UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MANIZALES

FACULTAD DE CIENCIAS Y ADMINISTRACIÓN
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS

SUCESIONES Y SERIES NUMERICAS

José Alonso Salazar Caicedo
Bernardo Acevedo Frias

I.S.B.N 958-9322-37-9

Autores:

José Alonso Salazar Caicedo
Licenciado en Educación
Matemática
Profesor Asociado

Bernardo Acevedo Frias
Matemático
Profesor Asociado

Universidad Nacional de Colombia
Sede Manizales

Impreso por:
Centro de Publicaciones
Universidad Nacional de Colombia
Sede Manizales

Noviembre de 1997
Primera Edición

PRÓLOGO

El texto titulado SUCESIONES Y SERIES está destinado a servir de apoyo a los estudiantes que inician sus primeros estudios de matemáticas en las carreras de Ciencias e Ingeniería. Hemos creído que en un nivel primario el tratamiento deberá ser claramente intuitivo y basado en una buena calidad de ejemplos resueltos y en una cuidadosa selección de ejercicios propuestos. De manera natural, este enfoque ocasiona una pérdida considerable de exposición abstracta y rigurosa que podría ser objeto de escritura sistemática en las asignaturas de Análisis Matemático o Cálculo Avanzado. En este sentido la línea de acción está matizada por un fuerte sabor didáctico pedagógico, toda vez que partimos de situaciones concretas para llegar paulatinamente a formulaciones generales y conceptuales, con la perspectiva de afianzar el aprendizaje a través de las aplicaciones.

En el capítulo sobre sucesiones se introduce el concepto de convergencia en el contexto de los números reales, las propiedades respectivas así como la clasificación correspondiente: Convergentes, divergentes, acotadas, no acotadas, crecientes, decrecientes, monótonas, oscilantes. Procuramos en todo momento mantener constante atención en el axioma fundamental (Topológico o de Completez) de los números reales: Toda sucesión creciente y acotada de números reales es convergente. De otro lado, se tratan en detalle las formas indeterminadas, de importancia en la práctica del cálculo de límites. El futuro ingeniero y matemático debe poseer soltura en esta área.

En el capítulo sobre series se introduce el concepto de serie numérica en estrecha conexión con el concepto de sucesión. Destacamos la linealidad de las series convergentes su clasificación en condicional y absolutamente convergentes. Los criterios del Cociente, Raíz, Integral, Raabe y Gauss se estudian con profusión de ejemplos desarrollados a los largo del texto. El énfasis desemboca, como es usual en estos temas, en poner de relieve la importancia de las series de potencias, de trascendencia en la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Hubiera sido nuestro deseo que el profesor ALVARO GARZÓN TOVAR quién colaboró en la etapa inicial, nos acompañara en la primera edición sus valiosos aportes ayudaron mucho. Infortunadamente falleció en forma prematura.

Por último, agradeceríamos al estamento Universitario, profesores y estudiantes, las criticas y sugerencias que tengan a bien hacernos llegar. Por lo demás los autores se responsabilizan de los errores y deficiencias cometidos, este es el fruto de la experiencia como docentes de la Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales.

JOSE ALONSO SALAZAR CAICEDO
BERNARDO ACEVEDO FRIAS
ALVARO GARZÓN TOVAR (Q.E.P.D)

TABLA DE CONTENIDO

SUCESIONES Y SERIES

CAPÍTULO I SUCESIONES

CAPITULO I

SUCESIONES

1.1. INTRODUCCION Y GENERALIDADES

Si cada entero positivo n está asociado un número real a_n, se dice que el conjunto ordenado $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...\}$ define una sucesión real infinita.

Los términos de la sucesión son los números a_1. a_2.... y así hablaremos del primer término a_1, del segundo término a_2, y en general del n-ésimo término a_n. Cada término a_n tiene un siguiente a_{n+1} y por lo tanto no hay un último término.

Los ejemplos más comunes de sucesiones se pueden construir dando alguna regla o fórmula explícita, que proporcione el término n-ésimo, tal como $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = 2^n$; $c_n = \log n$,... etc. Para hallar los términos de $a_n = \frac{1}{n}$, se sustituyen los valores de n = 1,2,3... para obtener $\{ a_1, a_2, a_3, ... \} = \{ 1, 1/2, 1/3, ... \}$. Los puntos suspensivos se usan para sugerir que los términos de la sucesión continúan indefinidamente. Algunas veces se necesitan dos o más fórmulas para especificar los términos de una sucesión, por ejemplo $a_{2n-1} = 1$ y $a_{2n} = 2n^2$. Aquí los términos de la sucesión pertenecen al conjunto $\{ a_1, a_2, a_3, a_4, ... \} = \{ 1, 2, 1, 8, .. \}$ ya que $a_1 = a_{2(1)-1} = 1$, $a_2 = a_{2(1)} = 2$, $a_3 = a_{2(2)-1} = 1$, $a_4 = a_{2(2)} = 8$ y así sucesivamente. Otra forma corriente de definir una sucesión, consiste en mostrar un conjunto de instrucciones u operaciones que indican como se obtiene un término a partir de los anteriores, así por ejemplo: $a_1 = a_2 = 1$ y $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ si $n \geq 2$ (***Sucesión de Fibonacci***). Los términos de esta sucesión pertenecen al conjunto de valores $\{a_1, a_2, a_3, a_4, ...\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...\}$ ya que $a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$; $a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$; $a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$ y en forma análoga se encuentran los demás términos.

Una Sucesión se puede especificar de varias formas; por ejemplo la sucesión {1, 4, 7, 10,...} es susceptible de representarse por {3n - 2 } y , en forma abreviada , también por $a_n = a_{n-1} + 3$; $a_1 = 1$ y $n \geq 2$. Observe que son tres formas de expresar la misma sucesión.

En toda sucesión lo esencial es que exista una función " **f** " definida para todos los enteros positivos a partir de uno fijo, de modo que **f(n)**, es el n-ésimo término de la sucesión para cada entero positivo **n** en el dominio de " **f** ". Efectivamente este es el camino más conveniente para establecer una definición formal de una sucesión.

Definición de la expresión "casi todo entero positivo ".

Casi todo entero positivo **n,** significa, todos los enteros positivos, salvo un número finito. Dicho de otra forma, existe un número natural n_0 tal que $n \geq n_o$ para todo n.

1.2. DEFINICION DE SUCESIÓN

Una sucesión es una función " **f** " cuyo dominio son casi todos los enteros positivos. Si el recorrido es un subconjunto de los números reales, **f** se dice una ***sucesión real*** y si el recorrido es un subconjunto de los números complejos, **f** se dice una ***sucesión compleja***. El n-ésimo término de la sucesión " **f** ", se denotará por **f(n)** o en forma suscinta por $\mathbf{a_n}$ y la sucesión misma por { $\mathbf{a_n}$ } ó { **f (n)** } ó **(**$\mathbf{a_n}$ **)**. En la práctica basta con especificar el término general $\mathbf{a_n}$, si no hay riesgo de confusión.

Generalmente se utilizan letras minúsculas subindizadas entre corchetes o paréntesis. Preferiremos en adelante esta última aceptación cuando se trata de precisar las definiciones

Ejemplo 1. La sucesión $(a_n) = \left(\frac{1}{n-1}\right)$, tiene como dominio el conjunto { 2, 3, 4,...}.

