



UNIVERSIDAD  
**NACIONAL**  
DE COLOMBIA

**Desarrollo de una secuencia  
didáctica para la enseñanza-  
aprendizaje de los conceptos de  
triángulo de posición y movimiento  
diurno para estudiantes de  
astronomía esférica de la  
Universidad Distrital Francisco José  
de Caldas**

**Edilberto Suárez Torres**

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias, Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales  
Bogotá, D.C., Colombia

2018



# **Desarrollo de una secuencia didáctica para la enseñanza-aprendizaje de los conceptos de triángulo de posición y movimiento diurno para estudiantes de astronomía esférica de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas**

**Edilberto Suárez Torres**

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:

**Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales**

Director:

Ph.D., Santiago Vargas Domínguez

Observatorio Astronómico Nacional

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias, Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Bogotá, D.C., Colombia

2018



*Cuida bien tus estrellas, y que nunca las pierdas.*

*S. Rodríguez.*



## **Agradecimientos**

A mis padres y mi hija por ser mi apoyo y motivación, mi fortaleza.

A los profesores Santiago Vargas Domínguez, Benjamín Calvo, Leonardo Castañeda y William Enrique Cepeda Peña Q.E.P.D., quienes me recibieron en el Observatorio Astronómico, orientaron el camino y colaboraron con su ejemplo como docentes, profesionales y excelentes seres humanos.

A mis compañeros docentes y a mis estudiantes de Ingeniería Catastral y Geodesia, con quienes apliqué y compartí esta experiencia académica.



## Resumen

Los avances en el posicionamiento y navegación en astronomía y geodesia has sido relevantes desde el inicio de la era espacial, sin embargo, antes del posicionamiento satelital GPS, la observación de las estrellas determinaba nuestra posición y orientaba la navegación en el sistema terrestre. Entender los conceptos fundamentales y el procedimiento de cálculo es una competencia que el estudiante de Ingeniería Catastral y Geodesia debe adquirir, razón por la cual este trabajo de grado plantea una secuencia didáctica que aporta en el aprendizaje significativo de los conceptos de Geometría Esférica y triángulo de posición, para emplearlos en cálculos relacionados con el movimiento diurno como aplicación práctica de sistemas de coordenadas y su transformación.

**Palabras clave: Didáctica, enseñanza, astronomía, triángulo de posición.**

## Abstrac

The advances in positioning and navigation in astronomy and geodesy have been relevant since the beginning of the space age; however, before GPS satellite positioning, the observation of the stars determined our position and guided navigation in the terrestrial system. Understanding the fundamental concepts and calculations is a competency that students in Cadastral Engineering and Geodesy must acquire, so the purpose of this undergraduate thesis project is to develop a didactic sequence that contributes to the meaningful learning of the concepts of Spherical Geometry and position triangle. These concepts will be used in calculations related to diurnal motion as a practical application of coordinate systems and their transformations.

**Keywords: Didactic, teaching, astronomy, position triangle.**

## Contenido

	Pág.
<b>1. Preliminares .....</b>	<b>3</b>
1.1 Justificación y planteamiento del problema .....	3
1.2 Objetivos.....	5
1.3 Metodología .....	5
<b>2. Marco Epistemológico-histórico.....</b>	<b>7</b>
2.1 Geometría: medida de la Tierra .....	7
2.2 Geometría no euclidiana .....	10
2.3 Curvatura, exceso esférico y métrica .....	13
2.4 Representación esférica del universo y de la Tierra .....	15
<b>3. Marco Disciplinario.....</b>	<b>19</b>
3.1 Geometría Esférica .....	20
3.2 Trigonometría Esférica.....	21
3.3 Esfera Celeste y Sistemas de Coordenadas .....	24
3.4 Movimiento Diurno .....	31
3.5 Triángulo de posición y matrices de rotación .....	33
3.5.1 Triángulo de Posición .....	33
3.5.2 Matrices de Rotación.....	35
<b>4. Marco Didáctico .....</b>	<b>41</b>
4.1 Educación superior .....	41
4.2 Competencias y Flexibilidad curricular .....	42
4.3 Estrategias para enseñanza de la astronomía .....	44
4.4 Contexto de la secuencia didáctica .....	45
4.4.1 Población objetivo .....	45
4.4.2 Perspectiva de aprendizaje .....	46
4.4.3 Recursos .....	46
<b>5. Desarrollo Secuencia Didáctica.....</b>	<b>47</b>
5.1 Actividad 1: Encuesta inicial.....	48
5.1.1 Cuestionario .....	49
5.1.2 Finalidad preguntas.....	49
5.2 Actividad 2: La ventana esférica .....	50
5.3 Actividad 3: Meridianos y paralelos .....	51

---

5.4	Actividad 4: Geometría Esférica .....	52
5.4.1	Cuestionario .....	52
5.4.2	Finalidad preguntas .....	52
5.5	Actividad 5: Coordenadas Esféricas .....	53
5.6	Actividad 6: Siguiendo Estrellas .....	54
5.7	Actividad 7: Siguiendo el Sol .....	55
5.8	Actividad 8: Transformando Coordenadas .....	56
5.9	Actividad 9: Encuesta final .....	57
5.9.1	Cuestionario .....	57
5.9.2	Finalidad preguntas .....	58
<b>6.</b>	<b>Resultados.....</b>	<b>59</b>
6.1	Resultados por actividad .....	59
6.1.1	Actividad 1: Encuesta inicial .....	59
6.1.2	Actividad 2: La Ventana Esférica .....	65
6.1.3	Actividad 3: Meridianos y paralelos.....	72
6.1.4	Actividad 4: Geometría Esférica – actividad de seguimiento .....	75
6.1.5	Actividad 5: Coordenadas esféricas.....	83
6.1.6	Actividad 6: Siguiendo estrellas .....	86
6.1.7	Actividad 7: Siguiendo el Sol.....	90
6.1.8	Actividad 8: Transformando coordenadas.....	92
6.1.9	Actividad 9: encuesta final .....	94
<b>7.</b>	<b>Conclusiones y recomendaciones.....</b>	<b>107</b>

## Lista de Figuras

<b>Figura 2-1.</b> Quinto postulado de Euclides	8
<b>Figura 2-2.</b> Axioma de las paralelas de Playfair	11
<b>Figura 2-3.</b> Triángulos sobre superficies	12
<b>Figura 2-4.</b> Curvatura de diferentes superficies	13
<b>Figura 2-5.</b> Diferentes tipos de geometrías	14
<b>Figura 2-6.</b> Representaciones esféricas del Universo en algunas culturas (Martínez, 2005)	15
<b>Figura 3-1.</b> Geodésica sobre la Esfera entre los puntos A y B.	20
<b>Figura 3-2.</b> Segmento de arco en un círculo de radio $r$ .	20
<b>Figura 3-3.</b> Triángulo Esférico.	21
<b>Figura 3-4.</b> Triángulo Esférico y Triángulo Plano	22
<b>Figura 3-5.</b> Movimiento diurno de la estrella con declinación positiva	31
<b>Figura 3-6.</b> Apariencia Esfera Celeste según la Latitud	32
<b>Figura 3-7.</b> Construcción triángulo de posición PPA	33
<b>Figura 3-8.</b> Triángulo de posición PPA para coordenadas absolutas y eclípticas.	34
<b>Figura 3-9.</b> Ecuaciones de transformación absoluto a eclíptico utilizando PPA	35
<b>Figura 3-10.</b> Rotaciones y translaciones entre sistemas ortogonales	35
<b>Figura 4-1.</b> Distribución de los espacios académicos dentro del plan de estudios	43
<b>Figura 4-2.</b> Competencias del Ingeniero catastral en el área de geodesia y ciencias de la Tierra	43
<b>Figura 4-3.</b> Aporte de la secuencia didáctica al syllabus del espacio académico	45
<b>Figura 4-4.</b> Instalaciones y equipamiento dispuesto: Universidad Distrital	46
<b>Figura 5-1.</b> Actividad 1: Encuesta Inicial	49
<b>Figura 5-2.</b> Actividad 2: La ventana esférica	50
<b>Figura 5-3.</b> Actividad 3: Meridianos y Paralelos	51
<b>Figura 5-4.</b> Encuesta en aula Virtual	52
<b>Figura 5-5.</b> Actividad 5: Coordenadas Esféricas	53
<b>Figura 5-6.</b> Actividad 6: Siguiendo Estrellas	54
<b>Figura 5-7.</b> Actividad 7: Siguiendo el Sol	55
<b>Figura 5-8.</b> Actividad 8: Transformando Coordenadas	56
<b>Figura 5-9.</b> Encuesta en Aula Virtual	57
<b>Figura 6-1.</b> Imagen con porcentaje de respuestas pregunta 1	60
<b>Figura 6-2.</b> Resumen y porcentajes de respuestas pregunta 3	62
<b>Figura 6-3.</b> Resumen y porcentajes de respuestas pregunta 4	62
<b>Figura 6-4.</b> Resumen y porcentajes de respuestas pregunta 5	63
<b>Figura 6-5.</b> Resumen y porcentajes de respuestas pregunta 5	64
<b>Figura 6-6.</b> imágenes de la guía individual diligenciada y el momento de aplicación	65
<b>Figura 6-7.</b> Estadística predicción 1 individual	66
<b>Figura 6-8.</b> Estadística predicción 2 individual	67

<b>Figura 6-9.</b> Imágenes aplicación actividad grupal, guía diligenciada, discusión grupal y socialización del experimento _____	68
<b>Figura 6-10.</b> Estadística predicción 1 grupal _____	69
<b>Figura 6-11.</b> Estadística predicción 2 grupal _____	70
<b>Figura 6-12.</b> imágenes de la guía individual diligenciada y del momento de aplicación _____	72
<b>Figura 6-13.</b> Estadística predicción individual 1 _____	73
<b>Figura 6-14.</b> Estadística predicción individual 1 _____	74
<b>Figura 6-15.</b> Estadística pregunta 1 actividad de seguimiento _____	75
<b>Figura 6-16.</b> Estadística pregunta 2 actividad de seguimiento _____	76
<b>Figura 6-17.</b> Estadística pregunta 3 actividad de seguimiento _____	77
<b>Figura 6-18.</b> Estadística pregunta 4 actividad de seguimiento _____	77
<b>Figura 6-19.</b> Estadística pregunta 4 actividad de seguimiento _____	78
<b>Figura 6-20.</b> Estadística pregunta 6 actividad de seguimiento _____	79
<b>Figura 6-21.</b> Estadística pregunta 7 actividad de seguimiento _____	79
<b>Figura 6-22.</b> Estadística pregunta 8 actividad de seguimiento _____	80
<b>Figura 6-23.</b> Estadística pregunta 9 actividad de seguimiento _____	81
<b>Figura 6-24.</b> imágenes de la guía individual diligenciada y del momento de aplicación _____	83
<b>Figura 6-25.</b> imágenes de la guía grupal diligenciada y del momento de aplicación _____	86
<b>Figura 6-26.</b> Estadística de estrellas observadas _____	87
<b>Figura 6-27.</b> Estadística predicción 1 actividad siguiendo estrellas _____	88
<b>Figura 6-28.</b> Estadística predicción 2 actividad siguiendo estrellas _____	89
<b>Figura 6-29.</b> imágenes de la guía grupal diligenciada y del momento de aplicación _____	90
<b>Figura 6-30.</b> Imágenes de la guía grupal diligenciada y del momento de aplicación _____	93
<b>Figura 6-31.</b> Comparación resultados coordenadas gráficas y calculadas _____	94
<b>Figura 6-32.</b> Distribución porcentual de las 20 preguntas de la encuesta según temas syllabus _____	96
<b>Figura 6-33.</b> Resultados de la evaluación. _____	96
<b>Figura 6-34.</b> Resultado evaluación por pregunta y promedio ponderado por estudiante _____	97
<b>Figura 6-35.</b> Correspondencia temas syllabus con preguntas de la evaluación _____	97
<b>Figura 6-36.</b> Estadísticas preguntas Trigonometría Esférica (13-18 del test) _____	98
<b>Figura 6-37.</b> Estadísticas preguntas planeta Tierra y Esfera Celeste (11 y 12 del test) _____	100
<b>Figura 6-38.</b> Estadísticas preguntas planeta Tierra y Esfera Celeste (11 y 12 del test) _____	102
<b>Figura 6-39.</b> Estadísticas preguntas planeta Tierra y Esfera Celeste (11 y 12 del test) _____	103
<b>Figura 6-40.</b> Estadísticas preguntas planeta Tierra y Esfera Celeste (11 y 12 del test) _____	105
<b>Figura 7-1.</b> Soporte estadísticas actividad de seguimiento _____	115
<b>Figura 7-2.</b> Soporte estadísticas encuesta Final _____	115

## Lista de tablas

<b>Tabla 1.</b> Características de la Trigonometría Plana y Esférica .....	22
<b>Tabla 2.</b> Características de la Trigonometría Plana y Esférica. ....	23
<b>Tabla 3.</b> Resolución de triángulos.....	23
<b>Tabla 4.</b> Definición de coordenadas rectangulares esféricas / polares. ....	24
<b>Tabla 5.</b> Características de las coordenadas horizontales.....	26
<b>Tabla 6.</b> Características de las coordenadas ecuatoriales locales.....	27
<b>Tabla 7.</b> Características de las coordenadas ecuatoriales absolutas .....	28
<b>Tabla 8.</b> Características de las coordenadas eclípticas.....	29
<b>Tabla 9.</b> Características de las coordenadas Galácticas.....	30
<b>Tabla 10.</b> Matriz coordenadas ortogonales astronómicas .....	36
<b>Tabla 11.</b> Matrices de rotación para los ejes X, Y y Z .....	36
<b>Tabla 12.</b> Matriz de rotación Absolutas a Eclípticas.....	37
<b>Tabla 13.</b> Matriz de rotación horizontales a ecuatoriales locales .....	39
<b>Tabla 14.</b> Matriz de rotación coordenadas .....	39
<b>Tabla 15.</b> Actividades de la secuencia didáctica.....	48
<b>Tabla 16.</b> Estructura de la encuesta final .....	58
<b>Tabla 17.</b> Resumen de respuestas pregunta 1.....	60
<b>Tabla 18.</b> Resumen de respuestas pregunta 2.....	61
<b>Tabla 19.</b> Imagen con porcentaje de respuestas pregunta 1 .....	61
<b>Tabla 20.</b> Datos de las coordenadas determinadas en forma gráfica por los estudiantes.....	85
<b>Tabla 21.</b> Datos de las coordenadas determinadas en forma gráfica por los estudiantes.....	85
<b>Tabla 22.</b> Horario en el cual los grupos realizaron la práctica. ....	91
<b>Tabla 23.</b> Correspondencia preguntas con id de la evaluación .....	95
<b>Tabla 24.</b> Evidencia del trabajo realizado por estudiantes.....	116

# Introducción

La política de mejoramiento de la calidad de la Educación Superior a partir de los requerimientos que se hacen necesarios para la obtención del registro calificado y los procesos de acreditación de los programas académicos de educación superior, se encuentran establecidos en decretos tales como el 808 de 2002, el 2566 de 2003 y la Ley 1188 de 2008, adicional a las resoluciones ministeriales en las cuales se definen las características específicas de calidad para los programas de formación de pregrado en las distintas disciplina. Para el caso de este proyecto es importante precisar que la Universidad Distrital “Francisco José de Caldas” es una institución educativa de educación superior que tiene Acreditación Institucional de Alta Calidad según resolución del MEN 23096 del 15 de diciembre del 2016, de igual forma su proyecto curricular de Ingeniería Catastral y Geodesia adscrito a la Facultad de Ingeniería, cuenta con renovación de alta calidad según resolución MEN 17484 de 2017 y su correspondiente registro calificado con resolución MEN 0551024 del 24 marzo de 2017, razones por las cuales la Universidad matricula y puede graduar estudiantes de nivel académico profesional en el área de la ingeniería, pues cumple con las normas y estándares de ley para un pregrado de calidad.

El contexto de la educación superior ha sido llamado a este trabajo debido a que la problemática a mejorar involucra la didáctica y enseñanza de la astronomía en un espacio académico<sup>1</sup> de pregrado en ingeniería, actividad perfectamente aplicable a los objetivos académicos de la Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Colombia; para esta contextualización se utilizan en el presente trabajo de grado argumentos expuestos por investigadores como Camino, Galperin, y

---

<sup>1</sup> Los espacios académicos son asignaturas, cátedras y grupos de trabajo que, en conjunto, configuran los planes de estudio; Universidad Distrital, 2009

Oropeza, quienes han realizado diferentes estudios sobre la didáctica y la formación docente en astronomía y ciencias de la Tierra, resaltando la importancia de poseer experiencias concretas e ideas y teorías ligadas a ellas, indicando que las experiencias didácticas deben comenzar desde la posición del observador.

Bajo este argumento se define el propósito del presente estudio, como el desarrollo de una secuencia didáctica para la enseñanza de los conceptos de triángulo de posición y movimiento diurno, a estudiantes de los primeros semestres de ingeniería; consecuentemente, el documento se ha realizado con el objetivo de que sea de fácil lectura y entendimiento a los docentes que imparten los espacios académicos Astronomía Esférica y Astronomía General, por lo que se puede entender como una guía para el profesor en la enseñanza de los conceptos tratados, y en el contexto de la formación de docentes de ingeniería.

El documento se ha organizado en seis capítulos. En el primero se dan a conocer los aspectos preliminares del trabajo, esto es, la justificación, los propósitos y la metodología que se siguió. Los cinco capítulos restantes comprenden el soporte teórico de la secuencia didáctica desde tres perspectivas: una disciplinar (Capítulo 2), una histórico-epistemológica (Capítulo 3) y una didáctica (Capítulo 4), para finalmente presentar los resultados del trabajo de la secuencia didáctica (Capítulo 5), donde se presentan las actividades construidas teniendo como base el soporte teórico previo y los resultados obtenidos de la aplicación de la misma (Capítulo 6).

# **1. Preliminares**

El presente capítulo se da a conocer las generalidades del trabajo de grado, que incluye los motivos para su realización, la finalidad del mismo y la metodología con la cual se llevó a cabo.

## **1.1 Justificación y planteamiento del problema**

En 2013 la Universidad Distrital terminó la restauración y adecuación del antiguo matadero distrital en la denominada sede Aduanilla de Paiba; a partir de esta obra civil este predio histórico ofrece una gran infraestructura para la academia, constituido principalmente por la biblioteca Ramón D´Luyz Nieto y entre otros por un observatorio astronómico y geodésico, el cual obedece a la habilitación arquitectónica del antiguo tanque de agua ubicado en el centro de la sede. La utilidad del observatorio ha sido nula dado que no cuenta con personal, presupuesto, ni equipos especializados; diferentes grupos se han acercado para conocer y utilizar las instalaciones, realizando prácticas y diferentes pruebas con sus instrumentos; no obstante, el escenario continúa vacío y no presta servicios.

Iniciando 2017 los laboratorios de Ingeniería reciben la administración de esta unidad académica, Solicitado inicialmente para facilitar la logística del instrumental astronómico existente, así como la realización de prácticas de dos espacios académicos (asignaturas) ofertados desde el proyecto curricular de ingeniería catastral y geodesia: Astronomía Esférica y Astronomía General; el primero corresponde un espacio obligatorio y el segundo a uno electivo en la modalidad extrínseco, el cual pueden cursar todos los estudiantes de la Universidad Distrital.



## 1.2 Objetivos

### Objetivo General

Desarrollar una secuencia didáctica para la enseñanza-aprendizaje de los conceptos de triángulo de posición y movimiento diurno, para estudiantes del espacio académico Astronomía Esférica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Distrital “Francisco José de Caldas”.

### Objetivos específicos

- Identificar conocimientos previos de los estudiantes respecto a la representación de la posición y el movimiento de los objetos Celestes.
- Seleccionar los aspectos teóricos, epistemológicos-históricos y didácticos relacionados con las nociones básicas de astronomía que fundamentan la secuencia didáctica.
- Diseñar tres actividades que conforman la secuencia didáctica a partir de la revisión realizada.
- Aplicar la secuencia con los estudiantes de Astronomía Esférica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Distrital “Francisco José de Caldas”.
- Evaluar los conocimientos de los estudiantes respecto al triángulo de posición y movimiento diurno para validar impacto de la secuencia.
- Proponer a partir de la metodología utilizada un formato para la estructuración de prácticas para el observatorio astronómico de la Universidad Distrital.

## 1.3 Metodología

Para el desarrollo del trabajo de grado se llevará a cabo una investigación cualitativa, usando el método de investigación-acción. Para tal fin se desarrollarán las siguientes actividades, cada una de la cuales corresponderá con la consecución de los objetivos específicos planteados.

- Diseño e implementación de encuesta de diagnóstico, valoración para definición punto de inicio e intereses adicionales de los estudiantes.

- Revisión bibliográfica para estructuración de la secuencia didáctica en los temas problema: triángulo de posición y movimiento diurno.
- Diseño y construcción de actividades de la secuencia a partir de la valoración de los ítems anteriores, involucrando procesos de experimentación y utilizando según el caso metodología de aprendizaje activo MAA.
- Desarrollo de actividades aplicando la secuencia didáctica propuesta para la enseñanza aprendizaje por medio de investigación acción.
- Diseño de encuesta para evaluación del desempeño y motivación de los estudiantes durante la implementación de la secuencia didáctica.
- Elaboración de formatos, probados y validados con las actividades de la secuencia didáctica, para ofertar guías de trabajo en el observatorio astronómico de la Universidad Distrital.

## **2.Marco Epistemológico-histórico**

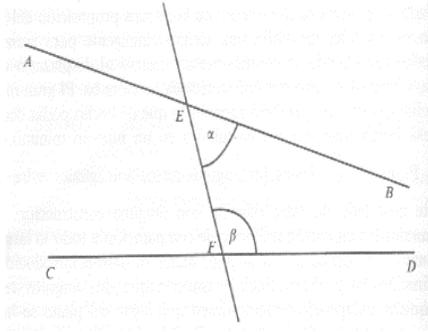
En este marco epistemológico-histórico la temática que se aborda inicialmente es el recorrido histórico de la geometría, que inicia al igual que otras ramas de las matemáticas, no como un estudio general sino con la resolución de algunos problemas específicos (Penagos V, 2017) para el caso, el problema de calcular medidas, ángulos y áreas sobre la Tierra para, posteriormente llegar a conexión con la Astronomía Esférica en el caso de ubicar la posición y el movimiento de los objetos Celestes.

### **2.1 Geometría: medida de la Tierra**

La geometría (etimológicamente, la medida de la Tierra), se originó en el barro del río Nilo, pues los egipcios, según el geógrafo e historiador griego Heródoto (484-425 a.C.), enfrentaron por primera vez el problema de la representación y medida del territorio y sus correspondientes cambios; esto último, debido a que la dinámica del río afectaba los linderos de los predios que el rey había asignado a sus súbditos y, consecuentemente, esto afectaba el recaudo del impuesto anual. Es así como el rey enviaba hombres a observar lo sucedido y a medir la extensión de los cambios del terreno asignado; estos hombres fueron recursivos y diseñaron la herramienta para representar la situación con ayuda de la matemática de la época y su propio ingenio.

Al pasar estos conceptos a los geómetras griegos, la geometría pierde la conexión con el territorio y sus fundamentos pasaron a la categoría de axiomas abstractos; de hecho, el nombre de esta disciplina acuñó el del geómetra griego Euclides de Alejandría (330-275 a.C.), cuando la historia reconoce en su obra “Los Elementos” el primer tratado de la Matemática pura, pues el método axiomático y deductivo empleado en él es el preferido por la mayoría de los matemáticos de hoy en día.

El Libro I de la obra de Euclides, planteó cinco postulados que definen la geometría del plano, a) la definición de recta y b) su prolongación, c) la definición de circunferencia con centro y radio, d) la generalidad de los ángulos rectos y e) la secante y las líneas paralelas.



**Figura 2-1.** Quinto postulado de Euclides

El mundo intelectual acepta esta doctrina griega debido a la pulcritud de los axiomas con que fue planteada; sin embargo, quedan dudas sobre uno de los postulados, pues el quinto de estos afirma que si dos rectas AB y CD se encuentran con otra recta EF de modo que la suma de los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  sean  $180^\circ$  (Figura 2-1), entonces AB y CD son paralelas.

Al célebre astrónomo, geógrafo y matemático griego Hiparco de Nicea (190-120 a.C.), se le atribuye ser el fundador de la Trigonometría, pues la construcción de su tabla de cuerdas identificó la relación entre los lados y los ángulos del triángulo; existen sin embargo registros Babilónicos que consideran esta invención incluso mil años antes de Hiparco como la tabla de barro Plimpton 322, en la cual se muestran soluciones al triángulo rectángulo; el reconocimiento de Hiparco como inventor de la trigonometría se da cuando utiliza sus definiciones para cálculos en sus diferentes áreas de actuación, en especial en Astronomía, aportando entre otros: el primer catálogo de estrellas, la definición del día de 24 horas, la determinación de la posición del equinoccio y la precesión así como la distinción entre el año sidéreo y el año trópico; estos últimos aportes son mencionados en el libro el Almagesto del también célebre Claudio Ptolomeo (100-170).

Teodosio de Bitinia (II-I a.C.) o Teodosio de Trípoli fue un astrónomo y matemático griego que en su libro Sphaerica recopiló los conocimientos relativos a la Geometría Esférica hasta su época, con el fin de establecer los principios de la astronomía y algunos de sus

fenómenos; de igual forma es importante reconocer a Menelao de Alejandría (70-140), quién fue el primero en reconocer las líneas de menor distancia (geodésicas) sobre una superficie curva, análogas a la línea recta en el plano; con esta formulación Menelao construye un triángulo sobre una superficie esférica demostrando además que esta Figura, el triángulo esférico, cumple con su teorema, el teorema de Menelao; también trabajó sobre las aplicaciones del triángulo esférico en fenómenos astronómicos.

Pasaron siglos y la parálisis aparente de las matemáticas durante la edad media fue salvada por los árabes quienes, además de recuperar varios números de obras griegas, proporcionaron a occidente el gran tesoro que permitirá desarrollar de forma contundente la aritmética y, a partir de esta, iniciar el camino para la creación del álgebra como nueva rama de las matemáticas. Los copistas de los monasterios permitieron pasar de generación en generación la aritmética de Boecio (480-525), una de las escasas fuentes textuales de información en la Europa cristiana que resume los elementos de Euclides y el Almagesto de Ptolomeo "De arithmetica"; de hecho, en Europa el conocimiento geométrico se limitó a la enseñanza en escuelas y universidades de los "Elementos" sin generarse espacios para oportunidades de nuevos aportes; todo estaba contenido en el denominado *Quadrivium*<sup>2</sup>.

El Renacimiento marca el inicio de la edad moderna y la orientación de una gran revolución científica, comenzando por el hecho de que el hombre deja de ser el centro del universo y sus actividades como el comercio, la navegación, la agricultura, la guerra y la astronomía se contactan con la naciente rama de las matemáticas, el álgebra, que amén de la recuperación de grandes obras griegas y su articulación al conocimiento, permiten su florecimiento. En este momento surge la geometría proyectiva como respuesta a la necesidad de representación del arte y de la técnica, para encontrar nuevas herramientas y elementos que permitan representar la realidad; seguidamente Rene Descartes (1596-1650) propone un método nuevo para resolver problemas geométricos lo que da origen a la geometría analítica y, por ende, investigar en Geometría (Kline, 2009), para lo cual se cambian la regla y el compás por expresiones algebraicas representadas en coordenadas cartesianas.

---

<sup>2</sup> "Quadrivium", conjunto de artes liberales de la época medieval en el que se integraban la música, la aritmética, la geometría y la astronomía.

Sin embargo, y a pesar de estos desarrollos matemáticos y, en especial, geométricos, quedaban varios problemas clásicos en el tintero, en especial lo relacionado al quinto postulado de Euclides, axioma que por siglos había estado en tela de juicio y que para los geómetras del Renacimiento no resultaba evidente y menos su deducción a partir de axiomas aceptados. Es en este contexto que se da la oportunidad para que la geometría vuelva a la Tierra.

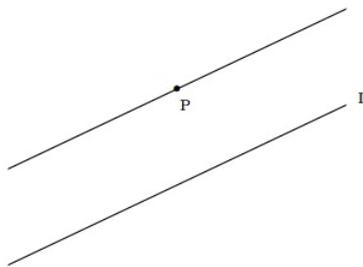
Pasarían entonces más de dos mil años para que la geometría aterrice y recupere su relación original con la Tierra, esto gracias a Karl Friedrich Gauss (1777-1855), matemático, astrónomo, ingeniero y topógrafo, quien a la perfección estaba dedicado al levantamiento del mapa de Hannover<sup>3</sup>. El nuevo concepto de geometría definido por Gauss llegaría a su máxima expresión en la actividad de su alumno Bernhard Riemann (1826-1866); tiempo después Albert Einstein (1879-1955) se apoyaría en la intuición de Gauss y Riemann para dar forma matemática a su reconocimiento físico de que la geometría del espacio y el tiempo no es absoluta ni inalterable, sino que viene determinada por las propiedades de la materia que opera a través de la acción de la gravedad (Schwinger, 1995).

## 2.2 Geometría no euclidiana

Los diferentes aportes dados durante la edad moderna en el área de las matemáticas, siglos XV a XVIII, conllevan a la construcción de la definición de la geometría no euclidiana; en ese orden de ideas merece atención el acercamiento frontal que realizó Girolamo Saccheri (1667-1733) quien mostraba dos posibilidades para establecer por contradicción el aserto de las paralelas: que no pasa ninguna paralela por P o que pasa más de una paralela a L (Figura 2-2) en el cual su idea era hacer ver que, suponiendo ciertas ambas posibilidades, las deducciones llevaban a contradicciones; sin embargo, las desechó por ser alternativas no euclídeas.

---

<sup>3</sup> Capital del estado federado de Baja Sajonia (en alemán Niedersachsen) en Alemania.



**Figura 2-2.** Axioma de las paralelas de Playfair

Resalta de igual forma interesante la reformulación del quinto postulado de Euclides planteada por John Playfair (1748-1819), sin embargo, quién primero sacó la conclusión que Saccheri no se atrevió a aceptar fue Gauss, quien desde muy joven intentó remplazar el axioma de las paralelas de Euclides por alguno más aceptable y que no obligara a pensar sobre lo que ocurre en el espacio distante, acciones en las que fracasó. Tiempo después y dejando a un lado los axiomas de Euclides, Gauss encontró el camino para elaborar una nueva forma de ver las cosas, para lo cual desarrolló las implicaciones lógicas de un sistema de axiomas que incluía el supuesto de que, por un punto dado, podía pasar más de una paralela a la recta dada. Inicialmente denominó a este nuevo concepto geometría antieuclediana (Kline, 2009), posteriormente lo definiría como geometría astral y, finalmente, como geometría no euclidiana; las aplicaciones al espacio físico de esta nueva geometría no fueron publicadas por Gauss “por temor al clamor de los Beocios”<sup>4</sup>, pues en su carta de 1829 dirigida a Friedrich Bessel (1784-1846), tenía miedo a que no se le entendieran sus conceptos y por ello archivó sus notas, las cuales fueron encontradas después de su muerte (Schwinger, 1995).

La primera publicación de una geometría no euclídea tuvo lugar también en 1829 pero en Rusia, por el matemático Nikolái Lobatchevsky (1793-1856), quién planteó una geometría en la que puede trazarse un número ilimitado de líneas que pasen por un punto y que no se corten a una línea dada y en la cual la suma de los ángulos internos de un triángulo es

---

<sup>4</sup> Beocios hace referencia a los habitantes de una región de la antigua Grecia de renombrada ingenuidad y simpleza.

menor a  $180^\circ$ . Para 1831 un oficial del ejército húngaro, János Bolyai (1802-1860), publicó resultados similares a los de Lobatchevsky. Gauss conoció del trabajo de estos dos matemáticos, otorgando algo de reconocimiento a lo planteado por Lobatchevsky y desairando lo presentado por Bolyai. La historia muestra a Lobatchevsky y Bolyai como los primeros en publicar sobre el tema, pero es a Gauss a quien se le dan los reconocimientos sobre la importancia de las geometrías no euclidianas.

Es interesante apreciar que los tres descubridores de la geometría no euclídea, Gauss, Lobatchevsky y Bolyai, dieran con una geometría en la que la suma de los ángulos de un triángulo es menor que  $180^\circ$ , lo que contrasta con el ejemplo más inmediato como lo es en la Esfera, en la cual la suma de los ángulos es mayor a  $180^\circ$ ; esto se debió, quizás, al hecho de que, para hacer concluyente la demostración, existía una aversión inconsciente hacia una geometría en la que no hay líneas paralelas a una dada, pues en la Esfera los círculos máximos se cortan siempre en dos puntos; por ejemplo, los meridianos en la esfera terrestre que convergen en los polos.

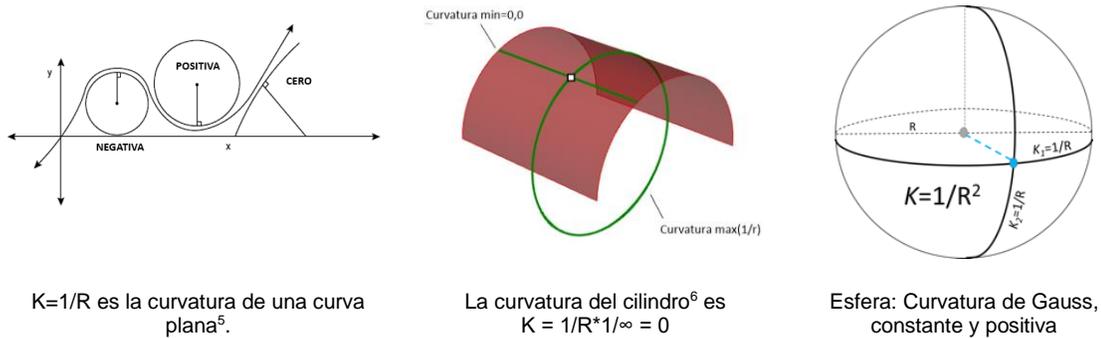


**Figura 2-3.** Triángulos sobre superficies

Un ejemplo del espacio en el cual la suma de los ángulos de un triángulo resulta menor que el valor que le atribuye la geometría euclídea se observa en el paraboloides hiperbólico, conocido como silla de montar y mostrado en la imagen central de la Figura 2-3, superficie sobre la cual, además, los meridianos divergen.

## 2.3 Curvatura, exceso esférico y métrica

La geometría de una superficie hace referencia a caracterizar su curvatura, exceso esférico y métrica (Schwinger, 1995); para el caso de la curvatura  $k$ , Gauss estableció en su “teorema egregio” que la medida de la curvatura en un punto de una curva está dada por  $1/R$ , donde  $R$  representa el radio de la circunferencia que representa la curva (geodésica) en ese punto, Figura 2-4 izquierda; al pasar a una superficie la curvatura se define como el producto de las curvaturas principales, esto es, la curvatura en cada dimensión del punto en la superficie.



