MÁXIMOS Y MÍNIMOS EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS A NIVEL MEDIO

JOSÉ ALONSO SALAZAR

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MANIZALES
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS
A.A. 127

RESUMEN

A partir de la ecuación cuadrática $f(x) = ax^2+bx+c$, $a \neq o$, se explora una posibilidad didáctica que permite introducir - a nivel medio - los conceptos de máximo y mínimo de una función de valor real y variable real, definida en un intervalo I, El proceso estudiado utiliza técnicas elementales de la enseñanza básica prescindiendo del cálculo diferencial, al tiempo que se proponen aplicaciones geométricas y físicas.

Introducción

1. La gran variedad de los fenómenos naturales, exige para su estudio relaciones entre las variables que intervienen de la formulación de un modelo matemático que describa de manera adecuada los cambios cualitativos y cuantitativos en situaciones controladas, así, por ejemplo, la caída libre en el vacío de una partícula material queda completamente gobernada por la función :

$$y = \tfrac{1}{2} g t^2$$

En las mismas circunstancias si una partícula es lanzada verticalmente el desplazamiento se rige por la fórmula :

$$y = V_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Y surge el problema de calcular la altura máxima alcanzada por el móvil justamente antes de iniciar su retorno.

Otro tanto acontece con el lanzamiento de un proyectil bajo un ángulo θ sobre la horizontal con una velocidad inicial V_0 en condiciones ideales (bidimensional, ausencia de resistencia del aire, etc. Aquí las ecuaciones paramétricas del movimiento son :

$$x = V_0 \cos\theta \quad t$$

$$y = V_0 \operatorname{sen}\theta \quad t - \frac{1}{2}gt^2$$

Como en el problema precedente, se plantea la importante pregunta de determinar la altura máxima y el alcance máximo logrado por el móvil.

2. En situaciones prácticas, aparecen problemas acerca de maximizar o minimizar cantidades que son susceptibles de representarse geométricamente. Así, por ejemplo, sea que una agricultor disponga de un alambre de 100 metros de longitud y desea doblarlo en forma rectangular de tal suerte que el área encerrada por el alambre sea la mayor posible ¿Cuáles serían las dimensiones del terreno? Y cuáles, si dispone de una pared de longitud igual a 20 metros?

3. De una lámina circular de aluminio de 1 metro de radio se quiere recortar un rectángulo que tenga la mayor área posible. ¿Cuáles serían sus dimensiones?. Similarmente, se dispone de un bloque cilíndrico de madera fina de radio 1 metro y se desea extraer una viga rectangular que posea área máxima en su base, ¿Cómo habría que recortarla?

4. Una ventana tiene forma de un rectángulo coronado con un semicírculo. El perímetro total del borde es igual a 4 metros. ¿Para qué dimensiones, la ventana dejará pasar la cantidad máxima de luz?

5. De una cartulina triangular de base 40 cms. Y altura 20 cms, se quiere recortar un rectángulo cuya base se sitúa en ala del triángulo y dos vértices en los lados laterales del mismo. Hállese el área máxima del rectángulo recortado.

Los ejemplos anteriores están enmarcados en un modelo matemático general, a saber: LA FUNCIÓN CUADRÁTICA, que deberá ser objeto de un estudio sistemático y profundo. En este artículo nos limitaremos a trazar un breve esbozo que indicará el camino hacia las propiedades más características y relevantes de la curva, $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$, no sin antes advertir que aspectos como el de la continuidad y la derivabilidad quedan fuera de nuestros propósitos.

No. 1 La función de segundo grado :

$$y = x^2 = f(x) \qquad (1)$$

Asigna a cada número real x su cuadrado. En la expresión (1), x representa la variable independiente, y la variable dependiente.

