UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

Enseñanza de las operaciones entre polinomios de una variable de primer y segundo grado bajo el enfoque de la resolución de problemas

Ricardo Alberto Torres Cifuentes

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Bogotá, Colombia

2018

Enseñanza de las operaciones entre polinomios de una variable de primer y segundo grado bajo el enfoque de la resolución de problemas

Ricardo Alberto Torres Cifuentes

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales.

Directora:

Ph.D. Ivon Andrea Dorado Correa

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Bogotá, Colombia

2018

Dedicatoria

Se encontraba tan distraída cuidando como de costumbre a sus escuderos, tal vez, más de lo que debería, que no se percató que un espectro, uno de los más oscuros y poderosos al que ya había derrotado alguna vez, estaba a punto de atacarla nuevamente. Esta vez, para terminar con su vida. Luchó con todas sus fuerzas, pero ya era tarde, la sombra le había tomado ventaja. Apretó la mano de su escudero más timorato, que con lágrimas en su rostro veía como la perdía. Mientras ella con su mirada profunda y sus ojos que con el sol cambiaban de color, como solo lo hacen los ojos de las guerreras más valientes y de corazón puro, fingiendo no sentir dolor... le dijo que lo amaba.

No me alcanzaría esta vida ni ninguna otra para compensar todo lo que hiciste por mí, te amé, te amo y te amaré por toda la eternidad mamá.

Agradecimientos

A la profesora Ivon Andrea Dorado. Este trabajo no hubiese sido posible sin su esfuerzo, dedicación, enseñanzas, paciencia y acompañamiento. Dios la bendiga a ella y a su familia.

A Saray, Karen, David y Cristian por hacer parte de esta investigación.

A Mauricio, Gonzalo y John, cada uno aportó de manera indirecta a la iniciación, desarrollo y culminación de este trabajo.

A la rectora Marleny Bohórquez y coordinador académico Bernardo Barbosa del Colegio Silveria Espinosa de Rendón por brindarme su confianza y abrirme las puertas de su institución para el desarrollo de esta investigación.

Resumen

La presente investigación abarca la elaboración, aplicación y análisis de los resultados de una secuencia didáctica empleada para la enseñanza, la apropiación de un significado y la interpretación de las operaciones básicas: suma, resta, multiplicación, división y factorización de polinomios de grado dos con coeficientes enteros. Así como, la resolución de problemas algebraicos relacionados con el concepto de área.

Este trabajo se realizó empleando la metodología de investigación acción, tomando las estrategias pedagógicas con enfoque inductivo y metacognitivo expuestas por Mason, Burton y Stacey (1982) en su libro *Pensar Matemáticamente* y el uso y comparación de diferentes lenguajes: el concreto, apoyado en la “caja de polinomios” de Soto, Mosquera y Gómez (2005), el pictórico y el simbólico algebraico. Esta propuesta se aplicó a un grupo de estudiantes de grado octavo del Colegio Silveria Espinosa de Rendón.

Palabras clave: Caja de polinomios, secuencia didáctica, investigación acción, resolución de problemas, operaciones con polinomios, estadios de desarrollo cognitivo, lenguajes concreto, pictórico y simbólico algebraico.

Abstract

The following research involves the elaboration, application and analysis of the results of a learning design used for the teaching, the appropriation of a meaning for the basic operations: addition, subtraction, multiplication, division and factorization of polynomials of degree two with integer coefficients, as well as the resolution of algebraic problems related to the concept of area.

This was done using the action research methodology, taking into account pedagogical strategies such as inductive and metacognitive approach exposed by Mason, Burton and Stacey (1982) in their book *Thinking mathematically* and the use and comparison of different languages: the concrete, supported by "la caja de polinomios" (polynomial box) Soto, Mosquera and Gómez (2005), the pictorial and the symbolic one. This proposal was applied to an eighth graders group from the Colegio Silveria Espinosa de Rendón.

Keywords: Polynomial box, didactic sequence, action research, problem solving, operations with polynomials, stages of cognitive development, concrete, pictorial and symbolic algebraic languages.

Contenido

Lista de figuras

Lista de tablas

Pág.

Introducción

En Colombia, el aprendizaje de las matemáticas se considera un componente primordial en la formación de los ciudadanos que se enfrentarán a las demandas laborales del siglo XXI. Demandas que requieren un nivel considerable de abstracción debido a su vertiginoso avance a nivel tecnológico, científico y cognitivo. Así mismo, se considera el aprendizaje de las matemáticas como un componente imprescindible que articula y estructura el pensamiento del ciudadano, para la toma de decisiones que tienen consecuencias políticas y sociales. De esta manera, las matemáticas hacen parte del conjunto de saberes y habilidades fundamentales a desarrollar desde los primeros grados de escolaridad hasta grado undécimo. (MEN, 2017).

Teniendo en cuenta las necesidades de una población diversa, el Ministerio de Educación Nacional (MEN) intenta extender los fines de la educación matemática. Proyecta así, una educación con compromiso social que busca abarcar un panorama más amplio donde figura la inclusión de estudiantes con discapacidades físicas, cognitivas y económicas (MEN, 2017). Esto es, una educación matemática para la equidad social. Consecuentemente, el aprendizaje de cualquier rama de las matemáticas en la formación escolar deberá potenciar habilidades que le permitan a cualquier tipo de estudiante enfrentarse a los desafíos laborales y sociales que demanda el siglo XXI.

En el caso de la población colombiana, los estándares básicos de competencias hacen énfasis en la importancia de desarrollar el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos desde los primeros cursos de la educación básica (MEN, 2017). Algunos aspectos fundamentales dentro de este marco se relacionan con la noción de variable, el manejo del lenguaje algebraico y en particular, las operaciones entre polinomios de primer y segundo grado con una indeterminada (OPPSI). Estos aspectos están contenidos en el diseño curricular de las instituciones tanto privadas como públicas, incluyendo de esta manera al Colegio Silveria Espinosa de Rendón.

1.1 Problema de investigación.

La enseñanza de las OPPSI es una problemática que ha sido abordada por numerosas investigaciones nacionales e internacionales, cada una desde diferentes enfoques.

Entre los trabajos significativos para el desarrollo y evolución de esta investigación se resaltan las investigaciones de Soto, Mosquera y Gómez (2005), quienes proponen la enseñanza de operaciones algebraicas a partir de material concreto “La caja de polinomios” (Soto, Mosquera, & Gómez, 2005). La investigación realizada por Villarroel (Villarroel, 2014), quien emplea el material de Soto, Mosquera y Gómez (2005) para la enseñanza de operaciones algebraicas en grado octavo en un colegio de Medellín; y los trabajos de Ballen (Ballén, 2012), Tangarife (Tangarife, 2013) , Sandoval (Sandoval, 2010) y Valderrama (Valderrama, 2015) que trabajan las operaciones algebraicas desde el enfoque geométrico, haciendo uso ya sea de material concreto o herramientas tecnológicas.
A pesar de las numerosas investigaciones, las experiencias de enseñanza en las aulas del Colegio Silveria Espinosa de Rendón permiten evidenciar que hay un porcentaje significativo de estudiantes que presentan dificultades al trabajar con las OPPSI. Consecuentemente el desarrollo consciente de las OPPSI solo es asequible para una población reducida de estudiantes a quienes se les facilita la comprensión de lo abstracto y lo formal. Lo que genera panoramas de desconcierto y frustración en aquellos estudiantes que aún no han potencializado su capacidad de generalización.

Es conveniente entonces rescatar de las múltiples investigaciones de la enseñanza del álgebra, estrategias, dinámicas y métodos que les permitan a diferentes tipos de estudiantes abordar las OPPSI de tal manera que estas puedan ser interpretadas y cobren diferentes significados.

Una posible estrategia consiste en guiar al estudiante para que sea el actor principal en su aprendizaje. Invitarlo a resolver situaciones problema que le permitan ir aprendiendo de su propia experiencia.

Bajo estas dinámicas, el maestro juega un rol diferente al tradicional, en el que le compete diseñar actividades que orienten al estudiante a cumplir tal fin (Polya, 1973). Dichas actividades se pueden ligar a métodos lúdicos y didácticos que le permitan al estudiante pasar de manera paulatina de lo concreto a lo abstracto, permitiendo que estructure poco a poco su *pensamiento matemático*, para que eventualmente adquiera habilidades que le permitan solucionar problemas de manera efectiva (Mason, Burton, & Stacey, 1982) (MEN, 2017).

Considerando lo anterior, se ha diseñado una secuencia didáctica dirigida a estudiantes de grado octavo del Colegio Silveria Espinosa de Rendón basada en el uso del material concreto "La caja de polinomios" (Soto, Mosquera, & Gómez, 2005) y la resolución de problemas desde un enfoque metacognitivo, como una estrategia para dotar de significado e interpretar las operaciones entre polinomios de primer y segundo grado con una indeterminada (suma, resta, multiplicación, factorización y división).

A través del material y las estrategias diseñadas en la secuencia, se pretende favorecer la identificación de la estrecha relación que hay entre el álgebra y la geometría, dado que según Socas *et al* (1996):

> Muchos de nuestros alumnos (incluso universitarios) consideran que las variables son letras que deben ser sustituidas por números obligatoriamente, y no se detienen a analizar que, en geometría, por ejemplo, las variables representan puntos, rectas, etc.; en lógica, proposiciones; en análisis, funciones (pág. 93).

1.2 Objetivo general

Desarrollar una secuencia didáctica dirigida a un grupo de estudiantes de grado octavo del Colegio Silveria Espinosa de Rendón, para trabajar un significado e interpretación de las operaciones entre polinomios de primer y segundo grado con una indeterminada, basada en la resolución de problemas y el uso de material concreto como lo es "La caja de polinomios".

1.3 Objetivos específicos

1. Determinar conocimientos previos del grupo de estudiantes con los que se realizará la investigación, relacionados con problemas y operaciones que involucren el uso de polinomios de primer y segundo grado con una indeterminada.
2. Identificar y revisar los aspectos conceptuales, disciplinares, epistemológicos y didácticos relacionados con la secuencia didáctica.
3. Diseñar la secuencia didáctica.
4. Validar la secuencia con un grupo de estudiantes de grado octavo del Colegio Silveria Espinosa de Rendón.
5. Analizar los resultados y formular sugerencias para trabajos futuros.

1.4 Contexto.

El colegio Silveria Espinosa de Rendón es un colegio distrital calendario A que cuenta con dos jornadas escolares. Está ubicado en el barrio Salazar Gómez de la localidad 16 (Puente Aranda) de la ciudad de Bogotá, que cuenta con 5 Unidades de Planeamiento Zonal (UPZ). El colegio se encuentra en la UPZ San Rafael que cuenta con 14 barrios además del barrio Salazar Gómez. Es una zona que se caracteriza por su actividad industrial y comercial. Gran parte de sus habitantes se encuentran ubicados en un estrato socioeconómico 3, es decir clase media baja.
Aunque la mayoría de los estudiantes vive en zonas aledañas, existe un porcentaje importante de estudiantes pertenecientes a otras localidades, quienes se desplazan diariamente para tomar sus clases en este colegio.

Entre las problemáticas sociales que afectan a la localidad se encuentran: el expendio y consumo de estupefacientes, la inseguridad y la mala calidad del aire asociada con las altas concentraciones de material particulado, que influyen en enfermedades respiratorias en niños, jóvenes y adultos (Cifuentes, Colorado, Erazo, & Aponte, 2014).

La propuesta se desarrolló con un grupo de cuatro estudiantes de grado octavo del Colegio Silveria Espinosa de Rendón, cuyas edades oscilan entre los trece y quince años y cuyos niveles socioeconómicos se encuentran ubicados en los estratos 2 y 3.

Se escogió el Colegio Silveria Espinosa de Rendón con el ánimo de favorecer los procesos de formación de estudiantes de una institución pública. Se contó con la autorización de la rectora del plantel para trabajar los sábados de ocho a doce de la mañana, y se solicitó un grupo de máximo doce estudiantes, del cual se tomaría una muestra de cuatro para llevar a cabo la investigación. El coordinador académico de la institución realizó una convocatoria de estudiantes que estuviesen interesados en mejorar sus habilidades en álgebra, y se “inscribieron al curso” veinticinco estudiantes.

Aunque en principio los veinticinco estudiantes asistieron a más o menos seis sesiones, varios estudiantes fueron renunciando al “curso” por diferentes razones; la principal fue el hecho de que su asistencia no afectaba de ninguna manera las valoraciones correspondientes a la clase de álgebra (clase titular). Aunque en principio esta era la intención, el maestro del colegio no accedió a la propuesta. Por consiguiente, varios estudiantes sintieron que no había una buena razón para darle continuidad al proceso. Otros estudiantes no toleraron la idea de asistir a clase los sábados en una jornada de cuatro horas. Y algunos desistieron debido a que varias veces se les recordó que el espacio era netamente académico y no social. De los veinticinco estudiantes perduró un grupo de cuatro estudiantes, que en principio era la población deseada para realizar la investigación. De esta manera, el análisis de los resultados de las actividades de la secuencia girará en torno a estos estudiantes.

.

2. Marco teórico

2.1 Marco epistemológico

Para hablar de operaciones algebraicas como suma, resta, multiplicación, división y factorización de polinomios, tenemos obligatoriamente que hacer referencia a dos pilares fundamentales de la historia de las matemáticas que dieron origen al álgebra y los métodos incluidos en esta: las ecuaciones, que surgen de la intención de resolver problemas concretos o de la vida cotidiana, y la geometría, aplicada directamente a los objetos concretos con los que se trabajaba para resolver estos problemas.

El empleo del álgebra es tan antiguo como las primeras formas de escritura, las ecuaciones lineales y cuadráticas tienen tanta antigüedad como los textos cuneiformes (Socas, Camacho, Palarea, & Hernandez, 1996). Las primeras civilizaciones en proponer y resolver problemas algebraicos fueron los babilonios, hindúes y egipcios. La mayoría de los problemas tenían un objetivo práctico, por lo general con un enfoque geométrico, como determinar el área de un muro, o la sección transversal de un río:

> Un antiguo texto indio, uno de los Sulba Sutras escrito por Baudhayana hacia el siglo IIIV a.C. cita por primera vez y luego resuelve ecuaciones de segundo grado de la forma $ax^2 = c$ y $ax^2 + bx = c$. Esto sucedió en el contexto de la construcción de altares, y está relacionado con un problema práctico en tres dimensiones. (Rooney, 2011, pág. 123)

Los babilonios y los egipcios recurrieron al empleo de palabras para la solución de estos problemas, esto es, un álgebra de carácter retórico (Kline, 1990).

Para algunos autores, los egipcios y babilonios no se interesaron por establecer patrones en los problemas que presentaran rasgos similares, ni sistematizaron su trabajo en busca de una generalización que les permitiera utilizar el mismo método para la solución de situaciones análogas, en otras palabras, no desarrollaron algoritmos (Rooney, 2011).

Otros autores, sin embargo, señalan que los babilonios sabían que su procedimiento de completar cuadrados para la solución de ecuaciones de segundo grado era general. Los ejemplos que aparecen en las tablillas babilonias por ejemplo, en la tablilla BM1390, son bastante elaborados para ser la solución a un problema particular. Es posible pensar que detrás del método exista una idea sencilla. La forma de trabajar de los babilonios apunta a una deducción geométrica de completar cuadrados para la solución a ecuaciones cuadráticas, aunque no existen evidencias directas (Stewart, 2009).

Hacia el año 300 a.C. Euclides, en su libro II, emplea herramientas geométricas para el desarrollo de un álgebra que cobra sentido en la interpretación de longitudes como segmentos, áreas como rectángulos o cuadrados y volúmenes como paralelepípedos, de esta manera logra solucionar cierto tipo de ecuaciones utilizando la geometría. Estas ideas serían retomadas y consolidadas por Pappus de Alejandría añadiendo el concepto de dimensión. Así, los problemas de primer grado se relacionan con objetos geométricos de una dimensión (longitudes de segmentos), los problemas de segundo orden con dos dimensiones (áreas) y los problemas de tercer orden, o ecuaciones cúbicas, con tres dimensiones o volúmenes (Rooney, 2011).

Es a los griegos a quienes debemos el uso de letras en expresiones matemáticas. Según Socas *et al* (1996) “La comunicación escrita del conocimiento geométrico requería el uso de figuras donde los puntos eran señalados con las letras del alfabeto” (pág. 22). Esta práctica se conserva actualmente, por ejemplo, para nombrar un punto o un conjunto de puntos que forman una figura plana. Aunque en Grecia las letras también representaban un valor numérico, que pudo ser el inicio del uso de la letra como incógnita, cuando se empleaban en ecuaciones algebraicas se presentaban ciertas dificultades. Por ejemplo, aunque en geometría todos los puntos son los “mismos”, los números tienen individualidad definida. (Socas, Camacho, Palarea, & Hernandez, 1996). Por otro lado, los griegos empleaban la geometría como una herramienta poderosa para la solución de ecuaciones.

Sin embargo, cuando se presentaban ecuaciones cuadráticas del tipo $x^2 + bx = a$, estas carecían de sentido, pues el término de la derecha representa longitud y el de la izquierda áreas, esto es, un área no puede ser igual a una longitud (Rooney, 2011).