1.3. OPERACIONES

1.3.1. Suma y resta. Sean f y g dos sucesiones, se define la suma (resta) de **f** y **g** por la fórmula,

$$(f \pm g)(n) = f(n) \pm g(n) \quad \text{ó} \quad \{a_n\} \pm \{b_n\} = \{a_n \pm b_n\}.$$

Ejemplo 1. $(n) + \left(\frac{1}{n}\right) = \left(n + \frac{1}{n}\right)$; $n \geq 1$

Ejemplo 2. $(2^n) - (n) = (2^n - n)$; $n \geq 1$

1.3.2. Producto. Sean **f** y **g** son dos sucesiones. Se define el producto de f y g por la fórmula $(fg)(n) = f(n)g(n)$ ó $(a_n)(b_n) = (a_n b_n)$.

Ejemplo 1. $(n)(n^2) = (n^3)$; $n \geq 1$

Ejemplo 2. $(3^n)(n+1) = (3^n(n+1))$; $n \geq 1$

Ejemplo 3. $(5)(n) = (5n)$; $n \geq 1$

1.3.3. Cociente. Sean **f** y **g** dos la sucesión. Se define el cociente de **f** y **g** por la fórmula,

$$\left(\frac{f}{g}\right)(n) = \frac{f(n)}{g(n)} \quad \text{o} \quad \frac{(a_n)}{(b_n)} = \left(\frac{a_n}{b_n}\right); \; g(n) \neq 0 \quad b_n \neq 0$$

Ejemplo 1. $\dfrac{(n)}{(n+1)} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)$; $n \geq 1$

Ejemplo 2. $\dfrac{(2^n)}{(3^n)} = \left(\dfrac{2^n}{3^n}\right)$; $n \geq 1$

Nota. Para evitar el uso excesivo de paréntesis, en muchas ocasiones, denotaremos la sucesión por $\mathbf{a_n}$.

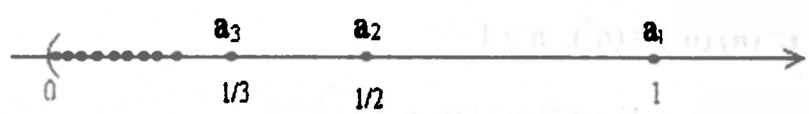
Para una sucesión, lo mismo que para cualquier función, se puede elaborar un bosquejo de su gráfico, aunque éste, para el caso de una sucesión , dice muy poco, tal como se puede apreciar en los ejemplos del parágrafo siguiente.

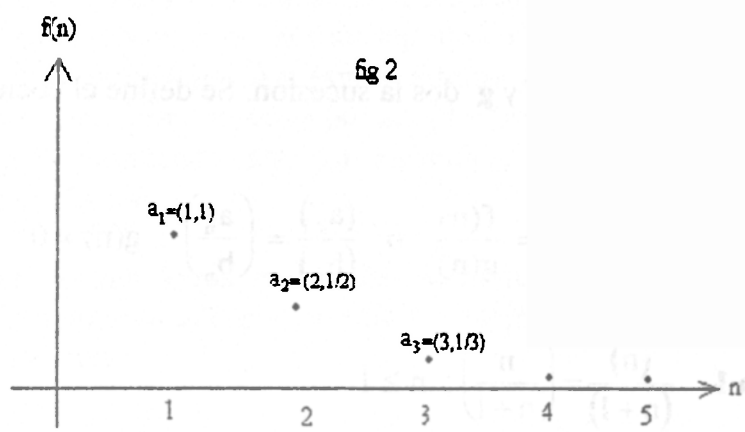
1.4. GRAFICA DE UNA SUCESIÓN

La gráfica de una sucesión se puede obtener marcando simplemente los puntos a_1, a_2, a_3,... sobre una recta o bien marcando los puntos ($\mathbf{n, a_n}$), en el plano cartesiano **OXY**.

Ejemplo 1. $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$

fig 1





De la gráfica observada en la figura 1, se puede intuir que los términos de $\left(\frac{1}{n}\right)$ se acercan cada vez mas al origen y de la **(figura 2)** que los puntos ($\mathbf{n,a_n}$) se acercan cada vez mas al eje horizontal **(eje x)** a medida que n crece, o bien a medida que n toma valores suficientemente grandes.

Ejemplo 2. $(b_n) = (n)$

fig 3

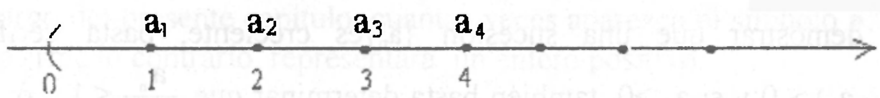
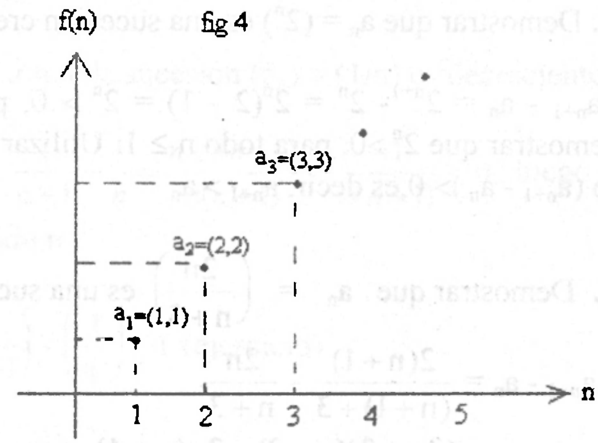


fig 4



De las gráficas anteriores **(fig 3, fig 4)**, se puede afirmar que los términos de **(n)** se alejan cada vez mas del origen tanto como se quiera.

1.5. CLASIFICACIÓN

1.5.1. Sucesión constante. Una sucesión $(\mathbf{a_n})$ es constante sí y solo sí $a_n = a_{n+1}$ para casi todo entero positivo n, en el dominio de la sucesión, es decir, si $a_n = a_{n+1}$ para todo $n > n_0$, con n_0 fijo.

Ejemplo 1. $(1^n) = (1,1,1,.....\ .\ ....)$

Ejemplo 2. $(2) = (2,2,2,.........\ .)$

Ejemplo 3. $(0) = (0,0,0,.........\ )$

1.5.2. Sucesión creciente. Se dice que una sucesión (a_n) es creciente si $a_n < a_{n+1}$, para casi todo entero positivo **n** en el dominio de la sucesión, es decir, $a_n < a_{n+1}$ para todo $n \geq n_0$, con n_0 fijo.

Para demostrar que una sucesión $\{a_n\}$es creciente, basta verificar que $(a_{n+1} - a_n) > 0$ y si $a_n > 0$, también basta determinar que $\frac{a_n}{a_{n+1}} < 1$ ó $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ para todo $n > n_0$.

Ejemplo 1. Demostrar que $a_n = (2^n)$ es una sucesión creciente .

Solución. $a_{n+1} - a_n = 2^{n+1} - 2^n = 2^n(2 - 1) = 2^n > 0$, para todo $n \geq 1$. (como ejercicio demostrar que $2^n > 0$, para todo $n \geq 1$. Utilizar inducción matemática). Por lo tanto $(a_{n+1} - a_n) > 0$,es decir, $a_{n+1} > a_n$

Ejemplo 2. Demostrar que $a_n = \left(\frac{2n}{n+3}\right)$ es una sucesión creciente.

Solución :
$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)}{(n+1)+3} - \frac{2n}{n+3}$$
$$= \frac{(2n+2)(n+3) - 2n(n+4)}{(n+4)(n+3)}$$
$$= \frac{6}{(n+4)n+3)} > 0,$$ **luego $(a_{n+1} - a_n) > 0$ para todo $n \geq 1$.**

Ejemplo 3. Demostrar que $a_n = \{n^2\}$ es una sucesión creciente.