Para obtener una idea de su representación gráfica elaboramos una pequeña tabla de valores, Así :

x	-2	-1	-1/2	0	1	2	$\sqrt{2}$	3	π
y	4	1	1/4	0	1	4	2	9	π^2

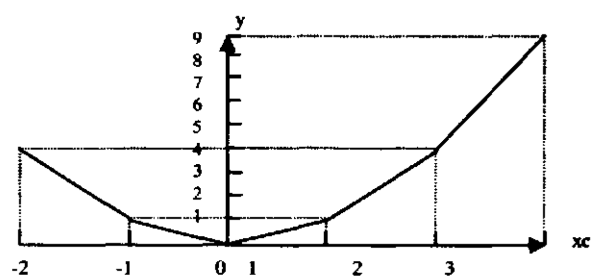
TABLA 1

Nota :

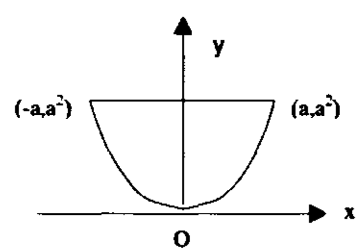
$\sqrt{2} \approx 1.414142$

$\pi \approx 3.14159$

Localicemos los puntos : (-2,4),(-1,1),(-1/2,1/4),(0,0),(1,1),(2,4),($\sqrt{2}$,2),(e,e^2); en un plano cartesiano OXY, en una forma aproximada.



GRÁFICA 1



GRÁFICA 1

Obsérvese que cada número x real admite su cuadrado, en éste sentido decimos que la función (1), está DEFINIDA PARA TODO NÚMERO REAL y que su dominio de definición es el conjunto de los números reales.

En símbolos, Dom f = R.

Unos cuantos números pertenecientes al dominio de la función aparecen en al primera fila de la TABLA 1. Si nos concretamos únicamente a los números comprendidos entre -2 y 3, diremos que hemos restringido el dominio de la función al intervalo cerrado [-2,3]. Es claro que tanto el dominio de la función como su restricción hacen parte del eje OX.

Ahora bien, los valores de la variable «y» correspondiente a los valores de la variable «x» (el dominio de la función) es el conjunto de los números reales no negativos, pues $x^2 \geq 0$. Diremos que constituyen el CODOMINIO DE LA FUNCION y hacen parte del eje OY. Los valores de la función correspondiente a cada punto del dominio restringido [-2,3] forman el rango de la función, y, en este caso particular coincide con el intervalo [0,9].

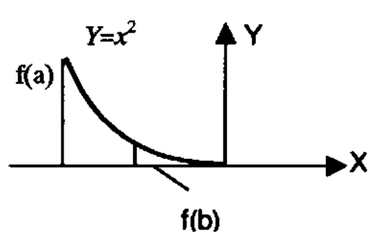
No. 2 La función (1) es simétrica respecto al eje OY. Es decir cada vez que el par (a,a^2) esté en el gráfico de la función, también lo está el par $(-a,a^2)$. Por ejemplo, los puntos (2,4) y (-2,4), hacen parte del gráfico de la función. Dicho de otra manera, si conocemos una porción de la curva localizada en el segundo cuadrante (respectivamente en el primer cuadrante) podemos ver otra porción de la curva en el primer cuadrante reflejada especularmente con respecto al eje OY. (Este último sirve de espejo).

No. 3 En el dominio restringido [-2,3] hay infinitos números reales. Por tanto, la gráfica consta de infinitos puntos del plano 0XY. Representar infinitos puntos en el papel milimetrado es imposible. Así que tenemos una representación aproximada uniendo sucesivamente unos cuantos puntos, tal como lo sugiere la TABLA 1.

No. 4 Aceptamos que la gráfica de la función no exhibe puntos de «ruptura», o «huecos», o discontinuidades. Se trata de una curva suave y continua.

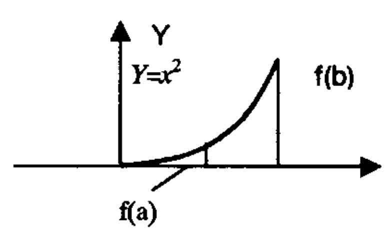
No. 5

Rama izquierda



;

Rama derecha



La función es decreciente en $(-\infty,0)$

GRÁFICA 3

La función es creciente en $(0,\infty)$

GRÁFICA 4

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty,0)$; esto significa que si avanzamos de izquierda a derecha en la gráfica entonces las ordenadas disminuyen en valor.

En símbolos, Si $a < b$ entonces $f(a) > f(b)$.