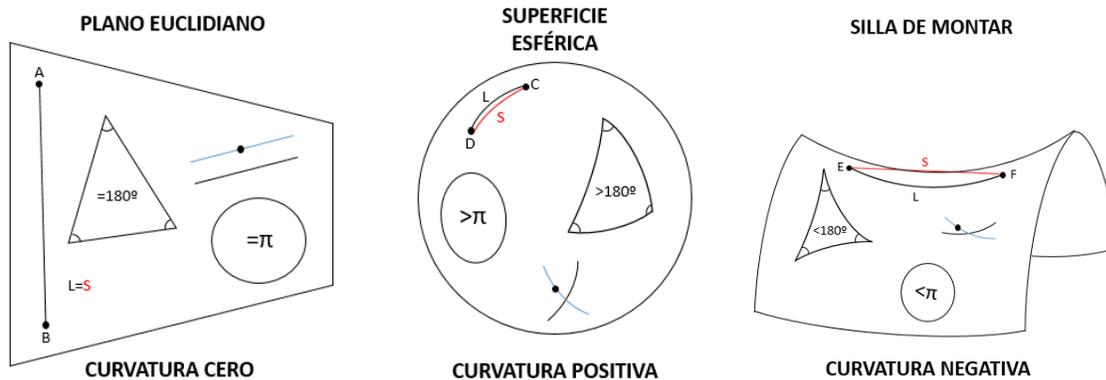
**Figura 2-4.** Curvatura de diferentes superficies

La imagen central de la Figura 2-4, corresponde a un plano enrollado en forma de cilindro, en el cual, al aplicar el concepto de curvatura Gaussiana, se tiene que la curvatura en dirección del eje horizontal es  $1/R$  con  $R$  positivo, y al aplicarlo para el eje vertical,  $R$  tiende al infinito de tal forma que este eje se ve como una recta; por lo anterior la curvatura  $K$  del cilindro será cero (0):  $k = 1/R * 1/R = 1/R * 1/\infty = 0$ . Para el caso de la Esfera como se aprecia en la imagen derecha de la Figura 2-4, la curvatura Gaussiana definida por el producto de las curvaturas principales será:  $k = 1/R * 1/R = 1/R^2$ , es decir, que  $k > 0$ , curvatura positiva.

<sup>5</sup> Adaptado de: <https://www.learner.org/courses/mathilluminated/units/8/textbook/06.php>

<sup>6</sup> Adaptado de: <https://developer.rhino3d.com/guides/general/essential-mathematics/parametric-curves-surfaces/>

En la silla de montar (paraboloide hiperbólico), imagen derecha de la Figura 2-5, se encontrará entonces que las curvaturas unidimensionales están en diferente dirección por lo que el producto de estas curvaturas será negativo  $k < 0$ , curvatura negativa.



**Figura 2-5.** Diferentes tipos de geometrías<sup>7</sup>

El exceso esférico “E°” se refiere a la diferencia de la suma de los ángulos internos de un triángulo trazado sobre una superficie respecto a  $180^\circ$ . Si esta diferencia es nula la superficie es plana (euclidiana) pero, si la diferencia es mayor que cero  $E^\circ > 0$ , se está en una superficie de curvatura positiva como la esfera o el elipsoide; caso contrario si  $E^\circ < 0$  se tendrá que la curvatura es negativa, la superficie en estudio es tipo silla de montar (paraboloide hiperbólico).

Finalmente, la métrica hace referencia a la forma en cómo se miden las distancias sobre la superficie, en el caso euclidiano esto corresponde con el teorema de Pitágoras pero, para curvaturas positivas o negativas, el concepto definido por Gauss plantea sumar pequeños fragmentos considerados euclidianos pero que al encadenarse describen con excelente aproximación la caracterización de las medidas sobre la superficie; al sumar estos fragmentos se encontrará, entonces, la forma y la ecuación que permite estimar la distancia en unidades de medición, esto es, la curva de longitud mínima de una superficie o Geodésica de superficie. Esto implica algo adicional: el hecho de que al reducir infinitesimalmente cualquier superficie, la geometría a tal escala es euclidiana.

<sup>7</sup> Adaptada de Lessons From Non-Euclidian Geometries for Interfaith Dialogue (Garrido, 2017)

## 2.4 Representación esférica del universo y de la Tierra

La representación esférica del universo surge de forma natural al observar en una noche clara el cielo estrellado que nos rodea; fácilmente se aprecia que la parte de cielo que vemos se asemeja a un hemisferio de una Esfera (la Esfera Celeste) y cuyo centro está en el observador; a lo largo del desarrollo de la humanidad y como se ilustra en la Figura 2-6, diferentes culturas concibieron este modelo esférico como estructura de su cosmología (Perilla Triana, 2012), pero es con los griegos que este concepto se formaliza y trasciende, gracias a la construcción de sistemas de representación de la posición de los objetos Celestes, los cuales involucraron conocimientos matemáticos y observacionales en el tiempo, logrando construir lo que hoy denominamos sistema de referencia.



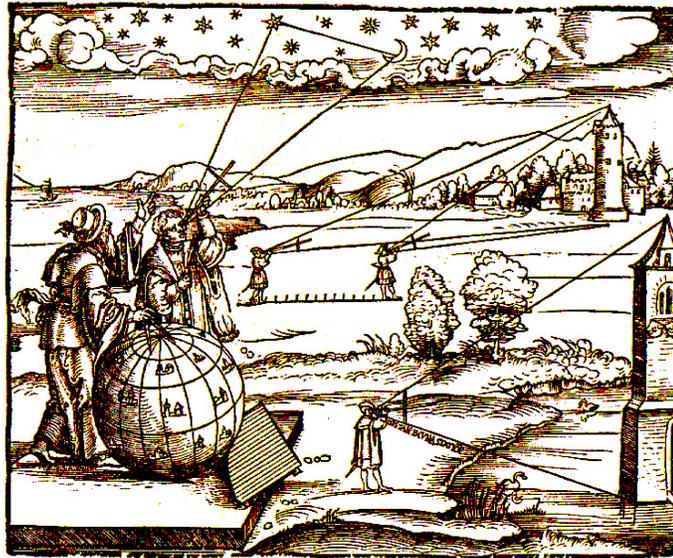
**Figura 2-6.** Representaciones esféricas del Universo en algunas culturas (Martínez, 2005)

Con los griegos Dicearco (355-285 a.C.) y Eratóstenes (276-194 a.C.) surgen las coordenadas esféricas para representar los mapas del mundo utilizando Latitud y Longitud, así como la primera determinación del radio de la Tierra realizada por el mismo Eratóstenes, considerado por ello padre de la geodesia; tiempo después Hiparco es el primero en utilizar este sistema para especificar lugares sobre la Tierra. Ahora bien, a Hiparco se le atribuye de igual forma el primer catálogo de estrellas en el cual utilizó también coordenadas esféricas para la ubicación de objetos Celestes. Adicional a estos aportes, la definición del modelo geocéntrico por Ptolomeo presentada en su libro

Almagesto, sirvió por siglos a astrónomos, navegantes y geómetras para determinar su posición en la Tierra con base en la observación de posiciones de objetos Celestes.

Llegada la época de las grandes exploraciones a partir del siglo XIV, la definición del modelo y los datos definidos por Ptolomeo seguían utilizándose y con algunos aportes de la ciencia árabe; Marco Polo (1254-1324), Paolo dal Pozzo Toscanelli (1397-1482) e incluso Cristóbal Colón (1451-1506) en su búsqueda de nuevos horizontes navegaron el atlántico hacia el oeste. Seguidamente Vasco de Gama (1469-1524) llega al sur de África y Fernando de Magallanes (1480-1521) y Juan Sebastián Elcano (1476-1526) dan la vuelta al mundo (Sevilla De Lerma, 2012).

Solo hasta finales del siglo XV y gracias a la obra de Nicolás Copérnico (1473-1543), aparecen nuevas ideas en el terreno de la astronomía y la geodesia, pues debido a la controversia suscitada por su teoría heliocéntrica, proliferaron las observaciones, se construyeron observatorios y, en general, la astronomía tuvo el apoyo de gobiernos y particulares que, de otra manera, no se hubiere logrado, beneficiando además la geodesia y la navegación (Sevilla De Lerma, 2012). La teoría heliocéntrica pronto sería admitida por el mundo científico, aunque no sin grandes sacrificios. Ejemplo de ello es la ejecución de Giordano Bruno (1548-1600) así como la obligación a retractarse a Galileo Galilei (1564-1642) ambas por auspiciar el heliocentrismo; tiempo después y gracias al trabajo realizado por el gran observador Tycho Brahe (1546-1601), Johannes Kepler (1571-1630) enuncia sus dos primeras leyes del movimiento planetario el libro "Astronomía Nova" de 1609, obra que también fue incluida en el índice de libros proscritos de la inquisición y mantenida así hasta 1822, año en que intenta producirse una reconciliación entre la razón y la fe; como dato curioso sólo hasta 1992 el Papa Juan Pablo II reconoció oficialmente que la iglesia católica dejaba de considerar hereje a Galileo, revocando su sentencia.



**Figura 2-7.** Imagen de la geografía de Peter Apian en 1533, medición de ángulos en astronomía, geodesia, posicionamiento y navegación (Beutler, 2006).

A partir de aquí y ya con un modelo heliocéntrico definido para el movimiento planetario y elementos matemáticos como los logaritmos, se construyen instrumentos avanzados que permitan mayor precisión en las observaciones y la determinar el radio terrestre entre otros; estos cálculos sirvieron por ejemplo a Newton (1642-1727) para determinar la distancia a la luna en radios terrestres y comprobar su ley de gravitación universal, cuya aplicación a la teoría de Figuras en equilibrio permitió concluir que la forma de la Tierra no era una Esfera sino que debía ser un elipsoide de revolución achatado en los polos (Sevilla De Lerma, 2012); científicos como Jean Richer (1630-1691) y Christian Huygens (1629-1695) verificarían con sus experimentos el elipsoide de Newton.

Para el siglo XVIII el elipsoide sustituye a la Esfera en el estudio de la Figura de la Tierra, ratificado esto por los resultados de las expediciones geodésicas a Laponia y al Perú (1736-1744); de aquí en adelante se inicia la determinación de diferentes elipsoides; es importante precisar aquí que el elipsoide corresponde a la forma matemática de la Tierra, para el caso de la forma física definida por la gravedad se denomina geoide y el lugar donde se realizan las observaciones se define como superficie topográfica.



### 3.Marco Disciplinario

La Astronomía Esférica se considera un instrumento importante dentro del estudio de la denominada astronomía fundamental, área de estudio que corresponde a la primera de las divisiones en que la Unión Astronómica Internacional<sup>8</sup> (IAU) ha organizado la estructura científica alrededor de la actividad astronómica en el mundo, con el objetivo de promover y salvaguardar la astronomía en todos sus aspectos, incluida la investigación, la comunicación, la educación y el desarrollo, a través de la cooperación internacional; la División A, Fundamental Astronomy, define 4 campos de actuación a saber:

1. Proporcionar definiciones y modelos que describen sistemas y marcos de referencia utilizados en astronomía para *determinar posiciones y movimientos de objetos Celestes en el espacio y el tiempo*;
2. Investigar el comportamiento dinámico de los cuerpos Celestes;
3. Obtener información física sobre objetos Celestes e investigar leyes físicas utilizando métodos de astrometría y mecánica Celeste;
4. Ofrecer servicios que proporcionan datos y efemérides de cuerpos del sistema Solar, orientación de la Tierra, escalas de tiempo y constantes astronómicas entre otros, para usuarios de la comunidad astronómica y la sociedad.

Para cumplir lo establecido en el campo de actuación 1, la Astronomía Esférica ofrece las herramientas básicas que facilitan la comprensión de las definiciones y modelos, con los que se determina la posición y movimiento de los objetos Celestes; esto por medio del estudio de los temas que conforman el marco disciplinar del presente trabajo: Trigonometría Esférica, Esfera Celeste, sistemas de coordenadas astronómicas y su transformación.

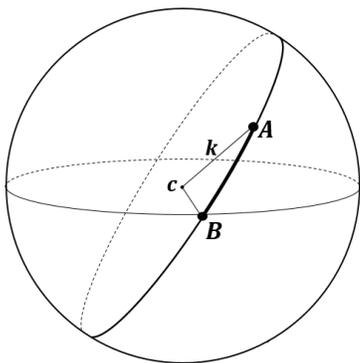
---

<sup>8</sup> <https://www.iau.org/>

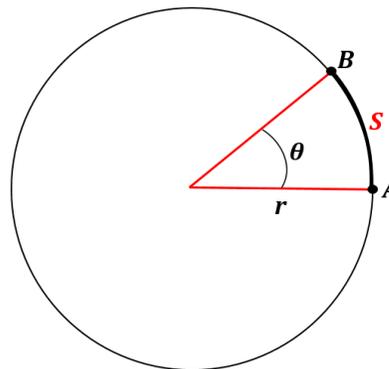
### 3.1 Geometría Esférica

Se denomina geometría no euclidiana o no euclídea, a cualquier forma de geometría cuyos postulados y propiedades difieren en algún punto de los establecidos por Euclides en su tratado Elementos, una de estas formas es la Geometría Esférica. Gauss aseguraba que la geometría real del espacio debe encontrarse a partir de la experimentación (Tejada, 2016), para ello aplicó diversos conceptos para la determinación de la posición de objetos astronómicos en la Esfera Celeste, así como varios ejercicios prácticos con triángulos cuyos lados median varias decenas de kilómetros (Geodesia Esférica), con la premisa para este último caso que, si se asume una fracción pequeña del territorio, se hablaría de geometría euclidiana (Topografía).

Dado que la Geometría Esférica es el marco de referencia para el presente documento y acorde con los comentado en el capítulo 2, esta geometría se caracteriza por tener curvatura y exceso esférico positivos, su geodésica corresponde con un segmento de arco de círculo máximo el cual es un círculo de radio  $R$  igual al de la Esfera (Schwinger, 1995), y que une dos puntos de la superficie (A y B en la Figura 3-1). La métrica es la ecuación que determina la medida de la geodésica, esto para la Esfera es:  $S=\theta R$  (Figura 3-2), donde  $S$  es la longitud del segmento de arco de círculo máximo,  $\theta$  el ángulo formado en el centro de la Esfera entre los dos radios que definen los puntos considerados y  $R$  el radio de la Esfera.



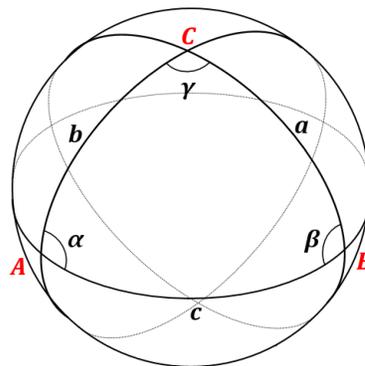
**Figura 3-1.** Geodésica sobre la Esfera entre los puntos A y B.



**Figura 3-2.** Segmento de arco en un círculo de radio  $r$ .

## 3.2 Trigonometría Esférica

La Trigonometría Esférica estudia las relaciones trigonométricas entre los seis elementos, tres lados y tres ángulos, en aquella parte de la superficie de una Esfera limitada por tres arcos de círculo máximo la cual se denomina triángulo esférico (Figura 3-3).



**Figura 3-3.** Triángulo Esférico.

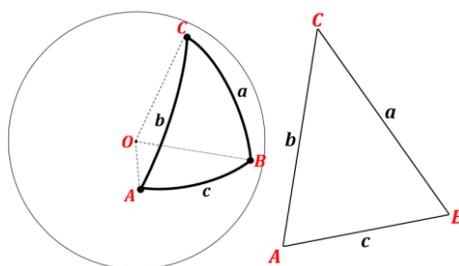
Acorde con las secciones anteriores, las diferencias entre la Trigonometría Plana y Esférica, radican en las características de las geometrías euclidiana y Esférica respectivamente, pues curvatura, exceso esférico y la forma de medir distancias sobre estas superficies, permiten deducir las propiedades para los triángulos construidos sobre ellas.

Existen en la literatura diversos textos y tratados sobre Trigonometría Esférica en los cuales se pueden consultar las demostraciones de los teoremas fundamentales en los cuales se utilizan diferentes métodos de demostración a saber:

1. Geométrico: Utiliza la teoría de los ángulos diedros y triedros, en el cual se hace coincidir el triedro con el centro de la Esfera donde la proyección de sus radios forma al intersectarse con la Esfera un triángulo esférico cuyos lados corresponden a las caras del triedro y los ángulos a los diedros (Ayres, 1970).

2. Vectorial: Los textos Análisis Vectorial (Murray, 2011) y Spherical Astronomy (Green, 1999) definen una Esfera unitaria, con ejes desde el centro, ortogonales y con sistema de mano derecha.
3. Rotacional: Utiliza rotaciones entre sistemas ortogonales con su correspondiente representación matricial para encontrar los teoremas fundamentales (Karttunen, 1996).

Con base en lo anterior, la tabla 1 muestra y compara las características de la geometría Plana y Esférica, así como los postulados y propiedades más relevantes en la Solución de los respectivos triángulos formados en sus superficies.



**Figura 3-4.** Triángulo Esférico y Triángulo Plano

Ítem	Trigonometría Plana	Trigonometría Esférica
Curvatura	$K = 0$	$K > 0$
Suma de ángulos internos	$\sum \alpha = 180^\circ$	$180^\circ < \sum \alpha < 540^\circ$ Propiedad de los triedros
Exceso esférico	$E^\circ = 0$	$E^\circ > 0$
Distancia	$d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ Pitágoras	$S = 0R$ Arco de circunferencia
Suma de lados	$\sum \ell = \text{cualquier valor}$	$\sum \ell < 360^\circ$ Propiedad de los triedros

**Tabla 1.** Características de la Trigonometría Plana y Esférica

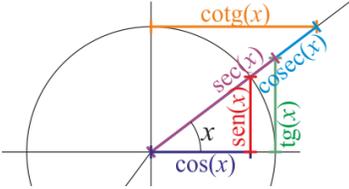
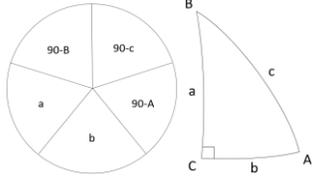
Ítem	Trigonometría Plana	Trigonometría Esférica
Resolución de triángulos rectángulos	Círculo trigonométrico Funciones trigonométricas	Fórmulas de Neper a partir del triedro (1) $\operatorname{sen} a = \operatorname{sen} A \operatorname{sen} c$ (6) $\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} B \operatorname{sen} c$ (2) $\tan a = \tan A \operatorname{sen} b$ (7) $\tan b = \tan B \operatorname{sen} a$ (3) $\tan a = \cos B \tan c$ (8) $\tan b = \cos A \tan c$ (4) $\cos c = \cos b \cos a$ (9) $\cos c = \cot A \cot B$ (5) $\cos A = \operatorname{sen} B \cos a$ (10) $\cos B = \operatorname{sen} A \cos b$
Casos		 Forma nemotécnica para las ecuaciones de Neper
	1. Un cateto y la hipotenusa 2. Los dos catetos	1. El seno de un elemento es igual al producto de las tangentes de los elementos adyacentes;
	3. Un ángulo y un lado 4. Un ángulo y la hipotenusa	2. El seno de un elemento es igual al producto de los cosenos de los elementos opuestos

Tabla 2. Características de la Trigonometría Plana y Esférica.

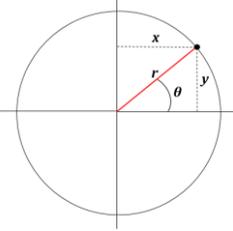
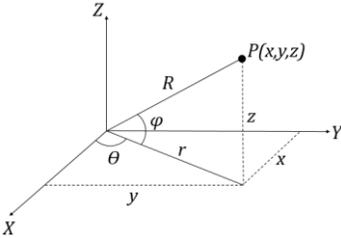
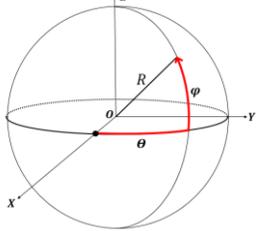
Resolución de triángulos oblicuángulos	Trigonometría Plana	Trigonometría Esférica
Casos	4 casos Caso 1: 3 lados Caso 2: Un ángulo y lados adyacentes Caso 3: dos lados y el ángulo formado Caso 4: dos lados y el ángulo opuesto	6 casos Caso I: Dados los tres lados. Caso II: Dados los tres ángulos. Caso III: Dados dos lados y el ángulo comprendido. Caso IV: Dados dos ángulos y el lado comprendido. Caso V: Dados dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos. Caso VI: Dados dos ángulos y un lado opuesto a uno de ellos.
Teorema del seno	$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma}$	$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c}$
Teorema del Coseno para lados	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$	$\cos b = \cos a \cos c + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} c \cos B$ $\cos c = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C$ $\cos a = \cos c \cos b + \operatorname{sen} c \operatorname{sen} b \cos A$
Dados los 3 ángulos	En ese caso no se pueden dar los tres lados, ya que todos los triángulos semejantes tienen los mismos ángulos independientemente de su tamaño.	$\cos A = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a$ $\cos B = -\cos A \cos C + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C \cos b$ $\cos C = -\cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \cos c$ Teorema del coseno para ángulos
Dados 5 elementos	NA	$\cos A \operatorname{sen} b = -\cos B \operatorname{sen} a \cos c + \cos a \operatorname{sen} c$ $\cos A \operatorname{sen} c = -\cos C \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b$ $\cos B \operatorname{sen} a = -\cos A \operatorname{sen} b \cos c + \cos b \operatorname{sen} c$ $\cos B \operatorname{sen} c = -\cos C \operatorname{sen} b \cos a + \cos b \operatorname{sen} a$ $\cos C \operatorname{sen} a = -\cos A \operatorname{sen} c \cos b + \cos c \operatorname{sen} b$ $\cos C \operatorname{sen} b = -\cos B \operatorname{sen} c \cos a + \cos c \operatorname{sen} a$

Tabla 3. Resolución de triángulos

### 3.3 Esfera Celeste y Sistemas de Coordenadas

La Esfera Celeste corresponde, como se comentó en el capítulo 2, a una representación esférica del universo similar en diferentes culturas, en la cual los objetos Celestes se encuentran proyectados a una misma distancia, fijos entre sí, y se mueven diariamente de oriente al occidente en trayectoria circulares; por supuesto es Solo la apariencia de la realidad, por cuanto las estrellas se encuentran a diferentes distancias por lo cual la Esfera se asume unitaria, las estrellas tienen movimiento propio y la rotación de la Tierra causa el movimiento general que percibimos de este a oeste (movimiento diurno).

Ahora, para ubicar un objeto sobre la Esfera Celeste y definir su posición en ella, se hace necesario definir un sistema de coordenadas espaciales que lo identifiquen unívocamente; este sistema se determina sobre la Esfera y para ello debe indicarse su origen, orientación y sentido, además de la forma matemática en que se expresa: cartesianas, polares, esférica; a continuación, se ilustra la secuencia que define las coordenadas esféricas para una Esfera de radio R y ejes ortogonales X, Y y Z.

		
$\text{sen}\theta = y/r$ $\text{cos}\theta = x/r$	$\text{sen}\Phi = z/R$ $\text{cos}\Phi = r/R$	$x = r \cos\theta \rightarrow R$ $y = r \text{sen}\theta \rightarrow R$
$x = r \cos\theta$ $y = r \text{sen}\theta$	$z = R \text{sen}\Phi$ $r = R \text{cos}\Phi$	$x = R \cos\theta \cos\Phi$ $y = R \text{sen}\theta \cos\Phi$ $z = R \text{sen}\Phi$

**Tabla 4.** Definición de coordenadas rectangulares esféricas / polares.

Se ha hecho común la utilización de cinco sistemas de coordenadas astronómicas, los cuales se utilizan de acuerdo a la necesidad de representación del movimiento de los objetos Celestes a considerar; en general estos sistemas se diferencian por la ubicación del centro de la Esfera (topocéntrica, geocéntrica, heliocéntrica), los planos de proyección principal (horizonte, Ecuador Celeste, la eclíptica, el ecuador galáctico) así como por el origen y orientación de su medición. Una descripción detallada de estos sistemas puede consultarse en el libro editado por la Universidad Nacional “Astronomía para todos. Retos modernos de una ciencia milenaria” (Calvo, 2013).

Los siguientes ítems en general caracterizan los cinco 5 sistemas de coordenadas considerados.

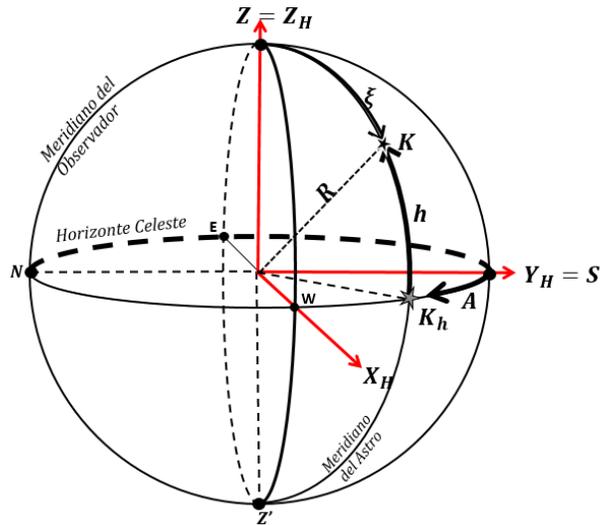
1. Plano de referencia: es el plano fundamental del sistema de coordenadas considerado, generalmente el nombre del sistema lleva el nombre de este plano.
2. Abscisa Esférica: Corresponde a la primera coordenada del sistema y se mide sobre el plano principal.
3. Ordenada Esférica: Corresponde a la segunda coordenada del sistema y se mide por el círculo máximo perpendicular al plano principal.
4. Símbolo: Letra o símbolo que representa la coordenada
5. Rango: valores que puede tomar la variable considerada
6. Origen: Lugar a partir del cual se inicia a medir la variable considerada
7. Coordenada auxiliar<sup>9</sup>: Tercera coordenada del sistema, es el complemento de la segunda.
8. Centro del sistema: Hace referencia al lugar donde está el centro del sistema.

A continuación, se muestra de manera gráfica, las características y especificaciones de los cinco sistemas indicados anteriormente.

---

<sup>9</sup> Los nombres y símbolos para el caso de las coordenadas eclípticas y galácticas son propuestos por el autor.

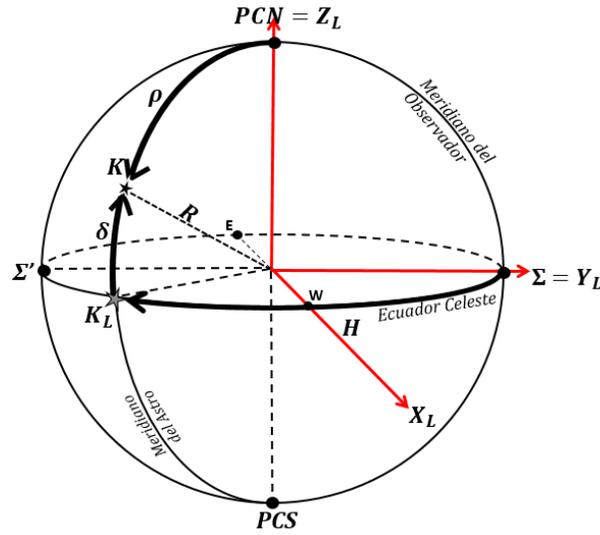
## COORDENADAS HORIZONTALES



Abscisa Esférica	Azimut
Plano de referencia	Horizonte Celeste
Orientación Sistema	Levógiro
Símbolo	Az
Origen	N: Punto cardinal norte
Rango	$0^{\circ} \leq Az < 360^{\circ}$
Ordenada Esférica	Altura
Círculo de referencia	Círculo vertical del astro
Símbolo	h
Origen	Horizonte Celeste
Rango	$-90^{\circ} \leq h < 90^{\circ}$
Coordenada Auxiliar	Distancia Cenital
Círculo de referencia	Círculo vertical del astro
Símbolo	$\xi$
Origen	Z: Zenit
Rango	$0^{\circ} \leq \xi \leq 180^{\circ}$
Orientación Ejes	$X_H = W$ (Oeste) $Y_H = S$ (Sur) $Z_H = Z$ (Zenit)
Coordenadas Rectangulares	$X_H = -\cosh \operatorname{sen} A$ $Y_H = -\cosh \operatorname{cos} A$ $Z_H = \operatorname{sen} h$
Centro del sistema	Topocéntrico

**Tabla 5.** Características de las coordenadas horizontales

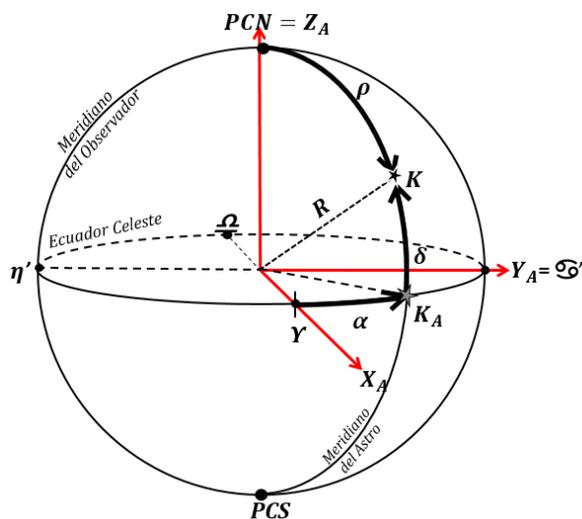
**COORDENADAS ECUATORIALES LOCALES**



Abcisa Esférica	Ángulo Horario
Plano de referencia	Ecuador Celeste
Orientación Sistema	Levógiro
Símbolo	H
Origen	$\Sigma$ : Meridiano del observador
Rango	$0^h \leq H < 24h$
Ordenada Esférica	Declinación
Círculo de referencia	Meridiano del astro
Símbolo	$\delta$
Origen	Ecuador Celeste
Rango	$-90^\circ \leq \delta < 90^\circ$
Coordenada Auxiliar	Distancia Polar
Círculo de referencia	Meridiano del astro
Símbolo	$\rho$
Origen	$P_{CN}$ : Polo Celeste Norte
Rango	$0^\circ \leq \rho \leq 180^\circ$
Orientación Ejes	$X_L = W$ (Oeste) $Y_L = \Sigma$ $Z_L = P_{CN}$
Coordenadas Rectangulares	$X_L = \cos \delta \operatorname{sen} H$ $Y_L = \cos \delta \operatorname{cos} H$ $Z_L = \operatorname{sen} \delta$
Centro del sistema	Topocéntrico

**Tabla 6.** Características de las coordenadas ecuatoriales locales

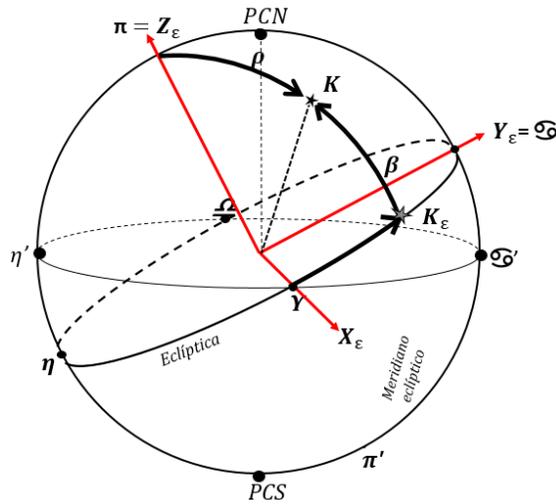
## COORDENADAS ECUATORIALES ABSOLUTAS



Abscisa Esférica	Ascensión Recta
Plano de referencia	Ecuador Celeste
Orientación Sistema	Dextrógiro
Símbolo	$\alpha$
Origen	$\gamma$ : Punto Vernal
Rango	$0^h \leq \alpha < 24h$
Ordenada Esférica	Declinación
Círculo de referencia	Meridiano del astro
Símbolo	$\delta$
Origen	Ecuador Celeste
Rango	$-90^\circ \leq \delta < 90^\circ$
Coordenada Auxiliar	Distancia Polar
Círculo de referencia	Meridiano del astro
Símbolo	$\rho$
Origen	$P_{CN}$ : Polo Celeste Norte
Rango	$0^\circ \leq \rho \leq 180^\circ$
Orientación Ejes	$X_A = \gamma$ $Y_A = \vartheta'$ $Z_A = P_{CN}$
Coordenadas Rectangulares	$X_A = \cos \delta \cos \alpha$ $Y_A = \cos \delta \sen \alpha$ $Z_A = \sen \delta$
Centro del sistema	Topocéntrico Geocéntrico Heliocéntrico

**Tabla 7.** Características de las coordenadas ecuatoriales absolutas

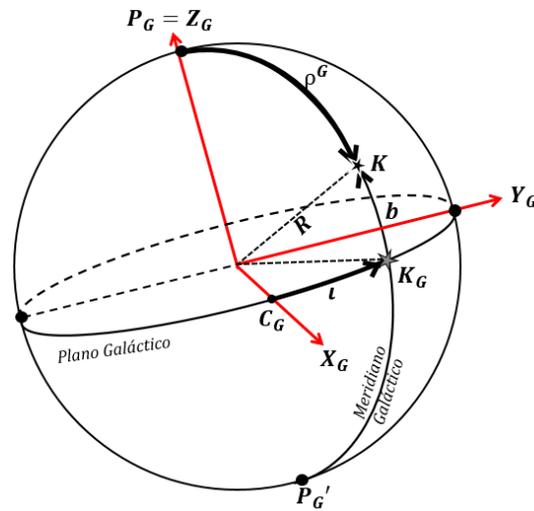
**COORDENADAS ECLÍPTICAS**



Abscisa Esférica	Longitud Eclíptica
Plano de referencia	Eclíptica
Orientación Sistema	Dextrógiro
Símbolo	$\lambda^\epsilon$
Origen	$\gamma$ : Punto Vernal
Rango	$0^\circ \leq \lambda^\epsilon < 360^\circ$
Ordenada Esférica	Latitud Eclíptica
Círculo de referencia	Meridiano eclíptico
Símbolo	$\beta$
Origen	Eclíptica
Rango	$-90^\circ \leq \beta < 90^\circ$
Coordenada Auxiliar	Distancia polar eclíptica
Círculo de referencia	Meridiano eclíptico
Símbolo	$\rho^\epsilon$
Origen	$\pi$ : Polo Eclíptico Norte
Rango	$0^\circ \leq \rho^\epsilon \leq 180^\circ$
Orientación Ejes	$X_\epsilon = \gamma$ $Y_\epsilon = 90^\circ$ $Z_\epsilon = \pi$
Coordenadas Rectangulares	$X_\epsilon = \cos B \cos \lambda^\epsilon$ $Y_\epsilon = \cos B \sin \lambda^\epsilon$ $Z_\epsilon = \sin B$
Centro del sistema	Topocéntrico Geocéntrico Heliocéntrico

**Tabla 8.** Características de las coordenadas eclípticas.

### COORDENADAS GALÁCTICAS

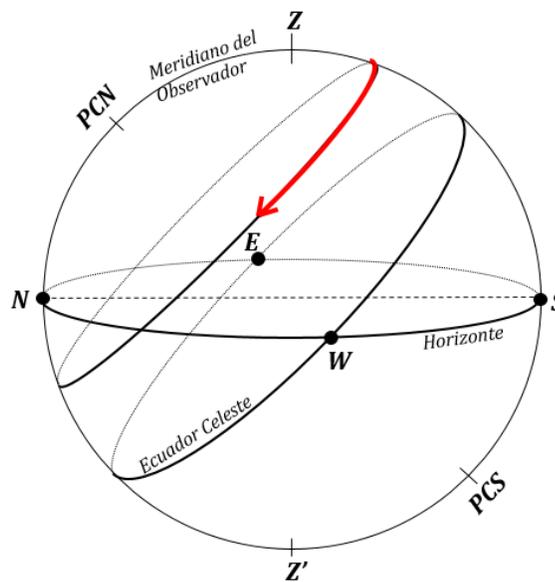


Abscisa Esférica	Longitud Galáctica
Plano de referencia	Ecuador Galáctico
Orientación Sistema	Dextrógiro
Símbolo	$\ell$
Origen	$C_{GN}$ : Centro Galáctico Nominal
Rango	$0 \leq \ell < 360$
Ordenada Esférica	Latitud Galáctica
Círculo de referencia	Meridiano Galáctico
Símbolo	$b$
Origen	Ecuador Galáctico
Rango	$-90^\circ \leq b \leq 90^\circ$
Coordenada Auxiliar	Distancia polar eclíptica
Círculo de referencia	Meridiano galáctico
Símbolo	$\rho^G$
Origen	$P_{GN}$ : Polo Galáctico Norte
Rango	$0^\circ \leq \rho^G \leq 180^\circ$
Orientación Ejes	$X_G = C_{GN}$ $Y_G = 90^\circ$ $Z_G = P_G$
Coordenadas Rectangulares	$X_G = \cos b \cos \ell$ $Y_G = \cos b \sen \ell$ $Z_G = \sen b$
Centro del sistema	Topocéntrico Geocéntrico Heliocéntrico

**Tabla 9.** Características de las coordenadas Galácticas

### 3.4 Movimiento Diurno

Ya definidos diferentes sistemas para representación de la posición de los objetos Celestes, ahora es necesario identificar su movimiento diario, es decir el movimiento aparente que causa la rotación de la Tierra y que tradicionalmente se ha denominado en español movimiento diurno; este movimiento se da entonces de oriente (E) a occidente (W) en sentido horario o levógiro como se indicó en el capítulo anterior, y en el que cada astro describe un círculo paralelo al ecuador Celeste, denominado aquí como círculo de trayectoria; este círculo está a una distancia “ $\delta$ ” del ecuador Celeste, es decir, la declinación del sistema de coordenadas ecuatorial; los puntos de corte entre el círculo de trayectoria y el meridiano del observador se denominan culminaciones superior e inferior (Cs, Ci), pues son los lugares donde el astro alcanza su altura máxima o mínima; los puntos de corte entre el círculo de trayectoria y el horizonte se denominan salida y puesta (S, P), según se den al oriente o al occidente respectivamente.



