

## Aspectos topológicos en el Análisis de Conceptos Formales Topological aspects in Formal Concept Analysis

Johana Ramírez Gaviria

Universidad Nacional de Colombia Facultad de Ciencias Exactas y Naturales Departamento de Matemáticas y Estadística Manizales, Colombia 2015

#### Aspectos topológicos en el Análisis de Conceptos Formales Topological aspects in Formal Concept Analysis

Tesis elaborada por

#### Johana Ramírez Gaviria

Presentado a la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales como Requisito Parcial para obtener el Grado de Magíster en Ciencias - Matemática Aplicada

#### Director Juan Carlos Riaño Rojas

Grupo académico de investigación: PCM Computational Applications

Universidad Nacional de Colombia Facultad de Ciencias Exactas y Naturales Departamento de Matemáticas y Estadística Manizales, Colombia 2015



## Agradecimientos

Agradezco en primer lugar al profesor Juan Carlos Riaño Rojas, por todo su apoyo de principio a fin en la realización de esta Maestría, por su paciencia, sus consejos y por guiarme de la mejor manera con sus conocimientos. Sin su disposición esta tesis no hubiese sido posible. Además, me gustaría agradecer al comité de evaluación por sus preguntas y comentarios constructivos. También quiero agradecer al grupo de investigación PCM Computational Applications por acogerme como integrante y respaldar mis estudios. Agradezco de manera muy especial a Margarita Toro y Juan Manuel Gómez, profesores de la Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín, por recibirme con los brazos abiertos en la sede Medellín y por los aportes que han brindado a mi formación académica. Esta investigación fue posible gracias a la financiación de la Universidad Nacional de Colombia y Colciencias a través del programa "Jóvenes Investigadores" con los proyectos "Estudio Monte Carlo de la propagación de espines 'Spin Transport' en materiales magnéticos" y "Análisis de Recubrimientos por reconstrucción tridimensional automática de imágenes de electrónica microscopía". Agradezco también a mis compañeros Sergio Ricardo Zapata y Fredy Ángel Jiménez por sus contribuciones a este trabajo y sus palabras de aliento. Por último, pero no menos importante, quiero darle las gracias a mi familia, especialmente a mis padres por ser mi soporte, por su entrega y amor incondicional, por hacer de su vida una fuente de inspiración a la mía. A mi novio por su inagotable paciencia, su apoyo constante y por sus acertadas recomendaciones. A mis amigos por estar siempre ahí para mí y alentarme a continuar. Gracias Dios por permitirme realizar esta tesis.

Johana Ramírez Gaviria 2015

## Resumen

En este trabajo se presenta un desarrollo teórico desde un enfoque topológico al Análisis de Conceptos Formales (FCA en inglés). Con esto se busca combinar el FCA y un estudio topológico, el cuál permita encontrar información subyacente en tablas de datos binarios y difusos; información oculta sin el uso de herramientas topológicas. De esta manera, se obtiene un método para realizar análisis de datos de forma más completa que con el uso exclusivo del FCA. Se estudian los principales resultados en el FCA como área de la matemática aplicada sobre bases de datos, entre ellos el Teorema Básico sobre el retículo concepto, que garantiza que los conceptos formales tienen estructura de retículo completo. La estructura topológica para los contextos formales es propuesta a partir de bases topológicas para el conjunto de objetos y atributos. Para determinar relaciones entre objetos y atributos, se caracterizan algunos operadores topológicos tales como el interior, la clausura y la frontera para los datos. Con la estructura topológica se explora además, la continuidad entre contextos formales. Por otra parte, se describe la representación de un contexto formal como grafo bipartito y se exponen topologías para su retículo asociado.

Se presenta una generalización para el Análisis de Conceptos Formales Difusos (FFCA en inglés) mostrando los resultados que se conservan del FCA clásico y se extiende la estructura topológica del caso binario al caso difuso. Finalmente, se muestran algunos ejemplos ilustrativos hallados en el estado del arte como aplicaciones de los resultados, se presentan las conclusiones, entre ellas, el hecho de que conociendo los conceptos formales de un contexto, se puede extraer rápidamente las bases topológicas propuestas para dotar de estructura topológica la tabla, así mismo, se concluye que la generalización para los datos difusos es posible, pero tiene grandes restricciones por falta de software especializado para realizar los cálculos necesarios. Por otra parte, como posibles trabajos futuros se plantea el desarrollo de algoritmos para cálculos en grandes volúmenes de datos difusos, el uso de otras topologías y la exploración de más relaciones entre el FCA, la teoría de retículos, de grafos y la topología.

Palabras clave: Análisis de conceptos formales, Topología sobre datos, minería de datos, datos difusos, retículo concepto.

## Abstract

#### Topological aspects in Formal Concept Analysis

This work presents a theoretical development from a topological approach to Formal Concept Analysis (FCA). This seeks to combine the FCA and a topological study, which enables find information in tables underlying binary and fuzzy data, and hidden information without the use of topological tools. We propose, a method for the analysis of data more accurate in contrast of using only FCA. TheBasic Theorem on Concept Lattices ensures that formal concepts have complete lattice structure, is discussed alongside the main results of FCA as an area of applied mathematics on databases. The topological structure for formal contexts is proposed from topological basis for the set of objects and attributes. With this in mind to determine relationships between objects and attributes, some topological operators such as interior, closure and boundary for the data are characterized. Also, it is studied the continuity between formal contexts with its topological structure and it is described the representation of formal context as a bipartite graph and the topologies of its associated lattice.

We present a generalization for Fuzzy Formal Concept Analysis (FFCA) showing that the results of the classical FCA are preserved and it is extended the topological structure from binary case to fuzzy case. Finally, we apply our methodology in examples of the state of the art. The conclusions are presented, including the fact that knowing the formal concepts of a context, you can quickly extract the topological bases proposed to provide topological structure for the table, also concluded that the generalization for fuzzy data is possible, but has great limited by the lack of specialized software to perform the necessary computations. As possible future work we propose to develop algorithms for computations in fuzzy large volumes of data, using other topologies and exploring more relationships between the FCA, Lattice, Graph and Topology theory.

Keywords: Formal Concept Analysis, Topology on data, datamining, fuzzy data, lattice concept.

# Índice general

Re	esum	en	v
Li	sta d	e figuras	viii
Li	sta d	e tablas	1
In	$\operatorname{trod}_{1}$	ucción	3
1.	Mai	co teórico	5
		Antecedentes	5 6
2.	Obj	etivos	7
	2.1.	Objetivo General	7
	2.2.	Objetivos Específicos	7
3.	Fun	damentos teóricos	9
	3.1.	Contexto formal	9
	3.2.	Concepto Formal	10
	3.3.	Retículo concepto	12
		3.3.1. Preconceptos, semiconceptos y conceptos	13
	3.4.	Producto de contextos formales	14
	3.5.	Grafo asociado al retículo concepto	16
4.	Esti	ructura Topológica en Contextos Formales	19
	4.1.	Enfoques topológicos FCA	19
	4.2.	Topología para los objetos y los atributos	19
		4.2.1. Operadores Topológicos	20
	4.3.	Topología para el contexto formal	24
		4.3.1. Topologías sobre retículos	25
		4.3.2. Continuidad	26

<b>5</b> .	Análisis de Conceptos Formales con datos continuos	<b>29</b>
	5.1. Análisis de Conceptos Formales Difuso	29
	5.2. Grafo asociado al retículo concepto difuso	31
	5.3. Topología caso difuso	32
6.	Aplicaciones	35
	6.1. Aplicaciones para el caso binario	35
	6.2. Aplicaciones en continuidad	42
	6.3. Aplicaciones caso difuso	46
7.	Conclusiones	49
	7.1. Trabajo Futuro	50
Α.	. Anexo A: Demostración Teorema básico sobre retículo concepto parte 1	.•
	y parte 2.	51
	A.1. Teorema básico sobre el retículo concepto parte 1	51
	A.2. Teorema básico sobre el retículo concepto parte 2	53
В.	. Anexo B: Software para el Análisis de Conceptos Formales	59
	B.1. Software para hallar conceptos formales y su retículo concepto	59
	B.1.1. Demos	59
	B.1.2. Software para descargar	60
	B.2. Otro software relacionado con FCA	61
	B.2.1. Java	61
	B.2.2. Python	62
	B.2.3. LATEX	62
	B.2.4. Otros	63
Bi	ibliografía	63

# Índice de figuras

3.1.	Retículo concepto del ejemplo inicial	14
	Grafo asociado al retículo del ejemplo	
3.3.	Ejemplo de un concepto formal en el grafo asociado	18
4.1.	Retículo concepto del ejemplo	25
6.1.	Retículo de la aplicación N. 1. Retículo dibujado en Conexp (Diseño de Wille)	36
6.2.	Grafo asociado a la aplicación N. 1	36
6.3.	Retículo de la aplicación N. 2	38
	Grafo asociado a la aplicación N. 2	36
	Retículo de la aplicación N. 3	41
6.6.	Grafo asociado al contexto formal de la aplicación N. 3	41
6.7.	Retículo Pacientes - Síntomas en $t_0$	43
6.8.	Retículo Pacientes - Síntomas en $t_1$	44
	Retículo concepto difuso	47
B.1.	Demo FcaStone	60
B.2.	KFCA demo - opción MATLAB	60
B.3.	Confexplore demo	61

## Índice de tablas

3.1.	Ejemplo de Contexto Formal
3.2.	Ejemplo de concepto formal
3.3.	Conceptos Formales del contexto 3.1
3.4.	Ejemplo de Producto Directo entre contextos
4.1.	Bases topológicas del ejemplo
6.1.	Vivir en el agua: Contexto formal de la aplicación N. 1
6.2.	Bases topológicas para la aplicación N. 1
	Contexto formal de la aplicación N. 2
6.4.	Bases topológicas de la aplicación N. 2
6.5.	Contexto formal de la aplicación N. 3
6.6.	Bases topológicas aplicación N. 3
	Relación entre pacientes y síntomas para un tiempo $t_0$
6.8.	Relación entre pacientes y síntomas para un tiempo $t_1$
	Bases topológicas pacientes - síntomas en $t_0$
6.10.	Bases topológicas pacientes - síntomas en $t_1$
	Ejemplo contexto difuso, tomado de [9]

## Introducción

El análisis de conceptos formales (FCA por sus siglas en inglés) ha sido desarrollado como un subcampo de la matemática aplicada basado en la jerarquización y el estudio matemático de conceptos [13]. La idea del FCA surge como aplicación de la teoría reticular sobre tablas de datos, cuando en 1984 el matemático alemán Rudolf Wille introduce el término. Desde entonces, el FCA ha sido cada vez más desarrollado como un fuerte campo de la investigación científica estimulada por un amplio espectro de aplicaciones en numerosas disciplinas, como la lingüística, ciencias de la computación, la psicología, medicina, la sociología, la antropología, la biología, las matemáticas y la ingeniería industrial [14, 39]. Dichas aplicaciones han estado orientadas a solucionar problemas que van desde la recuperación de información en sistemas de gestión de bases de datos y el análisis de datos léxicos, biológicos o sociales, hasta la jerarquización de conceptos en bases de datos y la optimización de procesos en la búsqueda de información redundante. Todos estos estudios han convertido el FCA en una de las técnicas más populares usadas por investigadores en problemas de minería de datos.

El método se utiliza principalmente para el análisis de datos y la representación de la información. Como técnica permite descubrir relaciones latentes que se encuentra en bases con grandes volúmenes de datos, que el experto no alcanza a identificar. Los datos describen la correspondencia entre un conjunto particular de objetos y un conjunto particular de atributos [7]. A partir de los datos el FCA se emplea para procesar, analizar, construir y representar matemáticamente estructuras conceptuales [13].

Más de 25 años de investigación han desarrollado una rica teoría matemática y muchos métodos y procedimientos que se presentan en más de mil publicaciones científicas [13, 34]. Esto ha llevado a que en los últimos 15 años el FCA se haya convertido en una comunidad internacional de investigación. Los trabajos más relevantes son consolidados en el evento conocido como *International Conference on Formal Concept Analysis* (ICFCA). La Primera Conferencia Internacional de Análisis de Conceptos Formales se celebró en Darmstadt, Alemania, en la primavera de 2003, y comenzó una serie de conferencias anuales sobre el estado del arte de este prometedor campo de la investigación y sus aplicaciones [14].

Por otro lado, el FCA ha sido estudiado en la matemática pura en campos como la lógica formal, la teoría de dominios y la teoría de categorías, como se puede ver en [34, 24, 21]. En menor medida se ha investigado el FCA desde un enfoque topológico, que es precisamente el propósito del trabajo planteado, y de esta manera enriquecer la teoría matemática del FCA.

## 1 | Marco teórico

#### 1.1. Antecedentes

El FCA tuvo su origen en actividades de reestructuración matemática, en particular, en el orden matemático y en la teoría de retículos. Desde entonces el FCA ha sido desarrollado como un subcampo de la matemática aplicada basado en la matematización y jerarquías de conceptos [13].

El FCA parte de la noción de contexto formal, que se define como una tripla (G, M, I), donde G y M son conjuntos, llamados objetos y atributos, respectivamente, e I es una relación binaria entre G y M. Por su parte, un concepto formal es una pareja compuesta de un subconjunto de objetos y un subconjunto de atributos de tal forma que los objetos comparten todos los atributos. De esta forma, el subconjunto de objetos se conoce como extensión y el subconjunto de atributos como intensión del concepto formal. La extensión y la intensión forman una conexión de Galois.

En los conceptos formales se define la relación de orden de subconcepto-superconcepto; un concepto es un subconcepto de un superconcepto si la extensión del primero está contenida en la extensión del segundo o equivalentemente si la intensión del subconcepto contiene la intensión del superconcepto.

Esta relación entre los conceptos genera una estructura de retículo completo, conocido como retículo concepto donde se toma la colección de conceptos formales de los datos los cuales son jerárquicamente ordenados por la relación de orden establecida, de esta estructura de retículo concepto se desprenden gran cantidad de propiedades de la teoría de retículos.

Por otra parte, la topología es relativamente un campo nuevo de las matemáticas, la mayoría de las investigaciones en el tema se han hecho desde 1900. La topología estudia las propiedades en los espacios topológicos que son invariantes bajo cualquier deformación continua. Como subcampos principales están,

- Topología general. Estudia los aspectos fundamentales de la topología e investiga las propiedades y conceptos inherentes a los espacios topológicos.
- Topología algebraica. Utiliza herramientas del álgebra abstracta para estudiar espacios topológicos.
- Topología diferencial. Estudia las funciones diferenciables sobre variedades diferenciables.

• Topología geométrica. Es el estudio de variedades y aplicaciones entre ellas, particularmente embebimientos de una variedad a otra.

#### 1.2. Estado del arte

Las investigaciones realizadas en estudios topológicos del FCA se originan desde comienzos de los 90s cuando aparece el término de Topología contextual. Un contexto topológico es un contexto formal cuyo conjunto de objetos y de atributos son espacios topológicos. Los contextos topológicos han establecido una herramienta en la representación de varias clases de estructuras ordenadas a través de métodos del Análisis de Conceptos Formales [35]. A continuación se indican algunos antecedentes relacionados al tema de investigación, realizados desde el 2002 a la fecha.

Con relación a las últimas investigaciones sobre Topología en el FCA, se ha encontrado que en su mayoría han estado orientadas a introducir estructuras topológicas inducidas por los conceptos formales y estudiar las relaciones entre propiedades topológicas y de orden, analizando el retículo formal desde un enfoque topológico, y artículos como [50, 48] también han trabajado específicamente con espacios métricos para caracterizar los conceptos en el retículo concepto y para definir cierta separación en los conceptos formales.

Por otra parte, en trabajos como [32] se han concentrado en construir una topología para el conjunto de atributos M y desarrollar un método alternativo para generar el retículo concepto encontrando las intensiones de todos los conceptos formales a partir de un espacio de aproximación sobre M.

En [26] se plantean nuevos modelos para el FCA usando nociones de la topología algebraica. El contexto formal convencional es reemplazado por una matriz con entradas "1" ó "0" denominada matriz contexto, para construir una familia simplicial (familia concepto), de ahi se desprenden propiedades que relacionan la teoría de la topología algebraica con el FCA.

