SOLUCION DE PROBLEMAS

17. Encontrar un cuadrado perfecto de cuatro cifras tal que las dos primeras cifras sean iguales entre sí y también las dos últimas.

Solución. El cuadrado es de la forma

$$1.000m + 100m + 10r + r = 11(100m + r),$$

donde $1 \leqslant m \leqslant 9, 1 \leqslant r \leqslant 9$. Como el cuadrado es divisible por 11, la base lo es también, entonces

$$11(100m + r) = (11x)^2,$$

donde $3 \leqslant x \leqslant 9$. Luego

$$(*) \qquad 100m + r = 11x^2,$$

entonces $100m + r = 99m + m + r$ es divisible por 11, es decir $m + r = 11, r = 11 - m$. Reemplazando en (*)

$$99m + 11 = 11x^2,$$

$$x^2 = 9m + 1.$$

El segundo miembro es un cuadrado perfecto únicamente para $m = 7$, entonces $r = 4$, $x = 8$ y el número buscado es $7.744 = (88)^2$.

Alfonso Cuevas Bustos.

Otra solución de: *Joaquín Alvarez Arango.*

18. ¿Cuáles son los números que terminan por dos cifras iguales y sus cuadrados también?

Solución. Tenemos que buscar un número a tal que $(11a)^2 = 100a^2 + 21a^2$ tenga las dos últimas cifras iguales. Las unidades de $21a^2$ son las mismas que de a^2 (sea u), las decenas de $21a^2$ son las decenas de a^2 (sean v) más dos veces las unidades de a^2 menos 10, entonces

$$u = v + 2u - 10$$

y $u + v = 10$. Ahora cuadrados perfectos de la forma $10u + v$ con $u + v = 10$ no hay sino cuando $a^2 = 100$ y $a^2 = 64$.

Entonces $a = 10$ y $a = 8$, y son los números que terminan por 00 u 88 cuyos cuadrados terminan también por dos cifras iguales (por 00 o 44).

Joaquín Alvarez Arango.

Solución parcial de: *Alfonso Cuevas Bustos.*

19. Demostrar que un número que contiene sólo 1 como cifras (en el sistema decimal), no puede ser el cuadrado de un número entero.

1ª *solución.*

$$10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 1 = \frac{10^n - 1}{9},$$

entonces si el primer miembro es cuadrado perfecto, $10^n - 1$ lo es también. $10^n - 1$ tiene sólo 9 como cifras y un tal número no puede ser cuadrado perfecto. Pues si un cuadrado perfecto tiene 9 como última cifra, por

$$(10a + b)^2 = 100a^2 + 10 \, . \, 2ab + b^2$$

y siendo $b = 3$, la penúltima cifra debe ser un número par.

Ernesto Gutiérrez Bodmín.

2ª *solución.* Un número que tiene sólo 1 como cifras es impar, es decir no puede ser sino el cuadrado de un número impar. Ahora bien

$$(2k + 1)^2 = 4k\,(k + 1) + 1,$$

es decir el cuadrado de un número impar da el residuo 1 en la división por 4, mientras que un número que tiene sólo 1 como cifras da el residuo 3 en la división por 4.

Joaquín Alvarez Arango.

Solución parcial de: *Alfonso Cuevas Bustos.*

20. ¿Puede ser el producto de cuatro números enteros positivos consecutivos un cuadrado perfecto?

Solución. No lo puede ser, puesto que

$$n(n+1)(n+2)(n+3) = (n^2+3n)(n^2+3n+2) =$$
$$= (n^2+3n+1)^2 - 1,$$

es decir el producto de cuatro números enteros consecutivos es siempre inferior en uno a un cuadrado perfecto.

Joaquín Alvarez Arango.