Solución : $a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1 > 0$ y así $(a_{n+1} - a_n) > 0$ para todo $n \geq 1$.

Ejemplo 4. Demostrar que $a_n = \left(\frac{n!}{2^n}\right)$ es una sucesión creciente.

Solución : $a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} - \frac{n!}{2^n} = \frac{n!(n+1) - 2(n!)}{2^{n+1}} = \frac{n!}{2^{n+1}}(n-1) > 0$, para todo $n \geq 2$.

Luego $(a_{n+1} - a_n) > 0$, es decir , $a_n < a_{n+1}$ para casi todo **n**. Obsérvese que para $n = 1$, se tiene que $a_2 - a_1 = 0$ y en este caso se puede afirmar que $a_{n-1} - a_n \geq 0$, para todo n $\geq$ 1, es decir, $a_n \leq a_{n+1}$ para todo n $\geq$ 1. A este tipo de sucesiones algunos autores las suelen llamar ***sucesiones no decrecientes***, en otras palabras; (a_n) es ***no decreciente*** si $a_n \leq a_{n+1}$ para todo n.

A lo largo del presente capítulo, cuantas veces aparezca el símbolo **n**, mientras no se afirme lo contrario, representará un entero positivo.

1.5.3. Sucesión decreciente. Se dice que una sucesión (a_n) es decreciente si $a_n > a_{n+1}$ para casi todo n en el dominio de la sucesión, es decir, $a_n > a_{n+1}$, para todo n $\geq n_0$, con n_0 fijo.

Ejemplo 1. Demostrar que la sucesión $(a_n) = (1/n)$ es decreciente.

Solución : $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n-(n+1)}{n(n+1)} = \dfrac{-1}{n(n+1)} < 0$, luego $a_{n+1} - a_n < 0$ y así $a_n > a_{n+1}$, para todo n.

También $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\dfrac{1}{n+1}\right) / \left(\dfrac{1}{n}\right) < 1$ (ejercicio)

Ejemplo 2. Demostrar que la sucesión $a_n = \left(\dfrac{2^n}{n!}\right)$ es decreciente. Comparar con el ejemplo 4, 1.5.2

Solución : La expresión $a_{n+1} - a_n$ es igual a la diferencia, $\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} - \dfrac{2^n}{n!} = \dfrac{2^n \cdot 2 - 2^n(n+1)}{n!(n+1)} = \dfrac{2^n(2-n+1)}{n!(n+1)} = \dfrac{2^n(1-n)}{n!(n+1)} < 0$, para casi todo n.

Ahora obsérvese que $a_{n+1} - a_n = \dfrac{2^n}{n!}\left(\dfrac{1-n}{1+n}\right) \leq 0$ para todo n, es decir, $a_{n+1} \leq a_n$, para todo n. A éste tipo de sucesiones se les suele llamar ***sucesiones no crecientes***, es decir, $\{a_n\}$ es una sucesión ***no creciente***, si $a_{n+1} \leq a_n$ para todo n.

Observación: Acerca del vocabulario creciente, decreciente, no decreciente o no creciente, no hay consenso general y su empleo difiere según las preferencias de los diversos autores. Es mas, lo que hemos definido como *creciente* en el texto, se suele llamar *estrictamente creciente* en otras obras. Análogamente para el concepto de sucesión decreciente.

Ejemplo 3. Demostrar que $a_n = \left(\dfrac{5^n}{n!}\right)$ es una sucesión decreciente.

Solución :

$$a_{n+1} - a_n = \frac{5^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{5^n}{n!} = \frac{5^n \cdot 5 - 5^n(n+1)}{n!(n+1)} = \frac{5^n}{n!}\left(\frac{4-n}{n+1}\right) < 0, \text{ para todo } n \geq 5 ,$$

luego $a_{n+1} < a_n$ para casi todo n.

Ejemplo 4. Demostrar que la sucesión $a_n = \left\{\dfrac{100^n}{n!}\right\}$ es decreciente.

Solución : $a_{n+1} - a_n = \dfrac{100^{n+1}}{(n+1)!} - \dfrac{100^n}{n!} = \dfrac{100^n \cdot 100}{n!(n+1)} - \dfrac{100^n}{n!} = \dfrac{100^n}{n!}\left(\dfrac{99-n}{n+1}\right)$, luego,

$(a_{n+1} - a_n) > 0$ si $n < 99$ y $a_{n+1} - a_n < 0$ si $n > 99$.

Algunos términos particulares ilustran la situación anterior. Veamos:

$a_{99} = \dfrac{100^{99}}{99!}$; $a_{100} = \dfrac{100^{100}}{100!} = \dfrac{100 \cdot 100^{99}}{100 \cdot 99!} = \dfrac{100^{99}}{99!} = a_{99}$ y así: $a_{n-1} > a_n$ si $n < 99$ y $a_{n+1} < a_n$ si $n > 99$, luego $a_n > a_{n+1}$ para casi todo n luego la sucesión $\left(\dfrac{100^n}{n!}\right)$ es decreciente.

1.5.4. Sucesión monótona. Una sucesión (a_n) es monótona si (a_n) es creciente o decreciente, o bien no creciente o no decreciente.

Ejemplo 1. La sucesión $(a_n) = (n^2)$ es monótona. ya que es creciente.

Ejemplo 2. La sucesión $(b_n) = \left(\dfrac{1}{n}\right)$ es monótona, ya que es decreciente.

Ejemplo 3. La sucesión (1, 1/2,1,1/3,...) no es monótona ; no es creciente ni decreciente.

También existen sucesiones que no son constantes, ni crecientes, ni decrecientes, como por ejemplo:

$$(a_n) = \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n!} \right)$$

Tres términos consecutivos son:

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \quad ; \quad a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)!} \quad ; \quad a_{n+2} = \frac{(-1)^{n+3}}{(n+2)!}$$

Ahora, tres términos consecutivos si n es par son:

$a_{2m} = -\dfrac{1}{(2m)!}$, $a_{2m+1} = \dfrac{1}{(2m+1)!}$; $a_{2m+2} = -\dfrac{1}{(2m+2)!}$, luego $a_n < a_{n+1}$ y $a_{n+1} > a_{n+2}$; $(n = 2m)$.

Para **n** impar, tres términos consecutivos son:

$a_{2m+1} = \dfrac{1}{(2m+1)!}$; $a_{2m+2} = -\dfrac{1}{(2m+2)!}$; $a_{2m+3} = \dfrac{2}{(2m+3)!}$, luego $a_n > a_{n+1}$ y $a_{n+1} < a_{n+2}$ $(n = 2m+1)$. Este es un ejemplo de una sucesión oscilante y motiva la siguiente definición .

1.5.5. Sucesión oscilante. Una sucesión (a_n) es oscilante, si $a_n > a_{n+1}$ y $a_{n+1} < a_{n+2}$ o $a_n < a_{n+1}$ y $a_{n+1} > a_{n+2}$, según se considere $\mathbf{n = 2m+1}$ ó $\mathbf{n = 2m}$, (respectivamente).

Ejemplos. Las sucesiones $((-1)^n n^2)$; $((-3)^n)$; $((-1)^n)$; $\left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \right)$ son oscilantes.