Cabe resaltar que hasta el momento no se ha trabajado en dotar de estructura topológica los contextos formales en el FCA generalizado, donde los datos de las tablas toman valores difusos en lugar de valores binarios como se tiene para el FCA clásico.

## 2 | Objetivos

#### 2.1. Objetivo General

Estudiar aspectos topológicos en la teoría del Análisis de Conceptos Formales.

## 2.2. Objetivos Específicos

- Generar una topología sobre los contextos formales y sobre el retículo generado.
- Caracterizar los operadores topológicos.
- Formular propiedades sobre el FCA con la estructura de espacio topológico.
- Establecer diferencias entre las topologías usadas en la literatura y la topología propuesta.
- Definir una metodología para extender el análisis de conceptos formales a datos continuos.
- Extender la estructura topológica en FCA a datos no binarios.

## 3 | Fundamentos teóricos

#### 3.1. Contexto formal

[13] Un contexto formal está definido como un conjunto  $\mathbb{K}$  de estructura  $\mathbb{K} := (G, M, I)$ , donde G y M son conjuntos, mientras I es una relación binaria entre G y M. Es decir  $I \subseteq G \times M$ ; los elementos de G y de M son llamados objetos y atributos, respectivamente. gIm, i.e.  $(g, m) \in I$  indica entonces que el objeto g tiene el atributo m. Revisar ejemplo 3.1.

#### Operadores de derivación.

Sean  $X \subseteq G$  y  $Y \subseteq M$  arbitrarios, entonces

$$X \longrightarrow X^I := \{ m \in M \mid gIm \text{ para todo } g \in X \}$$
  
 $Y \longrightarrow Y^I := \{ g \in G \mid gIm \text{ para todo } m \in Y \}$ 

**Ejemplo inicial.** Se dará un ejemplo para ilustrar las definiciones más importantes en el FCA. La Tabla 3.1 describe para algunos animales cuál de los atributos mencionados tienen. Esto se indica mediante cruces. Una celda vacía en la Tabla 3.1 indica que el animal no tiene el atributo correspondiente.

	depredador	volador	pájaro	mamífero
León	×			×
Gorrión		X	X	
Águila	×	X	X	
Liebre				×
Avestruz			×	

Tabla 3.1: Ejemplo de Contexto Formal

#### Propiedades.

Sea  $Z \subseteq G$ ,  $Z_i \subseteq G$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , entonces

i) Si 
$$Z_1 \subseteq Z_2$$
, entonces  $Z_1^I \supseteq Z_2^I$ 

$$ii)$$
  $Z \subseteq Z^{II}$ 

$$iii)$$
  $Z^{III} = Z^{I}$ 

Estas propiedades también son válidas para  $Z \subseteq M$ ,  $Z_i \subseteq M$ ,  $i \in \{1, 2\}$ .

Para la demostración de las propiedades enunciadas consideraremos  $Z, Z_1, Z_2$  subconjuntos de G.

Demostración.

i) Suponga  $Z_1 \subseteq Z_2$ 

Ahora sea  $m \in \mathbb{Z}_2^I$ , por definición

$$gIm$$
 para todo  $g \in Z_2$ ,

en particular,

$$gIm$$
 para todo  $g \in Z_1$ ,

y esto es equivalente a que  $m \in Z_1^I$ . Así  $Z_2^I \subseteq Z_1^I$ 

ii) (Demostración contrarecíproca)

Tomaremos un elemento  $g \notin Z^{II}$  para llegar a que  $g \notin Z$ .

Sea  $g_0 \notin Z^{II}$ , luego  $g_0 \not I m_k$ , para algún  $m_k \in Z^I$ ,  $m_k$  fijo, así, por definición de la operación derivación

$$(\exists m_k g_0)(g_0 I m_k \wedge gIm_k \text{ para todo } g \in Z)$$

por lo tanto  $g_0 \notin Z$ .

iii) Por ii)  $Z\subseteq Z^{II}$ y esto implica que  $Z^I\supseteq (Z^{II})^I=Z^{III}$  (por i))

Entonces tenemos esta contenencia  $Z^I \supseteq Z^{III}$ .

Ahora aplicamos (ii) al conjunto  $Z^I$ , y obtenemos

$$Z^I \subseteq (Z^I)^{II} = Z^{III}$$
, así  $Z^I \subseteq Z^{III}$ 

con esto

$$Z^I \supseteq Z^{III}$$
y  $Z^I \subseteq Z^{III},$ luego  $Z^I = Z^{III}$ 

#### 3.2. Concepto Formal.

[13] Un concepto formal de un contexto formal  $\mathbb{K} := (G, M, I)$ , está definido como un par (A, B) con  $A \subseteq G$  y  $B \subseteq M$ , tales que

$$A = B^I$$
,  $y B = A^I$ 

A y B son llamados la extensión y la intensión del concepto formal (A,B), respectivamente. La relación de subconcepto y de superconcepto es dada por

$$(A_1, B_1) \leqslant (A_2, B_2)$$
 si y sólo si  $A_1 \subseteq A_2$   
si y sólo si  $B_1 \supseteq B_2$ 

El conjunto de todos los conceptos formales de  $\mathbb{K}$  junto con la relación de orden definida es denotado por  $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ .

En nuestro ejemplo la pareja ({Gorrión, Águila}, {volador, pájaro}) es un concepto formal porque las únicas características que tienen en común los dos animales son exactamente ser volador y pájaro, y viceversa los dos únicos animales que comparten exactamente estas características son el Gorrión y el Águila.

	depredador	volador	pájaro	mamífero
León	×			×
Gorrión		×	X	
Águila	×	X	X	
Liebre				×
Avestruz			×	

Tabla 3.2: Ejemplo de concepto formal

Los conceptos formales derivados del contexto dado en 3.1 se muestran en la Tabla 3.2 y el retículo correspondiente se muestra en la Figura 4.3.1.

#### Concepto objeto y concepto atributo

Dos tipos de conceptos formales, muy útiles son

El Concepto objeto, el cual dado un objeto  $g \in G$ , su concepto objeto es

$$\gamma g:=(\{g\}^{II},\{g\}^I)$$

Este determina el más pequeño concepto en  $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$  cuya extensión contiene a g.

Y, el Concepto atributo para el cual, dado un atributo  $m \in M$ , su concepto atributo es

$$\mu m := (\{m\}^I, \{m\}^{II})$$

y corresponde al más grande concepto en  $\mathfrak{Z}(\mathbb{K})$  cuya intensión contiene a m.

**Proposición.** Sea T un conjunto de índices, entonces

i) Para todo  $t \in T$ ,  $A_t \subseteq G$  es un conjunto de objetos, entonces

$$\left(\bigcup_{t \in T} A_t\right)^I = \bigcap_{t \in T} A_t^I$$

Conceptos	Formales		
Objetos	Atributos		
	depredador		
	volador		
	pájaro		
	mamífero		
León	depredador		
Leon	mamífero		
	depredador		
Águila	volador		
	pájaro		
León	depredador		
Águila	depredador		
Gorrión	volador		
Águila	voiadoi		
León	mamífero		
Liebre			
Gorrión	volador		
Águila	pájaro		
Avestruz	pajaro		

Tabla 3.3: Conceptos Formales del contexto 3.1

ii) Si  $B_t \subseteq M$  es un conjunto de atributos, entonces

$$f\left(\bigcup_{t\in T} B_t\right)^I = \bigcap_{t\in T} B_t^I$$

### 3.3. Retículo concepto

Teorema básico sobre el retículo concepto (Parte 1.)

 $\mathfrak{Z}(\mathbb{K})$  con  $\mathbb{K}:=(G,M,I)$  es un retículo completo cuyos ínfimos y supremos se pueden describir así:

Sea

$$\mathscr{C} = \{ (A_t, B_t) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}) \mid t \in T \},$$

entonces el ínfimo de  $\mathscr C$ es

$$\bigwedge \mathcal{C} = \left( \bigcap_{t \in T} A_t, \left( \bigcup_{t \in T} B_t \right)^{II} \right)$$

y el supremo de  $\mathscr{C}$  es

$$\bigvee \mathscr{C} = \left( \left( \bigcup_{t \in T} A_t \right)^{II}, \bigcap_{t \in T} B_t \right)$$

Este teorema es uno de los resultados más importante en el FCA porque garantiza que toda colección de conceptos formales de un contexto, tiene estructura de retículo completo.

#### Definición.

i) Un conjunto C se dice denso supremo en D (C es  $\bigvee$ -denso en D) si

$$D = \left\{ \bigvee X | X \subseteq C \right\}$$

es decir, si cada elemento de D es el supremo de algún subconjunto de C.

ii) Un conjunto C se dice denso ínfimo en D (C es  $\land$ -denso en D) si

$$D = \left\{ \bigwedge X | X \subseteq C \right\}$$

es decir, si cada elemento de D es el ínfimo de algún subconjunto de C.

#### Teorema básico sobre el retículo concepto(Parte 2.)

Un retículo completo L es isomorfo a  $\mathfrak{Z}(\mathbb{K})$  con  $\mathbb{K}:=(G,M,I)$  si y sólo si existen aplicaciones

$$\gamma: G \longrightarrow L \qquad \mu: M \longrightarrow L$$

tales que  $\gamma$  G es  $\bigvee$ -denso en L y  $\mu$  M es  $\bigwedge$ -denso en L. Y además

$$gIm \Leftrightarrow \gamma \ (g) \leqslant \mu \ (m)$$
 para  $g \in G$ ,  $m \in M$ 

El retículo asociado al contexto del ejemplo en la tabla 3.1 es dado en la figura 4.3.1.

#### 3.3.1. Preconceptos, semiconceptos y conceptos

Existen términos más débiles que el de concepto formal. En la teoría del FCA encontramos los preconceptos y los semiconceptos, definidos como sigue.

Sea  $\mathbb{K} := (X, Y, I)$ , un contexto formal,  $A \subseteq X$  y  $B \subseteq Y$ , decimos que

- i) (A, B) es un **preconcepto formal** si y sólo si  $A \subseteq B^I$ , lo que equivale a que  $B \subseteq A^I$
- ii) (A, B) es un  $\bigvee$ -semiconcepto formal si y sólo si  $A = B^I$ . Análogamente (A, B) es un  $\bigwedge$ -semiconcepto formal si y sólo si  $B = A^I$

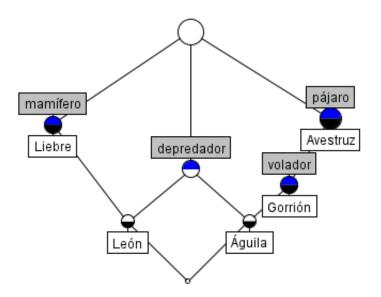


Figura 3.1: Retículo concepto del ejemplo inicial

Relación de orden sobre los preconceptos. Dados dos preconceptos (A, B) y (C, D), se define la siguiente relación de orden

$$(A,B) \leqslant_2 (C,D)$$
si y sólo si $A \subseteq C$  y  $B \subseteq D$ 

**Propiedad**. (A, B) es un concepto formal si y sólo si (A, B) es un preconcepto maximal. Además de esta propiedad, para los preconceptos y semiconceptos se tienen teoremas en su estructura de orden, similares a las dadas en el caso de los conceptos formales. Las más importantes pueden verse en [11] y [40].

#### 3.4. Producto de contextos formales

En esta sección se presentan algunas definiciones y resultados para el producto de contextos formales. Éstos son necesarios para abordar más adelante la continuidad de una aplicación entre contextos.

**Definición.** Dados dos contextos formales  $\mathbb{K} := (X, Y, I)$  y  $\mathbb{L} := (W, Z, J)$ , el producto directo de  $\mathbb{K}$  y  $\mathbb{L}$  es el contexto

$$\mathbb{K} \times \mathbb{L} = (X \times W, Y \times Z, \nabla),$$

donde

$$(x,y)\nabla(w,z)$$
 si y sólo si  $(x,y)\in I$  ó  $(w,z)\in J$ 

**Definición.**Un enlace doble entre los contextos formales  $\mathbb{K} := (X, Y, I)$  y  $\mathbb{L} := (W, Z, J)$ , es una relación  $R \subseteq X \times W$  para la que se tiene lo siguiente:

• Para todo objeto  $x \in X$ ,  $x^R = R(x)$  es una extensión de  $\mathbb{L}$ .

$$\begin{array}{c|c}
\hline
l m n \\
\hline
x \times \times \times \\
y \times \times
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\hline
p q \\
\hline
z \times \\
w \times \\
v \times \times
\end{array}$$

	$\overline{(l,p)}$	(l,q)	$\overline{(m,p)}$	(m,q)	(n,p)	$\overline{(n,q)}$
(x,z)	×	×	×		×	×
(x,w)	×	×		×	×	×
(x,v)	×	×	×	×	×	×
$\overline{(y,z)}$	×		×	×	×	×
$\overline{(y,w)}$		×	×	×	×	×
(y,v)	X	×	×	×	×	×

Tabla 3.4: Ejemplo de Producto Directo entre contextos

• Para todo atributo  $y \in Y$ ,  $y^R = R^{-1}(y)$  es una extensión de K.

El producto directo solo representa un subconjunto de todos los enlaces dobles. La notación  $R^{\nabla}$  indica la intensión de la relación R considerada como un conjunto de objetos en el producto directo.

**Lema.** Sean  $\mathbb{K} := (X, Y, I)$  y  $\mathbb{L} := (W, Z, J)$  contextos formales , y  $R \subseteq X \times W$  una relación. Para cualquier atributo  $y \in Y$ , los siguientes conjuntos son iguales:

$$C_{1} := R^{\nabla}(y) = \{ z \in Z \mid (y, z) \in R^{\nabla} \}$$

$$C_{3} := R(y^{f})^{J} = \{ w \in W \mid \exists x \in X, (x, y) \notin I \quad (x, y) \in R \}^{J}$$

$$C_{3} := \bigcap_{x \in y^{f}} R(x)^{J}$$

Además,  $R^{\nabla\nabla}(x)=R^{\nabla}(x^f)^J=\bigcap_{y\in x^f}R(y^f)^{JJ}$  para cualquier objeto  $x\in X$ 

**Teorema.** Considere los contextos  $\mathbb{K} := (X, Y, I)$  y  $\mathbb{L} := (W, Z, J)$  y una relación  $R \subseteq X \times W$ . Las siguientes condiciones son equivalentes

- i) R es una extensión del producto directo  $\mathbb{K} \times \mathbb{L}$ .
- ii) Para todo  $x \in X$ ,  $R(x) = R^{\nabla}(x^{f})^{J} = \bigcap_{y \in x^{f}} R(y^{f})^{JJ}$ .
- iii) R es un enlace dual y, para todo  $x \in X$ ,

$$\bigcap_{y \in x \not= 1} R(y^f)^{JJ} = R(x^{ff}).$$

#### 3.5. Grafo asociado al retículo concepto

#### **Definiciones previas**

Sea G = (V, E) un grafo,

• La vecindad del vértice  $x \in V$ , denotada N(x), se define como

$$N(x) = \{ y \in V \mid xy \in E \}$$

Además, para cada  $X \subseteq V$ 

$$N(X) = \bigcup_{x \in X} N(x) - X$$

• Un clique es un conjunto C tal que

$$C = \{(x, y) \mid x \neq y, x, y \in V, xy \in E\}$$

• Un conjunto independiente (o estable) I es de la forma

$$I = \{(x, y) \mid x \neq y, xy \notin E\}$$

- Un separador S de un grafo conexo G es un subconjunto de vértices tal que el subgrafo G(V-S) es disconexo.
- Un separador S de un grafo conexo es minimal si existen al menos dos componentes conexas distintas A y B de G(V-S) tal que N(A)=N(B)=S. A y B son llamados componentes completas

#### Grafo bipartito subyacente a una relación binaria [4]

Otra alternativa para estudiar un contexto formal, es representarlo como grafo y analizar sus propiedades desde la teoría de grafos, como se muestra a continuación.

