respectivo histograma. La comparación de las distribuciones de ambos tipos de nodos se observa en la Figura 4.13 , a partir de la cual concluimos que son aproximadamente iguales, independiente del número total de vértices.

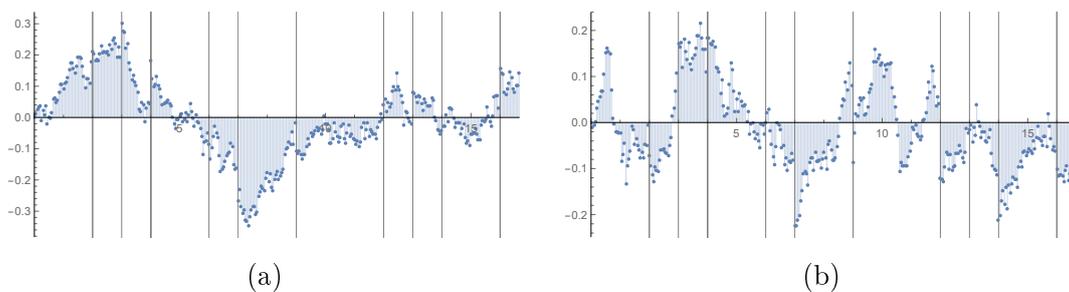


Figura 4.11: Trayectoria para un grafo de 10 vértices de (a) vértice perteneciente al grupo menor y (b) vértice perteneciente al grupo mayor.

En la Figura 4.14 se ilustra la comparación de la varianza obtenida analíticamente a partir del Teorema 4.3.3 y la varianza muestral. Además se puede evidenciar que la varianza para los dos tipos de nodos disminuye levemente a medida que el número de vértices aumenta. Este hecho, se debe a la selección de las matrices R y Σ que

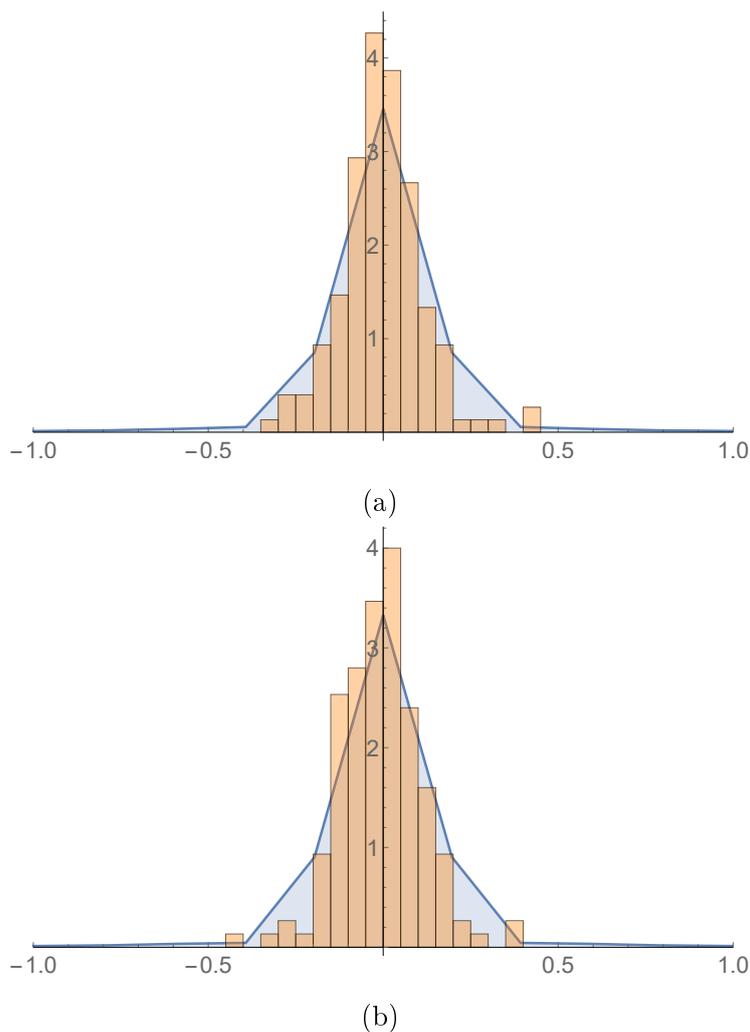


Figura 4.12: Histograma y distribución invariante de un grafo de 10 vértices para (a) Vértice del grupo menor y (b) Vértice del grupo mayor.

fueron construidas teniendo en cuenta los grados de libertad.