Nota: Para evitar el uso excesivo de paréntesis denotaremos la sucesión $(\mathbf{a}_n)$ abreviadamente por $\mathbf{a}_n$

1.5.6. Sucesión acotada. Una sucesión **(a_n)** de números reales es acotada superiormente si existe un número real **Q** tal que $\mathbf{a_n} \leq \mathbf{Q}$ para todo entero positivo. Diremos que **Q** es una cota superior, porque cualquier número mayor que **Q** es también una cota superior. En algunos casos, la imágen geométrica de la sucesión sobre la recta real puede ayudar a visualizar algunas cotas superiores de la sucesión cuando estas existan. Así por ejemplo, al representar la sucesión $a_n = \frac{1}{2^n}$, vemos que $Q_2 = 1$, $Q_3 = e$, $Q_4 = 1000$, son cotas superiores para la sucesión dada.

En cambio, si consideramos la sucesión **(b_n) = (n^2)**, observamos que no existen cotas superiores para esta sucesión.

Intuitivamente, una cota superior **Q** deja todos los términos de la sucesión a la izquierda de **Q** en la recta real.

En forma análoga, una sucesión es acotada inferiormente si existe un número real **P** tal que $\mathbf{a_n \geq P}$ para todo **n**. Diremos que **P** es una cota inferior, porque cualquier número menor que P es también una cota inferior.

Resulta natural y útil generalizar las ideas anteriores a subconjuntos arbitrarios de números reales. Así, diremos que un subconjunto **A** de números reales es acotado superiormente si existe un número real ***u*** tal que $\mathbf{x} < \boldsymbol{u}$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$. Aceptaremos como una característica fundamental de los números reales el hecho de que para un subconjunto **A** de números reales, acotado superiormente es posible seleccionar una cota superior que satisfaga las dos propiedades siguientes:

i) $x \leq s$ para todo $x \in A$
ii) $s \leq t$ para toda cota superior t del conjunto A.

Dicho de otra manera s es la ***mínima cota superior*** para el conjunto **A**, llamada también ***el extremo superior de A*** y se denotará por ***sup A***. De manera completamente similar el lector no tendrá dificultad en formular el concepto de ***máxima cota inferior*** (o el extremo inferior de A, denotado inf A) para un conjunto acotado inferiormente.

Ejemplo 1. Sea $A = \{x : a \leq x \leq b\} = [a,b]$, intervalo cerrado de extremos a y b.

Aquí, a = inf A; b = sup A. Nótese que a y b pertenecen al conjunto A.

Ejemplo 2. Sea $A = \{ x: -1 < x < -4 \} = (-1, -4]$, intervalo semiabierto (o semicerrado de extremos -1 y -4)

En este caso $-1 = \inf A$; $-4 = \sup A$, pero $-1 \notin A$.

Ejemplo 3. Sea $A=\{x: x > 3\}=(3,+\infty)$, intervalo infinito de origen 3.

Aquí inf A = 3 pero sup A = no existe.

Con referencia a las sucesiones de números reales, diremos que una sucesión es ***acotada*** si lo es tanto inferior como superiormente. Esto equivale a afirmar que existen dos números reales P y Q que satisfacen la doble desigualdad

$$Q \leq a_n \leq P$$

para todo entero positivo n. Equivalentemente, existe un número positivo M tal que $|a_n| \leq M$, para todo n, donde M es el mayor de los números $|P|$, $|Q|$.

Desde un punto de vista geométrico, una sucesión es acotada si todos sus términos están comprendidos entre los números -M y M. Es claro que M sería una cota superior y -M sería una cota inferior. Y si M es una cota superior para la sucesión (a_n), todos sus términos que dan ubicados a la izquierda de M, y si -M es una cota inferior todos sus términos están localizados a la derecha de -M en el eje real.

Ejemplo 4. La sucesión (n) no es acotada. Solo es acotada inferiormente.

El conjunto de las cotas inferiores es $\{ P \mid P \leq 0\}$

Ejemplo 2. La sucesión (1,0,1,0,...) es acotada. Tomar por ejemplo M=1 o cualquier número real mayor o igual que 1.

Ejemplo 3. La sucesión (-n) no es acotada, ya que solo es acotada superiormente. El conjunto de las cotas superiores es $\{ r \in R \mid r > 0\}$.

Ejemplo 4. La sucesión $(a_n) =$ (0.3,0.33,0.333,...)es acotada. sup $\{a_n\} = 1/3$. Tomar por ejemplo M = 1.

Ejemplo 5. La sucesión $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ es acotada. Tomar por ejemplo M = 2. Además sup $\{a_n\} = 1$ e inf $\{a_n\} = 0$.

Observación: En algunas aplicaciones prácticas los números P,Q, pueden ser sugeridos por la representación gráfica de la sucesión.

1.5.7. Progresión aritmética. Es una sucesión de números en la que cada término a partir del segundo, es igual al precedente más una constante, es decir, una sucesión numérica (a_n) tal que para cualquier número natural n se verifica la condición, $a_{n+1} = a_n + d$, donde d es un número real constante para la sucesión dada. El número real d es la razón de la progresión.

Ejemplo 1. $(a_n) = (1,2,3,4,...)$ es una progresión aritmética, con razón d=1.

Ejemplo 2. $(a_n) = (3,5,7,9,...)$ es una progresión aritmética, con razón d=2.

1.5.8. Progresión geométrica. Es una sucesión de números reales, en la cual todo término a partir del segundo es igual al precedente multiplicado por un número constante distinto de cero. En otras palabras, una progresión geométrica es una sucesión numérica (a_n) tal que para cualquier natural n se verifica la condición, $a_{n+1} = a_n.q$, donde q es un número real $q \neq 0$ y constante para la sucesión dada. El número q se dice que es la razón de la progresión.

El término general de una progresión geométrica, se calcula por $a_n = a_1.q^{n-1}$ (su demostración se hará por inducción sobre n (ejercicio)).

Ejemplo 1. La sucesión (2,6,18,...) es una progresión geométrica con razón q = 3.

Ejemplo 2. La sucesión (4,2,1,...) es una progresión geométrica con razón q = 1/2.

EJERCICIOS 1

I). Dar los tres primeros términos de las sucesiones siguientes.

1. $\left\{\dfrac{n}{n+2}\right\}$ 2. $\{7\}$ 3. $\left\{\dfrac{\ln n}{n}\right\}$ 4. $\left\{1+(-1)^n\right\}$

5. $\left\{\dfrac{n}{n-3}\right\}$ 6. $\left\{\dfrac{1}{(n-3)(n-3)}\right\}$ 7. $\left\{\sum_{k=1}^{n} k\right\}$

8. $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2}$; $a_1 = -1$ 9. $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$; $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $n \geq 2$

II). Halle el término n-ésimo de las sucesiones siguientes.

1. $\left\{\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4},\dfrac{5}{6},\dfrac{7}{8},\dots\right\}$ 2. $\left\{\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{9},\dfrac{1}{27},\dots\right\}$ 3. $\left\{1-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4},\dots\right\}$

4. $\{1,2,1,4,1,6,\dots\}$ 5. $\left\{1,\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{7},\dots\right\}$ 6. $\left\{\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4},\dots\right\}$

III). Se deja caer una pelota desde una altura inicial de 15 m sobre una losa de concreto. Cada vez que rebota, alcanza una altura de 2/3 de la altura inicial, hallar la altura que alcanza en el primero, segundo, tercero,... n-ésimo rebote.

