UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

DISEÑO DE UNA METODOLOGÍA DE OPTIMIZACIÓN PARA LOS INDICADORES DE COSTO, DURACIÓN Y VIDA MEDIA DE UN PORTAFOLIO DE DEUDA

MARCOS ALEXIS HINCAPIÉ CIFUENTES

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MEDELLÍN
FACULTAD DE MINAS
ESCUELA INGENIERÍA DE LA ORGANIZACIÓN

MEDELLÍN
2011

DISEÑO DE UNA METODOLOGÍA DE OPTIMIZACIÓN PARA LOS INDICADORES DE COSTO, DURACIÓN Y VIDA MEDIA DE UN PORTAFOLIO DE DEUDA

MARCOS ALEXIS HINCAPIÉ CIFUENTES

Trabajo Final de Grado Maestría en Ingeniería Administrativa

Asesor:
Patricia Jaramillo Álvarez, Ph.D

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MEDELLÍN
FACULTAD DE MINAS
ESCUELA INGENIERÍA DE LA ORGANIZACIÓN
MEDELLÍN
2011

Resumen

Dentro del proceso de financiamiento y administración de un portafolio de deuda, las compañías del sector real (público y privado) utilizan ciertas métricas de control y gestión sobre dicho portafolio que les permite reconocer, dimensionar y justificar un determinado nivel de endeudamiento. Aunque estos indicadores son calculados por las empresas bajo diferentes metodologías financieras, ofreciendo un valor que diagnostica el estado de su portafolio, actualmente no cuentan con un valor referente de cada uno de ellos; ya sea a partir de registros o trabajo empíricos o bajo metodologías cuantitativas con las cuales las compañías puedan tomar decisiones basados en valores referentes "óptimos" como objetivo en el proceso de gestión de pasivos financieros.

Con el fin de ayudar al desarrollo y posterior solución a la necesidad que se plantea, se lleva a cabo el análisis metodológico de las actuales aplicaciones de simulación y optimización en el área financiera y se propone y aplica una metodología matemática que combina simultáneamente el uso de estas técnicas dentro de un portafolio de pasivos. De este modo se logra acceder a una metodología cuantitativa, de uso general, que permite obtener referentes de indicadores para el análisis y toma de decisión sobre un proceso de financiamiento y administración de la deuda de una compañía.

Palabras Claves: Duración, vida media, costo de deuda, simulación, optimización, Metaheurística, algoritmo multiobjetivo

Abstract

Within the process of financing and managing a debt portfolio, real sector companies (public and private) use certain metrics and management control over their portfolio, which enables them to recognize, measure and justify a given level of indebtedness. And although these indicators are calculated by different companies under financial methodologies and provide values in the state of its portfolio, now is not known a reference on each of them, either from empirical work records or quantitative methodologies or under the which companies can make decisions based on values concerning "optimum" as an objective in the management process in financial liabilities.

In order to assist into the development and subsequent solution for the referenced need, a methodological analysis of the current applications of simulation and optimization in the financial area is carried out; also a mathematical methodology that combines simultaneously the mentioned techniques within a portfolio of liabilities is proposed and applied. As a consequence, the lecturer can access to a general quantitative methodology that allows him obtaining reference points in the analysis and decision making process for a company's debt financing management.

Key Words: Duration, average life, cost of debt, simulation, optimization, Metaheuristic, multi-objective algorithm

Contenido

Pág.

Lista de tablas

Pág.

Lista de gráficos

Introducción

En el transcurso de la actividad comercial, las compañías recurren a medir su gestión financiera a través del cálculo de métricas o razones, que les van indicando, con el paso del tiempo, cómo ha sido el desempeño financiero; aún más, basados en ellos se toman decisiones relevantes y de afectación futura sobre los resultados de las empresas. Estos indicadores se tornan de gran importancia al momento de estructurar la ruta financiera y estratégica y son el soporte para la toma de medidas administrativas, compra y venta de empresas, calificación de riesgo de crédito y la adquisición de recursos financieros que permitan alcanzar los objetivos mencionados anteriormente.

Debido a lo anterior muchas compañías, cada una de ellas bajo su propia estructura financiera y administrativa, seleccionan las métricas y sus referentes más convenientes para su gestión y aunque no existen valores referentes óptimos "a priori", ya que cada razón se relaciona a las actividades del negocio, a la planificación, a los objetivos y hasta a la evolución de la economía, el mercado en general a definido (de manera empírica o matemáticamente) unos límites y *referenciamientos* para la gran mayoría de ellos.

Estos límites son generados como análisis expost de la actividad de consecución de recursos financieros, que a su vez son obtenidos con el fin de llevar a cabo los planes de inversión de las compañías recurriendo a algún tipo de fondeo; ya sea a través de fuentes de endeudamiento o mediante capitalización por parte de los socios; la combinación de ambos mecanismos de financiación permitirá que la compañía maneje su estructura de capital deuda/equity más óptima.

Una vez la empresa ha determinado cuál es su estructura de capital objetivo a partir del nivel actual o proyectado de inversiones, comienza su carrera por adquirir recursos financieros a través de diferentes fuentes, tales como bancos comerciales locales o internacionales, banca multilateral, mercado de capitales interno o externo y hasta créditos entre empresas del mismo grupo económico, si existieran.

La consecución de este endeudamiento se contrata bajo determinadas características o condiciones financieras aplicables hasta la finalización del fondeo, tales como tasa de interés y tasa de cambio, y que de algún modo, serán las generadoras de incertidumbre cada vez que la compañía se vea enfrentada al pago del servicio de deuda de los créditos y a las condiciones de mercado de ese momento. Dentro de los principales riesgos que la compañía enfrentará a partir de la adquisición y administración de un portafolio de deuda se encuentran los riesgos de mercado, riesgos de crédito y riesgos de liquidez.

Sin embargo, desde la perspectiva y procesos de financiamiento y administración de la deuda de algunas compañías (organismos estatales, empresas del sector público y privado) que gestionan sus portafolios, Ellas han desarrollado sus propias metodologías de cálculo de los indicadores de deuda e identifican la exposición a los mismos, pero son sólo utilizados, dentro de sus análisis de endeudamiento, bajo un enfoque meramente informativo y sus resultados simplemente les representan una tendencia de cambio en el comportamiento del portafolio de deuda.

Así, estos indicadores no cumplen su verdadera función de apoyo a la toma de decisiones relacionadas con el nivel de endeudamiento *óptimo* por plazo, fuente, moneda y costo y no se cuenta con un dato o rango óptimo de aceptación sobre cada uno de los indicadores de gestión del portafolio de deuda; dato o rango objetivo, que permita tomar decisiones de financiamiento con base en resultados obtenidos a partir de metodologías cuantitativas, dejando a un lado la subjetividad. Además, ocurre obsolescencia o no se usa la debida rigurosidad matemática de algunas metodologías y ratios de optimización, que podría llevar a generar resultados vagos, llevando a vacíos y cuestionamientos en la construcción de los portafolios.

Adicional a las anteriores dificultades, se le suma el escenario probabilístico y de incertidumbre generado por las variables asociadas a los indicadores de medición de un portafolio de deuda; tales como tasas de interés y de cambio, que conllevan a que el trabajo de optimización se desarrolle bajo un ambiente de incertidumbre.

Por otro lado y asociado al proceso de optimización, el sistema se deberá enfrentar a no solo un único resultado de un indicador del portafolio; sino que deberá buscar una optimización para varios indicadores de deuda, cada uno de ellos con una visión y características empresariales diferentes; con los cuales se espera generar resultados más holísticos y bajo un completo y verdadero reflejo de los objetivos de endeudamiento de las compañías. Todo lo anterior, hará más complejo el proceso de búsqueda de un escenario óptimo del portafolio; ya que se requerirá acudir a una optimización tipo multiatributo.

Bajo esta situación e identificada la necesidad de contar con referentes en los indicadores de deuda que contribuyan a la optimización de portafolios de endeudamiento de empresas del sector real, se pretende explorar algunas de las principales metodologías de optimización, que permitan llevar a cabo el desarrollo de una herramienta metodológica para el referenciamiento de los indicadores dentro de estos portafolios.

Glosario

COBERTURA NATURAL EN UN ESTADO FINANCIERO: se dice que existe una cobertura natural en un estado financiero cuando el riesgo generado por variables exógenas o endógenas a éste último se ve disminuido por la presencia de un equilibrio en tasa de cambio e interés a los cuales se encuentran indexados los ingresos y egresos.

COSTO DE DEUDA: tasa efectiva que una compañía paga por su deuda actual.

DURACIÓN: plazo promedio ponderado del vencimiento o pago de capital e intereses de una obligación financiera.

GESTIÓN DE ACTIVOS Y PASIVOS: es un conjunto de técnicas y procedimientos que ayudan en la correcta toma de decisiones de inversión y financiación en la empresa, teniendo en cuenta las relaciones existentes entre los distintos componentes del balance de una empresa.

HEURÍSTICAS: es un tipo de algoritmos que permite alcanzar soluciones factibles, que aunque no llegan a un valor óptimo de la función objetivo, permiten acercarse a ésta en un tiempo de ejecución aceptable.

ÍNDICE DE SHARPE: conocido como *Ratio de Sharpe* se utiliza en la literatura financiera para demostrar cómo se compensa el rendimiento de una inversión por asumir determinado riesgo.

METAHEURÍSTICA: es una estrategia de alto nivel que guía a otras heurísticas para buscar soluciones factibles en dominios donde la tarea es compleja.

PERFIL DE VENCIMIENTOS: programación de pagos del servicio de deuda (pago de intereses y/o amortizaciones) de un portafolio de deuda de una compañía.

PORTAFOLIO DE DEUDA: conjunto de obligaciones, con características financieras diferentes en tasa de interés, monto, fecha de firma, vencimiento y pago de capital.

RIESGO DE CRÉDITO: posible pérdida que asume un agente económico como consecuencia del incumplimiento de las obligaciones contractuales que incumben a las contrapartes con las que se relaciona.

RIESGO DE LIQUIDEZ O DE FINANCIACIÓN: se refiere al hecho de que una de las partes de un contrato financiero no pueda obtener la liquidez necesaria para asumir sus obligaciones a pesar de disponer de los activos —que no puede vender con la suficiente rapidez y al precio adecuado— y la voluntad de hacerlo.

RIESGO DE MERCADO: pérdida que puede presentar un portafolio, un activo o un título en particular, originada por cambios y/o movimientos adversos en los factores de riesgo que afectan su precio o valor final, por ejemplo: las tasas de interés o el tipo de cambio.

VIDA MEDIA: plazo promedio ponderado del vencimiento o pago del principal de una obligación financiera.

Capítulo 1

Objetivo principal:

Desarrollar y aplicar una metodología de optimización de portafolio de pasivos financieros, que permita obtener referentes para los indicadores de un portafolio de deuda de una organización.

Objetivos específicos:

Para permitir que el anterior objetivo se lleve a cabo, el estudio se apoya en el desarrollo de los siguientes objetivos específicos:

- Evaluar las actuales metodologías de optimización de portafolios, con el fin de caracterizar el marco de evaluación, selección y posterior aplicación de la mejor opción sobre el portafolio de deuda.
- Generar una herramienta de análisis de riesgo de financiamiento dentro de la gestión de activos y pasivos de las compañías, para mejorar el actual perfil de riesgo en sus tres estados financieros (Estado de Resultado, Balance y Caja), mediante la conservación de estructuras óptimas de endeudamiento y la posterior generación de coberturas naturales.
- Proporcionar valores referentes para los indicadores de un portafolio de deuda; que permitan generar una base de medición y comparación en su estado actual y a su vez aporten en la toma de decisiones para un posterior endeudamiento conservando la estructura objetivo; a través del cumplimiento de sus indicadores referentes.

Con el fin de desarrollar y dar respuesta al objetivo del presente trabajo, se presenta el siguiente esquema:

El primer capítulo contiene los antecedentes, con los cuales se busca poner en contexto al lector de los más recientes análisis e investigaciones sobre el tema; además se incluye el marco teórico del trabajo, con el cual se genera un primer acercamiento y mejor entendimiento de los conceptos que posteriormente se plantean en el contenido.

En segundo lugar, se hace referencia al alcance del presente trabajo y en el cual se incluye la definición de la metodología que se llevará a cabo para optimizar los indicadores de un portafolio de deuda.

Finalmente, se propone una solución al problema mediante el uso del esquema, modelación y desarrollo matemático de modelos de optimización bajo incertidumbre, a través de casos hipotéticos de aplicación, análisis de los resultados, seguido de las conclusiones y trabajos futuros.

Capítulo 2. Antecedentes

2.1 FORMULACIÓN O DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

En la actualidad, muchos de los problemas de las áreas financieras se han basado en encontrar óptimos e interpretar soluciones con base en una gran cantidad de información que involucra muchos parámetros. Para ello se han utilizado algunos métodos clásicos de resolución de este tipo de problemas, mediante el uso de técnicas de optimización, como consecuencia del alto nivel de complejidad matemático o por el hecho de estar limitado en la capacidad de máquina. Uno de los ejemplos clásicos de optimización de portafolios está basado en la selección de la mejor opción de inversión para una cartera de activos, así como su administración que, con el paso del tiempo, se convierte en un problema tanto para el manejo de una buena cantidad de parámetros, como por la importancia económica que este representa para el inversionista.

Sin embargo, a medida que avanza el análisis financiero de las compañías del sector financiero y real, y que se presentan los diversos problemas asociados con la propuesta y toma de decisiones en áreas más específicas, tales como la gestión y administración de la deuda, se hace necesario extrapolar el tipo de conocimiento aplicado y comprobado en temas netamente de activos a otro tipo de cuentas o áreas de las empresas, tales como el de financiamiento; ya que prácticamente se enfrentan a igual tipo de problemas y buscan de algún modo solucionarlos a través de técnicas similares de simulación y optimización.

En general, el problema de optimización se define como la búsqueda dentro de un espacio de soluciones de la que tenga el mayor o menor valor de una función que se pretende maximizar o minimizar, respectivamente. Para cualquier inversionista su meta es asignar óptimamente su portafolio con base en la asignación de activos existentes teniendo en cuenta que se debe minimizar el riesgo de perder su dinero ante la varianza en los precios de los activos.

2.1.1 Problema clásico de portafolios de activos.

2.1.1.1 Definición. El problema clásico de portafolios se refiere a buscar la canasta óptima de activos a invertir, que maximice los rendimientos y minimice, a su vez, los riesgos asociados.

La frontera eficiente de Markowitz de Media-Varianza (MV) es el modelo teórico clásico para la gestión de un portafolio de inversión. Este, de alguna manera, es la herramienta de eficiencia del mismo y en la actualidad se utiliza para la construcción de un portafolio óptimo y para la distribución de los activos que lo conforman; además, se considera la base de la ingeniería financiera del modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model) con el cual se trabaja la dicotomía entre los riesgos sistemáticos y de diversificación.

Markowitz desarrolla en su modelo el análisis de tres estadísticos básicos tales como la media, la varianza y la covarianza de las tasas de rendimiento de activos de un portafolio. La media representa los rendimientos, y la varianza y la covarianza, alternativamente, los riesgos asociados. El método permite llevar a cabo combinaciones de activos que cumplen simultáneamente con dos condiciones básicas, tales como, varianza mínima dentro de todas las combinaciones y el rendimiento esperado máximo dentro de este mismo conjunto de activos. De este modo las combinaciones que cumplen con las dos condiciones anteriores, se denominan portafolios eficientes y al conjunto de estos portafolios se les denomina frontera eficiente. Cada punto sobre la curva se dice que domina al resto de la nube de posibles respuestas. (Michaud, 1989).

Este modelo de frontera eficiente ha sido utilizado por más de 30 años como marco conceptual y de cálculo de portafolios eficientes y aún permanece como el método más efectivo dentro de la gestión de inversión de activos y como la herramienta más utilizada para llevar a cabo ejercicios de optimización dentro de las finanzas modernas.

2.1.1.2 Formulación. La siguiente es la formulación del problema de Markowitz, donde n representa el número de diferentes activos, $\boldsymbol{\mu_i}$ el retorno medio del activo $\mathbf{i}$ (obtenido a partir de datos históricos y suponiendo que éstos se repiten estadísticamente en el futuro), $\boldsymbol{\sigma_{ij}}$ es la covarianza de los retornos de los activos $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$, $\boldsymbol{\lambda} \in [0,1]$ es el parámetro de aversión al riesgo y $\mathbf{R_i}$ el retorno de los activos. La variable de decisión $\mathbf{x_i}$ representa la proporción de capital a ser invertido en el activo $\mathbf{i}$. Usando la notación de las anteriores variables, se puede representar el modelo estándar media-varianza para la selección de portafolios:

Minimizar

$$\lambda\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i\sigma_{ij}x_j\right] + (1-\lambda)\left[-\sum_{i=1}^{n} u_i x_i\right]$$

Sujeto a

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$0 \le x_i \le 1, \quad i = 1, \dots, n$$

Cuando $\lambda = 0$, se dice que hay una maximización del retorno del portafolio (sin considerar la varianza) y la solución óptima se formará sólo con el activo que tenga el mayor retorno. Cuando $\lambda = 1$, representa que se ha minimizado totalmente la varianza del portafolio (sin tener en cuenta los retornos medios) y la solución óptima estará enmarcada en varios activos. Cualquier valor de λ en el intervalo (0,1) representa el intercambio entre retorno medio y varianza generando una solución entre dos extremos $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$. (Fernández y Gómez, 2007).