Casi paralelo al trabajo de Euclides en el siglo III a.C, Diofanto, considerado por algunos como el padre del álgebra (O'connor & Robertson, 2017), presenta solución a problemas de carácter algebraico en su libro “Aritmética” empleando y determinando cantidades desconocidas sin recurrir a representaciones geométricas. El tipo de ecuaciones que estudió reciben el nombre de ecuaciones diofánticas y se dividen en tres categorías, las que no tienen solución, las que tienen un número finito de soluciones, y las que tienen infinidad de soluciones (Rooney, 2011). Se destaca en Diofanto el empleo de los símbolos por primera vez en la resolución de ecuaciones. Esto es, los inicios del desarrollo de un lenguaje algebraico cuyo uso se extenderá hasta comienzos del siglo XVI (Socas, Camacho, Palarea, & Hernandez, 1996).

En el ocaso de la cultura y civilización griega aparece refulgente la alborada de la civilización árabe que conquistaría los territorios que ocuparon con anterioridad los griegos y los romanos. Conforme expandían su imperio los árabes se adjudicaron automáticamente el legado intelectual de estas culturas. Para ese entonces el pueblo árabe gozaba de gobernantes que disfrutaban de todo aquello que implicara conocimiento. De esta manera y bajo la aprobación de gobernantes como Al-MA’mún, gran parte del conocimiento matemático producido por los griegos fue traducido a la lengua árabe (Acevedo & Falk, 1997).

Los conocimientos algebraicos de los griegos fueron transformados por los árabes, en una mezcla de lo aprendido por la cultura griega e hindú:

> con el desarrollo del sistema de numeración indo-arábigo y la adopción del cero, se hizo posible algo parecido al álgebra moderna. Los matemáticos árabes, al juntar lo mejor de las matemáticas griegas e indias y ampliarlas, sentaron las bases de un auténtico sistema algebraico e incluso nos ofrecieron el término “álgebra” (Rooney, 2011, pág. 126)

Se pasó así de un extenso manejo geométrico a un lenguaje que denominaríamos hoy en día, de carácter más algebraico (Acevedo & Falk, 1997). Al-Khwarizmi fue uno de los pioneros en esta tarea, dando un paso hacia la construcción de los primeros algoritmos para la solución de problemas cuya estructura fuese similar (Vasco, 1979).

El álgebra de Al-Khwarizmi tuvo una connotación pedagógica y una vez cumplido el propósito de enseñar a resolver ecuaciones con su método, pasó a realizar demostraciones empleando la geometría de Euclides. Las proporciones de Euclides eran en su totalidad de carácter geométrico y Al-Khwarizmi fue el primero en utilizarlas en ecuaciones de segundo grado (recordemos que los griegos limitaron el uso de las representaciones geométricas a ecuaciones que cumplieran las “nociones comunes” de Euclides). Los métodos empleados que se basaban en sistematizar las situaciones y luego aplicar una solución geométrica, fueron adoptados por sus sucesores árabes y finalmente perfeccionados por Omar Khayyam. (Rooney, 2011).

A pesar de los aportes de Al-Khwarizmi al álgebra, nos encontramos aún en un álgebra retórica. Vasco (1979) afirma:

> no aparece ni un sólo símbolo matemático en el sentido actual de la palabra. Ni siquiera los números aparecen en los manuscritos más antiguos del libro escritos en cifras, sino en palabras. Estamos todavía al nivel del “álgebra retórica”, a poca distancia en cuanto a los problemas propuestos y al estilo literario de los problemas babilonios y egipcios, como los de las tabletas de Nippur y Senkereh (2400 a.C a 1600 a.C) o los propuestos por el escriba Ahmés hacia 1550 a.C en el llamado papiro de Rhind. (págs. 11,12)

Vasco percibe los escritos de Al-Khwarizmi como historietas compuestas por problemas, preguntas de habilidad mental, o acertijos numéricos a los que se busca una solución más o menos independiente. En algunos casos con transformaciones innecesarias que solo se justifican porque, en efecto, permiten llegar a una solución correcta. El gran aporte o innovación de Al-Khwarizmi está, como se mencionó anteriormente, en sistematizar y clasificar los métodos de resolución de tal manera que permitan solucionar problemas con estructuras iguales o similares. Es lo que conocemos actualmente como algoritmo. Vasco (1979) afirma:

> la descripción de un programa o "al-goritmo" (en honor a su autor o popularizador) para obtener una solución en un número finito de pasos que no dependen de los números particulares que aparezcan en el problema, sino de sus relaciones mutuas. (pág. 12)

Los árabes hicieron posible la idea de ecuación abstracta mezclando magnitudes de diferentes dimensiones, desligándose de las restricciones que imponía la geometría.

A pesar de la posterior reducción de la población musulmana en Europa, del oscurantismo y de la resistencia de los europeos al sistema numérico indo-arábigo, los legados culturales tanto de los árabes como de los griegos se mantendrán, gracias a los "traductores" de libros de carácter científico:

> Durante el siglo XII, Gerardo de Cremona, trabajando en Toledo tradujo al latín 87 obras de erudición griegas y árabes. Estas incluían el Almagesto de Ptolomeo, los Elementos de Euclides, y el álgebra de Al-Khwarizmi. En Inglaterra Roberto de Chester tradujo a Al-Khwarizmi en 1145 y Adelardo de Bath tradujo los elementos de Euclides en 1142. (Rooney, 2011, pág. 130)

Luego de siglos dedicados a recuperar y consolidar las enseñanzas de los babilonios, egipcios, griegos y árabes, y dejada atrás la edad media que no aportó mucho al desarrollo de las ciencias. Los matemáticos europeos del renacimiento comenzarán a realizar contribuciones para el desarrollo del álgebra. Alemania e Italia vendrán a ser en el siglo XVI, los focos de estos nuevos desarrollos (MEN, 2017).

Aunque los aportes geométricos de Euclides proporcionaban métodos efectivos para justificar las soluciones de problemas particulares del álgebra, los matemáticos europeos están a punto de dar un paso más allá, desligándose de una interpretación geométrica del álgebra al tratar de resolver ecuaciones de grados mayores a tres, ecuaciones que para el momento no tenían significado geométrico. Esto hace posible la idea de un álgebra abstracta desligada del mundo “real” y lo concreto, acercándose cada vez más a lo simbólico y lo abstracto, convirtiendo el estudio del álgebra en una disciplina:

> en matemáticas hay dos tipos principales de razonamientos: el simbólico y el visual. El razonamiento simbólico tuvo su origen en la notación numeral… …en cuyos símbolos pueden representarse números abstractos antes que concretos. A partir de la edad media las matemáticas se basaron cada vez más en el uso de símbolos, como confirmará una ojeada a cualquier libro de texto moderno de matemáticas. (Stewart, 2009, pág. 25)

Para Ronney (2011), este hecho y el uso del sistema numérico indo-arábigo, permitieron la evolución del álgebra “Esto, en combinación con el sistema numérico indo-arábigo y la aceptación del cero, permitió que el álgebra avanzara alejándose de sus raíces de la geometría práctica”.(pág.129).

Los periodos del oscurantismo han quedado atrás y el álgebra recobra fuerza. Poco a poco, los nombres de diferentes matemáticos que realizan aportes valiosos al álgebra resuenan en Europa: en 1572, Rafael Bombelli presenta diversos problemas geométricos resueltos algebraicamente. Michael Stifel (hacia 1487-1567) admitió el uso de los coeficientes negativos en las ecuaciones de segundo grado, también introdujo potencias negativas, aunque no admitía soluciones negativas y señalaba a los números negativos como *“numeri absurdi”.* Propuso el uso de una única letra para denotar una cantidad desconocida, pero no utilizaba notación de exponentes. Por ejemplo, una expresión que actualmente la escribiríamos como c^3 era escrita como ccc. John Widmann (1460-1498) fue uno de los primeros en imprimir operadores aritméticos en sus publicaciones (+ y –), le siguieron otros como, Christoff Rudolff, Gerolamo Cardano, William Oughtred, René Descartes, Johann Rahn y Robert Recorde.

Para Cardano, el hecho de que existieran soluciones a ecuaciones de cuarto grado, le invitaba a preguntarse si sería posible solucionar ecuaciones de quinto grado, sexto grado o incluso grados mayores. Súbitamente los problemas algebraicos dejan de relacionarse estrictamente a problemas de la vida real y se empieza a concebir el álgebra como una rama de las matemáticas que tiene sus propias reglas:

> El álgebra trata de las propiedades de expresiones simbólicas por sí mismas; trata de estructura y forma, no solo de números. Esta visión más general del álgebra se desarrolló cuando los matemáticos empezaron a plantear preguntas más generales sobre el álgebra de nivel escolar. En lugar de tratar de resolver ecuaciones concretas, examinaron la estructura más profunda del propio proceso de solución. (Stewart, 2009, pág. 61)

La publicación del "*Ars-Magna*" de Cardano, marca un punto importante en el desarrollo del álgebra. Aunque para la época de Cardano aún se justifican procedimientos algebraicos empleando la geometría (Vasco, 1979), las soluciones a las ecuaciones cúbicas y cuárticas son una realidad.

Los métodos de resolución para las ecuaciones de tercer y cuarto grado, la aceptación de conjuntos numéricos que antes se habían ignorado, como los números negativos y números complejos, aparecen en el "*Ars-Magna*" y son el compendio de los trabajos de personajes como Scipicio del Ferro, Nicolas Tartaglia y Ludovico Ferrari. Al no ser un logro propio de Cardano y debido a su gran honestidad, se da inicio a la siguiente tradición ejemplar:

> la de atribuir lo más exactamente los resultados previos a sus respectivos autores y situar con precisión las contribuciones propias. Al-Khwarizmi, Leonardo de Pisa, Luca Pacioli, Scipio del Ferro, Antonio María Fio, Nicolás Tartaglia y Ludovico Ferrari quienes reciben créditos por sus aportes al "arte" del álgebra. (Vasco, 1979, pág. 77)

Rooney (2011) considera el *"Ars Magna"* como el aporte más significativo al álgebra desde que los babilonios descubrieron cómo resolver ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado:

> La edad de oro del álgebra en Europa -que empezó con las publicaciones de Cardano de la solución para las ecuaciones de tercer y cuarto grado- abarcó la legitimación de los números negativos y complejos, el desarrollo del sistema de coordenadas cartesiano, la unión del álgebra y la geometría en la geometría

> analítica y pasos importantes hacia el desarrollo del cálculo integral. (Rooney, 2011, pág. 134)

Al plantear nuevas dimensiones, por lo menos de manera hipotética, con Cardano se sientan las bases para la geometría de Riemann y las investigaciones de Einstein del continuo espacio tiempo en cuatro dimensiones (Rooney, 2011).

Hacia el siglo XVI François Viète propone algo contrario a lo que se había trabajado hasta la fecha, donde la geometría era la herramienta más potente para resolver cuestiones algebraicas. Viète propone, en su publicación “*logística speciosa*” o arte del cálculo empleando símbolos, resolver problemas geométricos utilizando el álgebra. Los cálculos complejos del álgebra de Viète se vieron remplazados por la “simplicidad” de la notación Cartesiana, no obstante, Viète realiza contribuciones valiosas al desarrollo del álgebra entre las que se destacan una notación consistente al emplear vocales para representar cantidades desconocidas y consonantes para cantidades conocidas y la primera forma clara del álgebra alejada de la aritmética:

> Viète explicaba que el álgebra es un método para operar sobre formas generales, mientras que la aritmética es un método para operar sobre números concretos… …Así, el álgebra adquiría una vida propia, como las matemáticas de expresiones simbólicas. Fue el primer paso para liberar al álgebra de las ataduras de la interpretación aritmética. (Stewart, 2009, pág. 75)

Viète, desarrolló el empleo de una notación algébrica mucho más útil (Acevedo & Falk, 1997), de esta manera designó las variables con letras, dando así inicio al manejo de expresiones que desembocarían en el lenguaje algebraico que hoy en día manejamos. Para Socas *et al* (1996):

> El período simbólico aparece en el siglo XVI y utiliza ya diferentes símbolos y signos matemáticos. Esta notación que fue más o menos estable en tiempos de Isaac Newton (1642-1727), se mantiene actualmente sin uniformidad total. Este período coincide con la segunda fase anteriormente indicada que, como hemos señalado,

está asociada al nombre de Viète, el cual comenzó a denotar por letras no sólo las incógnitas, sino números dados previamente. Así, la ecuación

$$x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x = 120$$

Se escribía como

IQC-15QQ+85C-225Q+274N aequatur 120.

(pág. 41)

El paso final a una notación algebraica casi moderna se da con Descartes quien refina la notación de Viète, Descartes utiliza letras del principio del abecedarios para denotar cantidades conocidas (*a,b,c*) y letras del final del abecedario para las incógnitas (*x,y,z*). Descartes utilizó operadores aritméticos para las operaciones aritméticas y super índices para los exponentes (Rooney, 2011). La notación moderna, es decir, la que utilizamos actualmente, con algunas modificaciones, se la debemos a Descartes "Nuestra notación moderna es debida a Descartes con ligeras modificaciones posteriores

$$x^3 - 6xx + 13x - 10 \propto 0\text{"}$$

(Socas, Camacho, Palarea, & Hernandez, 1996, pág. 41).

Ecuaciones de quinto grado no se solucionarían sino hasta dos siglos más tarde, donde Joseph Louis Lagrange y Carl Friedrich Gauss serían claves para iluminar esta tarea. Por un lado, Lagrange en su libro *"Reflexiones sobre resolución algebraica de las ecuaciones"* estudia la simetría de las soluciones de una ecuación. Mientras que Gauss, demuestra por primera vez lo que se conoce como el teorema fundamental del álgebra, el cual implica que toda ecuación de cualquier grado tiene al menos una solución real o compleja.

Niels Henry Abel (1802-1829) a sus veintidós años publica *"el teorema de Abel"*, una de las primeras aplicaciones de la teoría de grupos en álgebra, que demuestra que no hay fórmula general para las ecuaciones de quinto grado, y que por lo tanto, no hay una manera sistemática de hallar soluciones a ecuaciones de quinto grado o grados superiores.

Evariste Galois (1811-1832) da criterios definitivos para saber si se puede hallar la solución de ecuaciones polinómicas utilizando radicales, pero más valiosos que su análisis, fueron los métodos que inventó para estudiar cada tipo de ecuaciones. Así, abrió con su investigación las puertas para lo que se denomina la teoría de grupos.

2.1.1 Resaltando en la historia los elementos lúdicos- didácticos a emplear

Como se mencionó anteriormente, Euclides lleva el álgebra retórica empleada en la solución de problemas prácticos, a representaciones de carácter geométrico. Citado en Kline (1990):

> "Los números se ven sustituidos por segmentos de recta; el producto de los números se convierte en el área de un rectángulo cuyos lados tienen como longitudes esos dos números; el producto de tres números es un volumen; la suma de dos números se traduce en la prolongación de un segmento en una longitud igual a la del otro, y la resta en recortar de un segmento la longitud de otro". (pág. 70)

Si se combina esta transformación de cantidades algebraicas a segmentos, áreas y volúmenes, con las siguientes nociones de Euclides "*si a cosas iguales se suman cosas iguales, los totales son iguales",* "*si a cosas iguales se restan cosas iguales, los restos son iguales"* se vislumbra un primer aporte en la historia para legitimación del material que se emplea en este trabajo, "la caja de polinomios".

Por otro lado, Euclides afirma que "*cosas que encajen la una en la otra son iguales entre sí"* y esta idea se puede aprovechar para trabajar multiplicación y factorización de expresiones algebraicas a partir de una representación geométrica.

El segundo aporte está relacionado con las transformaciones que sufren las representaciones geométricas en manos de los árabes, transformaciones que se conservan en el trabajo de Al-Khwarizmi y que serán popularizadas con intenciones pedagógicas.
Es importante recordar que los griegos no aceptaban ecuaciones del tipo $x^2 + bx = c$, debido a que los términos de la izquierda representan áreas y el de la derecha longitud (ecuación que contradeciría las nociones comunes de Euclides). Thabit ibn Qurrá propone solucionar este inconveniente homogeneizando la ecuación mediante la introducción de una unidad de medida $\boldsymbol{\mu}$ que transforma la expresión:

$$x^2 + bx - c = 0;$$

en

$$x^2 + \boldsymbol{\mu} bx - \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{2}} c = 0;$$

De esta manera en la ecuación aparece una suma de áreas (ver ilustración 2-1). Estas ideas fueron retomadas por Soto *et al*. en 2005, quienes a partir de una construcción geométrica similar a la propuesta por Thabit ibn Qurrá y el plano cartesiano, proponen un material lúdico-didáctico para trabajar operaciones entre polinomios (Soto, Mosquera, & Gómez, 2005).En la ilustración 2-1 se muestra el material empleado por Soto *et al* (2005) y la homogenización propuesta por Thabit ibn Qurrá.

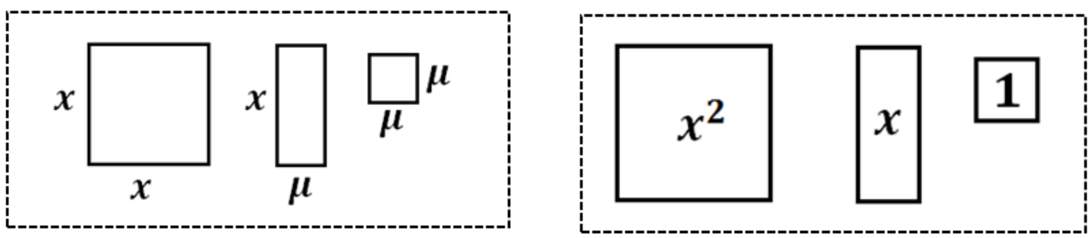


Ilustración 2-1 (a la izquierda) Homogenización del material propuesta por Thabit ibn Qurrá, (a la derecha) Material propuesto por Soto et al (2005).