La función es creciente en el intervalo de $(0, \infty)$; esto significa que si avanzamos de izquierda a derecha en la gráfica entonces las ordenadas aumentan en valor.

En símbolos, Si $a < b$ entonces $f(a) < f(b)$.

No. 6 El punto (0 , 0); sirve de separación o bifurcación de ambas ramas. De la TABLA 1, así como de las gráficas (1) , (2) , (3) , (4); se infiere que:

«La altura mas pequeña», o la «ordenada mínima» es $y = 0$, correspondiente al numero $x=0$
Y « La altura mas grande» o «máxima ordenada» es $y = 9$, precisamente cuando $x= 3$
Se dice que la función alcanza un valor mínimo en $x = 0$ y un valor máximo en $x = 3$

También, se dice que $x = 0$, y $x =3$ son puntos extremos de la función : $y = x^2$ en el intervalo $[-2,3]$.

No. 6 a) La función :

$$y = (x-1)^2$$

Asigna a cada numero real x el cuadrado de la diferencia entre el número y la unidad. Es claro que la instrucción para calcular el número «y» siempre es posible, de ahí que :

El dominio de la función sea R , el conjunto de los números reales.

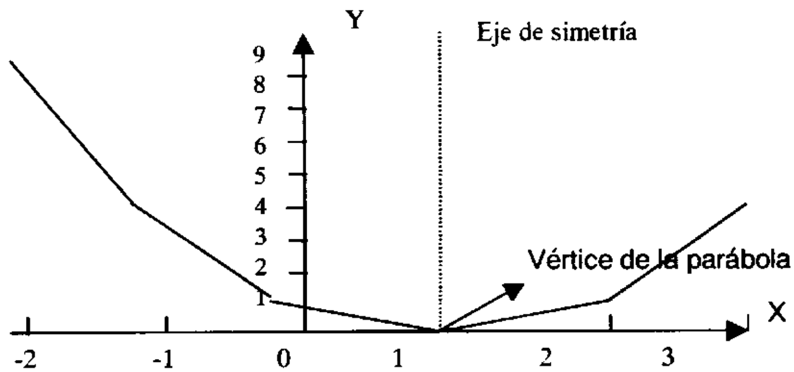
El codominio $R^+ \cup \{0\}$

Como en los apartes anteriores, diseñamos una tabla de valores :

Dominio restringido : $[-2,3]$ Rango : $[0,9]$

X	-2	-1	0	1	2	3
Y	9	4	1	0	1	4

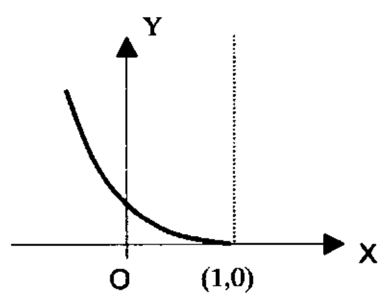
TABLA 2



GRAFICA 5

En la gráfica (5) apreciamos que la parábola $y = (x - 1)^2$, proviene de la traslación de la parábola $y = x^2$, hacia la derecha una unidad. Con vértice en el punto (1,0) y el eje de simetría, la recta $x = 1$

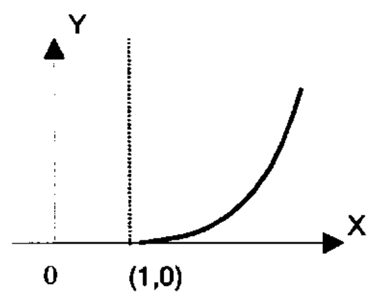
Rama izquierda



En el intervalo $(-\infty,1)$ la función es decreciente

GRÁFICA 6

Rama derecha



En el intervalo $(1,\infty)$ la función es creciente

GRÁFICA 7

El punto (1,0) es ahora un punto de bifurcación.

En el punto $x = 1$, la función alcanza un mínimo con $y_{min} = 0$.

En el punto $x = -2$ la función alcanza un máxima con $y_{max} = 9$.

El punto $x = 1$, proviene también de la anulación $x - 1 = 0$.