2.1.1.3 Método de resolución. El modelo financiero de análisis Media-Varianza (MV), desarrollado por Markowitz en 1952, asume que el inversionista prefiere mayor retorno con mínimo riesgo. El modelo muestra cada portafolio como un punto en el plano $\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\sigma}$. La unión de estos puntos forman una hipérbola y dentro de ella se encontraría el resultado óptimo del portafolio.

Para encontrar el portafolio óptimo, el modelo utiliza superficies iso-media e iso-varianza. Una superficie iso-varianza es el conjunto de portafolios en el espacio $x_1 - x_2 - \cdots x_{n-1}$ que posee la misma varianza. De igual modo, una superficie iso-media es el conjunto de todos los portafolios en ese espacio que tienen el mismo retorno esperado.

El punto de tangencia entre las curvas iso-media e iso-varianza son, de hecho, la frontera del portafolio. Adicionalmente, el conjunto de estos portafolios frontera forman una hipérbola en el plano $\mu - \sigma$.

2.1.2 Otras propuestas al modelo clásico de portafolios. Los siguientes han sido los modelos que surgen como alternativos al modelo clásico de Markowitz, buscando eliminar o disminuir algunos problemas procedimentales, técnicos y teóricos que se encuentran en este modelo, entre los que se encuentran la capacidad computacional, la no linealidad de la varianza e ingreso de nuevas características a los sistemas de activos.

2.1.2.1 Modelo de Konno y Yamazaki. Un segundo modelo de portafolios es el desarrollado por Konno y Yamazaki (1991) y que es conocido como la segunda revolución en teoría de portafolios. La gran ventaja de este modelo es que resuelve la mayoría de las dificultades asociadas con el clásico modelo clásico de Markowitz, pero de igual forma conserva las ventajas relacionadas con los modelos de equilibrio. A parte del trabajo desarrollado para abstraer las dificultades presentadas por el modelo de optimización de Markowitz, los autores se enfocaron en minimizar el problema computacional asociado a problemas cuadráticos de gran envergadura que utilizaba una densa matriz de covarianza.

Para resolver la anterior dificultad en el proceso y otros problemas teóricos, los autores desarrollaron un método lineal de optimización de portafolios con base en funciones lineales de riesgo. Fue así como dentro de su nuevo modelo, trabajan el riesgo del portafolio como la desviación absoluta de la tasa de retorno de los activos en lugar de su varianza. Mediante esta transformación, el problema de optimización queda formulado como un problema de programación lineal.

Para llevar a cabo esto, Konno (1988) introdujo el modelo de riesgo L_1, el cual cuenta con la función de riesgo conocida como desviación absoluta L_1 y no la típica desviación estándar L_2 del retorno del portafolio. Tanto L_1 como L_2 llegarían a ser las mismas, si los retornos de los activos $(R_1, \dots, R_n)$ se asemejan a una distribución normal multivariada.

$$w(x) = E\left[\left|\sum_{j=1}^{n} R_j x_j - E\left[\sum_{j=1}^{n} R_j x_j\right]\right|\right]$$

Para este caso x_j representa la cantidad de dinero a ser invertido en un activo del total de dinero M_0.

Dentro del proceso de formulación del problema típico de optimización como un problema lineal, el autor postuló el siguiente teorema:

Teorema: Si $(R_1, \dots, R_n)$ poseen distribución normal multivariada, entonces.

$$w(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma(x).$$

Prueba: Sea $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ la media de $(R_1, \dots, R_n)$. También sea $(\sigma_{ij}) \in R^{nxn}$ la matriz de covarianza de $(R_1, \dots, R_n)$. Luego $\sum R_j x_j$ está normalmente distribuida (Rao, 1965) con media $\sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j$ y desviación estándar:

$$\sigma(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j}.$$

Por lo tanto,

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(x)} \int_{-\infty}^{\infty} |u| exp - \frac{u^2}{2\sigma^2(x)} du = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma(x)$$

El anterior teorema indica que minimizar $w(x)$ es equivalente a minimizar $\sigma(x)$ si $(R_1, \dots, R_n)$ poseen una distribución normal multivariada. A partir de esto, se genera el problema alternativo de minimización de riesgos L_1, donde ρ representa la tasa mínima de retorno requerida por el inversionista:

$$\text{Minimizar} \qquad w(x) = E\left[\left|\sum_{j=1}^{n} R_j x_j - E\left[\sum_{j=1}^{n} R_j x_j\right]\right|\right]$$

$$\text{Sujeto a} \qquad \sum_{j=1}^{n} E(R_j)x_j \geq \rho M_{0,}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = M_{0,}$$

$$0 \leq x_j \leq u_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Dentro de su demostración, los autores designaron a r_j como la realización de la variable aleatoria R_j durante el periodo t $(t = 1, \ldots, T)$, el cual se asume que puede ser hallada a partir de la información histórica o algún tipo de proyección. También se asume que el valor esperado de la variable aleatoria puede ser el promedio de la misma información. De este modo concluye en esta etapa que:

$$r_j = E[R_j] = \sum_{t=1}^{T} r_{jt}/T.$$

Luego, determina que $w(x)$ se puede aproximar como:

$$E\left[\left|\sum_{j=1}^{n} R_j x_j - E\left[\sum_{j=1}^{n} R_j x_j\right]\right|\right] = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left|\sum_{j=1}^{n}(r_{jt} - r_j)x_j\right|.$$

Y denota a: $a_{jt} = r_{jt} - r_j, \qquad j = 1, \ldots, n; \qquad t = 1, \ldots, T.$

Reescribiendo la anterior ecuación, los autores generan el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\text{Minimizar} \quad \sum_{t=1}^{T}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{jt}\, x_j\right| \Big/ T$$

$$\text{Sujeto a} \qquad \sum_{j=1}^{n} r_j x_j \geq \rho M_{0,}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = M_{0,}$$

$$0 \leq x_j \leq u_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Finalmente, los autores llegan a una transformación lineal del problema clásico de optimización de Markowitz bajo el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\text{Minimizar} \qquad \sum_{t=1}^{T} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{jt}\, x_j \right| \Big/ T$$

$$\text{Sujeto a} \qquad y_t + \sum_{j=1}^{n} a_{jt} x_j \geq 0, \qquad t = 1, \dots, T$$

$$y_t - \sum_{j=1}^{n} a_{jt} x_j \geq 0, \qquad t = 1, \dots, T$$

$$\sum_{j=1}^{n} r_j x_j \geq \rho M_{0,}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = M_{0,}$$

$$0 \leq x_j \leq u_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

2.1.2.2 Modelo de Cai. El tercer modelo proporciona una nueva regla de optimización de portafolios, conocido como Modelo Cai (2000). El objetivo de este modelo es minimizar el riesgo de manera individual, a través del uso de una solución analítica y el estudio completo de la frontera eficiente. Una de las principales características de este modelo es que no hace uso de la matriz de covarianzas como lo hace el de Markowitz. Por otro lado, el modelo de Cai no permite ventas en corto plazo de los activos, lo que genera que se obtenga una solución analítica simple, además que no considera las correlaciones de los mismos. En el modelo de Cai se minimiza la desviación esperada de los retornos futuros a partir de su media y mientras otros utilizan métodos lineales de programación, Cai proporciona una solución analítica.

Para la modelación, los autores introducen una nueva medida de riesgo. Asumen que el inversionista posee una riqueza inicial de dinero M_0, la cual será invertida en n posibles activos S_j, $j = 1, \dots, n$. Definen como R_j la tasa de retorno del activo S_j, lo cual es una variable aleatoria. Además determinan a $x_j \geq 0$ la asignación M_0 de la inversión en S_j. De esta forma definen una región factible del problema de optimización de portafolio como sigue:

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = M_0$$

$$x_j \geq 0$$

$$j = 1, \dots, n$$

Al igual que en el modelo de Konno y Yamazaki (1991), establecen una esperanza matemática E(R) de la variable aleatoria R.

$$r_j = E[R_j] \quad \text{y} \quad q_j = E[|R_j - r_j|]$$

r_j y q_j denotan la tasa de retorno esperado del activo S_j y la desviación absoluta esperada de R_j de su media, respectivamente.

A diferencia de la media de riesgo L_1 en Konno y Yamazaki (1991), los autores introducen una nueva función de riesgo llamada l_∞ y definida como:

$$w_\infty(x) = \max_{1\leq j\leq n} E\left(\left|R_j x_j - r_j x_j\right|\right)$$

Donde x pertenece a la región factible. Luego;

$$w_\infty = \max\nolimits_{1\leq j\leq n} E\left[\left|R_j - E(R_j)\right|\right] x_j = \max\nolimits_{1\leq j\leq n} q_j x_j.$$

Esta función es conocida si está dada la variable aleatoria R_j.

Los autores asumen que el inversionista desea maximizar el retorno esperado, al tiempo que busca minimizar el nivel de riesgo, generando un problema de optimización con dos criterios encontrados. Bajo la media de riesgo l_∞ definida más arriba, el problema de optimización de portafolio puede ser formulado como un programa lineal de dos criterios el cual es denominado como POL_∞ (de sus siglas en Inglés – Problema de Optimización de Portafolio bajo la métrica de riesgo l_∞); la cual es formulada como sigue (Cai, 2000):

$$\text{Minimizar}\left(\max_{1\leq j\leq n} q_j x_j, -\sum_{j=1}^{n} r_j x_j\right)$$

$$\text{Sujeto a } x \in \mathcal{F},$$

Donde un portafolio factible $x = (x_1, \dots, x_n)$ se dice que es eficiente si no existe otro portafolio $y = (y_1, \dots, y_n)$ perteneciente a la misma región factible tal que:

$$\max_{1 \le j \le n} q_j y_j \le \max_{1 \le j \le n} q_j x_j, \qquad \text{y} \qquad \sum_{j=1}^{n} r_j y_j \ge \sum_{j=1}^{n} r_j x_j,$$

Y por lo menos se debe de mantener una de las desigualdades; Así, el valor que resulte de la función $\left(\max_{1 \le j \le n} q_j x_j, -\sum_{j=1}^{n} r_j x_j\right)$ se convierte en un punto eficiente para la frontera (Cai, 2000).

2.1.2.3 Modelo de Teo. El cuarto modelo de optimización, conocido como Teo (Fernández, 2008), cuenta con una nueva función de riesgo denominada $\mathbf{H}_\infty^\mathbf{T}(\mathbf{x})$ la cual es una extensión del modelo de Cai y definida como sigue:

$$H_\infty^T(x) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \max_{1 \le j \le n} E\left|R_{jt} x_j - r_{jt} x_j\right|$$

Donde, nuevamente se define a R_{it} como tasa de retorno de un activo y r_{it} la tasa de retorno esperado en los períodos de tiempo t. Para cada periodo se calcula la desviación absoluta individual con respecto al valor esperado en ese periodo. El riesgo total del portafolio es el promedio de los máximos de las desviaciones absolutas individuales de todos los activos en todos los periodos pasados. Este modelo puede ser transformado en uno de tipo lineal como ocurre en Konno y Yamazaki (1991) y Cai (2000).

Sin embargo, este modelo puede verse limitado por el número de activos y de los periodos, generando que el proceso de optimización lleve bastante tiempo (Fernández, 2008).

2.1.2.4 Modelo Alternativo de Konno. El quinto modelo de optimización, Modelo Alternativo de Konno, detallado en Fernandez (2008), toma como base los supuestos estándar del modelo clásico, pero optimiza una combinación lineal del retorno esperado del portafolio y la transformación lineal de la desviación semi-absoluta del mismo. Además, se trabaja con el parámetro λ que permite explorar detalladamente el rendimiento promedio del portafolio de activos. La optimización se lleva a cabo con valores de λ entre 0.05 y 1, incrementando en 0.05 su valor en cada paso.

La formulación de este modelo se muestra a continuación:

$$\text{Minimizar} \qquad -\sum_{j=1}^{n} r_j x_j + \lambda \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} y_t$$

$$\text{Sujeto a} \qquad y_t \geq \sum_{j=1}^{n} (r_{jt-} r_j) x_j, \qquad t = 1, \dots, T$$

$$y_t \geq -\sum_{j=1}^{n} (r_{jt-} r_j) x_j, \qquad t = 1, \dots, T$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = M_{0,}$$

$$0 \leq x_j \leq u_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$$

2.1.2.5 Modelo con Restricción Estocástica. Existe un sexto modelo llamado con Restricción de Denominación Estocástica desarrollado por Dentcheva y Ruszczynski (2003 y 2004), "el cual consiste en comparar uno a uno las variables aleatorias que se determinan de los retornos utilizando funciones de rendimientos construidas a partir de sus funciones de distribución de probabilidad" (Fernández, 2008).

Al problema de optimización de portafolio se le adiciona otro relacionado con la tasa de retorno que domina estocásticamente a la tasa de retorno de referencia. En este modelo se identifican las funciones de probabilidad de los rendimientos, las cuales corresponden a las restricciones dominantes. Al maximizar la tasa de retorno esperada modificada por estas funciones de probabilidad, se garantiza que la tasa de retorno del portafolio óptimo dominará a la tasa de retorno de referencia.

Este enfoque posee una ventaja fundamental sobre los modelos de media-varianza y sobre los que utilizan funciones de probabilidad. La primera ventaja es que se cuenta con todos los datos para llevar a cabo los análisis estocásticos y en segundo lugar, bajo este modelo se utiliza como punto de partida los resultados de un referenciamiento que genera la función de probabilidad.

La primera condición es que el modelo dispone de un referenciamiento para la tasa de retorno *Y* con un valor esperado finito. El cual puede tener la forma de $Y = R(\bar{z})$, para algún portafolio referente $\bar{z}$. Los autores pretenden obtener la tasa de retorno del nuevo portafolio, $R(x)$ preferiblemente sobre *Y*. por lo tanto se introduce el siguiente problema de optimización (Dentcheva y Ruszczynski, 2003 y 2004):

$$\begin{aligned} max \quad & f(x) \\ \text{sujeta a} \quad & R(x) \succcurlyeq_{(2)} Y \\ & x \in X \end{aligned}$$

Donde $f: \mathrm{X} \rightarrow \mathbb{R}$ representa una función continua cóncava. Se define $f(x) = E[R(x)]$

Ya que se está bajo la presencia de restricciones dominantes, la formulación no llevará a una solución trivial. Bajo este supuesto se puede observar la primera ventaja de la formulación y es que se encuentra disponible toda la información.

Dentro del proceso de búsqueda de la fórmula de optimalidad, los autores asumen que las distribuciones de probabilidad de los retornos del referenciamiento *Y* son discretas. También asumen que las realizaciones de *Y* están ordenadas: $y_1 < y_2 < \cdots < y_m$. Y las probabilidades de las realizaciones están denotadas por $\pi_i, i = 1, \ldots, m$ (Dentcheva y Ruszczynski, 2003 y 2004).

Se define $\mathcal{U}$ como el conjunto de funciones $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaciendo las siguientes condiciones:
$u(.)$ es cóncava y no decreciente;
$u(.)$ es lineal con puntos de inflexión $y_i,\ i = 1, \ldots, m$;
$u(t) = 0$ para todo $t \geq y_m$.

Dado lo anterior, los autores generan la conclusión que $\mathcal{U}$ es un cono convexo.
Y definen el Lagrangiano de (1) y (2), $L: \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, como sigue:

$$L(x, u) = f(x) + E\big[u\big(R(x)\big)\big] - E[u(Y)].$$

Bajo el siguiente teorema los autores definen una prueba directa para el caso de optimización de portafolios con distribuciones discretas conjuntas (Dentcheva y Ruszczynski, 2003 y 2004).

Teorema. Si $\hat{x}$ es una solución óptima de $f(x)$, por lo tanto existe una función $\hat{u} \in \mathcal{U}$ tal que:

$$L(\hat{x}, \hat{u}) = \max_{x \in X} L(x, \hat{u})$$

y

$$E\left[\hat{u}\left(R(\hat{x})\right)\right] = E[\hat{u}(Y)]$$

De igual modo, si para alguna función $\hat{u} \in \mathcal{U}$ una solución óptima $\hat{x}$ de $L(\hat{x}, \hat{u}) = \max_{x \in X} L(x, \hat{u})$ satisface $R(x) \succcurlyeq_{(2)} Y$ y $E\left[\hat{u}\left(R(\hat{x})\right)\right] = E[\hat{u}(Y)]$, entonces $\hat{x}$ es una solución óptima de $f(x)$

2.1.2.6 Aplicaciones de las metodologías de optimización a las finanzas. A partir del refinamiento y consideración de nuevas restricciones financieras para el tradicional portafolio de activos, nuevas investigaciones han surgido, en las cuales se abarcan espectros más completos de estas técnicas matemáticas. Es así como se han incluido y combinado estructuras de las finanzas corporativas, estadísticas y nuevos procedimientos matemáticos de optimización.