Este material y el plano cartesiano constituyen “la caja de polinomios”, insumo vital para el desarrollo de esta investigación.

2.2 Marco pedagógico.

2.2.1 Acerca del material concreto en el aprendizaje-enseñanza del álgebra

La docencia se caracteriza por ser una profesión en la que cada maestro, conforme pasa el tiempo, transforma su forma de enseñar. Ciertamente los cientos de estudiantes que pasan por sus vidas juegan un papel importante en las perspectivas y los aspectos: culturales, emocionales, afectivos, pedagógicos, lúdicos, didácticos y también disciplinares relacionados con la educación.

En cuanto al componente disciplinar, todos los docentes impulsados por su vocación (*a priori o a posteriori*) intentan motivar y cautivar a sus estudiantes en los aspectos académicos. No es un mito que los maestros de ciencias exactas tienden a ser estigmatizados por tener aparentemente un trabajo un poco más arduo, en cuanto a la motivación, comparados con maestros de otras asignaturas. De esta manera y en particular, los docentes que imparten la catedra de álgebra, utilizan diferentes recursos y dinámicas en las aulas, producto de su experiencia o investigación, para motivar a sus estudiantes.

Por otro lado, se tiene la tarea de lograr que los estudiantes asignen un significado de las operaciones y las letras que se trabajan en el álgebra. Esto es, lograr niveles de abstracción y conceptualización propios de la disciplina. Sin embargo, según Mason *et al* (2014)*:*

> la investigación sobre el aprendizaje en el álgebra de estudiantes colombianos del nivel escolar y los resultados de pruebas en las que muchos de ellos participan, señala que una gran mayoría muestra índices muy bajos de comprensión conceptual y de motivación por el aprendizaje del álgebra escolar. (pág. X)

Considerando lo anterior se reflexionó acerca de la pertinencia del uso de material concreto en el aula. Ya que este sitúa al aprendizaje y la enseñanza del álgebra, haciendo referencia al contexto histórico, en un orden cronológico que podría ser tomado más en cuenta actualmente en las aulas de clase. Vale la pena recordar que fue mediante problemas concretos y el uso de herramientas como la geometría, que las antiguas civilizaciones se acercaron por primera vez al álgebra.

A través de la geometría se puede dar una idea de lo que sucede al operar con elementos tan abstractos como lo son las letras en el álgebra. Rooney (2011) por ejemplo, considera que el álgebra y la geometría están completamente ligadas:

> Es imposible desligar el álgebra simple de la geometría, pues fue en problemas de geometría de dos y tres dimensiones donde aparecieron por primera vez cuestiones algebraicas. Al principio, los problemas específicos, prácticos de álgebra no

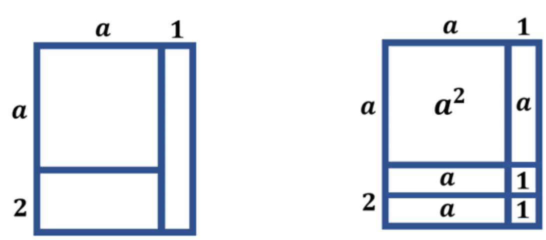
> estaban sistematizados ni representados de un modo que hoy reconoceríamos como tal, pero provocaron su posterior formulación. (pág.122)

Así, una ojeada a la historia muestra que algunos docentes sitúan a sus estudiantes en el momento histórico en el que el lenguaje simbólico y el pensamiento formal ya eran la forma usual de solucionar tanto operaciones, como problemas algebraicos, ignorando (quizás no intencionalmente) la importancia del trabajo con el material concreto y visual, tanto en la experiencia de aprendizaje en el aula, como en la evolución histórica de argumentos y fórmulas que construyeron la disciplina:

> Este carácter algebraico de las matemáticas escolares es debido al hecho de que no se es consciente del potencial que posee el sistema grafico visual y de la insuficiencia de modelos que enlacen ambos sistemas. Conviene observar que en ningún momento las generalizaciones teórico-algebraicas aparecen automáticamente de la visualización, sino que ésta complementa el entendimiento de tales generalizaciones. (Socas, Camacho, Palarea, & Hernandez, 1996, pág. 142)

Esto no quiere decir que al tomar un curso de álgebra escolar se deba enseñar o aprender haciendo un uso completamente estricto de todas las herramientas que sirvieron para construir el álgebra a través de la historia, pero si sería conveniente poner a consideración la manipulación de elementos que le permitieron a los antiguos pensadores ir abstrayendo los conceptos y llevarlos del campo concreto al formal.

Por ejemplo, la ilustración 2-2, muestra un modelo en el que se observa cómo se representaba antiguamente una operación entre dos binomios de primer grado con una indeterminada. Al costado derecho en la ilustración 2-2 se observa la propuesta de Soto *et al*. Según Rooney (2011) en la antigüedad “Algunos problemas se referían a dividir un área en partes según distintas proporciones. Es fácil ver como un problema de áreas puede llevar a una ecuación de segundo grado” (pág. 122).



$$(a+2)(a+1)=a^2+2a+a+2=a^2+3a+2$$

Ilustración 2-2 Modelo geométrico babilónico para la multiplicación de dos binomios de grado uno, a la izquierda Modelo de Soto et al (2005).

Los griegos, por ejemplo, tenían clara la importancia del uso de la geometría en el álgebra; según Socas *et al* (1996):

> Los griegos, aunque se cree que conocían los métodos de los babilonios (métodos puramente algebraicos) para la resolución de ecuaciones, desarrollaron métodos geométricos para resolverlas y comprobar diversas propiedades. En el libro II de los Elementos de Euclides, hay 14 proposiciones que permiten resolver problemas algebraicos. Actualmente, nuestra álgebra simbólica los resolvería rápidamente, pero el valor didáctico del álgebra geométrica es importante. (pág. 42)

De esta manera se identifican dos características primordiales en el desarrollo histórico del álgebra, por un lado, se tiene el lenguaje y los símbolos, y por otro, la implementación de modelos geométricos que demuestran ser una herramienta apropiada a la hora de abstraer y comprender estructuras, fórmulas y conceptos algebraicos (Socas, Camacho, Palarea, & Hernandez, 1996).

Anteriormente se había señalado la importancia del álgebra en la formación de ciudadanos competentes. Por ejemplo, para Socas *et al* (1996) es un núcleo esencial para la comunicación y expresión matemática, lo que implica que debe ser presentada de una manera amena y llamativa resaltando su utilidad y facilitando “los procedimientos empíricos inductivos frente al tradicional formal y deductivo” (Socas, Camacho, Palarea, & Hernandez, 1996, pág. 9). Las representaciones de operaciones algebraicas mediante material concreto parecen ser una opción inicial atractiva y agradable, debido a su valor lúdico-didáctico y motivacional para los estudiantes. Por otro lado, si se enfoca su uso en el aula de manera adecuada, puede ser empleado, para que, a partir de una serie de ejemplos particulares, los estudiantes conjeturen o propongan hipótesis relacionadas con su trabajo en álgebra.

Si se tiene en cuenta la manipulación del material y sus representaciones pictóricas como modelos que se utilizan para comunicar una idea algebraica (un tipo de lenguaje), los procesos con la “caja de polinomios” pueden favorecer la abstracción de los procesos algebraicos realizados con el lenguaje simbólico propio del álgebra. Según Socas *et al* (1996), cuando el estudiante tiene más puntos de referencia pueden establecer más relaciones. Por otro lado, el trabajar con diferentes lenguajes o modelos favorece los procesos de los estudiantes en el aula, independientemente del nivel de abstracción que manejen del tema "el hecho de presentar un concepto de formas diversas hace que a éste se le conozca en más facetas de las que normalmente se le considera cuando se hace el aprendizaje con un solo lenguaje" (Socas, Camacho, Palarea, & Hernandez, 1996, pág. 116).

De esta manera, "la caja de polinomios" puede ser un material para trabajar las OPPSI en la medida en la que mediante la manipulación de esta se pueden establecer relaciones entre los procesos de resolución (con el material), las representaciones pictóricas y el uso del lenguaje simbólico algebraico:

> Al ser el álgebra un lenguaje de comunicación de ideas abstractas, plantear su enseñanza-aprendizaje en términos de traducción de lenguajes: el "habitual", el de los "modelos" y el "algebraico", estimula y favorece el desarrollo de su conocimiento. (Socas, Camacho, Palarea, & Hernandez, 1996, pág. 116)

Por otra parte, tener en cuenta el momento de desarrollo cognitivo en el que se encuentran los estudiantes que están recibiendo una clase de álgebra, es una información valiosa que puede favorecer las dinámicas de la clase de dos maneras: Desarrollando ambientes propicios para el aprendizaje, sobre todo para aquellos estudiantes que se encuentren por debajo del nivel cognitivo esperado para su edad y buscando evitar episodios de frustración en el aula que pueden desencadenar en desencantos, niveles bajos de atención e indisciplina.

2.2.2 **Estadios operacionales de Piaget**

Si se consideran las edades de los estudiantes que toman un curso de álgebra escolar (estudiantes de grado octavo, entre trece y dieciséis años) los estadios de desarrollo de Piaget y los trabajos posteriores de Collis citado en Socas *et al* (1996). Se esperaría en teoría, que un estudiante que toma un curso de álgebra escolar se encontrase en el estadio de desarrollo de *"generalización concreta" o "formal temprano":*

En síntesis, los estadios del desarrollo cognitivo, tal como podrían derivarse de los trabajos de Piaget y propuestos por Collis (1980), serían los cinco estadios siguientes:

(0) Preoperatorio (cuatro a seis años).
(1) Temprano de operaciones concretas (siete a nueve años).
(2) Final de operaciones concretas (diez a doce años).
(3) De generalización concreta (formal temprano) (trece a quince años).
(4\ De operaciones formales (dieciséis años en adelante). (Socas, Camacho, Palarea, & Hernandez, 1996, pág. 77)

Es importante tener en cuenta las principales características de los estadios operacionales, sobre todo aquellas en las que se pueda encontrar un estudiante promedio que toma un curso de álgebra escolar. Tomando como referencia las edades de los estudiantes con los que se trabaja, lo más probable es que se encuentren en el estadio final de operaciones concretas o en el estadio de generalización concreta (formal temprano). Se toman de Socas *et at* (1996) las principales características de cada estadio de desarrollo:

Operaciones concretas

- ✓ El niño mejora su capacidad de pensamiento lógico ante los objetos físicos.
- ✓ Es capaz de pensar en objetos físicamente ausentes que forman parte, de experiencias pasadas, pero no con hipótesis verbales.
- ✓ El pensamiento infantil está limitado a cosas concretas en lugar de ideas.
- ✓ Adquiere la reversibilidad que le permite invertir mentalmente una acción que antes sólo había llevado a cabo físicamente.
- ✓ La inclusión lógica, la clasificación y ordenamiento de objetos.
- ✓ La habilidad para conservar ciertas propiedades de los objetos (número, cantidad) a través de los cambios de otras propiedades.
- ✓ La capacidad de retener mentalmente dos o más variables cuando estudia los objetos.
- ✓ Se vuelve más sociocéntrico, cada vez es más consciente de la opinión de los otros. Las operaciones matemáticas básicas surgen en este período.

Operaciones formales

- ✓ Habilidad para pensar más allá de la referencia a experiencias concretas.
- ✓ Capacidad de usar, a nivel lógico, enunciados verbales y proposiciones en vez de objetos concretos únicamente.
- ✓ Habilidad para pensar teóricamente sobre las consecuencias de los cambios de objetos y sucesos.
- ✓ Habilidad para razonar acerca de las combinaciones de las variables en un problema.
- ✓ Capacidad para comprender reglas generales de ejemplos particulares.
- ✓ Capacidad para deducir de proposiciones generales conclusiones particulares. (Socas, Camacho, Palarea, & Hernandez, 1996, pág. 76)

Aunque para cada estadio de desarrollo existen edades de referencia, se debe tener en cuenta que las edades son solamente eso, una referencia, y que el tener una edad específica no implica estar en un estadio determinado, es más una condición subjetiva que depende también del contexto cultural y social en el que se mueve el estudiante. (Socas, Camacho, Palarea, & Hernandez, 1996). Por ejemplo, hay estudiantes que hacen transiciones entre estadios de una manera más vertiginosa que otros. Así como también otros estudiantes a los que les cuesta un poco más este proceso. Sin embargo, independientemente de las habilidades de los estudiantes, el orden por el que los estudiantes atraviesan las etapas de desarrollo no cambia, por lo que antes de trabajar el álgebra en el aula de clase, sería una buena idea identificar en que estadio de desarrollo se encuentran la mayoría de los estudiantes:

> La posibilidad de reconocer los estadios generales del desarrollo intelectual, representado cada uno de ellos por un modo característico de razonamiento y por unas tareas específicas de matemáticas que los alumnos son capaces de hacer, constituye una información valiosa para los profesores a la hora de diseñar el material de enseñanza y permite conocer el nivel de realizaciones y respuestas a cuestiones esperadas de los alumnos. (Socas, Camacho, Palarea, & Hernandez, 1996, pág. 73)

2.2.3 Dificultades en el aprendizaje del álgebra.

Algunas de las dificultades que se presentan en el proceso de enseñanza-aprendizaje del álgebra están relacionadas con: la interpretación que los estudiantes le dan a la *letra* en las expresiones que trabajan a lo largo de su formación académica, el estadio de desarrollo cognitivo en el que se encuentran los estudiantes, la linealidad del currículo, la organización de los temas trabajados en clase, la actitud y las emociones del estudiante frente a lo que aprende, entre otras (Socas, Camacho, Palarea, & Hernandez, 1996).

Con el ánimo de evitar estas dificultades es importante que en el proceso de enseñanza-aprendizaje, tanto docente como estudiantes, diferencien los tipos de “álgebra” que se trabajan a nivel escolar. La interpretación que cobren las “letras” o “variables” dependerá del contexto en el que se trabaje. De esta manera en el contexto escolar podemos diferenciar cuatro “álgebras” donde la interpretación de la “letra” es diferente:

1. Álgebra como aritmética generalizada, letra como número (letra como generalizadora de un modelo aritmético).
2. Álgebra como el estudio de métodos para resolver problemas concretos o particulares, ecuaciones, letra como incógnita (incógnita).
3. Álgebra funcional, letra como variable (variable).
4. Álgebra estructural, letra como ente abstracto (indeterminada).

Según Socas *et al* (1996) *las cuatro interpretaciones* del álgebra deben ser incluidas en el currículo de enseñanza, de tal manera que no se trabaje en una sola interpretación, ni se favorezca el aprendizaje en un único contexto, al contrario, debe buscarse una manera de integrarlas y no limitarse a trabajar una sola.

El siguiente diagrama da una idea de la interpretación del álgebra escolar para Socas *et al* (1996).

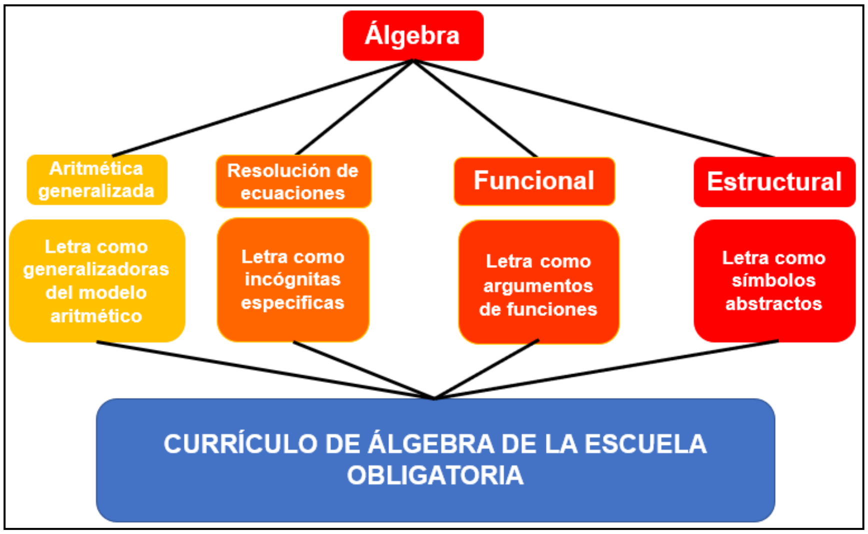


Ilustración 2-3 currículo obligatorio de álgebra escolar

Considerando lo anterior la enseñanza del álgebra basada en el uso de material concreto, en este caso, “la caja de polinomios”, puede afectar de manera positiva las dinámicas de enseñanza-aprendizaje en el aula: por un lado, favorecer a aquellos estudiantes que se encuentren tanto en los estadios de operaciones concretas finales o tempranas, favoreciendo la actitud hacia el aprendizaje del álgebra y fortaleciendo su confianza y seguridad en el camino hacia el pensamiento formal al trabajar con OPPSI. Esto teniendo en cuenta que “a medida que el niño entra en el período de las operaciones formales el pensamiento operativo concreto continúa en varias áreas, para, poco a poco, llegar a ser integrado en un sistema más comprensible de operaciones formales” (Socas, Camacho, Palarea, & Hernandez, 1996, pág. 75) y también que “El camino hacia la sustitución formal debe comenzar con pasos seguros en medio de un progreso deliberadamente lento” (Socas, Camacho, Palarea, & Hernandez, 1996, pág. 26). Por otro lado, los estudiantes que se encuentren más cercanos al estadio de operaciones formales o propiamente en el estadio, podrán apreciar y extender las relaciones que se encuentran entre el álgebra y la geometría mediante el uso de la “caja de polinomios” y actividades que les permitan entrelazar los diferentes modelos que se aborden en el aula (material concreto, representaciones pictóricas y lenguaje simbólico algebraico). En la medida en la que ambos tipos de estudiantes se empoderen de su trabajo, se puede cambiar el enfoque pasivo de la clase tradicional de álgebra y convertirlo en una oportunidad dinámica de aprendizaje.

