Boletín de Matemáticas
Vol. XX, N° 2 (1986) **APUNTES**

UNA CARACTERIZACION DE LA CIRCUNFERENCIA

Moysés Leão Kulisch

El objetivo de esta nota es demostrar que una condición necesaria y suficiente para que una curva de ecuación $\vec{x}(s): I \to \mathbb{R}^3$, parametrizada por la longitud de arco, y que no es una recta (esto es, con curvatura $k \neq 0$), sea una circunferencia, es que $\vec{x}''' = \lambda \vec{x}'$, $\lambda \neq 0$.

En efecto, sea $\vec{x}(s): I \to \mathbb{R}^3$, tal que $|\vec{x}(s)| = 1$. Tenemos $\vec{t}(s) = \vec{x}'(s)$, $\vec{t}'(s) = \vec{x}''(s)$ y $k = |\vec{t}'(s)|$. Como $\vec{t}'(s) = k\vec{n}$, tendremos

$$\begin{aligned}\vec{x}'''(s) = (k\vec{n})' &= \frac{dk}{ds}\vec{n} + k\vec{n}' \\ &= \frac{dk}{ds}\vec{n} + k(-k\vec{t} + T\vec{x}') \\ &= -k^2\vec{t} + \frac{dk}{ds}\vec{n} + k\,T\vec{b}.\end{aligned}$$

i) La condición es necesaria. Suponiendo que

$\vec{x}(s)$ represente una circunferencia, entonces $T = 0$ y k es constante, de donde

$$\vec{x}'''(s) = -k^2\vec{x}'(s).$$

ii) La condición es suficiente. Suponiendo que $\vec{x}'(s) = \lambda\vec{x}'''(s)$, con $\lambda \neq 0$ tendremos

$$\vec{t} = \lambda(-k^2\vec{t} + \frac{dk}{ds}\vec{n} + kT\vec{b}),$$

donde $dk/ds = 0$ $(k \neq 0)$ y $T = 0$, lo que muestra que la curva es una circunferencia.

*

Departamento de Matemática
Universidad Federal do Paraná
Curitiba, BRASIL.