2.1.2.6.1 Aplicaciones basadas en formulación del modelo. Trabajos como el de Gaivoronski, Krylov y Van der Wijst (2004), aportaron al análisis de selección de portafolios el uso de un referenciamiento de mercado. Para alcanzar este objetivo desarrollaron algoritmos de selección de portafolios basados en percepción de riesgo y medidas objetivo, que van desde la tradicional varianza hasta el Valor en Riesgo - VaR. Estos modelos contemplaron el rebalanceo de un portafolio óptimo a través del arbitraje de costos de transacción y la información que proviene de condiciones de mercado.

En su trabajo, Shin (2006) determinó que la estructura de maduración óptima implícita de emisiones de deuda de capital es invariante en tiempo y estado al hacer diferentes ejercicios de emisión de bonos con diferentes momentos de maduración, lo que es correcto y usual que suceda dentro de la gestión de portafolios de emisores y en especial de gobiernos. En su trabajo, Shin desarrolló un modelo de optimización a través del uso de asignaciones Ramsey (Ramsey, 1927), lo que le permitió implementar su concepto en una gestión activa de estructura de vencimientos. Para ello, utilizó un ejemplo numérico con los gastos del gobierno Británico durante el siglo 18.

Frijns et al (2006) analizaron los conceptos tradicionales y de comportamiento de un portafolio a través de un simple experimento de evaluación de la importancia relativa de cada factor, tanto de manera individual, como de manera conjunta sobre cada determinante de la selección de portafolios. Además, evaluaron varias hipótesis a partir de tres modelos de selección de los mismos. En su trabajo, los autores llevaron a cabo un nuevo análisis de lo desarrollado por Markowitz (1952) y para ello extrapolaron los conceptos básicos teóricos a variables socio-demográficas. Se utilizaron los modelos multinomiales logit. A partir de los resultados obtenidos, logran demostrar que los factores determinantes en la selección de portafolios están relacionados con la edad, el género, la aversión al riesgo de los individuos, el sentimiento de mercado, la experiencia financiera y el nivel de tasa libre de riesgo.

A través de nuevas investigaciones se ha demostrado que asumir normalidad en la distribución de los retornos es algo erróneo. Debido a ello la utilización del clásico *índice de Sharpe* y sus subsecuentes trabajos han sufrido ciertos cuestionamientos para la construcción de portafolio óptimos. Con el fin de solucionar este problema, Farinelli et al (2007), desarrollaron un sistema de asignación de activos basado en un conjunto de nuevas métricas, tales como las métricas de ejecución de uno y dos lados, las cuales hacen uso de la optimización multiperiodo de portafolios. En primer lugar se evalúa la distribución de los retornos de los activos, posteriormente se lleva a cabo un rebalanceo de los pesos óptimos y finalmente se simula cada métrica. A través de este ejercicio se logró demostrar que sus indicadores poseen una robustez mayor a la presentada por los resultados con un *índice de Sharpe*.

Spreitzer y Reznik (2007) investigaron y calcularon la posible pérdida de un portafolio de bonos y acciones usando una construcción hipotética del mismo. Los autores buscaron combinar dentro de su portafolio una inversión cero riesgo, es decir, bonos y una inversión con alta volatilidad representada en acciones. La pérdida es medida por el llamado “menor momento parcial” de la tasa de retorno del portafolio. A partir de esta pérdida, se optimiza respecto a su propia pérdida. Los autores también estudiaron la optimización del portafolio cuando la pérdida es trasladada a una aseguradora.

2.1.2.6.2 Aplicaciones y soluciones basadas en Heurística y Metaheurística. En Crama y Schyns (2003) se trabajó un enfoque de Enfriamiento Simulado (SA) para la selección de portafolios de activos complejos. Su modelo combinó el problema de programación cuadrática entera del modelo de media varianza de Markowitz, con la técnica SA como solución a un problema que se encuentra bajo restricciones adicionales más realistas. Debido a que los algoritmos de optimización exacta enmarcados en Markowitz pueden llegar a ser computacionalmente difíciles de resolver, los autores se ven avocados a optimizar a través de nuevas técnicas heurísticas. Mediante experimentos computacionales se comprueba que es posible resolver este tipo de problemas con esa técnica.

En Fernández y Gómez (2007) se utilizó un método heurístico basado en redes neuronales con el fin de hallar una frontera eficiente asociada al problema de selección de portafolios de activos. Los autores consideran la generalización del método de Markowitz con sus restricciones en cardinalidad y límite y aunque anteriormente se han utilizado algunos métodos heurísticos basados en algoritmos genéticos, búsqueda tabú y enfriamiento simulado, en este trabajo se considera un modelo particular de redes neuronales, la Red Hopfield; el cual ha sido usado para resolver el problema de optimización y aplicado al problema de selección de portafolio. En este análisis se comparan los nuevos resultados con aquellos obtenidos con otros algoritmos heurísticos.

Como se ha dicho anteriormente, un problema estándar de la ingeniería financiera es la selección de portafolios de activos, el cual ha recibido bastante atención en las últimas décadas como consecuencia de la creciente demanda de este tipo de productos por parte de personas naturales y jurídicas. A pesar del adelanto en las técnicas de valoración y optimización de estos portafolios el modelo clásico de media-varianza de Markowitz (1952) aún se continúa utilizando. A pesar de ello, existen en el mundo suficientes limitaciones reales a dicho modelo que llevan a un espacio de búsqueda no convexo; por ejemplo restricciones en cardinalidad que limita el número de diferentes activos en un portafolio. Es así como utilizar un enfoque de eficiencia para problemas convexos podría no ser el más adecuado. Para ello investigaciones adelantadas por Branke, et al (2008) han propuesto tratar este tipo de problemas a través de la integración de un algoritmo de optimización para la selección de portafolio con un Algoritmo Evolutivo Multi-Objetivo (MOEA), lo que permitiría ofrecer un conjunto de soluciones convexas de posibles portafolios, solucionar un algoritmo crítico para cada conjunto y posteriormente integrar las soluciones parciales hasta formar la solución al problema no convexo original.

Anagnostopoulos y Mamanis (2009) formularon la solución a la selección de un portafolio como un problema de optimización tri-objetivo, a partir del arbitraje generado entre el riesgo, el retorno y el número de activos del portafolio. Debido a que los modelos de selección de portafolios integran variables de decisión mixtas y objetivos múltiples en la búsqueda de una frontera eficiente, se puede llegar a encontrar una buena aproximación de esta superficie mediante posibles intercambios entre los objetivos con limitado tiempo computacional. Para llevar a cabo esto, los autores trabajaron con las técnicas de optimización multiobjetivo evolutivo, tales como NSGA-II, PESA y Algoritmos Evolutivos de Pareto Reforzado 2 (SPEA 2), mediante estas técnicas se puede resolver el problema de optimización multiobjetivo y proporcionar una métrica comparativa con otras Heurísticas o Metaheurísticas.

A través de la aplicación de un enfoque heurístico empleando Algoritmos Genéticos, Chang, Yang y Chang (2009) resolvieron problemas de optimización de diferentes indicadores de riesgos y compararon sus resultados con los provistos por modelos media-varianza de frontera eficiente restringida. Los autores demostraron que los problemas de optimización pueden ser resueltos mediante el uso de Algoritmos Genéticos si la media-varianza, semi-varianza, desviación absoluta y varianza con sesgo se usan como métricas de riesgo.

En Alexander y Baptista (2010) se demuestra que la gestión de portafolio de activos implica una minimización del monitoreo de error de varianza (TEV) para algún rendimiento esperado sobre un referenciamiento. Sin embargo, Roll (1992) demuestra que tales portafolios están suboptimizados ya que no pertenecen a la frontera media-varianza, llegando a ser de mayor riesgo. Para ello los autores proponen un método de reducción de esta ineficiencia de optimización, a través de la selección de un portafolio dentro del conjunto de los que poseen el mínimo TEV. Esta frontera de mínimos TEV alinea los objetivos de los directivos con la evaluación de sus resultados. Esto permite que se seleccionen portafolios menos riesgosos en términos de varianza.

2.1.3 Problema del portafolio de deuda. El problema de portafolio de deuda, de manera análoga al de un portafolio de activos, está basado en la búsqueda de óptimos; ya sea para un indicador de referencia o para seleccionar un conjunto óptimo de activos que generen la mayor rentabilidad respectivamente.

Lo que ocurre en un portafolio de deuda, a diferencia de uno de activos, es que se busca optimizar o hallar no sólo un único valor o conjunto de activos, sino que debe optimizar varios indicadores al tiempo (más de dos), haciendo más complejo el método matemático y la ejecución de máquina para llevar a cabo la optimización. En general la diferencia radica en las variables de decisión y de salida en ambos casos. Mientras en un portafolio de activos se busca optimizar en dos dimensiones el retorno vs. el riesgo; para un portafolio de pasivos se pueden ver incrementadas las variables de salidas representadas en costo, duración, vida media, entre otros. Por otro lado, en un portafolio de activos la variable de decisión estará representada en la ponderación de cada activo dentro del portafolio, en el portafolio de pasivos se contarán con variables de decisión tales como, monto, plazo, porcentaje de tasa de interés variable o fija, de tasa de cambio, moneda, etc.

La idea es encontrar indicadores óptimos de un portafolio de deuda que le permitan a las compañíás tomar decisiones más acertadas al momento de financiar sus proyectos o su flujo de caja, estas decisiones se tomarán basadas en la moneda, el índice de endeudamiento y el plazo de financiación en contraprestación a un menor costo de deuda. Este último será la variable de minimización al tratar de acceder a una fuente de recursos financieros por parte de la administración de una empresa. Toda vez que el costo representa en muchos casos el factor de acceso o rechazo a una de estas fuentes.

Dentro de los criterios que se buscan simular y optimizar en un portafolio de deuda se encuentran la maximización de la duración, la vida media del portafolio y la minimización del costo de deuda del mismo. Los indicadores y los mismos criterios de optimización –aunque pueden variar dependiendo de la necesidad de las compañías- han sido seleccionados como los más representativos dentro de la gestión y administración de la deuda en empresas del sector público y real con portafolios de endeudamiento considerables y que se han enfrentado a este mismo tipo de preguntas con el fin de alcanzar soluciones matemáticas a las mismas.

Desde el punto de vista de financiamiento y administración de la deuda de las empresas del sector real, pocos trabajos de investigación han desarrollado el sustento teórico y aplicativo de los métodos de optimización de indicadores a este tipo de área de las finanzas; sin embargo estudios tales como el llevado a cabo por Francesco Drudi y Giordano (2000) demuestran como las entidades estatales son uno de los organismos interesados en el control y gestión de su endeudamiento a partir del uso de modelos de optimización. En este artículo se analiza la relación que surge entre la duración de un portafolio de deuda y el incremento de las tasas de interés a las cuales se encuentra indexado el mismo; esto permitió reconocer dentro del estudio que un vencimiento óptimo, una mayor o menor vida media, se encuentran afectados por el riesgo inflacionario, mientras que la madurez del portafolio se amplia, a través del riesgo de incumplimiento.

Por otro lado y a partir de D’Mello y Miranda (2009) se logró determinar el rol que cumple la deuda de largo plazo y su influencia en las sobreinversiones como consecuencia de los patrones anormales en el proceso de inversión de las compañías y el nuevo endeudamiento que toman las empresas menos apalancadas. Cuando las empresas no cuentan con unos lineamientos de endeudamiento claros, sucede que pueden retener gran cantidad de caja antes de utilizar dicho endeudamiento. La introducción de nueva deuda conlleva a una dramática disminución de los niveles de caja como consecuencia del pago de servicio de deuda, lo que conlleva a que las firmas no puedan atraer nuevas oportunidad de inversión; pero por otro lado la sobreinversión puede llevar a un impacto positivo en el valor del patrimonio de la firma. Los autores concluyen que un cambio significativo en la estructura de capital proporciona una fuerte base para soportar la hipótesis que el endeudamiento reduce la sobreinversión.

Con base en el análisis del estado del arte, los estudios llevados a cabo en el tema de optimización y las mismas prácticas empresariales, se puede concluir que hasta el momento no se ha hallado un estudio y desarrollo formal del tema de optimización de los indicadores de endeudamiento. Situación que genera un punto de partida en el tratado e investigación de este tópico.

2.2 MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Dentro de los métodos y modelos matemáticos de optimización más utilizados y dependiendo de su nivel de aplicabilidad a las diferentes áreas del conocimiento, se pueden clasificar como se muestra a continuación:

2.2.1 Optimización exacta Vs. Metaheurística. Los métodos para resolver problemas de optimización se clasifican en exactos, los cuales garantizan encontrar el óptimo global; con la gran desventaja de ser ineficientes y limitados al momento de tratar la alta dimensionalidad. Dentro de estos se encuentra el algoritmo simplex y la enumeración completa.

Y recientemente se han desarrollado otros métodos de optimización llamados Heurísticos o Metaheurísticos, que son más flexibles y eficientes, pero sólo permiten aproximarse a los óptimos globales.

“Los procedimientos Metaheurísticos son una clase de métodos aproximados que están diseñados para resolver problemas difíciles de optimización combinatoria, en los que los heurísticos clásicos no son ni efectivos ni eficientes. Los Metaheurísticos proporcionan un marco general para crear nuevos algoritmos híbridos combinando diferentes conceptos derivados de: inteligencia artificial, evolución biológica y mecanismos estadísticos" (Osman y Nelly, 1995).

Aunque los Metaheurísticos están basados en principios de Inteligencia Artificial (IA), éstos no garantizan que se encuentre una solución óptima. Sin embargo a partir de la ejecución del proceso en un tiempo razonable se logra llegar a un óptimo cercano.

Los principales usos que se le dan a los Metaheurísticos para la solución de problemas se encuentran la selección de rutas y proyectos, problemas de expansión y control y principalmente problemas de optimización. Una de las principales ventajas de utilizar Metaheurísticos es que disminuye el tiempo computacional del proceso de búsqueda, al contrario de lo que sucede con métodos como los métodos exactos; además cuando se requiere un valor cercano al óptimo, cuando los datos no son fiables, cuando hay limitaciones de espacio y tiempo o cuando se requiere un paso intermedio en la solución de otro algoritmo, los Metaheurísticos son una de las posibilidades dentro de los procedimientos de búsqueda modernos.

Las dos estrategias de búsqueda que utiliza la Metaheurística para buscar óptimos son: la intensificación y la diversificación. La primera de ellas consiste en la exploración de las regiones que cuenten con la mayor probabilidad de solución y la segunda estrategia está relacionada con el rastreo de nuevas regiones aún no exploradas dentro del espacio de soluciones.

Dentro de los métodos Metaheurístcos de optimización más conocidos se encuentran los Algoritmos Genéticos (GA), el Enfriamiento Simulado (SA), la Búsqueda Tabú (TS) y Redes Neuronales.

Los Algoritmos Genéticos (GA) “son técnicas de búsqueda basada en la mecánica de selección natural y la genética” (Goldberg, 1989), de este modo, lo que pretenden es buscar, en el espacio de decisión, soluciones óptimas. Dentro de los procesos biológicos, la información hereditaria pasa de generación en generación a través de los cromosomas que son la fuente y contenido de la información, es decir los genes. En la naturaleza los organismos se agrupan formando poblaciones y aquellos que se logren adaptar serán los que cuenten con posibilidad de sobrevivir y continuar reproduciéndose. De este modo las buenas características se propagarán entre las generaciones futuras y las malas particularidades, desaparecerán genéticamente. De manera análoga y aplicada a una técnica de optimización, se buscará que el conjunto inicial de soluciones factibles converja a una única solución.

Por otro lado, se encuentra el Recocido Simulado (SA), la cual es la técnica de optimización basada en procedimientos termodinámicos de enfriamiento y que ha sido aplicado en la optimización mediante el proceso iterativo de algoritmos donde los estados del sistema son las soluciones al problema de optimización, la energía de los estados representarán sus costos y el estado fundamental es la solución óptima.

La Búsqueda Tabú (TS) es la búsqueda de óptimos por entornos que de acuerdo con Glover (1994), primer expositor de este término, lo define como “guía de un procedimiento de búsqueda local para explorar el espacio de soluciones más allá del óptimo local”. De manera general, es definido como una manera agresiva de selección mejorando los movimientos en cada paso y saliéndose de los óptimos locales.