El trabajar de esta manera permite que el aprendizaje del álgebra sea de carácter incluyente, siendo coherente con la propuesta del MEN (2017) y posibilitando al acceso de la formación en álgebra para cualquier tipo de estudiante:

> La posibilidad de esta formación ya no está dada –como sucedía en la primera mitad del Siglo XX– por el filtro social … … sino que tiene que atender a toda la población juvenil, independientemente de su preparación adecuada o deficiente en las matemáticas de la Educación Básica Primaria y de su motivación o desmotivación por las mismas. (MEN, 2017, pág. 46)

Depende del docente favorecer los espacios de aprendizaje para todos los estudiantes, así como también, encontrar un equilibrio entre el trabajo didáctico, lúdico, autónomo, las dinámicas que se trabajan de manera tradicional y el material que se puede encontrar en los libros de texto. Según Mason *et al* (2014) si no se logra este equilibrio se continuaría enseñando de una manera simplista y mecánica:

> Infortunadamente, sin partir de unas bases logradas a partir de la investigación sobre los componentes conceptuales -y unos procesos de construcción- implicados en la formación del pensamiento algebraico por parte de los niños y estudiantes en general, los enfoques de trabajo planteados en textos guía continúan promoviendo (no intencionalmente, con seguridad) un trato simplista, compartimentalizado y mecánico del álgebra escolar. (Mason, Graham, Pimm, & Gowar, 2014, pág. X)

El encontrar el equilibrio entre los elementos mencionados anteriormente, organiza la manera en la que se trabajan las temáticas en el aula. Y adicionalmente podría alimentar la curiosidad de los estudiantes que no hayan tenido un buen acercamiento a las matemáticas cambiando su percepción acerca de ellas, buscando reducir las dificultades producto de actitudes emocionales y no racionales hacia el álgebra.
Esperar que un estudiante que tuvo dificultades en el pasado con la aritmética no presente dificultades al trabajar con letras y estructuras en álgebra sería algo ingenuo, e ignorar las necesidades de aquellos estudiantes que no se hayan acercado a la formalidad, demostraría una actitud docente antiética.

Es necesario que la experiencia, los métodos aprendidos y nuevas dinámicas adquiridas por los docentes, se mezclen para favorecer los procesos de aprendizaje del estudiante, siempre partiendo desde su interés para lograr una mayor motivación y conteniendo momentáneamente las dinámicas más formales, empleando herramientas que puedan flexibilizar la enseñanza de nociones abstractas, alejándose de las percepciones y resultados que arrojan los estudios sobre la educación en el álgebra:

> Para nadie es desconocido el hecho del **sin sentido** que se crea para muchos estudiantes cuando se les presenta el álgebra escolar como una nueva materia en la que se trabaja con letras; tampoco es desconocida la incertidumbre de muchos profesores ante las dificultades de la enseñanza y la baja motivación de los estudiantes por el álgebra escolar, mientras manifiestan no tener un enfoque de enseñanza diferente al que ellos experimentaron como estudiantes. (Mason, Graham, Pimm, & Gowar, 2014, pág. 47)

Para esto es necesario romper paradigmas como, por ejemplo; el de relegar la utilidad del material concreto en la enseñanza del álgebra por creer que el hecho de reducir los conceptos, definiciones etc. que se trabajan en álgebra al uso de material concreto, le resten formalidad a la disciplina:

> Desgraciadamente, muchos adultos parecen pensar que utilizar algo concreto para resolver un problema... … es infantil y que no es aceptable para un adulto, que debe ser capaz de "pensar en abstracto". Sin embargo, el uso de una buena representación, incluso una muy simple, puede convertir un problema aparentemente difícil en uno fácil. (Mason, Burton, & Stacey, 1982, pág. 47)

Si bien el objetivo es alcanzar la formalidad, el material concreto (orientado de manera apropiada) puede permitir una transición más amena entre lo concreto y lo formal. Las posibles ambigüedades que resulten del uso del material concreto se pueden subsanar eventualmente y jamás deberán ser ignoradas. El paso del pensamiento concreto del estudiante al pensamiento formal deberá ser orientado por el docente, responsable de diseñar las actividades y dinámicas para que esto ocurra:

> Una de las teorías iniciales de los estudiantes será el reconocimiento de la naturaleza y significado de los símbolos para poder comprender cómo operar con ellos y cómo interpretar los resultados. Este conocimiento les permitiría la transferencia de conocimiento aritmético hasta el álgebra, aceptando las diferencias entre ambos. (Socas, Camacho, Palarea, & Hernandez, 1996, pág. 97)

Esta transición debe hacerse solo cuando se tenga la certeza que el estudiante maneja hábilmente las representaciones concretas, de hecho, si el estudiante se apropia realmente del material con el que trabaja, es posible que la transición la realice él mismo de manera natural, pasando de algo concreto, con significado y familiar, a manipular objetos abstractos propios de la disciplina. Como lo es la letra y las operaciones en el álgebra escolar.

Teniendo en cuenta lo anterior, se propuso trabajar las OPPSI atravesando diferentes *etapas*: partiendo del uso de material concreto, avanzando a la formalidad mediante representaciones pictóricas, pasando a la manipulación del lenguaje simbólico y reflexionando sobre el trabajo desarrollado, para formular conjeturas y posteriormente acercarse al manejo hábil y consiente de los algoritmos que se trabajan en las OPPSI, estas *etapas* de evolución en la abstracción de los conceptos no deben ser rígidas, los estudiantes deberán ir y volver de una representación a otra, tantas veces como lo consideren necesario. Por último, es importante tener en cuenta que las soluciones obtenidas mediante el uso del material concreto se deben registrar gráfica y simbólicamente, de tal forma que puedan compararse (Mason, Burton, & Stacey, 1982).

2.2.4 **Problema y Resolución de problemas**

La propuesta se enmarca en la metodología de enseñanza basada en la resolución de problemas. Este enfoque se tuvo en cuenta para el diseño del material y para la orientación docente frente a la interpretación y el significado y que iba adquiriendo cada una de las operaciones algebraicas en los estudiantes.

Definir qué es un problema en matemáticas no es una tarea sencilla, ya que dependerá de cuestiones subjetivas conexas al resolutor, sin embargo, algunos autores como Hitt (1997) intentan definir problema. Por ejemplo, Hitt (1997) considera que un problema es una situación que el resolutor puede abordar, ya que cuenta con un conocimiento previo que es útil para resolverlo, pero no sabe cómo utilizarlo para determinar de manera instantánea una solución:

> Personalmente lo que entiendo por un problema no rutinario es uno donde al leer el enunciado no viene inmediatamente a la mente un algoritmo predeterminado, o una idea a desarrollar para resolverlo. Además: ... es necesario reinterpretarlo y seguramente las diferentes representaciones que evoquemos al leer el enunciado jugarán un papel fundamental en la resolución. (Hitt, 1997, pág. 193)

García (1998) por ejemplo, toma elementos de tres autores diferentes para definir lo que es un problema en ciencias. Garret, citado en García (1998), piensa que un problema es de carácter subjetivo ya que para un resolutor (individuo que intenta resolver el problema) el problema será problema "solamente cuando ha sido reconocido como tal, es decir cuando corresponde a una duda carente de respuesta" Gil. D, citado en García, afirma que un problema es: "una situación estimulante para la cual el individuo no tiene respuesta". Por último, Contreras afirma que un problema es: "una situación que no es familiar para el alumno y presenta la novedad como característica fundamental".
Si bien, definir problema sería una tarea extensa, afín a una cuestión más de carácter filosófico, teniendo en cuenta a los autores anteriores podemos señalar que existen algunas características que convertirían a una situación en matemáticas en un problema:

1. Es una situación que genera interés en el resolutor.
2. No se puede solucionar instantáneamente.
3. El resolutor cuenta con las habilidades y capacidades para solucionarlo, pero no sabe cómo aplicarlas de manera inmediata.
4. En el proceso de resolución se estructura y reestructura el pensamiento, en esta medida, el problema puede generar nuevos problemas.

Mason, Burton y Stacey (1982) consideran que la resolución de problemas es un elemento fundamental para la educación matemática pues a través de esta, no sólo es posible encontrar la solución a un problema particular, sino que al aplicar sosegadamente las estrategias expuestas en su libro *"pensar matemáticamente"* los estados de meditación y concentración transformarán la forma en el que el resolutor concibe por primera vez el problema y tendrán seguramente un impacto positivo frente a cualquier otro problema que se quiera abordar a futuro. Esto es lo que Mason, Burton y Stacey (1982), consideran "*pensar matemáticamente*", entendido como:

> Un proceso mediante el cual podemos aumentar nuestro entendimiento del mundo que nos rodea y ampliar nuestras posibilidades de elección. Y al ser una forma de proceder, tiene unas aplicaciones muy amplias, no solo para enfrentarse a problemas matemáticos o científicos, sino muchos más generales. (pág.163)

El proceso de resolución de problemas para Puig (1996) consta de dos etapas: la primera, consiste en que el resolutor sea consciente de que se está enfrentando a un problema y exista el deseo de resolverlo. La segunda encierra la actividad mental que desarrolla el resolutor conforme soluciona el problema, es decir, el proceso de resolución, entendido como: "la actividad mental y manifiesta que desarrolla el resolutor desde el momento en que, presentándosele un problema, asume que lo que tiene delante es un problema y quiere resolverlo, hasta que da por acabada la tarea" (Puig, 1996, pág. 34).

Elementos a emplear de la resolución de problemas.

Las fases de la resolución de problemas de Mason, Burton y Stacey (1982) se observan en la ilustración 2-4.

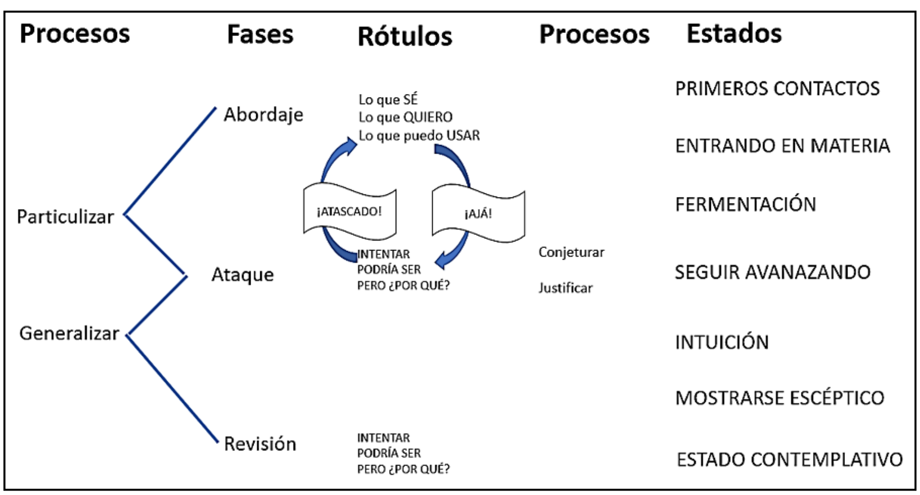


Ilustración 2-4 Esquema de las fases para la resolución de problemas

Como se indicó anteriormente, para la metodología de la secuencia y el diseño del material empleado se tuvieron en cuenta algunas estrategias de la resolución de problemas de

Mason, Burton y Stacey (1982), estrategias que serán aplicadas a lo largo de la secuencia, y que se definen a continuación.

Abordaje

El abordaje es una de las fases más importantes al intentar resolver un problema, pero es una de las más ignoradas; esto se debe a que muchos estudiantes al enfrentarse a un problema se encuentran ansiosos de hallar una solución, sin aplicar el menor de los esfuerzos.

La fase de abordaje empieza en el momento en el que el estudiante es consciente de que tiene un problema, cuando lo observa por primera vez, y finaliza en el momento en el que el estudiante empieza a resolverlo.

Tanto el fracaso al no determinar una solución a un problema, como la frustración que genere encontrarse en un punto en que no se sepa qué hacer, son producto de un mal abordaje. La mayoría de los estudiantes de nivel escolar intentan resolver un problema con la primera idea que viene a su cabeza, e insistirán en la misma idea de manera tozuda con la intención de producir resultados distintos. En caso de que esta idea no conduzca a una solución, el estudiante terminará muy probablemente frustrado y eventualmente abandonará el problema. Como consecuencia, se perderán todos los momentos de construcción de pensamiento que yacían subyacentes en el problema. Por lo que vale la pena aprender a empezar de una forma efectiva (Mason, Burton, & Stacey, 1982).

En el caso en el que el problema sea de carácter general se recomienda comenzar con casos particulares del problema, al comenzar particularizando se obtienen varios beneficios:

1. Se reduce su complejidad.
2. El estudiante asume el problema de una manera más familiar.
3. Al conseguir pequeños logros el estudiante se llena de seguridad y así podrá enfrentarse con más tranquilidad al problema en su forma más general.

Una buena planeación para el trabajo en la fase de abordaje asegura un buen comienzo “el trabajo en la fase de abordaje prepara el terreno para un posterior ataque eficaz, y es, por tanto, esencial que se le dedique el tiempo conveniente” (Mason, Burton, & Stacey, 1982, pág. 32).

La fase de abordaje dependerá de la forma en la que se presente el problema, si se trata de un problema escrito se reducirá a leerlo prestando atención a lo que el problema está pidiendo, si el problema nace de una situación real, ajena o no a las matemáticas, la fase de abordaje se reduce a formular el problema y definir qué es lo que se desea hacer.

Se debe entonces estructurar el trabajo en la fase de abordaje. Mason, Burton y Stacey (1982) sugieren estructurar esta fase respondiendo las siguientes preguntas:

“¿Qué es lo que SÉ?
¿Qué es lo que QUIERO?
¿Qué puedo USAR?” (Mason, Burton, & Stacey, 1982, pág. 40)

¿Qué es lo que sé?
Esta pregunta se puede responder de dos maneras, utilizando la información que brinda el problema (lo qué sé por el problema) y empleando el conocimiento relacionado a la experiencia (Mason, Burton, & Stacey, 1982), en los dos casos se debe asimilar tanto la información relevante del problema como la relación que pueda establecerse entre lo que se sabe por experiencia.

¿Qué es lo que quiero?
Esta pregunta hace referencia a la labor que tiene que poner en marcha el resolutor ¿qué está pidiendo el problema? Cuando se define qué es lo que se quiere, el resolutor debe fijar su atención en lo que desea determinar, si esto es claro, se habrá ganado terreno en la resolución; escribir lo que se quiere con palabras propias y hacer de esto un hábito resulta verdaderamente práctico.

¿Qué puedo usar?
El uso de material concreto, gráficas, tablas y otras herramientas es extremadamente útil ya que permiten que el estudiante gane seguridad y confianza a la hora de abordar el problema. Si bien existen problemas en los que el uso de estas herramientas, a las que

Mason, Burton y Stacey (1982) denominan elementos físicos, está de más, hay problemas que disminuyen significativamente su dificultad cuando se abordan mediante su uso.

Es necesario recordar que el uso de los elementos físicos debe combinarse y complementarse con el trabajo mental. Es decir, el estudiante puede ir y venir tantas veces como sea necesario de lo concreto a lo abstracto hasta que la idea que está trabajando mediante el material haya quedado clara y sea capaz de establecer relaciones entre los elementos físicos y los abstractos.

La fase de ataque

Una vez el estudiante tiene claro lo que desea determinar del problema y empieza a hacer uso de diferentes estrategias para resolverlo, ha entrado en la fase de ataque, "El razonamiento entra en la fase de ataque, cuando sientes que el problema se ha instalado dentro de tu mente y ya es tuyo, y se completa cuando bien se abandona o bien se resuelve" (Mason, Burton, & Stacey, pág. 49).

Cuando el estudiante se encuentre en la fase de ataque se darán diferentes estados mentales a los que tanto estudiante como docente deberán sacarles provecho, y está en el docente estimular al estudiante mediante preguntas, ejemplos, diálogos, etc. para que produzca estos estados en la medida necesaria, mientras el estudiante adquiere autonomía y aprende a reconocerlos y sacar provecho de ellos por su cuenta, aquí se señalan los más relevantes para Mason *et al* (1982)*:*

- **Hacer conjeturas:** Consiste en poner a prueba diferentes ideas de lo que se cree es cierto conforme el estudiante se aproxime a la solución del problema, o desee llevarlo a un contexto más general.

- **Fermentar:** Hace referencia a las pausas que se deben realizar frente a un problema que parece no tener solución. Luego de haberlo atacado de diversas maneras para resolverlo y no tener resultado, es necesario hacer un alto y revisar con detalle las ideas trabajadas.

- **Justificación y convencimiento:** Verificar que lo que se ha realizado hasta el momento tenga un soporte claro y sea válido, para uno mismo será el primer paso, después será necesario convencer a un compañero y por último se puede convencer al docente.

Revisión

Hay dos momentos importantes en los que se debe revisar el trabajo realizado, uno, cuando se cree que se ha encontrado una buena solución y dos cuando se está a punto de renunciar al problema; para Mason, Burton y Stacey (1982) hay tres momentos claves en la fase de revisión: COMPROBRAR, REFLEXIONAR Y GENERALIZAR. Comprobar que la solución es correcta, reflexionar en el trabajo realizado, idea y momentos claves y generalizar el problema a un contexto más amplio. Se trata de revisar el trabajo realizado para comprobarlo o extenderlo.