Concluimos de esta sección que la distribución invariante para (4.0.1) de un grafo bipartido completo posee una varianza que disminuye en pequeña escala en relación a la cantidad total de vértices que forman el grafo, siempre y cuando las matrices de covarianza del movimiento Browniano R y Σ de la distribución de los saltos tengan en cuenta los grados de libertad, es decir, sean construidas a partir de las matrices de la forma (4.1.31). Además, la distribución invariante no depende del tipo de vértice.

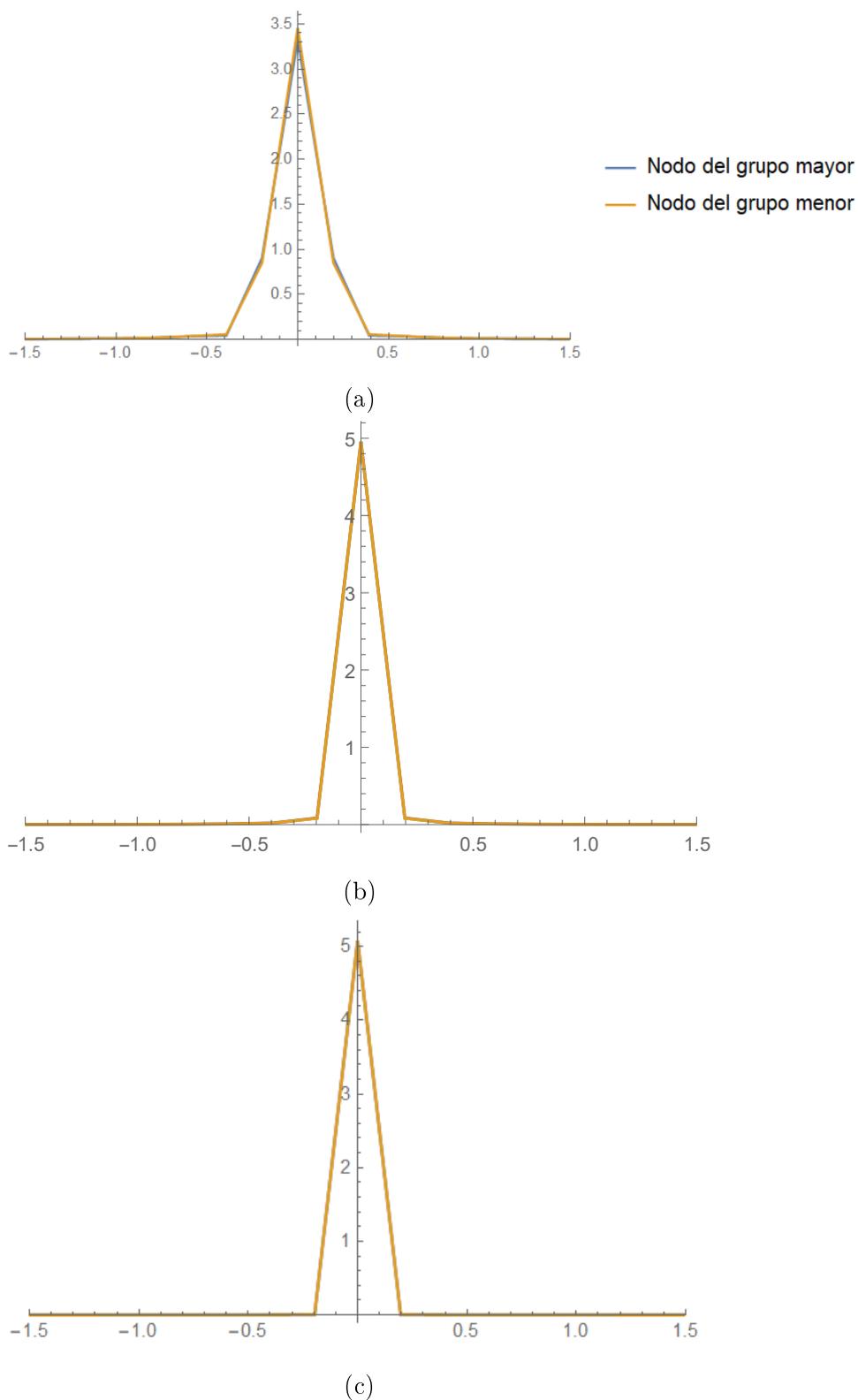


Figura 4.13: Comparación de la distribución invariante de cada tipo de nodo para grafos de diferente tamaño. (a) 10 vértices. (b) 50 vértices. (c) 120 vértices.