Adicionalmente, la optimización a través de Redes Neuronales, surgió como análisis de comprensión del cerebro humano, representando un sistema de procesamiento de información de alta complejidad, no lineal y en paralelo. Aleksander y Moton (1990) definieron este proceso como “un procesador distribuido en paralelo que posee una propensión natural al almacenamiento…que recuerda al cerebro en dos aspectos: el conocimiento se adquiere mediante un proceso de aprendizaje y la conexión interneuronal se utiliza para el almacenamiento del conocimiento”. Es así como esta técnica pretende hallar óptimos, a través de una amplia capacidad de cálculo, generada por su propia estructura de procesamiento masivo y la habilidad de aprender.

2.2.2 Optimización bajo incertidumbre. La optimización bajo incertidumbre se clasifica en explícita e implícita. La primera de ellas hace uso de técnicas de optimización estocásticas y al contrario de la optimización determinística donde los parámetros del problema son conocidos, en ésta no se conocen los valores, sólo sus distribuciones, que por lo general son discretas.

Los modelos más comunes en optimización estocástica son los lineales, en primer lugar porque son los usados (más fácil de tratar) y en segundo lugar son los métodos de solución más eficientes y avanzados; sin embargo, dejan por fuera muchos problemas reales que no se pueden ajustar a la linealidad. También existen otros problemas de optimización estocástica llamados de restricción probabilística que incluye parámetros aleatorios.

Dentro de la optimización estocástica explícita se puede hacer uso de árboles de probabilidad con los cuales pueden ser esquematizados los diferentes estados que pueden tomar las variables aleatorias y los diferentes escenarios o caminos desde su raíz hasta sus ramas. El árbol de probabilidad es la forma natural y *explicita* de las decisiones estocásticas discretas.

Por otro lado, está la segunda clasificación de técnicas bajo incertidumbre, conocida como optimización implícita, la cual surge como alternativa cuando la resolución explícita para un número determinado de variables y su aleatoriedad son inviables. Es aquí cuando las técnicas de simulación combinadas con metodologías de optimización Metaheurística o por escenarios se hacen presentes.

"La simulación Monte Carlo es una técnica matemática computarizada que permite tener en cuenta el riesgo en el análisis cuantitativo y en la toma de decisiones. La simulación Monte Carlo realiza el análisis de riesgo con la creación de modelos de posibles resultados mediante la sustitución de un rango de valores —una distribución de probabilidad— para cualquier factor con incertidumbre inherente. Luego, calcula los resultados una y otra vez, cada vez usando un grupo diferente de valores aleatorios de las funciones de probabilidad. Dependiendo del número de incertidumbre y de los rangos especificados, para completar una simulación Monte Carlo puede ser necesario realizar miles o decenas de miles de recálculos. La simulación Monte Carlo produce distribuciones de valores de los resultados posibles".[1]

la optimización implícita hace uso del mecanismo iterativo que proporciona la Simulación de Montecarlo, dentro del cual se prueban los valores de decisión y para cada uno de ellos se genera la simulación; paso seguido se selecciona la mejor opción de acuerdo con el criterio de incertidumbre elegido.

Actualmente la optimización implícita con simulación está incluida en algunos programas computacionales permitiendo cambiar las variables de decisión mediante Algoritmos Genéticos (GA) u otro tipo de Metaheurística y posteriormente hallando el conjunto de mejores resultados a partir de los valores de esas variables; es decir las que cumplan con la dicotomía de menor varianza y

[1] http://www.palisade-lta.com/risk/simulacion_monte_carlo.asp

la de mayor valor esperado. Por ejemplo el software @Risk® tiene los modulos Optimizer y Evolver para realizar esta tarea y Crystall Ball tiene el módulo OptQuest.

Es así que mediante el uso de esta técnica de optimización Metaheurística, sumado con el método de simulación de Montecarlo se podría abordar y desarrollar el objetivo principal de este trabajo, permitiendo disponer y aplicar una metodología de optimización de portafolio para obtener referentes de los indicadores de un portafolio de deuda en una organización.

El caso de estudio, portafolio de deuda, no se encuentra resuelto dentro del estado del arte; ya que la mayoría estas técnicas han sido desarrolladas para portafolios de activos, bajo determinadas características matemáticas y operativas que de cierto modo difieren al problema matemático, técnico y computacional que se pretende desarrollar aquí. Es así como se busca extrapolar estas técnicas computacionales a campos financieros de endeudamiento, que permita, de algún modo, cerrar el ciclo de evaluación de riesgos dentro de un análisis de activos y pasivos dentro de una organización.

2.2.3 Optimización con múltiples objetivos. El uso de herramientas haciendo uso del análisis multiobjetivo es algo ya tratado varias décadas para la selección de alternativas de manera conjunta.

Este análisis múltiple se ha reconocido como natural al momento de tomar decisiones, apartándose de las tradicionales búsquedas con dos objetivos. Debido a su complejo nivel computacional y matemático, se ha visto la necesidad de usar otro tipo de herramientas que permitan incluir múltiples objetivos en el proceso de toma de decisiones. Es así como aparecen los métodos de análisis multiobjetivo, los cuales permiten considerar objetivos de tipo económico, social, financiero, ambientales, técnicos y en los cuales se combinan expresiones cuantitativas y consideraciones cualitativas.

Un problema de múltiples objetivos se puede representar matemáticamente mediante un vector de p dimensiones, en donde cada dimensión representa una función objetivo, que a su vez es una función de, p objetvos Z_i así:

$$Z(x) = \left[Z_1(x), Z_2(x), \dots, Z_{P(}(x)\right]$$

Y cada uno de los objetivos es, a su vez, función del vector x de n variables de decisión.

Los métodos multiobjetivo han sido estudiados y desarrollados a lo largo de estos últimos 30 años, los cuales han pretendido hallar solución y estructuras de valoración diferentes a las económicas, además de buscar superar las limitaciones encontradas en ella. Las clasificaciones más utilizadas se encuentran las siguientes:

- La clasificación de Goicochea y otros (1982), basada en la clasificación efectuada por Cohon y Marks (1975), basada en la estructura de preferencias del decisor en el proceso de toma de decisiones.
- La clasificación de Goodman (1984), que clasifica los métodos de acuerdo con sus características más predominantes, es decir, métodos de programación matemática, estocásticos, de múltiples decisores, y otros métodos.
- La clasificación de Duckstein (1989), la cual clasifica los métodos teniendo en cuenta la formulación estructural básica de los algoritmos y la solución final deseada por el decisor.

Existen muchos métodos de análisis multiobjetivo; sin embargo, el más aplicado por su sencillez es el método de las ponderaciones, incluido en la clasificación de

Goicochea y otros (1982), con el que se integra en una sola función todas las funciones objetivo (normalizadas, es decir llevados a unidades adimensionales) sumadas de forma ponderada de acuerdo a unos pesos de importancia relativa que indican las preferencias del decisor respecto a los diferentes objetivos.

$$Max\ Z(x) = \left[w_1 Z_1(x) + w_2 Z_2(x) + \cdots + w_p Z_p(x)\right]$$

En donde w_o es el factor de ponderación asignado por el analista al objetivo o y $Z'_o(x)$ es el objetivo Z_o (x) normalizado

$$Max\ Z(x) = \left[w_1 Z'_1(x) + w_2 Z'_2(x) + \cdots + w_p Z'_p(x)\right]$$

Esta práctica se realiza con el fin de adimensionalizar todos los objetivos dados; ya que todas las Z_o suelen tener diferentes unidades. Los pesos deben cumplir la siguiente ecuación.

$$\sum_{o=1}^{q} w_o = 1$$

La normalización se aplica según la siguiente ecuación:

$$Z_o = \frac{Z_o(x, y) - Z_o^{peor}}{Z_o^{opt} - Z_o^{peor}}$$

Donde Z_o^{opt} es el mejor valor del objetivo o si se optimiza independientemente de los demás objetivos (punto utópico) y Z_o^{peor} es el peor valor del objetivo o (punto nadir), que se obtiene de elegir los peores valores para cada objetivo, al aplicar las soluciones óptimas independientes en todas las funciones objetivo. La optimización se puede llevar a cabo mediante el uso de un software específico.

Diferentes soluciones de la curva de Pareto pueden obtenerse al cambiar el juego de pesos. Por eso, cuando se obtiene la solución al problema, es necesario también realizar un análisis de sensibilidad al cambio de pesos, con el fin de garantizar la robustez del modelo.

Capítulo 3. Alcance y definición del problema de investigación

El alcance de este trabajo es desarrollar y aplicar una metodología que permita optimizar los indicadores de un portafolio de deuda de una compañía.

Para ello se plantea la siguiente pregunta de investigación; la cual genera el punto de partida en la búsqueda, desarrollo y solución de un problema de optimización en el área de financiamiento y deuda de una compañía del sector real.

¿Cuál sería el rango o métrica óptima de referencia de los principales indicadores de un portafolio de deuda de una empresa considerando la incertidumbre y buscando reflejar adecuadamente las características matemáticas y financieras del sistema, permitiendo, además a la empresa tomar decisiones apropiadas de endeudamiento?

El anterior planteamiento del problema está sustentado en que en la actualidad y de acuerdo con el referenciamiento obtenido en empresas del sector real y organismos estatales que gestionan portafolios de deuda, no cuentan con metodologías que permitan generar referentes óptimos de indicadores de deuda, que al mismo tiempo fomente una administración de portafolios basado en técnicas matemáticas más rigurosas.

Una vez analizado el estado del arte del capítulo anterior se pudo comprobar que el tema de optimización de indicadores para portafolios de deuda no se encuentra totalmente analizado o desarrollado para empresas o instituciones privadas o estatales de diferentes sectores y más aún se puede decir, que no ha sido analizado o aplicado por empresas con alto o mediano nivel de endeudamiento;

las cuales requieren más tarde que temprano acudir a sistemas matemáticos para la toma de decisiones relacionadas con su nivel óptimo de endeudamiento.La teoría de selección de portafolio mediante el uso de técnicas de optimización ha sido ampliamente estudiada y aplicada en diversos ambientes financieros, especialmente para instituciones financieras, las cuales buscan optimizar portafolios de activos; sin embargo y bajo el análisis investigativo llevado a cabo bajo diferentes fuentes de información, se considera que no se cuenta con estudios desarrollados en la aplicación de portafolios de deuda.

Varios referenciamientos de campo se llevaron a cabo en un área limitada a empresas estatales y del sector real, especialmente del sector de energía, las cuales cuentan con el mayor nivel de endeudamiento en Colombia y son las más susceptibles a utilizar algún tipo de indicador que les permita medir la gestión de sus portafolios de deuda.

De igual forma, en el análisis del estado del arte para el tema de gestión de portafolios en otras empresas y organismos estatales, especialmente gobiernos, ha demostrado que, aunque reconocen algunos indicadores de gestión de portafolios de deuda, en ellos no encuentran la herramienta matemáticamente correcta y sostenible en el tiempo de toma de decisiones de endeudamiento; esta se limita a señalar el estado del arte del mismo, sin permitir conocer el norte administrativo del tema.

El problema de investigación se pretende resolver, a través de la aplicación de simulación de Montecarlo, Algoritmos Genéticos (AG) y funciones multiobjetivos, lo cual genera una combinación simplificada y completa del sistema. En primer lugar, la simulación generará información de los estadísticos de cada indicador, además de sus posibles distribuciones, lo que permitirá responder preguntas como la probabilidad de exceder un costo de deuda, la vida media o una duración determinada. Además, como la simulación de Montecarlo permite combinar varias

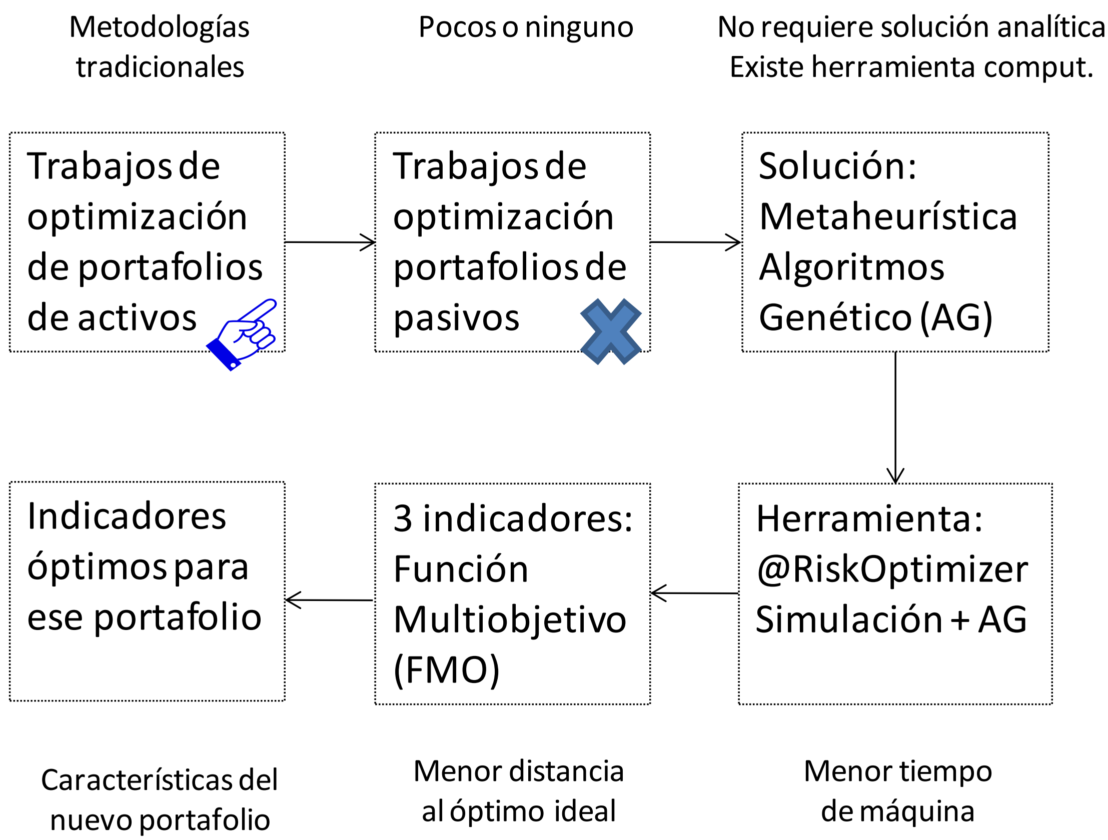
distribuciones de probabilidad, no hay necesidad de simplificar en una sola función el problema de simulación.
En segundo lugar, se busca resolver el problema de investigación, mediante la aplicación de Algoritmos Genéticos y aunque son ampliamente utilizados en estudios previos para portafolios de activos, el aporte en el trabajo se basa en que combinado con la simulación, se resuelve el problema computacional generado de la utilización de los modelos clásicos de optimización de estocasticidad explícita; aquí se resuelve mediantes técnica implícitas de estocasticidad (simulación) más Algoritmos Genéticos, sin necesidad de simplificaciones, ni operaciones matemáticas complejas.

Este proceso se lleva a cabo mediante el uso de una herramienta computacional conocida como @RiskOptimizer®, el cual incluye dentro de su programación la simulación y el método de optimización a partir de Algoritmos Genéticos, lo que permitirá dar una solución práctica y segura al problema planteado.

Y en tercer lugar, al utilizar más de dos indicadores a optimizar (@RiskOptimizer® sólo permite un solo objetivo), nos enfrentamos con una optimización multiobjetivo, que para un portafolio de activos, se ve reducido a uno. Dentro de este trabajo, se resuelve a partir de técnicas de análisis multiobjetivo.

A continuación se muestra esquemáticamente el proceso del desarrollo metodológico expresado anteriormente.

Figura 1. Desarrollo metodológico del proyecto de investigación.



La metodología de investigación de este trabajo está sustentada en el siguiente procedimiento:

a. La búsqueda bibliográfica para el desarrollo y condensación del marco conceptual y estado del arte en el área de optimización de portafolios, requirió de la selección de artículos científicos en las bases de datos mundial; con el fin de hallar el mejor y más reciente desarrollo investigativo en el campo de la optimización de portafolios.

El proceso de búsqueda de la información bibliográfica requirió del filtrado de artículos que estuvieran directamente enfocados en propuestas investigativas con los más recientes métodos de simulación y optimización en las diferentes áreas de las finanzas; tales como portafolios de inversión de activos financieros, gestión del riesgo en portafolios de deuda, estructuras de capital y su respectiva solución a través del estudio y posterior aplicación de herramientas de optimización Metaheurística entre otros.

b. investigación de campo: a través de la visita y continuo contacto con empresas del sector real, lo cual permita tener un acercamiento en el manejo de sus portafolios de pasivos financiero y la manera de gestionarlos.

c. identificación de indicadores a optimizar: definición clara de las salidas a optimizar; a partir del estudio documental y de campo realizado. Esto permitirá obtener una muestra de indicadores base que sean el resultado de una sinergia entre la búsqueda bibliográfica y la necesidad presentada por las compañías que gestionan el portafolio de endeudamiento.

d. identificación y modelamiento de variables de entrada al modelo de proyecciones: todo modelo financiero sobre el cual se lleva a cabo el proceso de optimización, contiene variables probabilísticas, tales como las variables macroeconómicas que afectan directamente el comportamiento futuro del portafolio de deuda. De este modo se requerirá modelar a través de una metodología matemática el comportamiento futuro de las mismas.

e. Modelación del sistema a simular. Mediante la creación de un portafolio de deuda, bajo las condiciones macroeconómica y financieras adecuadas para generar un modelo hipotético de portafolio de deuda y sobre el cual se va a simular y optimizar los indicadores de deuda.

f. selección de la metodología de optimización: llevar a cabo el proceso de optimización mediante la aplicación de la metodología más ajustada y generar las salidas óptimas para los indicadores de deuda.

g. Selección del portafolio de deuda óptimo (en tasas de cambio, fuentes de financiación y tasas de interés) a partir del ejercicio de optimización anterior y la aplicación de la teoría de selección de portafolios.