**Figura 3-5.** Movimiento diurno de la estrella con declinación positiva

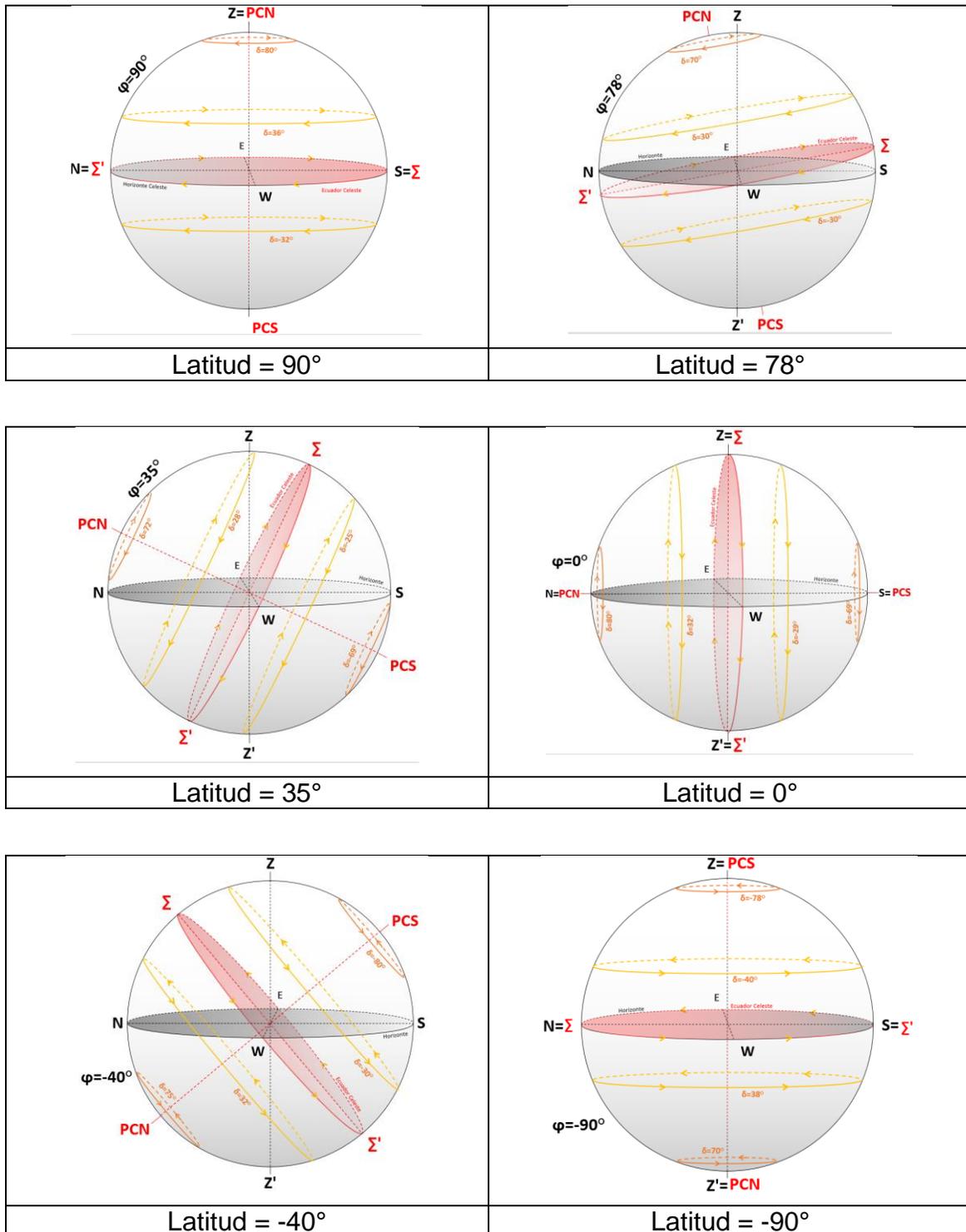


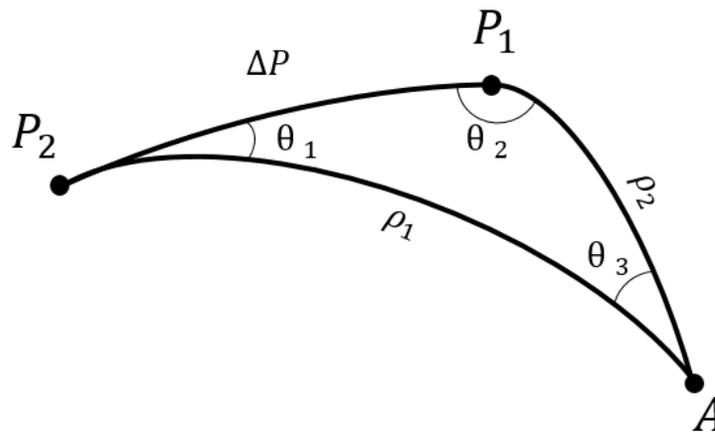
Figura 3-6. Apariencia Esfera Celeste según la Latitud

### 3.5 Triángulo de posición y matrices de rotación

El cálculo y la transformación de coordenadas entre los sistemas astronómicos hacen uso generalmente de la Trigonometría Esférica y las matrices de rotación; si bien las ecuaciones resultantes son similares, los dos métodos tienen ventajas significativas para el aprendizaje de los estudiantes; una breve descripción de los métodos se presenta a continuación.

#### 3.5.1 Triángulo de Posición

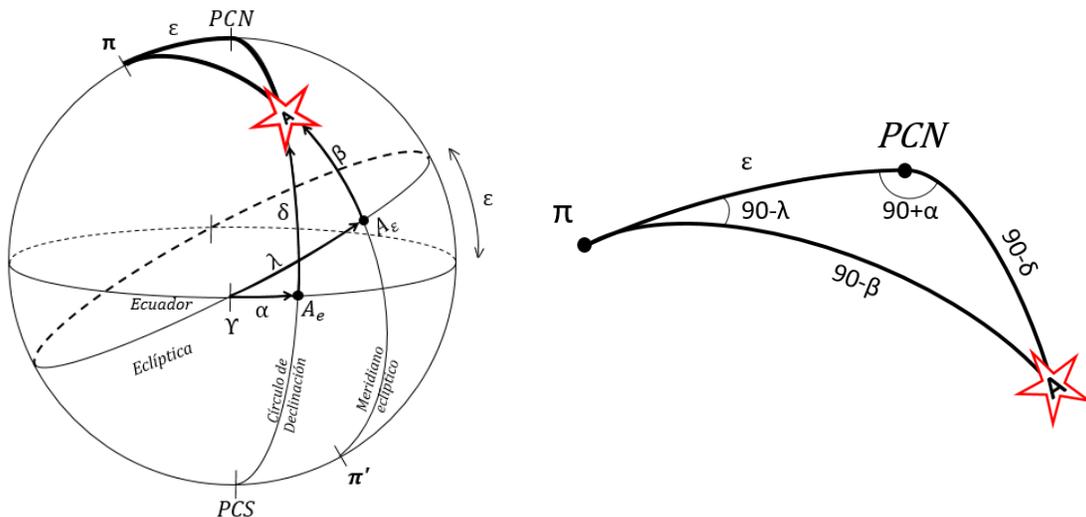
El triángulo de posición es un triángulo esférico que se construye entre dos sistemas de coordenadas; los vértices de este triángulo corresponden con los dos polos  $P_1$  y  $P_2$  de los sistemas considerados y el tercero con un astro  $A$  de referencia; para el caso de los lados, estos son círculos máximos que unen los vértices y representan respectivamente: la distancia entre los polos  $\Delta P$ , la distancia del polo del primer sistema al astro  $\rho_1$ , y la distancia del segundo polo al astro  $\rho_2$ .



**Figura 3-7.** Construcción triángulo de posición PPA

El autor propone que la construcción del triángulo de posición, como muestra la Figura anterior, utilice la referencia “PPA” que significa Polo/Polo/Astro, esto con fines nemotécnicos que facilitan la recordación y la implementación del concepto, a la hora de hacer dibujos o modelos que representen la posición y el movimiento de un astro sobre la Esfera Celeste con los sistemas de coordenadas considerados, como es el caso de algunas de las actividades de la secuencia del presente trabajo de grado.

- **Aplicación PPA:** a ejemplo de lo comentado en el párrafo anterior, la transformación de coordenadas ecuatoriales absolutas a coordenadas eclípticas se realizaría así:
  - Se determinan los planos de referencia de los dos sistemas: Ecuador Celeste y plano eclíptico, separados por la oblicuidad de la eclíptica ( $\epsilon$ ).
  - Se determinan los polos de cada uno de los sistemas, que son los puntos antípodas que distan  $90^\circ$  del plano de referencia; para el caso polos Celestes norte y sur ( $P_{CN}$ ,  $P_{CS}$ ), y los polos eclípticos norte y sur ( $\pi$ ,  $\pi'$ ).
  - Se ubica un objeto Celeste, para el caso la estrella  $A$ .
  - Se proyecta la posición de la estrella desde cada uno de los polos hasta su correspondiente plano de referencia, esto es, para el caso con un meridiano Celeste ( $P_{CN}A_E$ ) y un meridiano eclíptico ( $\pi A_\epsilon$ ), respectivamente.
  - Finalmente, y como se observa en la siguiente Figura, se aplica el concepto del triángulo de posición PPA, donde  $P_1$  es el  $P_{CN}$ ,  $P_2$  es  $\pi$  y el astro es  $A$ ; para el caso de los lados se tendrá entonces que:  $\rho_1 = 90 - \beta$ ,  $\rho_2 = 90 - \delta$ , y  $\Delta P = \epsilon$ .



**Figura 3-8.** Triángulo de posición PPA para coordenadas absolutas y eclípticas.

Utilizando las ecuaciones de la sección 3.3 se resuelve este triángulo esférico, proceso con el cual se encuentran las siguientes ecuaciones de transformación:

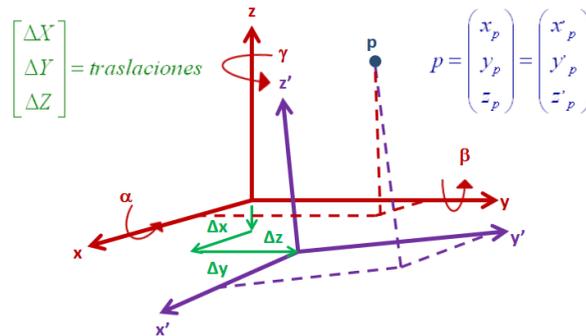
$$\begin{aligned} \cos\beta\cos\lambda^\epsilon &= \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\beta\sen\lambda^\epsilon &= \cos\epsilon\cos\delta\sen\alpha + \sen\epsilon\sen\delta \\ \sen\beta &= -\sen\epsilon\cos\delta\sen\alpha + \cos\epsilon\sen\delta \end{aligned}$$

**Figura 3-9.** Ecuaciones de transformación absoluto a eclíptico utilizando PPA

En la literatura se encuentran varios textos donde se muestra al detalle el procedimiento para la transformación de coordenadas utilizando el triángulo de posición, entre estos el libro del observatorio astronómico nacional “Elementos de Astronomía de Posición” (Portilla, 2009), donde se pueden encontrar el procedimiento para el resto de transformaciones entre los sistemas considerados.

### 3.5.2 Matrices de Rotación

Un sistema de coordenadas tiene definido su origen, la orientación de sus ejes y el sentido de medida; por otro lado, las matrices de rotación permiten transformar coordenadas tridimensionales ortogonales, considerando rotaciones de cada uno de los ejes, traslación del origen y cambios de escala; el procedimiento a continuación descrito considera que el origen de la Esfera Celeste coincide con el origen de los sistemas ortogonales (X, Y y Z) de las diferentes coordenadas astronómicas por lo que la traslación es cero (0), además de no haber cambios de escala entre los mismos acorde con la definición de Esfera Celeste dada en la sección 2.



**Figura 3-10.** Rotaciones y translaciones entre sistemas ortogonales

$H = \begin{pmatrix} -\cosh \operatorname{sen} A \\ -\cosh \operatorname{cos} A \\ \operatorname{sen} h \end{pmatrix}$	$L = \begin{pmatrix} \operatorname{cos} \delta \operatorname{sen} H \\ \operatorname{cos} \delta \operatorname{cos} H \\ \operatorname{sen} \delta \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} \operatorname{cos} \delta \operatorname{cos} \alpha \\ \operatorname{cos} \delta \operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \delta \end{pmatrix}$	$E = \begin{pmatrix} \operatorname{cos} \beta \operatorname{cos} \lambda \\ \operatorname{cos} \beta \operatorname{sen} \lambda \\ \operatorname{sen} \beta \end{pmatrix}$	$G = \begin{pmatrix} \operatorname{cos} b \operatorname{sen} l \\ \operatorname{cos} b \operatorname{cos} l \\ \operatorname{sen} b \end{pmatrix}$
Horizontales	Locales	Absolutas	Eclípticas	Galácticas

**Tabla 10.** Matriz coordenadas ortogonales astronómicas

El resultado de la construcción de los sistemas ortogonales (X, Y y Z) de los sistemas de coordenadas astronómicas considerados se puede observar detalladamente en la sección 3.4. tablas 5 a 9, donde se indica la dirección de los ejes cartesianos siguiendo la regla de la mano derecha (dextrógiro); con estas definiciones se construyen vectores columna que representan las coordenadas X, Y y Z de cada sistema en matrices 3x1, y la correspondiente matriz de rotación 3x3 según el eje y ángulo de giro.

$R_1 \theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{cos} \theta & \operatorname{sen} \theta \\ 0 & -\operatorname{sen} \theta & \operatorname{cos} \theta \end{pmatrix}$	$R_2 \Psi = \begin{pmatrix} \operatorname{cos} \Psi & 0 & -\operatorname{sen} \Psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen} \Psi & 0 & \operatorname{cos} \Psi \end{pmatrix}$	$R_3 \omega = \begin{pmatrix} \operatorname{cos} \Psi & \operatorname{sen} \Psi & 0 \\ -\operatorname{sen} \Psi & \operatorname{cos} \Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Rotación Eje X	Rotación Eje Y	Rotación Eje Z

**Tabla 11.** Matrices de rotación para los ejes X, Y y Z

Propiedades de las matrices utilizadas en este ejercicio son:

- Rotaciones no cambian la longitud del vector.
- La multiplicación de matrices no es conmutativa, pero si asociativa.
- La inversa es igual a la transpuesta:  $R_i^{-1}(u) = R_i^T(v) = R_i(-u)$
- En matrices de rotación, su determinante es igual a 1.
- El producto matricial para pasar del sistema 1 al sistema 2 es:

$$\begin{pmatrix} X^1 \\ Y^1 \\ Z^1 \end{pmatrix} = R_1(\theta)R_2(\Psi)R_3(\omega) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

Con base en lo anterior la tabla siguiente describe paso a paso el procedimiento para transformar vía matriz de rotación las coordenadas absolutas a eclípticas; en el dibujo la dirección de los ejes en cada sistema permite identificar que con una Sola rotación sobre el eje  $X_A$ , el cual coincide con el  $X_E$ , los demás ejes coincidirán correspondientemente, es decir, que  $Y_A = Y_E$ , y  $Z_A = Z_E$ . El valor del giro debido a que la rotación es sobre el eje X es “ $\theta$ ” según se definió en las secciones anteriores, el cual para este corresponde con  $\epsilon$ , que es la distancia angular entre los planos ecuatorial y eclíptico.

	<b>Coord. Absolutas</b>		<b>Coord. Eclípticas</b>	
	$X_A = \cos\delta\cos\alpha$		$X_E = \cos\beta\cos\lambda^\epsilon$	
	$Y_A = \cos\delta\text{sen}\alpha$		$Y_E = \cos\beta\text{sen}\lambda^\epsilon$	
	$Z_A = \text{sen}\delta$		$Z_E = \text{sen}\beta$	
	$\begin{pmatrix} X_E \\ Y_E \\ Z_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \epsilon & \text{sen } \epsilon \\ 0 & -\text{sen } \epsilon & \cos \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix}$			
Angulo de rotación:	$R^1(\theta)=\epsilon$	$R^2(\psi)=0$	$R^3(\omega)=0$	
Ecuaciones de Transformación:				
$X_\epsilon = X_A$ $\cos\beta\cos\lambda^\epsilon = \cos\delta\cos\alpha$				
$Y_\epsilon = 0 + \cos \epsilon Y_A + \text{sen } \epsilon Z_A$ $\cos\beta\text{sen}\lambda^\epsilon = \cos \epsilon \cos\delta\text{sen}\alpha + \text{sen } \epsilon \text{sen}\delta$				
$Z_\epsilon = 0 - \text{sen } \epsilon Y_A + \cos \epsilon Z_A$ $\text{sen}\beta = -\text{sen } \epsilon \cos\delta\text{sen}\alpha + \cos \epsilon \text{sen}\delta$				

**Tabla 12.** Matriz de rotación Absolutas a Eclípticas

Como se aprecia este método muestra una gran ventaja, no requeriré colocar astro en los dibujos, aunque sí demanda definir muy bien la dirección de los ejes ortogonales y la rotación entre los sistemas; finalmente, las ecuaciones encontradas resultan ser las mismas que se encontraron al utilizar el triángulo de posición como se pueden comparar con la Figura 3-9.

Una ventaja adicional de trabajar con matrices respecto al triángulo de posición es la sencillez como se hace la transformación inversa; para el ejemplo anterior sería de eclípticas a absolutas como se muestra a continuación:

De la tabla 12 se tiene que:

$$X_A = \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix}, X_E = \begin{pmatrix} X_E \\ Y_E \\ Z_E \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & \sin \varepsilon \\ 0 & -\sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix}, \text{ por lo que: } X_E = RX_A$$

Ahora, pre-multiplicando a ambos lados de la ecuación por la transpuesta de R ( $R^T$ ) se tendrá:

$$R^T X_E = R^T R X_A$$

Recordando las propiedades de las matrices indicadas en la sección anterior se tiene que la matriz R por la matriz transpuesta de R es igual a la matriz identidad I así:

$$R^T R = I$$

Entonces,

$$R^T X_E = R^T R X_A \rightarrow R^T X_E = I X_A$$

De donde,

$$X_A = R^T X_E$$

Por lo que el producto matricial para ir de eclípticas a absolutas es:

$$\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ 0 & \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_E \\ Y_E \\ Z_E \end{pmatrix}$$

Finalmente, resolviendo y simplificando se tendrán las ecuaciones de transformación entre el sistema eclíptico al sistema absoluto así:

$$\begin{aligned} X_A &= X_E & \cos \delta \cos \alpha &= \cos \beta \cos \lambda^\varepsilon \\ Y_A &= 0 + \cos \varepsilon Y_E - \sin \varepsilon Z_E & \rightarrow \cos \delta \sin \alpha &= \cos \varepsilon \cos \beta \sin \lambda^\varepsilon - \sin \varepsilon \sin \beta \\ Z_A &= 0 + \sin \varepsilon Y_E + \cos \varepsilon Z_E & \sin \delta &= \sin \varepsilon \cos \beta \sin \lambda^\varepsilon + \cos \varepsilon \sin \beta \end{aligned}$$

De igual forma que el resultado de la transformación inicial, las ecuaciones encontradas coinciden con las que se obtienen con el método del triángulo esférico PPA. A nivel de ejemplo se presentan dos transformaciones adicionales realizadas por el método de matriz de rotación.

	Coord. Horizontales		Coord. Ecuatoriales Locales	
	$X_H = -\cosh \operatorname{sen} Az$		$X_L = \cos \delta \operatorname{sen} H$	
	$Y_H = -\cosh \cos Az$		$Y_L = \cos \delta \cos H$	
	$Z_H = \operatorname{sen} h$		$Z_L = \operatorname{sen} \delta$	
	$\begin{pmatrix} X_L \\ Y_L \\ Z_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(90 - \varphi) & \operatorname{sen}(90 - \varphi) \\ 0 & -\operatorname{sen}(90 - \varphi) & \cos(90 - \varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_H \\ Y_H \\ Z_H \end{pmatrix}$			
Angulo de rotación:	$R^1(\theta) = 90 - \varphi$	$R^2(\psi) = 0$	$R^3(\omega) = 0$	
Ecuaciones de Transformación:				
$X_L = X_H$ $-\cosh \operatorname{sen} Az = \cos \delta \operatorname{sen} H$				
$Y_L = 0 + \operatorname{sen} \varphi Y_H + \cos \varphi Z_H$ $\cos \delta \cos H = -\cosh \cos Az \operatorname{sen} \varphi + \operatorname{sen} h \cos \varphi$				
$Z_L = 0 - \cos \varphi Y_H + \operatorname{sen} \varphi Z_H$ $\operatorname{sen} \delta = \cosh \cos Az \cos \varphi + \operatorname{sen} h \operatorname{sen} \varphi$				

Tabla 13. Matriz de rotación horizontales a ecuatoriales locales

	Coord. Ecuatoriales Locales		Coord. Absolutas	
	$X_L = \cos \delta \operatorname{sen} H$		$X_A = \cos \delta \cos \alpha$	
	$Y_L = \cos \delta \cos H$		$Y_A = \cos \delta \operatorname{sen} \alpha$	
	$Z_L = \operatorname{sen} \delta$		$Z_A = \operatorname{sen} \delta$	
	$\begin{pmatrix} X_L \\ Y_L \\ Z_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} H \gamma & \cos H \gamma & 0 \\ -\cos H \gamma & \operatorname{sen} H \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix}$			
Angulo de Rotación	$R^1(\theta) = 0$	$R^2(\psi) = 0$	$R^3(\omega) = H \gamma - 90$	
Ecuaciones de Transformación:				
$X_L = \operatorname{sen} H \gamma X_A - \cos H \gamma Y_A + 0$ $\cos \delta \operatorname{sen} H = \cos \delta \cos \alpha \operatorname{sen} H \gamma - \cos \delta \operatorname{sen} \alpha \cos H \gamma$				
$Y_L = \cos H \gamma X_A + \operatorname{sen} H \gamma Y_A + 0$ $\cos \delta \cos H = \cos \delta \cos \alpha \cos H \gamma + \cos \delta \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} H \gamma$				
$Z_L = Z_A$ $\operatorname{sen} \delta = \operatorname{sen} \delta \rightarrow \delta = \delta$				

Tabla 14. Matriz de rotación coordenadas



## **4. Marco Didáctico**

El desarrollo de una secuencia didáctica es un conjunto articulado de actividades de aprendizaje y evaluación que, con la mediación de un docente, busca el logro de determinadas metas educativas, considerando una serie de recursos (Tobón, Pimienta, & García, 2010). Estas metas están relacionadas directamente con las competencias curriculares; en general, las secuencias cuentan con los siguientes elementos: el problema del contexto, las competencias a formar, actividades de aprendizaje y evaluación, la evaluación, recursos y el proceso metacognitivo. Es importante tener en cuenta, en la implementación de actividades didácticas en Astronomía, que los estudiantes poseen experiencias astronómicas concretas e ideas y teorías ligadas a ellas desde muy temprana edad (Galperin, 2011), por lo cual las experiencias didácticas que se propongan deben comenzar por describir estos fenómenos desde la posición del observador (Camino, 1999). Todo lo anterior requiere proponer la correspondencia entre la estrategia didáctica seleccionada, el nivel de formación y la situación problema del contexto que, para el presente documento, hace referencia a una secuencia didáctica aplicada a la educación superior para una situación problema en el espacio académico Astronomía Esférica de estudiantes de segundo semestre de Ingeniería Catastral y Geodesia.

### **4.1 Educación superior**

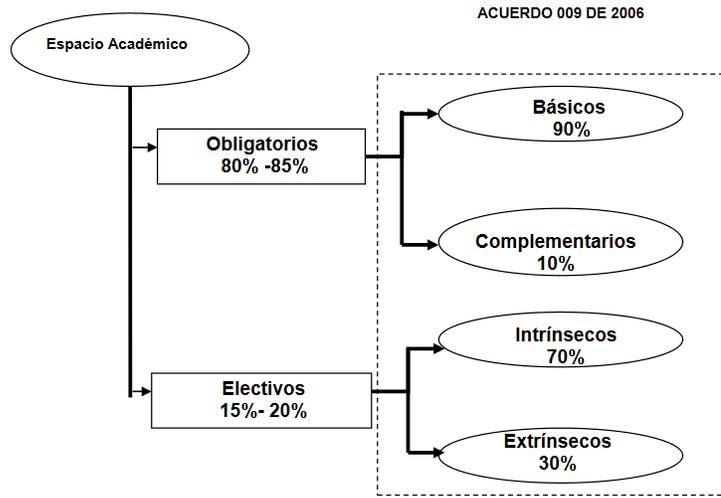
Las instituciones de educación superior consignan sus principios y fundamentos en la normatividad que las rigen; sin embargo, es necesario que se conozca el conjunto de aspectos, características y relaciones que orientan la acción de la comunidad educativa, Este es el contexto con el que se construye el Proyecto Educativo Institucional – PEI, el cual se define en la ley general de educación (“Ley 115,” 1994), como elemento organizacional para la prestación del servicio educativo. La ley general de educación es reglamentada por Decreto Presidencial (“Decreto 1860,” 1994) cuyo artículo 14 indica los

aspectos que conforman el PEI y que, específicamente en el numeral 4, se indica precisar la estrategia pedagógica que guía las labores de formación de los educandos; el PEI es una construcción colectiva, integral y transversal en los aspectos académicos relacionados con docencia, investigación y extensión de las Instituciones Universitarias.

Para llevar estos lineamientos institucionales a los programas curriculares, el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2010), utiliza herramientas obligatorias como son el Registro Calificado, o voluntarias como la Acreditación de Calidad; en éste último aparece el documento Proyecto Educativo del Programa PEP, que contiene lineamientos, políticas y principios que orientan y dirigen el desarrollo del programa, explicitando los objetivos de aprendizaje y su articulación con las asignaturas previstas en el plan de estudios, todo acorde con el PEI de la institución (Núñez, 2013). Si bien el PEP corresponde a un parámetro relevante para el proceso de acreditación de un programa educativo, también está involucrado en el registro calificado, por cuanto muestra la forma como el programa “hace” lo que quiere hacer.

## **4.2 Competencias y Flexibilidad curricular**

Desde 2008 Colombia inició el proceso de formulación de competencias para la educación superior (MEN, 2008), las cuales en general se clasifican en genéricas y específicas; para el modelo de competencias las secuencias didácticas son una metodología relevante para mediar los procesos de aprendizaje cuyos componentes consideran básicamente tres aspectos: situaciones didácticas, actividades pertinentes y la evaluación formativa, elementos vinculados al presenta trabajo acorde con la formulación de Tobón, Pimienta y García (Tobón, Pimienta, & García, 2010), en donde se aclara que el objetivo de una secuencia no es el de aprender determinado contenido, es el de desarrollar competencias para desenvolverse en la vida, lo cual implica incluir el enfoque socio-formativo.



**Figura 4-1.** Distribución de los espacios académicos dentro del plan de estudios

La normatividad interna de la Universidad Distrital “Francisco José de Caldas” está definida con criterios que le permitieron actualizar los planes de estudio de sus proyectos curriculares; dentro de estos resaltan la flexibilidad curricular y la formación Integral que cubre los aspectos cognitivos, afectivos y sociales. Los diseños curriculares de la Universidad propenden por la formación de personas con competencias en lo ciudadano, lo básico y lo laboral. Los planes de estudios así definidos tienen estructura organizada en componentes, básico y profesional, y en ciclos de fundamentación y profundización.



**Figura 4-2.** Competencias del Ingeniero catastral en el área de geodesia y ciencias de la Tierra

Los planes de estudio se construyen a partir de espacios académicos, los cuales corresponden con Asignaturas, Cátedras y Grupos de estudio; cada espacio académico considera los contenidos ya sean disciplinares, Interdisciplinarios o transdisciplinarios y las orientaciones para su enseñanza y aprendizaje; se cuantifican mediante créditos académicos y se clasifican en obligatorios básicos y complementarios, y en electivos intrínsecos y extrínsecos. El espacio académico objeto de la aplicación práctica de esta secuencia didáctica hace parte del grupo obligatorio básico del proyecto curricular de ingeniería catastral y geodesia, se imparte en segundo semestre e integra el área de geodesia y ciencias de la Tierra, y entre sus competencias resalta la de tener la capacidad de aportar en la adopción, definición y mantenimiento de marcos y sistemas de referencia para las ciencias de la Tierra.

### **4.3 Estrategias para enseñanza de la astronomía**

Existen diferentes corrientes sobre el diseño e implementación de procesos de enseñanza en áreas conceptuales que aplican para el caso de la didáctica de la Astronomía, llamadas en algunos estudios como didácticas específicas; una de estas corrientes es la teoría del aprendizaje significativo en la cual el foco de atención es quien aprende a través de un proceso de reconstrucción y resignificación de los conocimientos (Camino, 2011); es importante en este contexto considerar que la abstracción, profundidad y tiempo, entre otros aspectos, deben ser adecuados a cada grupo de aprendices para lo cual es indispensable proponer en forma diferencial las actividades didácticas que busquen que los conceptos que presentan no pierdan rigurosidad conceptual ni calidad educativa. El aprendizaje significativo toma su tiempo y requiere reiterar sobre lo que se aprende y lo que se evidencia para que el aprendizaje permanezca y se interiorice.

A medida que la secuencia didáctica propuesta en este trabajo va avanzando, se desarrollan en paralelo acciones relacionadas con la generación de datos que se registran en medios fotográficos, dibujos, documentos digitales, estadísticas y encuestas escritas, con el fin de tener información que aporte a los procesos de enseñanza aprendizaje en las aulas reales; esto es investigación educativa que involucra procesos dinámicos, creativos y profesionales, lo que evita la didáctica estática que no produce cambios significantes en

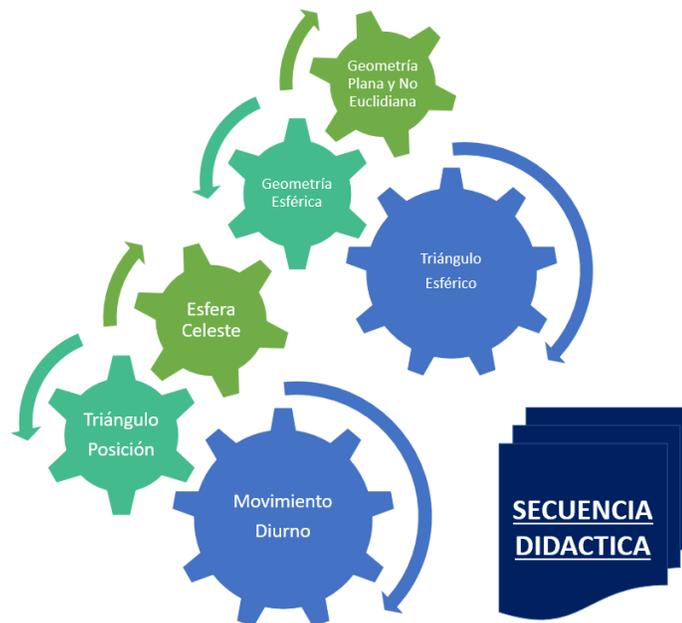
las personas. El objetivo con este contexto es que un proceso novedoso como el propuesto en este trabajo modifique la práctica educativa real, la cual, con el paso del tiempo, se convertirá en una buena cotidianidad migrando paulatinamente a la rutina, que deberá ser alterada por nuevas investigaciones (Oropeza, 2016). Esto es lo deseable, que sea un proceso iterativo.

## 4.4 Contexto de la secuencia didáctica

Se describe a continuación los componentes académicos que caracterizan la secuencia didáctica propuesta en este documento.

### 4.4.1 Población objetivo

La población objetivo son estudiantes que cursan el espacio académico Astronomía Esférica, impartido en segundo semestre del proyecto curricular de Ingeniería Catastral y Geodesia de la Universidad Distrital “Francisco José de Caldas”.



**Figura 4-3.** Aporte de la secuencia didáctica al syllabus del espacio académico.

#### 4.4.2 Perspectiva de aprendizaje

El enfoque metodológico sobre el cual se orienta la secuencia es el constructivista, involucrando aprendizaje significativo, metodología de aprendizaje activo demostrativo e interactivo, situaciones de aprendizaje, experimentos y resolución de problemas; estos elementos se aplican entonces en la enseñanza de algunos de los contenidos y temas incluidos en el syllabus del espacio académico indicado anteriormente. La Figura 4-3 muestra la articulación de los temas del syllabus y la secuencia didáctica.

#### 4.4.3 Recursos

Las actividades se desarrollaron en aulas de clase, laboratorios, el observatorio astronómico y el campus de las sedes Sabio Caldas y Aduanilla de Paiba de la Universidad Distrital “Francisco José de Caldas”; dentro de los recursos disponibles se utilizaron, entre otros: equipos como brújulas, telescopios, teodolitos y recursos didácticos como salas de computadores, aulas virtuales y maquetas.



**Figura 4-4.** Instalaciones y equipamiento dispuesto: Universidad Distrital

## 5. Desarrollo Secuencia Didáctica

El elemento más significativo de la secuencia didáctica es la sucesión de actividades relacionadas entre sí, por las cuales transita el estudiante durante el proceso de enseñanza-aprendizaje y que conforman el ejercicio y un modelo para explorar nuevas formas de enseñar, para este caso, elementos para la comprensión de temas dentro del syllabus del espacio académico Astronomía Esférica.