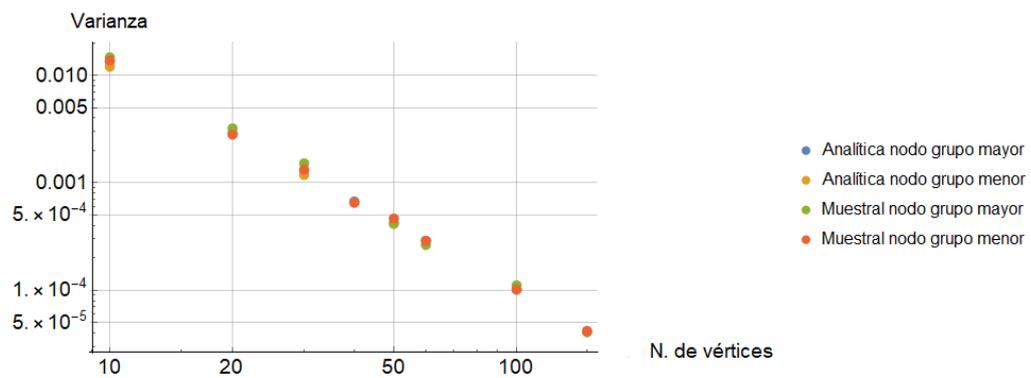


Figura 4.14: Varianza vs. Número de nodos.

Conclusiones

En este trabajo se estudian las condiciones de necesidad y suficiencia para la existencia de la distribución invariante μ_∞ de un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ del tipo Ornstein–Uhlenbeck que modela la dinámica de un sistema conservativo en un grafo. Por tratarse de un sistema conservativo, entonces la matriz L que representa la estructura del sistema es semidefinida positiva, cuyo valor propio cero tiene multiplicidad geométrica uno.

El proceso X es generado por un proceso de Lévy $Y = \{Y(t) : t \geq 0\}$, definido a través de un movimiento Browniano con matriz de covarianza $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y un proceso de Poisson compuesto con parámetro de intensidad $\lambda > 0$ y distribución de los saltos Gaussiana multivariada con media cero y matriz de covarianza $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Las condiciones sobre el proceso de Lévy Y para la existencia de μ_∞ fueron determinadas principalmente por la conservatividad del sistema, es decir, por el valor propio cero. Para garantizar la existencia de μ_∞ , se determinó que R y Σ deben ser semidefinidas positivas y además deben satisfacer cierta condición respecto al producto matricial con la matriz P^{-1} , asociada a la descomposición canónica de Jordan de L .

Para analizar numéricamente los resultados obtenidos, se tomaron tres tipos de grafos diferentes. Para cada uno de ellos, las matrices de difusión \sqrt{R} y $\sqrt{\Sigma}$ deben sumar cero por columnas para certificar la existencia de μ_∞ . Con el fin de estimar la relación entre la estructura del grafo y μ_∞ se tomó el caso $R = \Sigma$.

Se expusieron gráficas a partir de las cuales se concluyó que la distribución invariante asociada a las tres clases de grafos es igual para todos los nodos, pues no se hace distinción alguna entre los tipos de vértices que conforman el grafo. Para el grafo completo este es un resultado esperado, pues todos los vértices tienen la misma cantidad de conexiones; por el contrario, para el grafo bipartido completo y estrella esta es una conclusión singular, pues cada uno de ellos tiene diferentes clases

de nodos de acuerdo a la conectividad.

Tomando matrices de difusión inversamente proporcionales al número de nodos, encontramos que para cada tipo grafo la varianza escala con el número total de vértices, esto nos indica que a medida que el número de nodos aumenta, la forma de la función de la distribución invariante se va a agrupando respecto a la media. Además la varianza es igual para cada tipo de nodo.

Resaltamos asimismo que μ_∞ no es Gaussiana, a pesar de que todas sus componentes si lo son. De acuerdo a resultados del Capítulo 1, esto se debe a que su función característica no representa una Gaussiana. Esto nos lleva a concluir que las componentes iniciales del proceso de Lévy que genera el proceso X determinan la existencia de la distribución invariante bajo ciertas condiciones dadas en el Teorema 2.0.5, pero no necesariamente tendrá las mismas características.

Este trabajo abre las puertas a analizar el caso de la distribución invariante de sistemas conservativos modelados por grafos aleatorios y por aquellos grafos deterministas, en los cuales no es posible caracterizar todos los valores y vectores propios de la matriz L asociada a cada grafo.