Sea  $\mathbb{K} := (X, Y, I)$  un contexto formal, definimos un grafo subyacente asociado, denotado  $G_I$  como:

- $\bullet V = X \cup Y$
- $\bullet$  X e Y son cliques, es decir

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad \text{con } x_1 \neq x_2 \quad x_1 x_2 \in E$$
  
$$\forall y_1, y_2 \in X \quad \text{con } y_1 \neq y_2 \quad y_1 y_2 \in E$$

• Para un vértice  $x \in X$  y un vértice  $y \in Y$ ,  $xy \in E$  en  $G_I$  si y sólo si  $(x,y) \notin I$ .

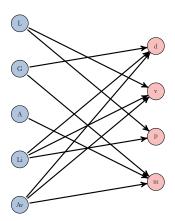
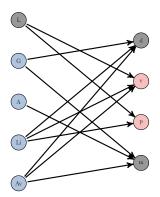


Figura 3.2: Grafo asociado al retículo del ejemplo



Considerando contextos con relaciones no vacías,  $G_I$  es siempre un grafo conexo.

Para el ejemplo considerado, se tiene el siguiente grafo asociado

**Teorema.** Sea  $\mathbb{K} := (X, Y, I)$  un contexto formal y  $G_I = (V, E)$  el correspondiente grafo co-partito. Sean  $\emptyset \neq A \subset X$  y  $\emptyset \neq B \subset Y$ , entonces (A, B) es un concepto formal si y sólo si  $S = V - (A \cup B)$  es un separador minimal de  $G_I$ .

El separador minimal S, representa al concepto (A, B).

Caracterización. Una pareja (A, B) es un concepto formal si y solo si en  $G_I$  se tiene que N(A) = N(B).

**Propiedad.** Sean  $(A_1, B_1)$  y  $(A_2, B_2)$  dos conceptos formales y  $S_1 = V - (A_1 \cup B_1)$ ,  $S_2 = V - (A_2 \cup B_2)$  sus correspondientes separadores en  $G_I$ . Sean además  $S = S_1 \cup S_2$ ,

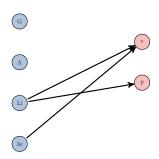


Figura 3.3: Ejemplo de un concepto formal en el grafo asociado

$$J=(V-S)\cap X$$
 y  $L=(V-S)\cap Y,$  entonces 
$$J \text{ es la extensión de } (A_1,B_1)\bigvee(A_2,B_2) \quad \text{y}$$
 
$$L \text{ es la intensión de } (A_1,B_1)\bigwedge(A_2,B_2)$$

## 4 | Estructura Topológica en Contextos Formales

#### 4.1. Enfoques topológicos FCA

Existen diferentes caminos para realizar un estudio topológico en el Análisis de Conceptos Formales, los más destacados son los siguientes

- Bajo la topología contextual en la cual tanto el conjunto de objetos como el de atributos son espacios topológicos
- Asignando al retículo de conceptos formales diferentes topologías para Posets.
- Partiendo de espacios métricos para caracterizar los conceptos formales.
- Desde la topología algebraica, se construye una familia simplicial a partir del contexto formal.

En este trabajo se escogió estudiar el FCA construyendo bases topológicas sobre el conjunto de objetos y el conjunto de atributos.

#### 4.2. Topología para los objetos y los atributos

Definimos

$$\mathcal{B}_G = \{A^{II} : A \subseteq G\}$$

Veamos que  $\mathcal{B}_G$  es una base topológica para  $G^{1}$ 

Demostración.

- i) Sea  $g \in G$ , entonces  $\{g\}^{II} \in \mathcal{B}_G$  y por resultado previo  $g \in \{g\}^{II}$ .
- ii) Ahora, sean  $A_1^{II}, A_2^{II} \in \mathcal{B}_G$ .

 $<sup>^{1}</sup>$ Esta base topológica fue usada en [48],[49],[50] y [51]

Si  $g \in A_1^{II} \cap A_2^{II},$ entonces  $g \in A_1^{II}$  y  $g \in A_2^{II},$  de aquí

$$\{g\} \subseteq A_1^{II} \quad \mathbf{y} \quad \{g\} \subseteq A_2^{II}$$

aplicando una vez la operación de derivación se tiene

$$\{g\}^I \supseteq A_1^{III} = A_1^I \quad \text{y} \quad \{g\}^I \supseteq A_2^{III} = A_2^I$$

operando nuevamente, se llega a

$$\{g\}^{II} \subseteq A_1^{II} \quad \text{y} \quad \{g\}^{II} \subseteq A_2^{II}$$

entonces

$$\{g\}^{II} \subseteq A_1^{II} \cap A_2^{II}$$

con 
$$\{g\}^{II} \in \mathcal{B}_G$$
y  $\{g\}^{II} \subseteq A_1^{II} \cap A_2^{II}$ 

Por lo tanto  $\mathcal{B}_G$  es una base topológica para G.

Análogamente se tiene que

$$\mathcal{B}_M = \{B^{II} : B \subseteq M\}$$

es una base topológica para M.

$\mathcal{B}_G$	$\mathcal{B}_M$		
G	M		
Ø	Ø		
León	depredador		
Águila	pájaro		
León	mamífero		
$\acute{ m A}{ m guila}$			
Gorrión	volador		
$ m \acute{A}guila$	pájaro		
León	depredador		
Liebre	mamífero		
Gorrión	depredador		
$\acute{ m A}{ m guila}$	volador		
Avestruz	pájaro		

Tabla 4.1: Bases topológicas del ejemplo

#### 4.2.1. Operadores Topológicos

**Proposición.** Sea  $\mathbb{K}:=(G,M,I)$  un contexto formal y  $A\subseteq G,$  entonces

- (i)  $p\in\overline{A}$ si y sólo si existe  $g\in A$ tal que  $g\in\{p\}^{II}.$
- (ii)  $p \in A^{\circ}$  si y sólo si  $\{p\}^{II} \subseteq A$ .

#### Capítulo 4.2. TOPOLOGÍA PARA LOS OBJETOS Y LOS ATRIBUTOS

(iii)  $p \in \partial(A)$  si y sólo si  $\{p\}^{II} \cap A \neq \emptyset$  y  $\{p\}^{II} \cap A^c \neq \emptyset$ .

Demostración. Sea  $A, C \subseteq G$ .

(i) Sea  $p \in \overline{A}$ , entonces  $\forall C^{II} \in \mathcal{B}_G$  tal que  $p \in C^{II}$  se tiene

$$C^{II} \cap A \neq \emptyset$$

en particular para  $\{p\}^{II}$ ,  $\{p\}^{II} \cap A \neq \emptyset$ .

Por otro lado, si  $\{p\}^{II} \cap A \neq \emptyset$  y  $p \in C^{II}$ ,  $\{p\} \subseteq C^{II}$  y de aquí  $\{p\}^{II} \subseteq C^{II}$ , así para todo básico  $C^{II}$  que contenga a p,  $C^{II} \cap A \neq \emptyset$ , es decir  $p \in \overline{A}$ .

- (ii) Suponga que  $p \in A^{\circ}$ , entonces existe un básico  $C^{II}$  tal que  $p \in C^{II} \subseteq A$ . Luego  $\{p\} \subseteq C^{II}$ . Utilizando las propiedades [1], se obtiene que  $\{p\}^{II} \subseteq C^{II} \subseteq A$ . El otro lado se tiene inmediatamente del hecho que  $p \in \{p\}^{II}$ .
- (iii) Si  $p \in \partial(A)$  entonces dado un básico  $C^{II}$  que contenga a p,

$$C^{II} \cap A \neq \emptyset$$
 y  $C^{II} \cap A^c \neq \emptyset$ 

en particular

$$\{p\}^{II} \cap A \neq \emptyset \quad \text{y} \quad \{p\}^{II} \cap A^c \neq \emptyset$$

Para la otra implicación basta observar que si  $p \in C^{II}$ , entonces  $\{p\}^{II} \subseteq C^{II}$ .

Corolario. Sea  $\mathbb{K} := (G, M, I)$  un contexto formal y  $A \subseteq G$ , entonces

- (i) Si  $p \in \overline{A}$  entonces existen  $m \in M$  y  $g \in A$  tales que  $(p, m) \in I$  y  $(g, m) \in I$ .
- (ii)  $p \in A^{\circ} \text{ si } \{p\} = \{p\}^{II}.$

Demostración.

- (i) Si  $p \in \overline{A}$  entonces por la proposición (i) existe  $g \in A$  tal que  $g \in \{p\}^{II}$ , luego  $(g, m) \in I$ , para todo  $m \in \{p\}^{I}$ , es decir  $(g, m) \in I$ , para todo m que está relacionado con p.
- (ii) Si  $\{p\} = \{p\}^{II}$  y  $p \in A$ , entonces  $p \in \{p\}^{II} \subseteq A$ , es decir  $p \in A^{\circ}$ .

Para nuestro ejemplo, suponga que  $A = \{\text{Le\'on, Liebre}\}$  y  $C = \{\text{Liebre, \'Aguila}\}$  entonces

- $\overline{A} = \{\text{Le\'on, Liebre}\}\$   $\overline{C} = \{\text{Gorri\'on, \'Aguila, Liebre, Avestruz}\}\$
- $A^{\circ} = \{\text{Le\'on, Liebre}\}$   $C^{\circ} = \{\text{\'Aguila}\}$
- $\partial A = \emptyset$   $\partial C = \{Gorrión, Liebre, Avestruz\}$

- $\{Gorrión\}^{II} = \{Gorrión, Águila\}$
- $\{\text{Águila}\}^{II} = \{\text{Águila}\}$
- $\{\text{Liebre}\}^{II} = \{\text{Le\'on, Liebre}\}$
- $\{Avestruz\}^{II} = \{Gorrión, Águila, Avestruz\}$

**Proposición.** Dado un contexto formal  $\mathbb{K} := (G, M, I)$ , existe un isomorfismo entre el retículo concepto  $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$  para cada una de las bases construidas ordenadas por contenencia, de la siguiente manera

$$\Phi: (\mathcal{B}_G, \subseteq) \longrightarrow \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}) \qquad \Theta: (\mathcal{B}_M, \supseteq) \longrightarrow \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$$

$$A^{II} \longmapsto \Phi(A^{II}) = (A^{II}, A^I) \qquad B^{II} \longmapsto \Theta(B^{II}) = (B^I, B^{II})$$

Demostración.

Veamos primero que  $\Phi: (\mathcal{B}_G, \subseteq) \longrightarrow \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$  como se definió es un isomorfismo de orden.

- i) Inyectividad. Sean  $\Phi(A_1^{II})=\Phi(A_2^{II})$ , entonces  $(A_1^{II},A_1^I)=(A_2^{II},A_2^I)$  y por lo tanto  $A_1^{II}=A_2^{II}$ .
- ii) Sobreyectividad. Sea (A, B) un concepto formal, entonces

$$A = B^I$$
 y  $B = A^I$  entonces  $A = (A^I)^I = A^{II}$ 

luego,  $\Phi(A^{II}) = (A, B)$ .

iii) Preservación del orden. Suponga que  $A_1^{II}\subseteq A_2^{II},$  por la relación de orden dada para el retículo tenemos que

$$\Phi(A_1^{II}) = (A_1^{II}, A_1^{I}) \leqslant (A_2^{II}, A_2^{I}) = \Phi(A_2^{II})$$

Análogamente se cumple i), ii) y iii) para la función  $\Theta: (\mathcal{B}_M, \supseteq) \longrightarrow \mathfrak{Z}(\mathbb{K})$ .

Se concluye entonces que las bases topológicas construidas ordenadas por contenencia  $(\mathcal{B}_G,\subseteq)$  y  $(\mathcal{B}_M,\subseteq)$  son isomorfas al retículo concepto  $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ .

Utilizando el Teorema básico sobre el retículo concepto (Parte 2.) y la proposición anterior se tiene el siguiente corolario

Corolario. Existen aplicaciones

$$\gamma_G: G \longrightarrow (\mathcal{B}_G, \subseteq) \qquad \mu_G: M \longrightarrow (\mathcal{B}_G, \subseteq)$$

$$\gamma_M: G \longrightarrow (\mathcal{B}_M, \subseteq) \qquad \mu_M: M \longrightarrow (\mathcal{B}_M, \subseteq)$$

tales que

- $i) \ \gamma_G(G)$ es V-denso en <br/>  $(\mathcal{B}_G,\subseteq)$  y  $\mu_G(M)$ es A-denso en <br/>  $(\mathcal{B}_G,\subseteq)$
- $ii) \ \gamma_M(G)$ es V-denso en <br/>  $(\mathcal{B}_M,\supseteq)$ y  $\mu_G(M)$ es ^-denso en <br/>  $(\mathcal{B}_M,\supseteq)$

Y además

$$gIm \Leftrightarrow \gamma_i\left(g\right) \leqslant \mu_i(m) \text{ para } g \in G, \quad m \in M \quad i \in \{G,M\}$$

**Proposición.** Las siguientes funciones cumplen con las condiciones del corolario anterior:

$$\gamma_G: G \longrightarrow (\mathcal{B}_G, \subseteq) \qquad \qquad \mu_G: M \longrightarrow (\mathcal{B}_G, \subseteq) 
g \longmapsto \{g\}^{II} \qquad \qquad m \longmapsto \{m\}^I$$

Demostración. Veamos que

- $i) \ \gamma_G(G)$ es V-denso en <br/>  $(\mathcal{B}_G,\subseteq)$  y  $\mu_G(M)$ es A-denso en <br/>  $(\mathcal{B}_G,\subseteq)$
- ii)  $gIm \Leftrightarrow \gamma_G(g) \leqslant \mu_G(m)$  para  $g \in G$ ,  $m \in M$
- i) Sea  $A^{II} \in \mathcal{B}_G$ , entonces

$$\{g\}^{II} \subseteq A^{II}$$
 para todo  $g \in A$ 

Luego  $A^{II}$  es cota superior de la colección  $\{\{g\}^{II}:g\in A\}$ .

Ahora, sea

$$\mathscr{C} = \left\{ \left( \{g\}^{II}, \{g\}^I \right) : g \in A^{II} \right\}$$

Por el Teorema básico tenemos que

$$\bigvee \mathscr{C} = \left( \left( \bigcup_{g \in A^{II}} \{g\}^{II} \right)^{II}, \bigcap_{g \in A^{II}} \{g\}^{I} \right)$$

Basta ver que  $A^{II} = \left(\bigcup_{g \in A^{II}} \{g\}^{II}\right)^{II}$ 

Como  $\{g\}^{II} \subseteq A^{II}$  para todo  $g \in A$ , entonces

$$\bigcup_{g \in A^{II}} \{g\}^{II} \subseteq A^{II} \quad \text{ y de aqui} \quad \left(\bigcup_{g \in A^{II}} \{g\}^{II}\right)^{II} \subseteq A^{II}$$

Por otra parte, si  $g \in A^{II}$ , entonces

$$g \in \bigcup_{g \in A^{II}} \{g\}^{II} \subseteq \left(\bigcup_{g \in A^{II}} \{g\}^{II}\right)^{II}$$

Así,  $\gamma_G(G)$  es  $\bigvee$ -denso en  $(\mathcal{B}_G,\subseteq)$ 

Veamos ahora que  $\mu_G(M)$  es  $\bigwedge$ -denso en  $(\mathcal{B}_G,\subseteq)$ .

Sea  $A^{II} \in \mathcal{B}_G$ , y  $m \in A^I$ , entonces

$$A^{II} \subseteq \{m\}^I \quad \text{ para todo } m \in A^I$$

Luego  $A^{II}$  es cota inferior de la colección  $\{\{m\}^I: m \in A^I\}$ .

Ahora, sea

$$\mathscr{C} = \left\{ \left( \{m\}^I, \{m\}^{II} \right) : m \in A^I \right\}$$

Por el Teorema básico tenemos que

$$\bigwedge \mathcal{C} = \left( \bigcap_{m \in A^I} \{m\}^I, \left( \bigcup_{m \in A^I} \{m\}^{II} \right)^{II} \right)$$

Basta ver que  $A^{II} = \bigcap_{m \in A^I} \{m\}^I$ 

Como  $A^{II} \subseteq \{m\}^I$  para todo  $m \in A^I$ , entonces

$$A^{II} \subseteq \bigcap_{m \in A^I} \{m\}^I$$

Por otra parte, supongamos que

$$\bigcap_{m \in A^I} \{m\}^I \subseteq A^{II},$$

entonces existe  $y \in \{m\}^I$  para todo  $m \in A^I$  tal que  $y \notin A^{II}$ , luego yIm para todo  $m \in A^I$  pero, existe  $x \in A^I$  tal que yIx. Contradicción.