Otras soluciones de: *Juan Gómez Mora, Ernesto Gutiérrez Bodmín.*

22. Demostrar que la diferencia entre la media aritmética y la media geométrica de dos números positivos a y b está comprendida entre

$$\frac{(a-b)^2}{8a} \quad \text{y} \quad \frac{(a-b)^2}{8b} .$$

Solución. Sea $a > b$, entonces

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} = \frac{(a-b)^2}{2\,(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} ,$$

de donde

$$\frac{(a-b)^2}{2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \leqslant \frac{(a-b)^2}{2(2\sqrt{b})^2} = \frac{(a-b)^2}{8b} ,$$

y

$$\frac{(a-b)^2}{2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \geqslant \frac{(a-b)^2}{2(2\sqrt{a})^2} = \frac{(a-b)^2}{8a} .$$

Alfonso Cuevas Bustos.

24. Construir un triángulo, conociendo los ángulos que forman entre sí los segmentos que unen el centro del círculo circunscrito con los vértices, y la longitud de un tal segmento.

Solución. Sea l la longitud del segmento y dibujemos un círculo con radio l. Sean r_1, r_2, r_3 tres radios del círculo que forman entre sí los ángulos dados. Los puntos en que estos radios encuentran al círculo, serán los tres vértices del triángulo.

Joaquín Alvarez Arango.

Alfonso Cuevas Bustos calculó el triángulo por trigonometría en vez de construírlo.

25. (a) Si con a se designa la medida de una longitud dada, ¿para qué valores de m tiene la ecuación

$$(m + 1)x^2 - 2(m + 3)ax + (m + 2)a^2 = 0$$

dos raíces positivas?

(b) Suponiendo que esta condición sea realizada, consideremos el triángulo ABC rectángulo en A, tal que $AB = x'$, $AC = x''$ donde x' y x'' son las raíces de la ecuación propuesta. Hagamos girar el triángulo sucesivamente alrededor de AB y de AC.

Calcular en función de m la suma de los volúmenes así generados.

(c) Determinar m de manera que esta suma sea igual a $\dfrac{2\pi\lambda a^3}{3}$ siendo λ un número positivo dado. Discutir.

(d) Hagamos girar BAC alrededor de la hipotenusa BC; así se genera un sólido P. Demostrar que en P se puede inscribir una esfera S y calcular el radio de S en función de m. Decir cómo varía el radio cuando varía m.

(Bachillerato, 1ª parte, Aix-Marseille, Francia, 1948).

Solución. (a) La ecuación tiene raíces reales si $3m + 7 \geqslant 0$. Siendo

$$x' + x'' = \frac{m + 3}{m + 1}\, 2a, \qquad x' . x'' = \frac{m + 2}{m + 1}\, a^2$$

las dos raíces serán positivas si $m + 1 > 0$, es decir si $m > -1$.

(b) La suma de los dos volúmenes es

$$\frac{\pi}{3} x'^2 x'' + \frac{\pi}{3} x' x''^2 = \frac{\pi}{3} x' x'' (x' + x'') =$$

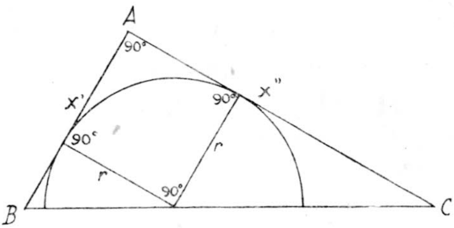
$$= \frac{\pi}{3} \frac{m+2}{m+1} a^2 . \frac{m+3}{m+1} 2a = \frac{2\pi a^3}{3} \frac{(m+2)(m+3)}{(m+1)^2} .$$

(c) Debe ser

$$\lambda = \frac{(m+2)(m+3)}{(m+1)^2} .$$

Si m crece de -1 a $+\infty$ entonces λ decrece de $+\infty$ hasta 1. Entonces m se puede determinar únicamente si $\lambda > 1$.

(d) Hay que calcular el radio r de un semicírculo inscrito a ABC con centro sobre la hipotenusa. Ahora



$$\frac{x'' - r}{r} = \frac{x''}{x'} ,$$

entonces

$$r = \frac{x' x''}{x' + x''} = \frac{m+2}{m+1} a^2 .$$

$$\frac{m+1}{m+3} \cdot \frac{1}{2a} = \frac{m+2}{m+3} \cdot \frac{a}{2} .$$

Cuando m crece de -1 a $+\infty$, r crece de $a/4$ hasta $a/2$.

Alfonso Cuevas Bustos.