Capítulo 4. Modelo propuesto

En los siguientes tres capítulos se lleva a cabo el desarrollo metodológico de optimización de los indicadores de un portafolio de deuda a partir del uso de técnicas de simulación, combinada con Algoritmos Genético y funciones multiobjetivo. Trabajo que resuelve de manera conjunta dificultades que se presentan en la utilización aislada de las técnicas de optimización clásica.

Es así, que mediante el uso de simulación se resuelve la necesidad de volver analíticas las funciones de distribución, lo que exigiría simplificarlas, hacer supuestos de normalidad, de independencia, etc. A través de la utilización de Algoritmos Genéticos, se resuelve la dificultad de optimizar funciones no lineales complejas, además de la facultad que tienen para entablar comunicación teórica y computacional con un modelo de simulación. Y finalmente, con la aplicación de Análisis Multiobjetivo se genera un método formal en el tratamiento de múltiples objetivos en conflicto, como consecuencia de la optimización de tres indicadores de deuda dimensionalmente diferentes.

4.1 MODELO DE SIMULACIÓN

Para el desarrollo del trabajo de simulación se utilizó un archivo en Microsoft Excel y la respectiva simulación y el método de optimización se desarrolló en RiskOptimizer®

Las variables que utiliza el sistema dentro del proceso de generación de escenarios, simulación y optimización son las siguientes:

4.1.1 Variables de decisión. Para este sistema se encuentran las variables de decisión como la fecha de evaluación, el monto del desembolso del crédito, el perfil de amortización, la denominación de la tasa de interés y su margen, periodicidad del pago de interés. Datos que para la simulación se ingresarán de manera discrecional por parte de la empresa.

4.1.2 Variables inciertas. Corresponde a la variables macroeconómicas, tales como el IPC (Índice de Precios al Consumidor), DTF (Tasa de Depósito a Término Fijo), Libor (Tasa Interbancaria de Londres), TRM (Tasa Representativa del Mercado).

Éstas variables son el elemento probabilístico del modelo y le permitirán generar escenarios de incertidumbre al mismo.

Las anteriores variables macroeconómicas son las representativas de un portafolio de deuda en una compañía colombiana. De este modo, se deja indicado que el trabajo estará limitado y ejemplificado a este escenario macro. Sin embargo cabe aclarar que el modelo podrá ser aplicado a diferentes empresas localizadas en distintas zonas geográficas del mundo. Bastará con ajustarlo a las variables macroeconómicas que la empresa utilice dentro de su portafolio de deuda.

4.1.3 Variables de salida

4.1.3.1 Duración. Es el plazo promedio ponderado de vencimiento del portafolio de deuda en cuanto a intereses y capital.

Este representa el nivel de rotación de pago del servicio de deuda total de una compañía. Se preferirá un portafolio cuya duración expresada en años sea incremental; ya que disminuirá el riesgo de refinanciación de la empresa.

4.1.3.1.1 Formulación de la Duración. Sea:

$I_i = pago\ efectivo\ de\ intereses\ del\ periodo\ i$

$a_i = amortizaciones\ del\ crédito\ en\ el\ periodo\ i$

$i_i = tasa\ de\ interés\ del\ periodo\ i$

$t_i = mes\ i$

$t_0 = fecha\ de\ evaluación$

$SD_i = suma\ de\ pago\ efectivo\ de\ intereses\ y\ amortizaciones\ del\ periodo\ i$

$FD_i = factor\ de\ descuento\ para\ el\ periodo\ i$

$VP_i = valor\ presente\ de\ SD\ en\ el\ periodo\ i$

$P_i = proyección\ al\ vencimiento\ del\ VP\ en\ el\ periodo\ i$

$D = duración$

$$SD_i = I_i + a_i$$

$$T_i = \frac{t_i - t_0}{365}$$

$$FD_i = (1 + i_i)^{T_i}$$

$$VP_i = \frac{SD_i}{FD_i}$$

$$P_i = VP_i \times T_i$$

$$D = \frac{\sum P_i}{\sum VP_i}$$

4.1.3.2 Vida media. Es el plazo promedio ponderado de un portafolio de deuda en cuanto a capital. De manera general, la administración de la empresa preferirá portafolios de deuda en el cual su vida media sea incremental, esto asegurará que la compañía disminuya su riesgo de refinanciación o liquidez.

4.1.3.2.1 Formulación vida media. Sea:

$d_i = desembolsos\ del\ crédito\ en\ el\ periodo\ i$
$VM = vida\ media$

$$d_i \times T_i = D_i$$

$$a_i \times T_i = A_i$$

$$\frac{\sum A_i}{\sum a_i} - \frac{\sum D_i}{\sum d_i} = VM$$

La diferencia entre los dos indicadores anteriores se encuentra en la inclusión del concepto de pago de intereses. Las compañías suelen considerar ambos indicadores como fuente de información financiera, ya que el primero de ellos generará un mayor nivel de riesgo como consecuencia de la inclusión de los intereses y que, dependiendo de la frecuencia de pago, variarán generalmente entre 3, 6 o 12 meses de intervalo; esto generará que el indicador de duración será menor en unidades de tiempo al de vida media.

4.1.3.3 Costo de deuda. Es el costo financiero del total del portafolio de deuda. Se preferirá un menor costo de deuda y la administración de las compañías buscarán a través de su gestión en la contratación o a través de coberturas sintéticas mantener contratado el nivel de costo de deuda de su portafolio.

Este costo estará influenciado por variables exógenas; tales como los índices de contratación de la deuda (DTF, IPC, Libor por ejemplo); ya que en cada pago de intereses podrán estar por encima o por debajo del nivel original de contratación; es de allí donde se genera el riesgo de volatilidad en el costo de la deuda y el objetivo de la administración por monitorear y controlarlo; ya que de no ser así, se podría incurrir en un mayor costo financiero y disminuir la utilidad neta y dividendos para los accionistas. Cabe aclarar que este costo dependerá de uso de las variables macroeconómicas que las compañías ingresen en sus planes o modelos de proyecciones de largo plazo.

4.1.3.3.1 Formulación del costo de deuda. Sea:

$S_0 = Saldo\ de\ deuda\ en\ el\ momento\ 0$

$$CD_{mes_i} = S_0 + \sum_{ij}^{n} d_{ij} - \sum_{ij}^{n} a_{ij} - \sum_{ij}^{n} I_{ij}$$

$$(\%)CD_{mensual} = TIR(Costo_{mes_i})$$

4.1.4 Proceso de simulación. El proceso de simulación comienza con la determinación de una distribución de probabilidad para las variables inciertas del modelo y que permitirán proyectar los flujos de caja (pago de intereses) de los créditos, las cuales pueden ser generadas a partir del uso de métodos estadísticos econométricos.

En el caso de utilizar métodos estadísticos, se puede optar por ajustar series históricas de las variables macroeconómicas a través de un software que genere la distribución de probabilidad y los estadísticos básicos de media y desviación estándar. Por otro lado se puede hacer uso de compendio de expertos (bancos centrales, bancos comerciales, fuentes reconocidas de información económica, etc) para que valoren subjetivamente las probabilidades.

La anterior información corresponde a las variables de entrada de los créditos comerciales u otra fuente de financiación dentro de un portafolio de deuda. Cada variable macroeconómica alimentará el crédito correspondiente y con él se generará el flujo de caja de servicio de deuda que una empresa estaría comprometida a pagar una vez contrate los obligaciones financieras.

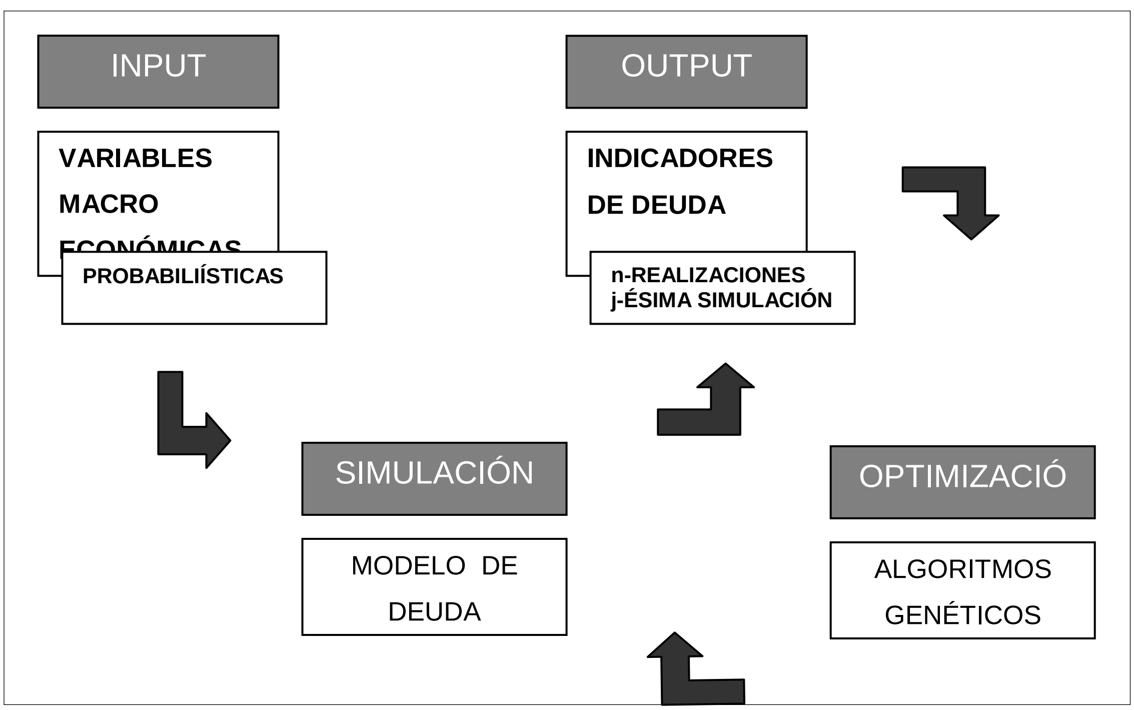
Existe un tipo de información, llamada de decisión, que es ingresada por la compañía dependiendo de la necesidad de la misma y estará enfocada principalmente en el monto total del portafolio de deuda, el porcentaje anual de vencimientos y dependiendo de la herramienta computacional, se deberá determinar el porcentaje de moneda local del total del portafolio, la tasa de interés local y la tasa de interés internacional para créditos en moneda extranjera. A cada juego de valores de las variables de decisión que se simule se le denomina escenario.

Con cada iteración, las variables macroeconómicas entregarán un dato para el pago de servicio de deuda de cada crédito y este último generará la información necesaria para calcular los indicadores de duración, vida media y costo de deuda de todo el portafolio formulados en el apartado 4.1.3.

La metodología teórica de formulación de los indicadores de salida (duración, vida media y costo) quedará a discreción de la compañía y se recomienda generar la formulación de cada uno de éstos con cada crédito que conforma el portafolio de deuda. Los resultados de cada indicador se presentan de manera consolidada y su cálculo será la suma producto del resultado en cada crédito y el peso del crédito dentro del total del portafolio.

El programa de simulación generará para cada indicador, tantos resultados como iteraciones se la haya indicado al sistema y como resultado, se calcularán los estadísticos en media y varianza de cada variable de salida, las cuales serán los insumos para comenzar el proceso de búsqueda de datos óptimos entre una mayor duración, mayor vida media y un menor costo de deuda.

Figura 2. Ciclo de simulación y optimización.



4.2 MODELO MATEMÁTICO DE SIMULACIÓN Y OPTIMIZACIÓN

El modelo matemático propuesto contemplará la asociación de la metodología de simulación de Montecarlo y la utilización de un procedimiento Metaheurístico de optimización.

4.2.1 Solución a partir de RiskOptimizer®. El software @Risk® posee dentro de sus programas un módulo de optimización conocido como RiskOptimizer®, el cual combina la simulación de Montecarlo con los Algoritmos Genéticos (AG). Una vez que se han ingresado las distribuciones de probabilidad a las variables de entrada del modelo, el aplicativo de optimización crea y evalúa una población inicial de cromosomas, generada de manera aleatoria y conocida como generación inicial, posteriormente selecciona y reproduce dos cromosomas que reproducirán un nuevo hijo. El programa internamente evalúa el fitness o aptitud de cada individuo que permita mejorar la próxima generación; así el programa irá calculando y mejorando a la anterior hasta que se llegue a un número de generaciones predeterminadas, un límite de convergencia o el tiempo deseado. Esta información es discrecional y predeterminada por el usuario antes de iniciar la optimización.

El RiskOptimizer® usa dos técnicas para minimizar y generar soluciones óptimas en el menor tiempo posible. La primera técnica está relacionada con el monitoreo de convergencia, lo cual permite determinar cuándo se han corrido un número suficiente de iteraciones. Esto asegura que el resultado del estadístico de la celda objetivo se encuentra estabilizado. En segundo lugar, el RiskOptimizer® usa un operador genético para generar las soluciones factibles que llevan hacia una solución óptima tan pronto como sea posible. Los algoritmos genéticos buscarán el espacio de solución completo, encontrando la solución global[2].

[2] http://www.palisade.com/riskoptimizer/

4.2.1.1 Formulación del aplicativo a partir de simulación y optimización AG. El planteamiento del algoritmo de solución basado en simulación y optimización para el problema de indicadores de un portafolio de deuda se muestra a continuación. Este considera los resultados de la simulación del capítulo anterior como base para la generación del proceso de optimización.

Sea:

$CD_k = Costo\ de\ deuda\ medio\ de\ la\ iteración\ k$

$D_k = Duración\ media\ de\ la\ iteración\ k$

$VM_k = Vida\ media\ media\ de\ la\ iteración\ k$

$Sim_j = Simulación\ o\ individuo\ jque\ pertenece\ a\ una\ población$

$FMO_l = Función\ multiobjetivo\ l$

El proceso comienza con la definición del modelo, el cual permitirá además de determinar la celda objetivo y el estadístico que se pretenden minimizar o maximizar, se le podrá asignar un rango de celdas ajustables que corresponden a las variables de decisión del modelo y las cuales se sensibilizarán (porcentualmente para este caso) a medida que se simula y optimiza. Las variables de decisión de este modelo serán el porcentaje de endeudamiento en moneda local, moneda extranjera, porcentaje de tasas de interés local y extranjera y tasas de interés fija. Paso seguido, el proceso continua con la determinación por parte del usuario de los parámetros poblacionales, el cual corresponde al número de individuos que se quiere tenga cada generación, el número de generaciones, el límite de convergencia y el tiempo de optimización.

Internamente el programa creará una generación o población inicial de individuos de manera aleatoria, cada individuo representa un posible portafolio de deuda y sobre este portafolio el programa llevará a cabo una simulación con las k-esimas iteraciones que se le haya ingresado al sistema. Después de toda la simulación, se obtendrán los resultados de la media de cada indicador de deuda. Finalmente se calcula el *fitness* o aptitud para la función multiobjetivo de ese individuo. El proceso se repite con el siguiente individuo de la generación hasta finalizar toda la población. Dentro de la generación inicial se llevarán a cabo cruces y mutaciones entre los mejores individuos (mejores funciones multiobjetivos - FMO) que darán paso a la generación dos, que a su vez crearán nuevos individuos, repitiendo el procedimiento de la generación inicial; es decir a cada individuo (un nuevo portafolio de deuda) se le aplicará una simulación con k-esimas iteraciones dando resultado las medias de los indicadores de deuda e integradas a una función multiobjetivo que deberá competir con la de los otros individuos para generar cruzes y mutaciones para la siguiente generación.

El proceso finaliza cuando se haya cumplido con un número de generaciones máximo, se haya llegado a un límite de convergencia o finalice el tiempo de programado de la optimización.