En conclusión,  $\mu_G(M)$  es  $\wedge$ -denso en  $(\mathcal{B}_G, \subseteq)$ .

ii) Sean  $g \in G$  y  $m \in M$  y suponga que gIm si y solo si  $m \in \{g\}^I$ , si y solo si  $\{m\}^I \supseteq \{g\}^{II}$ , si y solo si  $\gamma_G(g) \leq \mu_G(m)$ .

## 4.3. Topología para el contexto formal

Construidas las bases para G y M tenemos que la colección  $\mathcal{B},$  definida como sigue

$$\mathcal{B} = \{ C \times D : C \in \mathcal{B}_G \ y \ D \in \mathcal{B}_M \}$$

es una base topológica para  $G \times M$ .

Note que  $\mathcal{B}$  también puede escribirse como

$$\mathcal{B} = \{ A^{II} \times B^{II} : A \subseteq G \text{ y } B \subseteq M \}$$

## Proposición.

Si (A,B) es un concepto formal, entonces  $A\times B\subseteq G\times M$  es un elemento básico. Demostración.

Si (A, B) es un concepto formal, entonces

$$A = B^I$$
 y  $B = A^I$ 

De aquí 
$$A=(A^I)^I=A^{II}$$
 y también  $B=(B^I)^I=B^{II},$  por lo tanto 
$$A\times B=A^{II}\times B^{II}\in \mathcal{B}.$$

Observación. Los elementos de la base topológica para G y para M corresponden exactamente a la colección de extensiones y la colección de intensiones de los conceptos formales, respectivamente.

## 4.3.1. Topologías sobre retículos

Además de la estructura topológica para el contexto formal considerada, puede considerarse también dotar de una topología al retículo concepto para realizar un estudio topológico desde la estructura jerárquica de los conceptos formales. Entre las posibles topologías usadas comunmente en Posets y más propiamente en retículos, se pueden destacar las siguientes:

## Topología de Scott

**Definición**. Un subposet  $(U, \leq)$  de un poset  $(P, \leq)$  es Scott abierto si

- (i) U es un subposet superior.
- (ii) Para cualquier conjunto dirigido  $S\subseteq P$  con un supremo  $\bigvee S,$  si  $\bigvee S\in U,$  entonces  $S\cap U\neq\varnothing$

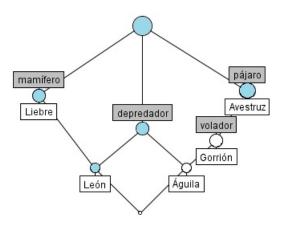


Figura 4.1: Retículo concepto del ejemplo

**Proposición**. Toda función Scott continua es creciente.

**Proposición**. Sea  $(P, \ge)$ ,  $(Q, \le^*)$  posets y sea f de P a Q una función Scott continua. Si f es un homeomorfismo entonces la pareja  $(f, f^{-1})$  es una conección de Galois.

## Topología de Lawson<sup>2</sup>

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Más información sobre esta topología puede encontrarse en [19]

**Topología inferior** Sea L un poset. Llamamos la topología generada por los complementos  $L \setminus \uparrow x$  de los filtros principales (como una subbase de conjuntos abiertos) la topología inferior y se denota por  $\omega(L)$ .

**Topología de Lawson** Sea L un **dcpo** (conjunto parcialmente ordenado dirigido y completo). Entonces el común refinamiento  $\sigma(L) \vee \omega(L)$  de la topología de Scott y la topología inferior se conoce como la topología de Lawson y se denota por  $\lambda(L)$ .

#### 4.3.2. Continuidad

## Continuidad para enlaces dobles

**Definiciones.** Considere los contextos  $\mathbb{K} := (X, Y, I)$  y  $\mathbb{L} := (W, Z, J)$ .

- Una relación  $R \subseteq X \times W$  es extensionalmente continua si ésta refleja las extensiones de  $\mathbb{L}$ , es decir, si para toda extensión A de  $\mathbb{K}$ , la preimagen  $R^{-1}(A)$  es una extensión de  $\mathbb{K}$ .
- $R \subseteq X \times W$  es extensionalmente objeto-continua (atributo-continua) si ésta refleja las extensiones-objeto de  $\mathbb{L}$ , es decir, si para toda extensión-objeto  $o = w^{JJ}$  (extensión-atributo  $o = z^J$ ), la preimagen  $R^{-1}(o)$  es una extensión de  $\mathbb{K}$  (pero no necesariamente una extensión-objeto).

**Propiedad.** Sean  $\mathbb{K} := (X, Y, I)$  y  $\mathbb{L} := (W, Z, J)$  contextos y  $f : X \to W$  una función, f es extensionalmente continua si y sólo si es extensionalmente atributo-continua.

**Definiciones.** Considere los contextos  $\mathbb{K} := (X, Y, I)$  y  $\mathbb{L} := (W, Z, J)$ .

• Sea R un enlace doble entre  $\mathbb{K}$  y  $\mathbb{L}$ . Se dice que R es funcional si, para cualquier  $x \in X$ , la extensión R(x) es generada por un único objeto  $f_R(x) \in W$ .

$$R(x) = f_R(x)^{JJ}$$

En este caso R se dice que induce la correspondiente función

$$f_R:X\to W$$

• Un infomorfismo de K a L es una pareja de funciones

$$f^{\rightarrow}: X \rightarrow W \text{ y } f^{\leftarrow}: Z \rightarrow Y$$

tales que  $(x, f^{\leftarrow}(z)) \in I$  si y sólo si  $(f^{\rightarrow}(x), z) \in J$ , para todo  $x \in X$  y  $z \in Z$ .

**Propiedades.** Considere los contextos  $\mathbb{K} := (X, Y, I)$  y  $\mathbb{L} := (W, Z, J)$ .

• Los infomorfismos de  $\mathbb{K}$  a  $\mathbb{L}$  son exactamente los infomorfismos de  $\mathbb{K}^c$  a  $\mathbb{L}^c$ .

• Sea  $(f^{\rightarrow}, f^{\leftarrow})$  un infomorfismo de  $\mathbb{K}$  a  $\mathbb{L}$  y definimos relaciones

$$R \subseteq X \times W$$
 y  $S \subseteq Y \times Z$ 

por  $R(x) = f^{\rightarrow}(x)^{JJ}$  y  $S^{-1}(z) = f^{\leftarrow}(z)^{ff}$ . Entonces R es un enlace dual de  $\mathbb{K}^c$  a  $\mathbb{L}$  y tenemos  $R^{\nabla} = S$ .

Además R es extensionalmente continua de  $\mathbb{K}^c$  a  $\mathbb{L}^c$  y  $S^{-1}$  es intensionalmente continua de  $\mathbb{L}^c$  a  $\mathbb{K}$ .

• Sea R un enlace dual de  $\mathbb{K}^c$  a  $\mathbb{L}$  tal que R y  $R^{\nabla_{-1}}$  son funcionales. Si R es extensionalmente continua, entonces las funciones inducidas por R y por  $R^{\nabla_{-1}}$  constituyen un infomorfismo de  $\mathbb{K}$  a  $\mathbb{L}$ .

#### Continuidad desde la estructura topológica

Además de la continuidad vista para enlaces dobles, la estructura topológica permite analizar la continuidad para aplicaciones entre dos contextos formales.

Dados dos contextos formales, digamos  $\mathbb{K} = \langle G, M, I \rangle$  y  $\mathbb{L} = \langle P, N, J \rangle$  y un funcional  $f : \mathbb{K} \to \mathbb{L}$ 

Se dice que f es continua si y sólo si para todo elemento básico A en  $\mathbb{L}$ , se tiene que  $f^{-1}(A)$  es un abierto en  $\mathbb{K}$ .

#### Propiedad Si

$$f: \mathbb{K} := (X, Y, I) \longrightarrow \mathbb{L} := (W, Z, J)$$

es una función continua entre contextos formales, entonces f es extensionalmente continua

# 5 | Análisis de Conceptos Formales con datos continuos

## 5.1. Análisis de Conceptos Formales Difuso

Para extender el FCA al caso difuso (FFCA), se parte de un álgebra  $L:=(L,\vee,\wedge,\otimes,\rightarrow,0,1)$  tal que  $(L,\vee,\wedge,0,1)$  es un retículo completo con elemento mínimo 0 y máximo 1.  $\langle L,\otimes,1\rangle$  es un monoide conmutativo ( $\otimes$  es un operador conmutativo, asociativo, y con neutro 1).

 $\otimes$ y  $\rightarrow$  satisfacen las propiedades de adjunción. Para todo  $a,b,c\in L$ 

$$a \otimes b \leq c$$
 si y sólo si  $a \leq b \rightarrow c$ 

Los elementos de L son llamados los grados de verdad (usualmente  $L\subseteq [0,1], \otimes y \to$  funciones de verdad, "conjunción difusa" e "implicación difusa" ). Estas funciones de verdad se definen como sigue:

## Conjunción

$$v(a \otimes b) = \min\{v(a), v(b)\}\$$

#### **Implicación**

$$v(a \to b) = \max\{1 - v(a), v(b)\}$$

Para controlar la generación de los conceptos, se define una cobertura, como una función unaria

$$*: L \longrightarrow L$$

que satisface, para todo  $a \in L$ 

- $i) 1^* = 1$
- $ii) a^* \leq a$
- $iii) (a \rightarrow b)^* \leqslant a^* \rightarrow b^*$
- $iv) \ a^{**} = a^*$

Dos casos límite de cobertura son

- 1. La identidad  $a^* = a$ , para todo  $a \in L$
- 2. La globalización

$$a^* = \begin{cases} 1 & \text{si } a = 1\\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se define un L-conjunto A en un universo U, como una aplicación  $A:U\longrightarrow L$ , y A(u) se interpreta como el grado en que u pertenece a A.

Si  $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ , entonces A puede notarse como

$$A = \{a_1/u_1, \dots, a_n/u_n\}$$

lo que significa que  $A(u_i) = a_i$ , para todo i = 1, ..., n.

Para simplificar escribimos u en lugar de 1/u y no escribimos nada cuando tengamos 0/w.  $L^U$  denota la colección de todos los L—conjuntos en U.

Dados  $A, B \in L^U$  se define  $A \cap B \in L^U$  como

$$(A \cap B)(u) = A(u) \wedge B(u)$$

у

$$S(A,B) = \bigwedge_{u \in U} (A(u) \to B(u))$$

que generaliza la relación clásica  $\subseteq$ .

S(A,B) representa un grado en el cual A es subconjunto de B. En particular escribimos  $A \subseteq B$  si y sólo si S(A,B) = 1. Como consecuencia  $A \subseteq B$  si y sólo si  $A(u) \leq B(u)$  para todo  $u \in U$ .

Para L-conjuntos  $A \in L^X$  (L- conjunto de objetos) y  $B \in L^Y$  (L- conjunto de atributos), definimos los L-conjuntos  $A^{\uparrow} \in L^Y$  y  $B^{\downarrow} \in L^X$  por:

$$A^{\uparrow}(y) = \bigwedge_{x \in X} (A(x)^* \to I(x, y)) \quad \mathbf{y}$$
$$B^{\downarrow}(x) = \bigwedge_{y \in Y} (B(y)^* \to I(x, y))$$

Consideremos ahora el conjunto:

$$\mathfrak{B}(X^*, Y^*, I) = \{(A, B) \in L^X \times L^Y | A^{\uparrow} = B, B^{\downarrow} = A\}$$

 $\mathfrak{B}(X^*,Y^*,I)$  es el conjunto de conceptos formales difusos y está ordenado mediante la siguiente relación. Dados dos conceptos formales  $(A_1,B_1),(A_2,B_2)\in\mathfrak{B}(X^*,Y^*,I)$ 

$$(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2)$$
 si y sólo si  $A_1 \subseteq A_2$   
si y sólo si  $B_1 \supseteq B_2$ 

Los operadores  $\uparrow$  y  $\downarrow$  forman una conexión de Galois con coberturas.

 $\mathfrak{B}((X^*,Y^*,I),\leqslant)$  es llamado el retículo concepto difuso (con coberturas) inducido por (X,Y,I).

Nota. Las coberturas pueden ser vistas como parámetros que controlan el tamaño de un retículo concepto difuso. Además, para  $L=\{0,1\}$  el retículo concepto difuso coincide con el retículo concepto ordinario. Con frecuencia se utiliza como cobertura la identidad.

## 5.2. Grafo asociado al retículo concepto difuso

Un resultado que se conserva para la extensión del FCA a datos difusos es la representación del contexto formal como grafo, en este caso como un grafo difuso.

## Generador de conceptos formales difusos

En lugar de considerar el conjunto entero de conceptos formales difusos  $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ , se toma sólo una parte de estos  $\underline{\mathfrak{B}}_c(\mathbb{K}) \subseteq \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$  conocida como crisply generador de conceptos difusos. Un concepto  $(A, B) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$  es llamado un crisp concepto generador si existe un conjunto crisp  $B_c \subseteq M$  de atributos tales que  $A = B_c^{\downarrow}$  (y así  $B = B_c^{\downarrow\uparrow}$ )

$$\underline{\mathfrak{B}}_{c}(\mathbb{K}) = \{(A, B) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}) \mid \text{ existe } B_{c} \subseteq M : A = B_{c}^{\downarrow}\}$$

 $\mathfrak{B}_c(\mathbb{K})$  es un subretículo completo de  $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ 

#### Grafos difusos[18]

Los grafos difusos usados a continuación son finitos y no dirigidos. Un grafo difuso  $G = (V, \mu, \rho)$  es un conjunto no vacío V junto con un par de funciones  $\mu : V \to [0, 1]$  y  $\rho : V \times V \to [0, 1]$  tales que para todos x, y en  $V, \rho(x, y) \leqslant \mu(x) \bigwedge \mu(y)$ .  $\mu$  es llamado el conjunto de vértices difusos de G y  $\rho$  el conjunto de aristas difusas de G, respectivamente. Para  $P \subseteq V, H = (P, v, \tau)$  es llamado un subgrafo difuso de  $G = (V, \mu, \rho)$  inducido por P si  $\mu(x) = v(x)$  para todos  $x, y \in P$  y  $\tau(x, y) = \rho(x, y)$  para todo  $x, y \in P$ . Similarmente  $H = (P, v, \tau)$  se dice que es un subgrafo difuso parcial de  $G = (V, \mu, \rho)$  si  $v \subseteq \mu$  y  $\tau \subseteq \rho$ .

#### Caminos y conexidad de un grafo difuso

Un camino P en un grafo difuso  $G = (V, \mu, \rho)$  es una secuencia de vértices distintos  $x_0, x_1, \ldots, x_n$  (excepto posiblemente  $x_0$  y  $x_n$ ) tales que  $\rho(x_{i-1}, x_i) > 0$ , con  $1 \le i \le n$ , donde  $n \ge 1$  es llamado la longitud de camino de P. Las parejas consecutivas  $(x_{i-1}, x_i)$  son conocidas como las aristas del camino. La fuerza del camino P está definido por  $\bigwedge_i^n \rho(x_{i-1}, x_i) > 0$ , con  $1 \le i \le n$ . El diámetro de  $x, y \in V$ , denotado por diam(x, y) es la longitud de la trayectoria más larga de ir de x a y y si diam(x, y) = k, El peso de la trayectoria más fuerte desde x a y es denotado por  $\rho^{\infty}(x, y)$  y está definido por  $\rho^{\infty}(x, y) = \bigvee \{\rho^i(x, y) | i = 1, 2, 3, ..., k\}$  (donde  $\rho^i(x, y)$  es el peso del camino de longitud i desde x a y).

Un subgrafo difuso parcial  $(\mu, \rho)$  se dice conexo si para todo  $x, y \in supp(\mu), \rho^{\infty}(x, y) > 0$ . Se puede ver que si diam(x, y) = 1, entonces  $\rho^{\infty}(x, y) = \rho(x, y)$ . En efecto, x y y están conectados si y sólo si  $\rho^{\infty} > 0$ . Las clases de equivalencia de vértices bajo esta relación son llamadas componentes conexas del grafo difuso. Ellas son justamente los subgrafos difusos maximales conexos. Cualquier camino más fuerte que une dos vértices x, y tiene peso  $\rho^{\infty}(x,y)$ .