IV). Clasificar las siguientes sucesiones como oscilantes, crecientes, decrecientes ,acotadas

1. $\left\{\dfrac{n}{3n+1}\right\}$ 2. $\left\{(-1)^{n\sqrt{n}}\right\}$ 3. $\left\{\dfrac{e^n}{n}\right\}$ 4. $\left\{\dfrac{n}{e^n}\right\}$ 5. $\left\{3^n+1\right\}$

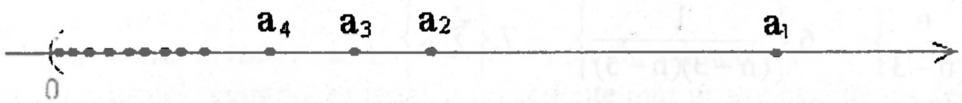
6. $\left\{\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right\}$ 7. $\left\{\dfrac{2^n}{4n+1}\right\}$ 8. $\left\{\ln\left(\dfrac{2n}{n^2+3}\right)\right\}$ 9. $\{\cos n\pi\}$

10. $a_{n+1} = 1+2a_n$, $a_1 = 1$ 11. $\left\{(-1)^n\dfrac{n!}{3n}\right\}$ 12. $\left\{\dfrac{n}{(3n)!}\right\}$

1.6. LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

Obsérvese que la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ cuya representación gráfica se puede apreciar en la fig(5), presenta un comportamiento especifico.

fig 5



i) Intuitivamente, los términos de la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right)$ están cada vez más cerca de cero tanto como se quiera, tomando n suficientemente grande; por ejemplo, para que la distancia de $\frac{1}{n}$ a cero sea menor que $\frac{1}{100}$, n debe ser mas grande que 1000, $\left(\frac{1}{n} < \frac{1}{100}\ \textit{entonces},\ n > 1000\right)$.

ii). Para medir la cercanía de $\frac{1}{n}$ a cero, se debe calcular la distancia entre $\frac{1}{n}$ y cero, es decir, $\left|\frac{1}{n} - 0\right|$. La medida de ésta pequeñez (arbitraria) se denotará por $\varepsilon > 0$. Traduciendo lo anterior a símbolos : $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ si n es suficientemente grande.

Para el ejemplo en consideración si se toma $\varepsilon = 10^{-3}$, $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$, si y solo si $-\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon$ ó bien $\frac{1}{n} \in (-\varepsilon , \varepsilon)$. Luego $\frac{1}{n} \in \left(-10^{-3}, 10^{-3}\right)$ para casi todo n si $\frac{1}{n} \langle 10^{-3}$ ó $n > 10^3$ y bastaría elegir $n_0 = 10^3$. Si se toma $\varepsilon = 10^{-4}$ se tiene que: $\frac{1}{n}\ \varepsilon\ (-10^{-4}, 10^{-4})$ si $n \rangle \frac{1}{\varepsilon} = 10^4 = n_0$. De ésto , se puede concluir a manera de ejemplo que el intervalo abierto $(-10^{-4}, 10^{-4})$

contiene un número infinito de términos de la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)$ y dicho intervalo deja por fuera un número finito, a saber: $\left\{1, \frac{1}{2}, \ldots \frac{1}{10000}\right\}$. Este ejemplo motiva la siguiente definición que constituye uno de los pilares del análisis moderno.

Se dice que una sucesión tiene límite cero, si dado $\varepsilon > 0$, (por pequeño que sea), el intervalo abierto $(0-\varepsilon, 0+\varepsilon)$ contiene infinitos términos de la sucesión $\{a_n\}$ y fuera de él, queda solo un número finito. De manera mas formal:

1.6.1. Definición de sucesión nula. Sea (a_n) una sucesión de números reales. Se dice que (a_n) converge o tiende hacia el número real cero, o que cero es el límite de (a_n), si para cada número estrictamente positivo ε se puede elegir un entero positivo $N = N(\varepsilon)$ tal que $|a_n| < \varepsilon$ para todo entero n que satisfaga la condición $n > N(\varepsilon)$.

Se expresa que cero es el límite de la sucesión (a_n) por el símbolo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

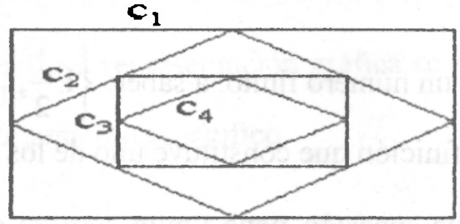
Dicho de otro modo, el símbolo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ significa que para todo $\varepsilon > 0$ (por pequeño que sea) existe $N > 0$ ($N = N(\varepsilon)$, que depende de ε), tal que si $n > N$ entonces $a_n \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, es decir, $|a_n| < \varepsilon$. En forma equivalente: Dado $\varepsilon > 0$ existe $N = N(\varepsilon)$ tal que $|a_n| < \varepsilon$ para casi todo n o también : dado $\varepsilon > 0$, existe $N = N(\varepsilon) > 0$, tal que $|a_n| < \varepsilon$ si $n > N(\varepsilon) = n_0$. Este tipo de sucesiones son sucesiones nulas e infinitésimas.

Observación: El símbolo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ se lee " el límite cuando n tiende hacia infinito de la sucesión a_n es igual a cero".

Analicemos un segundo ejemplo y consideremos un cuadrado de lado 1, (fig 6), que representaremos por C_1. Si unimos los puntos medios de sus lados (por segmentos rectilíneos) se obtiene otro cuadrado C_2, y así sucesivamente se llega a una sucesión de cuadrados $\{C_1, C_2, C_3, \ldots\}$ con sus respectivas áreas $\{S_1, S_2, S_3, \ldots, S_{n1}, \ldots\}$, donde

$$S_1 = 1, S_2 = \frac{1}{2^{3-1}}, \ \ldots S_n = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

fig 6



De manera Intuitiva el área S_n puede llegar a ser tan pequeña como se quiera tomando n suficientemente grande, pero esto se puede expresar así:

Dado $\varepsilon > 0$, (por pequeño que sea) se puede encontrar un término de $\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$ tal que él y todos los siguientes son menores en valor absoluto que ε. En otras palabras, para todo $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que si $n > N$ entonces, $\left|\frac{1}{2^{n-1}} - 0\right| < \varepsilon$.

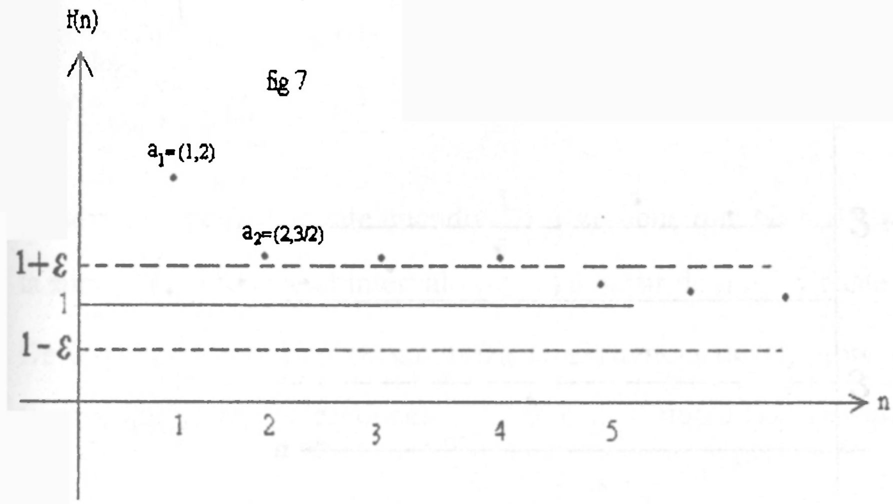
Si generalizamos los ejemplos anteriores, diremos que una sucesión (a_n) tiene límite L cuando n tiende hacia $+\infty$, si para todo $\varepsilon > 0$, (por pequeño que sea), el intervalo abierto $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ contiene un número infinito de términos de (a_n) y el exterior de dicho intervalo contiene un número finito. O en forma mas precisa: *Se dice que* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ *si para todo* $\varepsilon > 0$ *(por pequeño que sea) existe* $N > 0$ *tal que si* $n > N$ *entonces* $a_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, *es decir,* $|a_n - L| < \varepsilon$ *para casi todo n.*