No. 7 La función de segundo grado :

$$Y = x^2 + 3 = g(x) \qquad (2)$$

Asigna a cada número real x, su cuadrado mas tres (3) unidades. Este computo siempre es factible sea cual fuere el número real x.

En consecuencia:

El dominio de la función es igual al conjunto de los números reales. Como x^2 es una cantidad no negativa, se sigue que : $x^2 + 3 \geq 3$.

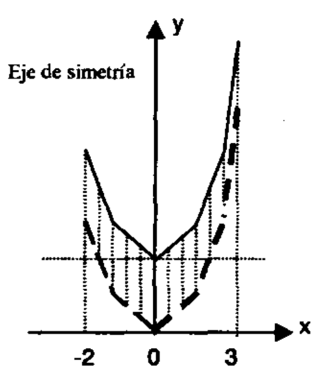
La elaboración de una tabla para unos cuantos valores de x nos indica que el codominio de la función es el intervalo $[3,+\infty)$.

Tomando a continuación el dominio restringido $[-2,3]$, vemos que el rango correspondiente es el intervalo $[3,12]$.

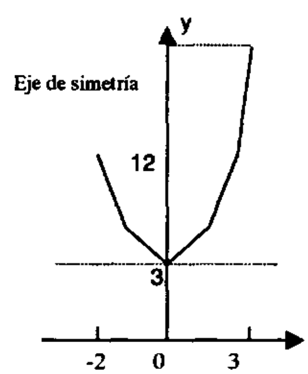
Nótese que para esbozar el gráfico de la función basta incrementar en tres unidades en sentido vertical el gráfico (1), que aquí aparece punteado en la gráfica.

-2	-1	0	1	2	3
7	4	3	4	7	12

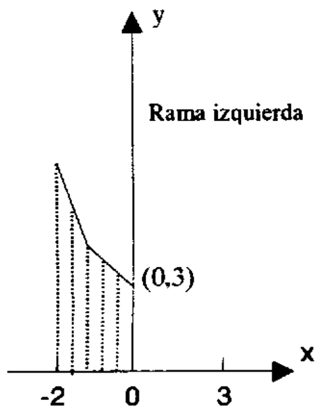
TABLA 3



GRÁFICA 8

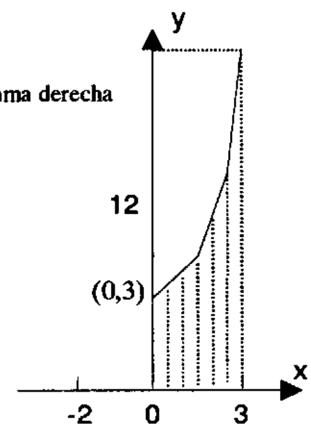


GRÁFICA 9



En el intervalo (-∞,0) la función es decreciente.

GRÁFICA 10



En el intervalo (0,∞) la función es creciente.

GRÁFICA 11

En $x = 0$, la función alcanza un valor mínimo. $Y_{min} = 3$.

En $x = 3$ la función alcanza un valor máximo. $Y_{max} = 12$.

No. 8 La función cuadrática.

$Y = (x - 1)^2 + 3 = f(x)$; $-2 \leq x \leq 3$

Asigna a cada número real x, su cuadrado, menos el doble, mas cuatro unidades. De nuevo, como este computo siempre es realizable cualquiera sea el número real x:

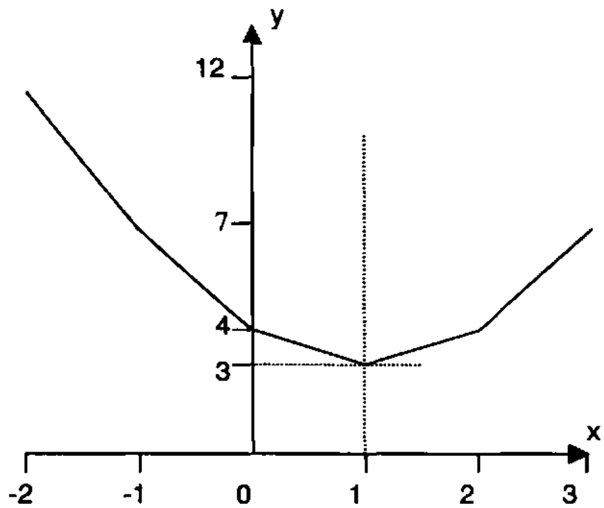
El dominio de la función es el conjunto de los números reales.