Una desconexión de un grafo difuso  $G = (V, \mu, \rho)$  es un conjunto de vértices D cuyo resultado al removerlos es una desconexión o un grafo de un sólo vértice. El peso de D está definido como  $\sum_{x \in D} \bigwedge \{\rho(x, y) | \rho(x, y) \neq 0, y \in V\}$ . La conectividad de vértices de un grafo difuso G denotado por  $\Omega(G)$ , se define como el peso mínimo de desconexión en G.

## Grafo difuso subyacente a la relación difusa

[18] Sea  $K = \langle X, Y, I \rangle$  un L-contexto (contexto difuso). Definimos el grafo difuso asociado a K como  $G = (X \cup Y, \mu, \rho)$  donde  $\mu$  es la función de pertenencia de  $X \cup Y$  a L y  $\rho$  es la función de pertenencia de aristas tales que  $\mu(x) \neq 0$ ,  $\mu(y) \neq 0$  con  $supp(\mu(x))$ ,  $supp(\mu(y))$  grafos completos,  $\forall x \in X$ ,  $\forall y \in Y$  y

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \in X, y \in Y \text{ y } I(x,y) \neq 0 \\ > 0 & \text{para } x \in X, y \in Y \text{ y } I(x,y) = 0 \end{cases}$$

**Teorema** Sea  $\mathbb{K} = \langle X, Y, I \rangle$  un contexto formal difuso y  $G = (V, \mu, \rho)$  el correspondiente grafo difuso conexo con  $V = X \cup Y$  definido como arriba. Si  $\langle A, B \rangle$  es un concepto difuso generador de  $\mathbb{K}$  donde  $\emptyset \neq supp(A) \subset X$ ,  $\emptyset \neq supp(B) \subset Y$  entonces  $D = V - (supp(A) \cup supp(B))$  es una desconexión minimal de G. Por el contrario, para cada desconexión minimal de G existe al menos siempre un concepto difuso generador.

## 5.3. Topología caso difuso

En la generalización del Análisis de Conceptos Formales al caso difuso se conservan los Teoremas que garantizan la estructura de retículo completo en los conceptos difusos.

Es importante notar que a pesar de que los principales resultados para el caso clásico se extienden al caso difuso hay una gran diferencia entre los dos y es dada que en el caso difuso no se parte simplemente de dos conjuntos y una relación, sino que se trabaja con conjuntos difusos de la forma  $X \in L^G := G \to L$  para el caso de los objetos y  $Y \in L^M := G \to L$  para los atributos, por lo tanto se hace necesario hacer dar las definiciones de topología difusa y base topológica difusa.

**Definición.** [41] Sea X un conjunto y sea  $\tau$  una familia de conjuntos difusos en X. Entonces  $\tau$  es llamada una  $topología\ difusa$  en X si y sólo si satisface las condiciones:

- 1.  $\mu_{\varnothing}, \mu_X \in \tau$
- 2. Si  $g_i \in \tau$ ,  $i \in I$ , entonces  $\bigvee_I g_i \in \tau$
- 3. Si  $g, h \in \tau$ , entonces  $g \wedge h \in \tau$

La pareja  $(X,\tau)$  es llamada un espacio topológico difuso.

**Definición.** Sea  $\tau$  una topología difusa en X y sea  $\mathscr{B} \subset \tau$ .  $\mathscr{B}$  se conoce como una base para  $\tau$  si cada elemento de  $\tau$  es el supremo de miembros de  $\mathscr{B}$ .

Con esta generalización de espacio topológico en conjuntos difusos se puede construir una estructura topológica para los contextos formales difusos de manera similar al caso binario.

## Bases topológicas difusas para FFCA

Dado un contexto formal difuso  $\mathbb{K} = \langle X, Y, L \rangle$  definimos entonces la base topológica para los conjuntos difusos de L-objetos y L-atributos de la siguiente forma

$$\mathscr{B}_X = \{ A^{\uparrow\downarrow} \mid A \subset X \}$$

У

$$\mathscr{B}_Y = \{ B^{\downarrow \uparrow} \mid B \subset Y \}$$

Estas bases quedan bien definidas porque tanto las propiedades de los conceptos formales difusos como la generalización de los conceptos de base y espacio topológico son compatibles, por lo tanto, de esta manera estamos generando una estructura topológica para el caso difuso.

## Capítulo 5. ANÁLISIS DE CONCEPTOS FORMALES CON DATOS CONTINUOS

## 6 | Aplicaciones

El Análisis de Conceptos Formales es un método muy versátil porque puede ser usado en cualquier rama del conocimiento en la que se tenga información organizada en forma de datos binarios o difusos. Por tal motivo en este trabajo se optó por escoger ejemplos ilustrativos para aplicar la teoría desarrollada y presentada, tanto en el caso binario como en el difuso.

## 6.1. Aplicaciones para el caso binario

A continuación se mostrarán ejemplos usados en la literatura del Análisis de Conceptos Formales, con la idea de mostrar la implementación de la teoría y dar a conocer algunos aportes que brinda la combinación de usar Análisis de Conceptos formales y topología sobre bases de datos.

Aplicación N. 1 Considere el siguiente contexto formal

			$\overline{\mathbf{M}}$					
		Z necesita agua para vivir	A vive en agua	Lyvive en tierra	Z necesita clorofila	W monocotiledóneas	M puede moverse	Harmidades Extremidades
	sanguijuelas	X	X				X	
	rana	X	X	X			X	X
$\mathbf{G}$	perro	X		X			X	X
	maleza acuática	X	X		X	X		
	caña	X	X	X	X	X		
	maíz	X		X	X	X		

Tabla 6.1: Vivir en el agua: Contexto formal de la aplicación N. 1

A la tabla 6.1 corresponden los siguientes 13 conceptos formales organizados de forma

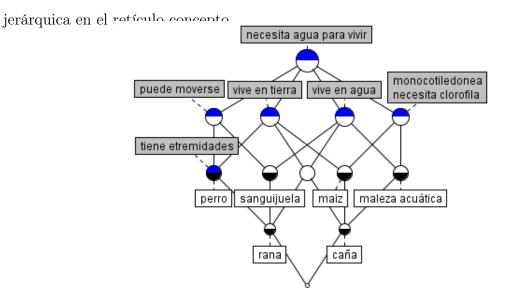


Figura 6.1: Retículo de la aplicación N. 1. Retículo dibujado en Conexp (Diseño de Wille)

La representación como grafo es la siguiente. Como puede observarse el grafo tiene un nodo atributo aislado, lo que representa que todos los objetos de la tabla comparten esta característica.  $^{1}$ 

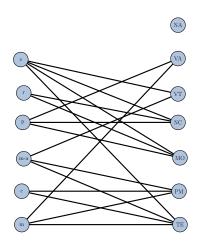


Figura 6.2: Grafo asociado a la aplicación N. 1.

Bases topológicas para el conjunto de objetos y el conjunto de atributos:

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>A pesar de no aparecer en la gráfico, existe una arista entre cada par de objetos diferentes e igualmente existe una arista que une cualquier par de atributos diferentes. Esto con el fin de hacerlo más legible. En adelante los grafos serán de esta forma.

$\mathcal{B}_G$	$\mathcal{B}_M$
G	M
Ø	NA
m.a c - m	NA - NC -MO
r - p	NA - VT - PM - TE
c	NA - VA - VT - NC - MO
r	NA - VA -VT -PM - TE
m.a c	NA - VA - NC - MO
s - r	NA - VA - PM
r - c	NA - VA - VT
c -m	NA - VT - NC - MO
s - r - m.a c	VA
r - p - c - m	VT
s - r - p	NA - PM

Tabla 6.2: Bases topológicas para la aplicación N. 1

En este ejemplo, podemos tener el subconjunto de objetos  $\{s,p\}$ , que corresponde a los animales sanguijuela y perro. Este subconjunto no es extensión de ningún concepto formal, sin embargo podemos hallar su interior, su clausura y su frontera para encontrar información sobre la relación de estos dos animales con los demás de la tabla, según las características que se están teniendo en cuenta.

$$Int(\{s, p\}) = \emptyset$$
$$\overline{\{s, p\}} = \{s, p\}$$
$$\partial(\{s, p\}) = \{s, p\}$$

Como conclusión del resultado al aplicar los operadores topológicos, puede decirse que el perro y la sanguijuela no sólo no forman un concepto formal, sino que además, son animales que no guardan relación para los atributos considerados en la tabla.

## Aplicación N. 2

En la aplicación N. 2 se considera el siguiente contexto formal.

$\overline{}$					
	Par	× Impar	Primo	Compuesto	× Cuadrado
1		X			X
2	X		×		
3		X	X		
4	X			X	X
5		X	X		
6	X			X	
7		X	X		
1 2 3 4 5 6 7 8	×			X	
9		X		X	X
10	×			X	

Tabla 6.3: Contexto formal de la aplicación N. 2.

Con su correspondiente retículo concepto

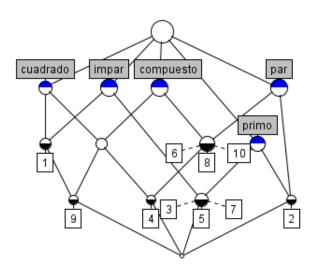


Figura 6.3: Retículo de la aplicación N. 2

Y su grafo bipartito asociado

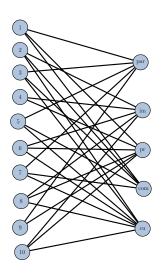


Figura 6.4: Grafo asociado a la aplicación N. 2

Bases topológicas para el conjunto de objetos y el conjunto de atributos:

$\mathcal{B}_G$	$\mathcal{B}_M$
G	M
Ø	Ø
1 - 3 - 5 - 7 - 9	Impar
2 - 4 - 6 - 8 - 10	Par
2 - 3 - 5 - 7	Primo
2	Par - Primo
4 - 9	Compuesto - Cuadrado
4 - 6 - 8 - 9 -10	Compuesto
9	Impar - Compuesto - Cuadrado
1 - 9	Impar - Cuadrado
4	Par - Cuadrado
3 - 5 - 7	Primo - Impar
4 - 6 - 8 - 10	Par - Compuesto
1 - 4 - 9	Cuadrado

Tabla 6.4: Bases topológicas de la aplicación N. 2

Para este contexto formal vamos a tomar el subconjunto de atributos {compuesto,impar}, hallar su interior, su clausura y su frontera y determinar la relación de estos dos atributos con los demás de la tabla.

```
Int(\{\text{compuesto,impar}\}) = \{\text{compuesto,impar}\}\\overline{\{\text{compuesto,impar}\}} = \{\text{compuesto,impar}\}\\partial(\{\text{compuesto,impar}\}) = \emptyset
```

Lo anterior muestra que a pesar de que el conjunto de atributos {compuesto,impar} no es una intensión de un concepto formal, con la topología construida, este subconjunto es tanto abierto como cerrado y como subconjunto está aislado de los demás atributos de la tabla.

## Aplicación N. 3

Sea ahora el contexto formal mostrado en 6.5

	φ en tierra	ਰen hielo	o en agua	₽ colectivo	Φ individual	→ usando balón	ಣ necesita oponente	∽ múltiple disciplina	- puntos	∴ tiempo
1. Carrera 100mts	X				$\times$					X
2. Triatlón	X		$\times$		$\times$			$\times$		$\times$
3. Voleibol	X			X		X	X		X	
4. Water polo			X	X		X	X		X	
5. Nado sincronizado			X	X				X	X	
6. Hockey sobre hielo		X		X			$\times$		$\times$	

Tabla 6.5: Contexto formal de la aplicación N. 3.

Con retículo concepto dado a continuación

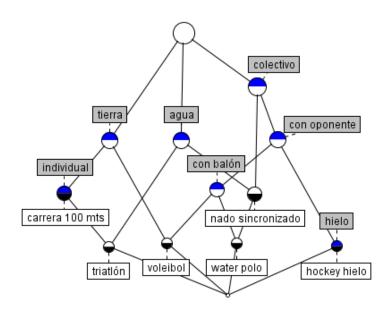


Figura 6.5: Retículo de la aplicación N. 3

Su respectivo grafo asociado es

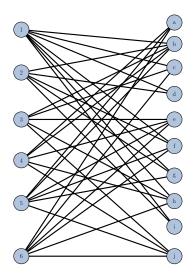


Figura 6.6: Grafo asociado al contexto formal de la aplicación N. 3
Bases topológicas para el conjunto de objetos y el conjunto de atributos:

$\mathcal{B}_G$	$\mathcal{B}_M$
G	M
Ø	Ø
1 - 2	a - e - j
3	a - d - f - g - i
2	a - c - e - h - j
4 - 5	c - d - i
1 - 2 - 3	a
3 - 4 - 5 - 6	d - i
3 - 4	d - f - g - i
6	b - d - g - i
2 - 4 - 5	c
3 - 4 - 6	d - g - i
2 - 5	c - h
5	c - d - h - i
4	c - d - f - g - i

Tabla 6.6: Bases topológicas aplicación N. 3

Consideremos para este caso el subconjuto {{Triatlón}, {colectivo}}

$$Int(\{\{\text{Triatl\'on}\}, \{\text{colectivo}\}\}) = \{\{2\}, \emptyset\}$$
$$\overline{\{\{\text{Triatl\'on}\}, \{\text{colectivo}\}\}} = \{\{1,2\}, \{b,d,f,g,i\}\}$$
$$\partial(\{\{\text{Triatl\'on}\}, \{\text{colectivo}\}\}) = \{\{1\}, \{b,d,f,g,i\}\}$$

Al calcular los operadores, puede deducirse que los deportes 1,2 guardan una estrecha relación con las características b,d,f,g,i y forman un conjunto cerrado en la tabla.

De manera similar, puede extraerse información para cualquier subconjunto del contexto formal, a partir de su estructura topológica.

## 6.2. Aplicaciones en continuidad

En esta sección se hará un análisis de la continuidad en contextos formales en los que se tiene el mismo conjunto de objetos y de atributos pero la relación entre estos cambia en el tiempo. Este análisis puede hacerse desde el enfoque dado por el producto de contextos formales y también puede tratarse con una mirada topológica (ver pág 22). El objetivo de esta sección es hacer una comparación entre estas dos perspectivas, usando un ejemplo ilustrativo.

Consideremos el siguiente contexto formal, para un tiempo inicial  $t_0$ .

	Síntomas								
	$\times \times \bigcirc$ cefalea occipital persistente	A visión borrosa	W mareo	Z náusea	S sangrado por la nariz	arphi sobrepeso	H hipertensión	X riesgo estilo de vida	
Paciente 1	X			×					
Paciente 2 Paciente 3	X	×	×	X		X	×	X	
Paciente 4	×		×			×	X	$\times$	
Paciente 5 Paciente 6	× × ×	×	×		×		×	$\times$	

Tabla 6.7: Relación entre pacientes y síntomas para un tiempo  $t_{\rm 0}$ 

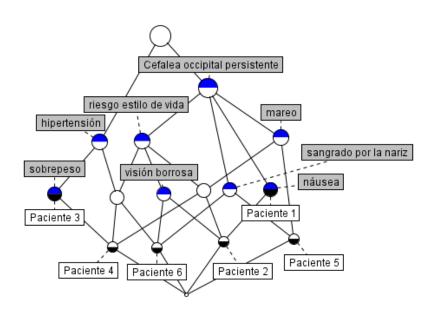


Figura 6.7: Retículo Pacientes - Síntomas en  $t_{\rm 0}$ 

Ahora, en un tiempo  $t_1$ , la relación cambia de la siguiente manera

		Síntomas							
	$\times \times \bigcirc$ cefalea occipital persistente	A visión borrosa	W mareo	Z náusea	S sangrado por la nariz	arphi sobrepeso	H hipertensión	X riesgo estilo de vida	
Paciente 1	X			X					
Paciente 2	X	X							
Paciente 3						X	×		
Paciente 4	×	X				X	X	$  \times  $	
Paciente 5			X		X				
Paciente 6	X	X					X	$\times$	

Tabla 6.8: Relación entre pacientes y síntomas para un tiempo  $t_1$ 

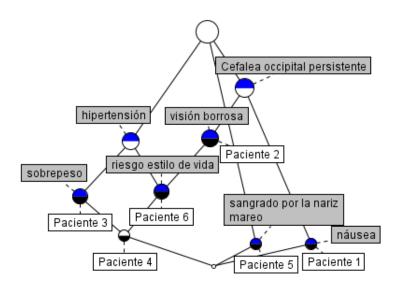


Figura 6.8: Retículo Pacientes - Síntomas en  $t_1$ 

Consideremos las bases topológicas para cada contexto formal y la función identidad, pero teniendo en cuenta que los contextos formales en la función son vistos como diferentes

espacios topológicos. En este caso {Paciente 1} es un elemento básico en el tiempo  $t_1$  sin embargo, para  $t_0$ , su imagen inversa que es {Paciente 1} no es abierto. De esta forma podemos decir que la función identidad para este par de contextos formales no es continua.