Ejemplo. Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$

Solución : $|a_n - L| = \left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \left|\frac{n+1-n}{n}\right| = \frac{1}{n} < e$ o $n > \frac{1}{e} = N(e)$,

luego si $n > N$, entonces $n > \frac{1}{e}$ o $\left|\frac{1}{n}\right| = \left|\frac{1}{n} + 1 - 1\right| = \left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < e$ y asi

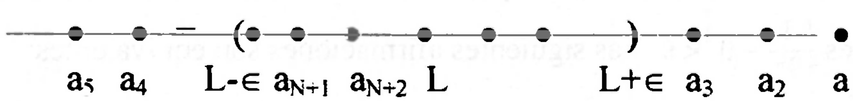
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$



1.6.2. Sucesión convergente. Sucesión divergente.

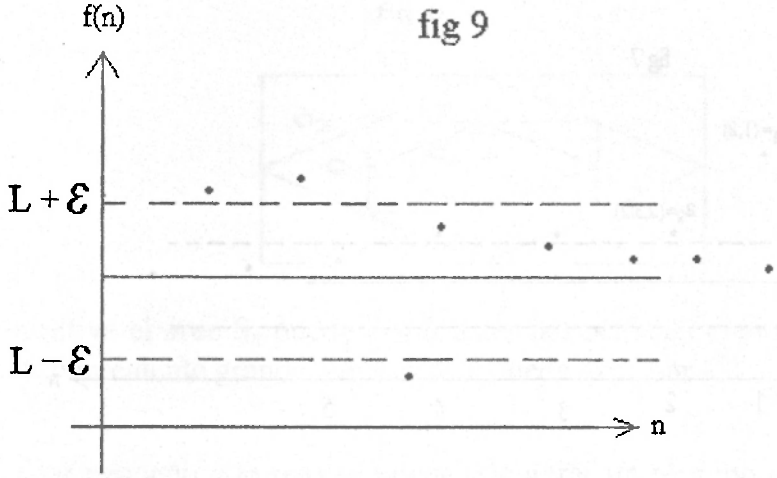
Si una sucesión (a_n) tiene límite real L, se dice convergente y en este caso diremos que la sucesión $\{a_n\}$ converge hacia L. En caso contrario la sucesión (a_n) es divergente.

En caso de que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, (el límite existe y es un número real finito) el comportamiento de la gráfica será similar al de las figuras siguientes (fig 8, Fig 9).



(Fig. 8)

(fuera del intervalo (L-ε.L+ε) existe un número finito de términos)



En la banda comprendida entre L-ε,L+ε; existen infinitos términos de la sucesión. Por fuera de la banda, hemos dejado cinco términos (un número finito) de la sucesión.

Observamos que los puntos (n, a_n) para un $\varepsilon > 0$ dado están entre las rectas L+ε, L-ε a partir de un n>N, es decir, el intervalo abierto (L-ε,L+ε) contiene un número infinito de términos de (a_n) y deja por fuera un número finito, precisamente los términos $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Desde luego que la forma en que los a_n se aproximan a L, puede ser diferente a lo observado en las figuras 8 y 9.

Ejemplo 1. Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$

Solución: Hay que demostrar que dado $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que si $n > N$ entonces $\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| < \varepsilon$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

$i)\ \left|\frac{1}{2^n - 0}\right| < \varepsilon$

$ii)\ \frac{1}{2^n} < \varepsilon$

$iii)\ 2^n > \frac{1}{\varepsilon}$

$iv)\ n\log 2 > \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$

$$v)\ n\rangle \frac{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\log 2} = N_0$$

Obsérvese que justamente cuando $\frac{1}{\varepsilon} < 1$ se tiene que $N_0 < 0$ y todo término de la sucesión pertenece al intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$ a partir de $n > 1$ y basta tomar N=1.

De lo anterior no solo se garantiza la existencia de N, sino que también se cumple que si $n > N$, entonces $\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| < \varepsilon$, debido a las equivalencias i) a v).

Ejemplo 2. Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n+4} = \frac{2}{3}$

Solución. Hay que demostrar que dado $\varepsilon > o$, existe $N > 0$, tal que si $n > N$ $\left|\frac{2n+1}{3n+4} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon.$

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

$$i)\ \left|\frac{2n+1}{3n+4} - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{6n+3-6n-8}{9n+12}\right| = \left|\frac{5}{9n+12}\right| = \frac{5}{9n+12} < \varepsilon$$

$$ii)\ 5 < 9n\varepsilon + 12\varepsilon$$

$$iii)\ \frac{5-12\varepsilon}{9\varepsilon} < n$$

$$iv)\ n\ \rangle\ \frac{5-12\varepsilon}{9\varepsilon} = N_0$$

En caso de ser $N_0 < 0$, todos los términos de la sucesión a partir del primero $(n \geq 1)$ pertenecen al intervalo $\left(\frac{2}{3} - \varepsilon, \frac{2}{3} + \varepsilon\right)$. y bastaría tomar $N = 1$.

Ejemplo 3. Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{0.333...}_{n\ veces} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2}, + ... + \frac{3}{10^n}\right) = \frac{1}{3}.$

Solución. Hay que demostrar que dado $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ de modo que si $n > N$ entonces. $\left|\underbrace{0.33\ldots3}_{n \text{ veces}} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$.

Como $\left|0.33\ldots3 - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{0.99\ldots9 - 1}{3}\right| = \frac{1}{3}[0.00\ldots1]$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{10^n} < \frac{1}{2^n} < \varepsilon \quad \text{si } n\rangle N = \frac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\ln 2}.$$

Ejemplo 4. Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$

Solución. $\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ o $n < \frac{1}{\varepsilon} = N$, luego N existe y además si $n > N = \frac{1}{e}$ entonces $e > \frac{1}{n} = \left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right|$, es decir $\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < e$, que es lo que se quería demostrar.

1.6.3. Subsucesión. Sea (a_n) una sucesión. Una sucesión de la forma $\left(a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}\ldots\right)$ donde n_1, n_2,n_3,... es cualquier sucesión creciente de enteros positivos, se denomina una ***subsucesión.*** Note que (a_{n_k}) está definida mediante una composición de funciones. Esto se hace mas evidente si se escribe a_{n_k} en la forma $a(n(k))$; por ejemplo si $a_n = \frac{1}{n}$ y $n_k = 2k$, entonces $a_{nk} = a(n(k)) = a_{2k} = \frac{1}{2k}$ y por lo tanto $\left(\frac{1}{2k}\right)$ es una subsucesión de $\left\{\frac{1}{n}\right\}$.

Si una sucesión converge hacia M, entonces cualquier subsucesión $\left(a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots\right)$ converge también hacia M.

Demostración. (ejercicio).

Esta propiedad resulta útil para probar que ciertas sucesiones carecen de límite, ya que si (a_n) tiene por ejemplo dos subsucesiones con límites diferentes entonces (a_n) carece de límite.

Ejemplo 1. La sucesión $(-1)^n$ es divergente, ya que tiene las subsucesiones $(1,1,\ldots) = ((-1)^{2n})$ y $(-1,-1,-1,\ldots) = ((-1)^{2n+1})$ con límites 1 y -1 respectivamente.

Ejemplo 2. Se sabe que la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)$ tiene límite cero, entonces las subsucesiones $\left(\frac{1}{2n}\right); \left(\frac{1}{2^n}\right), \left(\frac{1}{5^n}\right), \left(\frac{1}{n2^n}\right)$ tienen límite también cero.