Al reflexionar sobre los momentos clave como: ideas, conjeturas y discusiones que llevaron a la solución de un problema, se gana experiencia. Es decir, el trabajo realizado marca pautas para abordar otros problemas de manera más efectiva e incluso, permitirá hacer sugerencias a terceros de cómo atacar problemas similares. “REFLEXIONAR es, posiblemente, la actividad más importante para mejorar el razonamiento matemático. Contrariamente al tópico, <<yo no aprendo de mi experiencia>>, es decir, no aprendo salvo que reflexione en lo que he hecho” (Mason, Burton, & Stacey, 1982, pág. 51).

Una técnica que permite sacar el máximo beneficio de la fase de revisión es escribir la solución del problema como si la fuese a leer una persona que tiene una comprensión menor acerca del problema, esto permite revisar los detalles de la solución y tener una compresión mayor del problema preparando el terreno para generalizar.

2.2.5 Investigación-acción.

Se le atribuye el término investigación acción (IA) (action research) al sociólogo Kurt Lewin (1946). El modelo de la IA puede entenderse como una espiral continua de reflexión y acción, por lo que Lewin propone cuatro fases para el desarrollo de los procesos de la IA: planificación, actuación, observación y reflexión.

En el momento en que se identifica la problemática que se da en el aula de clase, se diseña un plan de acción, se implementa, se observan sus efectos y se reflexiona con los sujetos partícipes de la investigación. La reflexión conduce a una nueva planificación y el ciclo continua sucesivamente (Nocedo de León, 2001). La ilustración 2-5 muestra el proceso de un ciclo de la espiral de la IA.

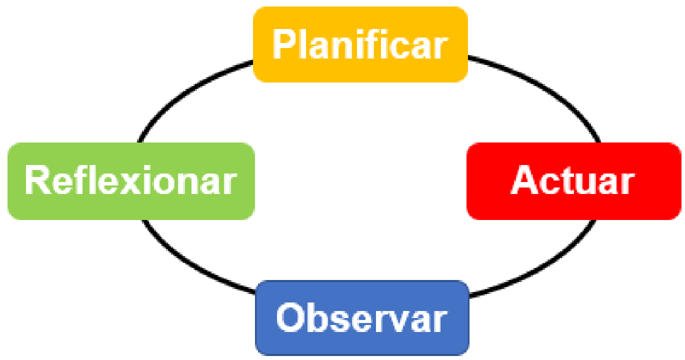


Ilustración 2-5 ciclo de la I-A

La IA se centra en las acciones humanas y las experiencias que viven los sujetos involucrados en la investigación, y tiene como objetivo que el investigador identifique las problemáticas que se dan en el aula y adopte una posición crítica frente a las mismas:

> La investigación-acción implica el planteamiento del problema y no tan sólo la solución del problema. No parte de contemplar los problemas como hechos patológicos. La investigación-acción busca mejorar y comprender el mundo a través de cambios y del aprendizaje, de cómo mejorarlo a partir de los efectos de los cambios conseguidos. (Nocedo de León, 2001, pág. 88)

Las problemáticas y su proceso de evolución pueden ser explicadas y descritas mediante el lenguaje cotidiano, ya que se validan a través de la interacción con los participantes con quienes debe haber un flujo libre de información, siendo esta una investigación de carácter interpretativo (Investigación acción del profesorado, 1988). La IA se basa en la confianza, el diálogo, el compromiso y colaboración de las partes relacionadas en el proceso de investigación, de modo que en ningún momento se bifurca el espíritu investigativo y el compromiso docente: “El objetivo es la transformación de la realidad educativa del profesor y los estudiantes, elaborando comprensiones sustantivas” (Nocedo de León, 2001, pág. 83)**.** Al ser una investigación abierta, no está limitada por acciones específicas y tiene métodos flexibles como entrevistas informales o estudios de casos (Nocedo de León, 2001).

Teniendo en cuenta las características de la IA desde su enfoque interpretativo, los resultados que aquí se presentan son el producto de un año de trabajo con el grupo de estudiantes de grado octavo del Colegio Silveria Espinosa de Rendón, que por ser un grupo pequeño facilitó una investigación más intensiva en el acompañamiento, observación y análisis de los procesos de cada uno de los estudiantes. Por otro lado, dado que las sesiones de trabajo se daban cada siete días era posible realizar una reflexión deliberada frente a los procesos y resultados, así como, de las dinámicas empleadas en el aula y las oportunidades de mejora.

La flexibilidad que ofrece la IA al no necesitar de una capacitación especial para comprender los resultados, ya que simplemente requiere de las facultades de observación, comparación, contraste y reflexión que posee cualquier individuo, favoreció la planeación de las metodologías empleadas y el análisis de los resultados. El enfoque de la I.A se ajustó al espíritu de esta investigación ya que no concibe el problema como un elemento para obtener resultados y presentarlos a un determinado público. Busca transformar y mejorar la realidad de los sujetos involucrados en la investigación.

La idea detrás de cada sesión de trabajo se fundamentó en los ciclos de la IA, se planificó una serie de actividades para cada sesión, se actuó realizando el respectivo acompañamiento a los estudiantes en sus procesos, se observó la evolución de estos y se realizó un análisis reflexivo conjunto de los procesos de los estudiantes. Con cada evidencia de evaluación que se trabajó en las diferentes sesiones (pruebas de entrada, guías talleres, evaluaciones etc.):

> La investigación-acción implica necesariamente a los participantes en la autorreflexión sobre su situación, en cuanto compañeros activos en la investigación. Los relatos de los diálogos con los participantes acerca de las interpretaciones y explicaciones que surgen de la investigación deben formar parte de cualquier informe de la investigación-acción. (Elliot, 2010, pág. 26)

Por otro lado, la IA se ajusta a la propuesta pedagógica de resolución de problemas, ya que la secuencia no está enfocada en resultados sino en procesos, por lo que desde la metodología de la investigación y desde el enfoque pedagógico se trabajará el aprendizaje como un proceso que se transforma a través del tiempo, tomando en cuenta las interacciones que se dan dentro del aula.

> La investigación acción no se limita a someter a prueba determinadas hipótesis o a utilizar datos para llegar a conclusiones… …. la investigación acción es un proceso, que sigue una evolución sistemática, y cambia tanto al investigador como las situaciones en que este actúa. (Nocedo de León, 2001, pág. 88)

Por último, se realizarán registros videográficos tanto de entrevistas como de los procesos individuales y grupales de los estudiantes, sus opiniones y emociones frente al material y su percepción frente a la secuencia una vez finalice el curso:

> Lo que ocurre se hace inteligible al relacionarlo con los significados subjetivos que los participantes les adscriben. He ahí por qué en las entrevistas y la observación participantes son importantes herramientas de investigación en un contexto de investigación-acción. (Elliot, 2010, pág. 25)

Las dinámicas de la investigación acción se verán implícitas a lo largo de todo el trabajo, en los análisis y reflexiones producto de las evidencias de evaluación, así como en las conclusiones y reflexiones.

2.3 Marco Disciplinar

2.3.1 Definición de polinomio

Un polinomio con coeficientes reales en la indeterminada $\boldsymbol{x}$ es una suma de la forma

$$\boldsymbol{P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n,}$$

que puede escribirse como:

$$\sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{a_i x^i}$$

en donde $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, todo $\boldsymbol{a_i} \in \mathbb{R}$ para $i = 0,1,2 \dots n$ y $\boldsymbol{a_n} \neq \boldsymbol{0}$. El número real $\boldsymbol{a_i}$ se llama coeficiente de $\boldsymbol{x^i}$, el coeficiente principal es $\boldsymbol{a_n}$ y el término independiente es $\boldsymbol{a_0}$. El número natural $\boldsymbol{n}$ es el grado del polinomio $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ y lo notamos: $\boldsymbol{graP}(\boldsymbol{x})$.
Los sumandos separados, $\boldsymbol{a_0}; \boldsymbol{a_1 x}; \boldsymbol{a_2 x^2} \dots; \boldsymbol{a_n x^n}$, se denominan términos del polinomio.
Un polinomio que consta de un solo término se denomina monomio, si consta de dos términos se denomina binomio, etc.

2.3.2 **Suma de polinomios**

Dados dos polinomios $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ y $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$ se define el polinomio suma $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})$ como:

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x});$$

cuyo coeficiente de $\boldsymbol{x^i}$, se obtiene de sumar los coeficientes de $\boldsymbol{x^i}$, de $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ y $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$.

Específicamente si $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a_0} + \boldsymbol{a_1 x} + \cdots + \boldsymbol{a_n x^n}$, y $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b_0} + \boldsymbol{b_1 x} + \cdots + \boldsymbol{b_m x^m}$, con $\boldsymbol{n} > \boldsymbol{m}$ entonces:

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{a_0}+\boldsymbol{b_0}) + (\boldsymbol{a_1}+\boldsymbol{b_1})\boldsymbol{x} + \cdots + (\boldsymbol{a_m} + \boldsymbol{b_m})\boldsymbol{x^m} + \boldsymbol{a_{m+1} x^{m+1}} + \cdots + \boldsymbol{a_n x^n};$$

o bien

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=0}^{n} (\boldsymbol{a_i} + \boldsymbol{b_i})\boldsymbol{x^i},$$

donde para $\boldsymbol{m} + \boldsymbol{1} \leq \boldsymbol{i} \leq \boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b_i} = \boldsymbol{0}$.

Se tiene lo siguiente:

i) Nótese que si a cualquier polinomio $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ se le suma el polinomio nulo entonces

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x});$$

por lo tanto, se dice que 0 (el polinomio nulo) es el módulo de la suma de polinomios.

ii) El opuesto aditivo del polinomio $\boldsymbol{Q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m}$, denotado por$-\boldsymbol{Q(x)}$ es el polinomio:

$$-\boldsymbol{Q(x)} = -\boldsymbol{b_0} - \boldsymbol{b_1 x} - \cdots - \boldsymbol{b_{m-1} x^{m-1}} - \boldsymbol{b_m x^m};$$

y satisface que $\boldsymbol{Q(x)} + [-\boldsymbol{Q(x)}] = \boldsymbol{0}$.

iii) La suma de polinomios es conmutativa:

$$\boldsymbol{P(x) + Q(x)} = \sum_{i=0}^{n} (\boldsymbol{a_i + b_i}) \boldsymbol{x^i}.$$

Si se emplea la conmutatividad de la suma de los números reales:

$$\boldsymbol{P(x) + Q(x)} = \sum_{i=0}^{n} (\boldsymbol{b_i + a_i}) \boldsymbol{x^i}$$

$$\boldsymbol{P(x) + Q(x)} = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{b_i x^i} + \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{a_i x^i}$$

$$\boldsymbol{P(x) + Q(x)} = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{b_i x^i} + \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{a_i x^i} = \boldsymbol{Q(x) + P(x)}.$$

iv) La suma de polinomios es asociativa:

$$[\boldsymbol{P(x) + Q(x)}] + \boldsymbol{R(x)} = \left[\sum_{i=0}^{n} (\boldsymbol{a_i + b_i}) \boldsymbol{x^i}\right] + \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{c_i x^i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} [(\boldsymbol{a_i + b_i}) + \boldsymbol{c_i}] \boldsymbol{x^i} = \sum_{i=0}^{n} [\boldsymbol{a_i} + (\boldsymbol{b_i + c_i})] \boldsymbol{x^i} = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{a_i x^i} + \left[\sum_{i=0}^{n} (\boldsymbol{b_i + c_i}) \boldsymbol{x^i}\right]$$

$$= \boldsymbol{P(x)} + [\boldsymbol{Q(x) + R(x)}].$$

2.3.3 Resta de polinomios

Dados dos polinomios $\boldsymbol{P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n}$ y $\boldsymbol{Q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m}$, se define la resta de $\boldsymbol{P(x)}$ y $\boldsymbol{Q(x)}$ como la suma de $\boldsymbol{P(x)} + [-\boldsymbol{Q(x)}]$, donde $-\boldsymbol{Q(x)}$ es el opuesto aditivo de $\boldsymbol{Q(x)}$**:**

$$\boldsymbol{P(x) - Q(x) = \sum_{i=0}^{n}(a_i - b_i)x^i}$$

2.3.4 Multiplicación de polinomios

Dados dos polinomios $\boldsymbol{P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n}$ y $\boldsymbol{Q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m}$ se define su producto como:

$$\boldsymbol{P(x) \cdot Q(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_{n+m}x^{n+m}};$$

donde los coeficientes del producto de los polinomios $\boldsymbol{P(x)}$ y $\boldsymbol{Q(x)}$ forman la secuencia:

$\boldsymbol{c_0 = a_0b_0}$

$\boldsymbol{c_1 = a_0b_1 + a_1b_0}$

$\boldsymbol{c_2 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0}$

.

.

.

$\boldsymbol{c_p = a_0b_p + a_1b_{p-1} + \cdots + a_{p-1}b_1 + a_pb_0}$.

Dado que, en todos los sumandos, los subíndices del producto de los coeficientes de los polinomios $\boldsymbol{P(x)}$ y $\boldsymbol{Q(x)}$ suman $\boldsymbol{p}$, si uno de ellos es $\boldsymbol{k}$, entonces el otro deberá ser $\boldsymbol{p - k}$, es decir:

$$\boldsymbol{c_p = \sum_{k=0}^{p} a_k\, b_{p-k}}.$$

Podemos escribir el producto de $\boldsymbol{P(x)}$ y $\boldsymbol{Q(x)}$ como:

$$\boldsymbol{P(x) \cdot Q(x) = \sum_{p=0}^{n+m} c_p x^p}.$$

Quedando

$$\boldsymbol{P(x) \cdot Q(x) = \sum_{p=0}^{m+n} \left(\sum_{k=0}^{p} a_k \, b_{p-k} \right) x^p}.$$

2.3.5 Algoritmo de la división

Dados dos polinomios $\boldsymbol{P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}$ y $\boldsymbol{Q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m}$ con a_i, $b_i \in \mathbb{R}$, $Q(x) \neq 0$ y $graP(x) \geq graQ(x)$, existen dos polinomios $\boldsymbol{C(x)}$ (cociente) y $\boldsymbol{R(x)}$ (residuo o resto) tales que:

$$\boldsymbol{P(x) = Q(x)C(x) + R(x)},$$

donde $R(x) = 0$ o $graR(x) < graQ(x)$.

La demostración se puede revisar en *Álgebra abstracta* (Fraleigh, 1982).

2.3.6 La caja de polinomios

La caja de polinomios es una herramienta didáctica que permite el desarrollo del álgebra para la enseñanza escolar (Soto, Mosquera, & Gómez, 2005). Está compuesta por tres rectángulos básicos, ver Ilustración 2-1, y el plano cartesiano (este último permite trabajar con el material polinomios con coeficientes enteros). “La operatoria algebraica que se realiza con esta herramienta consiste esencialmente en armar un rompecabezas, construyendo rectángulos con la única regla de que fichas contiguas coincidan en la dimensión de sus bordes vecinos” (Soto, Mosquera, & Gómez, 2005, pág. 84). Esta regla se denominará “regla de los lados adyacentes”.

A continuación se presentan algunos ejemplos que ilustran brevemente el funcionamiento de la caja de polinomios para las diferentes operaciones que se tendrán en cuenta en este trabajo. La manera en la que se empleó el material con los estudiantes involucrados en esta práctica se muestra en los capítulos 3,4 y 5.

Utilizando los rectángulos básicos de Soto, Mosquera y Gómez (Ilustración 2-1) es posible representar polinomios con coeficientes enteros. Si se desea representar un polinomio con coeficientes positivos por medio de la caja de polinomios se puede utilizar el cuadrante I o III del plano cartesiano. En la ilustración 2-6 se muestra el polinomio $4x^2 + 3x + 2$.

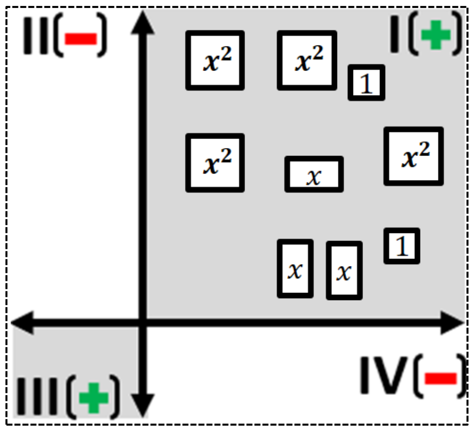


Ilustración 2-6

Y en la ilustración 2-7 se muestra el polinomio $-x^2 + 3x - 2$.

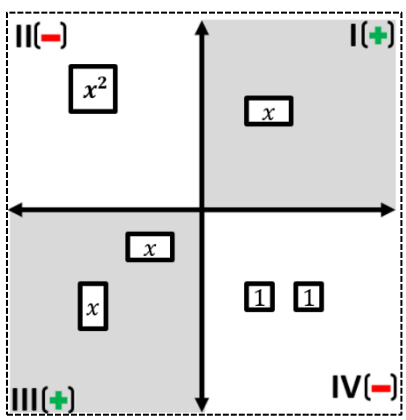


Ilustración 2-7

Para realizar las operaciones algebraicas es indispensable tener en cuenta las dimensiones, la ubicación y el valor algebraico de las fichas que corresponden a las posiciones de estas en el plano. La ilustración 2-8 muestra las diferentes posiciones en las que se puede ubicar una ficha en el plano cartesiano. El cuadrante define el signo de la ficha y los ejes definen el signo de sus lados, de esta manera: en las posiciones **a), b) e), y f)** la ficha es positiva y sus lados, leyendo primero el horizontal, son $+x$ y $+1$, $+1$ y $+x$,

$-x$ y -1,-1 y $-x$, respectivamente. Por otro lado, en las posiciones **c), d) g), y h)** la ficha es negativa y sus lados, comenzando de nuevo en el horizontal, son $-x$ y $+1$,-1 y $+x$, x y -1,$+1$ y $-x$, respectivamente.