Ahora, para determinar si se tiene que sea extensionalmente atributo-continua, revisamos la definición dada en la página 22 y concluimos que efectivamente la identidad es extensionalmente atributo-continua, pues cada intensión para el tiempo  $t_1$  viene de una intensión en el tiempo  $t_0$ .

Por lo tanto, los conceptos de continuidad extensional y continuidad topológica son diferentes.

$\mathcal{B}_{ ext{pacientes}}$	$\mathcal{B}_{ ext{sintomas}}$
2	CO - VB -M - N - RV
4	CO - M - S - H - RV
5	CO - M - SN
6	CO - VB - SN - H - RV
3 - 4	S - H
1 - 2	CO - N
2 - 6	CO- VB - RV
1 - 2 - 4 - 5 - 6	CO
2 - 4 - 5	CO - M
5 -6	CO - SN
3 - 4 - 6	Н
2 - 4 - 6	CO - RV
4 - 6	CO - H - RV
2 - 4	CO - M - RV

Tabla 6.9: Bases topológicas pacientes - síntomas en  $t_0$ 

$\mathcal{B}_{ ext{pacientes}}$	$\mathcal{B}_{ ext{sintomas}}$
1	CO - N
2 - 4 - 6	CO- VB
3 - 4	S - H
4	CO - VB - S - H - RV
5	M - SN
4 -6	CO - VB - H -RV
3 - 4 - 6	Н
1 - 2 - 4 - 6	CO

Tabla 6.10: Bases topológicas pacientes - síntomas en  $t_1$ 

## 6.3. Aplicaciones caso difuso

Para el caso difuso, se tiene la limitación de contar con poco desarrollo de software para los cálculos necesarios en la aplicación del FFCA a diferentes L-contextos.

Por tal motivo se expone un ejemplo desarrollado en [9].

Se tiene el siguiente contexto difuso

	Tasa	de natalidad	Indice	de mortalidad
	bajo	alto	bajo	alto
Alemania	1	0	0	0.75
Brasil	0	0.25	0.25	0.5
Eritrea	0	1	0	0.75
Estados unidos	0	0.25	0	0.5
Francia	0.5	0	0	0.5
Iran	0	0.25	0.5	0.25
Israel	0	0.5	0.25	0.5
Japón	0.75	0	0	0.5
Kenya	0	1	0	1
Malasia	0	0.75	0.5	0.25
Polonia	0.75	0	0	0.75
Republica Checa	0.75	0	0	0.75
Rusia	0.75	0	0	1
Singapur	0.75	0	0.75	0.25
Venezuela	0	0.5	0.5	0.25

Tabla 6.11: Ejemplo contexto difuso, tomado de [9]

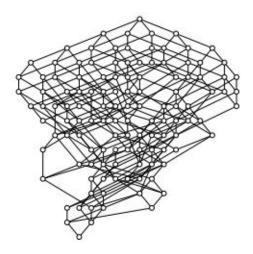


Figura 6.9: Retículo concepto difuso

Cada nodo en el retículo representa un elemento básico en la topología difusa para el contexto del ejemplo, por lo tanto para analizar propiedades topológicas de los datos suministrados debe especificarse la extensión y la intensión de cada nodo en el retículo.

Para el caso difuso puede trabajarse de la misma manera que en caso binario. Sin embargo los cálculos se hacen más complejos y es muy necesario contar con la implementación de algoritmos que permitan hallar los conceptos formales y de esa manera poder dotar de estructura topológica los contextos y dar información adicional sobre los datos.

## 7 | Conclusiones

El análisis de conceptos formales tiene una gran cantidad de aplicaciones y usos que lo convierten en un instrumento ampliamente utilizado en la investigación académica y la industria. Como método de minería de datos permite obtener información subyacente en datos tanto binarios como difusos. Sin embargo, a pesar de que el FCA organiza los datos en una estructura jerárquica y los clasifica en conceptos formales, la información que aporta sobre los datos es limitada porque hay relaciones entre los objetos y entre los atributos que quedan ocultas a los ojos de las herramientas del FCA. Por lo tanto, en el caso que se necesite relacionar por ejemplo dos objetos que no hacen parte de un mismo concepto formal, la teoría se ve impedida a hacerlo.

En este trabajo, se estudia desde un enfoque topológico el FCA para que aportando una estructura topológica a los datos se encuentren relaciones e información adicional, no conocidas empleando únicamente el FCA.

Además, la base topológica construida para el conjunto de objetos corresponde a la colección de extensiones de los conceptos formales del contexto formal, así mismo, la base para el conjunto de atributos es precisamente la colección de intensiones del total de conceptos formales, y se mostró que las bases construidas son isomorfas al retículo concepto, esto es de gran utilidad en el momento de realizar cálculos porque en la actualidad hay software desarrollado para calcular los conceptos formales y el retículo asociado a grandes volúmenes de datos, o que permite construir la estructura topológica para cualquier contexto formal hallando sus conceptos formales y utilizando software disponible en la actualidad.

La caracterización de los operadores topológicos hacen un aporte en la clasificación de los datos, para no separarlos únicamente por conceptos formales, sino también poder estudiar conjuntos particulares que sean de interés en los datos y su relación con otros elementos de la tabla en investigaciones de cualquier tipo en el que utilicen el FCA.

Otro aporte del estudio topológico en el FCA es el poder analizar la continuidad entre la información dada en dos contextos formales, basta considerar dos contextos formales con estructura topológica y un funcional que los relacione, la continuidad del funcional estará determinado por la relación entre objetos y atributos de cada contexto formal.

Se encontró en la práctica la necesidad de analizar no solo datos binarios sino también difusos, en este sentido aparece en la teoría la extensión del FCA al FFCA (Análisis de conceptos formales difusos). A diferencia del caso binario, en esta extensión se parte de L-conjuntos, por tal motivo la topología a considerar debe ser una topología difusa. Esta generalización abre las puertas a un mayor número de aplicaciones, sin embargo, tiene como

limitación el poco desarrollo de software creado hasta la fecha para realizar los cálculos que este involucra para datos difusos.

Se tuvo la dificultad de no contar con una aplicación propia para un volumen de datos mayor al de los ejemplos considerados. Con esto se hubiese podido aportar resultados en un área específica. Dicha aplicación se pensó hacerla en las propiedades físicas de los materiales, pero se tuvieron las siguientes dificultades: primero no se encontró software disponible para hacer los cálculos necesarios para el número de datos considerados y segundo no se obtuvieron los datos completos del contexto formal para poder aplicar el método propuesto y dar conclusiones sobre los resultados obtenidos en FFCA con estructura topológica.

## 7.1. Trabajo Futuro

A partir del trabajo realizado y de las dificultades encontradas durante el proceso podría explorarse en los siguientes aspectos

- Trabajar con diferentes topologías difusas para la generalización del Análisis de Conceptos Formales Difusos.
- Aplicar el método a problemas específicos con gran cantidad de datos, ya sea en el campo académico o industrial. Con la observación de que se debe partir de datos confiables para que los resultados obtenidos sean verídicos.
- Desarrollar algoritmos en lenguajes de programación como Python, MATLAB, Java para el cálculo de los espacios topológicos propuestos en datos difusos y del retículo concepto.
- Buscar más relaciones desde la representación de los contextos formales como grafo bipartito y el retículo concepto, y así entrelazar la teoría de FCA, la Topología y la Teoría de grafos y de retículos.
- Explorar más a fondo la continuidad en funciones de contextos formales, tanto para el FCA como para el FFCA.

# A | Anexo A: Demostración Teorema básico sobre retículo concepto parte 1. y parte 2.

## A.1. Teorema básico sobre el retículo concepto parte 1.

**Teorema.**  $\mathfrak{Z}(\mathbb{K})$  con  $\mathbb{K}:=(G,M,I)$  es un retículo completo cuyos ínfimos y supremos se pueden describir así:

Sea

$$\mathscr{C} = \{ (A_t, B_t) \in \mathfrak{B}(\mathbb{K}) \mid t \in T \},$$

entonces el ínfimo de  $\mathscr C$  es

$$\bigwedge \mathscr{C} = \left( \bigcap_{t \in T} A_t, \left( \bigcup_{t \in T} B_t \right)^{II} \right)$$

y el supremo de  $\mathscr{C}$  es

$$\bigvee \mathscr{C} = \left( \left( \bigcup_{t \in T} A_t \right)^{II}, \bigcap_{t \in T} B_t \right)$$

Demostración.

Sea  $\mathscr{C} \subseteq \mathfrak{B}(\mathbb{K})$ .

$$\mathscr{C} = \{ (A_t, B_t) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}) \mid t \in T \},$$

Primero veamos que  $\bigwedge \mathscr{C}$  y  $\bigvee \mathscr{C}$  son conceptos formales en  $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ .

$$\bigwedge \mathcal{C} = \left( \bigcap_{t \in T} A_t, \left( \bigcup_{t \in T} B_t \right)^{II} \right)$$

$$= \left( \bigcap_{t \in T} B_t^I, \left( \bigcup_{t \in T} B_t \right)^{II} \right)$$

$$= \left( \left( \bigcup_{t \in T} B_t^I \right)^I, \left( \bigcup_{t \in T} B_t \right)^{II} \right)$$

# Capítulo APÉNDICE A. ANEXO A: DEMOSTRACIÓN TEOREMA BÁSICO SOBRE RETÍCULO CONCEPTO PARTE 1. Y PARTE 2.

Que es claramente un concepto formal, así  $\bigwedge \mathscr{C} \in \underline{\mathfrak{Z}}(\mathbb{K})$ Por otro lado

$$\bigvee \mathscr{C} = \left( \left( \bigcup_{t \in T} A_t \right)^{II}, \bigcap_{t \in T} B_t \right)$$

$$= \left( \left( \bigcup_{t \in T} A_t \right)^{II}, \bigcap_{t \in T} A_t^I \right)$$

$$= \left( \left( \bigcup_{t \in T} A_t \right)^{II}, \left( \bigcup_{t \in T} A_t \right)^I \right)$$

Luego  $\bigvee \mathscr{C} \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ .

1. Veamos que

$$\bigwedge \mathscr{C} = \left( \bigcap_{t \in T} A_t, \left( \bigcup_{t \in T} B_t \right)^{II} \right)$$

es en efecto el ínfimo de  $\bigwedge \mathscr{C}$ 

a) Sea  $(A_0, B_0) \in \mathscr{C}$ . Es claro que  $\bigcap_{t \in T} A_t \subseteq A_0$  y por lo tanto

$$\bigwedge \mathscr{C} = \left(\bigcap_{t \in T} A_t, \left(\bigcup_{t \in T} B_t\right)^{II}\right) \leqslant (A_0, B_0)$$

Como  $(A_0, B_0)$  fue tomado arbitrario, se tiene que en efecto  $\bigwedge \mathscr{C}$  es cota inferior de  $\mathscr{C}$ .

b) Sea ahora,  $(A, B) \in \mathfrak{B}(\mathbb{K})$  tal que  $(A, B) \leq (A_t, B_t)$  para todo  $t \in T$ , luego  $A \subseteq A_t$  para todo  $t \in T$  y esto equivale a que  $A \subseteq \bigcap_{t \in T} A_t$  y por lo tanto

$$(A,B) \leqslant \left(\bigcap_{t \in T} A_t, \left(\bigcup_{t \in T} B_t\right)^{II}\right) = \bigwedge \mathscr{C}$$

Así  $\bigwedge \mathscr{C}$  es la máxima cota inferior de  $\mathscr{C}$  y con esto  $\bigwedge \mathscr{C}$  es el ínfimo.

2. Veamos ahora que

$$\bigvee \mathscr{C} = \left(\bigcap_{t \in T} A_t, \left(\bigcup_{t \in T} B_t\right)^{II}\right)$$

es el supremo de  $\bigvee \mathscr{C}$ 

## Capítulo A.2. TEOREMA BÁSICO SOBRE EL RETÍCULO CONCEPTO PARTE 2.

a) Sea  $(A_1, B_1) \in \mathscr{C}$ .

$$A_1 \subseteq \bigcup_{t \in T} A_t \subseteq \left( \left( \bigcup_{t \in T} A_t \right)^{II} \right)$$

y con esto

$$(A_1, B_1) \leqslant \left(\bigcap_{t \in T} A_t, \left(\bigcup_{t \in T} B_t\right)^{II}\right)$$

Con lo cual  $\bigvee \mathscr{C}$  es cota superior de  $\mathscr{C}$ .

b) Mostraremos que  $\bigvee \mathscr{C}$  es la mínima de las cotas superiores. Sea entonces (A, B) con  $(A_t, B_t) \leq (A, B)$  para todo  $t \in T$ , luego  $B \subseteq B_t$  para todo  $t \in T$ , es decir

$$B \subseteq \bigcap_{t \in T} B_t$$

con lo cual

$$\bigvee \mathscr{C} = \left( \left( \bigcup_{t \in T} A_t \right)^{II}, \bigcup_{t \in T} B_t \right) \leqslant (A, B)$$

Por lo tanto  $\bigvee \mathscr{C}$  es el supremo del conjunto  $\mathscr{C} \subseteq \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ .

Por lo tanto  $\mathfrak{Z}(\mathbb{K})$  es un retículo completo.

## A.2. Teorema básico sobre el retículo concepto parte 2.

## Teorema básico sobre el retículo concepto (Parte 2.)

Un retículo completo L es isomorfo a  $\mathfrak{Z}(\mathbb{K})$  con  $\mathbb{K}:=(G,M,I)$  si y sólo si existen aplicaciones

$$\gamma \ : G \longrightarrow L \qquad \mu \ : M \longrightarrow L$$

tales que  $\gamma$  G es  $\bigvee$ -denso en L y  $\mu$  M es  $\bigwedge$ -denso en L. Y además

$$gIm \Leftrightarrow \gamma \ (g) \leqslant \mu \ (m)$$
 para  $g \in G$ ,  $m \in M$ 

Demostración.

i) Primero haremos la demostración para el caso especial  $L = \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ . Sea,

$$\gamma_0: G \longrightarrow L$$

$$g \longrightarrow (\{g\}^{II}, \{g\}^I)$$

# Capítulo APÉNDICE A. ANEXO A: DEMOSTRACIÓN TEOREMA BÁSICO SOBRE RETÍCULO CONCEPTO PARTE 1. Y PARTE 2.

у

$$\mu_0: M \longrightarrow L$$

$$m \longrightarrow (\{m\}^I, \{m\}^{II})$$

Veamos que gIm si y sólo si  $\gamma_0(g) \leqslant \mu_0(m)$ 

Suponga que  $\gamma_0(g) \leq \mu_0(m)$ , es decir, suponga que

$$(\{g\}^{II}, \{g\}^{I}) \leq (\{m\}^{I}, \{m\}^{II})$$

y esto se tiene si y solo si  $\{g\}^I \supset \{m\}^{II}$ , pero  $\{m\} \subseteq \{m\}^{II}$ , así  $\{m\} \subseteq \{m\}^{II} \subseteq \{g\}^I$ , entonces  $\{m\} \subseteq \{g\}^I$ . Si y sólo si  $m \in \{g\}^I$  y esto es equivalente a que gIm.

Ahora suponga que gIm, esto implica que  $m \in \{g\}^I$ , es decir  $\{m\} \subseteq \{g\}^I$  y aplicando I se tiene  $\{m\}^I \supset \{g\}^{II}$  y esto se tiene, sí y sólo si  $(\{g\}^{II}, \{g\}^I) \leqslant (\{m\}^I, \{m\}^{II})$ , lo cual es tener  $\gamma_0(g) \leqslant \mu_0(m)$ .