Generación inicial

Población: n

Individuo: 1/n

Simulación:

Iteración	***CD***	***D***	***VM***	
$Iteración_1$	CD_{11}	D_{11}	VM_{11}	
$Iteración_2$	CD_{21}	D_{21}	VM_{21}	
…	…	…	…	
$Iteración_k$	CD_{k1}	D_{k1}	VM_{k1}	
	Media – CD_1	***Media – D_1***	***Media – VM_1***	***FMO_1***

Generación inicial

Población: n

Individuo: n/n

Simulación

Iteración	***Media – CD***	***Media - D***	***Media - VM***	
$Iteración_1$	CD_{1n}	D_{1n}	VM_{1n}	
$Iteración_2$	CD_{2n}	D_{2n}	VM_{2n}	
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
$Iteración_k$	CD_{kn}	D_{kn}	VM_{kn}	
	***Media – CD**$_n$*	***Media – D**$_n$*	***Media – VM**$_n$*	***FMO**$_n$*

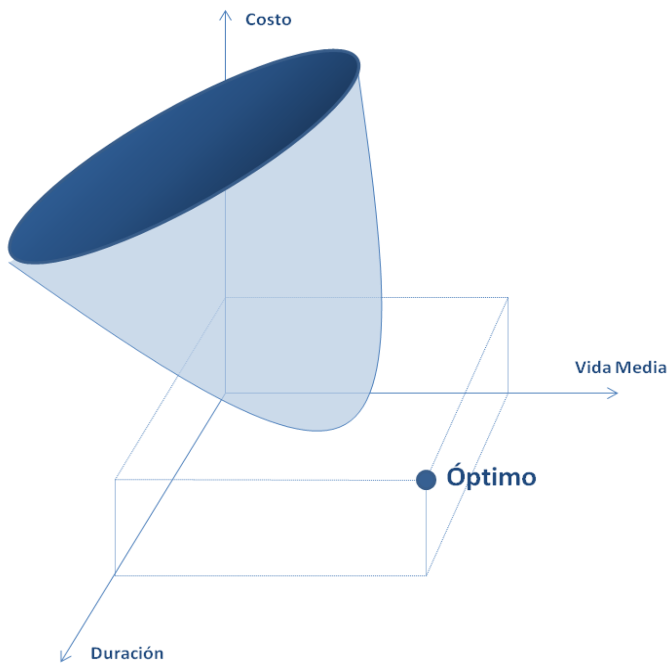
Posteriormente habrá cruces y mutaciones entre los individuos que tengan mayor *fitness* o aptitud con base en sus FMO_n, desarrollando una nueva generación de individuos que podrá crear funciones multiobjetivo (asociadas a portafolios de deuda) mejorando a la anterior generación.

Consideración: ya que el modelo de optimización propuesto contiene tres objetivos y el aplicativo de optimización RiskOptimizer® basado en Algoritmos Genéticos (AG) sólo permite llevar a cabo la optimización contando con una sola celda objetivo; se hace necesario que la búsqueda dentro del modelo se haga de manera discrecional inicialmente con cada indicador de deuda; de este modo se obtendrán los óptimos globales y posteriormente se corre el ejercicio haciendo uso de una función multiobjetivo del sistema, conocida como programación de compromiso, la cual representa la menor distancia entre el óptimo de la superficie factible y el óptimo global:

$$Min \qquad \sqrt{\left[\lambda_{CD}\,\frac{(\overline{CD} - CD^{opt})}{CD^{opt} - CD^{peor}}\right]^2 + \left[\lambda_D\,\frac{(D^{opt} - \overline{D})}{D^{opt} - D^{peor}}\right]^2 + \left[(1 - \lambda_{CD} - \lambda_D)\,\frac{(VM^{opt} - \overline{VM})}{VM^{opt} - VM^{peor}}\right]^2}$$

Donde λ_{CD}, λ_D y $(1 - \lambda_{CD} - \lambda_D)$, corresponden a los pesos de relevancia dentro del portafolio para cada indicador de deuda, los cuales son proporcionados por la administración con base en su necesidad de cubrir uno u otro riesgo asociado.

Figura 3. Optimización de indicadores de deuda.



Capítulo 5. Aplicación hipotética

Con el fin de resolver el problema de optimización multiobjetivo no lineal de los indicadores de un portafolio de deuda, se llevó a cabo la construcción de un aplicativo en la herramienta Excel 2007.

El desarrollo del ejercicio está basado en tres etapas. En la primera de ellas (capítulo 5) se muestra el proceso de la simulación de manera aislada, de tal modo que se logre distinguir el funcionamiento y consistencia del aplicativo en ausencia de aleatoriedad y sin llevar a cabo algún tipo de optimización sobre los indicadores. En segundo lugar (capítulo 6), se lleva a cabo el ejercicio de optimización sobre la aplicación hipotética, con la cual se busca encontrar los óptimos globales de los tres indicadores de manera discrecional. Y en tercer lugar se desarrolla la optimización completa y de manera conjunta (capítulo 6), a través de la función multiobjetivo propia del problema.

Hoja variables de entrada variables aleatorias

En la primera hoja están los datos de entrada correspondientes a las variables macroeconómicas del modelo y que serán la fuente de estocasticidad dentro de los créditos a simular.

El escenario macroeconómico está modelado con variables aleatorias de determinada distribución de probabilidad, la cual le permitirá que en cada iteración del modelo, se genere un conjunto de datos de entrada para cada crédito. En primer lugar, esta será la información que alimente cada fuente de financiación, de acuerdo con las tasas de indexación de los mismos.

Cada variable macroeconómica se encuentra anualizada y dependiendo de la necesidad se deberá mensualizar; además cuenta con sus respectivos parámetros de media y desviación estándar.
Las variables macroeconómicas utilizadas en esta aplicación son:

1. La devaluación: la cual permitirá generar las tasas de cambio y permitirá convertir los datos de créditos en moneda extranjera a moneda local.
2. Índice de Precios al Consumidor: es la tasa de interés con la cual se indexan los créditos en el mercado local o las emisiones de bonos en cada país.
3. Tasa de Depósitos a Término Fijo: es la Tasa del mercado interbancario local y es utilizada especialmente para créditos comerciales y entre compañías que se encuentran en la zona geográfica local.
4. Tasa Libor: es la tasa variable de indexación de gran parte de los créditos en moneda extranjera.

Hoja Estudio de Escenarios

En la segunda hoja se consignan los datos de entrada del modelo y es el usuario el encargado de alimentarlo (representan sus decisiones). Dentro de estos datos se encuentra el porcentaje de la moneda funcional que la compañía está dispuesta a contratar, posteriormente se encuentra el porcentaje de tasa variable en la moneda local, en tercer lugar se solicita el porcentaje de una de las tasas de interés en el mercado local, en cuarto lugar el porcentaje de endeudamiento a contratar en moneda extranjera, el monto total del portafolio de deuda sobre el cual se busca hacer la simulación y optimización y finalmente el porcentaje de vencimientos anuales sobre el mismo.

Hoja simulación

A continuación se relaciona una serie de hojas en Excel con la simulación de un portafolio de deuda a partir de la creación de créditos que representarán uno a uno las fuentes de financiación de una compañía. Dentro de estas, se modela el flujo de servicio de deuda del crédito y el cálculo de los indicadores objetivos – duración, vida media y costo de deuda.

Hoja indicadores

Finalmente, se cuenta con una hoja que recoge de manera conjunta los resultados de todos los créditos y genera resultados para todo el portafolio de deuda. Estos resultados son considerados las salidas del modelo y son los objetos de optimización a través de la maximización de los indicadores de duración y vida media y la minimización del costo de deuda.

A modo de ejemplo se presenta 3 casos del funcionamiento del archivo de simulación:

5.1 RESULTADO DE LA SIMULACIÓN - EJEMPLO 1

Escenario macroeconómico determinístico – Input

Para todos los ejercicios del capítulo 5, se usaron las mismas series macroeconómicas sintéticas, con el fin de hacer más viable la validación del modelo y la comparación de los resultados. En la práctica deben tomar valores aleatorios generados por el simulador.

Tabla 1. Escenario macroeconómico - ejemplo 1.

Año	Devaluación	TRM	RM Promedi	DTF	IPC	LIBOR
2.004	-14,0%	2.390	2.615	7,7%	5,5%	2,8%
2.005	-4,4%	2.284	2.319	6,7%	4,9%	4,7%
2.006	2,0%	2.239	2.261	6,9%	4,4%	5,4%
2.007	-10,0%	2.015	2.127	9,2%	5,7%	4,6%
2.008	11,4%	2.244	1.989	9,8%	7,7%	3,1%
2.009	5,4%	2.364	2.304	5,8%	4,5%	0,9%
2.010	3,4%	2.444	2.404	6,0%	4,4%	1,5%
2.011	0,9%	2.465	2.455	7,6%	3,9%	2,5%
2.012	1,9%	2.511	2.488	6,8%	3,5%	2,7%
2.013	1,9%	2.558	2.535	6,8%	3,5%	3,0%
2.014	1,9%	2.606	2.582	6,8%	3,5%	3,2%
2.015	1,9%	2.655	2.631	6,8%	3,5%	3,4%
2.016	1,9%	2.705	2.680	6,8%	3,5%	3,4%
2.017	1,9%	2.755	2.730	6,8%	3,5%	5,4%
2.018	1,9%	2.807	2.781	7,6%	3,5%	5,4%
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Estudio de Escenarios

Figura 4. Escenarios - ejemplo 1.

Moneda COP	100%
Tasa Variable COP	0%
Variable COP DTF	0%
Variable USD Libor	0%
Monto	500.000

Vencimiento

10%

Simular

COP	USD	
100%	0%	
500.000	-	500.000

COP			USD		
DTF	IPC	Fija	Libor	Fija	
0%	0%	100%	0%	100%	
-	-	500.000	-	-	500.000

Indicadores – Output

Figura 5. Resultados - ejemplo 1.

Costo deuda	7,75%
Vida media	1,37
Duración	1,59

	Vida Media	Duración	Saldo	Ponderación
COP_DTF	-	-	-	0%
COP_IPC	-	-	-	0%
COP_Fija	1,4	1,6	500.000	100%
USD_Libor	-	-	-	0%
USD_Fija	-	-	-	0%
			500.000	

5.2 RESULTADO DE LA SIMULACIÓN - EJEMPLO 2.

<u>Escenario macroeconómico - Input.</u>

Tabla 2. Escenario macroeconómico - ejemplo 2.

Año	Devaluación	TRM	RM Promedi	DTF	IPC	LIBOR
2.004	-14,0%	2.390	2.615	7,7%	5,5%	2,8%
2.005	-4,4%	2.284	2.319	6,7%	4,9%	4,7%
2.006	2,0%	2.239	2.261	6,9%	4,4%	5,4%
2.007	-10,0%	2.015	2.127	9,2%	5,7%	4,6%
2.008	11,4%	2.244	1.989	9,8%	7,7%	3,1%
2.009	5,4%	2.364	2.304	5,8%	4,5%	0,9%
2.010	3,4%	2.444	2.404	6,0%	4,4%	1,5%
2.011	0,9%	2.465	2.455	7,6%	3,9%	2,5%
2.012	1,9%	2.511	2.488	6,8%	3,5%	2,7%
2.013	1,9%	2.558	2.535	6,8%	3,5%	3,0%
2.014	1,9%	2.606	2.582	6,8%	3,5%	3,2%
2.015	1,9%	2.655	2.631	6,8%	3,5%	3,4%
2.016	1,9%	2.705	2.680	6,8%	3,5%	3,4%
2.017	1,9%	2.755	2.730	6,8%	3,5%	5,4%
2.018	1,9%	2.807	2.781	7,6%	3,5%	5,4%
2.019	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

<u>Estudio de Escenarios</u>

Se cambia el porcentaje a las variables endógenas, tales como el porcentaje de deuda en pesos, sobre esta última que porcentaje se desea en tasa de interés variable y a su vez que porcentaje en la tasa de interés local; por otro lado se ingresa el dato para el endeudamiento en moneda extranjera y finalmente el monto y vencimientos anuales del portafolio (los cuales se dejan fijo para toda la simulación).

Figura 6. Escenarios - ejemplo 2.

Moneda COP	50%
Tasa Variable COP	50%
Variable COP DTF	50%
Variable USD Libor	50%
Monto	500.000

Vencimiento
10%

Simular

COP	USD	
50%	50%	
250.000	250.000	500.000

COP			USD		
DTF	IPC	Fija	Libor	Fija	
25%	25%	50%	50%	50%	
62.500	62.500	125.000	125.000	125.000	500.000

<u>Indicadores – Output</u>

Figura 7. Resultados - ejemplo 2.

Costo deuda	9,65%
Vida media	2,57
Duración	2,07

	Vida Media	Duración	Saldo	Ponderación
COP_DTF	1,4	1,1	62.500	13%
COP_IPC	2,8	1,7	62.500	13%
COP_Fija	1,4	1,6	125.000	25%
USD_Libor	3,4	2,0	125.000	25%
USD_Fija	3,4	3,3	125.000	25%
			500.000	

5.3 RESULTADO DE LA SIMULACIÓN - EJEMPLO 3

<u>Escenario macroeconómico - Input.</u>

Se conserva el escenario original sólo por razones de validación del modelo, en la práctica real deben tomar valores aleatorios.

Tabla 3. Escenario macroeconómico - ejemplo 3.

Año	Devaluación	TRM	RM Promedi	DTF	IPC	LIBOR
2.004	-14,0%	2.390	2.615	7,7%	5,5%	2,8%
2.005	-4,4%	2.284	2.319	6,7%	4,9%	4,7%
2.006	2,0%	2.239	2.261	6,9%	4,4%	5,4%
2.007	-10,0%	2.015	2.127	9,2%	5,7%	4,6%
2.008	11,4%	2.244	1.989	9,8%	7,7%	3,1%
2.009	5,4%	2.364	2.304	5,8%	4,5%	0,9%
2.010	3,4%	2.444	2.404	6,0%	4,4%	1,5%
2.011	0,9%	2.465	2.455	7,6%	3,9%	2,5%
2.012	1,9%	2.511	2.488	6,8%	3,5%	2,7%
2.013	1,9%	2.558	2.535	6,8%	3,5%	3,0%
2.014	1,9%	2.606	2.582	6,8%	3,5%	3,2%
2.015	1,9%	2.655	2.631	6,8%	3,5%	3,4%
2.016	1,9%	2.705	2.680	6,8%	3,5%	3,4%
2.017	1,9%	2.755	2.730	6,8%	3,5%	5,4%
2.018	1,9%	2.807	2.781	7,6%	3,5%	5,4%
2.019	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

<u>Estudio de Escenarios</u>

Nuevamente se cambia el porcentaje a las variables endógenas, pero en esta ocasión se genera un escenario ácido de endeudamiento, en el cual sólo se toma endeudamiento en dólares y se distribuye en 50-50 el porcentaje de deuda en tasa de interés variable y fija respectivamente.

Figura 8. Escenarios - ejemplo 3.

Moneda COP	0%
Tasa Variable COP	0%
Variable COP DTF	0%
Variable USD Libor	50%
Monto	500.000

Vencimiento

10%

Simular

COP	USD	
0%	100%	
-	500.000	500.000

COP			USD		
DTF	IPC	Fija	Libor	Fija	
0%	0%	100%	50%	50%	
-	-	-	250.000	250.000	500.000

<u>Indicadores – Output</u>

Figura 9. Resultados - ejemplo 3.

Costo deuda	5,19%
Vida media	3,17
Duración	2,47

	Vida Media	Duración	Saldo	Ponderación
COP_DTF	-	-	-	0%
COP_IPC	-	-	-	0%
COP_Fija	-	-	-	0%
USD_Libor	3,2	1,9	250.000	50%
USD_Fija	3,2	3,0	250.000	50%
			500.000	

A partir de los anteriores resultados, se estaría generando una serie sintética de datos para el costo de deuda, vida media y duración del portafolio, que se pueden caracterizar estadísticamente: valor medio, varianza y toda su función de distribución de probabilidad.

La optimización se puede hacer de dos maneras:

1. En ausencia de un motor o de una metodología de optimización, tal como los algoritmos genéticos, pueden formularse una serie discreta de N escenarios, y para cada uno de ellos, se hace una simulación. Cada escenario j tendría entonces asociado un conjunto de indicadores (costo, vida media y duración) que permiten su comparación. Finalmente, se seleccionaría entre el mejor trío de indicadores de las j-esimas simulaciones. Sin embargo, debido a que contamos con tres indicadores y cada uno de ellos con múltiples estadísticos (media, varianza e incluso toda su función de distribución), esta selección no es trivial: debe entonces seleccionarse el estadístico de cada indicador que va a ser el valor representativo, por ejemplo, la media, y debe hacerse luego un análisis multiobjetivo para problemas discretos, como el método de las ponderaciones, el método de utilidad multiaributo, el método ELECTRE (I, II, III y IV), entre otros, que permite comparar valores de objetivos en conflicto. El lector interesado puede ampliar estos temas en Goicoechea et al (1982) o Smith et al. (2002)

Este trío óptimo tendría la información necesaria para determinar cuál es el tipo de endeudamiento a contratar o a reestructurar en cuanto a moneda local o extranjera, tasa de interés fija, local o extranjera y el nivel de vencimiento que un portafolio de deuda de una compañía debería considerar en el proceso de administración de su financiamiento.