La secuencia desarrollada está dividida en dos bloques, cada uno con cuatro y cinco actividades, respectivamente, y acorde con los elementos problemáticos que la definieron, Triángulo de Posición y Movimiento Diurno; cada bloque contiene un grupo de actividades de aprendizaje que van integrándose de manera coherente y a medida que avanzan el desarrollo de los temas del syllabus. La duración de la sesión para cada actividad se estima en 60 minutos para el desarrollo de la misma y su propósito; los materiales e instrumentos son aportados por el docente, los estudiantes y la institución según el caso.

Los temas seleccionados en la problemática que dio origen a este trabajo involucran Trigonometría Esférica, sistemas de coordenadas, orientación y navegación astronómica, sobre los cuales se identificaron puntos clave que generaban controversia en los estudiantes para su entendimiento, dado que en sus estudios previos no conocieron temas afines a la curvatura y la geometría no euclidiana, y la manera como estos temas se relacionan con la forma de la Tierra, la navegación terrestre y la representación de posiciones y movimiento de objetos Celestes.

La tabla 15 muestra la organización de actividades de la secuencia, el elemento al que aporta en enseñanza-aprendizaje y el tema del syllabus al cual apoya.

SECUENCIA DIDÁCTICA: TRIÁNGULO DE POSICIÓN Y MOVIMIENTO DIURNO - TPMD		
Elemento	Actividad de aprendizaje	Temas
Triángulo de Posición	1. Encuesta conocimientos previos	Geometría No-euclidiana, Geometría Esférica, Triángulo Esférico
	2. Ventana esférica: Experimental MAA+D <sup>10</sup>	
	3. Meridianos y Paralelos: Simulación MMA+ID	
	4. Geometría Esférica: Actividad evaluativa	
Movimiento Diurno	1. Coordenadas Esféricas: Simulación MMA+I	Esfera Celeste, Triángulo de Posición, Coordenadas Celestes, Transformación de Coordenadas (PPA, MR)
	2. Siguiendo Estrellas: Simulación MMA+I	
	3. Siguiendo el Sol: Simulación MMA+I	
	4. Transformando Coordenadas: Cálculo	
	5. Encuesta de resultados: Actividad Evaluativa	

**Tabla 15.** Actividades de la secuencia didáctica.

## 5.1 Actividad 1: Encuesta inicial

El propósito de la encuesta inicial es el de servir de actividad diagnóstica con el fin de identificar los conocimientos que tienen los estudiantes sobre la Geometría Esférica y posibles pre-saberes que hayan adquirido en su proceso de aprendizaje; el desarrollo de la actividad consideró crear un cuestionario relacionado con los temas del syllabus y las competencias indicadas en la sección 4.2.

<sup>10</sup> MAA+D/+I: Metodología de aprendizaje activo, demostrativo, interactivo.

### 5.1.1 Cuestionario

La imagen 5-1 muestra la encuesta inicial: conocimientos previos. Se optó por dejar dos preguntas abiertas con el fin de analizar a posteriori el pensamiento propio del estudiante, y cuatro preguntas cerradas orientadas a conocer la apreciación directa de elementos propios de la Geometría Esférica



UNIVERSIDAD  
NACIONAL  
DE COLOMBIA  
SEDE BOGOTÁ  
FACULTAD DE CIENCIAS



UNIVERSIDAD DISTRITAL  
FRANCISCO JOSE DE CALDAS  
FACULTAD DE INGENIERIA

---

**Actividad 1: Encuesta Inicial**  
 Aplicación Práctica: Actividad diagnóstica  
 Área de trabajo: Triángulo de Posición  
 Grado: Semestre I y II Ingeniería

1. ¿Qué es Geometría?  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

2. ¿Que es Geometría Euclidiana?  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

3. ¿La distancia más corta entre dos puntos sobre una esfera es un línea recta?  
 a. Verdadero  
 b. Falso

4. La suma de los ángulos internos de un triángulo dibujado sobre una esfera es:  
 a. 360°  
 b. 270°  
 c. 180°  
 d. -45°  
 e. Valor variable  
 f. Otro valor, p.e. cual: \_\_\_\_\_

5. Al trazar un sistema de coordenadas similar al de las coordenadas geográficas (Latitud y Longitud) en la superficie de las siguientes figuras, indique para qué caso los meridianos se cruzan (convergen).  
 a. Esfera  
 b. Cilindro  
 c. Cono

6. Suponiendo esféricos los siguientes cuerpos celestes, indique cual tiene mayor curvatura.  
 a. Saturno  
 b. Venus  
 c. Júpiter  
 d. Mercurio  
 e. La Tierra

Nombre: \_\_\_\_\_  
 Código: \_\_\_\_\_  
 Fecha: \_\_\_\_\_

Profesor Ing. Edilberto Suárez Torres - [esuares@udistrital.edu.co](mailto:esuares@udistrital.edu.co)

**Figura 5-1.** Actividad 1: Encuesta Inicial

### 5.1.2 Finalidad preguntas

El planteamiento de las preguntas se hizo con base en que los estudiantes son de segundo semestre de ingeniería, lo que en general asegura que han cursado espacios académicos como álgebra lineal y cálculo diferencial; sin embargo, es importante precisar que esta secuencia didáctica fue concebida también para ser aplicada a estudiantes de grado 10° y 11°, pues complementa los estándares de educación en ciencias y matemáticas definidos por el MEN (Oicata O., Díaz B., & Talero L., 2013).

## 5.2 Actividad 2: La ventana esférica

**Tipo de actividad:** Experimental

**Objeto enseñanza:** Curvatura Gaussiana

**Objetivo de aprendizaje:** Acercarse a los conceptos que caracterizan la geometría de la superficie esférica.

**Objetivo de enseñanza:** Presentar una aproximación al concepto de curvatura esférica, mediante el uso de Metodología de Aprendizaje Activo Demostrativo MAA+D.

**Recursos:**

- Aforo: 24 estudiantes, grupos de 4 personas.
- Material y equipo para estudiantes: hoja de predicción grupal e individual
- Experimento: globo de caucho inflable, bomba de aire para bicicleta, válvula  $\frac{1}{2}$ .



**Actividad 2: La Ventana Esférica**  
 Aplicación Taller experimental MAA+D  
 Área de trabajo: Triángulo de Posición  
 Concepto: Curvatura y distancia sobre la esfera  
 Grado: Semestre I y II Ingeniería

**Objetivo:** Realizar la aplicación de la práctica "La Ventana Esférica", para la enseñanza del concepto de curvatura y exceso esférico.

**Experimento:**

Das láminas de madera se han amarrado con cauchos que pasan por huecos cerca a sus esquinas, las láminas llenan una ventana cuadrada en su centro y entre ellas se ha colocado un globo sin aire sobre el cual, se ha trazado una línea recta.



**Procedimiento:** Observe el montaje realizado por el profesor, seguidamente escriba en el espacio indicado las predicciones a las preguntas planteadas.

**Predicción 1:** Cuando se infle el globo, ¿Qué espera observar al comparar la superficie del globo y la línea dibujada en él, con respecto al plano de la ventana?

---



---



---

**Predicción 2:** Al reducir el tamaño del globo ¿qué cambio espera observar en la curvatura de la superficie del globo y de la línea?

---



---



---

Nombre: \_\_\_\_\_  
 Código: \_\_\_\_\_  
 Fecha: \_\_\_\_\_

Profesor Ing. Edilberto Suárez Torres - [esuarzo@udistrital.edu.co](mailto:esuarzo@udistrital.edu.co)

**Figura 5-2.** Actividad 2: La ventana esférica

**Referencias bibliográficas:** Actividad diseñada y construida por el autor, presentada en el espacio académico Taller Experimental MECEN 2016\_II.

### 5.3 Actividad 3: Meridianos y paralelos

**Tipo de actividad:** Experimental

**Objeto enseñanza:** Triángulo esférico

**Objetivo de aprendizaje:** Identificar los conceptos de sistema de coordenadas de superficie y estructura del triángulo esférico.

**Objetivo de enseñanza:** Utilizar la interpretación para encontrar conceptos de Trigonometría Esférica mediante el uso de Metodología de Aprendizaje Activo Interactivo MAA+I.

**Recursos:**

- Aforo: 24 estudiantes, grupos de 4 personas.
- Material y equipo para estudiantes: hoja de predicción grupal e individual.
- Experimento: Esfera de polipropileno, cintas y metro de modistería, trasportador.



**Actividad 3: Meridianos y Paralelos**

Aplicación Práctica: Simulación MMA+I

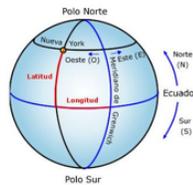
Área de trabajo: Triángulo de Posición

Concepto: Sistema de coordenadas de superficie y triángulo esférico

Grado: Semestre I y II Ingeniería

**Objetivo:** Realizar la aplicación de la práctica "Meridianos Paralelos", para la enseñanza del concepto de triángulo esférico y curvatura

**Descripción del Experimento:** Sobre la superficie de una esfera de polipropileno se ha trazado un sistema de coordenadas tipo Latitud ( $\varphi$ ) y Longitud ( $\lambda$ ); el origen de coordenadas será el punto A con  $\varphi=0$ ,  $\lambda=0$ .



1. Cuando trace un triángulo a partir del punto A con latitud B igual a longitud C y hipotenusa BC, ¿Qué espera observar al comparar la superficie del triángulo esférico con un triángulo de las mismas medidas pero dibujado sobre un plano?

Predicción1: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

2. Al aumentar el tamaño de los lados del triángulo esférico a  $\varphi=90^\circ$  y  $\lambda=90^\circ$ , ¿la suma de los ángulos internos del triángulo esférico será igual a la suma de los ángulos internos del triángulo plano?

Predicción2: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

Nombre: \_\_\_\_\_  
 Código: \_\_\_\_\_  
 Fecha: \_\_\_\_\_

Profesor Ing. Edilberto Suárez Torres - [esuarez@udistrital.edu.co](mailto:esuarez@udistrital.edu.co)

**Figura 5-3.** Actividad 3: Meridianos y Paralelos

**Referencias bibliográficas:** Actividad diseñada por el autor; recurso de contexto (Schwinger, 1995)

## 5.4 Actividad 4: Geometría Esférica

Se plantea esta actividad como seguimiento y evaluación; para ello se utiliza el aula virtual<sup>11</sup> del espacio académico Astronomía Esférica, el cual funciona bajo la plataforma Moodle y se aloja en el sitio web de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Distrital; se diseñó una encuesta con 10 preguntas utilizando diferentes modalidades de pregunta cerrada, para el caso selección múltiple, opción única, emparejamiento y falso verdadero.

### 5.4.1 Cuestionario

La imagen 5-5 muestra la configuración de la encuesta en el aula virtual, para la cual se creó un respectivo banco de preguntas ordenado acorde con las temáticas consideradas en el primer bloque de la secuencia.

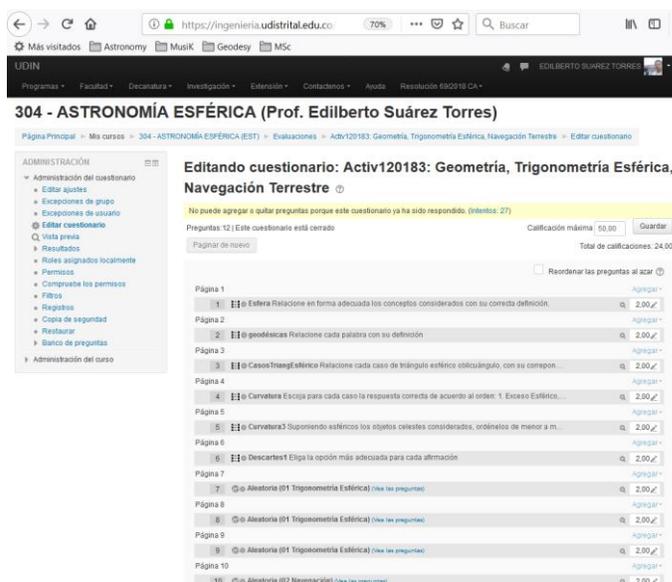


Figura 5-4. Encuesta en aula Virtual

### 5.4.2 Finalidad preguntas

El propósito de esta actividad es de seguimiento y retroalimentación, esto con el fin de poder observar cuál fue el nivel de aprehensión de los estudiantes en cuanto a los temas de aprendizaje de las actividades 2 y 3.

<sup>11</sup> UDIN: es el nombre del sitio web de la facultad de ingeniería de la Universidad Distrital, lugar donde se alojan las aulas virtuales bajo la plataforma Moodle <https://ingenieria.udistrital.edu.co/>

## 5.5 Actividad 5: Coordenadas Esféricas

**Tipo de actividad:** Didáctica Experimental

**Objeto enseñanza:** Coordenadas Esféricas

**Objetivo de aprendizaje:** Identificar diferencias y similitudes entre los sistemas de coordenadas astronómicas por medio de la construcción de un modelo.

**Objetivo de enseñanza:** Por medio de un modelo didáctico presentar a los estudiantes los sistemas de coordenadas astronómicas que propicie la relación espacial para la representación de la posición de un objeto Celeste.

**Recursos:**

- Aforo: 24 estudiantes, grupos de 4 personas.
- Material y equipo para estudiantes: hoja de predicción grupal e individual.
- Experimento: Esfera de polipropileno, cintas color y metro de modistería, chinchas.



UNIVERSIDAD  
NACIONAL  
DE COLOMBIA  
SEDE BOGOTÁ  
FACULTAD DE CIENCIAS



UNIVERSIDAD DISTRITAL  
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS  
FACULTAD DE INGENIERÍA

---

**Actividad 5: Coordenadas Esféricas**  
 Aplicación Práctica: Didáctica Experimental  
 Área de trabajo: Triángulo de Posición y Movimiento Diurno  
 Concepto: Esfera y Coordenadas Celestes  
 Grado: Semestre I y II Ingeniería

**Objetivo:** Comprender y palicar los conceptos de coordenadas celestes y su transformación, por medio de un modelo didáctico.

**Materiales:**  
 Esfera de polipropileno 30cm de diámetro (Icopor), cintas de colores, chinchas.

**Procedimiento:**  
 A. Siguiendo las instrucciones del profesor, materialice sobre la esfera los 5 sistemas de coordenadas astronómicas a saber:

1. Negro: Sistema Horizontal
2. Rojo: Sistema Ecuatorial Local
3. Rojo: Sistema Ecuatorial Absoluto
4. Azul: Sistema Eclíptico
5. Verde: Sistema Galáctico

B. El profesor indicará el ángulo horario del punto vernal a trabajar para el ejercicio:  
 1. para el caso utilice:  $H_y = \underline{\hspace{2cm}}$

C. El profesor indicará la(s) estrella(s) seleccionadas para el ejercicio, encuentre las coordenadas a J2000.0 y diligencie la siguiente tabla:

Id Estrella y Constelación	Nombre Estrella	Ascensión Recta, $\alpha$	Declinación $\delta$

D. Determine gráficamente las coordenadas de la(s) estrella(s) en los diferentes sistemas de coordenadas y diligencie la siguiente tabla

Id Estrella y Constelación	Horizontales	Locales	Eclípticas	Galácticas

Nombre(s): \_\_\_\_\_  
 Código(s): \_\_\_\_\_  
 Fecha: \_\_\_\_\_

Profesor Ing. Edilberto Suárez Torres - [esuarez@udistrital.edu.co](mailto:esuarez@udistrital.edu.co)

**Figura 5-5.** Actividad 5: Coordenadas Esféricas

**Referencias bibliográficas:** Actividad diseñada por el autor; recurso de contexto (Calvo, 2013).

## 5.6 Actividad 6: Siguiendo Estrellas

**Tipo de actividad:** Didáctica interactiva

**Objeto enseñanza:** Movimiento diurno

**Objetivo de aprendizaje:** Identificar el movimiento diario de los objetos Celestes por observación, medida y registro de la posición de una estrella.

**Objetivo de enseñanza:** Por medio de una práctica de observación con teodolito, presentar a los estudiantes una situación que propicie el estudio de los sistemas de coordenadas y el tiempo sideral.

**Recursos:**

- Aforo: 24 estudiantes, grupos de 3 personas
- Material y equipo para estudiantes: cartera de campo y predicciones, teodolito, asignación de mojón.
- Experiencia: cada grupo Solicita tiempo y equipos en el observatorio astronómico.



**Actividad 6: Siguiendo Estrellas**  
 Aplicación Práctica: Didáctica Interactiva  
 Área de trabajo: Movimiento Diurno  
 Concepto: Observación medida y registro del movimiento de los astros  
 Grado: Semestre I y II Ingeniería

Objetivo: Identificar astros con ayuda de la carta celeste y realizar mediciones de su posición en el sistema de coordenadas local horizontal]

Actividad:

1. Instale el equipo en la estación astronómica, nivelado, con los codos orientales y el equipo de iluminación respectivo.
2. Coloque ceras en el norte astronómico definido previamente.
3. Utilizando la carta celeste identifique asterismos de las constelaciones visibles.
4. Seleccione una estrella conocida, ubíquela en el campo ocular del teodolito y registre en la cartera de campo las coordenadas horizontales y el tiempo minuto a minuto hasta totalizar 5 registros.

Observador 1:		$\phi_{LDC}$	$\Delta_{LDC}$	Astro seleccionado	$\alpha$	$\delta$	Magnitud	Fecha	
LDC	Azimuth ORA $\Delta_{LDC}$	Altura ORA $\theta_L$	Tiempo Oficial	P	U	Azimuth CSC $\Delta_{LDC}$	Altura CSC $\theta_L$	Azimuth $(\theta_L - \Delta_{LDC})$	Altura $(\theta_L - \Delta_{LDC})$
1									
2									
3									
4									
5									

Observador 2:		$\phi_{LDC}$	$\Delta_{LDC}$	Astro seleccionado	$\alpha$	$\delta$	Magnitud	Fecha	
LDC	Azimuth ORA $\Delta_{LDC}$	Altura ORA $\theta_L$	Tiempo Oficial	P	U	Azimuth CSC $\Delta_{LDC}$	Altura CSC $\theta_L$	Azimuth $(\theta_L - \Delta_{LDC})$	Altura $(\theta_L - \Delta_{LDC})$
1									
2									
3									
4									
5									

Observador 3:		$\phi_{LDC}$	$\Delta_{LDC}$	Astro seleccionado	$\alpha$	$\delta$	Magnitud	Fecha	
LDC	Azimuth ORA $\Delta_{LDC}$	Altura ORA $\theta_L$	Tiempo Oficial	P	U	Azimuth CSC $\Delta_{LDC}$	Altura CSC $\theta_L$	Azimuth $(\theta_L - \Delta_{LDC})$	Altura $(\theta_L - \Delta_{LDC})$
1									
2									
3									
4									
5									

Nombre(s): \_\_\_\_\_  
 Código(s): \_\_\_\_\_  
 Fecha: \_\_\_\_\_

Profesor Ing. Edilberto Suárez Torres - [esuarco@udistrital.edu.co](mailto:esuarco@udistrital.edu.co)

**Figura 5-6.** Actividad 6: Siguiendo Estrellas

**Referencias bibliográficas:** Actividad diseñada por el autor; recurso de contexto (Sevilla De Lerma, 2012).

## 5.7 Actividad 7: Siguiendo el Sol

**Tipo de actividad:** Didáctica interactiva

**Objeto enseñanza:** Triángulo de posición

**Objetivo de aprendizaje:** Identificar por observación las variables que conforman el triángulo de posición por observación, medida y registro del movimiento Solar.

**Objetivo de enseñanza:** Por medio de una práctica de observación Solar con teodolito, presentar a los estudiantes una situación que propicie la resolución de un triángulo esférico para calcular la posición del Sol.

**Recursos:**

- Aforo: 24 estudiantes, grupos de 3 personas.
- Material y equipo para estudiantes: cartera de campo, brújula, efemérides Solares, teodolito, asignación de mojón, reloj.
- Experiencia: cada grupo solicita tiempo y equipos en el observatorio astronómico.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
DE COLOMBIA  
FACULTAD DE CIENCIAS



UNIVERSIDAD DISTRITAL  
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS  
FACULTAD DE INGENIERÍA

**Actividad 7: Siguiendo al Sol**  
 Aplicación Práctica: Didáctica Interactiva  
 Área de trabajo: Triángulo de Posición y Movimiento Diurno  
 Concepto: Definición de la posición del sol  
 Grado: Semestre I y II Ingeniería

Grupo	Elev. Visado	Lech. Horizontal				Z - Dist. Central				Tiempo Oficial				Escala	Ejeda	
		D	H	M	S	Z	D	M	S	H	M	S	F			
Oib-1	SA1	D	0	0	0	Z				H				Observaciones	31° P1° P2° P3° P4° P5° P6° P7° P8°	
	⊙	D				Z				H						
	⊙	D				Z				H						
	⊙	D				Z				H						
Oib-2	SA1	D	30	0	0	Z				H						
	⊙	D				Z				H						
	⊙	D				Z				H						
	⊙	D				Z				H						
Oib-3	SA1	D	40	0	0	Z				H				 Dibuje el aspecto del sol Convenciones:		
	⊙	D				Z				H						
	⊙	D				Z				H						
	⊙	D				Z				H						
Oib-4	SA1	D	60	0	0	Z				H						
	⊙	D				Z				H						
	⊙	D				Z				H						
	⊙	D				Z				H						
													Serie 1	Serie 2	Serie 3	Serie 4
Declinación del Sol en la Observación																
Acimut del Sol $A_{\text{Sol}}$																
Acimut Calculado SA1 ( $A_{\text{Sol}} - \delta_{\text{Sol}}$ )																
Promedio Acimut																
Acimut Magnético																
Declinación Magnética $\delta_{\text{Sol}}$																

Nombre(s): \_\_\_\_\_  
 Código(s): \_\_\_\_\_  
 Fecha: \_\_\_\_\_

Profesor Ing. Edilberto Suárez Torres - [esuarez@uefistrial.edu.co](mailto:esuarez@uefistrial.edu.co)

**Figura 5-7.** Actividad 7: Siguiendo el Sol

**Referencias bibliográficas:** Actividad diseñada por el autor; recurso de contexto (Ballesteros, 1997).

## 5.8 Actividad 8: Transformando Coordenadas

**Tipo de actividad:** Situación de aprendizaje, solución de problema matemático.

**Objeto enseñanza:** Triángulo de posición, transformación de coordenadas.

**Objetivo de aprendizaje:** Calcular Solución del triángulo de posición para los cinco sistemas de coordenadas.

**Objetivo de enseñanza:** Propiciar escenarios para que los estudiantes comparen los métodos de transformación de coordenadas y evaluar la capacidad de los estudiantes para hacer cálculos en Trigonometría Esférica.

**Recursos:**

- Aforo: 24 estudiantes, grupos de 4 personas, salón de clase.
- Material y equipo para estudiantes: hoja de resultados, calculadora, hoja de cálculo.
- Experimento: Cartera de cálculo con TSL asignado, ciudad y estrellas por grupo.



### Actividad 8: Transformando Coordenadas

Aplicación Práctica: Cálculo triángulo de Posición  
 Área de trabajo: Triángulo de Posición y Movimiento Diurno  
 Concepto: Transformación de Coordenadas  
 Grado: Semestre I y II Ingeniería

**Objetivo:** Comprender y aplicar los conceptos de coordenadas celestes y su transformación entre los diferentes sistemas

**Materiales:**  
 Cartera, calculadora, hoja de cálculo.

**Procedimiento:**

1. Encuentre en los servicios de efemérides y catálogos las coordenadas de las estrellas indicadas.

Id Estrella y Constelación	Nombre Estrella	Ascensión Recta, $\alpha$	Declinación $\delta$

2. Considere los siguientes valores como constantes para las diferentes transformaciones:

- a. Ubicación Geográfica: \_\_\_\_\_ Lat. ( $\phi$ ): \_\_\_\_\_; Long ( $\lambda$ ): \_\_\_\_\_
- b. Ángulo Horario del Punto vernal  $H\gamma =$  \_\_\_\_\_
- c. Oblicuidad media de la eclíptica a J2000.0  $\epsilon = 23^{\circ}26'21.4''$
- d. Polo galáctico Norte:  $\alpha = 12^{\text{h}}51.4^{\text{m}}$ ;  $\delta = 27^{\circ}8'$

3. Utilizando las ecuaciones determinadas en clase, realice en excel ó en documentos de google, el código necesario para realizar las transformaciones entre los 5 sistemas de coordenadas.

4. Con el programa calcule y diligencie los valores encontrados en la siguiente tabla.

Id Estrella y Constelación	Horizontales	Locales	Eclípticas	Galácticas

Nombre(s): \_\_\_\_\_

Código(s): \_\_\_\_\_

Fecha: \_\_\_\_\_ Profesor Ing. Edilberto Suárez Torres - [esuarez@udistrital.edu.co](mailto:esuarez@udistrital.edu.co)

**Figura 5-8.** Actividad 8: Transformando Coordenadas

**Referencias bibliográficas:** Actividad diseñada por el autor; recurso (Calvo, 2013).

## 5.9 Actividad 9: Encuesta final

Se plantea esta encuesta como actividad orientada a resultados y de la aplicación de la secuencia, utilizando al igual que en la sección 5.4 el aula virtual del espacio académico Astronomía Esférica; en este caso se programó encuesta con 20 preguntas utilizando diferentes modalidades de pregunta cerrada, para el caso selección múltiple, opción única, emparejamiento y falso verdadero.

### 5.9.1 Cuestionario

La imagen 5-10 muestra la configuración de la encuesta en el aula virtual, para la cual se creó un respectivo banco de preguntas ordenado acorde con las temáticas consideradas en los dos bloques de la secuencia.

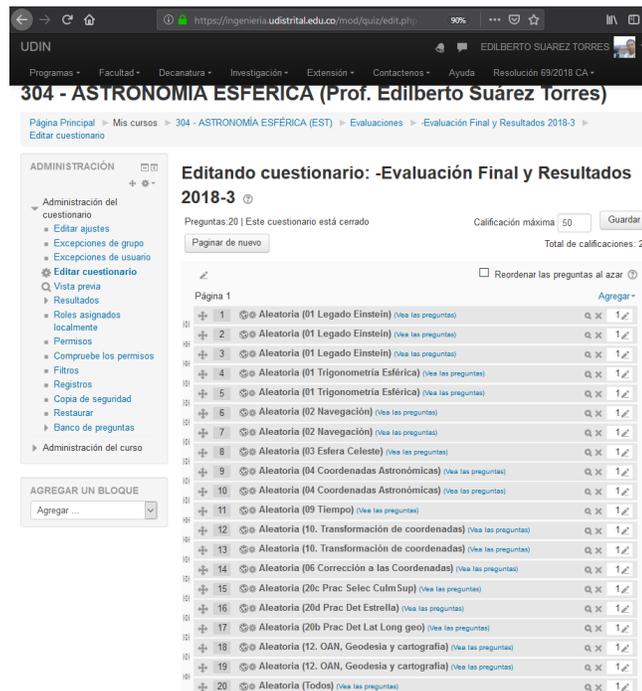


Figura 5-9. Encuesta en Aula Virtual

El test diseñado contiene 20 preguntas relacionadas con temas del syllabus del espacio académico; cada tema del syllabus contiene subtemas en los que se organizó el banco de preguntas; cada pregunta se orientó de manera tal que el análisis para llegar a la respuesta, requería conocer y haber aprendido la significancia de los bloques de la secuencia didáctica, triángulo de posición y movimiento diurno.

### 5.9.2 Finalidad preguntas

El propósito de esta actividad es la de evaluar la totalidad de la secuencia con el fin de observar cuál fue el nivel de aprehensión de los estudiantes con los dos bloques considerados; se incluye en la encuesta aplicaciones de estos conceptos en diferentes temas del syllabus como se observa en la siguiente tabla, esto orientado a las competencias que debe aportar el espacio académico.

Tema Syllabus	Conceptos	Banco de preguntas	# preguntas
Trigonometría Esférica	Geometría, geometría no euclidiana, curvatura, métrica, exceso esférico	Legado de Einstein	3
	Propiedades y resolución de triángulos esféricos	Trigonometría Esférica	3
Planeta Tierra y Esfera Celeste	Determinación de la posición sobre la Esfera terrestre, navegación	Navegación	2
Coordenadas Celestes	Esfera Celeste, carta Celeste	Esfera Celeste	1
	Triángulo de posición, matrices de rotación, cálculo numérico	Transformación de Coordenadas	4
Fenómenos astronómicos y corrección a las coordenadas	Precesión, nutación, movimiento propio	Corrección a las coordenadas	1
Tiempo en Astronomía	Ángulo horario, tiempo Solar, tiempo sidereal	Tiempo	1
		Tiempo Det. Estrellas	1
Astronomía Geodésica	Movimiento diurno, tiempo sidereal y Solar, OAN, Meridiana astronómica, determinación de la Latitud, origen sistema de referencia Colombiano	Selección estrellas culminación superior	1
		Det. Latitud y Longitud	1
		OAN, Geodesia y Cartografía	2

**Tabla 16.** Estructura de la encuesta final

## **6.Resultados**

El fin de este capítulo es mostrar algunos de los resultados obtenidos en la aplicación de cada una de las actividades, relacionándolos con aspectos del soporte teórico del trabajo contenidos en los marcos disciplinar, epistemológico y didáctico, respectivamente, así como presentar algunas recomendaciones para la utilización futura de esta propuesta académica.

Las actividades planteadas en el capítulo anterior fueron aplicadas inicialmente a 27 estudiantes del grupo 63 de Astronomía Esférica durante el segundo periodo académico semestral 2018 de la Universidad Distrital “Francisco José de Caldas”; sin embargo, al finalizar el semestre académico quedaron matriculados 19 estudiantes, esto debido a la dinámica normal universitaria de cancelaciones y abandonos, pero que, en especial, sobresalió para el periodo académico de la implementación 2018-II, debido al paro estudiantil de las universidades públicas colombianas, lo que ocasionó dividir el semestre en dos, suspender las actividades de enseñanza por tres meses, extender hasta la primera semana de marzo de 2019 su culminación y permitir a los estudiantes la cancelación de espacios académicos en forma extraordinaria.

### **6.1 Resultados por actividad**

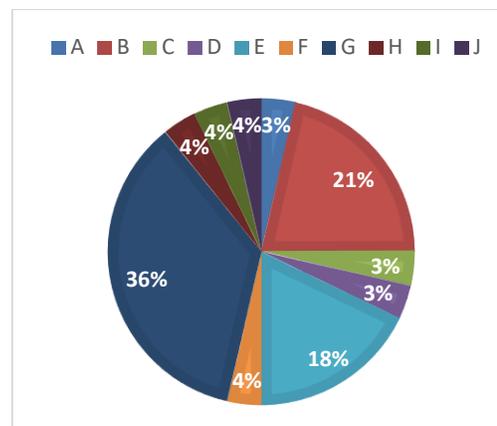
#### **6.1.1 Actividad 1: Encuesta inicial**

Para el análisis de resultados de esta actividad se analizó cada una de las seis (6) preguntas calculando frecuencias de las respuestas obtenidas, las preguntas abiertas se normalizaron; seguidamente se realizó un análisis sobre las posibles causas de las respuestas de los estudiantes, así como las conclusiones sobre los pre-conceptos con los que parten los estudiantes antes de las siguientes actividades.

• **Pregunta 1. ¿Qué es Geometría?**

	¿Qué es la Geometría?	Cantidad	%
A	Ciencia que estudia las líneas, su comportamiento y formas que generan.	1	3,6
B	Ciencia que estudia las medidas de la Tierra.	6	21,4
C	Ciencia que estudia el espacio como un concepto tangible.	1	3,6
D	Ciencia que estudia la distancia y forma que existen entre diferentes cuerpos.	1	3,6
E	Ciencia que estudia las características de las Figuras geométricas y sus aplicaciones.	5	17,9
F	Es el estudio de las formas de los poliedros.	1	3,6
G	Estudia las medidas de las formas geométricas.	10	35,7
H	Rama de las matemáticas que mide unidades determinadas.	1	3,6
I	Ciencias que estudia la superficie.	1	3,6
J	No responde.	1	3,6
	TOTAL ENCUESTADOS	28	100

**Tabla 17.** Resumen de respuestas pregunta 1



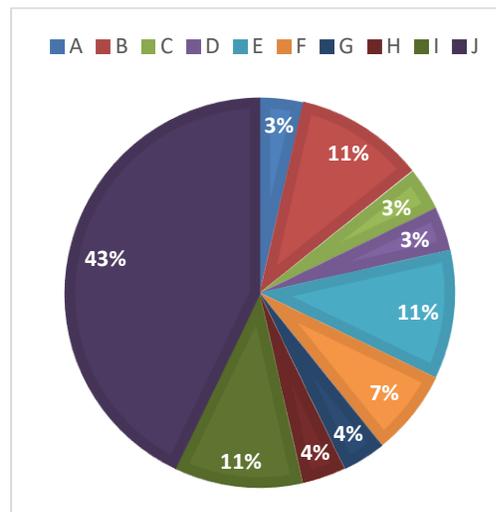
**Figura 6-1.** Imagen con porcentaje de respuestas pregunta 1

Como se puede ver, más de la mitad de los estudiantes indican que la geometría estudia las formas geométricas y sus aplicaciones, respuestas E y F; el 21% de los estudiantes señalan que la geometría se refiere a medir la Tierra y el resto de estudiantes en mucha menor proporción relaciona la geometría con medidas sobre las superficies, formas y matemáticas; estos resultados indican con buena sensibilidad que existen conceptos elaborados que los estudiantes han construido en sus estudios previos.

• **Pregunta 2. ¿Qué es Geometría euclidiana?**

	¿Qué es Geometría Euclidiana?	Cantidad	%
A	Es la composición de ángulos rectos en las Figuras.	1	3,6
B	Ciencia que estudia el espacio mediante postulados de Euclides.	3	10,7
C	Es el estudio de la longitud del planeta Tierra.	1	3,6
D	Herramienta que permite hallar valores en las Figuras.	1	3,6
E	Geometría que se hace sobre un plano.	3	10,7
F	Estudio de la forma de la Tierra por medio de una Esfera.	2	7,1
G	Rama de la geometría que considera la Tierra plana.	1	3,6
H	Geometría tomando en cuenta conceptos euclidianos sobre un plano.	1	3,6
I	Encargada de estudiar e identificar aspectos de georreferenciación	3	10,7
J	No responde	12	42,9
	TOTAL ENCUESTADOS	28	100

**Tabla 18.** Resumen de respuestas pregunta 2

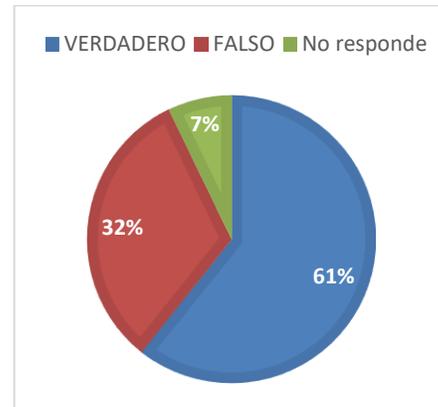


**Tabla 19.** Imagen con porcentaje de respuestas pregunta 1

Las respuestas a la pregunta dos muestran que tan Solo el 21% de los estudiantes tiene clara la definición de geometría euclidiana, respuestas B y E; el 7% se acerca a la definición de los anteriores, pero con términos confusos, respuestas G y H; bastante contundente la respuesta J en la cual los estudiantes no respondieron a la pregunta, así como las respuestas del resto de la población las cuales tienen conceptos equivocados.