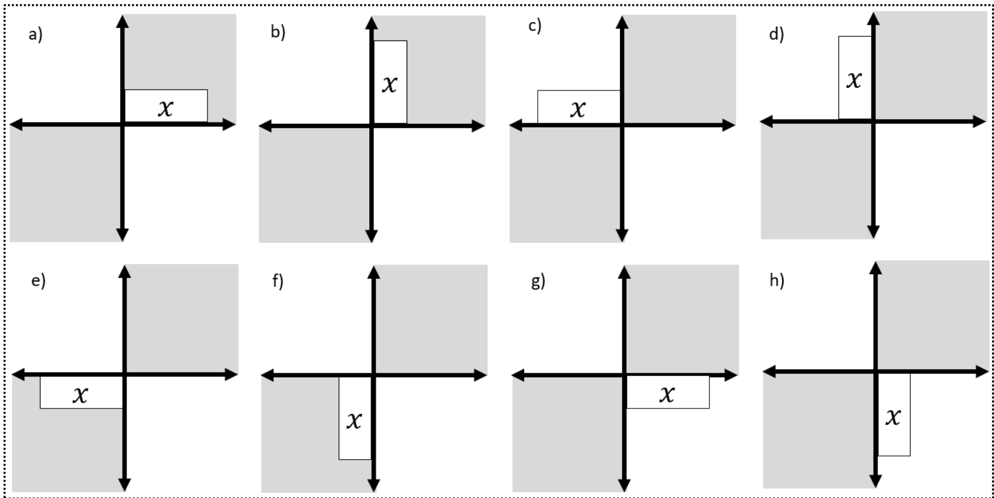


Ilustración 2-8 Posibles posiciones de una ficha tipo $\boldsymbol{x}$ en el plano cartesiano

Suma: Para determinar $p(x)+q(x)$ se sugiere ubicar el polinomio $p(x)$ en los cuadrantes II y III mientras que el sumando $q(x)$ se ubica en los cuadrantes I y IV. Una vez ubicadas las fichas se retiran las correspondientes a opuestos aditivos. La ilustración 2-9 **a)** muestra la suma de $p(x)+q(x)$ donde $p(x)=-1+2x-3x^2$ y $q(x)=2x^2-3-3x$ y en la ilustración 2-9 **b)** se aprecia el resultado de la suma una vez se retiran los opuestos aditivos.

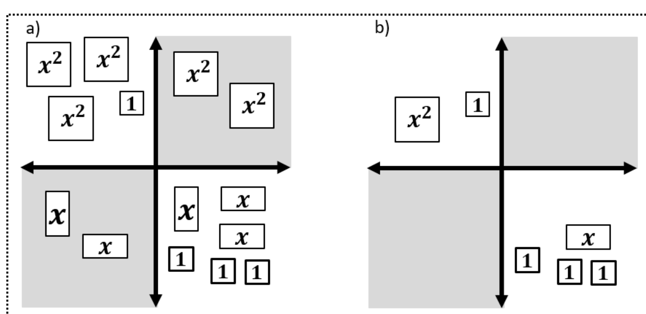


Ilustración 2-9

Esto es $(-1+2x-3x^2)$ $+(2x^2-3-3x)=\ -4-x-x^2$.

Resta: La resta $p(x) - q(x)$ se obtiene de manera similar a la suma, las fichas que representan al sustraendo se ubican en los cuadrantes I y IV (Ilustración 2-10 **a**) y luego se trasladan a los cuadrantes II y III respectivamente (Ilustración 2-10 **b**). finalmente, para obtener el resultado se retiran las fichas correspondientes a opuestos aditivos quedando: $(-1 + 2x - 3x^2) - (2x^2 - 3 - 3x) = 2 + 5x - 5x^2$ (Ilustración 2-10 **c**).

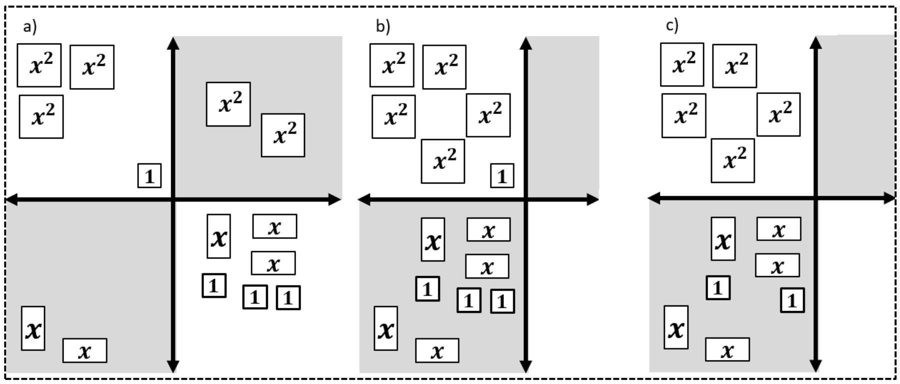


Ilustración 2-10

Multiplicación: Para determinar el producto de dos polinomios de la forma $p(x) = ax + b$ y $q(x) = cx + d$ se construye un rectángulo cuya base puede ser cualquier factor y su altura el otro. Para construir y completar el rectángulo se debe tener presente la regla de los lados adyacentes. Si los coeficientes de los polinomios pertenecen a los números naturales la multiplicación se puede realizar en el primer cuadrante. Por ejemplo $(2x + 1)(x + 2)$ (Ilustración 2-11 **a**) donde la base se representa por el primer factor y la altura por el segundo, el producto $2x^2 + 5x + 2$ corresponde al área del rectángulo que se observa en la ilustración 2-11.

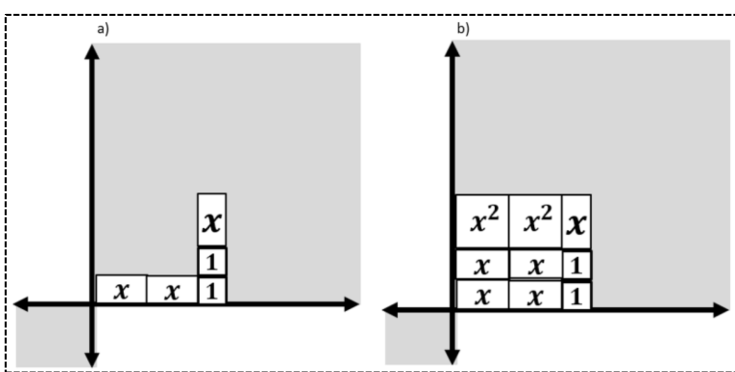


Ilustración 2-11

Si los coeficientes de los polinomios pertenecen a los números enteros se utilizan por lo menos dos cuadrantes. Por ejemplo, $(x-1)(-x+2)$ (Ilustración 2-12 **a**); en este caso la base se representa por el primer factor y la altura por el segundo, el producto $-x^2+3x-2$ se muestra en dos pasos en la ilustración 2-12.

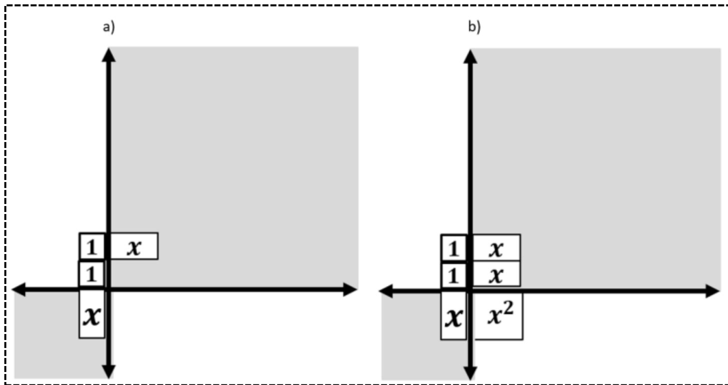


Ilustración 2-12

Factorización: Factorizar un polinomio $p(x)$ a partir de la caja de polinomios consiste en utilizar las fichas, a modo de rompecabezas, para formar un rectángulo teniendo en cuenta la regla de los lados adyacentes. La ilustración 2-13 muestra el proceso de la factorización de x^2+2x+1.

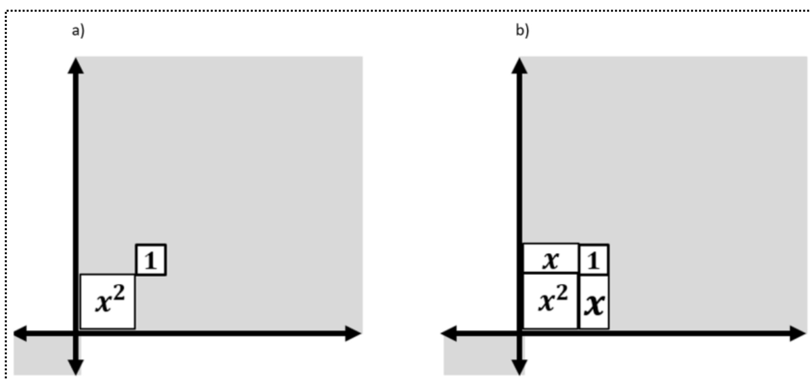


Ilustración 2-13

La forma más sencilla de construir el rectángulo es ubicar en primera instancia, las fichas tipo x^2 y tipo 1, estas forman un encuadre como se muestra en la ilustración 2-13 **a)** y posteriormente se rellena este encuadre utilizando las fichas restantes (Ilustración 2-13 **b**).

División: Mediante la caja de polinomios es posible dividir polinomios cuadráticos $ax^2 + bx + c$ entre binomios de la forma $dx + e$. La división consiste en, al igual que en la multiplicación y la factorización, formar un rectángulo cuya base sea el divisor $dx + e$. La altura es el cociente y en caso de que queden fichas tipo 1 que no formen parte del rectángulo, estas corresponden al residuo. Las etapas de la división de $2x^2 - 5x - 1$ entre $2x + 1$ se representan en la ilustración 2-14.

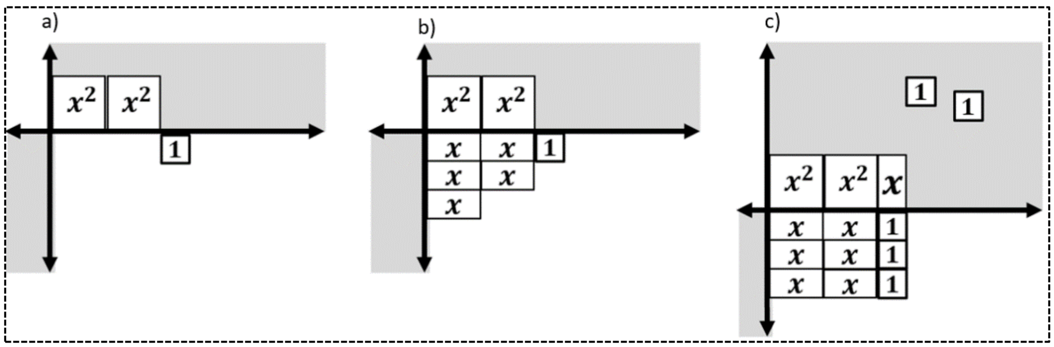


Ilustración 2-14

Donde el cociente es $x - 3$ que corresponde a la altura del rectángulo y residuo es 2.

La "caja de polinomios" puede emplearse para factorizar polinomios de grados mayores que dos. Sin embargo, en esta investigación se trabajó con polinomios de grados menores o iguales que dos, buscando establecer una relación entre las dimensiones de las representaciones pictóricas del material y el lenguaje algebraico (sobre todo en la factorización y en la multiplicación). Para más detalles del uso del material se recomienda referirse al artículo que tiene por nombre "la caja de polinomios" de Soto, Mosquera y Gómez (2005).

2.3.7 Factorización de polinomios cuadráticos con coeficientes enteros

Se entiende por factorización de un polinomio la posibilidad de hallar una expresión equivalente escrita como un producto de dos polinomios de grados menores.

En esta investigación se trabajarán polinomios con coeficientes enteros de grado menor o igual a dos utilizando como recurso concreto "La caja de polinomios", por esta razón en este trabajo se usa el siguiente criterio para factorizar.

Teorema

Sea $P(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{Z}[x]$, con $a \neq 0$.

$P(x)$ se factoriza en dos polinomios de grado 1 sobre $\mathbb{Z}$ si y solo si existen $p, q \in \mathbb{Z}$ tales que $p \cdot q = a \cdot c$ y $p + q = b$.

Demostración:

i) Si existen $p, q \in \mathbb{Z}$ tales que:

$$p \cdot q = a \cdot c \text{ y } p + q = b;$$

sea

$$p_1 = m.c.d(p, a);$$

entonces existen enteros p_2 y q_1 tales que:

$$p = p_1 \cdot p_2$$
$$a = p_1 \cdot q_1,$$

así,

$$p_1 \cdot p_2 \cdot q = p_1 \cdot q_1 \cdot c;$$

como $a \neq 0$, entonces $p_1 \neq 0$ y

$$p_2 \cdot q = q_1 \cdot c.$$

Dado que

$$p_2 \cdot q = q_1 \cdot c,$$

luego $q_1 | p_2 q$,

pero como $m.c.d(p_2, q_1) = 1$, puesto que $p_1 = m.c.d(p, a)$, entonces $q_1 | q$, por lo que existe un entero q_2, tal que

$$q_1 \cdot q_2 = q$$

y así

$$p_2 \cdot q_1 \cdot q_2 = q_1 \cdot c.$$

Además

$$q_1 \neq 0 \text{ porque } a \neq 0$$
$$p_2 \cdot q_2 = c;$$

Se tiene:

$$a = p_1 \cdot q_1 \quad p = p_1 \cdot p_2 \quad q = q_1 \cdot q_2 \quad c = p_2 \cdot q_2;$$

Entonces:

$$P(x) = p_1 \cdot q_1\, x^2 + (p_1 \cdot p_2 + q_1 \cdot q_2\ )x + p_2 \cdot q_2;$$

$$= (p_1 x + q_2)(q_1 x + p_2\ ).$$

ii) Por otro lado, si $P(x) = ax^2 + bx + c$ se factoriza en dos polinomios de grado 1 sobre $\mathbb{Z}$**,** entonces existen enteros

p_1, p_2, q_1 y q_2 tales que:

$$ax^2 + bx + c = (p_1 x + q_2)(q_1 x + p_2\ )$$

Entonces:

$$\boldsymbol{a} = p_1 \cdot q_1$$
$$\boldsymbol{b} = p_1 \cdot p_2 + q_1 \cdot q_2$$
$$\boldsymbol{c} = p_2 \cdot q_2$$

Se definen dos enteros p y q tales que:

$$p = p_1 \cdot p_2 \text{ y } q = q_1 \cdot q_2;$$

que cumplen

$$p \cdot q = p_1 \cdot p_2 \cdot q_1 \cdot q_2$$

$$= (p_1 \cdot q_1)(p_2 \cdot q_2) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c};$$

y

$$\boldsymbol{b} = p_1 \cdot p_2 + q_1 \cdot q_2\ = p + q.$$

Este teorema se formuló gracias al trabajo con “la caja de polinomios”, ya que el polinomio $ax^2 + bx + c$ se puede representar mediante el material usando $|a|$ fichas tipo x^2, $|b|$ tipo x y $|c|$ fichas tipo 1. En el caso que se pueda factorizar el polinomio en los enteros se obtendría, a partir de los rectángulos básicos (ver figura 2-1) y siguiendo la regla de los lados adyacentes, un rectángulo que tendría una de las siguientes formas, o sus rotaciones (a favor o en contra de las manecillas del reloj), ver Ilustración 2-6.

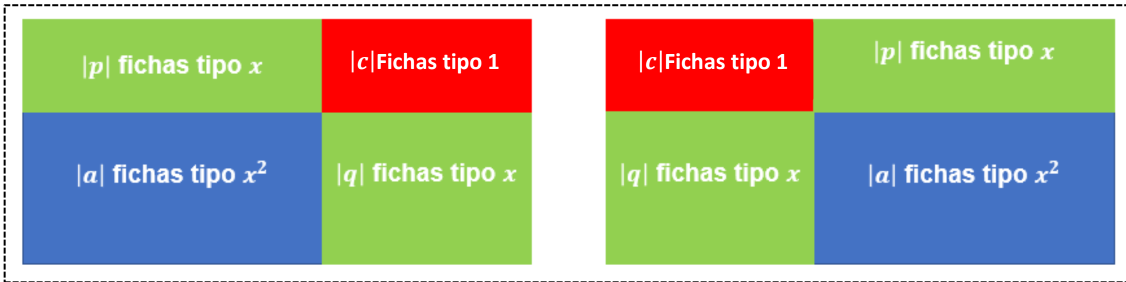


Ilustración 2-15 posibles configuraciones para la factorización

De esta manera, en el rectángulo es posible conocer los valores de p y q que permiten la factorización del polinomio en los enteros.

Si $a = 0$ queda un polinomio de la forma $bx + c$, que se puede factorizar determinando el máximo común divisor de b y c, cuando b es diferente de cero. En este caso

$$bx + c = r(tx + s)$$

Donde r es el $mcd\ (b, c)$ y t y s son tales que $b = r \cdot t$ y $c = r \cdot s$

3. Capítulo 3

3.1 Metodología

La metodología se basó en el modelo de investigación-acción y el enfoque pedagógico se trabajó teniendo en cuenta los estadios de desarrollo de la psicología evolutiva y el modelo de enseñanza y aprendizaje basado en la resolución de problemas, tomando las estrategias metacognitivas que ofrecen Mason, Burton y Stacey en su libro "*Pensar matemáticamente*".