2. Si se cuenta con un motor de optimización integrado a simulación, como Algoritmos genéticos en el @Risk® (RiskOptimizer®), este análisis puede ser llevado a cabo con mejores resultados y más fiables en cuanto a mayor precisión del óptimo y menor tiempo de máquina. Este es la forma en que se aborda aquí el problema de optimización de portafolio de deuda.

Capítulo 6. Optimizacion del portafolio, analisis de la herramienta y resultados

A manera de ejemplo se lleva a cabo el ejercicio de optimización en el aplicativo de Excel descrito en el capítulo anterior y haciendo uso del programa RiskOptimizer® de @Risk®, el cual considera la técnica Metaheurística de optimización basada en Algoritmos Genéticos (AG).

El ejercicio comienza con la asignación de distribuciones de probabilidad a las variables macroeconómicas de entrada, que para el ejercicio corresponden a tasas de cambio y de interés insumo de los créditos del portafolio de deuda. Posteriormente y debido a que se cuenta con tres objetivos (maximizar duración y vida media y minimizar el costo de deuda), este ejercicio se lleva a cabo optimizando uno a uno los indicadores, con el fin de observar los resultados de manera discrecional. Los valores óptimos independientes son parámetros que requiere el modelo de optimización multiobjetivo como referente ideal, aunque utópico; este punto de solución estará por fuera de la superficie real de posibles soluciones de portafolios óptimos de deuda de una compañía, pero será la meta a la cual la empresa deberá tender. En este caso, se usará el método de programación de compromiso Goicochea (1982), que busca el punto factible con menor distancia al punto meta (ideal) encontrado en el primer paso.

Para llevar a cabo la búsqueda de los óptimos, uno a uno, se utiliza el software de optimización RiskOptimizer®, el cual permite definir los parámetros del modelo, tales como la celda objetivo, el estadístico a optimizar, el rango de celdas ajustables, que para este trabajo equivalen a las variables de decisión y finalmente, las restricciones del modelo. Por otro lado, el software permite

seleccionar los parámetros de la población, tamaño y semilla para el generador de números aleatorios, el tiempo de ejecución de la optimización y de la simulación.
Como se mencionó anteriormente, el problema de optimización de este portafolio de deuda presenta tres indicadores como objetivo y debido a que el programa solo permite una sola entrada de búsqueda, se hace necesario generar una única función (programación de compromiso). Cabe aclarar que el criterio de incertidumbre que se está usando en todo el proceso de optimización es la media, sin definir que esta sea el único criterio, ya que puede suceder que una variable tenga buen valor medio, pero mucha varianza; sin embargo, se puede desarrollar el ejercicio utilizando criterios de mínima varianza, curtosis, desviación estándar, rango moda, etc.

La función multiobjetivo que se pretende optimizar es la siguiente:

$$Min \quad \sqrt{\left[\lambda_{CD}\frac{(\overline{CD}-CD^{opt})}{CD^{opt}-CD^{peor}}\right]^2+\left[\lambda_{D}\frac{(D^{opt}-\overline{D})}{D^{opt}-D^{peor}}\right]^2+\left[(1-\lambda_{CD}-\lambda_{D})\frac{(VM^{opt}-\overline{VM})}{VM^{opt}-VM^{peor}}\right]^2}$$

El resultado de la simulación combinada con el de optimización, desarrollada por el programa, permite determinar la superficie de soluciones óptima- paretianas de portafolios de endeudamiento. El método de programación de compromiso encuentra una solución por cada de juego de pesos λ, garantizando que la solución encontrada es la más cercana al ideal (óptimo paretiano) que pertenece a la frontera de pareto, cumpliendo con las preferencias del decisor, definidas en los pesos de importancia relativa que el dio a priori.

6.1 RESULTADOS DE LA OPTIMIZACIÓN – INDICADORES ÓPTIMOS

6.1.1 Costo de deuda. En este primer ejercicio se lleva a cabo la optimización del costo de deuda, considerando la aleatoriedad generada por las variables macroeconómicas sobre el portafolio de deuda y el movimiento de las variables de decisión permitidas por RiskOptimizer®. A partir de este resultado se puede mostrar que el valor óptimo e este portafolio de deuda, en cuanto a su costo de deuda, está dado por un valor de 3.48%, correspondiente a un portafolio en moneda local en tasa fija (99%) y en moneda extranjera a tasa fija y variable (1%).

Figura 10. Resultado de optimización costo de deuda.

Costo deuda	3,48%
Vida media	2,20
Duración	1,80

Mean (Best Simulation) = 0.0348

	Vida Media	Duración	Saldo	Ponderación
COP_DTF	-	-	-	0%
COP_IPC	-	-	-	0%
COP_Fija	2,2	1,8	498.991	100%
USD_Libor	2,0	1,0	380	0%
USD_Fija	2,2	2,1	629	0%
			500.000	

6.1.2 Vida media. En segundo lugar, el ejercicio de optimización para el indicador de vida media bajo un escenario macroeconómico aleatorio, da como resultado un óptimo de 2.73 años, correspondiente a un portafolio de deuda en moneda extranjera e indexado a tasa de interés fija en su totalidad.

Figura 11. Resultado de optimización vida media.

Costo deuda	8,64%
Vida media	2,73
Duración	2,54

Mean (Best Simulation) = 2.7308

	Vida Media	Duración	Saldo	Ponderación
COP_DTF	-	-	-	0%
COP_IPC	-	-	-	0%
COP_Fija	-	-	-	0%
USD_Libor	-	-	-	0%
USD_Fija	2,7	2,5	500.000	100%
			500.000	

6.1.3 Duración. Finalmente en esta primera etapa del proceso de optimización se lleva a cabo el ejercicio para el indicador de duración, el cual cuenta con un valor óptimo de 2.54 años correspondiente a un portafolio de deuda en moneda extranjera e indexado a una tasa de interés fija (100%).

Figura 12. Resultado de optimización duración.

Costo deuda	8,64%
Vida media	2,73
Duración	2,54

Mean (Best Simulation) = 2.5423

	Vida Media	Duración	Saldo	Ponderación
COP_DTF	-	-	-	0%
COP_IPC	-	-	-	0%
COP_Fija	-	-	-	0%
USD_Libor	-	-	-	0%
USD_Fija	2,7	2,5	500.000	100%
			500.000	

6.2 RESULTADOS DE LA OPTIMIZACIÓN MULTIOBJETIVO

El último paso dentro de la búsqueda de un óptimo para este portafolio de deuda se genera minimizando la función multiobjetivo de distancia al ideal. Esta función cumple las condiciones dimensionales y metodológicas requeridas para este tipo de problema, es decir, se logra unificar dimensionalmente las unidades de los indicadores de deuda, los cuales se encontraban designados en porcentaje y años. Otra ventaja de utilizar una función multiobjetivo basada en programación por compromiso es la posibilidad de utilizar más de una métrica de optimización, no es un modelo compensatorio y ofrece resultados más equilibrados entre los indicadores (Jaramillo y Vélez, 2011).

La función minimizadora multiobjetivo de este problema de optimización será la siguiente:

$$Min \qquad \sqrt{\left[\lambda_{CD}\frac{(\overline{CD}-CD^{opt})}{CD^{opt}-CD^{peor}}\right]^2+\left[\lambda_D\frac{(D^{opt}-\overline{D})}{D^{opt}-D^{peor}}\right]^2+\left[(1-\lambda_{CD}-\lambda_D)\frac{(VM^{opt}-\overline{VM})}{VM^{opt}-VM^{peor}}\right]^2}$$

La cual estará formulada a partir de los resultados de los óptimos de costo de deuda, duración y vida media encontrados en la sección 6.1 y contará con los factores λ de importancia relativa del objetivo para la empresa para cada indicador de deuda, que deben ser determinados por la administración de la compañía.

Una vez llevado a cabo los ejercicios de optimización multiobjetivo para diferentes valores de λ, se generan los siguientes resultados:

λ_{CD}	λ_D	λ_{VM}	**FMO**
33%	33%	34%	28.11%
50%	25%	25%	30.71%
25%	25%	50%	29.08%
25%	50%	25%	27.95%

A manera de ejemplo y suponiendo que la administración opta por dar igual peso a cada indicador de deuda, la FMO daría como resultado un valor de 28.11%, representando para este juego de λ's, una solución óptima y garantizando que la solución encontrada es la más cercana al ideal (óptimo paretiano).

De igual modo, para este ejemplo, el portafolio de deuda con la FMO de 28.11%, estaría proporcionando mayor información relacionada con los indicadores objetivos de la compañía y las características de endeudamiento para alcanzar dicho portafolio. Es así, como se puede comprobar que para este problema hipotético los indicadores objetivos equivalen a una duración de 2.15 años, vida media de 2.43 años y un costo de deuda de 2.93%. De igual modo, se puede sugerir a la administración las características del portafolio representadas en las variables de decisión; lo cual corresponde a un 46% de endeudamiento en pesos, y el 54% restante en USD. Ambas indexadas a tasa fija y vencimiento anual de 10% del monto total del portafolio[3].

De manera alternativa y con el fin de garantizar la robustez del modelo, se lleva a cabo un análisis de sensibilidad sobre los resultados de la siguiente manera: se cambian los valores en +/- 10% a cada uno de los pesos iníciales, considerando que los otros conservan su relación entre sí (en este caso de uno porque son iguales) y se chequea cuánto cambian los valores de los objetivo.

En la siguiente tabla se presentan los resultados respecto a los objetivos, incluyendo el análisis de sensibilidad. En la parte superior se muestran los valores con las unidades originales y en la parte inferior, se encuentran los valores normalizados. Cada columna representa la solución con el juego de pesos cuando se cambia, ya sea en un -10% o en un +10% y los demás conservan su relación entre sí, tal que la suma de los pesos sea 1.

[3] Información extraída del archivo en Excel utilizado para llevar a cabo la optimización multiobjetivo.

Tabla 4. Resultados y análisis de sensibilidad.

				w_1		w_2		w_3	
	Z^{opt}	Z^{peor}	**Sln ópt**	**-10%**	**10%**	**-10%**	**10%**	**-10%**	**10%**
Z_{CD}	3,48%	8,64%	2,93%	2,93%	2,93%	4,79%	3,01%	4,79%	4,79%
Z_{VM}	2,73	2,20	2,58	2,43	2,43	2,58	2,43	2,58	2,58
Z_D	2,54	1,80	2,26	2,15	2,15	2,26	2,13	2,26	2,26
Valores normalizados									
Z_{CD}	1	0	0,75	1,11	1,11	0,75	1,09	0,75	0,75
Z_{VM}	1	0	0,71	0,43	0,43	0,71	0,44	0,71	0,71
Z_D	1	0	0,62	0,47	0,47	0,62	0,45	0,62	0,62

La solución óptima (en el sentido óptimo-paretiano) es una solución de valores relativamente cercanos a los valores ideales (Z^{opt}) (por lo tanto muy alejados de las peores soluciones). El administrador de la compañía puede, llevar a cabo otro juego de pesos y de este modo evaluar los diferentes intercambios hasta que se encuentre totalmente satisfecho con la solución eficiente. Todas estas soluciones serían, desde el punto de vista matemático, óptimo-paretiana. El análisis de sensibilidad demuestra que la solución óptima es robusta por lo que puede implementarse con confianza.

6.3 POSTANÁLISIS

Otra de las ventajas que proporciona contar con un motor de optimización integrado a simulación, como Algoritmos Genéticos en el @Risk® (RiskOptimizer®) y que aparte de obtener mejores resultados y más fiables en cuanto a mayor precisión y menor tiempo de máquina, es contar con una generación de un alto volumen de reportes que permiten llevar a cabo análisis expost de los resultados obtenidos.

Los resultados del postanálisis son la siguiente herramienta de exploración probabilística en la toma de decisiones para un portafolio de deuda de una compañía; permitiendo ampliar las conclusiones y dar lineamientos de los pasos a seguir dentro de la estructuración financiera de los pasivos de la empresa. Es así como a partir de este análisis gráfico y cuantitativo se puede determinar sensibilidades a las variables de mayor impacto sobre los resultados de la función multiobjetivo, la probabilidad y efecto de un *outlier* dentro de la distribución final de los resultados o hasta el efecto matemático que podría generar cada indicador sobre el resultado general.

El ejercicio consiste en llevar a cabo la Simulación de Montecarlo sobre las variables de salida, tales como los tres indicadores analizados en el portafolio de deuda (costo, duración y vida media) y tomando como ejemplo la función multiobjetivo que utiliza los factores λ de importancia relativa igual a 33% para cada indicador.

A continuación se presentan algunos de los reportes generados por el software.

6.3.1 Costo de deuda. Los resultados de la simulación para este indicador demuestran que una distribución de probabilidad leptocúrtica y con valores extremos para un costo de deuda de este portafolio entre los percentiles 5% y 95% de -0,69% y 8,82%. Aún así, este portafolio podría encontrarse enfrentado a un valor de costo de deuda máximo de 18.40% como consecuencia de la aparición de un entorno macroeconómico adverso y aunque es probabilísticamente baja, se encuentra como un posible escenario.

Por otro lado y bajo el *análisis de tornado* que ofrece el software, se puede apreciar la correlación que existe entre las variables de entrada al modelo y su explicación sobre el resultado de la variable de salida; para este caso, las devaluaciones anuales son las variables que explican en mayor medida el resultado del costo de la deuda.

Figura 13. Distribución - costo de deuda.

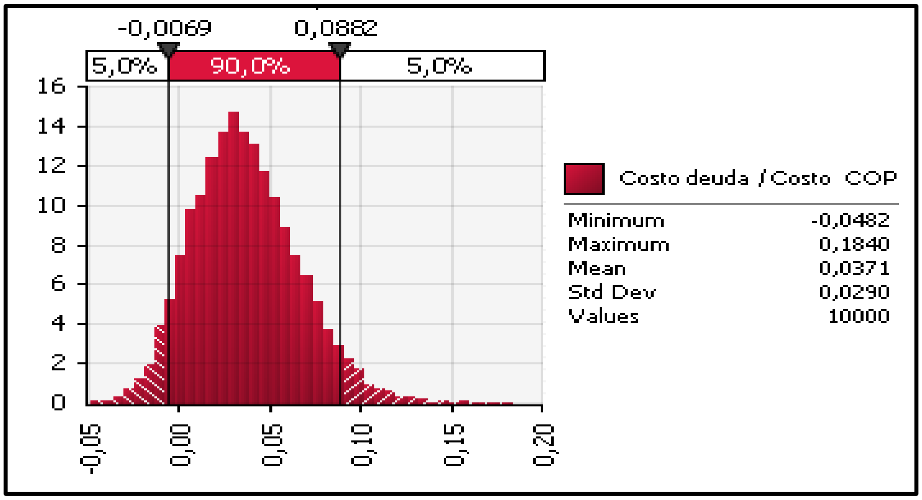
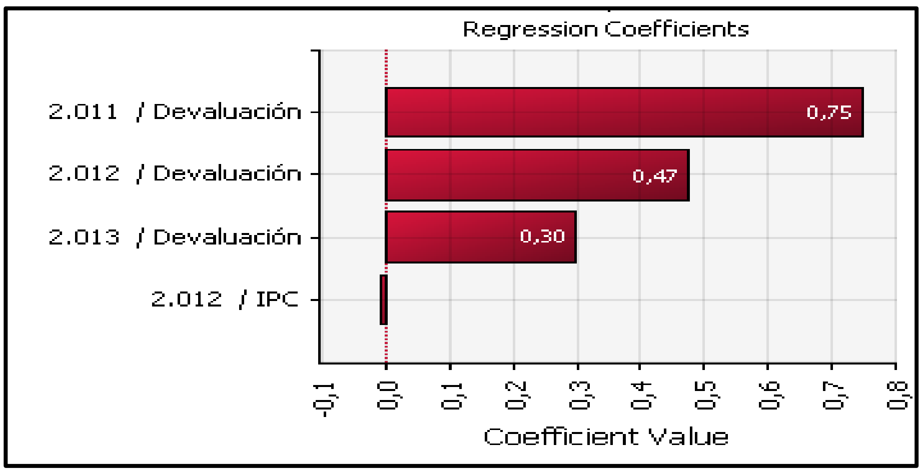


Figura 14. Tornado - costo de deuda.



6.3.2 Vida Media. Los resultados de la simulación para este indicador generan un rango de variabilidad en los percentiles 5% y 95%, de 0,31 años; sin embargo, este portafolio se podría ver enfrentado a valores extremos de vida media entre 2,25 años y 2,88 años. La probabilidad que el valor mínimo se llegue a presentar dependerá en mayor media del entorno macroeconómico del momento y de las decisiones ya tomadas en materia de recursos financieros que la compañía ya cuente en su portafolio. El *análisis de tornado* muestra a la devaluación de la moneda local frente a la moneda extranjera, como la variable que explica en mayor media los resultados sobre esta variable de salida.

Figura 15. Distribución - vida media.