Para mirar su codominio tal vez lo mejor sea elaborar una tabla «finita» de valores :

Dominio restringido: [-2,3] ,   Rango : [3,9]

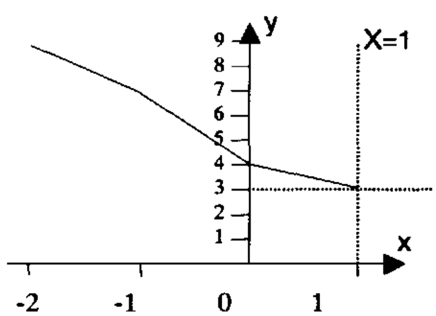
X	-2	-1	0	1	2	3
Y	12	7	4	3	4	7

TABLA 4



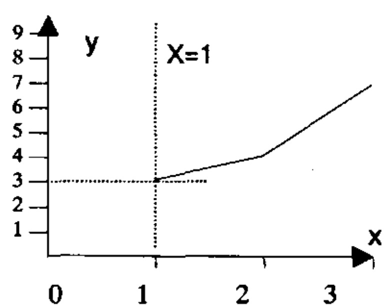
GRÁFICA 12

Vemos que el conjunto de números y relacionados con *x*, es igual al intervalo [3,+∞].



En el intervalo (-∞,1) la función es decreciente.

GRÁFICA 13



En el intervalo (1,+∞) la función es creciente.

GRÁFICA 14

El punto (1,3), es un punto de bifurcación.

De la tabla se desprende que la función alcanzara un mínimo en :

$x = 1$, $y_{min} = 3$

Y alcanzará un máximo en :

$x = -2$, $y_{max} = (-2 - 1)^2 + 3 = 12$

La función no corta el eje OX , pero si el eje OY en el punto (0,4)

No. 9 La función :

$$Y = -x^2$$

Asigna a cada numero real x el negativo de su cuadrado.

El dominio de la función es el conjunto de todos los números reales.

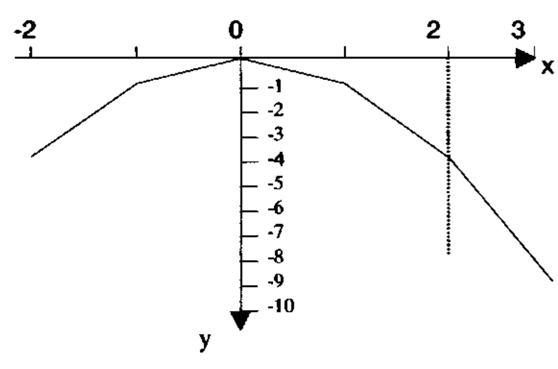
El codominio de la función es el intervalo ($-\infty$,0).

Y una tabla de valores podría ser :

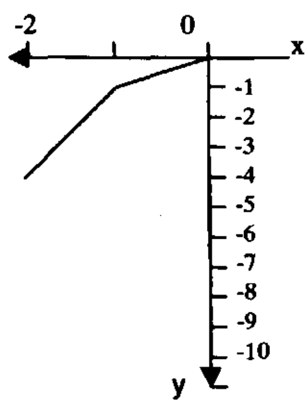
Dominio restringido : [-2,3] , Rango : [-9,0]

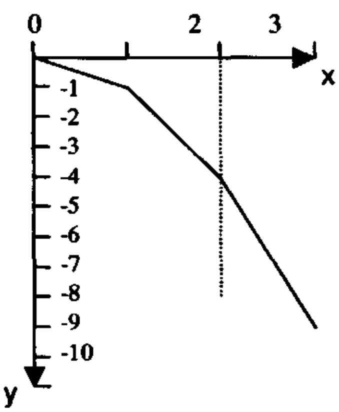
X	-2	-1	0	1	2	3
Y	-4	-1	0	-1	-4	-9

TABLA 5



GRÁFICA 15





En el intervalo $(-\infty,0)$ la función es creciente

GRÁFICA 16

En el intervalo $(0,\infty)$ la función es decreciente

GRAFICA 17

La función alcanza un máximo en :

$x = 0$, $\quad y_{max} = 0$ La ordenada mas grande.