- **Pregunta 3. ¿La distancia más corta entre dos puntos sobre una Esfera es una línea recta?**

Respuesta	Cantidad	%
Verdadero	17	60,7
Falso	9	32,1
No responde	2	7,1
TOTAL ENCUESTADOS	28	100

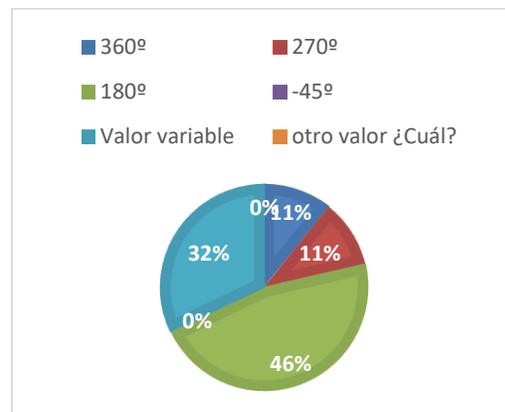


**Figura 6-2.** Resumen y porcentajes de respuestas pregunta 3

La tabla y la gráfica anterior muestran que el 61% de estudiantes no conocen el concepto de geodésica de superficie, y suponen que la medida de la distancia entre dos puntos sobre la Esfera es una línea recta; el 32% de estudiantes afirman que no es una línea recta.

- **Pregunta 4. ¿La suma de los ángulos internos de un triángulo dibujado sobre una Esfera es?**

Respuesta	Cantidad	%
360°	3	10,7
270°	3	10,7
180°	13	46,4
-45°	0	0,0
Valor variable	9	32,1
otro valor ¿Cuál?	0	0,0
TOTAL ENCUESTADOS	28	100,0

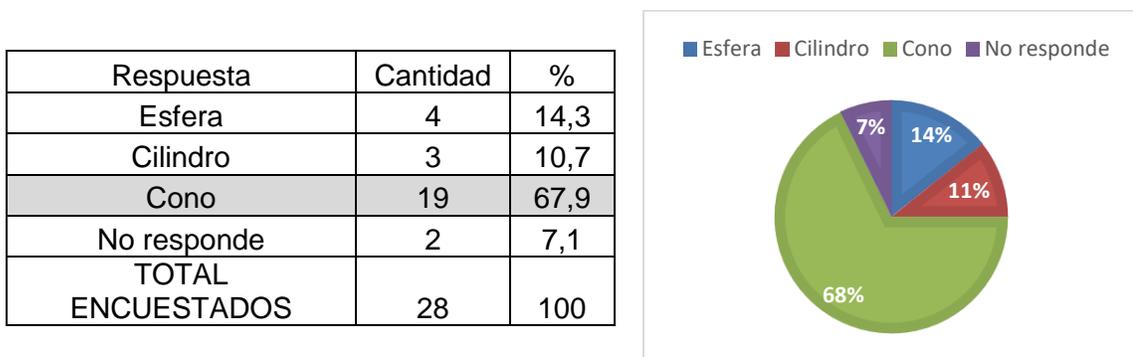


**Figura 6-3.** Resumen y porcentajes de respuestas pregunta 4

Como se observa en la tabla y la gráfica anterior, el 46% de estudiantes afirman que la suma de ángulos internos de un triángulo esférico es igual a la suma de los correspondientes ángulos de un triángulo plano; el 32% selecciona la respuesta correcta,

valor variable, y el 22% restante indican que es mayor que  $180^\circ$  pero asumiendo valores fijos.

- **Pregunta 5. Al trazar un sistema de coordenadas similar al de las coordenadas geográficas (Latitud y Longitud) en la superficie de las siguientes Figuras, indique para que caso los meridianos se cruzan (Convergen).**



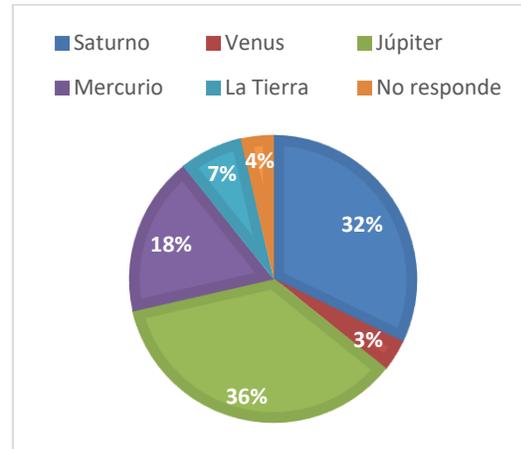
**Figura 6-4.** Resumen y porcentajes de respuestas pregunta 5

La tabla y la gráfica anterior muestran que el 11% de estudiantes asumieron que en un cilindro los meridianos convergen, respuesta errónea por cuanto son paralelos. Para el caso del cono el 67% de estudiantes afirman que en el cono los meridianos convergen; sin embargo, esta respuesta será debatida con ellos en clase por cuanto al extender el cono hacia abajo, los meridianos divergen.

Causa curiosidad observar que, para el caso de la Esfera, situación de uso frecuente al hablar de coordenadas geográficas latitud y longitud, Solo el 14% indicó que los meridianos se cruzan, siendo este caso el más generalizado y en el que es de esperarse una frecuencia más alta de acierto, además que esta sería la respuesta correcta a la pregunta cinco (5).

**Pregunta 6. ¿Suponiendo esféricos los siguientes cuerpos Celestes, indique cual tiene mayor curvatura?**

Respuesta	Cantidad	%
Saturno	9	32,1
Venus	1	3,6
Júpiter	10	35,7
Mercurio	5	17,9
Tierra	2	7,1
No responde	1	3,6
TOTAL ENCUESTADOS	28	100,0



**Figura 6-5.** Resumen y porcentajes de respuestas pregunta 5

La tabla y la gráfica anterior muestran sólo el 18% de los estudiantes parece entender la relación del concepto de curvatura con el radio del planeta considerado; en este caso la respuesta correcta es Mercurio.

**Conclusión Actividad 1 - Encuesta inicial:** Con esta actividad se quería caracterizar a partir del análisis cuantitativo los conocimientos previos de los estudiantes en cada una de los bloques y temas de la secuencia; los resultados muestran en general que la problemática inicial preestablecida que dio el derrotero para el presente trabajo, tiene argumentos cuantitativos que la certifican.

Las preguntas buscaban identificar alguna tendencia sobre conceptos erróneos o confusos preestablecidos, con el fin de ajustar las actividades siguientes de la secuencia hacia el aprendizaje significativo; los resultados generales de la encuesta pueden indicar omisión de las temáticas en los estándares de educación en ciencias y matemáticas de los colegios de donde provienen los estudiantes, así como no aprensión de los conceptos; no se descarta la revisión de la gramática y redacción de las preguntas que podrían generar algún sesgo.

### 6.1.2 Actividad 2: La Ventana Esférica

Esta actividad fue diseñada para enseñar el concepto de curvatura Gaussiana utilizando Metodología de Aprendizaje Activo Demostrativo MMA+D, en el cual el experimento debe por sí mismo llevar a la Solución conceptual del tema, motivando al alumno a deducir los elementos que intervienen para encontrar el significado del fenómeno expuesto. El profesor es, en este contexto, un facilitador y actúa como facilitador y colaborador pasivo.

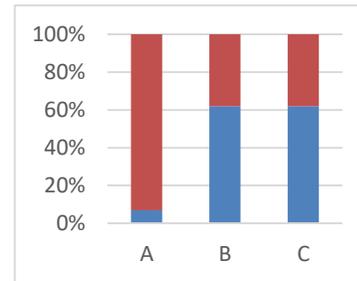


Figura 6-6. imágenes de la guía individual diligenciada y el momento de aplicación

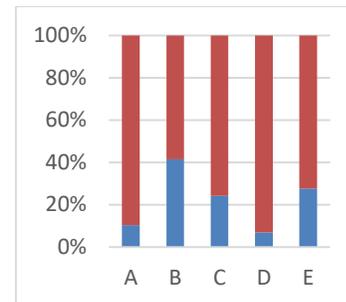
- **Resultados predicciones individuales Actividad 2: La Ventana Esférica**

**Predicción 1:** Cuando se infle el globo, ¿Qué espera observar al comparar el plano de la ventana con la superficie del globo y la línea dibujada en él?

	<b>Respuesta cambios en la línea</b>	<b>N°</b>	<b>Porcentaje (%)</b>
A	La línea permanecerá recta	2	6,9
B	La línea se curva (Arco)	18	62,1
C	La línea Aumenta de grosor	18	62,1
	<b>TOTAL ENCUESTADOS</b>	<b>29</b>	



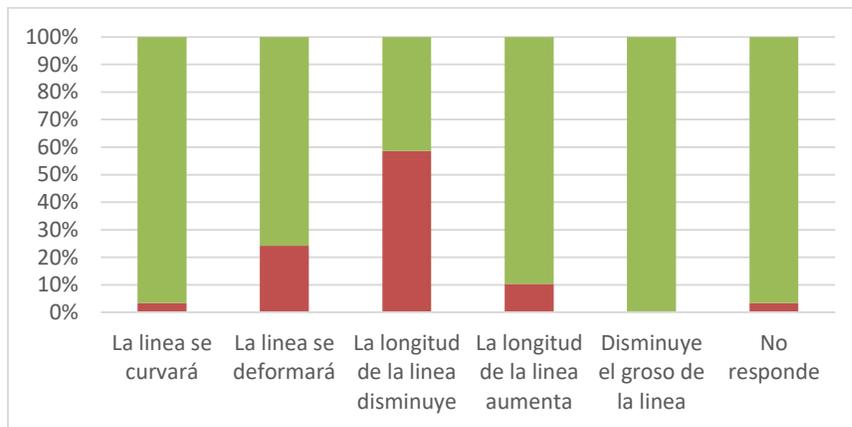
	<b>Respuesta cambios en la superficie del globo</b>	<b>N°</b>	<b>Porcentaje (%)</b>
A	El plano de la ventana se curva	3	10,3
B	El globo sobrepasa la ventana	12	41,4
C	El globo se curva	7	24,1
D	El globo aumenta su tamaño	2	6,9
E	No responde	8	27,6
	<b>TOTAL ENCUESTADOS</b>	<b>29</b>	



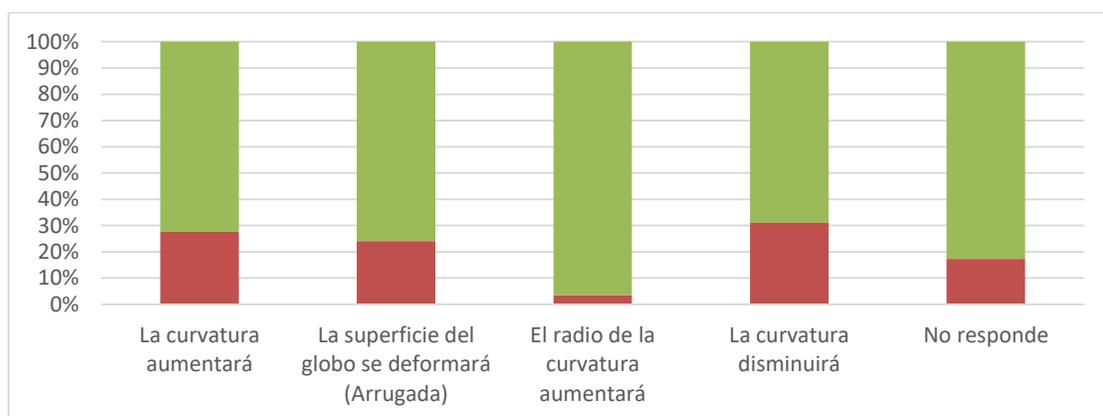
**Figura 6-7.** Estadística predicción 1 individual

**Predicción 2:** Al reducir el tamaño del globo ¿Qué cambio espera observar en la línea y en la curvatura de la superficie del globo?

<b>Respuesta cambios en la línea</b>	<b>N°</b>	<b>Porcentaje(%)</b>
La línea se curvará	1	3,4
La línea se deformará	7	24,1
La longitud de la línea disminuye	17	58,6
La longitud de la línea aumenta	3	10,3
Disminuye el grosor de la línea	0	0,0
No responde	1	3,4
<b>TOTAL ENCUESTADOS</b>	<b>29</b>	



<b>Respuesta cambios en la curvatura</b>	<b>N°</b>	<b>Porcentaje (%)</b>
La curvatura aumenta	8	27,6
La superficie del globo se deforma (Arrugada)	7	24,1
El radio de la curvatura aumentara	1	3,4
La curvatura disminuye	9	31,0
No responde	5	17,2
<b>TOTAL ENCUESTADOS</b>	<b>29</b>	



**Figura 6-8.** Estadística predicción 2 individual

Resultados predicciones grupales Actividad 2: La Ventana Esférica

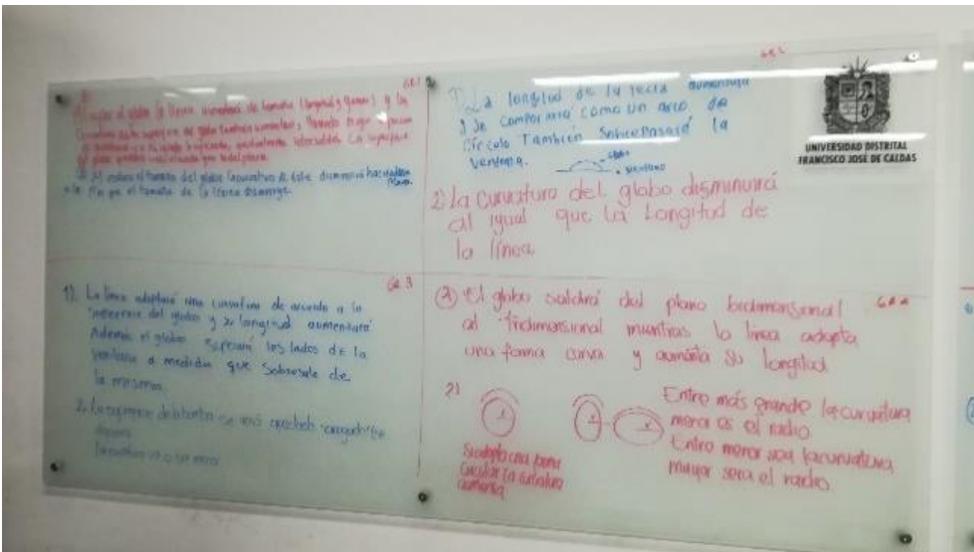
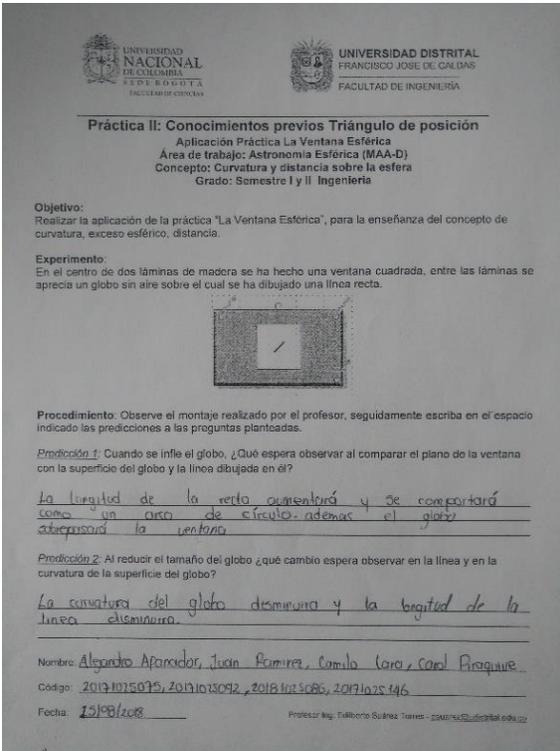
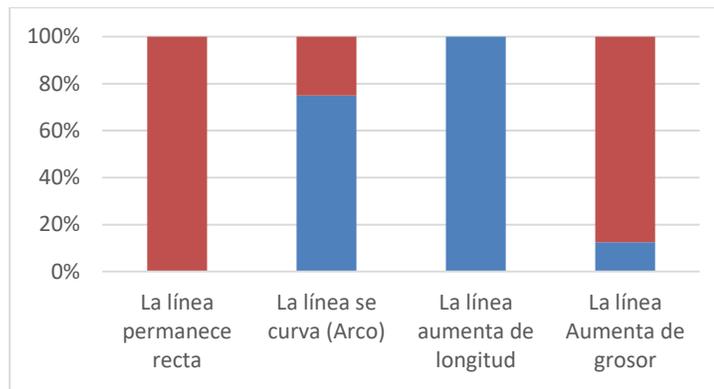


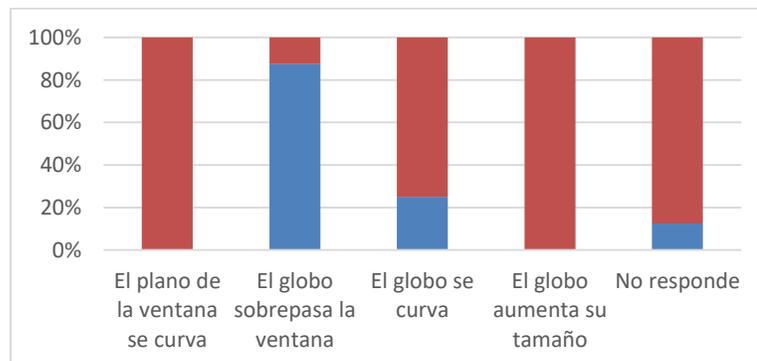
Figura 6-9. Imágenes aplicación actividad grupal, guía diligenciada, discusión grupal y socialización del experimento

**Predicción 1:** Cuando se infle el globo, ¿Qué espera observar al comparar el plano de la ventana con la superficie del globo y la línea dibujada en él?

Respuesta cambios en la línea	N°	Porcentaje(%)
La línea permanece recta	0	0,0
La línea se curva (Arco)	6	75,0
La línea aumenta de longitud	8	100,0
La línea Aumenta de grosor	1	12,5
TOTAL ENCUESTADOS	8	



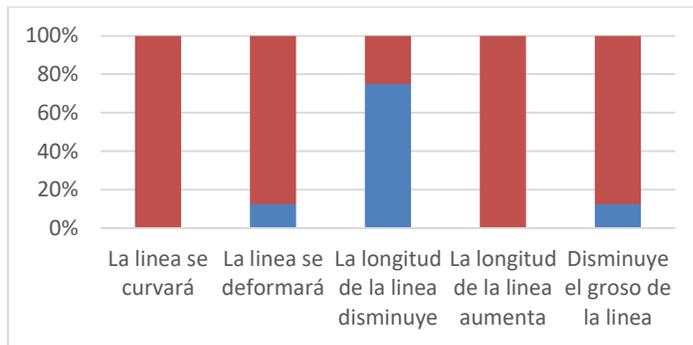
Respuesta cambios en el globo	N°	Porcentaje(%)
El plano de la ventana se curva	0	0
El globo sobrepasa la ventana	7	87,5
El globo se curva	2	25
El globo aumenta su tamaño	0	0
No responde	1	12,5
TOTAL ENCUESTADOS	8	



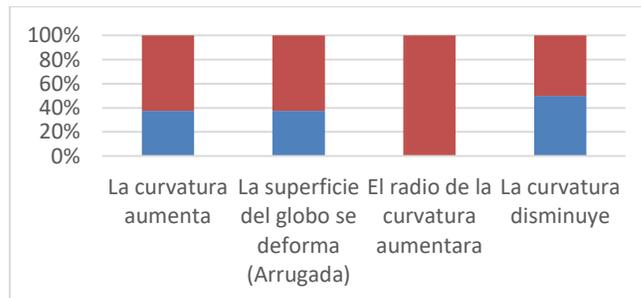
**Figura 6-10.** Estadística predicción 1 grupal

**Predicción 2:** Al reducir el tamaño del globo ¿Qué cambio espera observar en la línea y en la curvatura de la superficie del globo?

Respuesta	N°	Porcentaje (%)
La línea se curvará	0	0
La línea se deforma	1	12,5
La longitud de la línea disminuye	6	75
La longitud de la línea aumenta	0	0
Disminuye el grosor de la línea	1	12,5
<b>TOTAL ENCUESTADOS</b>	<b>8</b>	



Respuesta	N°	Porcentaje (%)
La curvatura aumenta	3	37,5
La superficie del globo se deforma (Arrugada)	3	37,5
El radio de la curvatura aumentara	0	0
La curvatura disminuye	4	50
<b>TOTAL ENCUESTADOS</b>	<b>8</b>	



**Figura 6-11.** Estadística predicción 2 grupal

- **Retroalimentación Actividad 2: La Ventana Esférica**

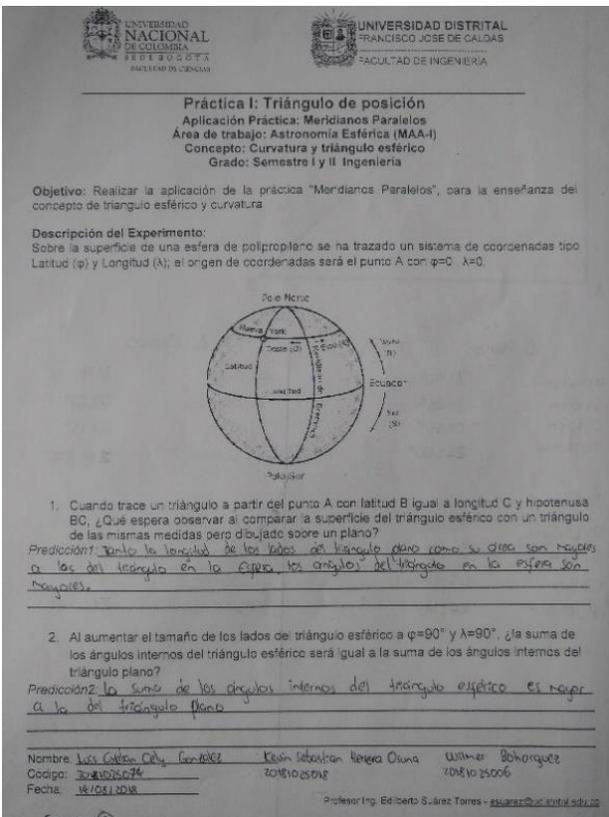
La estadística de la primera predicción, para el caso individual indica que más del 60% de los estudiantes predijeron en forma correcta los cambios en la longitud y forma de la línea al inflar el globo; la misma tendencia se observa en el resultado de las predicciones grupales, pero llegando al 100% para la longitud de la línea y al 75% en la forma curva de la línea. Esta primera predicción también indaga sobre la superficie del globo respecto al plano de la ventana, por lo cual, en el caso individual, el 41% de los estudiantes predicen que el globo saldrá por la ventana, el 24% que el globo se curva y el 21% no contesta; en el caso grupal el 88% afirman que el globo saldrá y el 25% que el globo se curva. Lo anterior muestra que el preconcepto de curvatura estaba bien planteado acorde con la encuesta inicial, es decir, que la curvatura aumenta si el radio aumenta.

En la estadística individual de la segunda predicción relacionada con retirar el aire del globo, el 58% de estudiantes predicen acertadamente que la línea disminuirá de tamaño y otros en forma relacionada asumen que la línea se deformará; las predicciones grupales aumentan en la misma dirección al 75% y las de deformación u otras respuestas se mantienen. Para el caso de la curvatura al desinflar el globo, la segunda predicción indica que a nivel individual el 31% de los estudiantes afirman que la curvatura disminuirá y las otras respuestas con menor proporción indican que la curvatura se deforma ó aumenta, el 17% de estudiantes no respondió; para el caso de las predicciones grupales la respuesta que indica que la curvatura disminuirá suben al 50% y las que indican que aumenta o se deforma llegan al 37%. La estadística muestra entonces que la predicción estaba bien planteada para generar confrontación entre los estudiantes alrededor del experimento.

Al realizar la demostración del experimento y su correspondiente socialización, se mostró claramente el contraste que generaron las predicciones con lo que le sucedía al globo, pues al desinflar paulatinamente el globo, este salía por la ventana mostrando que, efectivamente, la línea disminuía su tamaño, pero que la curvatura aumentaba; al indagar sobre las variables relacionadas rápidamente los estudiantes encontraron la relación inversa entre radio y curvatura expuesta en la sección 3.2. La actividad aplicada tuvo muy buena acogida en los estudiantes, se evidenció que generó en ellos expectativa e interés por demostrar los resultados; el tiempo se extendió a 90 minutos debido a la dinámica e interés generado; en general se observó que las predicciones planteadas lograron el objetivo de generar controversia y dinamismo sobre el experimento.

### 6.1.3 Actividad 3: Meridianos y paralelos

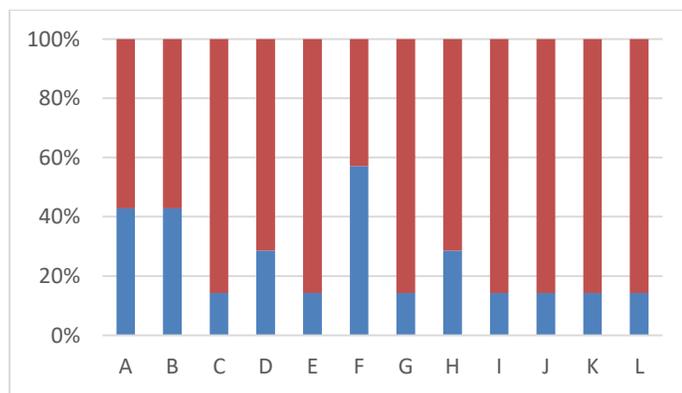
Esta actividad fue diseñada para enseñar el concepto de sistema de coordenadas de superficie utilizando Metodología de Aprendizaje Activo Interactivo, en la cual el estudiante es quién realiza el experimento después de realizar las predicciones.



**Figura 6-12.** imágenes de la guía individual diligenciada y del momento de aplicación

- **Predicción 1:** ¿Qué espera observar al comparar la superficie del triángulo esférico con un triángulo de las mismas medidas, pero dibujado sobre un plano?
- **Resultados predicciones individuales Actividad 3: Meridianos y Paralelos**

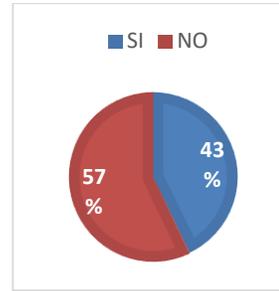
	<b>Respuesta</b>	<b>Cantidad</b>	<b>%</b>
A	La distancia es la misma en ambas superficies.	3	42,9
B	El área es la misma en ambas superficies.	3	42,9
C	Los ángulos son los mismos en ambas superficies.	1	14,3
D	La distancia es diferente es ambas superficies.	2	28,6
E	El área es diferente en ambas superficies.	1	14,3
F	Los ángulos son diferentes en ambas superficies	4	57,1
G	Mantienen las mismas coordenadas	1	14,3
H	La suma interna de los ángulos esféricos es diferente de 180	2	28,6
I	Los lados del triángulo plano son mayores a los del esférico	1	14,3
J	El área del triángulo plano es mayor a la del esférico	1	14,3
K	Los ángulos en el triángulo esférico es mayor al de los planos	1	14,3
L	El triángulo en el plano más grande	1	14,3
	<b>TOTAL ENCUESTAS</b>	<b>7</b>	



**Figura 6-13.** Estadística predicción individual 1

- **Predicción 2:** Al aumentar el tamaño de los lados del triángulo esférico a  $\phi=90^\circ$  y  $\lambda=90^\circ$ , ¿la suma de los ángulos internos del triángulo esférico será igual a la suma de los ángulos internos del triángulo plano?

Respuesta	Cantidad	%
SI	3	42,9
NO	4	57,1
TOTAL	7	100,0



**Figura 6-14.** Estadística predicción individual 1

- **Retroalimentación Actividad 3: Meridianos y Paralelos**

La estadística de la primera predicción indica que los estudiantes evaluaron 12 aspectos, siendo el más notorio el F el cual indica que la suma de los ángulos internos del triángulo esférico es diferente entre ellas y mayor a  $180^\circ$ ; seguidamente manifiestan que las áreas son iguales, y que las distancias de los lados también son iguales. La estadística de la segunda predicción que corresponde con una pregunta cerrada V/F para orientar la respuesta hacia la suma de ángulos y el exceso esférico, muestra que el 43 % de estudiantes considera que la suma de ángulos en los dos triángulos es la misma, es decir,  $180^\circ$ , en tanto que el resto 57% considera que son diferentes.

La socialización del experimento consistió en que los estudiantes construyeran un sistema de coordenadas de superficie sobre una Esfera, seguidamente un triángulo para, finalmente, medir ángulos y distancias para contrastar sus predicciones con lo observado en el modelo construido. La actividad aplicada tuvo muy buena recepción por los estudiantes y se evidenció interés por el experimento; el mayor contraste se generó cuando apreciaron que la suma de ángulos en un triángulo esférico es mayor a  $180^\circ$  e iniciaron la relación con la actividad anterior de curvatura.

### 6.1.4 Actividad 4: Geometría Esférica – actividad de seguimiento

El propósito de esta actividad es de seguimiento y retroalimentación, esto con el fin de poder observar cuál fue el nivel de aprehensión de los estudiantes en cuanto a los temas de aprendizaje de las actividades 2 y 3. Las Figuras siguientes muestran la programación de la evaluación en la plataforma Moodle de la facultad de ingeniería de la Universidad Distrital “Francisco José de Caldas” <https://ingenieria.udistrital.edu.co/>, así como las preguntas realizadas con las respuestas correctas a cargo de diferentes estudiantes.

#### 304 - ASTRONOMÍA ESFÉRICA (Prof. Edilberto Suárez Torres)

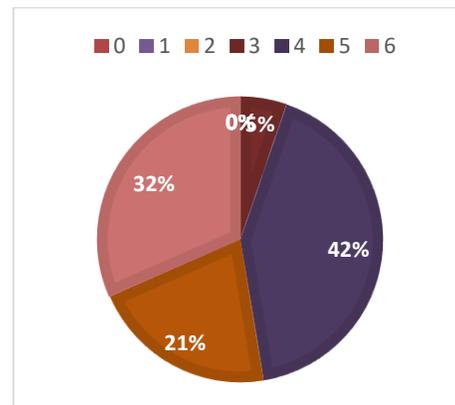
 **NICOLAS LOZANO AROCA**  
**Cuestionario** AcIv120183: Geometría, Trigonometría Esférica, Navegación Terrestre  
**Pregunta** Esfera  
**Finalizado en** miércoles, 26 de septiembre de 2018, 18:33

**Pregunta 1**  
 Correcta  
 Puntúa 2 sobre 2

Relacione en forma adecuada los conceptos considerados con su correcta definición.

- La Geometría de la esfera es: No Euclidiana ✓
- Si se considera un área muy pequeña de la esfera, la geometría es: Euclidiana ✓
- La superficie esférica es un elemento tridimensional (si ó no) ? No ✓
- El Exceso Esférico de una esfera es: 720° ✓
- En una esfera los meridianos: Convergen ✓
- La distancia más corta entre dos puntos sobre una esfera es: Arco de círculo máximo ✓

Respuestas correctas	frecuencia	%
0	0	0,0
1	0	0,0
2	0	0,0
3	1	5,3
4	8	42,1
5	4	21,1
6	6	31,6
TOTAL	19	100



**Figura 6-15.** Estadística pregunta 1 actividad de seguimiento

### 304 - ASTRONOMÍA ESFÉRICA (Prof. Edilberto Suárez Torres)

SARA VALENTINA GUAVITA AVILA

**Cuestionario** Activ120183: Geometría, Trigonometría Esférica, Navegación Terrestre

**Pregunta** geodésicas

**Finalizado en** miércoles, 26 de septiembre de 2018, 18:33

**Pregunta 2**  
Correcta  
Puntúa 2 sobre 2

Relacione cada palabra con su definición

es la Geodésica del espacio euclidiano  ✓

Es la geodésica sobre una esfera  ✓

Es la curva de menor distancia entre dos puntos sobre cualquier superficie.  ✓

Es la ecuación matemática que permite estimar la medida de la Geodésica  ✓

Respuestas correctas	frecuencia	%
0	0	0,0
1	3	15,8
2	8	42,1
3	5	26,3
4	3	15,8
TOTAL	19	100

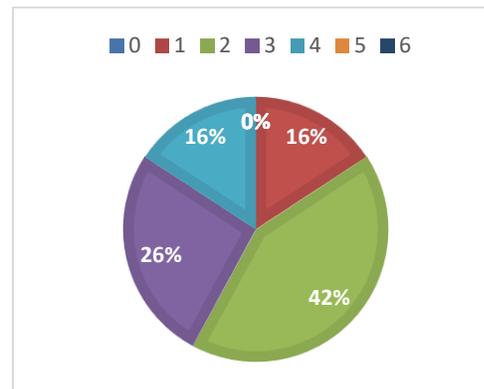


Figura 6-16. Estadística pregunta 2 actividad de seguimiento

### 304 - ASTRONOMÍA ESFÉRICA (Prof. Edilberto Suárez Torres)

SARA VALENTINA GUAVITA AVILA

**Cuestionario** Activ120183: Geometría, Trigonometría Esférica, Navegación Terrestre

**Pregunta** Casos TriangEsférico

**Finalizado en** miércoles, 26 de septiembre de 2018, 18:33

**Pregunta 3**  
Correcta  
Puntúa 2 sobre 2

Relacione cada caso de triángulo esférico oblicuángulo, con su correspondiente conjunto de fórmulas para solucionarlo sin utilizar datos calculados.

Se conocen los tres lados (a, b, c)  ✓

Se conocen los tres Ángulos (A, B, C)  ✓

Se conocen dos lados y el ángulo comprendido (a, b, C)  ✓

Se conocen dos lados y un ángulo opuesto (a, b, A)  ✓

Respuestas correctas	frecuencia	%
0	1	5,3
1	6	31,6
2	5	26,3
3	5	26,3
4	2	10,5
TOTAL	19	100

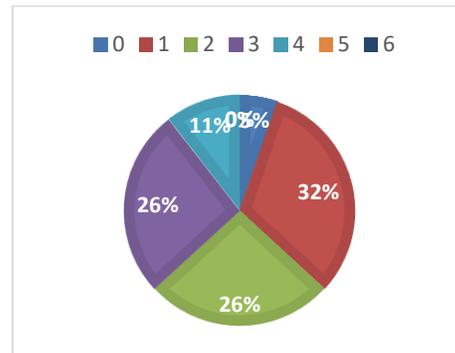


Figura 6-17. Estadística pregunta 3 actividad de seguimiento

304 - ASTRONOMÍA ESFÉRICA (Prof. Edilberto Suárez Torres)

JUAN PABLO SOLER GARCÍA

**Cuestionario** Activ120183: Geometría, Trigonometría Esférica, Navegación Terrestre

**Pregunta** Curvatura

**Finalizado en** miércoles, 26 de septiembre de 2018, 18:34

**Pregunta 4**  
Correcta  
Puntúa 2 sobre 2

Escoja para cada caso la respuesta correcta de acuerdo al orden:  
1. Exceso Esférico, 2. Curvatura, 3. Suma de Ángulos Internos del Triángulo  
pd. considere el siguiente gráfico para ayudar a entender la situación.