Ejemplo 3. La sucesión $\left(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{3}{4}, 0, \frac{4}{5}, \ldots\right)$ no tiene límite ya que tiene dos subsucesiones $(0,0,0,\ldots); \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\right)$ con límite 0 y 1 respectivamente.

1.6.4. Sucesión divergente a mas infinito. Si los términos de la sucesión (a_n) aumentan su valor tanto como se quiera a medida que n crece, se dice que la sucesión (a_n) diverge a $+\infty$ y lo notaremos por: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$; en otras palabras diremos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ sí para todo $M > 0$ (por grande que sea), existen $N > 0$, tal que si $n > N$ entonces $a_n > M$.

1.6.5. Sucesión divergente a menos infinito. Si los términos de una sucesión (a_n) disminuyen su valor tanto como se quiera para valores de n suficientemente grandes, se dice que la sucesión (a_n) diverge a menos infinito y se nota por $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$. En otras palabras, diremos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ si $(-a_n)$ diverge a mas infinito.

Aclaramos que los símbolos $-\infty$ y $-\infty$ no representan número real alguno, y según nuestra definición de divergencia los límites asociados con tales símbolos no existen.

Ejemplo 1. Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = n^2 = +\infty$.

Hay que demostrar, que para todo $M > 0$ existe $N > 0$ tal que si $n > N$ entonces $a_n = n^2 > M$. Pero si $a_n = n^2 > M$ entonces $n > \sqrt{M}$ y tomando $N = \sqrt{M}$ se tiene que si $n > N = \sqrt{M}$ entonces $a_n = n^2 > M$, que es lo que se quería demostrar.

EJERCICIOS 2

I). Demostrar por medio de la definición que:

$$1.\ \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+3} = 2 \qquad 2.\ \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n+1} = \frac{2}{3} \qquad 3.\ \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$$

$$4.\ \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 0 \qquad 5.\ \lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} = 0$$

$$6.\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{10} + e^n + \cos^4 n} = 0 \qquad 7.\ \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+n} = 0$$

$$8.\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+n} = 0$$

II). Halle el menor entero positivo **N** tal que la desigualdad:

1. $\left|\frac{3n+2}{n-1} - 3\right| < \varepsilon$ se cumpla para todo $n > N$ si a) $\varepsilon = 10^{-2}$, b) $\varepsilon = 10^{-4}$

2. $\left|\frac{1}{n^3} - 0\right| < \varepsilon$, se cumple para todo $n > N$ si a $> \varepsilon = 10^{-6}$ b) ε 0 10^{-3}

III). Considere las sucesiones dadas y halle el número de términos que quedan por fuera de (-ε , ε) si:

1) $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ a) $\varepsilon = 10^{-6}$ b) $\varepsilon = 10^{-3}$

2) $\{a_n\} = \left\{\frac{n}{n^2+1}\right\}$ si a) $\varepsilon = 10^{-4}$ b) $\varepsilon = 10^{-2}$

3) $\{a_n\} = \left\{\frac{n^2}{n^5+n^2+2}\right\}$ si $\varepsilon = 10^{-3}$

IV). Halle el número de términos que quedan por fuera del intervalo (2-ε,2+ε) si:

$1)\{a_n\} = \left\{\dfrac{2n}{n+1}\right\}$ a) $\varepsilon = 10^{-3}$

$2)\{a_n\} = \left\{\dfrac{2n^2}{n^2+2n+1}\right\}$ a) $\varepsilon = 10^{-3}$

V). Halle el límite de las sucesiones siguientes:

1. $\left\{\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{2}\right\}$ 2. $\left\{\cos\dfrac{n\pi}{2}\right\}$ 3. $\{\ln n\}$

4. $\left\{\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}\right\}$ 5. $\{n^2 - n\}$ 6. $\{(-1)^n e^n\}$

VI). Dadas las sucesiones siguientes:

1. $\{n\}$ 2. $\left\{\dfrac{1}{n^2+1}\right\}$ 3. $\{n^2\}$

4. $\left\{\operatorname{sen}(n+1)\dfrac{\pi}{2}\right\}$ 5 $\left\{\dfrac{1}{3n-2}\right\}$ 6. $\left\{\dfrac{n^2}{n+1}\right\}$

Halle dos subsucesiones diferentes.

1.7. PROPIEDADES DE LOS LÍMITES DE SUCESIONES DE NUMEROS REALES.

1.7.1. Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = M$ y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ entonces $L = M$ (unicidad del límite).

Demostración. Ejercicio.

1.7.2. $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$ (el límite de una sucesión constante coincide con la constante que representa la sucesión).

Demostración (ejercicio).

1.7.3. Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ y c es una constante entonces $\lim\limits_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot L$

Demostración (ejercicio).

Ejemplo 1. $\lim\limits_{n\to\infty} \pi = \pi$

Ejemplo 2. $\lim\limits_{n\to\infty} 5 \times \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{n} = 5\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 5 \times 0 = 0$

Ejemplo 3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6n+3}{3n+4} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3(2n+1)}{3n+4} = 3\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n+4} = 3 \times \frac{2}{3} = 2$

1.7.4. Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = M$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = L + M$. (El límite de una suma de sucesiones es igual a la suma de los límites).

Demostración . Como

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ dado $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existe $N_1 > 0$ tal que si $n > N_1$ entonces $|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$

y como $\lim_{n\to\infty} b_n = M$; *dado* $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ *existe* $N_2 > 0$ *de modo que si* $n > N_2$ *entonces*

$|b_n - M| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Hay que demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que

$n > N$ entonces $|(a_n + b_n) - (L + M)| < e$. Pero $|(a_n + b_n) - (L + M)| =$

$|a_n - L + b_n - M| < |a_n - L| + |b_n - M| < \frac{e}{2} + \frac{e}{2} = e,$

luego, tomando $N = \max\{N_1, N_2\}$, se tiene que si $n > N$ entonces, $|a_n + b_n - (L + M)| < \varepsilon$ (en forma análoga se demuestra la diferencia).

Ejemplo 1. Hallar $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n}\right)$.

Solución $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n} = 0 + 0 = 0$ ya que $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$

y $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n} = 0$, (existen)

Ejemplo 2. Evaluar $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+4}$

Solución.

$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+4} = \frac{2}{3}$ *y* $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) = 0$, *entonces,* $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+4} - \frac{(-1)^n}{n}\right)$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+4} - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) = \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3}$

Ejemplo 3. Calcular $\lim_{n\to\infty}(n + \frac{1}{n})$. Nótese que no se puede aplicar la anterior propiedad, ya que $\lim_{n\to\infty} n$ no existe.

1.7.5. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = M$ entonces $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = L \times M$

(El límite de un producto de sucesiones es igual al producto de los límites).

Demostración. (Ejercicio)

Ejemplo 1. Determinar $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n2^n}$

Solucion. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \times \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0 \times 0 = 0,$

ya que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ (existen)

Ejemplo 2. Evaluar $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}$

Solucion. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} \times \frac{1}{n}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \times \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \times \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \times 0 \times 0 = 0$$

1.7.6. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = M$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = = \frac{L}{M}$

si $M \neq 0$ y $b_n \neq 0$ para todo $n \geq n_0$.

El límite de un cociente de sucesiones es igual al cociente de los límites.
Demostración (ejercicio).