La función alcanza un mínimo en :

$x = 3$, $\quad y_{min} = -9$ La ordenada mas pequeña.

Es evidente que el gráfico de $y = -x^2$, se obtiene de $y = x^2$, por una simple reflexión, sobre el eje OX.

No. 10 La función :

$$Y = -x^2 + 3$$

Tiene sentido para todo número real x.

Su dominio es el conjunto de los números reales.

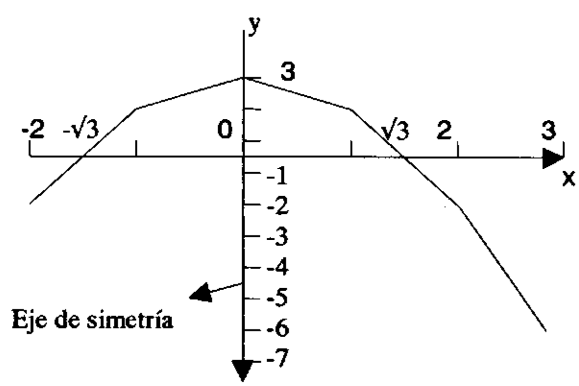
Su codominio es el intervalo : $(-\infty,3]$.

Una posible tabla de valores viene dada por :

Dominio restringido. [-2,3], Rango : [-6,3]

X	-2	-1	0	1	2	3
Y	-1	2	3	2	-1	-6

TABLA 6



GRÁFICA 18

No. 11 La función :

$$Y = -(x-1)^2$$

Se obtiene por traslación de una unidad a la derecha, del gráfico de la función $y = -x^2$

El dominio de la función son los números reales.

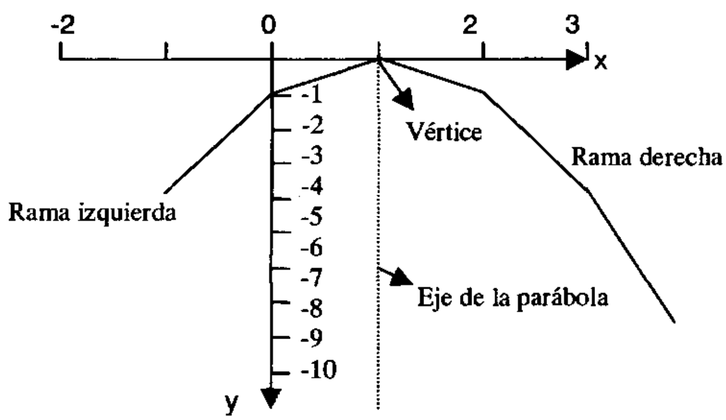
El codominio es el intervalo $(-\infty,0]$.

Una posible tabla de valores viene dada por :

Dominio restringido : [-2,3] ,   Rango : [-9,0]

X	-2	-1	0	1	2	3
y	-9	-4	-1	0	-1	-4

TABLA 7



GRAFICA19

La función es creciente en el intervalo (-2,1) y decreciente en el intervalo (1,3).

La función alcanza su máximo en el punto $x = 1$, $y_{max} = 0$.

El punto de máximo proviene de la anulación : $x - 1 = 0$.

La función alcanza un mínimo en el punto $x = -2$, $y_{min} = -9$.

La curva entra al eje OX en el punto $x = 1$, y al eje OY en el punto (0,-1)

No. 12 La función :

$$Y = -(x-1)^2 + 3 \quad ó \quad y = -x^2 + 2x + 2$$

Se obtiene del gráfico (19), sumando tres unidades a cada ordenada .