**DIFFERENT TYPE OF GEOMETRIES**

**Euclidean Plane**

**Surface of a Sphere**

**Surface of a Saddle**

Esfera: Exceso Esférico > 0 ; Curvatura > 0 ; Suma de Ángulos Internos del Triángulo > 180 ✓

Plano: Exceso Esférico=0 ; Curvatura=0 ; Suma de Ángulos Internos del Triángulo=180 ✓

Silla de Montar: Exceso Esférico < 0 ; Curvatura < 1 ; Suma de Ángulos Internos del Triángulo < 180 ✓

Respuestas correctas	frecuencia	%
0	3	15,8
1	11	57,9
2	3	15,8
3	2	10,5
TOTAL	19	100

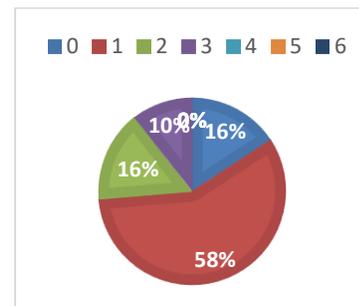


Figura 6-18. Estadística pregunta 4 actividad de seguimiento

**304 - ASTRONOMÍA ESFÉRICA (Prof. Edilberto Suárez Torres)**

**JUAN ESTEBAN RAMIREZ RODRIGUEZ**

**Cuestionario** Activ120183: Geometría, Trigonometría Esférica, Navegación Terrestre

**Pregunta** Curvatura3

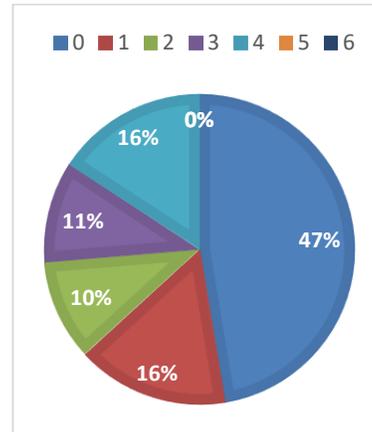
**Finalizado en** miércoles, 26 de septiembre de 2018, 18:34

**Pregunta 5**  
Correcta  
Puntúa 2 sobre 2

Suponiendo esféricos los objetos celestes considerados, ordénelos de menor a mayor curvatura; el Astro de menor curvatura de todos será el objeto número uno y así sucesivamente.

1 Sol ✓  
3 Saturno ✓  
2 Júpiter ✓  
4 Tierra ✓

Respuestas correctas	frecuencia	%
0	9	47,4
1	3	15,8
2	2	10,5
3	2	10,5
4	3	15,8
<b>TOTAL</b>	<b>19</b>	<b>100</b>



**Figura 6-19.** Estadística pregunta 4 actividad de seguimiento

**304 - ASTRONOMÍA ESFÉRICA (Prof. Edilberto Suárez Torres)**

**SARA BIBIANA MARTINEZ MARTINEZ**

**Cuestionario** Activ120183: Geometría, Trigonometría Esférica, Navegación Terrestre

**Pregunta** Descartes1

**Finalizado en** miércoles, 26 de septiembre de 2018, 18:31

**Pregunta 6**  
Correcta  
Puntúa 2 sobre 2

Eliga la opción más adecuada para cada afirmación

Si un sistema de coordenadas rota alrededor de su origen, las coordenadas de dos puntos definidos sobre la superficie?:  
 ✓

Si un sistema de coordenadas rota alrededor de su origen, la distancia entre dos puntos definidos sobre la superficie?:  
 ✓

Animallito que le permitió a René Descartes, definir un sistema de ubicación con base en posiciones relativas:  
 ✓

Son elementos requeridos para definir un sistema de referencia cartesiano:  
 ✓

Porque solo hasta el siglo XVII se adopta un sistema de referencia como el definido por descartes?  
 ✓

Respuestas correctas	frecuencia	%
0	0	0,0
1	2	10,5
2	3	15,8
3	5	26,3
4	6	31,6
5	3	15,8
TOTAL	19	100

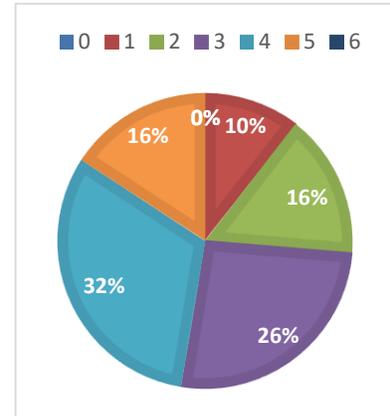


Figura 6-20. Estadística pregunta 6 actividad de seguimiento

### 304 - ASTRONOMÍA ESFÉRICA (Prof. Edilberto Suárez Torres)

 CAROL ANDREA PIRAQUIVE CRISTANCHO

**Cuestionario** Activ120183: Geometría, Trigonometría Esférica, Navegación Terrestre

**Pregunta** No es triángulo esférico

**Finalizado en** miércoles, 26 de septiembre de 2018, 18:30

**Pregunta 7**  
Correcta  
Puntúa 2 sobre 2

No es un triángulo esférico:

Seleccione una:

- a. La figura formada por 3 segmentos de círculo máximo.
- b. El punto de intersección entre 3 círculos menores. ✓
- c. La unión de 3 puntos sobre una esfera con líneas geodésicas
- d. La intersección de un ángulo triedro con vértice en el centro de una esfera.

Respuestas correctas	frecuencia	%
0	8	42,1
1	0	0,0
2	0	0,0
3	0	0,0
4	11	57,9
TOTAL	19	100

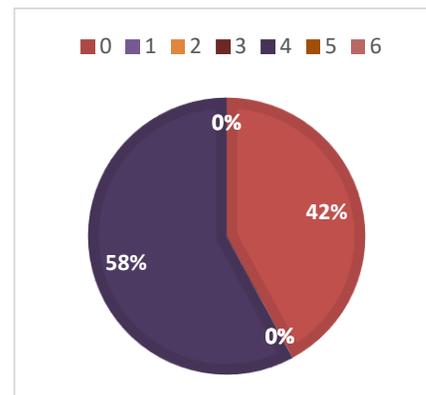


Figura 6-21. Estadística pregunta 7 actividad de seguimiento

### 304 - ASTRONOMÍA ESFÉRICA (Prof. Edilberto Suárez Torres)

	MARIA CAMILA ACEVEDO RODRIGUEZ
<b>Cuestionario</b>	Activ120183: Geometría, Trigonometría Esférica, Navegación Terrestre
<b>Pregunta</b>	no requisito ángulo triedro:
<b>Finalizado en</b>	miércoles, 26 de septiembre de 2018, 18:34

**Pregunta 8**  
Correcta  
Puntúa 2 sobre 2

No se necesita para formar un ángulo triedro:

Seleccione una:

- a. 3 planos.
- b. 3 ángulos diedros.
- c. una esfera. ✓
- d. 3 aristas.

Respuestas correctas	frecuencia	%
0	6	31,6
1	0	0,0
2	0	0,0
3	0	0,0
4	13	68,4
<b>TOTAL</b>	<b>19</b>	<b>100</b>

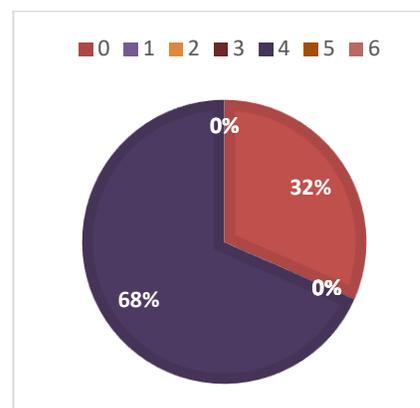


Figura 6-22. Estadística pregunta 8 actividad de seguimiento

### 304 - ASTRONOMÍA ESFÉRICA (Prof. Edilberto Suárez Torres)

	ANNIE GABRIELA CRUZ LEON
<b>Cuestionario</b>	Activ120183: Geometría, Trigonometría Esférica, Navegación Terrestre
<b>Pregunta</b>	teorema del seno
<b>Finalizado en</b>	miércoles, 26 de septiembre de 2018, 18:31

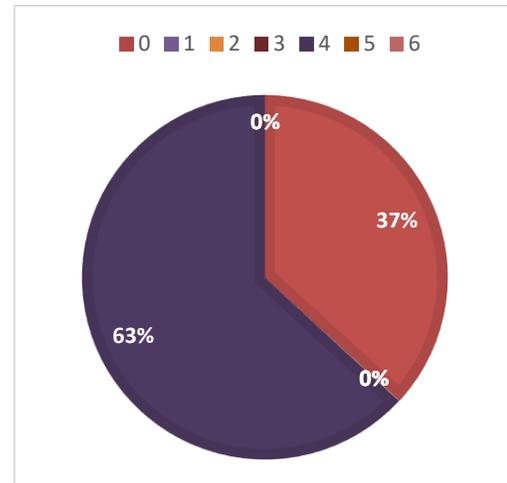
**Pregunta 9**  
Correcta  
Puntúa 2 sobre 2

El teorema del seno de la trigonometría esférica relaciona:

Seleccione una:

- a. Dos de los ángulos y los tres lados.
- b. Cada lado con su respectivo ángulo opuesto. ✓
- c. El perímetro con el exceso esférico.
- d. Los tres lados con uno de los ángulos.

Respuestas correctas	frecuencia	%
0	7	36,8
1	0	0,0
2	0	0,0
3	0	0,0
4	12	63,2
TOTAL	19	100



**Figura 6-23.** Estadística pregunta 9 actividad de seguimiento

- **Retroalimentación Actividad 4: Geometría Esférica – actividad de seguimiento**

La estadística de esta actividad evaluativa muestra resultados favorables en beneficio de la secuencia didáctica, pues se indagó a los estudiantes detalles de lo aprendido en las actividades anteriores y la tendencia de sus respuestas para las preguntas específicas asociadas con curvatura y triángulo esférico son significantes de temas aprendidos.

Para la primera pregunta de 6 opciones más del 95% de estudiantes lograron acertar con arriba del 50% de las 6 sub-preguntas; de hecho, el 32% obtuvo acierto del 100%; en la segunda pregunta los resultados están divididos por cuanto la mitad de los estudiantes obtuvieron más del 50%, el 100% fue alcanzado por 3 estudiantes; las preguntas 1 y 2 están asociadas con la caracterización de la geometría de una superficie.

Las preguntas 3 y 9 relacionan elementos explícitos para Solucionar triángulos esféricos, mostrando para el caso de la pregunta 3 que el 37% de los estudiantes entendían las ecuaciones asociadas a la Solución de triángulos esféricos; el resto de estudiantes acertaron a menos del 50% de la pregunta. Los resultados de la pregunta 9 muestran un nivel de acierto más alto llegando al 68%, quizás por la fácil recordación nemotécnica del teorema del seno para la Trigonometría Esférica.

La pregunta 4 muestra que el 58% de los estudiantes acertaron a 1 de las 3 sub-preguntas, y que el 25% obtuvo más aciertos; resultado que llama la atención por cuanto se mostraba una imagen que tenía las respuestas en forma explícita y esta pregunta compila la caracterización de la geometría de una superficie.

La pregunta 5 es la que presenta menor aciertos, pues el 47% de estudiantes no acertaron a ninguna de las sub-preguntas, el resto de estudiantes correspondiente al 53% acertaron entre 1 y 4 sub-preguntas en forma casi proporcional. El resultado anterior puede deberse a una incorrecta interpretación de la pregunta lo cual debe considerarse para volver a redactarla o reformularla.

La pregunta 6 se relaciona con la construcción de sistemas de referencia y está orientada al seguimiento y comprensión de la lectura complementaria: geometría, espacio y tiempo del libro El Legado de Einstein correspondiente a la cita (Schwinger, 1995).

La pregunta 7 tuvo un 58% de acierto, porcentaje algo bajo para lo esperado posiblemente relacionado con el hecho de utilizar pregunta inversa, lo que pudo generar confusión en la interpretación de la respuesta; resultado que contrasta con el resultado de la pregunta 8 en la que se utilizó el mismo tipo de pregunta, pero el resultado subió al 68%. En los dos casos es necesario evaluar el tipo y forma de pregunta para futuras aplicaciones.

### 6.1.5 Actividad 5: Coordenadas esféricas

Esta actividad buscaba que el estudiante, por medio de la construcción de un modelo didáctico, aplicara el significado de sistema de coordenadas, diferenciando orientación, origen y planos de referencia de los 5 sistemas frecuentemente utilizados en astronomía. La actividad asume que el estudiante ya ha conocido los sistemas de coordenadas en clase, lo que pretende que la actividad materialice el modelo conceptual.

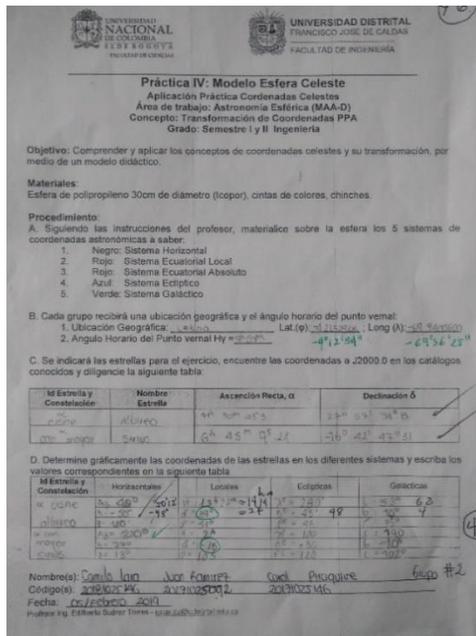


Figura 6-24. imágenes de la guía individual diligenciada y del momento de aplicación

- **Datos de entrada:**

- Todos los grupos trabajaron con el mismo valor del ángulo horario del punto vernal 9h50m.
- Cada grupo de trabajo recibió un lugar de la Tierra diferente para el desarrollo del modelo

<b>Ubicación Geográfica</b>	<b>Latitud</b>	<b>Longitud</b>
OAN	4°36'50" N	74°5'39" W
Leticia	4°12'29,16" S	69°56'35,52" W
Machupicho	13°9'47" S	74°32'44" W
San Andrés	12°35'37" N	81°43'13" W
Teotihuacán	19° 41'33" N	78°50'38" W
Stonehenge	51°10'44" N	1°49'34" W
Amundsenscott	89°59'0" S	139°16'36" E

- Todos los grupos debían consultar en un catálogo de estrellas a J2000 las coordenadas de las dos estrellas asignadas, para el caso todos trabajaron con Albireo y Sirius:

<b>Id Estrella y Constelación</b>	<b>Nombre Estrella</b>	<b>Ascensión Recta <math>\alpha</math></b>	<b>Declinación <math>\delta</math></b>
32349 Id-HP	Sirius, Alpha Canis Majoris	6h 45m 9,24	-16° 42' 47,31
95947 Id-HP	Albireo, Beta Cygni	19 <sup>h</sup> 30 <sup>m</sup> 43,28	27° 57' 34,9

- **Estadísticas Actividad 5: Coordenadas esféricas**

Alpha -Can mayor (Sirio)					
Eclípticas			Galácticas		
Longitud	Latitud	$\rho^E$	Latitud	Longitud	$\rho^G$
104	-39	129	17	6	83
100	-30	120	-10	190	102
80	-45	135	-70	155	160
104	-39	129	-8	255	-
263	31	-	-20	200	110
80	28	62	5	208	-
186	-12	102	55	230	34

**Tabla 20.** Datos de las coordenadas determinadas en forma gráfica por los estudiantes

Alpha-Cisne (Albireo)					
Eclípticas			Galácticas		
$\lambda$	$\beta$	$\rho^E$	b	l	$\rho^G$
301	48	41	4	62	27
280	45	45	10	53	75
48	45	44	30	70	60
301	48	41	4	62	85
83	39	53	27	35	61
268	70	30	7	67	-
2	38	51	-40	9	128

**Tabla 21.** Datos de las coordenadas determinadas en forma gráfica por los estudiantes

- **Retroalimentación Actividad 5: Coordenadas esféricas**

La actividad consistía en construir el modelo de Esfera Celeste con los datos de entrada; con este modelo el estudiante determinaba por el sistema de proyección las coordenadas de las estrellas (coordenadas gráficas). Los resultados encontrados no fueron evaluados cualitativamente por cuanto la interacción era construir el modelo y determinar coordenadas en forma gráfica registrando resultados en la guía; seguidamente y por correcciones iterativas orientadas por el profesor, se realizan los ajustes para la ubicación y orientación adecuada de cada sistema de coordenadas; finalmente, cada grupo definió la Esfera Celeste con los sistemas de coordenadas astronómicas debidamente orientados y ajustados.

### 6.1.6 Actividad 6: Siguiendo estrellas

En esta actividad didáctica interactiva el estudiante definía la fecha para realizar la práctica en el observatorio astronómico de la Universidad Distrital “Francisco José de Caldas”, en horario de 6PM a 9PM, intervalo de tiempo en el que debía registrar en 5 momentos diferentes las coordenadas horizontales de una estrella visible.

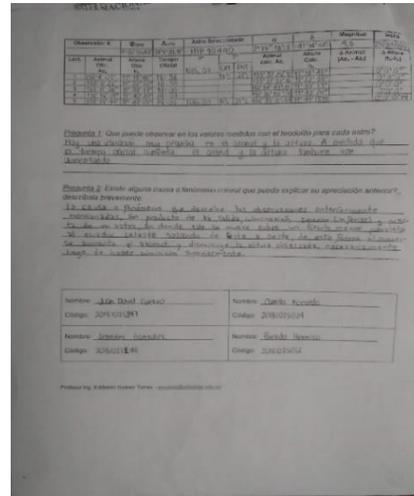
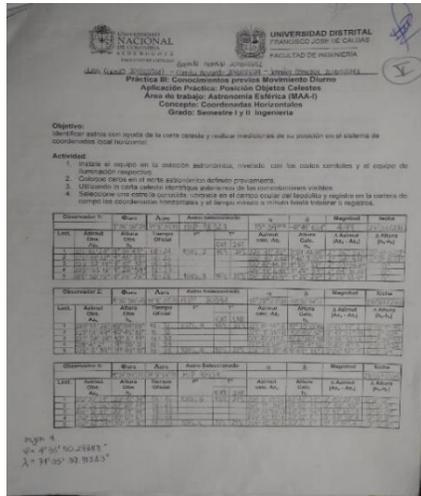
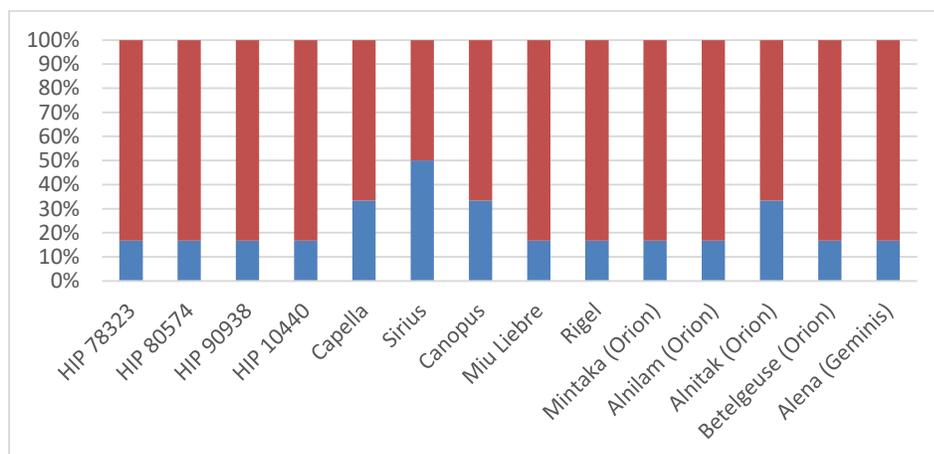


Figura 6-25. imágenes de la guía grupal diligenciada y del momento de aplicación

- **Estadísticas Actividad 6: Siguiendo estrellas**

Estrellas Observadas	Cantidad	%
HIP 78323	1	16,67
HIP 80574	1	16,67
HIP 90938	1	16,67
HIP 10440	1	16,67
Capella	2	33,33
Sirius	3	50,00
Canopus	2	33,33
Miu Liebre	1	16,67
Rigel	1	16,67
Mintaka (Orion)	1	16,67
Alnilam (Orion)	1	16,67
Alnitak (Orion)	2	33,33
Betelgeuse (Orion)	1	16,67
Alena (Geminis)	1	16,67
<b>TOTAL CARTERAS</b>	<b>6</b>	

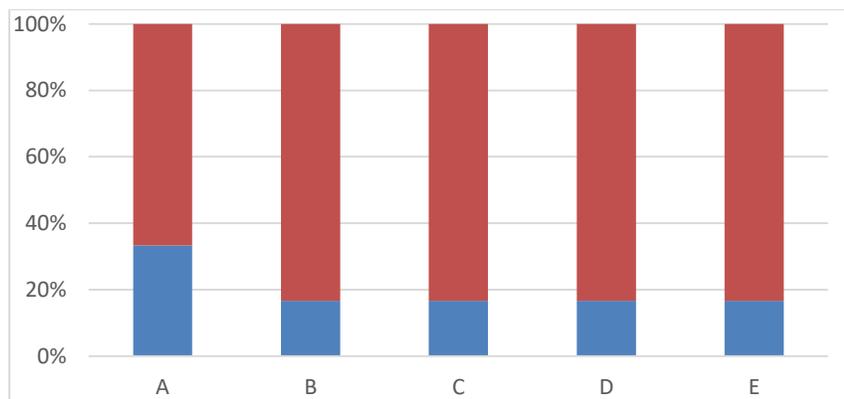
Fecha de aplicación
29-oct-18
20-feb-19
20-feb-19
20-feb-19
15-feb-19
20-feb-19



**Figura 6-26.** Estadística de estrellas observadas

- Predicción 1: ¿Qué puede observar en los valores medidos con el teodolito para cada astro?

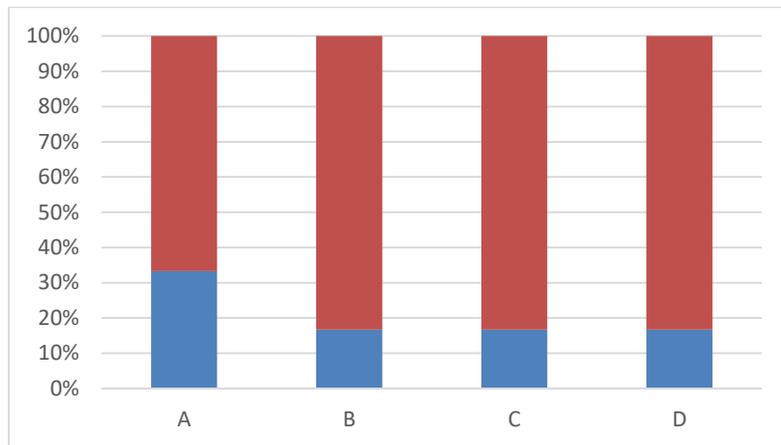
	Respuesta	Cantidad	%
A	A medida que el tiempo aumenta, el azimut y la altura también aumentan.	2	33,3
B	La altura aumenta hasta culminar, luego disminuye.	1	16,7
C	El azimut siempre aumenta.	1	16,7
D	El movimiento de las estrellas, y su ubicación en una hora.	1	16,7
E	Variaciones en el azimut y la altura.	1	16,7
	TOTAL	6	



**Figura 6-27.** Estadística predicción 1 actividad siguiendo estrellas

- Predicción 2: ¿Existe alguna causa o fenómeno natural que pueda explicar su apreciación anterior?

	Respuesta	Cantidad	%
A	Debido a la salida, culminación y puesta. (movimiento de este a oeste)	2	33,3
B	Debido a la rotación y traslación.	1	16,7
C	Debido a la refracción, difracción, temperatura y presión.	1	16,7
D	El movimiento de los astros da lugar a las variaciones.	1	16,7
	TOTAL	6	



**Figura 6-28.** Estadística predicción 2 actividad siguiendo estrellas

- **Retroalimentación Actividad 6: Siguiendo estrellas**

La predicción 1 muestra que todos los estudiantes identifican movimiento en las estrellas observando cambios en azimut y altura en forma progresiva, lo cual se evidencia también en las carteras de campo diligenciadas, resalta el hecho de que no hay acuerdo en la dirección del movimiento; esta actividad entonces permitió identificar en forma precisa el movimiento diurno. Ahora bien, la segunda predicción se orienta a explicar qué fenómeno natural ocasiona este movimiento de los astros, a lo cual 17% contestó en forma correcta a la pregunta (rotación de la Tierra); el resto de estudiantes indicaron conceptos astronómicos y físicos al parecer por intentar dar respuesta; en general la actividad cumplió con la expectativa y marco el concepto inicial para la enseñanza del significado del movimiento diurno de los astros y su cálculo por triángulo de posición.

### 6.1.7 Actividad 7: Siguiendo el Sol

Para esta actividad didáctica interactiva el estudiante define fecha y horario diurno entre las 9AM y 11AM o 2PM y 4:30PM con el fin de aplicar el experimento en el observatorio astronómico de la Universidad Distrital “Francisco José de Caldas”; la actividad consiste en determinar el azimut astronómico de una dirección a partir de observación Solar y la Solución del triángulo de posición.

45

UNIVERSIDAD DISTRITAL "FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS"  
 FACULTAD DE INGENIERÍA - Laboratorio de Ingeniería Celular y Geodésica  
 Espacio Académico: Astronomía y Física B04  
 Ing. Edilberto Suarez Torres © 2018

**TABLA I. DETERMINACIÓN DEL AZIMUT ASTRONÓMICO DE UNA RECTA POR OBSERVACIÓN SOLAR**

Grupo	Pos. Visual	Lech. Horizontal	Z - Dist. Central	Tempo Oficial	Brújula
Cb-1	D	0 0 0 0			
	d	64 25 59 15	52 34	11 44 55	Observaciones
	i	294 07 54 343 43 35	11 45 25		$\mu = 19.6^\circ$
	$\bar{x}$	64 14 06.9 16 16 25	11 45 10		$\mu = 108.5 \text{ m/s}$ $\mu = 51.0 \%$ $\mu = 21.4^\circ$ $\mu = 49.0 \%$
Cb-2	D	0 0 0 0			
	d	68 05 13 19 31 05	11 11 55		Diagon. Gorda 2018/02/23
	i	241 29 13 240 16 43	11 18 50		Wichu... Ladera de Monjas
	$\bar{x}$	67 46 13 19 31 11	11 18 22.5		Ruedas Jirónes Los Angeles
Cb-3	D	0 0 0 0			
	d	92 55 54 18 10 29	11 25 08		
	i	272 36 50 341 37 51	11 28 40		
	$\bar{x}$	92 46 50 18 16 19	11 26 54		
Cb-4	D	0 0 0 0			
	d	30 29 32 15 12 09	11 51 56		Diagrama de posición del sol
	i	310 39 13 344 28 45	11 53 28		Comentarios: - Tubos - Muebles Jirónes - Campo de fútbol
	$\bar{x}$	30 34 05 15 21 42	11 52 42		

Declinación del Sol en la Observación: Serie 1:  $-07^{\circ} 28' 27.8''$  Serie 2:  $-07^{\circ} 27' 17.8''$  Serie 3:  $-07^{\circ} 27' 17.8''$  Serie 4:  $-07^{\circ} 28' 27.8''$

Corrección por refracción (Opcional)

Corrección por paralaje (Opcional)

Alturas corregidas = h (Opcional)

Distancias cenitales = z (Opcional)

Azimut del Sol real:  $158^{\circ} 18' 20''$   $157^{\circ} 58' 41''$   $158^{\circ} 18' 20''$   $158^{\circ} 18' 20''$

Azimut Calculado SA1 (Azim.  $\bar{x}$  a):  $157^{\circ} 58' 41''$   $158^{\circ} 18' 20''$   $158^{\circ} 18' 20''$   $158^{\circ} 18' 20''$

Promedio Azimutes:  $158^{\circ} 18' 20''$  Azimut:  $158^{\circ} 18' 20''$

Azimut Magnético:  $158^{\circ} 18' 20''$

Latitud: Laboratorio de Astronomía y Geodesia de la Tierra Universidad Distrital "Francisco José de Caldas"



Figura 6-29. imágenes de la guía grupal diligenciada y del momento de aplicación

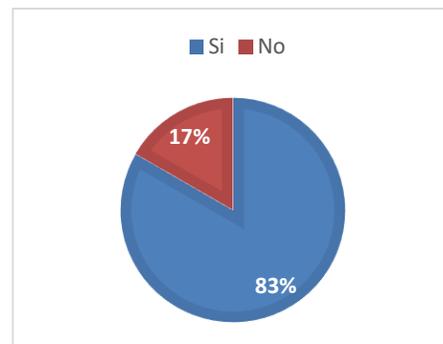
• **Estadísticas Actividad 7: Siguiendo el Sol**

Grupo	AM						
	9:00	9:30	10:00	10:30	11:00	11:30	12:00
Grupo 1	x	x	x				
Grupo 2			x	x	x	x	
Grupo 3			x	x	x	x	
Grupo 4			x	x	x		
Grupo 5					x	x	x
Grupo 6							
Grupo 7							
Grupo 8					x	x	

**Tabla 22.** Horario en el cual los grupos realizaron la práctica.

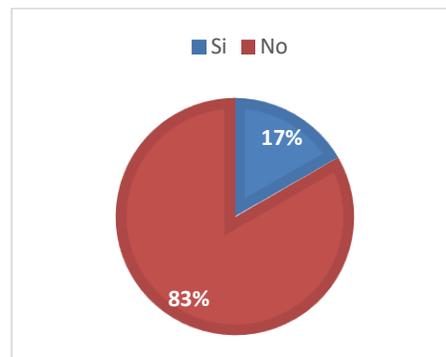
Se entendió el procedimiento a seguir dado en la guía y en la clase.

Resultado	Cantidad	%
Si	5	83,3
No	1	16,7
TOTAL	6	100,0



Los estudiantes analizaron y calcularon adecuadamente la posición promedio del Sol.

Resultado	Cantidad	%
Si	1	16,7
No	5	83,3
TOTAL	6	100,0



- **Retroalimentación Actividad 7: Siguiendo el Sol**

La práctica fue motivadora por cuanto el Sol es visible durante gran espacio del día, si las nubes lo permiten, y no implica desplazamiento nocturno de los estudiantes cuya logística es sensible por movilidad y seguridad. Fue bastante interesante apreciar que para cada instante de tiempo, el movimiento Solar es recreado por el triángulo de posición. Elementos complementarios utilizados consistieron en consultas de efemérides del Sol en sitios web como el IMCCE, antiguo observatorio de París y el de NASA-JPL: Solar System Dynamics. Lo anterior para tener tres elementos del triángulo de posición y poder así darle Solución. Esta actividad no consideró predicciones, pero sí se evaluó en forma cualitativa el procedimiento y se realizó socialización de los datos encontrados, revisando las carteras de campo y el método de cálculo.

The "Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Éphémérides", IMCCE: <https://www.imcce.fr/institut/presentation/>

"Solar System Dynamics", NASA-JPL: <https://ssd.jpl.nasa.gov/?ephemerides>

### **6.1.8 Actividad 8: Transformando coordenadas**

Esta actividad corresponde con una situación de aprendizaje, por cuanto el estudiante determinará por medio del cálculo las coordenadas en los 5 sistemas astronómicos y con las mismas dos estrellas que había realizado en la actividad 5, para luego comparar sus resultados, afinar conceptos y volver significativa la utilidad del triángulo de posición.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSE DE CALDAS FACULTAD DE INGENIERÍA

**Práctica V: Modelo Esfera Celeste**  
 Aplicación Práctica Transformación de Coordenadas Celestes  
 Área de trabajo: Astronomía Esférica (MAA-D)  
 Concepto: Transformación de Coordenadas PPA  
 Grado: Semestre I y II Ingeniería

**Objetivo:** Comprender y aplicar los conceptos de coordenadas celestes y su transformación entre los diferentes sistemas

**Materiales:**  
 Cartera, calculadora, hoja de cálculo.

**Procedimiento:**

- Encuentre en los servicios de efemérides y catálogos las coordenadas de las estrellas indicadas.

Id Estrella y Constelación	Nombre Estrella	Ascensión Recta, $\alpha$	Declinación $\delta$
B Cuspe	Albireo	$19^h 30^m 43.39^s$	$290^{\circ} 09' 39.4''$
$\beta$ Coma Berol	Sirus	$6^h 45^m 01.24^s$	$-16^{\circ} 42' 49.31''$

- Considere los siguientes valores como constantes para las diferentes transformaciones.
  - Ubicación Geográfica: Susuplé Lat. ( $\phi$ ):  $02^{\circ} 51' 07''$ ; Long. ( $\lambda$ ):  $79^{\circ} 43' 13''$
  - Angulo Horario del Punto vernal  $HY = 0^h$
  - Oblicuidad media de la eclíptica a 12000 años  $\epsilon = 23^{\circ} 26' 21.4''$
  - Polo galáctico Norte:  $\alpha = 12^h 51.4^m$ ;  $\delta = -27^{\circ} 8''$
- Utilizando las ecuaciones determinadas en clase, realice en excel ó en documentos de google, el código necesario para realizar las transformaciones entre los 5 sistemas de coordenadas.
- Con el programa calcule y diligencie los valores encontrados en la siguiente tabla.

Id Estrella y Constelación	Horizontales	Locales	Eclípticas	Galácticas
B Cuspe	$19^h 30^m 43.39^s$ $290^{\circ} 09' 39.4''$			
$\beta$ Coma Berol	$6^h 45^m 01.24^s$ $-16^{\circ} 42' 49.31''$			

Nombre(s): Joseph Amador Juan Pablo Salazar Soto Marlon  
 Código(s): 2014000070, 2014000071, 2014000072, 2014000073  
 Fecha: \_\_\_\_\_  
 Profesor Ing. Edilberto Suárez Torrez - 2210222@unad.edu.co

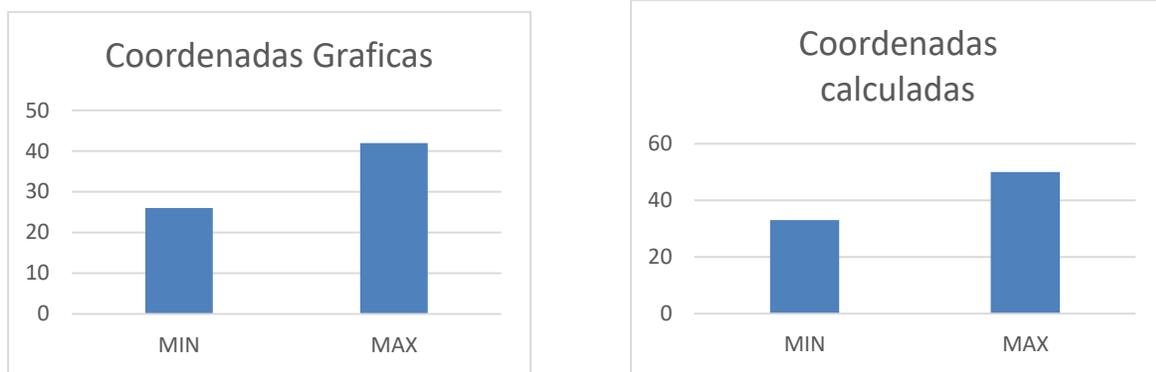
Grupo 3



Figura 6-30. Imágenes de la guía grupal diligenciada y del momento de aplicación

• Estadísticas Actividad 8: Transformando coordenadas

	Coordenadas Gráficas	Coordenadas calculadas
MIN	26	33
MAX	42	50



**Figura 6-31.** Comparación resultados coordenadas gráficas y calculadas

Esta actividad de cálculo propuso comparar los resultados de la transformación de coordenadas por el método de apreciación (coordenadas gráficas) con el de precisión (coordenadas calculadas), no con fines cuantitativos sino orientado fundamentalmente a la definición de los cuadrantes de las abscisas Esféricas, tema que generalmente es enredado para los estudiantes pero que con ayuda de estos dos métodos apoya la definición de la Solución; valor agregado de la actividad se relaciona con el hecho de practicar de manera grupal y colaborativa, en la realización de cálculos en Trigonometría Esférica y geodesia.