Ejemplo 1. Hallar $\lim_{n\to\infty} \frac{3n+4}{2n+1}$

Solución. En este caso $\lim_{n\to\infty} 3n+4 = +\infty$ y $\lim_{n\to\infty} 2n+1 = +\infty$ y no son aplicables las propiedades estudiadas. Por este motivo, se procederá como se indica a continuación:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+4}{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(3+\frac{4}{n}\right)}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{4}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{3}{2}$$

1.7.7. Reglas para operar con los símbolos "+∞ ", "-∞".

1) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$

2) $-\infty - \infty = -\infty$

3) $+\infty \pm a = +\infty \quad$ si $a \in R$

4) $-\infty \pm a = -\infty, \quad$ si $a \in R$

5) $(-\infty)(-\infty) = +\infty$

6) $(+\infty)(+\infty) = +\infty$

7) $(+\infty)a = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 0 \\ -\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}$

8) $(-\infty)a = \begin{cases} +\infty & \text{si } a < 0 \\ -\infty & \text{si } a > 0 \end{cases}$

Nota: $0 \times (+\infty)$; $0 \times (-\infty)$ son "formas indeterminadas"

9) $(-\infty) \times (+\infty) = (+\infty) \times (-\infty) = -\infty$

Ejemplos.

1) $\lim_{n\to\infty}(n^2 + n) = +\infty$

2) $\lim_{n\to\infty} n2^n = +\infty$

3) $\lim_{n\to\infty}(-n - n^4) = -\infty$

4) $\lim_{n\to\infty}(n^2 \pm 5) = +\infty$

5) $\lim_{n\to\infty} 6n^3 = +\infty$

1.7.8. sea $\lim_{n\to\infty} a_n = A \neq 0$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ no existe

Demostración : Supongamos que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ existe y es igual a K, y como

$$A \neq 0 = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n \frac{b_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} b_n \times \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \times K = 0$$

y así se obtiene una contradicción, luego $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ no existe.

Ejemplo 1. Analizar $\lim_{n\to\infty} n$.

Solucion. $\lim_{n\to\infty} n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1/n)}$ que no existe, pues $\lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0$

y $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Ejemplo 2. Analizar $\lim_{n\to\infty} 2^n$

Solucion. $\lim_{n\to\infty} 2^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1/2^n)}$ que no existe, pues $\lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0$

y $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$

1.7.9. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ puede existir o no. Demostracion (ejercicio).

Ejemplo 1. sean $(a_n) = \left(-\frac{1}{n}\right)$, $(b_n) = \left(\frac{1}{n^2}\right)$ entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1/n}{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} (-n) = -\infty \text{ (no existe)}$$

Ejemplo 2. Sean $a_n = \frac{1}{3n+3}$ y $b_n = \frac{1}{2n+1}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n+3} = \frac{2}{3}$$

Ejemplo 3. Sean $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$; $b_n = \frac{1}{n}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$,

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} (-1)^n$, que no existe.

1.7.10. Sean $(a_n),(b_n),(c_n)$ tres sucesiones tales que $a_n \le c_n \le b_n$ para casi todo n

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L$ entonces $\lim_{n\to\infty} c_n = L$.

(Teorema de la doble desigualdad)

Demostración:

Como $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, para todo $\varepsilon > 0$ existe $N_1 > 0$ tal que si $n > N_1$ entonces $|a_n - L| < \varepsilon$, es decir $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$.

Como $\lim_{n\to\infty} b_n = L$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $N_2 > 0$ tal que si $n > N_2$ entonces $|b_n - L| < \varepsilon$, es decir, $L - \varepsilon < b_n < L + \varepsilon$.

Sea $N = \max\{N_1, N_2\} > 0$, entonces si $n > N$ se tieneque $L - \varepsilon < a_n < c_n < b_n < L + \varepsilon$, luego si $n > N$ entonces $L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon$ y asi $|c_n - L| < \varepsilon$, es decir, $\lim_{n\to\infty} c_n = L$, que es lo que se queria demostrar

Ejemplo1. Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$

Solucion1. $0\leq\frac{1}{n^2}\leq\frac{1}{n}$, y como $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ y $\lim\limits_{n\to\infty}0=0$,

entonces por el teorema de la dobledesigualdad se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0.$

Solucion2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\times\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\times 0=0$

Ejemplo2. Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\operatorname{sen}^2 n}{2^n}=0.$

Solucion. Sabemos que $0\leq\operatorname{sen}^2 n\leq 1$ ya que $|\operatorname{sen} n|\leq 1$, y asi

$\frac{0}{2^n}\leq\frac{\operatorname{sen}^2 n}{2^n}\leq\frac{1}{2^n}$, y como $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\operatorname{sen}^2 n}{2^n}=0$

Ejemplo 3. Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n(n+1)}=0$

Solucion. Se sabe que $e^n\geq n$, luego $n\geq\ln n$; y $0\leq\ln n\leq n$,

y asi $\frac{0}{n(n+1)}\leq\frac{\ln n}{n(n+1)}\leq\frac{n}{n(n+1)}=\frac{1}{n+1}\leq\frac{1}{n}$

y como $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{0}{n(n+1)}=0$ y $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, por el torema de la doble desigualdad se concluye el resultado deseado.

1.7.11.Si $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ (y reciprocamente)

Demostracion.

Se sabe que $-|a_n|\leq a_n\leq|a_n|$ y como $\lim\limits_{n\to\infty}-|a_n|=0$ y $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$ entonces por el teorema de la doble desiguadad resulta:

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0.$

Ejemplo 1. Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos^4 3n}{n^4}=0.$

*So*lucion. Se sabe que $0 \le \cos^4 3n \le 1$, luego

$$\frac{0}{n^4} \le \left|\frac{\cos^4 3n}{n^4}\right| \le \frac{1}{n^4} \le \frac{1}{n}$$ y como $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$,

entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{\cos^4 3n}{n^4}\right| = 0$ y asi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos^4 3n}{n^4} = 0$

*E*jemplo 2. Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 0$

Solucion. $0 \le \left|\frac{(-1)^n}{n!}\right| = \frac{1}{n!} \le \frac{1}{n}$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n!}\right| = 0$ y asi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 0$$

1.7.12. Sean (a_n) ,(b_n) dos sucesiones tales que : $|b_n| \le |a_n|$, para casi todo n.

Si $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} |b_n| = 0$.

Demostracion. $0 \le |b_n| \le |a_n|$, y por el teorema de la doble desigualdad se obtiene $\lim\limits_{n\to\infty} |b_n| = 0$.

Ejemplo 1. Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2 2^n} = 0$

Solucion. Aqui $0 \le \frac{1}{n^2 2^n} \le \frac{1}{2^n}$ y como $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2 2^n} = 0$$

Ejemplo 2. Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} n \cos n}{n^3} = 0$.

Solucion. $\left|\frac{\operatorname{sen} n \cos n}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^3} \le \frac{1}{n}$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\operatorname{sen} n \cos n}{n^3}\right| = 0 \text{ y asi } \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} n \cos n}{n^3} = 0$$

Ejemplo 3. Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{(n^{60} + \cos^{40} n + 1)^{1/20}} = 0$

*S*olucion. $n^{60} + \cos^{40}n + 1 > n^{60}$, entonces $\dfrac{1}{n^{60} + \cos^{40}n + 1} < \dfrac{1}{n^{60}}$,

luego $\dfrac{1}{(n^{60} + \cos^{40}n + 1)^{1/20}} < \dfrac{1}{n^3}$, y multiplicando por n, obtenemos

que $\dfrac{1}{(n^{60} + \cos^{40}n + 1)^{1/20}} \le \dfrac{n}{n^3} = \dfrac{1}{n^2}$ y asi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n^{60} + \cos^{40}n + 1)^{1/20}} = 0$$