Veamos ahora que  $\gamma$  (G) es  $\bigvee$  -Denso en  $L = \mathfrak{Z}(\mathbb{K})$ .

Sea  $(A, B) \in \mathfrak{B}(\mathbb{K})$ . Probemos que

$$\bigvee_{g \in A} (\{g\}^{II}, \{g\}^I) = (A, B) = \bigwedge_{m \in B} (\{m\}^I, \{m\}^{II})$$

$$\bigvee_{g \in A} (\{g\}^{II}, \{g\}^I) = ((\bigcup_{g \in A} \{g\}^{II})^{II}, \bigcap_{g \in A} \{g\}^I)$$

Veamos

$$\left(\bigcup_{g \in A} \{g\}^{II}\right)^{II} = \left(\left(\bigcup_{g \in A} \{g\}^{II}\right)^{I}\right)^{I} = \left(\bigcap_{g \in A} \left(\{g\}^{II}\right)^{I}\right)^{I}$$

$$= \left(\bigcap_{g \in A} \{g\}^{III}\right)^{I} = \left(\bigcap_{g \in A} \{g\}^{I}\right)^{I}$$

$$= \left(\left(\bigcup_{g \in A} \{g\}\right)^{I}\right)^{I} = \left(\bigcup_{g \in A} \{g\}\right)^{II}$$

Entonces con esta simplificación, debemos ver que

$$\left(\left(\bigcup_{g\in A} \{g\}\right)^{II}, \left(\bigcup_{g\in A} \{g\}\right)^{I}\right) = (A, B)$$

Es claro que  $\bigcup_{q \in A} = A$ , además  $A^I = B$  y  $A^{II} = A$ . Así

$$\bigvee_{g \in A} (\{g\}^{II}, \{g\}^{I}) = (A, B)$$

Pero también  $\bigwedge_{m \in B} (\{m\}^I, \{m\}^{II}) = (A, B)$ , ya que

$$\bigwedge_{m \in B} \left( \{m\}^I, \{m\}^{II} \right) = \left( \bigcap_{m \in B} \{m\}^I, \left( \bigcup_{m \in B} \{m\}^{II} \right)^{II} \right)$$

Con el procedimiento anterior, es claro que

$$\bigwedge_{m \in B} \left( \{m\}^{I}, \{m\}^{II} \right) = \left( \left( \bigcup_{m \in B} \{m\} \right)^{I}, \left( \bigcup_{m \in B} \{m\}^{II} \right) \right)$$

tenemos  $B = \bigcup_{m \in B} \{m\}$  y  $A = B^I$ ,  $B = B^{II} = A^I$ , con ello hemos probado que  $\gamma$  (G) es  $\bigvee$  –Denso en  $\mathfrak{Z}(\mathbb{K})$  y  $\mu$  (M) es  $\bigwedge$  –Denso en  $\mathfrak{Z}(\mathbb{K})$ .

## ii) Caso General.

Sea L un retículo completo isomorfo a  $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ . Entonces, existe un isomorfismo

$$\phi: \mathfrak{B}(\mathbb{K}) \longrightarrow L$$

Definimos

$$\gamma: G \longrightarrow L$$

$$g \longrightarrow \phi\left((\{g\}^{II}, \{g\}^{I})\right)$$

У

$$\mu : M \longrightarrow L$$

$$m \longrightarrow \phi \left( \{m\}^{I}, \{m\}^{II} \right) \right)$$

Veamos que  $\gamma$  (G) es  $\bigvee$  -Denso en L.

Primero señalemos que  $\gamma = \gamma_0 \circ \phi$ 

entonces  $\gamma_(g) = \phi(\gamma_0(g)), \gamma$   $G = \phi(\gamma_0 G)$ , pero ya se probó que  $\gamma_0(G)$  es  $\bigvee$  –Denso en  $\mathfrak{Z}(\mathbb{K})$  (1).

Sea entonces  $D \in L$ , luego exite  $(A,B) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$  tal que  $\phi((A,B)) = D$ , pero por (1)

$$(A,B) = \bigvee_{g \in A} \left( \{g\}^{II}, \{g\}^{I} \right),\,$$

# Capítulo APÉNDICE A. ANEXO A: DEMOSTRACIÓN TEOREMA BÁSICO SOBRE RETÍCULO CONCEPTO PARTE 1. Y PARTE 2.

luego

$$\phi(A, B) = \phi\left(\bigvee_{g \in A} \left(\{g\}^{II}, \{g\}^{I}\right)\right) = D$$

Como  $\phi$  es isomorfismo de retículos,

$$\phi\left(\bigvee_{g\in A}\left(\{g\}^{II},\{g\}^{I}\right)\right) = \bigvee_{g\in A}\left(\phi\left(\{g\}^{II},\{g\}^{I}\right)\right) = D$$

con esto tenemos que  $\gamma$  G es  $\bigvee$  -Denso en L.

Análogamente  $\mu = \mu_0 \circ \phi$ ,  $\mu(M) = \phi(\mu_0(M))$  con  $\mu_0(M) \wedge -\text{Denso}$  en  $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ . Si  $D \in L$ , escribimos  $\phi((A, B)) = D$  para algún concepto  $(A, B) \in \mathfrak{B}(\mathbb{K})$ , pero

$$(A,B) = \bigwedge_{m \in B} (\{m\}^I, \{m\}^{II})$$

con ello

$$\phi((A, B)) = \phi\left(\bigwedge_{m \in B} (\{m\}^{I}, \{m\}^{II})\right) = D$$
$$= \bigwedge_{m \in B} (\phi(\{m\}^{I}, \{m\}^{II})) = D$$

En consecuencia  $\mu$  M es  $\bigwedge$  -denso en L.

Ahora veamos que gIm si y sólo si  $\gamma$   $(g) \leq \mu$  (m),

$$\gamma(g) = \phi(\gamma_0(g))$$
 y  $\mu(m) = \phi(\mu_0(m))$ 

ya vimos que gIm si y sólo si  $\gamma_0(g) \leq \mu_0(m)$ , entonces tenemos

$$gIm \Leftrightarrow \gamma_0(g) \leqslant \mu_0(m) \Leftrightarrow \phi(\gamma_0(g)) \leqslant \phi(\mu_0(m))$$
  
  $\Leftrightarrow \gamma(g) \leqslant \mu(m)$  (Por que  $\phi$  es un isomorfismo)

Así ha quedado demostrado que si un retículo completo L es isomorfo a  $\mathfrak{Z}(\mathbb{K})$  entonces existen

$$\gamma: G \longrightarrow L \qquad \mu: M \longrightarrow L$$

tales que  $\gamma$  G es  $\bigvee$  –Denso en L y  $\mu$  M es  $\bigwedge$  –Denso en L y  $gIm \Leftrightarrow \gamma$   $(g) \leqslant \mu$  (m) En la otra dirección, sea L un retículo completo y sean

$$\gamma \ : G \longrightarrow L \qquad \mu \ : M \longrightarrow L$$

tales que  $\gamma$  G es  $\bigvee$  –Denso en L y  $\mu$  M es  $\bigwedge$  –Denso en L y  $gIm \Leftrightarrow \gamma$   $(g) \leqslant \mu$  (m).

Veamos que L es isomorfo a  $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ .

Definimos  $\phi: \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}) \longrightarrow L$ , tal que

$$\phi(A,B) := \bigvee \{ \gamma \ (g) \mid g \in A \}$$

Veamos que  $\phi$  preserva el orden. Entonces, sean  $(A_1, B_1), (A_2, B_2) \in \mathfrak{B}(\mathbb{K})$  con  $(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2)$ . Luego  $A_1 \subseteq A_2$  y con ello  $\gamma$   $(A_1) \subseteq \gamma$   $(A_2)$  y si esto sucede se tiene que el supremo de  $\gamma$   $(A_1)$  es menor o igual al supremo de  $\gamma$   $(A_2)$ , es decir

$$\bigvee \gamma \ (A_1) \leqslant \bigvee \gamma \ (A_2) \quad \text{luego}$$
$$\phi(A_1, B_1) \leqslant \phi(A_2, B_2)$$

Así  $\phi$  preserva el orden.

Ahora, veamos que también existe  $\phi^{-1}$  y que éste preserva el orden.

Definimos

$$\psi x := (\{g \in G \mid \gamma(g) \le x\}, \{m \in M \mid x \le \mu(m)\})$$

con  $x \in L$ , veamos que  $\psi x$  es un concepto de  $\mathfrak{Z}(\mathbb{K})$ .

Veamos que

$$\{g \in G \mid \gamma(g) \le x\} = (\{m \in M \mid x \le \mu(m)\})^I \quad y$$
  
 $\{m \in M \mid x \le \mu(m)\} = (\{g \in G \mid \gamma(g) \le x\})^I$ 

i) Sea

$$h \in \{g \in G \mid \gamma \leqslant x\} \Leftrightarrow \gamma \ (h) \leqslant x$$
  
$$\Leftrightarrow \gamma \ (h) \leqslant \mu \ (n) \text{ para todo } n \in \{m \in M \mid x \leqslant \mu \ (m)\}$$
  
$$\Leftrightarrow hIn \text{ para todo } n \in \{m \in M \mid x \leqslant \mu \ (m)\}$$

Lo cual es equivalente a que  $h \in (\{m \in M \mid x \leq \mu \ (m)\})^I$ . Ahora, sea

$$n \in \{m \in M \mid x \leqslant \mu \ (m) \leqslant x\} \Leftrightarrow \gamma \ (h) \leqslant x$$

$$\Leftrightarrow \gamma \ (h) \leqslant \mu \ (n) \text{ para todo } n \in \{m \in M \mid x \leqslant \mu \ (m)\}$$

$$\Leftrightarrow hIn \text{ para todo } h \in \{g \in G \mid \gamma \ (g) \leqslant x\}$$

$$\Leftrightarrow n \in (\{g \in G \mid \gamma \ (g) \leqslant x\})^{I}$$

Luego  $\psi(x) \in \mathfrak{B}(\mathbb{K})$ .

Ahora, veamos que  $\psi$  preserva el orden.

Sean  $x, y \in L$  con  $x \leq y$ . Consideremos el conjunto

$$\{g \in G \mid \gamma\ (g) \leqslant x\}$$

# Capítulo APÉNDICE A. ANEXO A: DEMOSTRACIÓN TEOREMA BÁSICO SOBRE RETÍCULO CONCEPTO PARTE 1. Y PARTE 2.

si  $h \in \{g \in G \mid \gamma(g) \le x\}$ , entonces  $\gamma(h) \le x$ , así  $\gamma(h) \le y$ , con lo que  $h \in \{g \in G \mid \gamma(g) \le y\}$ , así

$$\psi(x) := (\{g \in G \mid \gamma \ (g) \leqslant x\}, \{m \in M \mid x \leqslant \mu \ (m)\})$$
  
$$\leqslant (\{g \in G \mid \gamma \ (g) \leqslant y\}, \{m \in M \mid y \leqslant \mu \ (m)\}) = \psi(y)$$

Por lo tanto si  $x \leq y$  entonces  $\psi(x) \leq \psi(y)$ .

Veamos ahora que  $\phi^{-1} = \psi$ 

$$\phi(\psi(x)) = \bigvee \{ \gamma \ (g) \mid g \in G \land \gamma \ (g) \leqslant x \} = x$$

donde  $\gamma$  G es  $\bigvee$  -denso en L.

$$\phi(A,B) = \bigwedge \{ \mu \ m \mid m \in B \}$$

y sabemos que  $\mu$  (M) es  $\bigwedge$  -denso en L, así

$$\psi(\phi(A,B)) = \psi\left(\bigwedge\{\mu\ m\mid m\in B\}\right)$$

$$= \left(\{g\in G\mid \gamma\ (g)\leqslant \bigwedge\{\mu\ m\mid m\in M\}\}, \\ \{g\in G\mid \gamma\ (g)\leqslant \bigwedge\{\mu\ m\mid m\in M\}\}^I\right)$$

$$= \left(\{g\in G\mid \gamma\ (g)\leqslant \mu\ (m)\ \text{para todo}\ m\in B\}, \\ \{g\in G\mid \gamma\ (g)\leqslant \mu\ (m)\ \text{para todo}\ m\in B\}^I\right)$$

$$= \left(\{g\in G\mid gIm\ \text{para todo}\ m\in B\}, \{g\in G\mid gIm\ \text{para todo}\ m\in B\}^I\right)$$

$$= \left(B,B^{II}\right) = (A,B)$$

Así  $\psi=\phi^{-1}$  y con ello hemos probado que  $\phi:\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})\longrightarrow L$  es un isomorfismo de retículos completos

## B | Anexo B: Software para el Análisis de Conceptos Formales

# B.1. Software para hallar conceptos formales y su retículo concepto

Para encontrar conceptos formales y construir su retículo concepto a partir del contexto formal, el usuario puede hacerlo mediante un Demo o descargando un programa especializado. A continuación se mencionan los más utilizados y se indican sus instrucciones.

## B.1.1. Demos

Los demos son para uso online y permiten realizar tareas sencillas rápidamente. Los más conocidos para el análisis de conceptos formales son

- FcaStone online demo Este demo permite escribir un contexto formal de máximo 4 objetos y 4 atributos, por defecto el demo trae el ejemplo que se muestra en la figura B.1.1, pero los nombres pueden ser modificados y la relación. Tiene la opción de mostrar el retículo como imagen en formato png o en formato svg. Adicionalmente, se puede invertir la relación marcada. Además el demo permite combinar dos contextos con la opción de intersectarlos o unirlos y mostrar su retículo correspondiente.
- Concept Neighbourhoods in Roget's thesaurus Este demo tiene una casilla donde se Escribe cualquier palabra (en inglés) para ver los conceptos vecinos de la palabra en el Tesauro de Roget y presenta el retículo que ilustra la relación entre las palabras en los siguientes formatos png, svg, cxt, cex, csc.
- KFCA demo Esta página cuenta con un demo online para ingresar la matriz de relación, las etiquetas de los objetos y de los atributos, con dos opciones de entrada de matrices, el primero en formato MATLAB como lo muestra la figura B.1.1 y el segundo en CSV. Después de llenar las casillas el demo presenta el retículo concepto.
- Confexplore demo (requiere Adobe Air) Confexplore es un demo muy amigable con el usuario, funciona de la siguiente manera. Primero se ingresan los nombres de los

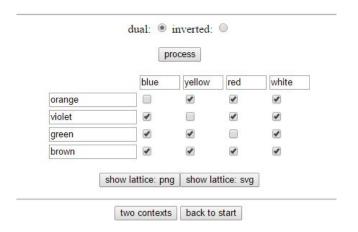


Figura B.1: Demo FcaStone

#### Matlab format input matrices

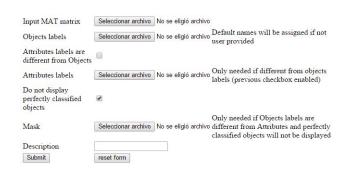


Figura B.2: KFCA demo - opción MATLAB

objetos separados por una coma e igualmente se ingresan los nombres de los atributos. Seguido a esto, se marca la relación entre objetos y atributos. Entre las opciones que presenta el demo esta ver las implicaciones del contexto y visualizar el retículo.

## B.1.2. Software para descargar

Para uso frecuente y desarrollo de tareas más elaboradas es recomendable instalar un software especializado en FCA. Los siguientes programas pueden descargarse fácilmente y entre las herramientas que ofrecen están: la creación de contextos formales binarios y difusos en varios formatos, generación y visualización del retículo concepto para ambos tipos de contextos y el cálculo de reglas de asociación, entre otras. Para descargar e instalar cualquiera de ellos puede seguir el enlace que aparece en el nombre del programa.

• FcaStone. Es un software para la generación de retículos, permite la conversión de formatos de archivos de FCA y mejora la interoperabilidad del software de edición gráfica. Usa Graphviz.