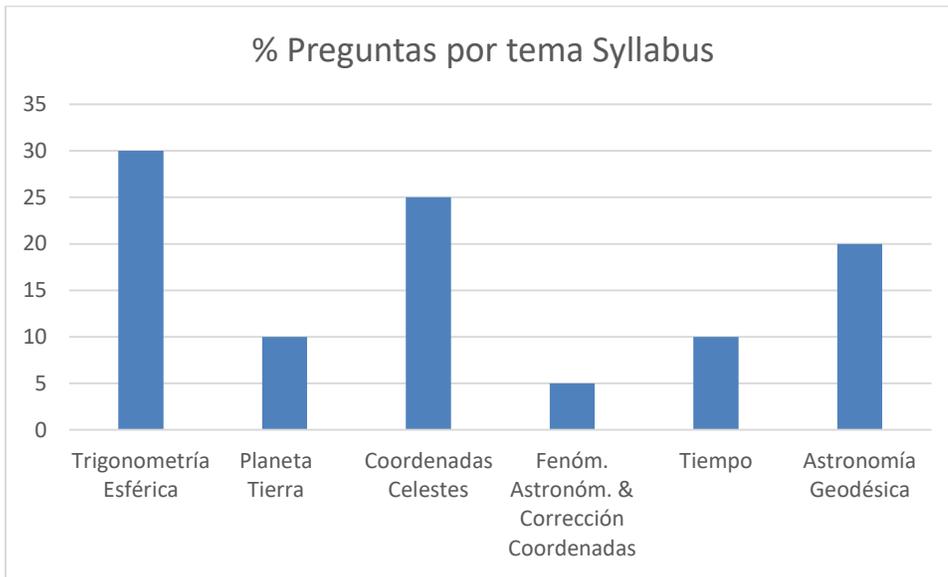
### 6.1.9 Actividad 9: encuesta final

Para realizar esta actividad se utilizó la plataforma Moodle de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Distrital “Francisco José de Caldas” <https://ingenieria.udistrital.edu.co/>; y se aplicó el test indicado en la sección 5.9. El test no Solamente incluyó evaluación y seguimiento para los dos bloques esta secuencia, sino su aplicabilidad en varios temas del syllabus desarrollado en el espacio académico durante el semestre 2018-3, todo en el marco de las competencias que este espacio académico debe promover en los estudiantes. La siguiente tabla muestra la correspondencia de las preguntas involucradas con los temas del syllabus y el orden (id) de la plataforma Moodle asignado.

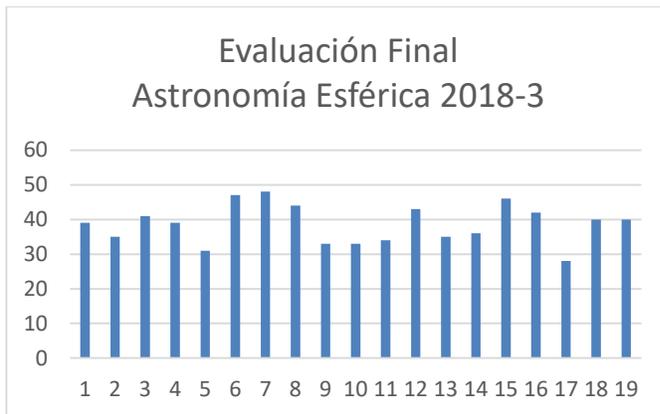
Tema Syllabus	Banco de preguntas	Total preguntas	Id Moodle pregunta
p Trigonometría Esférica	Legado de Einstein	3	16,17,18
	Trigonometría Esférica	3	13,14,15
Planeta Tierra y Esfera Celeste	Navegación	2	11,12
Coordenadas Celestes	Esfera Celeste	1	10
	Transformación de Coordenadas	4	2,3,8,9
Corrección Coordenadas	Corrección a las coordenadas	1	7
Tiempo en Astronomía	Tiempo	1	6
	Tiempo Det. Estrellas	1	4
Astronomía Geodésica	Selección estrellas culminación superior	1	1
	Det. Latitud y Longitud	1	5
	OAN, Geodesia y Cartografía	2	19,20

**Tabla 23.** Correspondencia preguntas con id de la evaluación

El diseño final de la evaluación dio mayor peso a los temas del syllabus de Trigonometría Esférica, coordenadas Celestes y astronomía geodésica, temas directos de impacto de la secuencia en el syllabus. La Figura siguiente muestra esta distribución.



**Figura 6-32.** Distribución porcentual de las 20 preguntas de la encuesta según temas syllabus



Rango	Frecuencia	%
19-23	0	0,0
23-27	0	0,0
27-31	2	10,5
31-35	5	26,3
35-38	1	5,3
38-42	6	31,6
42-46	3	15,8
46-50	2	10,5
TOTAL	19	100

**Figura 6-33.** Resultados de la evaluación.

La Figura anterior muestra los resultados generales de la encuesta aplicada, la cual participaron 19 estudiantes, el promedio general fue 38,6; la nota mínima 28 y la máxima 48; las dos tablas siguientes muestra detalladamente los resultados por pregunta y el promedio obtenido por cada estudiante y su correspondencia con los temas del test.

Apellido(s)	Nombre	Calificación/50	AG		CC		Tiempo		AG		Tiempo		FATC		CC		CC		CC		PT		PT		TE		TE		TE		TE		AG		AG					
			P. 1 /3	P. 2 /3	P. 3 /3	P. 4 /3	P. 5 /3	P. 6 /3	P. 7 /3	P. 8 /3	P. 9 /3	P. 10 /3	P. 11 /3	P. 12 /3	P. 13 /3	P. 14 /3	P. 15 /3	P. 16 /3	P. 17 /3	P. 18 /3	P. 19 /3	P. 20 /3	P. 1 /3	P. 2 /3	P. 3 /3	P. 4 /3	P. 5 /3	P. 6 /3	P. 7 /3	P. 8 /3	P. 9 /3	P. 10 /3	P. 11 /3	P. 12 /3	P. 13 /3	P. 14 /3	P. 15 /3	P. 16 /3	P. 17 /3	P. 18 /3
HERMOSO RUIZ	BRENDA ALEXANDRA	39	3	3	0	3	0	3	1	3	3	3	0	3	1	0	3	0	3	0	3	0	3	1	0	3	0	0	3	0	3	0	3	0	3					
CUERVO RAMIREZ	JUAN DAVID	35	3	0	0	0	3	0	1	3	3	0	0	3	0	0	3	0	3	0	3	0	3	0	3	3	0	3	2	3	0	3	0	3	0	3				
LARA SOTELO	BRAYAN CAMILO	41	3	3	3	3	3	0	0	3	0	3	0	3	0	3	0	3	0	3	0	3	1	3	0	3	3	0	0	3	0	3	0	3	0	3				
PIRAQUIVE CRISTANCHO	CAROL ANDREA	39	3	3	3	3	0	0	0	3	0	1	3	3	1	3	3	1	0	0	3	3	3	0	0	3	3	3	3	0	3	0	3	0	3	0	3			
VALBUENA FLOREZ	JUANITA SOFIA	31	3	0	0	0	3	0	1	0	0	1	3	0	2	0	3	2	3	0	3	2	3	0	3	2	3	0	0	3	0	3	0	3	0	3				
SOLER GARCIA	JUAN PABLO	47	3	3	3	3	3	3	0	0	3	1	3	3	2	3	0	3	3	3	1	3	3	1	3	3	1	1	0	0	3	0	3	0	3	0	3			
RAMIREZ RODRIGUEZ	JUAN ESTEBAN	48	3	3	3	3	0	3	1	0	3	3	3	3	1	3	3	3	1	3	3	3	1	3	3	3	3	3	3	0	3	0	3	0	3	0	3			
LATORRE CABRERA	LAURA VALENTINA	44	3	3	3	3	3	3	1	3	0	3	3	3	1	3	3	3	1	3	3	1	3	3	1	1	0	0	0	3	0	3	0	3	0	3	0	3		
CHAVES BLANCO	ALEJANDRA	33	3	0	0	0	0	0	0	3	3	1	0	3	2	3	0	0	3	0	3	0	3	0	3	0	3	0	0	3	0	3	0	3	0	3	0	3		
GONZALEZ VARGAS	JENNIFER PAOLA	33	0	0	0	3	3	3	3	3	-	3	1	3	0	0	0	0	3	0	3	0	2	0	3	0	2	0	0	3	0	3	0	3	0	3	0	3		
GUAVITA AVILA	SARA VALENTINA	34	0	3	3	0	0	3	3	3	0	1	3	3	1	3	3	1	0	0	3	0	3	0	3	0	3	0	0	3	0	3	0	3	0	3	0	3		
ZAMORA MALAVER	LIZETH YURANY	43	0	0	3	0	0	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	1	3	3	2	3	3	2	3	3	0	0	3	0	3	0	3	0	3	0	3	0	3	
ACEVEDO RODRIGUEZ	MARIA CAMILA	35	0	0	3	0	0	3	1	3	3	1	0	3	1	3	3	1	3	3	1	1	3	3	1	1	3	0	0	3	0	3	0	3	0	3	0	3		
CRUZ LEON	ANNIE GABRIELA	36	0	3	3	0	3	0	3	3	0	1	3	3	2	3	0	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	0	3	0	3	0	3	0	3	0	3	0	3	
LOZANO AROCA	NICOLAS	46	0	0	0	3	3	0	3	3	3	3	3	3	3	3	3	1	3	3	3	3	3	3	3	3	3	0	3	0	3	0	3	0	3	0	3	0	3	
PEÑA CHAPARRO	JULIETH STEPHANY	42	0	3	3	3	3	3	0	3	3	1	3	0	2	3	0	0	1	3	0	1	3	0	1	1	0	0	3	0	3	0	3	0	3	0	3	0	3	
GUALTEROS SANCHEZ	BRAYAN STEVEN	28	0	3	0	0	3	0	0	1	0	0	0	0	1	3	3	2	1	3	3	2	1	1	1	0	0	3	0	3	0	3	0	3	0	3	0	3	0	3
MARTINEZ MARTINEZ	SARA BIBIANA	40	0	3	3	0	0	3	0	0	3	3	3	3	1	0	3	3	3	3	3	3	3	2	3	0	0	3	0	3	0	3	0	3	0	3	0	3	0	3
GARZON GIRON	DIEGO ANDRES	40	0	3	3	0	3	3	0	0	3	3	3	3	0	0	3	2	3	0	0	3	2	3	0	1	3	0	0	3	0	3	0	3	0	3	0	3	0	3
Promedio general		29	1	2	2	1	2	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Figura 6-34. Resultado evaluación por pregunta y promedio ponderado por estudiante

Tema Syllabus	#.Preguntas
TE- Trigonometría Esférica	6
PT: Planeta Tierra	2
CC: Coordenadas Celestes	5
FATC: Fenóm. Astronóm. & Corrección Coordenadas	1
T: Tiempo	2
AG: Astronomía Geodésica	4
	20

Figura 6-35. Correspondencia temas syllabus con preguntas de la evaluación

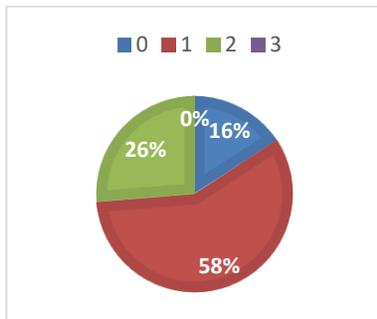
- Tema Trigonometría Esférica (6 preguntas):

Este tema incluyó 6 preguntas en la evaluación correspondientes a las preguntas 13 a 18 del test, estas se orientaron a los temas de geometría, geometría no euclidiana, curvatura, distancia, exceso esférico y la resolución de triángulos esféricos rectángulos y oblicuángulos. El banco de preguntas respectivo estaba dividido en dos carpetas, una con el tema de geometría y la correspondiente lectura de referencia del texto “El Legado de Einstein” correspondiente a la cita (Schwinger, 1995) y la otra para Trigonometría Esférica.

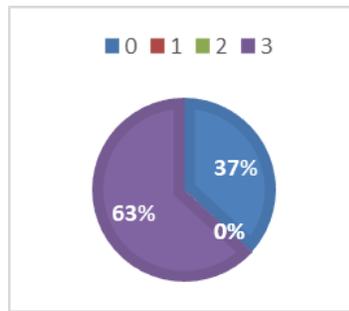
Aciertos	Frecuencia	%
0	3	15,8
1	11	57,9
2	5	26,3
3	0	0,0
TOTAL	19	100

Aciertos	Frecuencia	%
0	7	36,8
1	0	0,0
2	0	0,0
3	12	63,2
TOTAL	19	100

Aciertos	Frecuencia	%
0	8	42,1
1	0	0,0
2	0	0,0
3	10	52,6
Sin respuesta	1	5,3
TOTAL	19	100



Pregunta 13

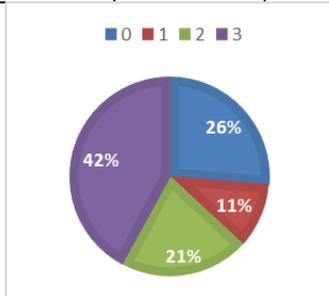


Pregunta 14



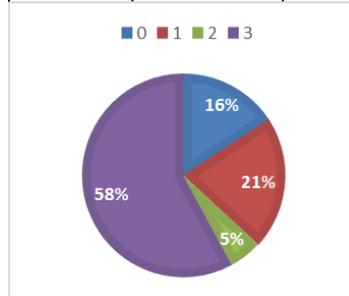
Pregunta 15

Aciertos	Frecuencia	%
0	5	26,3
1	2	10,5
2	4	21,1
3	8	42,1
TOTAL	19	100



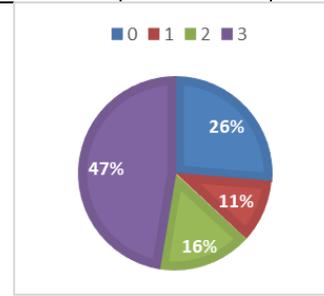
Pregunta 16

Aciertos	Frecuencia	%
0	3	15,8
1	4	21,1
2	1	5,3
3	11	57,9
TOTAL	19	100



Pregunta 17

Aciertos	Frecuencia	%
0	5	26,3
1	2	10,5
2	3	15,8
3	9	47,4
TOTAL	19	100



Pregunta 18

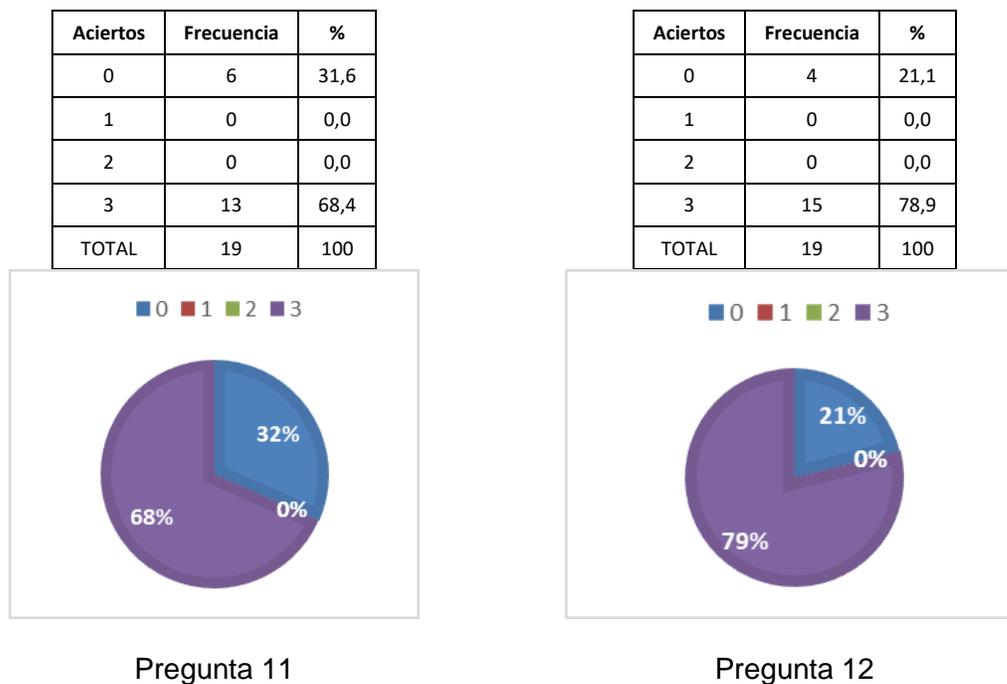
Figura 6-36. Estadísticas preguntas Trigonometría Esférica (13-18 del test)

Los datos y gráficos anteriores muestran en general que el color morado es el más predominante para las 6 respuestas que evalúan el tema de Trigonometría Esférica, este color representa el porcentaje de los estudiantes que acertaron con las respuestas correctas. El segundo color predominante es el azul que representa el porcentaje de los estudiantes que no contestaron la pregunta o que no acertaron a ninguna de las respuestas correctas; el tercero y cuarto respectivamente son el naranja y verde.

Estos datos permiten identificar con los colores morado, azul y rojo que los estudiantes han adquirido conocimiento sobre los temas evaluado, pues representan los estudiantes que respondieron con diferentes grado de acierto a las preguntas 13 a 16; en este contexto es interesante el contraste entre los estudiantes que obtuvieron el 100% de aciertos y los que no contestaron o se equivocaron, esto podría mostrar errores en la concepción y estructura de las preguntas, en el no estudio y/o desinterés por parte del estudiante, así como ponderación sesgada del peso de las preguntas, peso que dio el autor con base en la experiencia en la enseñanza del curso relacionado con el tiempo y nivel de cognición que se estima para la Solución de la pregunta por parte del estudiante.

- Tema Planeta Tierra y Esfera Celeste (2 preguntas):

Este tema incluyó 2 preguntas en la evaluación las cuales se orientaron a indagar el conocimiento adquirido en el bloque 1 de la secuencia, preguntas 11 y 12 del test; las preguntas exigían al estudiante posicionarse en el sistema terrestre y Solucionar problemas de navegación, con apoyo de la Trigonometría Esférica y los conceptos de coordenadas geográficas. Las Figuras siguientes presentan la estadística respectiva.



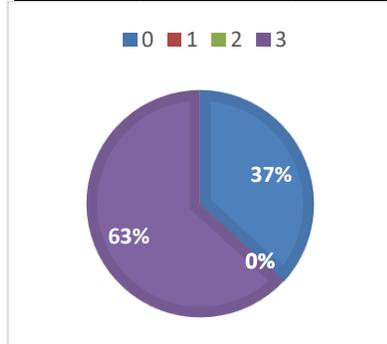
**Figura 6-37.** Estadísticas preguntas planeta Tierra y Esfera Celeste (11 y 12 del test)

Las preguntas 11 y 12 permiten conceptualizar que los estudiantes han aplicado en forma adecuada y notable los conceptos enseñados en el bloque 1 de la secuencia, esto debido a que el color morado en las gráficas el cual hace referencia a los estudiantes que contestaron acertadamente las preguntas, es la tendencia en las dos preguntas con valores del 68% y superior respectivamente. No se tienen respuestas de 1 o 2 aciertos pues las preguntas tenían una única opción, lo cual fortalece la afirmación anterior.

- Tema Coordenadas Celestes (5 preguntas):

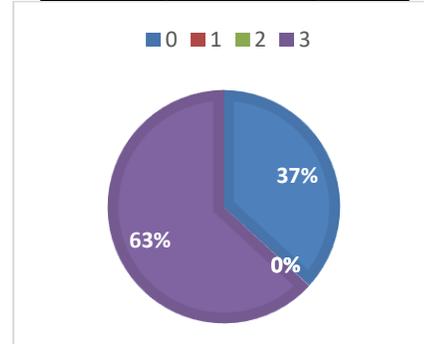
Cinco preguntas (5) incluyó la evaluación para esta temática, relacionadas en las preguntas 2, 3, 8, 9 y 10 del test, todas orientadas de Esfera Celeste, coordenadas y su transformación; el banco de preguntas respectivo estaba dividido en dos carpetas, una con preguntas sobre la Esfera Celeste y la otra con los otros temas indicados. Las preguntas fueron conceptuales y algunas numéricas, pero ninguna requería el uso de calculadora.

Aciertos	Frecuencia	%
0	7	36,8
1	0	0,0
2	0	0,0
3	12	63,2
TOTAL	19	100



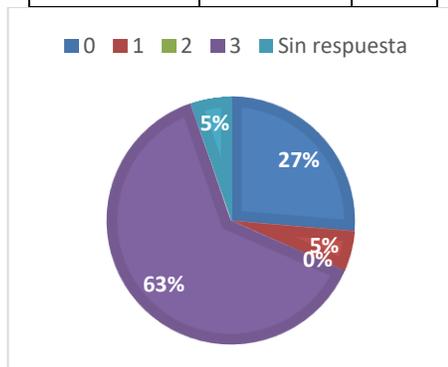
Pregunta 2

Aciertos	Frecuencia	%
0	7	36,8
1	0	0,0
2	0	0,0
3	12	63,2
TOTAL	19	100



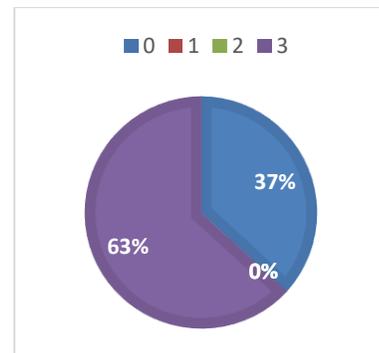
Pregunta 3

Aciertos	Frecuencia	%
0	5	26,3
1	1	5,3
2	0	0,0
3	12	63,2
Sin respuesta	1	5,3
TOTAL	19	100

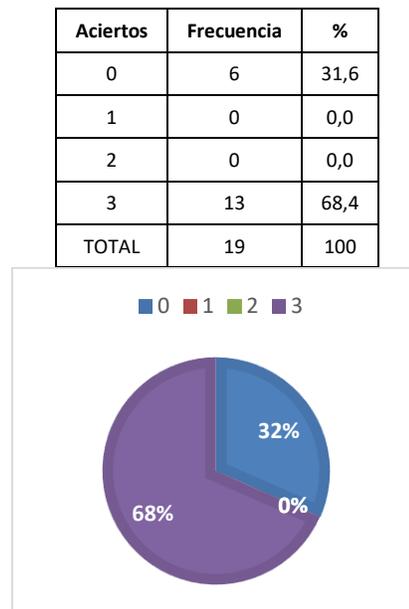


Pregunta 8

Aciertos	Frecuencia	%
0	7	36,8
1	0	0,0
2	0	0,0
3	12	63,2
TOTAL	19	100



Pregunta 9



Pregunta 10

**Figura 6-38.** Estadísticas preguntas planeta Tierra y Esfera Celeste (11 y 12 del test)

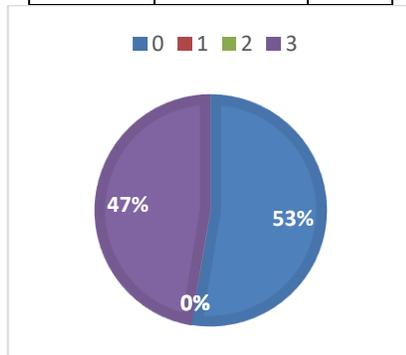
El color morado es el más predominante en los gráficos anteriores, mostrando en buen porcentaje que los estudiantes acertaron con las respuestas correctas. Sólo en una de las preguntas, el número ocho, un estudiante acertó parcialmente con una de las respuestas, pues en el resto de preguntas los estudiantes acertaron totalmente o simplemente no acertaron o no contestaron. Los gráficos y estadísticas de las primeras cuatro preguntas son muy similares, esto se debe a que el diseño de las mismas es igual cambiando simplemente una variable para hacer diferente la respuesta cerrada. En general en más del 63% de los estudiantes mostraron suficiencia para entender los temas relacionados con el proceso cognitivo para dar la respuesta correcta.

De igual forma es importante precisar, que los conceptos relacionados en las preguntas, indagaban sobre el proceso lógico matemático necesarios para la transformación de coordenadas, es decir, métodos de cálculo como el triángulo de posición o las matrices de rotación que fueron expuestos en clase y se encuentran en la sección 3.6 del presente documento.

- Tema corrección a las coordenadas y tiempo (3 preguntas):

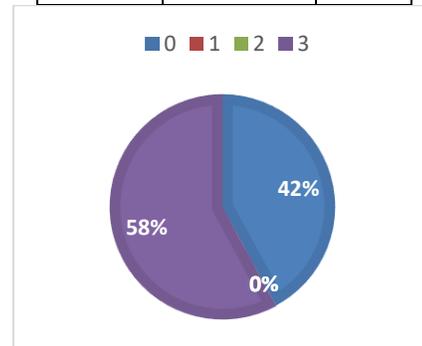
Este análisis incluyó dos de los temas del syllabus, corrección a las coordenadas y tiempo, con una y dos preguntas respectivamente que corresponden preguntas 7, 4 y 6 del test en Moodle.

Aciertos	Frecuencia	%
0	10	52,6
1	0	0,0
2	0	0,0
3	9	47,4
TOTAL	19	100

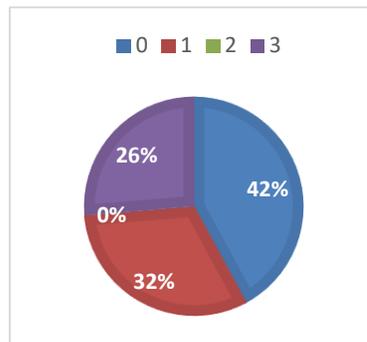


Pregunta 4

Aciertos	Frecuencia	%
0	8	42,1
1	0	0,0
2	0	0,0
3	11	57,9
TOTAL	19	100



Pregunta 6



Aciertos	Frecuencia	%
0	8	42,1
1	6	31,6
2	0	0,0
3	5	26,3
TOTAL	19	100

Pregunta 7

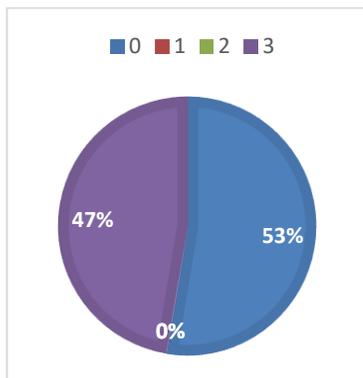
**Figura 6-39.** Estadísticas preguntas corrección a las coordenadas y tiempo (4, 6 y 7)

La pregunta 4 es la que presenta mayor desacierto de este conjunto con el 53%; esta pregunta requería para su evaluación conceptos de Esfera Celeste, tiempo, movimiento diurno además de buen manejo de carta Celeste, razones que pudieron aportar en este resultado, sin embargo, 47% de aciertos deja el resultado de la evaluación en buena forma; las otras dos preguntas tiene resultados mejores al considerar respuestas con aciertos parciales o totales, indicando comprensión de los temas relacionados, especialmente movimiento diurno y tiempo.

- Tema Astronomía Geodésica (4 preguntas):

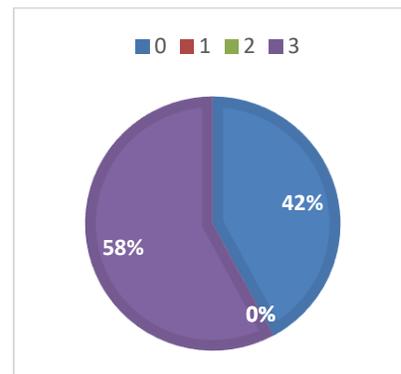
Las preguntas 1,5,19 y 20 asocian los temas del syllabus con las competencias del área de geodesia en el proyecto curricular; en seguida la estadística de las respuestas.

Aciertos	Frecuencia	%
0	10	52,6
1	0	0,0
2	0	0,0
3	9	47,4
TOTAL	19	100

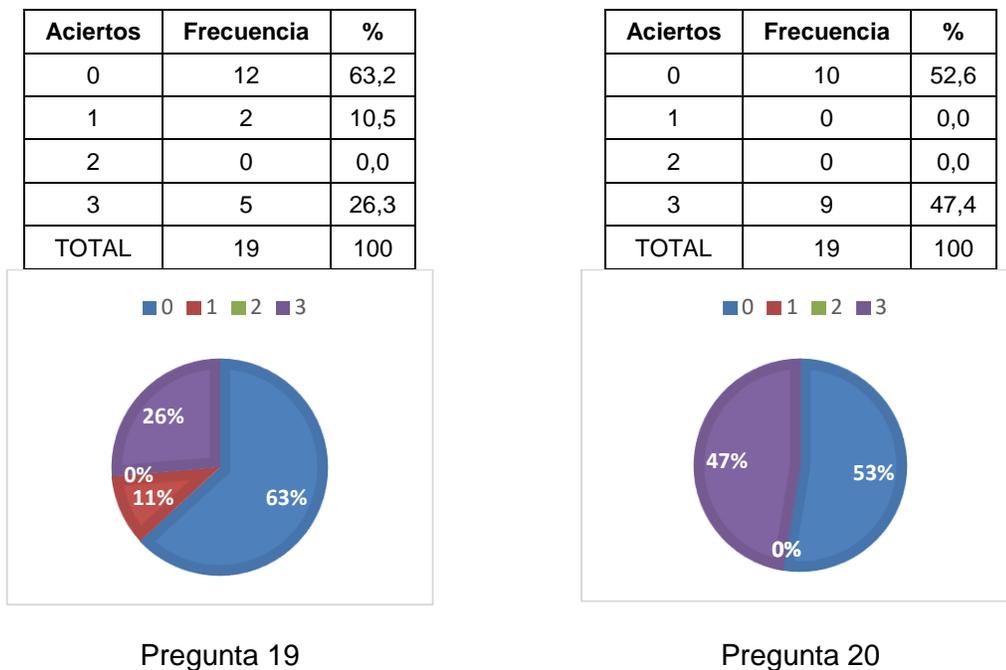


Pregunta 1

Aciertos	Frecuencia	%
0	8	42,1
1	0	0,0
2	0	0,0
3	11	57,9
TOTAL	19	100



Pregunta 5



**Figura 6-40.** Estadísticas preguntas planeta Tierra y Esfera Celeste (11 y 12 del test)

Las preguntas 1 y 5 están relacionadas con el bloque 2 de la secuencia la cual aporta bases para realizar un adecuado análisis: estas preguntas consultaban por el procedimiento para la selección de y la determinación de la latitud, que son elementos de las competencias del proyecto curricular al cual pertenece el espacio académico en el que se aplica la secuencia. La pregunta 1 muestra que la mitad de estudiantes llegaron a acertar con las respuestas y en la pregunta 5 lo hizo el 58%. En general y con la experiencia anterior del autor en la enseñanza del espacio académico, estos resultados mejoraron sutilmente la tendencia de los últimos semestres.

Para el caso de las preguntas 19 y 20, estas hacen referencia a la forma como en nuestro país se aplicaron tradicionalmente los conceptos del syllabus, haciendo referencia a los inicios de la astronomía y la geodesia en Colombia relacionados con la creación del Observatorio Astronómico Nacional (1803) y la creación del Instituto geográfico Agustín Codazzi (1935). Las preguntas entonces consultan al estudiante sobre cómo se aplicaban los conceptos para la determinación de coordenadas, antes de la llegada del GPS. Los resultados de las respuestas indican leve tendencia hacia no acertar adecuadamente, esto quizás a que el tema expuesto en clase no tuvo la suficiente dedicación debido a lo comentado en la sección xx relacionado con los cambios en el calendario académico.



## **7. Conclusiones y recomendaciones**

En este capítulo se mencionarán las conclusiones de este trabajo de grado, así como algunas recomendaciones para futuras aplicaciones de la secuencia didáctica en Astronomía Esférica planteada en este documento; la formulación de las conclusiones tiene en cuenta el cumplimiento de los objetivos planteados en el capítulo de Preliminares, revisando cada uno de ellos y concluyendo cómo se cumplió con el objetivo general planteado.

Con respecto al primer objetivo específico, el capítulo 5 presentó el diseño de la encuesta diagnóstica con base en el syllabus del espacio académico al cual se aplicó, y en el contexto de las competencias del área de geodesia del proyecto curricular en el cual se implementó la secuencia; en el capítulo 6 se analizaron las respuestas que dieron los estudiantes y se comprobó los pre-saberes con los que contaban, esto con respecto a los dos bloques de la secuencia, triángulo de posición y movimiento diurno.

Los capítulos 2, 3 y 4 recogen, respectivamente, los aspectos disciplinares, epistemológicos y didácticos que sustentaron la construcción de la secuencia didáctica, compromisos de los objetivos 2 y 3; en la construcción de este marco conceptual se hizo la respectiva revisión bibliográfica como se puede evidenciar en la Bibliografía del documento. El cumplimiento de los dos primeros objetivos específicos, permitió entonces el diseño de las actividades que conformaban la secuencia. Cabe resaltar aquí que inicialmente se consideraron tres actividades, pero los encadenamientos de los temas tratados requirieron que en total se propusieran 7, y dos evaluaciones de seguimiento y retroalimentación.

De la aplicación de la actividad diagnóstica se identificaron tendencias sobre conceptos erróneos o confusos, pre-establecidos en los estudiantes y relacionados con geometría euclidiana, no-euclidiana y sus características sobre algunas superficies; a partir de esto se inició a proponer las actividades siguientes de la secuencia. Los resultados generales de la encuesta pueden indicar también omisión de temas en espacios académicos universitarios previos, e incluso en las temáticas de los estándares de educación en ciencias y matemáticas de los colegios de donde provienen los estudiantes, así como no comprensión de los conceptos o desinterés por los mismos.

El requerimiento de más actividades se evidenció a partir de la necesidad de hacer más entendible para los estudiantes, por ejemplo, las relaciones espaciales teóricas con la orientación en campo, pues se detectaron problemas en cuanto al entendimiento de la medida de ángulos y lo que representan en los modelos esféricos, muy a pesar de que los estudiantes ya han cursado espacios académicos como álgebra lineal y diseño gráfico. De lo anterior, entonces, se evidencia el cumplimiento del objetivo específico 3 que planteaba el diseño de actividades para la secuencia.

La aplicación de la secuencia es el cuarto objetivo específico, lo cual se realizó como se evidencia en los anexos y en el Capítulo 6, donde se analiza cada una de las actividades realizadas y se incluyen aspectos sobre la aplicación de las mismas. Para el cumplimiento del quinto objetivo específico se realizaron dos evaluaciones, una para cada bloque de la secuencia, esto se ve detalladamente en las secciones 5.1 y 5.9 donde se señala cómo se diseñaron y aplicaron.

Una de las conclusiones que deja la aplicación de la secuencia es que sí es efectiva para introducir a los estudiantes en el estudio de la Trigonometría Esférica y el movimiento diurno, permitiendo enfocar al estudiante desde la epistemología de la geometría, hacia la formalización clara de los conceptos geométricos que fundamentan la astronomía y la geodesia, como competencias que deben adquirir los en su recorrido universitario del programa de ingeniería que cursan; esto último se comentó adecuadamente en las secciones 4.1 y 4.2, contexto de la secuencia en educación superior.

Con respecto a posibles futuras aplicaciones, se recomienda que dado que el espacio académico Astronomía Esférica es teórico-práctico, lo cual implica horas de trabajo directo en laboratorio, que cada sesión práctica se realice utilizando metodologías de aprendizaje, las cuales ordenen las actividades prácticas incluyendo la participación activa del estudiante, lo cual lo motive didáctica y conceptualmente hablando.