Previo a la "inscripción" de los estudiantes al curso, se habían programado las actividades a desarrollar en cada sesión de trabajo, esta programación se muestra a continuación en la tabla 3-1.

Tabla 3-1 Programa de trabajo de la secuencia didáctica

Plan de trabajo de la secuencia didáctica	
Sesión 1	✓ Prueba de entrada
Sesión 2	✓ Introducción a "la caja de polinomios". ✓ Suma de números enteros con material concreto[1]. ✓ Suma de polinomios de primer y segundo grado mediante el empleo de "la caja de polinomios".

[1] Esta actividad se diseñó con el ánimo de subsanar las dificultades que se evidenciaron en los estudiantes frente al manejo de operaciones con números enteros, luego de analizar los resultados de la evaluación de entrada

Sesión 3	✓ Resta de polinomios de primer y segundo grado mediante el empleo de “la caja de polinomios”.
Sesión 4	✓ Repaso y resignificación de la Resta de polinomios de primer y segundo grado mediante el empleo de “la caja de polinomios”. ✓ Desarrollo de guía de trabajo (pasando de lo concreto a lo abstracto suma y resta de polinomios)
Sesión 5	✓ Reglas para la construcción de cuadrados y rectángulos mediante el empleo de “la caja de polinomios”, conceptos de área y de encuadres mínimos.
Sesión 6	✓ Relación del concepto de área y multiplicación.
Sesión 7	✓ Multiplicación de polinomios de grado uno con coeficientes naturales mediante “la caja de polinomios”. ✓ Multiplicación de polinomios de grado uno con coeficientes enteros mediante “la caja de polinomios”.
Sesión 8	✓ Desarrollo de ejercicios de multiplicación de polinomios de primer grado en una indeterminada. ✓ Yendo más allá: Desarrollo de ejercicios de multiplicación de polinomios con dos indeterminadas (indeterminadas diferentes de x).

Sesión 9 A la 15	✓ Factorización de polinomios de grado dos con coeficientes enteros mediante la caja de polinomios, **factor común** ✓ Factorización de polinomios de grado dos con coeficientes enteros mediante "la caja de polinomios". ✓ Desarrollo de guía de trabajo (pasando de lo concreto a lo abstracto, factorizar) ✓ Guía de trabajo "Deducción de una regla general que abarque los casos de factorización trabajados en las sesiones anteriores"
Sesión 16 y 17	✓ División de polinomios con coeficientes enteros de la forma $\boldsymbol{ax^2+bx+c}$ entre polinomios de la forma $\boldsymbol{bx+c}$ mediante el uso de "la caja de polinomios". ✓ Desarrollo de ejercicios de división de polinomios con coeficientes enteros de la forma $\boldsymbol{ax^2+bx+c}$ entre polinomios de la forma $\boldsymbol{bx+c}$**.**
Sesión 18	✓ Enfoque del material hacia la resolución de problemas ✓ Solución de la prueba de entrada, utilizando el material y estrategias de la resolución de problemas.
Sesión 19	✓ Pre- evaluación; preparación de los estudiantes para presentar la última evidencia de los procesos realizados a lo largo de la secuencia, utilizando las estrategias de la resolución de problemas.
Sesión 20	✓ Evaluación final y entrevista.

En el trabajo se buscó favorecer los procesos y habilidades de los estudiantes que participaron en el "curso", independientemente de la cantidad inicial de estudiantes inscritos, por esta razón, siempre se tuvo presente el sentido ético de la educación de Elliot (2010) ya que la secuencia no se pensó como un instrumento cuyo fin fuera simplemente determinar algunos datos y lograr algunos objetivos:

> Este carácter ético reside en la propia actividad educativa que, como toda actividad "practica" humana a diferencia de la actividad técnico instrumental, encuentra su valor en su mismo sentido y no como mero instrumento o medio para la obtención de objetivos extrínsecos. (Elliot, 2010, pág. 11)

Es decir, se esperaba generar un impacto en la vida de los estudiantes frente a la forma en la que percibían los elementos del álgebra a trabajar. Teniendo en cuenta lo anterior, se dio inicio a la secuencia con la participación de los veinticinco estudiantes, siempre teniendo presente que se haría seguimiento sólo a cuatro de ellos.

Finalmente, se consideran las recomendaciones que realiza el MEN (2017) para realizar juicios de calidad, a partir de las evidencias obtenidas en un proceso de aprendizaje:

> No puede olvidarse que la calidad de los juicios que se emitan sobre el avance en los niveles de competencia de los estudiantes depende de un amplio número de evidencias de las actuaciones de los estudiantes, obtenidas de diversas fuentes de información y de distintas situaciones que estimulen las producciones orales, gestuales, pictóricas y escritas. (MEN, 2017, págs. 75,76)

Se recolectó una cantidad importante de evidencias durante toda la secuencia por medio de: trabajos escritos, entrevistas y videos que mostraron la medida en la que la secuencia se acercó a cumplir con los objetivos explícitos de la propuesta.

3.2 Construcción de la prueba de entrada.

El diseño y la aplicación de la prueba de entrada pretendía determinar si los estudiantes contaban con los conocimientos básicos requeridos para las temáticas a trabajar en la secuencia (suma, resta, multiplicación y división de números enteros y manejo de las fórmulas de las áreas de algunos polígonos regulares), y si tenían conocimientos propios de las temáticas empleadas en la secuencia.

Por otra parte, los resultados de la prueba serían un insumo importante para diseñar y *planificar* las actividades que se trabajarían con los estudiantes y eventualmente *actuar* respecto a las necesidades de aprendizaje que se identificaran utilizando las fases de la investigación acción (planificar, actuar, observar y reflexionar). Además, fijarían un punto de partida en el desarrollo de la secuencia y de comparación con resultados posteriores a la aplicación de esta. La comparación se realizó cualitativamente a partir de una prueba de salida que retomó las temáticas fundamentales, aquellas empleadas en la secuencia y algunas con un nivel de profundidad un poco mayor.

La prueba contó con algunos ejercicios, específicamente de operaciones básicas con polinomios, factorización y problemas que involucraban conceptos algebraicos, estos últimos bastante relacionados con la geometría. La tabla 3-2 indica las competencias que se pretendían evaluar.

Tabla 3-2 Competencias matemáticas implícitas en la evaluación de entrada

	Competencias				
Ejercicios 1a, 1b, 1c, 2a, 2b, 2c, y 2d	Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números enteros y de las relaciones y operaciones entre ellos.	Justifico procedimientos algebraicos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones.	Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.	Justifico la elección de métodos e instrumentos de cálculo en la resolución de problemas.	

Problemas 3,4,5 y 6	Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.	Resuelvo y formulo problemas usando modelos geométricos.	Justifico procedimientos algebraicos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones.	Generalizo procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas.	Calculo áreas a través de composición y descomposición de figuras planas.

La prueba era abierta y la forma en la que se presentaba la respuesta a cada problema debía incluir una explicación dirigida a una persona que tuviese una comprensión menor del tema o que no lo conociera. Esta manera de presentar las soluciones se extendería al trabajo realizado en las guías de la secuencia. Según Mason, Burton y Stacey (1982):

> La forma de sacar el máximo partido de la revisión es la de redactar tu solución como si la fuera a leer otra persona... … haciendo esto probablemente encontraras nuevas ideas para mejorar tu resolución y generalizarla para resolver otros problemas. (pág. 50)

Así también lo opina Stacey y Groves (1999):

> Cuando el alumnado ha acabado un problema o ha hecho lo que ha podido, se debería invitar a revisar el trabajo y a elaborar un informe ordenado y coherente, escribiendo la solución con los razonamientos y no solo la respuesta, una forma de tratar de explicar esto es decirles que cualquier otra persona pueda comprenderlo. (pág. 20)

Al final de la prueba se dejó un espacio para que los estudiantes mencionaran qué puntos de la evaluación les habían causado mayor dificultad y por qué consideraban que no podían resolverlos.

3.3 Prueba de entrada, resultados de la prueba y análisis.

La prueba se aplicó el 21 de octubre del 2017, a continuación se presenta cada uno de los puntos que contenía la prueba y los resultados de cada uno de los tres estudiantes (del grupo con el que se lleva a cabo la investigación) que asistieron el día de la prueba.

Teniendo en cuenta uno de los principios de la investigación-acción que considera a los participantes de la investigación como personas con identidad:

> La investigación acción es una investigación realizada por determinadas personas acerca de su propio trabajo, con el fin de mejorar aquello que hacen, incluyendo el modo en que trabajan con y para otros… …No considera a las personas como objetos de investigación, sino que las alienta a trabajar juntas como sujetos consientes y como agentes del cambio y la mejora. (Nocedo de León, 2001, pág. 89)

Los estudiantes participantes de la investigación serán llamados de aquí en adelante por sus nombres propios: Saray, Karen, Cristian y David y se tendrá en cuenta también su edad para hacerse a una idea de los posibles estadios de desarrollo en los que se puedan encontrar. David no asistió el día de la prueba y por razones de tiempo y programación en la secuencia, no le fue posible presentarla.

A continuación, se presentan los enunciados de cada uno de los puntos de la prueba de entrada y posteriormente, los procesos de resolución de cada uno de los estudiantes comenzando por el trabajo de Cristian.

Prueba de entrada.

1) *Resuelvo las siguientes operaciones, describiendo cada uno de los pasos que utilizo para llegar al resultado final.*
   a) $-(2x^2 - 4 + 5x) - (-2 - 3x^2 + 2x)$

b) $(3x-4)(-2+7x)$

c) $(4x^2+4+8x) \div (3x+1)$

2) *Factorizo las siguientes expresiones algebraicas, describiendo cada uno de los pasos que utilizo para llegar al resultado final.*

a) x^2-7-6x

b) $x-2+6x^2$

3) *Realizo un escrito donde le explico detalladamente a un compañero cómo determinar el área de la siguiente figura, de dos maneras diferentes*

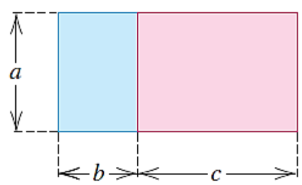


Figura 3-1

4) *La figura ilustra la vista superior de una habitación de forma cuadrada. El área de la sección I está destinada para el dormitorio, el área II se ha destinado para un closet y el área III para el baño de la habitación*

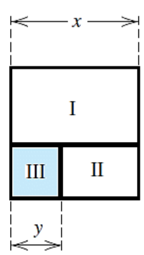


Figura 3-2

a) *Determino el área de cada una de las secciones y describo paso a paso como llego al resultado final de cada una.*

b) *Propongo dos formas diferentes de hallar el área conjunta de las secciones I y II, describo con detalle cómo lo hice.*

c) *Si* $x = 5m$ *y* $y = 1.5m$, *¿cuál sería el área que ocuparían el dormitorio y el armario? ¿Qué área ocuparía el baño?*

5) *Se pretende diseñar una baldosa que presenta la siguiente forma geométrica:*

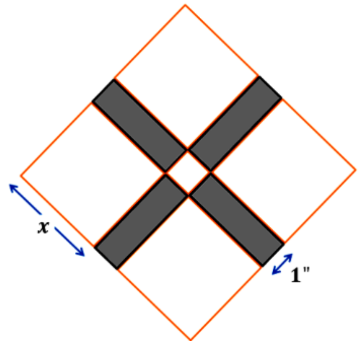


Figura 3-3

*Se determinó la longitud menor del rectángulo como una pulgada (**1"**) y la longitud del cuadrado mayor es desconocida.*

Propongo dos maneras diferentes de hallar el área de la baldosa. Describo el paso a paso de cómo lo hago. ¿Cuál debe ser el valor de x si el área total de la baldosa es de 121 pulgadas cuadradas?

6) *Se desea diseñar la maqueta de una oficina sobre un sector rectangular. Para ello, se divide el área del rectángulo como se muestra en la figura:*

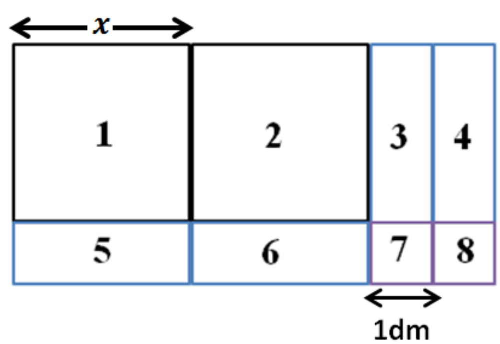


Figura 3-4

*Las áreas 1 y 2 deben ser iguales entre ellas, así mismo las áreas 3,4,5 y 6. Se decide que el lado de las secciones cuadradas menores será de un decímetro (**1dm**), mientras que no se han determinado los lados de los cuadrados mayores.*

a) *Proponga dos maneras diferentes para determinar el área de la oficina. Describa el paso a paso de los procedimientos empleados para tal fin.*

b) *Si se desea que el espacio para la maqueta de la oficina ocupe un área máxima de treinta y dos decímetros cuadrados (**32 dm²**) ¿Cuál debe ser la longitud de* $\boldsymbol{x}$*?*

Prueba I

Cristian.

Edad: 13 años

Cristian percibe aparentemente la suma de polinomios del numeral 1a) como una multiplicación. En el proceso de resolución muestra que tiene algún conocimiento de la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma (propiedad distributiva), aunque no tiene claro cuándo debe aplicarla. Así, la resta $-(2x^2-4+5x)-(-2-3x^2+2x)$ se transforma en $(2x^2-4+5x)(-2-3x^2+2x)$, luego de aplicar la propiedad distributiva obtiene el siguiente resultado.

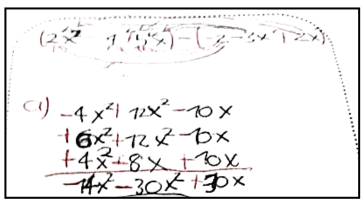
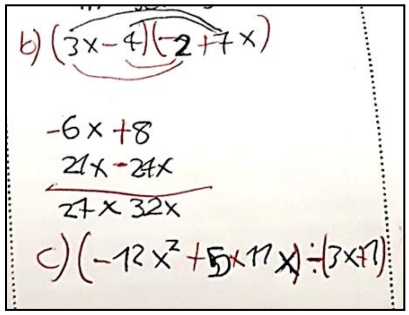


Ilustración 3-1 evidencia de trabajo de Cristian

$$\begin{array}{r} -4x^2+12x^2-10x \\ 6x^2+12x^2-10x \\ \underline{-4x^2\quad -8x\quad +10x} \\ -14x^2-30x^2+30x \end{array}$$

En el proceso de resolución de la operación se observan dificultades adicionales a las ya mencionadas. Por ejemplo: dificultades en la suma de números enteros, suma o "reducción" de "términos semejantes" y multiplicación de monomios.

Cristian resuelve el punto 1b) como se muestra la ilustración 3-2.



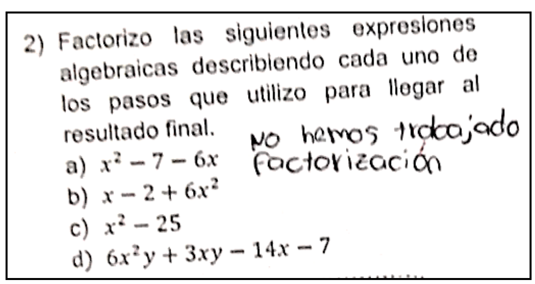
lustración 3-2 evidencia de trabajo de Cristian

Se aprecian varias situaciones interesantes, algunas positivas y otras por mejorar. Positivo: que Cristian tiene una idea de la ley distributiva, la ilustra con líneas que van desde los términos del primer binomio a los términos del segundo y que tiene una idea de cómo los signos de los coeficientes afectan el producto al aplicar distributiva "ley de signos".

Por mejorar: los errores que comete al multiplicar dos indeterminadas, dificultades al multiplicar dos números naturales $(4x)(7x) = 24x$, la suma de "términos semejantes" y la escritura de su respuesta final, que se presenta como un "todo", es decir, los términos del polinomio resultante no están diferenciados unos de otros, ya que su respuesta final es $\boldsymbol{27x32x}$.

Cristian no llevó a cabo ningún procedimiento en el punto 1c).

En el punto 2. Cristian refiere no haber visto el tema *"No hemos trabajado factorización"*


2) Factorizo las siguientes expresiones algebraicas describiendo cada uno de los pasos que utilizo para llegar al resultado final.

a) $x^2 - 7 - 6x$
b) $x - 2 + 6x^2$
c) $x^2 - 25$
d) $6x^2y + 3xy - 14x - 7$

no hemos trabajado factorización

Ilustración 3-3 evidencia de trabajo de Cristian

Cristian propone una fórmula para determinar el área de la figura 3-1 en el problema 3.

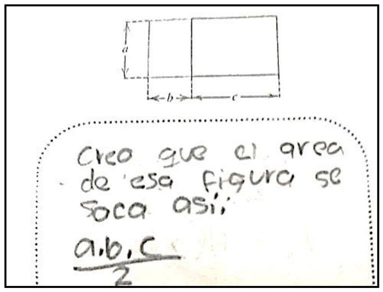


Ilustración 3-4 evidencia de trabajo de Cristian

“*Creo que el área de esa figura se saca así* $\frac{a \cdot b \cdot c}{2}$ ”

Da la impresión que Cristian entiende que al ser tres longitudes en el rectángulo a, b y c, estas deben estar relacionadas entre sí. La forma en la que logra establecer esta relación es por medio de una multiplicación. Es curioso que este producto lo divida en dos, se podría pensar que lo hace así ya que la figura 3-1 (el rectángulo de mayor área) esta seccionada en dos partes y esto aparentemente lo interpreta como una división aritmética.