Dominio restringido : [-2,3], Rango : [-6,3]

X	-2	-1	0	1	2	3
Y	-6	-1	2	3	2	-1

TABLA 8

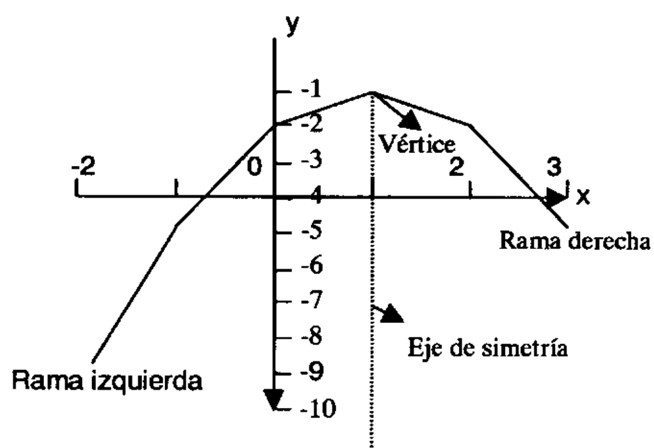


GRÁFICO 20

La función es creciente en el intervalo en el intervalo $(-\infty,1)$ y decreciente en el intervalo $(1,\infty)$.

La función alcanza su máximo en el punto, $x - 1 = 0$, ó $x = 1$, $y_{max} = 3$

La función alcanza un mínimo en el punto $x = -2$, $y_{min} = -6$

No. 13 Apliquemos el esbozo teórico expuesto en los numerales para hallar la altura máxima alcanzada por el proyectil que ha sido lanzado con una velocidad inicial V_0 que forma un ángulo θ con la horizontal. Recordemos que las ecuaciones paramétricas que rigen la cinemática de la partícula son:

$$x = V_0 \cos\theta\, t$$

$$y = V_0 \,sen\, \theta\, t - (1/2) g t^2$$

al eliminar el parámetro *t* se obtiene la función de segundo grado

$$y = f(x) = -\frac{g}{2V_0^2 \cos^2\theta}\left(x - \frac{\mathrm{sen}\theta . \cos\theta}{g} V_0^2\right)^2 + \frac{\mathrm{sen}^2\theta}{2g} V_0^2$$

para la cual la ordenada máxima es :

$$y_{max} = \frac{\mathrm{sen}^2}{2g}\theta . V_0^2$$

obtenida a partir de :

$$x_m = \frac{\mathrm{sen}\theta \cos\theta}{g} V_0^2$$

en razón de la simetría, el alcance logrado por el proyectil al tocar la superficie viene dado por:

$$2x_m = R = 2\frac{\mathrm{sen}\theta \cos\theta}{g} V_0^2$$

Este sería un buen momento para contrastar en el aula de clase la idea analítica involucradas con la idea física ¿Cómo combinar los dos aspectos?

No. 14 . Veamos a continuación el planteamiento que exige el problema de la ventana enunciado en el punto 4 de la introducción.

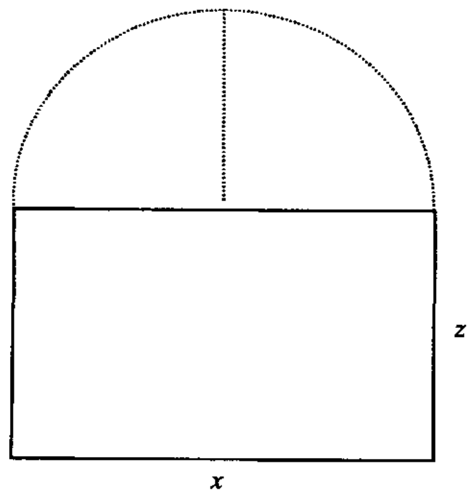


GRAFICO 21

Sean x y z las dimensiones del rectángulo. Resulta claro que la cantidad máxima del luz corresponde al área máxima limitada por el contorno. Por tanto,

Area total = área del rectángulo mas área del semicírculo

$$A = x\,z + (1/2)\,\pi\,(x/2)^2$$

$$= x\,z + \pi\,x^2/8 \qquad (1)$$

Además,

$$2z + x + \pi\,(x/2) = P \qquad (2)$$

Al sustituir la ecuación (2) en la (1) se obtiene una función cuadrática en la variable x. Se pide al lector completar los detalles

BIBLIOGRAFÍA

NATHANSON I. Problemas elementales de máximos y mínimos. Editorial Mir, Moscú, 1975.