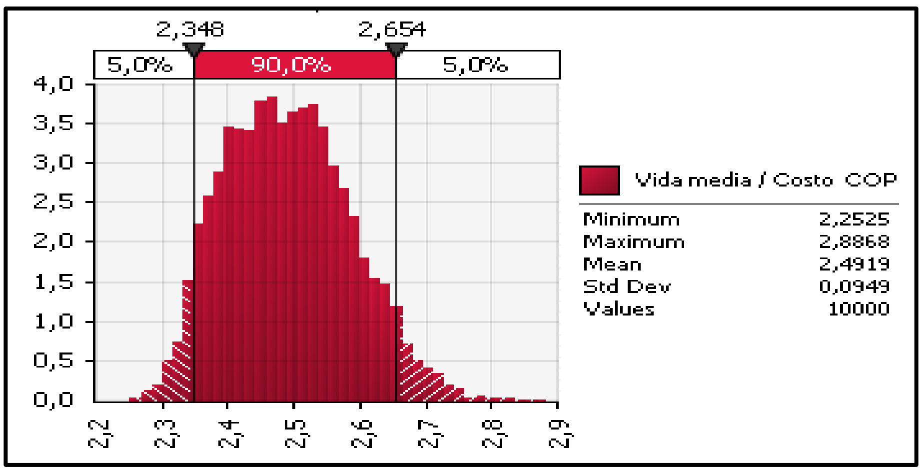


Figura 16. Tornado - vida media.

6.3.3 Duración. Por definición, este indicador representa el plazo promedio ponderado de vencimiento en cuanto el servicio de deuda que incluye el pago de capital e intereses.

Al incluir el pago de este último, el cual contiene una rotación de pago entre tres y 12 meses, los resultados en media para este indicador se desplazan hacia la izquierda, disminuyéndolo. En este caso se generan resultados para los percentiles 5% y 95% de 2,06 años y 2,35 años respectivamente. De igual modo, se podrían llegar a presentar casos extremos de caída en la duración de hasta 1,97 años con probabilidades de ejecución menores 0,5%.

Al realizar el análisis de sensibilidad de las variables macroeconómicas sobre la duración, los resultados muestran que la devaluación junto con la tasa de interés IPC, explican en mayor medida los resultados de la variable de salida. Lo cual indica que el portafolio y en especial el pago del interés se ven afectado por la volatilidad de la devaluación y la inflación local.

Figura 17. Distribución – duración.

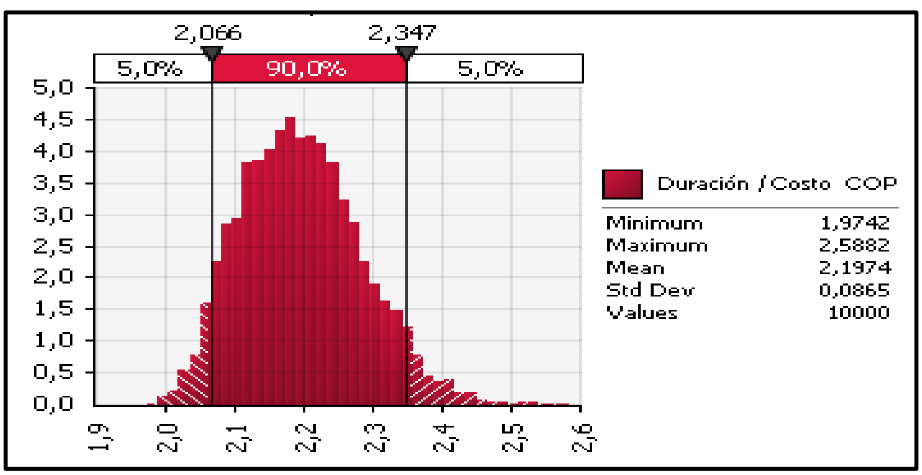
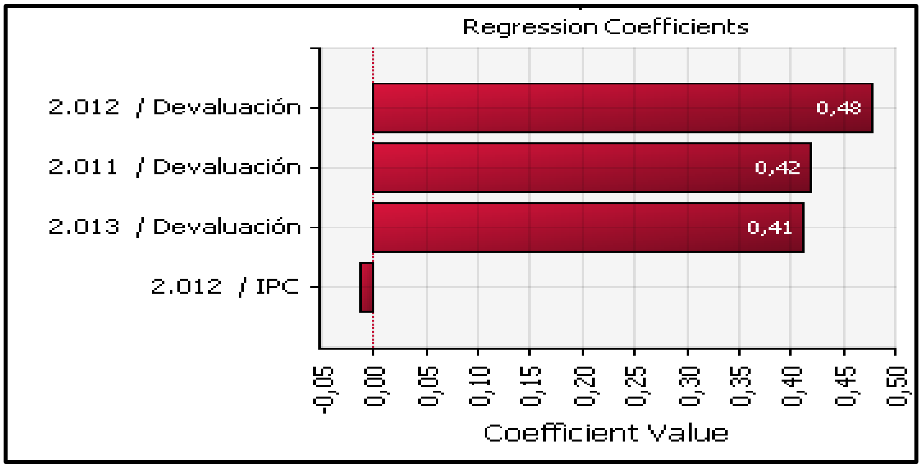


Figura 18. Tornado – duración.



6.3.4 FMO. De igual modo, a la función multiobjetivo presentada en la sección 6.2 se le llevó a cabo un análisis de Simulación de Montecarlo, con el fin de conocer los principales estadísticos y su respectivo análisis de sensibilidad. Este dio como resultado que el dato de salida está afectado, al igual que en los otros tres indicadores, por la devaluación; pero de en este caso su explicación es baja y para los años 2013 y 2012 su relación es inversa, indicando que el aumento de la devaluación para estos años generaría disminución de la FMO.

La función de probabilidad de la FMO usando λ's de 33% podría alcanzar un dato máximo de 97%, representado en un conjunto de indicadores con soluciones de 18,40% para el costo de deuda, 2,89 años de vida media y 2,59 años para la duración. En este caso los valores extremos de duración y vida media serían deseables pero el valor de costo de deuda estaría por fuera de las condiciones normales de mercado y se estaría incurriendo en sobrecostos financieros.

Figura 19. Distribución – FMO.

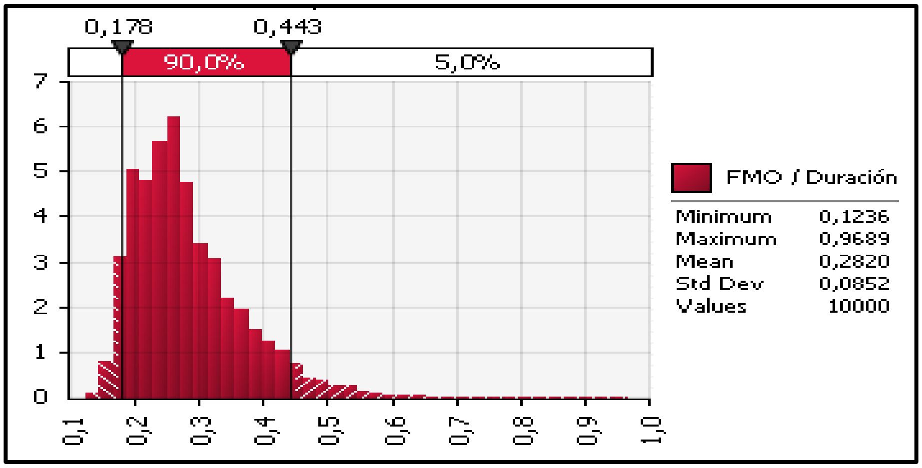
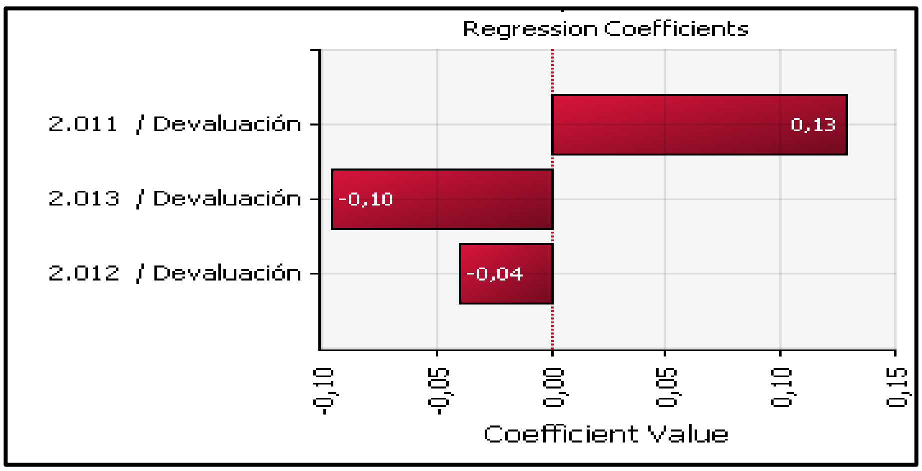


Figura 20. Tornado – FMO.



Conclusiones

El enfoque metodológico utilizado en este trabajo para llevar a cabo la optimización de indicadores de un portafolio de deuda, aporta de manera importante a las teorías clásicas de optimización de portafolios que de manera recurrente estuvieron ligadas a enfoques de activos y no de deuda. Es así, como queda planteada la inquietud de nuevos procesos investigativos a partir del trabajo desarrollado hasta el momento; además de propender por ampliar o justificar nuevas técnicas y metodologías de optimización de portafolios de deuda.

De igual modo, la metodología propuesta permitió ajustar técnicas tradicionales de optimización de portafolios de activos a portafolios de pasivos, mediante la utilización de una metodología que no requería de transformaciones o algún tipo de solución analítica. Con base en lo anterior se buscó, mediante un motor de optimización, combinar y solucionar de manera práctica la simulación y una técnica Metahuerística de optimización. Finalmente, a través de la aplicación de un análisis multiobjetivo (programación de compromiso) se llevó a cabo una optimización conjunta para los tres indicadores de deuda, cuando normalmente está limitado a un solo indicador.

La metodología empleada en este trabajo de investigación permitió generar un óptimo mediante técnicas cuantitativas para un portafolio de endeudamiento; hecho destacable al reconocer que muchas de las compañías, por no hacerlo o por hacerla de manera subjetiva, pueden llegar a suboptimizar su portafolio de deuda, encareciéndolo o generando desventajas frente a su competencia o a sus acreedores.

La metodología aquí desarrollada para encontrar óptimos de indicadores en un portafolio de endeudamiento, cuenta con las siguientes ventajas técnicas y teóricas que refuerzan su validez estructural. La primera de ella, es el uso de simulación de Montecarlo, que le permite al modelo resolver el problema de volver analíticas las funciones de distribución. Por otra parte la metodología se aparta de la estocasticidad explícita, la cual hace uso de métodos de optimización analíticos, haciendo más compleja la búsqueda de óptimos. Finalmente la metodología recurre a un método formal de tratamiento de múltiples objetivos en conflicto dimensionalmente, mediante un algoritmo multiobjetivo (AMO).

El método aplicado (procedimiento y herramienta) para llevar a cabo la optimización multiobjetivo cuenta con una ventaja de trazabilidad; la cual genera una asociación de resultados de forma inversa; es decir, una vez encontrada la solución óptima para la FMO, este tiene atado gran cantidad de resultados igualmente importantes para la posterior definición del portafolio de endeudamiento en un ambiente de optimalidad.

Las ventajas de contar con el postanálisis dentro del proceso de optimización de los indicadores de un portafolio de deuda, genera el ingrediente exploratorio y de toma de decisiones de los resultados ya generados en la optimización. Su componente probabilístico y de sensibilidad le ofrece al proceso y a las empresas tomadoras de decisiones un análisis matemático holístico de lo que actualmente se posee y de los pasos a seguir dentro de la gestión de portafolios de pasivos.

Futuros trabajos implicarán aplicar mejores métodos multiobjetivos y aplicar otros criterios de incertidumbre al modelo de optimización de indicadores de un portafolio de deuda distintos a la media, tales como, minimizar varianza, maximizar media/desviación estándar, minimizar arrepentimiento, etc.

Otro trabajo posterior dentro del análisis de optimización de un portafolio de deuda podría consistir en verificar y comparar los resultados obtenidos en esta oportunidad frente la aplicación de otra Metaheurística, tal como redes neuronales, enfriamiento simulado, búsqueda tabú, etc.

De igual modo se recomienda trabajar el tema de optimización aplicado al costo de capital de la compañía, el cual ha comenzado a desarrollarse a través del trabajo de optimización en el endeudamiento.

Bibliografía

ALEXANDER J. y BAPTISTA M., 2010. Active Portfolio Management with Benchmarking: A Frontier Based on Alpha. Journal of Banking and Finance. vol. 34, p. 2185-2197.

BAGHDASSARIAN W., 2007. Scope and fundamental challenges to public debt risk management - the Brazilian DMO perspective. Euro XXII.

BRANKE J. et al., 2009. Portfolio optimization with an envelope-based multi-objective evolutionary algorithm. European Journal of Operational Research. vol. 199, p. 684–693.

BROWN G., y CHEW D., 1999. Corporate Risk, Strategies and Management. Inglaterra: Risk books.

CAI et al., 2000. Portfolio Optimization Under Minimax Rule. Management Science. vol. 46, No 7, Julio 2000, p. 957-972.

CHANG T., YANG S. y CHANG K., 2009. Portfolio optimization problems in different risk measures using genetic algorithm. Expert Systems With Applications, 36 (7), p.10529-10537.

CRAMA Y. y SCHYNS M., 2003. Simulated annealing for complex portfolio selection problems. European Journal of Operational Research. vol. 150, 3 edición, p. 546-571.

DENTCHEVA D. y RUSZCZYNSKI A., 2006. Portfolio Optimization with Stochastic Dominance Constraints. Journal of Banking & Finance. vol. 30, p. 433–451.

DE LARA A., 2005. Medición y control de riesgos financieros. México: Limusa, p. 84-96.

DÍAZ A., 1996. Optimización Heurística y Redes Neuronales. Madrid: Paraninfo.

FARINELLI S. et al., 2008, Beyond Sharpe ratio: Optimal asset allocation using different performance ratios. Journal of Banking & Finance. vol. 32, 10 edición, p. 2057-2063.

FERNÁNDEZ A. y GÓMEZ S., 2007. Portfolio selection using neural networks. Computers & Operations Research. vol. 34, 4 edición, p. 1177-1191.

FERNÁNDEZ R. y JAIME E., 2008. Modelos de Optimización de Portafolios: un Estudio Comparativo Basado en Simulaciones Computacionales. Escuela Politécnica Nacional.

FRIJNS B., KOELLEN E. y LEHNERT T., 2006. On the Determinants of Porfolio Choice. Journal of Economic Behavior and Organization. vol. 66, p. 373-386.

GAIVORONSKI A., KRYLOV S. y VAN DER WIJST N., 2005. Optimal portfolio selection and dynamic benchmark tracking. European Journal of Operational Research. vol. 163. p. 115–131.

GAYGISIZ E., 2007. Public debt risk management in turkey with a stochastic optimization approach. En: Euro XXII.

GRAZIA A. y ZAFFARONI A., 2008. Robust optimization of conditional value at risk and portfolio selection. Journal of Banking and Finance. vol. 32, 10 edición, p. 2046-2056.

HORMAN G., 2007. Optimal debt management policy and risk management: how to deal with macroeconomic shocks. En: Euro XXII.

KONNO H. y YAMAZAKI H., 1991. Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Applications to Tokyo Stock Market. Management Science. vol. 37, No 5, p. 519-531.

LIDÉN E. y JONSSON F., 2004. An optimization approach to continuous liability management. Seminariearbete C-niva. Hendelshögskolan vid Göteborgs Universitet.

MEHL A. y REYNAUD J., 2008. Domestic debt structure in emerging Markets. En: Centre d'Economie de la Sorbonne, no 59. 5 p.

MINISTERIO DE HACIENDA Y CRÉDITO PÚBLICO DE COLOMBIA, 2003. Lineamientos de control de riesgo para la administración de los pasivos. Documento técnico. Bogotá.

R.O. M., 1989. The markowitz optimization enigma: is "optimized" optimal? Analyst Journal, (45): 31-42.

SMIMOU K., BECTOR C. y JACOBY G., 2008. Portfolio selection subject to experts' judgments. International Review of Financial Analysis. vol. 17, 5 edición, p. 1036-1054.

SPREITZER U. y REZNIK V., 2007. On the optimization of a CAPM portfolio using lower partial moments as a measure of risk and using the possibility of safeguarding its loss. Physica. vol. 37.

TOVAR C. y QUISPE-AGNOLI M., 2008. New financing trends in Latin America. En: Bank for International Settlements. no 36.

ZHANG W. y NIE Z., 2005. On admissible efficient portfolio selection policy. Applied Mathematics and Computation. vol. 169, 1 edición, p. 608-623.

@Risk and Decisions Tools Suite. Palisade Corporation. Copyright © 2011