Figura B.3: Confexplore demo

- Galicia. Construye el retículo con la opción de varios algoritmos, trabaja también reglas de asociación. permite guardar los contextos binarios o multi-valuados. Es una plataforma de código abierto multi-herramienta para crear, visualizar y almacenar retículos conceptos. Cuenta con un conjunto de métodos algorítmicos FCA para la construcción de retículos y para el diseño y extracción de reglas de asociación.
- Eclipse's Relational Concept Analysis. El programa ofrece importación de contextos formales de archivos CSV, algoritmos que calculan el retículo de un contexto formal y permite exportar el retículo a JPG, PNG, EPS y SVG.
- FCALGS. Es una colección de herramientas independientes de desarrollo de algoritmos para el análisis del conceptos formales. Estas herramientas se implementan en línea de comandos para el cálculo de los conceptos formales.
- In-Close. Muy similar a FCALGS, In-Close permite la producción de conceptos en archivo de formato cxt. desde una terminal de comandos.
- Lattice Miner. Es un prototipo de minería de datos para crear, visualizar y explorar retículos conceptos. Además, permite la generación de conceptos formales y reglas de asociación.

## B.2. Otro software relacionado con FCA

En esta sección se presentan otros programas útiles para el trabajo con el análisis de conceptos formales, clasificados en cuatro grupos.

#### B.2.1. Java

A continuación se presentan software relacionado con el FCA que trabajan con Java.

• ToscanaJ. Es un visor, navegador y editor de esquemas conceptuales sobre bases de datos, optimizado para un público no técnico. Viene con herramientas adicionales para la creación y el análisis de los datos. Las cuatro herramientas principales son: ToscanaJ, Elba, Siena y Lucca. En el enlace puede encontrar las especificaciones de cada herramienta.

• ConExp. Es un proyecto para el uso del FCA con ayuda integrada Java. ConExp tiene diferentes reimplementaciones: ConExp FX por Francesco Kriegel, ConExp-NG, por Robert Jäschke y Conexp-clj por Daniel Borchmann.

El software en general permite crear contextos formales, calcular el número de conceptos formales, calcular el retículo, el conjunto de implicaciones Duquenne-Guigues y reglas de asociación. Además tiene la opción de actualizar todo lo anterior a medida que se modifica el contexto. ConExp también proporciona la capacidad de construir el retículo correspondiente a un subcontexto del contexto original.

Sus reimplementaciones proponen nuevas herramientas y facilitan al usuario el manejo y mantenimiento.

- Lattice Drawing Software. Es un elemento Java para la generación automática de diagramas reticulares desde la representación abstracta del retículo (o el conjunto parcialmente ordenado).
- FcaJava. Es un plugin de Eclipse que implementa una técnica semi-automática que ayuda a la refactorización de una jerarquía en grupos de rasgos. FCAJava es libre y de código abierto, bajo la licencia GNU GPL.

## B.2.2. Python

- Paquete python para FCA. Es una herramienta Python para el uso del FCA. Desarrollado en HSE, Rusia por A. Revenko.
- Concepts. Es una implementación simple de Python para el FCA desarrollada por S. Bank. Permite crear contextos formales, calcular conceptos formales y generar y visualizar el retículo concepto.
- Yacaree. Es un entorno de experimentación de reglas de asociación basado en clausuras y escrito en Python. Es útil para explorar las reglas de asociación e implicaciones parciales sobre conjuntos de datos transaccionales; yacaree ajusta por si mismo los parámetros internos para tratar de ofrecer una salida lo más útil posible.

## B.2.3. LATEX

- csx2tikz. Es un software libre que convierte diagramas de línea de csx a tikz, es un buen complemento para ToscanaJ, pues convierte desde ToscanaJ a formato TikZ para su posterior procesamiento con LaTeX. Los nodos de conceptos y las etiquetas de objeto y atributo se configuran como nodos TikZ con diferentes estilos con nombre 'concepto', 'aLabel' y 'olabel', respectivamente.
- Estilo LATEXFCA. El archivo de estilo fca.sty es de gran utilidad para la elaboración de documentos escritos con LATEX sobre el Análisis de Conceptos Formales. Ofrece

soporte para hacer diagramas de contextos formales, retículos y contiene macros para algunos símbolos FCA de uso frecuente.

#### **B.2.4.** Otros

- Camelis. Este software es una implementación de Sistemas de Información lógicos (LIS) basado en FCA. Un LIS permite organizar automáticamente los datos dada una indexación de objetos por propiedades lógicas, y combinar las consultas booleanas y la navegación no jerárquica en la búsqueda de información.
- Lattice Navigator. Es una extensión de FCA para trabajar en Excel. Permite la visualización y edición de contextos ordinarios y contextos difusos (ver [6]) y sus correspondientes retículos.
- epi-ACE. Es una herramienta para examinar la estructura de datos jerárquica de pequeños conjuntos de datos epidemiológicos. Facilita escalar atributos, importar datos y dibujar retículos en 3D. Sus fundamentos matemáticos están en FCA.
- Galois Explorer. Proporciona una interfaz fácil de usar para las funciones básicas del Análisis de Conceptos Formales con diferentes algoritmos de generación de retículos y un visor interactivo para explorar retículos diseñados en 3D.
- Coron System. Funciona como software para minería de datos. Coron es un dominio y plataforma independiente, multi-propósito que incorpora no solo una rica colección de algoritmos de minería de datos, sino también permite un número de operaciones auxiliares. Cuenta con un conjunto de herramientas de minería de datos diseñados específicamente para la generación y extracción de reglas de asociación. También proporciona soporte para la preparación y el filtro de datos, y para interpretar las unidades extraídas del conocimiento.

# Capítulo APÉNDICE B. ANEXO B: SOFTWARE PARA EL ANÁLISIS DE CONCEPTOS FORMALES

## Bibliografía

- [1] ALCALDE, C. AND BURUSCO, A. AND FUENTES-GONZÁLES, R., Application of the L-fuzzy concept analysis in the morphological image and signal processing. Annals of Mathematics and Artificial Intelligence. Vol 72, p. 115–128, 2014
- [2] Alena, C., Closure properties of the Formal Contexts. Proceedings of the 19th conference Student EEICT. Brno: LITERA, p. 139-144, 2013.
- [3] Basener, W. F., Topology and its applications, Wiley. 1973
- [4] Berry, A. and Sigayret, A., Representing a concept lattice by a graph. Discrete applied mathematics. Vol 144, p. 27–42, 2004
- [5] BĚLOHLÁVEK, R. AND VYCHODIL, C., Attribute Implications in a Fuzzy Setting. In: Carbonell, J. G., Siekmann, J. (eds.): Formal Concept Analysis. ICFCA 2006. LNAI 3874, p. 45–60. Springer, Heidelberg, 2006
- [6] Bělohlávek, R., Concept lattices and order in fuzzy logic. Annals of Pure and Applied Logic. Vol 128, p. 277–298, 2004
- [7] Bělohlávek, R., Introduction to Formal Concept Analysis, Olomouc, 2008
- [8] BĚLOHLÁVEK, R., VYCHODIL, C., Factor Analysis of Incidence Data via Novel Decomposition of Matrices. In: Ferré, S., Rudolph, S. (eds.): Formal Concept Analysis. ICFCA 2009. LNAI 5548, p. 83–97. Springer, Heidelberg, 2009
- [9] BĚLOHLÁVEK, R., VYCHODIL, C., Reducing the size of fuzzy concept lattices by fuzzy closure operators. In: FUZZ-IEEE 2005, The IEEE International Conference on Fuzzy Systems, Reno (Nevada, USA), p. 663–668, 2005
- [10] BĚLOHLÁVEK, R., Fuzzy Closure Operators. Mathematical Analysis and Applications. Vol 262, p. 473–489, 2001
- [11] BURGMANN, C. AND WILLE, R. *The Basic Theorem on Preconcept Lattices*. In: Carbonell, J. G., Siekmann, J. (eds.): Formal Concept Analysis. ICFCA 2006. LNAI 3874, p. 80–88. Springer, Heidelberg, 2006
- [12] Denniston, J. T., Melton, A. and Rodabaugh, S. E., Formal Contexts, Formal Concept Analysis, and Galois Connections, EPTCS 129, p. 105-120, 2013.
- [13] GANTER, B., STUMME, G. AND WILLE, R., Formal Concept Analysis: Mathematical Foundations. Springer, Heidelberg. 2005

- [14] Ganter, B., Stumme, G. and Wille, R., Formal Concept Analysis: Theory and Applications. Journal of Universal Computer Science. Vol 10, p. 926, 2004.
- [15] GANTER, B. AND WILLE, R., Applied Lattice Theory: Formal Concept Analysis. GESTS International Transactions on Computer Science and Engineering. Vol 30, p. 25–36, 2006
- [16] GAUME, B., NAVARRO, E. AND PRADE, H. A parallel between extended formal concept analysis and bipartite graphs analysis. In: Hüllermeier, E., Kruse, R., Hoffmann, F. (eds.): Computational Intelligence for Knowledge-Based Systems Design. IPMU 2010. LNAI 6178, p. 270–280. Springer, Heidelberg, 2010
- [17] GAUME, B., NAVARRO, E. AND PRADE, H. Clustering bipartite graphs in terms of approximate formal concepts and sub-contexts. International Journal of Computational Intelligence Systems. Vol 6, p. 1125–1142, 2013
- [18] GHOSH, P., KUNDU, K. AND SARKAR, D., Fuzzy graph representation of a fuzzy concept lattice. Fuzzy Sets and Systems. Vol 161, p. 1669–1675, 2010
- [19] GIERZ, G., HOFMANN, K. H., KEIMEL, K., LAWSON, J. D., MISLOVE, M. W. AND SCOTT, D. S., Continuous Lattices and Domains. Cambridge University Press, New York, 2003
- [20] HITZLER, P., KRÖTZSCH, M. AND ZHANG, G., A Categorical View on Algebraic Lattices in Formal Concept Analysis. Fundamenta Informaticae, Vol 74, p. 301-328, 2006
- [21] HITZLER, P. AND WENDT, M., Formal Concept Analysis and Resolution in Algebraic Domains. Contributions to ICCS 2003, Shaker Verlag, Aachen, p. 157–170, 2003.
- [22] Jun, B-M and Jun, Y-E, Fuzzy topology and its applications. Korean Journal of Mathematics. Vol 3, p. 135–142, 1995
- [23] KAYTOUE, M., KUZNETSOV, S. O. AND NAPOLI, A., Biclustering Numerical Data in Formal Concept Analysis. In: Valtchev, P., Jäschke, R. (eds.): Formal Concept Analysis. ICFCA 2011. LNAI 6628, p. 135–150. Springer, Heidelberg, 2011
- [24] Krötzsch, M., Morphisms in Logic, Topology, and Formal Concept Analysis. Master's thesis. Dresden University of Technology, 2005.
- [25] KRUPKA, M., On Factorization of Concept Lattices by Incompatible Tolerances. In: Valtchev, P., Jäschke, R. (eds.): Formal Concept Analysis. ICFCA 2011. LNAI 6628, p. 167–182. Springer, Heidelberg, 2011
- [26] KWONG, C. P. A Topological Framework for Formal Concept Analysis The Chinese University of Hong Kong
- [27] Lai, H. and Zhang, D., Concept lattices of fuzzy contexts: Formal concept analysis vs. rough set theory. International Journal of Approximate Reasoning. Vol 50, p. 695 707, 2009
- [28] Mahmoud, F. S., Fath Alla, M. A. and Abd Ellah, S. M. Fuzzy topology on fuzzy sets: fuzzy semicontinuity and fuzzy semiseparation axioms. Applied Mathematics and Computation. Vol 153, p. 127–140, 2004
- [29] Munkres, J. R., Topology, (2nd Edition). Prentice hall, New Jersey, 2000
- [30] Nobuhara, H., Bede, B. and Hirota, K., A Hierarchical Representation of Video/Image Database by Formal Concept Analysis and Fuzzy Clustering. IEEE International Conference on Fuzzy Systems, 2006

- [31] NOBUHARA, H., A lattice structure visualization by formal concept analysis and its application to huge image database. IEEE/ICME International Conference on Complex Medical Engineering, 2007
- [32] Pei, Z. and Qin, K., Topological Space for Attributes Set of a Formal Context. Rough Sets and Knowledge Technology, Vol 4481, 460–467, 2007
- [33] Phei, Z., Ruan, D., Meng, D., Liu, Z. Formal concept analysis based on the topology for attributes of a formal context, Information Sciences. Vol 236, 66–82, 2013.
- [34] POELMANS, J., KUZNETSOV, S. O., IGNATOV, D. I. AND DEDENE, G., Formal Concept Analysis in knowledge processing: A survey on models and techniques. Expert Systems with Applications. Vol 40, 6601–6623, 2013.
- [35] SACAREA, C. Towards a Contextual Topology, Berichte aus der Mathematik, Shaker. 2001.
- [36] SAWASE, K., NOBUHARA, H. AND BEDE, B., Visualizing Huge Image Databases by Formal Concept Analysis. Human-Centric Information Processing Through Granular Modelling. p. 351–373, 2009
- [37] STELL, J.G. Formal Concept Analysis over Graphs and Hypergraphs. In:Croitoru, M., Rudolph, S., Woltran, S., Gonzales, C. (eds.): Graph Structures for Knowledge Representation and Reasoning. GKR 2013. LNAI 8323, p. 165–179. Springer, Heidelberg, 2014
- [38] Setkaya, B., Proof of the basic theorem on concept lattices in Isabelle/Hol. The Middle East Technical Master's thesis, University, Ankara, Turquía, 2003
- [39] U. Priss, Formal concept analysis in information science, ARIST, Vol 40, p. 521–543, 2006.
- [40] VORMBROCK, B., WILLE, R. Semiconcept and Protoconcept Algebras: The Basic Theorems. In: Ganter, B., Stumme, G., Wille, R. (eds.): Formal Concept Analysis. Foundations and Applications. LNAI 3626, p. 34–50. Springer, Heidelberg, 2005.
- [41] Warren, R. H., Neighborhoods, bases and continuity in fuzzy topological spaces. Rocky mountain Journal of Mathematics. Vol 8, p. 459–470, 1978
- [42] Wille, R., Begriffsdenken: Von der griechischen Philosophie bis zur künstlichen Intelligenz heute., Dilthey-Kastanie, Ludwig-Georgs-Gymnasium, Darmstadt. p. 77–109, 1995.
- [43] WILLE, R., Restructuring lattice theory: An approach based on hierarchies of concepts. Ordered Sets, Vol. 83 of NATO Advanced Study Institutes Series, p. 445–470, 1982.
- [44] Wolff, K. E., A first course in formal concept analysis How to undestand line diagrams, Faulbaum, F. (ed.): SoftStat' 93, Advances in Statistical Software 4, Gustav Fischer Verlag, Stuttgart p 429–438, 1994
- [45] Wolff, K.E., Temporal Concept Analysis. In: Mephu Nguifo E. et al. (eds.): ICCS-2001 International Workshop on Concept Lattices-Based Theory, Methods and Tools for Knowledge Discovery in Databases, p. 91–107. Stanford University, Palo Alto, CA, 2001
- [46] Wolff, K.E., Transitions in Conceptual Time Systems. In: Dubois, D.M. (ed.): International Journal of Computing Anticipatory Systems, vol. 11, p. 398–412. CHAOS, 2002
- [47] ZENOU, E. AND SAMUELIDES, M. Characterizing Image Sets Using Formal Concept Analysis. EU-RASIP JOURNAL ON APPLIED SIGNAL PROCESSING. Vol. 13, p. 1931–1938, 2005

- [48] ZHANG, L., GAO, S., AND QI, L., Topological Distance Function in Formal Concept Lattice, FUZZY SYSTEMS AND KNOWLEDGE DISCOVERY, IEEE. Vol 5, p. 570–574, 2008.
- [49] Zhang, L. and Liu, X. Concept Lattice and its Topological Structure. Proceedings of the 6th World Congress on Intelligent Control and Automation, IEEE. Vol 1, p. 2633 2636, 2006
- [50] ZHANG, L., WANG, D. AND FENG, C., A Novel Topological Distance in Formal Concept Analysis Control and Decision Conference, IEEE, p. 2659 2663, 2008
- [51] Pei, Z., Ruan, D., Meng, D. and Liu, Z., Formal concept analysis based on the topology for attributes of a formal context Information Sciences, Vol 236, p. 66 82, 2013