Bibliografía

- [1] Mathematical Biology; Researchers at University of Shanghai for Science and Technology Report New Data on Mathematical Biology (Survival and Stationary Distribution Analysis of a Stochastic Competitive Model of Three Species in a Polluted Environment), May 31 2016.
- [2] Physics; Researchers from Isfahan University of Technology Discuss Findings in Physics (Mutation-selection Stationary Distribution In Structured Populations), May 28 2019. American Physical Society; Copyright - Copyright 2019, NewsRx LLC; Última actualización - 2019-05-29.
- [3] APPLEBAUM, D. *Lévy processes and stochastic calculus*, 1 ed. Cambridge studies in advanced mathematics 93. Cambridge University Press, 2004.
- [4] BHATTACHARYA R., W. E. *Stochastic processes with applications*. Classics in Applied Mathematics. SIAM, 2009.
- [5] BILLINGSLEY, P. *Probability and measure*, 2nd ed ed. Wiley series in probability and mathematical statistics. Wiley, 1986.
- [6] CHUNG, F. R. K. *Spectral Graph Theory*. Regional conference series in mathematics 92. Published for the Conference Board of the mathematical sciences by the American Mathematical Society, 1997.
- [7] DAI, T., ZHU, L., CAI, X., PAN, S., AND YUAN, S. Explore semantic topics and author communities for citation recommendation in bipartite bibliographic network. *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing* 9, 4 (2018), 957–975.
- [8] DIMITRI P. BERTSEKAS, J. N. T. *Introduction to Probability, 2nd Edition*, 2 ed. Athena Scientific, 2008.
- [9] FELLER, W. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, 2 ed., vol. Volume 2. Wiley, 1971.

-
- [10] GIARO, K., KUBALE, M., AND MALAFIEJSKI, M. Compact scheduling in open shop with zero-one time operations. *INFOR* 37, 1 (02 1999), 37–47.
- [11] GRONE, R. On the geometry and Laplacian of a graph. *Linear Algebra Appl.* 150 (1991), 167–178.
- [12] GRONE, R., MERRIS, R., AND SUNDER, V. S. The laplacian spectrum of a graph. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 11, 2 (1990), 218–238.
- [13] HAASE, C. G., FLETCHER, ROBERT J., J., SLONE, D. H., REID, J. P., AND BUTLER, S. M. Landscape complementation revealed through bipartite networks: an example with the florida manatee. *Landscape Ecology* 32, 10 (10 2017), 1999–2014.
- [14] JNOWSKA-MICHALIK, A. On processes of Ornstein-Uhlenbeck type in Hilbert space. *Stochastics* 21, 3 (1987), 251–286.
- [15] JU, C., AND XU, C. Personal recommendation via heterogeneous diffusion on bipartite network. *International Journal on Artificial Intelligence Tools* 23, 3 (06 2014).
- [16] KENNETH M. SHISKOWSKI, K. F. *Principles of Linear Algebra with Mathematics*. Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts. Wiley, 2011.
- [17] MERRIS, R. Laplacian matrices of graphs: a survey. *Linear algebra and its applications* 197 (1994), 143–176.
- [18] MEYER, C. D. *Matrix analysis and applied linear algebra*. SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.
- [19] PERKO, L. *Differential equations and dynamical systems*, 3ed. ed. Springer, 2006.
- [20] PILLAI, A. P. U. *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, 4th ed. McGraw-Hill Europe, 2002.
- [21] R. BALAKRISHNAN, K. R. *A Textbook of Graph Theory*, 2 ed. Universitext. Springer-Verlag New York, 2012.
- [22] RABI BHATTACHARYA, E. C. W. *A Basic Course in Probability Theory*, 1 ed. Universitext. Springer, 2007.

-
- [23] RAMIREZ J.M, COSTANTINESCU, C. Dynamics of drainage under stochastic rainfall in river networks. Submitted to Stochastics and Dynamics.
- [24] ROBERT CREIGHTON BUCK, E. F. B. *Advanced calculus*, 3d ed ed. International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill, 1978.
- [25] SATO, K. *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, 1st ed. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1999.
- [26] SATO, K., Y. M. Operator-selfdecomposable distributions as limit distributions of processes of Ornstein-Uhlenbeck type. *Stochastic Processes and Their Applications* 17 (1983), 73–100.
- [27] TOMASZ ROLSKI, HANSPETER SCHMIDLI, V. S. J. T. *Stochastic processes for insurance and finance*, 1 ed. Wiley series in probability and statistics. J. Wiley, 1999.
- [28] WALSH, J. B. *Knowing the Odds: An Introduction to Probability*. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2012.
- [29] WILLIAM N. ANDERSON JR., T. D. M. Eigenvalues of the laplacian of a graph. *Linear and Multilinear Algebra* 18, 2 (1985), 141–145.
- [30] WILLIAMS, D. *Probability with Martingales*. Cambridge Mathematical Textbooks. Cambridge University Press, 1991.
- [31] ZABCZYK, J. Stationary distribution for linear equations driven by general noise. *Bull. Polish Acad. Sci. Math* 31 (1983), 197–209.