El cumplimiento del objetivo específico 6 se ve reflejado en que, para cada actividad de la secuencia, se diseñó su respectiva guía de trabajo, las cuales se presentaron en el capítulo 5 y se aplicaron como se observa en el capítulo 6 y el anexo C.

Finalmente, queda el compromiso del autor para el perfeccionamiento de la secuencia y el aporte de esta en el mejoramiento permanente de la cátedra del espacio académico en el cual se aplicó; esto, por supuesto, acorde con el marco didáctico planteado, pero, sobre todo, con la responsabilidad académica, docente y profesional de un egresado, docente y estudiante de postgrado de la Universidad pública colombiana.

# Bibliografía

- Ayres, F. (1970). *Trigonometría Plana y Esférica*. (M.-H. Latinoamérica, Ed.).
- Ballesteros, N. (1997). *Topografía*. Limusa.
- Beutler, G. (2006). Revolution in Geodesy , Navigation , and Surveying. *Proceedings FIG Working Week 2004, Athens, Greece.*, (258), 11–27.
- Calvo, B. (2013). *Astronomía para todos. Retos modernos de una ciencia milenaria*. (B. Calvo Mozo, Ed.) (1st ed.). Bogotá D.C.: Universidad Nacional de Colombia.
- Camino, N. (1999). Sobre la didáctica de la astronomía y su inserción en EGB. In *Enseñar ciencias naturales : reflexiones y propuestas didácticas* (pp. 143–174). Buenos Aires: Paidós.
- Camino, N. (2011). *La Didáctica de la Astronomía como campo de Investigación e Innovación Educativas*. Río de Janeiro.
- Decreto 1860. (1994). Retrieved March 2, 2019, from [https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-86240\\_archivo\\_pdf.pdf](https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-86240_archivo_pdf.pdf)
- Galperin, D. (2011). Propuestas didácticas para la enseñanza de la astronomía. In M. Insaurralde (Ed.), *Ciencias Naturales. Líneas de acción didáctica y perspectivas epistemológicas* (pp. 189–229). Buenos Aires: Novedades Educativas.
- Garrido, M. (2017). Lessons From Non-Euclidian Geometries for Interfaith Dialogue | HuffPost. Retrieved March 2, 2019, from [https://www.huffingtonpost.com/mauricio-garrido/lessons-from-non-euclidian-geometries-for-interfaith-dialogue\\_b\\_3403930.html](https://www.huffingtonpost.com/mauricio-garrido/lessons-from-non-euclidian-geometries-for-interfaith-dialogue_b_3403930.html)
- Green, R. M. (1999). *Spherical astronomy*. New York: Cambridge University Press.
- Karttunen, H. (1996). *Fundamental Astronomy*. (Springer, Ed.) (3rd ed.).
- Kline, M. (2009). *Matemáticas para los estudiantes de humanidades* (2nd ed.). Mexico: Fondo de Cultura Económica FCE.
- Ley 115. (1994). Retrieved March 2, 2019, from [https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-85906\\_archivo\\_pdf.pdf](https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-85906_archivo_pdf.pdf)

- Martínez, W. (2005). Elementos de Geodesia. In *Semana ICG, Universidad Distrital* (p. 34). Bogotá D.C.
- Murray, S. (2011). *Análisis Vectorial 2Ed* (McGraw-Hil). México.
- Oicata O., L. A., Díaz B., N. A., & Talero L., P. H. (2013). *Secuencias Didácticas en Ciencias Naturales y Matemáticas para educación media*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional. Retrieved from [www.mineducacion.gov.co](http://www.mineducacion.gov.co)
- Oropeza, F. (2016). *El Trabajo de Campo en Astronomía: Una experiencia didáctica para la formación docente en Ciencias de la Tierra. Revista de Investigación* (Vol. 40). Caracas: Unidad de Investigación del Instituto Pedagógico de Caracas. Retrieved from [http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1010-29142016000100009&lng=es&tlng=es](http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1010-29142016000100009&lng=es&tlng=es).
- Penagos V, M. A. (2017). *Secuencia didáctica para la enseñanza de la probabilidad frecuentista y clásica para estudiantes de grado noveno*. Bogotá D.C. Retrieved from <http://bdigital.unal.edu.co/63667/1/Trabajo de grado MAPV%281%29.pdf>
- Perilla Triana, W. Y. (2012). La Astronomía de Posición y Tiempo: una aproximación a los lineamientos curriculares de la Educación Media. *Universidad Nacional de Colombia*. Retrieved from <http://www.bdigital.unal.edu.co/39421/1/1186768.2014.pdf>
- Portilla, J. G. (2009). *Elementos de astronomía de posición*. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias.
- Schwinger, J. (1995). *El Legado de Eintein*. Barcelona: Prensa Científica. Retrieved from <https://www.investigacionyciencia.es/catalogo/libros/el-legado-de-einstein-1172>
- Sevilla De Lerma, M. J. (2012). Introducción Histórica a la Geodesia. *Pensamiento Matemático*, (May), 1–63.
- Tobón, S., Pimienta, J. H., & García, J. A. (2010). *Secuencias didácticas : aprendizaje y evaluación de competencias*. Pearson Educación de México.



# A. Anexo: Syllabus U-Distrital

			<p style="text-align: center;">UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN <u>PROYECTO CURRICULAR: INGENIERÍA CATASTRAL Y GEODESIA</u> <b>SYLLABUS</b></p>		
<b>NOMBRE DEL DOCENTE:</b> John Fabio Agullar Sánchez					
<b>ESPACIO ACADÉMICO (Asignatura):</b> <b>ASTRONOMIA ESFÉRICA</b>			<b>CÓDIGO:</b>		
<b>NUMERO DE ESTUDIANTES:</b>			<b>GRUPO:</b>		
<b>NÚMERO DE CREDITOS: 3</b>					
<b>TIPO DE CURSO:</b> TEÓRICO    PRACTICO    TEO-PRAC:					
<i>Alternativas metodológicas:</i> <i>Clase Magistral( X ), Seminario ( ), Seminario – Taller ( ), Taller ( x ), Prácticas ( x ), Proyectos tutoriados ( ), Otro: _____</i>					
<b>HORARIO:</b>					
<b>DIA</b>		<b>HORAS</b>		<b>SALON</b>	
<b>JUSTIFICACIÓN DEL ESPACIO ACADÉMICO</b>					
<p>Debido al gran desarrollo tecnológico y científico de los dos últimos siglos, la astronomía es actualmente una ciencia supremamente extensa la cual cubre diversos campo de interés, uno de ellos es la astronomía esférica, cuyo estudio nos permite relacionar las direcciones cambiantes de los cuerpos celestes con respecto a sus posiciones sobre la superficie de la esfera celeste, la cual permita el posicionamiento y hace posible la navegación sobre la superficie terrestre. La astronomía esférica requiere el dominio básico de la trigonometría esférica y conceptos básicos de astrodinámica, para poder estudiar el movimiento de los cuerpos celestes influenciados por la fuerza gravitacional ejercida sobre estos, estas dos áreas juntas forman juntas lo que se conoce como astronomía de posición, esta última permite la formulación y materialización de los marcos y sistemas de referencia, los cuales posibilitan la orientación y posicionamiento de puntos sobre la superficie de la Tierra, y la ubicación de nuestro planeta en el universo.</p> <p>El Ingeniero Catastral y Geodesta debe tener conocimientos sólidos acerca de astronomía de posición no solo para el desarrollo de un pensamiento analítico y crítico basado en las leyes físicas y no en el sentido común, si no también por que es una herramienta útil para la ubicación y navegación en la Tierra y el posicionamiento de satélites en el espacio; además de ser un soporte esencial en diferentes áreas como: Geodesia Geométrica, Geodesia física y Satelital, Mecánica celeste entre otras.</p> <p>Conceptos previos: Álgebra Lineal, Cálculo diferencial, Topografía.</p>					
<b>OBJETIVO GENERAL</b>					

Orientar la formación Integral del Ingeniero catastral brindándole un marco conceptual que permita al estudiante comprender los conceptos de sistema de referencia celeste y terrestre, por medio del estudio y transformación de distintos sistemas de coordenadas, el cálculo de fenómenos astronómicos, el concepto del tiempo y algunos métodos de observación y determinación de coordenadas astronómicas; todo orientado a referenciar puntos sobre la superficie terrestre y a la construcción de una base cognitiva en el estudio de la Geodesia.

#### OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Identificar como se relaciona la Astronomía con la Ingeniería.
- Identificar y aplicar los conceptos y teoremas básicos de la trigonometría esférica .
- Identificar y aplicar los diferentes métodos de solución de triángulos esféricos.
- Describir geoméricamente y analíticamente los modelos que buscan representar la verdadera forma del planeta tierra.
- Identificar, interpretar y aplicar los diferentes sistemas de coordenadas de un observador en la superficie de la tierra.
- Definir el concepto de esfera celeste
- Definir e identificar las diferentes clasificaciones de la esfera celeste según su origen
- Identificar, interpretar y aplicar los diferentes sistemas de coordenadas celestes y las transformaciones entre dichos sistemas.
- Aplicar las correcciones necesarias a los diferentes tipos de coordenadas celestes.
- Definir e identificar los diferentes clases de tiempos de uso en astronomía
- Identificar los diferentes tipos de calendarios y sus usos.
- Analizar y aplicar los conceptos básicos de la interacción gravitacional
- Analizar el movimiento de cuerpos en presencia de un potencial gravitacional
- Formular y analizar las leyes de movimiento planetario.
- Determinar la posición en el espacio de la órbita asociada a un cuerpo celeste.
- Determinar la velocidad en el espacio y su asociada a un cuerpo celeste.

#### BLOQUE PROGRAMÁTICO / NUCLEOS TEMATICOS MINIMOS

1. Trigonometría esférica
2. El planeta tierra y la esfera celeste
3. Coordenadas celestes
4. Bases de datos, software de simulación, catálogos de estrellas.
5. El tiempo en Astronomía
6. Cálculos de algunos fenómenos astronómicos y corrección a las coordenadas.
7. Geodesia Astronómica
8. Mecánica Celeste

#### PROGRAMA DETALLADO

##### UNIDAD I: Trigonometría Esférica

- Modelos Euclidianos y no Euclidianos.
- Ángulos diedros y triedros, ple de recta, medida de un ángulo esférico y propiedades.
- Circunferencias máximas y menores, definición de triángulo esférico y propiedades, exceso

## B. Anexo: evidencia del trabajo de estudiantes

	Calificación/50	P. 1 /4	P. 2 /4	P. 3 /4	P. 4 /4	P. 5 /4	P. 6 /4	P. 7 /4	P. 8 /4	P. 9 /4
s	46	4	2	3	4	4	3	4	4	4
s	43	4	3	3	0	3	4	4	4	4
s	35	4	2	1	1	2	3	4	0	4
s	35	4	2	4	4	0	3	4	4	0
s	34	3	4	4	0	3	3	4	0	0
s	33	3	4	2	1	4	2	0	4	4
s	33	4	4	1	1	1	4	4	4	0
s	33	3	2	1	0	0	2	4	4	4
s	31	4	3	3	1	0	3	0	4	0
s	31	3	1	2	3	2	3	4	4	0
s	30	3	3	1	1	4	1	0	0	4
s	30	3	1	2	1	1	4	0	4	4
s	29	3	2	2	1	1	3	4	4	4
s	27	3	3	2	3	0	3	4	0	4
s	26	3	1	0	1	0	3	0	4	0
s	24	3	2	1	3	0	3	4	4	4
s	21	3	3	3	1	0	3	0	4	0
s	19	2	2	3	1	0	2	0	0	4
s	16	3	2	1	1	0	1	0	0	4
	30	3	3	2	2	1	3	2	3	3

Figura 7-1. Soporte estadísticas actividad de seguimiento

Calificación/50	P. 1/3	P. 2/3	P. 3/3	P. 4/3	P. 5/3	P. 6/3	P. 7/3	P. 8/3	P. 9/3	P. 10/3	P. 11/3	P. 12/3	P. 13/3	P. 14/3	P. 15/3	P. 16/3	P. 17/3	P. 18/3	P. 19/3	P. 20/3
39	3	3	0	3	0	3	1	3	3	3	0	3	1	0	3	0	0	3	0	3
35	3	0	0	0	3	0	1	3	3	0	0	3	0	3	3	0	3	2	3	0
41	3	3	3	3	3	0	0	3	0	3	0	3	1	3	0	3	3	0	0	3
39	3	3	3	3	0	0	0	3	0	1	3	3	1	0	0	3	3	3	3	0
31	3	0	0	0	3	0	1	0	0	1	3	0	2	0	3	2	3	0	0	3
47	3	3	3	3	3	3	0	0	3	1	3	3	2	3	0	3	3	3	1	0
48	3	3	3	3	0	3	1	0	3	3	3	3	1	3	3	3	3	3	3	0
44	3	3	3	3	3	3	1	3	0	3	3	3	1	3	3	1	1	0	0	0
33	3	0	0	0	0	0	0	3	1	0	3	2	3	0	0	3	3	0	3	0
33	0	0	0	3	3	3	3	3	1	3	0	0	0	0	3	0	2	0	3	3
34	0	3	3	0	0	3	3	3	0	1	3	3	1	0	0	3	0	3	0	0
43	0	0	3	0	0	3	3	3	3	3	3	3	1	3	3	2	3	3	0	0
35	0	0	3	0	0	3	1	3	3	1	0	3	1	3	3	1	1	3	0	0
36	0	3	3	0	3	0	3	3	0	1	3	3	2	3	0	0	2	1	0	0
46	0	0	0	3	3	3	3	3	3	3	3	3	1	3	3	3	3	0	3	3
42	0	3	3	3	3	3	0	3	3	1	3	0	2	3	0	0	1	3	0	3
28	0	3	0	0	3	0	0	1	0	0	0	0	1	3	3	2	1	1	0	3
40	0	3	3	0	0	3	0	0	3	3	3	3	1	0	3	3	3	2	3	0
40	0	3	3	0	3	3	0	0	3	3	3	3	0	0	3	2	3	0	1	3
39	1	2	2	1	2	1	1	2	2	2	2	2	1	2	1	2	2	1	1	1

Figura 7-2. Soporte estadísticas encuesta Final

**Encuesta 1: Conocimientos previos - Triángulo de posición**

1. Que es Geometría:  
Es la ciencia que estudia aquellos aspectos que pertenecen al mundo físico y matemático y con ello entender sus conclusiones.

2. Que es Geometría Euclidiana:  
Es la geometría euclidiana que estudia de aquellos aspectos que pertenecen al mundo físico y matemático.

3. La distancia más corta entre dos puntos sobre una esfera es una línea recta?  
 Verdadero  
 Falso

4. La suma de los ángulos interiores de un triángulo dibujado sobre una esfera es:  
  $> 180^\circ$   
  $= 180^\circ$   
  $< 180^\circ$   
 Valor variable  
 Otro valor, p.e. cual:

5. Al menos un ángulo de triángulos situados en los ejes coordenados celestes y longitud en la superficie de los siguientes cuerpos, indique para qué uno de los ángulos se cruzan (convergen):  
 Estrella  
 Distancia  
 Círculo

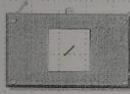
6. Suponiendo estándares los siguientes cuerpos celestes, indique cual tiene mayor curvatura:  
 Saturno  
 Venus  
 Júpiter  
 Mercurio  
 La Tierra

Nombre: Andrés David González Vargas  
 Código: 20181025078

**Práctica II: Conocimientos previos Triángulo de posición**  
 Aplicación Práctica La Ventana Esférica  
 Área de trabajo: Astronomía Esférica (MAA-D)  
 Concepto: Curvatura y distancia sobre la esfera  
 Grado: Semestre I y II Ingeniería

**Objetivo:**  
 Realizar la aplicación de la práctica "La Ventana Esférica", para la enseñanza del concepto de curvatura, exceso esférico, distancia.

**Experimento:**  
 En el centro de dos láminas de madera se ha hecho una ventana cuadrada, entre las láminas se aprecia un globo sin aire sobre el cual se ha dibujado una línea recta.



**Procedimiento:** Observe el montaje realizado por el profesor, seguidamente escriba en el espacio indicado las predicciones a las preguntas planteadas.

**Predicción 1:** Cuando se infle el globo, ¿Qué espera observar al comparar el plano de la ventana con la superficie del globo y la línea dibujada en él?  
La línea dibujada en el globo (plano de la ventana) adoptará la forma de un arco de círculo aumentando su longitud. El globo seguirá las curvaturas de la ventana a medida que se infla de la misma.

**Predicción 2:** Al reducir el tamaño del globo ¿qué cambio espera observar en la línea y en la curvatura de la superficie del globo?  
La superficie de la bomba se verá aplanada "acarreada" la longitud de la línea no va a ser la misma. La curvatura será menor.

Nombre: Grupo 3  
 Código: 20181025078 20181025078 20181025078  
20181025078 20181025078 20181025078  
 Fecha: 20181025078

**Práctica V: Modelo Esfera Celeste**  
 Aplicación Práctica Transformación de Coordenadas Celestes  
 Área de trabajo: Astronomía Esférica (MAA-D)  
 Concepto: Transformación de Coordenadas PPA  
 Grado: Semestre I y II Ingeniería

**Objetivo:** Comprender y aplicar los conceptos de coordenadas celestes y su transformación entre los diferentes sistemas

**Materiales:**  
 Cartera, calculadora, hoja de cálculo.

**Procedimiento:**  
 1. Encuentre en los servicios de efemerides y catálogos las coordenadas de las estrellas indicadas.

Id Estrella y Constelación	Nombre Estrella	Ascensión Recta, $\alpha$	Declinación $\delta$
B Círculo	Aldebarán	$79^\circ 31' 19.32''$	$-29^\circ 02' 34.9''$
o Círculo Norte	Sílvio	$6^\circ 45' 14.82''$	$-16^\circ 42' 47.82''$

2. Considere los siguientes valores como constantes para las diferentes transformaciones:  
 a. Ubicación Geográfica: Lat. (q):  $2^\circ 10' 00''$ ; Long (A):  $79^\circ 43' 14''$   
 b. Ángulo Horario del Punto vernal  $H\gamma = 0^\circ 00' 00''$   
 c. Oblicuidad media de la eclíptica a J2000.0  $\epsilon = 23^\circ 26' 21.4''$   
 d. Polo galáctico Norte:  $\alpha = 12^h 51.4m ; \delta = 27^\circ 8'$

3. Utilizando las ecuaciones determinadas en clase, realice en excel d en documentos de google, el código necesario para realizar las transformaciones entre los 5 sistemas de coordenadas.

4. Con el programa calcule y diligencie los valores encontrados en la siguiente tabla.

Id Estrella y Constelación	Híperbólicas	Locales	Eclípticas	Galácticas
B Círculo	$12^h 51.4m ; 27^\circ 8'$			
o Círculo	$12^h 51.4m ; 27^\circ 8'$			
o Círculo	$12^h 51.4m ; 27^\circ 8'$			
o Círculo	$12^h 51.4m ; 27^\circ 8'$			
o Círculo	$12^h 51.4m ; 27^\circ 8'$			

Nombre(s): Andrés David González Vargas, Sara Martínez  
 Código(s): 20181025078, 20181025078, 20181025078  
 Fecha: 20181025078  
 Profesor Ing. Ediberto Suárez Torres - esuar@distrital.edu.co

Grupo 3

**Práctica III: Conocimientos previos Movimiento Diurno**  
 Aplicación Práctica Posición Objetos Celestes  
 Área de trabajo: Astronomía Esférica (MAA-II)  
 Concepto: Coordenadas Horizontales  
 Grado: Semestre I y II Ingeniería

**Objetivo:**  
 Realizar la aplicación de la práctica "Movimiento Diurno", para la enseñanza del concepto de movimiento diurno y posición de los objetos celestes.

**Actividad:**  
 1. Realice el montaje en la habitación, observando el movimiento de los objetos celestes y el estado de iluminación del planeta.  
 2. Observe el movimiento de los objetos celestes y realice el registro.  
 3. Realice el registro de los objetos celestes y realice el registro de los objetos celestes.  
 4. Realice el registro de los objetos celestes y realice el registro de los objetos celestes.

Nombre T.	Obj.	Asc.	Decl.	Alt.	Az.	Mag.	Dist.
1	Aldebarán	$79^\circ 31' 19.32''$	$-29^\circ 02' 34.9''$	$12^\circ 15'$	$120^\circ$	0.75	65.30
2	Sílvio	$6^\circ 45' 14.82''$	$-16^\circ 42' 47.82''$	$12^\circ 15'$	$120^\circ$	3.5	143.10
3	Aldebarán	$79^\circ 31' 19.32''$	$-29^\circ 02' 34.9''$	$12^\circ 15'$	$120^\circ$	0.75	65.30
4	Sílvio	$6^\circ 45' 14.82''$	$-16^\circ 42' 47.82''$	$12^\circ 15'$	$120^\circ$	3.5	143.10
5	Aldebarán	$79^\circ 31' 19.32''$	$-29^\circ 02' 34.9''$	$12^\circ 15'$	$120^\circ$	0.75	65.30
6	Sílvio	$6^\circ 45' 14.82''$	$-16^\circ 42' 47.82''$	$12^\circ 15'$	$120^\circ$	3.5	143.10

Nombre(s): Andrés David González Vargas, Sara Martínez  
 Código(s): 20181025078, 20181025078, 20181025078  
 Fecha: 20181025078  
 Profesor Ing. Ediberto Suárez Torres - esuar@distrital.edu.co

Tabla 24. Evidencia del trabajo realizado por estudiantes

## C. Anexo: Guía de actividades.



**Actividad 1: Encuesta Inicial**  
Aplicación Práctica: Actividad diagnóstica  
Área de trabajo: Triángulo de Posición  
Grado: Semestre I y II Ingeniería

1. Que es Geometría: _____ _____ _____
2. Que es Geometría Euclidiana: _____ _____ _____
3. La distancia más corta entre dos puntos sobre una esfera es una línea recta? a. Verdadero b. Falso
4. La suma de los ángulos internos de un triángulo dibujado sobre una esfera es: a. $360^\circ$ b. $270^\circ$ c. $180^\circ$ d. $-45^\circ$ e. Valor variable f. Otro valor, p.e. cual: _____
5. Al trazar un sistema de coordenadas similar al de las coordenadas geográficas (Latitud y Longitud) en la superficie de las siguientes figuras, indique para que caso los meridianos se cruzan (convergen). a. Esfera b. Cilindro c. Cono
6. Suponiendo esféricos los siguientes cuerpos celestes, indique cual tiene mayor curvatura. a. Saturno b. Venus c. Júpiter d. Mercurio e. La Tierra

Nombre: \_\_\_\_\_  
Código: \_\_\_\_\_  
Fecha: \_\_\_\_\_

Profesor Ing. Edilberto Saáñez Torres - [esaa@udistrital.edu.co](mailto:esaa@udistrital.edu.co)



## Actividad 2: La Ventana Esférica

Aplicación Taller experimental MAA+D

Área de trabajo: Triángulo de Posición

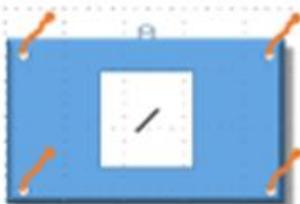
Concepto: Curvatura y distancia sobre la esfera

Grado: Semestre I y II Ingeniería

**Objetivo:** Realizar la aplicación de la práctica "La Ventana Esférica", para la enseñanza del concepto de curvatura y exceso esférico.

### Experimento:

Dos láminas de madera se han amarrado con cauchos que pasan por huecos cerca a sus esquinas; las láminas tienen una ventana cuadrada en su centro y entre ellas se ha colocado un globo sin aire sobre el cual, se ha trazado una línea recta.



**Procedimiento:** Observe el montaje realizado por el profesor, seguidamente escriba en el espacio indicado las predicciones a las preguntas planteadas.

**Predicción 1:** Cuando se infle el globo, ¿Qué espera observar al comparar la superficie del globo y la línea dibujada en él, con respecto al plano de la ventana?

---



---



---

**Predicción 2:** Al reducir el tamaño del globo ¿qué cambio espera observar en la curvatura de la superficie del globo y de la línea?

---



---



---

Nombre: \_\_\_\_\_

Código: \_\_\_\_\_

Fecha: \_\_\_\_\_

Profesor Ing. Ediberto Suárez Torres - [esuarso@unifrcristal.edu.co](mailto:esuarso@unifrcristal.edu.co)



### Actividad 3: Meridianos y Paralelos

Aplicación Práctica: Simulación MMA+I

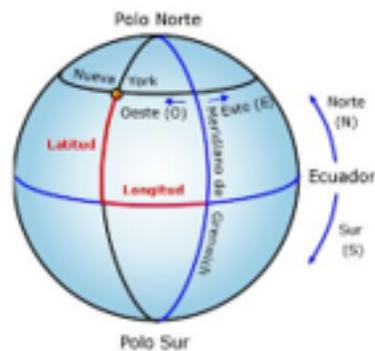
Área de trabajo: Triángulo de Posición

Concepto: Sistema de coordenadas de superficie y triángulo esférico

Grado: Semestre I y II Ingeniería

**Objetivo:** Realizar la aplicación de la práctica "Meridianos Paralelos", para la enseñanza del concepto de triángulo esférico y curvatura

**Descripción del Experimento:** Sobre la superficie de una esfera de polipropileno se ha trazado un sistema de coordenadas tipo Latitud ( $\varphi$ ) y Longitud ( $\lambda$ ); el origen de coordenadas será el punto A con  $\varphi=0$ ,  $\lambda=0$ .



1. Cuando trace un triángulo a partir del punto A con latitud B igual a longitud C y hipotenusa BC, ¿Qué espera observar al comparar la superficie del triángulo esférico con un triángulo de las mismas medidas pero dibujado sobre un plano?

*Predicción1:* \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

2. Al aumentar el tamaño de los lados del triángulo esférico a  $\varphi=90^\circ$  y  $\lambda=90^\circ$ , ¿la suma de los ángulos internos del triángulo esférico será igual a la suma de los ángulos internos del triángulo plano?

*Predicción2:* \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

Nombre: \_\_\_\_\_  
 Código: \_\_\_\_\_  
 Fecha: \_\_\_\_\_

Profesor Ing. Edilberto Suárez Torres - [esuarco@udistrital.edu.co](mailto:esuarco@udistrital.edu.co)



**UNIVERSIDAD DISTRITAL**  
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS  
FACULTAD DE INGENIERÍA

**Actividad 5: Coordenadas Esféricas**  
**Aplicación Práctica: Didáctica Experimental**  
**Area de trabajo: Triángulo de Posición y Movimiento Diurno**  
**Concepto: Esfera y Coordenadas Celestes**  
**Grado: Semestre I y II Ingeniería**

**Objetivo:** Comprender y aplicar los conceptos de coordenadas celestes y su transformación, por medio de un modelo didáctico.

**Materiales:**

Esfera de polipropileno 30cm de diámetro (loopor), cintas de colores, chinchas.

**Procedimiento:**

A. Siguiendo las instrucciones del profesor, materialice sobre la esfera los 5 sistemas de coordenadas astronómicas a saber:

1. Negro: Sistema Horizontal
2. Rojo: Sistema Ecuatorial Local
3. Rojo: Sistema Ecuatorial Absoluto
4. Azul: Sistema Eclíptico
5. Verde: Sistema Galáctico

B. El profesor indicará el ángulo horario del punto vernal a trabajar para el ejercicio:

1. para el caso utilice:  $H_y = \underline{\hspace{2cm}}$

C. El profesor indicará la(s) estrella(s) seleccionadas para el ejercicio, encuentre las coordenadas a J2000.0 y diligencie la siguiente tabla:

Id Estrella y Constelación	Nombre Estrella	Ascensión Recta, $\alpha$	Declinación $\delta$

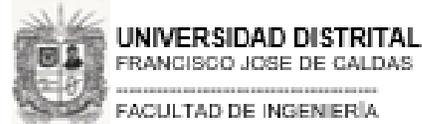
D. Determine gráficamente las coordenadas de la(s) estrella(s) en los diferentes sistemas de coordenadas y diligencie la siguiente tabla

Id Estrella y Constelación	Horizontales	Locales	Eclípticas	Galácticas

Nombre(s): \_\_\_\_\_

Código(s): \_\_\_\_\_

Fecha: \_\_\_\_\_



### Actividad 6: Siguiendo Estrellas

Aplicación Práctica: Didáctica Interactiva

Area de trabajo: Movimiento Diurno

Concepto: Observación medida y registro del movimiento de los astros

Grado: Semestre I y II Ingeniería

**Objetivo:** Identificar astros con ayuda de la carta celeste y realizar mediciones de su posición en el sistema de coordenadas local horizontal.

**Actividad:**

1. Instale el equipo en la estación astronómica, nivelado, con los codos cenitales y el equipo de iluminación respectivo.
2. Coloque ceros en el norte astronómico definido previamente.
3. Utilizando la carta celeste identifique asterismos de las constelaciones visibles.
4. Seleccione una estrella conocida, ubíquela en el campo ocular del teodolito y registre en la cartera de campo las coordenadas horizontales y el tiempo minuto a minuto hasta totalizar 5 registros.

Observador 1:		$\phi_{GPS}$	$\lambda_{GPS}$	Astro Seleccionado		$\alpha$	$\delta$	Magnitud	Fecha
Local	Azmut Obs. Act.	Altura Obs. Act.	Tiempo Obscal	$l^m$	$h^m$	Azmut Calc. Act.	Altura Calc. Act.	$\Delta$ Azmut (Obs- Act)	$\Delta$ Altura (Obs- Act)
1									
2									
3									
4									
5									

Observador 2:		$\phi_{GPS}$	$\lambda_{GPS}$	Astro Seleccionado		$\alpha$	$\delta$	Magnitud	Fecha
Local	Azmut Obs. Act.	Altura Obs. Act.	Tiempo Obscal	$l^m$	$h^m$	Azmut Calc. Act.	Altura Calc. Act.	$\Delta$ Azmut (Obs- Act)	$\Delta$ Altura (Obs- Act)
1									
2									
3									
4									
5									

Observador 3:		$\phi_{GPS}$	$\lambda_{GPS}$	Astro Seleccionado		$\alpha$	$\delta$	Magnitud	Fecha
Local	Azmut Obs. Act.	Altura Obs. Act.	Tiempo Obscal	$l^m$	$h^m$	Azmut Calc. Act.	Altura Calc. Act.	$\Delta$ Azmut (Obs- Act)	$\Delta$ Altura (Obs- Act)
1									
2									
3									
4									
5									

Nombre(s): \_\_\_\_\_  
 Código(s): \_\_\_\_\_  
 Fecha: \_\_\_\_\_

Observador 4:		GPS	GPS	Astro Seleccionado	$\alpha$	$\delta$	Magnitud	Fecha	
Ord.	Azmut Obs. A <sub>o</sub>	Altura Obs. h <sub>o</sub>	Tiempo Obs. t <sub>o</sub>	T <sup>h</sup>	h <sub>v</sub>	Azmut Calc. A <sub>c</sub>	Altura Calc. h <sub>c</sub>	$\Delta$ Azmut  A <sub>o</sub> - A <sub>c</sub>	$\Delta$ Altura  h <sub>o</sub> - h <sub>c</sub>
1									
2									
3									
4									
5									

**Pregunta 1:** Que puede observar en los valores medidos con el teodolito para cada astro?

---



---



---



---

**Pregunta 2:** Existe alguna causa o fenómeno natural que pueda explicar su apreciación anterior?, describala brevemente:

---



---



---



---



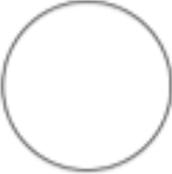
---

Nombre: _____	Nombre: _____
Código: _____	Código: _____
Nombre: _____	Nombre: _____
Código: _____	Código: _____

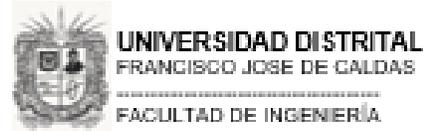
Nombre(s): \_\_\_\_\_  
 Código(s): \_\_\_\_\_  
 Fecha: \_\_\_\_\_



**Actividad 7: Siguiendo al Sol**  
**Aplicación Práctica: Didáctica Interactiva**  
**Area de trabajo: Triángulo de Posición y Movimiento Diurno**  
**Concepto: Definición de la posición del sol**  
**Grado: Semestre I y II Ingeniería**

Grupo:	Etn. Vistado	Leat. Horizontal				Z - Dist. Central				Tiempo Oficial				Brújula							
		D/l	h	i	m	h	i	m	h	i	m	h	i	m	h	i	m				
Ob-1	SA1	D	0	0	0																
		D																	Observaciones		
		i																	.....		
		$\mathcal{A}_1$																	.....		
Ob-2	SA1	D	20	0	0														.....		
		D																	.....		
		i																	.....		
		$\mathcal{A}_2$																	.....		
Ob-3	SA1	D	40	0	0														.....		
		D																	 Dibuje el aspecto del sol Convenciones:		
		i																			
		$\mathcal{A}_3$																			
Ob-4	SA1	D	60	0	0																
		D																			
		i																			
		$\mathcal{A}_4$																			
						Serie 1				Serie 2				Serie 3				Serie 4			
Declinación del Sol en la Observación																					
Acimut del Sol $A_{zs}$																					
Acimut Calculado SA1 ( $Aze - \mathcal{A}_n$ )																					
Promedio Acimutes																					
Acimut Magnético																					
Declinación Magnética $Cps$																					

Nombre(s): \_\_\_\_\_  
 Código(s): \_\_\_\_\_  
 Fecha: \_\_\_\_\_



**Actividad 8: Transformando Coordenadas**  
 Aplicación Práctica: Cálculo triángulo de Posición  
 Área de trabajo: Triángulo de Posición y Movimiento Diurno  
 Concepto: Transformación de Coordenadas  
 Grado: Semestre I y II Ingeniería

**Objetivo:** Comprender y aplicar los conceptos de coordenadas celestes y su transformación entre los diferentes sistemas

**Materiales:**

Cartera, calculadora, hoja de cálculo.

**Procedimiento:**

- Encuentre en los servicios de efemérides y catálogos las coordenadas de las estrellas indicadas .

Id Estrella y Constelación	Nombre Estrella	Ascensión Recta, $\alpha$	Declinación $\delta$

- Considere los siguientes valores como constantes para las diferentes transformaciones:
  - Ubicación Geográfica: \_\_\_\_\_ Lat.( $\varphi$ ): \_\_\_\_\_ ; Long ( $\lambda$ ): \_\_\_\_\_
  - Angulo Horario del Punto vernal  $H\gamma =$  \_\_\_\_\_
  - Oblicuidad media de la eclíptica a J2000.0  $\epsilon=23^{\circ}26'21.4''$
  - Polo galáctico Norte:  $\alpha=12h51.4m$  ;  $\delta=27^{\circ}8'$
- Utilizando las ecuaciones determinadas en clase, realice en excel ó en documentos de google, el código necesario para realizar las transformaciones entre los 5 sistemas de coordenadas.
- Con el programa calcule y diligencie los valores encontrados en la siguiente tabla.

Id Estrella y Constelación	Horizontales	Locales	Eclípticas	Galácticas

Nombre(s): \_\_\_\_\_

Código(s): \_\_\_\_\_

Fecha: \_\_\_\_\_

Profesor Ing. Edilberto Suárez Torres - [esuarez@udistrital.edu.co](mailto:esuarez@udistrital.edu.co)