Cristian no realizó ninguna operación en los puntos 4,5 y 6. A continuación explica por qué no le fue posible resolverlos.

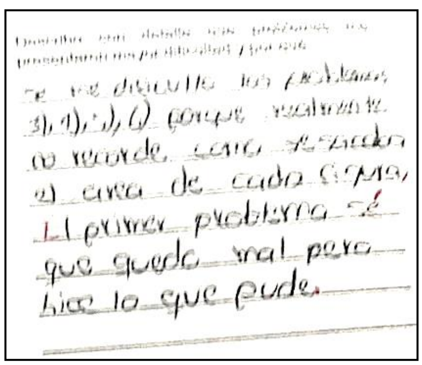


Ilustración 3-5 evidencia de trabajo de Cristian

“Se me dificultó los problemas 3,4,5 y 6 porque realmente ***<u>no recordé</u>*** *cómo se sacaba el área de cada figura. El primer problema sé que quedo mal, pero hice lo que pude”.*

Prueba 2

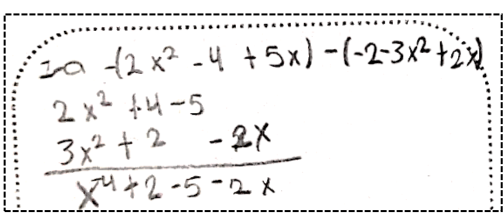
Karen

Edad: 13 años

Karen parece entender el efecto del signo negativo sobre los trinomios, por ejemplo, en la ilustración 3-6 expresa $-(2x^2 - 4 + 5x) = 2x^2 + 4 - 5$, es interesante observar que Karen distribuye la multiplicación de -1 solo para el segundo y tercer término de este sumando, este es un error común que cometen los estudiantes en la secundaria y además, según Socas *et al* (1996) "El signo " $-$ " sobre todo cuando va colocado delante de un paréntesis o de una fracción, genera frecuentes errores. Como $-(\mathrm{a} + \mathrm{b}) = -\mathrm{a} + \mathrm{b} \quad -\frac{\mathrm{a+b}}{\mathrm{c}} = -\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{c}} + \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{c}}$" (pág. 101).
También omite la indeterminada en el término $5x$ convirtiéndolo en 5. Sin embargo, no es semejante a 4 porque no lo reduce con 4 ni con otro "término semejante" al realizar sus cálculos (ver ilustración 3-6). Mientras que en el segundo sumando $-(-2 - 3x^2 + 2x) = 3x^2 + 2 - 2x$ aplica de manera correcta la propiedad distributiva sin alterar la condición de indeterminada para ninguno de los términos.

Llama la atención que en el segundo sumando sí distribuya el -1 de manera correcta. Se podría pensar que lo hace así, porque el primer término de este trinomio es -2. Es decir, es evidente que tiene un signo y que ese signo se debe modificar, mientras que el primer sumando cuyo primer término es $2x^2$, no es alterado por el -1 que esta fuera del paréntesis. Podría suponerse que Karen cree que este término no tiene signo y que por eso no cambia, sería interesante ver qué ocurre si cuando se enseña esta temática de manera convencional en vez de escribir el primer sumando como $-(2x^2 - 4 + 5x)$ se escribe como $-(+2x^2 - 4 + 5x)$.

Para reducir los "términos semejantes" Karen recurre a ordenar los términos de los trinomios verticalmente, y aunque como se mencionó anteriormente $5x$ pasó de ser indeterminada a ser constante, parece mantener su condición de indeterminada en la mente de Karen, como se puede apreciar en la ilustración 3-6.



$$\begin{array}{ccc} 2x^2 & +4 & -\mathbf{5} \\ 3x^2 & +2 & -2x \\ \hline \multicolumn{3}{c}{x^4 + 2 - \mathbf{5} - 2x} \end{array}$$

Ilustración 3-6 evidencia de trabajo de Karen

Se entiende que en la suma $2x^2 + 3x^2 = x^4$ Karen asocia el signo de suma como un operador que funciona sobre los exponentes de la indeterminada en este caso, y mantuvo el operador resta al final de la operación, por lo que Karen no vio a $2x^2 + 3x^2$ como una suma en su escritura vertical, sino que tuvo en cuenta el operador resta de la operación original,$-(2x^2 - 4 + 5x) - (-2 - 3x^2 + 2x)$. Esto la llevó a escribir $2x^2 + 3x^2 = x^4$ y también en la segunda columna en la que escribe $+4 + 2 = 2$. Se podría pensar que independientemente de que el signo menos ya hubiese cumplido su papel en el segundo trinomio, se mantiene la condición inicial de resta. Es decir, para Karen la operación sigue siendo una resta.

En el ejercicio 1b) Karen reconfigura la multiplicación para realizarla de manera vertical, es consciente que el signo de los coeficientes afecta el resultado que se obtiene de la multiplicación, aplica "ley de signos", pero no aplica "ley distributiva". Así, en la disposición vertical que presenta, multiplica indeterminadas con indeterminadas y constantes con constantes, esto se observa a continuación en la ilustración 3-7.

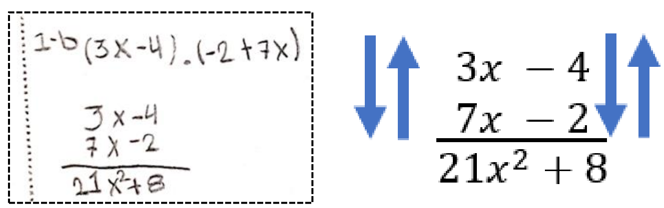


Ilustración 3-7 evidencia de trabajo de Karen

Aunque Karen intenta resolver la división, no se vislumbra alguna regularidad en su respuesta, esta última no es fácil de interpretar por lo que se le pregunta a la estudiante qué quería realizar en este punto, a lo que contesta.

> *"yo no sé, pues hice lo que se me ocurrió, por no dejar la hoja en blanco como usted dijo profe"*

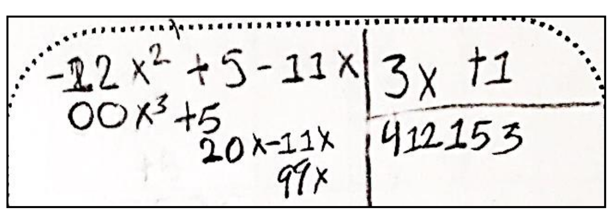
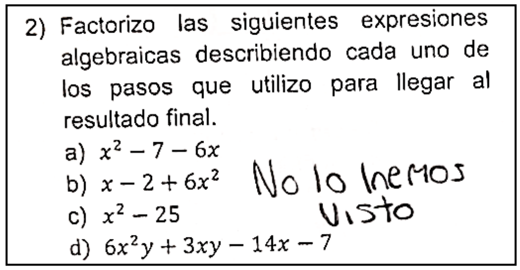


Ilustración 3-8 evidencia de trabajo de Karen

En el punto 2 Karen refirió que el tema no lo había trabajado en clase, por lo que no podía resolverlo.



2) Factorizo las siguientes expresiones algebraicas describiendo cada uno de los pasos que utilizo para llegar al resultado final.

a) $x^2 - 7 - 6x$

b) $x - 2 + 6x^2$

c) $x^2 - 25$

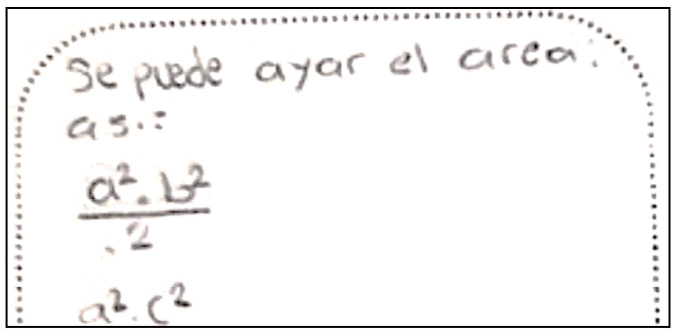
d) $6x^2y + 3xy - 14x - 7$

No lo hemos visto

Ilustración 3-9 evidencia de trabajo de Karen

"no lo hemos visto"

En el punto tres, ver ilustración 3-10, Karen propone una expresión para hallar el área de la figura 3-1.



Se puede ayar el area:

as.:

$\frac{a^2 . b^2}{. 2}$

$a^2 . c^2$

Ilustración 3-10 evidencia de trabajo de Karen

Karen escribe "se puede hallar el área así $\frac{a^2b^2}{2}$ seguido de a^2c^2, al indagarle sobre su respuesta Karen contesta.

"*yo hice lo que se me ocurrió profe… yo no sé*"

Karen, al igual que Cristian, involucra las tres longitudes al intentar determinar el área, como si intuitivamente supiera que las tres longitudes deben estar relacionadas de alguna manera.

En el desarrollo del punto 4 se utilizan expresiones incorrectas para el área del cuadrado y rectángulo, parece ser que Karen estaba interesada en determinar dichas áreas según las operaciones que realizó ver ilustración 3-11 y 3-12.

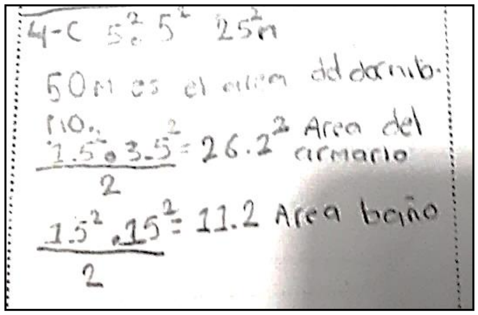


Ilustración 3-11 evidencia de trabajo de Karen

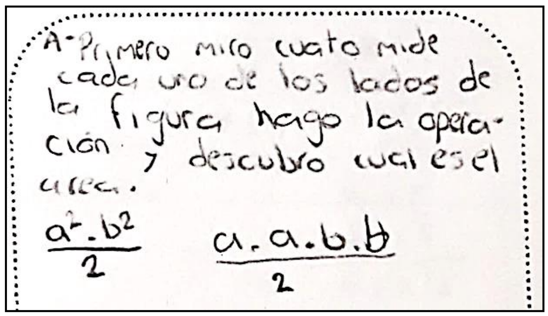


Ilustración 3-12 evidencia de trabajo de Karen

Aunque las fórmulas que utiliza Karen son incorrectas, vale la pena analizar varias particularidades de su respuesta. Aparentemente relaciona el problema del punto tres con el problema del punto cuatro, porque las indeterminadas involucradas en el punto cuatro son x y y y Karen utiliza a y b. Mediante el algoritmo que nos muestra, Karen parece tener idea de "alguna ley de los exponentes para la multiplicación", pues expresa $\frac{a^2b^2}{2}$ como $\frac{a \cdot a \cdot b \cdot b}{2}$, y mediante un "algoritmo" retorico describe cómo solucionar el problema:

> "*Primero miro cuanto mide cada uno de los lados de la figura hago la operación y descubro cual es el área*".

En la ilustración 3-13 Karen muestra que puede determinar longitudes desconocidas a partir de los datos que brinda el problema, pues sabe que el valor de $x = 5m$ y el de $y = 1.5m$ y determina la distancia restante como $3.5m$.

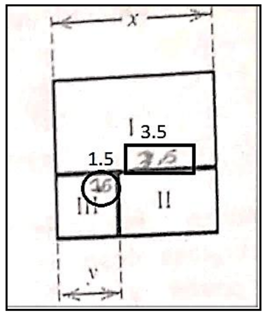


Ilustración 3-13 evidencia de trabajo de Karen

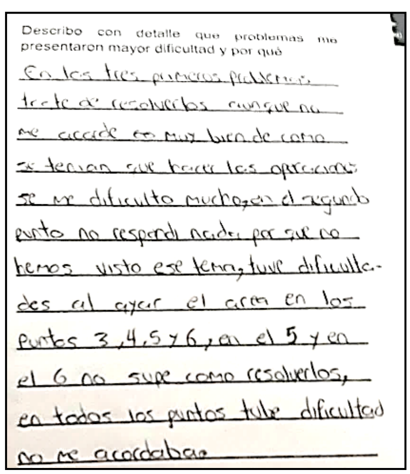
La expresión $\frac{a^2b^2}{2}$ hace pensar que Karen asume que el área de cualquier cuadrilátero se puede hallar mediante esta expresión y que en el punto tres no dividió entre dos porque la figura 3-1 estaba seccionada en dos partes.

A continuación se analizan los procedimientos observados en la ilustración 3-11

> "$5^2 \cdot 5^2 = 25^2m = 50m$ *es el área del dormitorio,* $\frac{1.5^2 \cdot 3.5^2}{2} = 26.2^2$ *área del armario,* $\frac{1.5^2 \cdot 1.5^2}{2} = 11.2$ *área baño"*

Es interesante observar que, aunque existen varios errores de tipo algebraico y aritmético, en este caso Karen propone y desarrolla más procedimientos que en el punto 3, Es posible que en este caso Karen haya sentido más confianza debido a que estaba trabajando con valores numéricos y no con indeterminadas, lo que seguramente la ubica en un terreno familiar y le permite proponer una solución.

Karen no realizó ninguna operación en los puntos 5 y 6. A continuación explica por qué no le fue posible resolverlos.


Describo con detalle que problemas me presentaron mayor dificultad y por qué

En los tres primeros problemas trate de resolverlos aunque no me acorde muy bien de como se tenian que hacer las operaciones se me dificulto mucho, en el segundo punto no respondi nada por que no hemos visto ese tema, tuve dificultades al ayar el area en los puntos 3, 4, 5 y 6, en el 5 y en el 6 no supe como resolverlos, en todos los puntos tube dificultad no me acordaba

Ilustración 3-14 evidencia de trabajo de Karen

> *“En los tres primeros problemas trate de resolverlos, aunque no me acorde muy bien de cómo se tenían que hacer las operaciones se me dificulto mucho. En el segundo punto no respondí nada porque no hemos visto ese tema, tuve dificultades al hallar el área en los puntos 3,4,5 y 6 en el 5 y en el 6 no supe cómo resolverlos, en todos los puntos tuve dificultades,* ***no me acordaba****”*

Prueba 3

Saray

Edad: 15 años

En el ejercicio 1 a) Saray distribuye el producto para el segundo trinomio y parece ser que el -1 que afecta el primer trinomio solo opera para ella en el primer término (como se mencionó anteriormente, un error común que comete Karen también), una vez que aplica la ley distributiva recurre a la disposición vertical de términos para la suma, como muestra la ilustración 3-15, posteriormente reduce “términos semejantes”

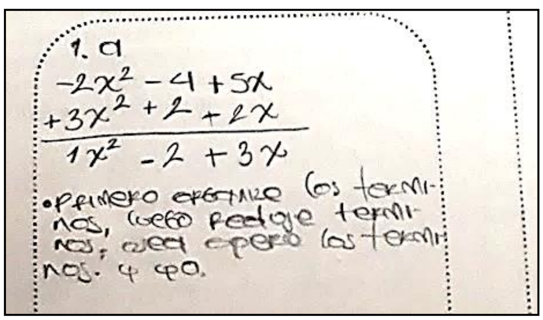


Ilustración 3-15 evidencia de trabajo de Saray

Para explicar sus procesos Saray escribe:

> *“Primero organicé los términos, luego reduje términos, o sea opero los términos y ya”*

Aunque comete algunos errores al “distribuir” -1 en el primer trinomio, Saray muestra un mayor manejo al emplear algoritmos para la suma de polinomios que sus compañeros, esto se evidencia en la forma en la que aplica la propiedad distributiva en el segundo trinomio y en la forma en la que ubica los términos semejantes en la suma vertical, también muestra en este ejercicio que suma o “reduce términos semejantes” de manera correcta.

En el punto 1 b) Saray, al igual que Cristian, ilustra la distribución del producto con respecto a la suma mediante líneas, Saray aplica correctamente “ley de signos”, pero realiza la multiplicación de algunos términos de manera incorrecta y aunque el producto que obtiene es incorrecto, suma o “reduce términos semejantes” de manera correcta.

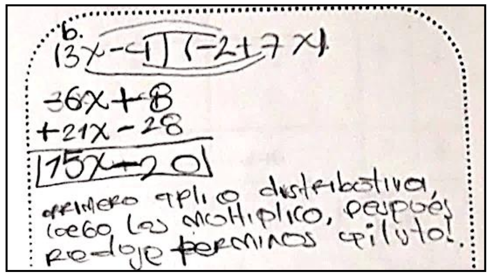


Ilustración 3-16 evidencia de trabajo de Saray

“$(3x-4)(-2+7x)=-6x+8+21x-28=15x-20$ *Primero aplico distributiva, luego los multiplico, después reduje términos y listo”*

Causa curiosidad que Saray afirme que primero “aplica distributiva” y luego “los multiplica”, podría inferirse que para Saray la “distributiva” es decir la distribución de la multiplicación con respecto a la suma es diagramar las líneas que indican que términos se deben multiplicar, y luego multiplica los términos, siendo la “distributiva” y la multiplicación de términos, procesos diferentes para ella.

En la parte 1 c) Saray parece conocer el algoritmo para la división y encuentra el primer término del cociente, pero decide dejar incompleto su procedimiento. Esto se puede ver en la ilustración 3-17.

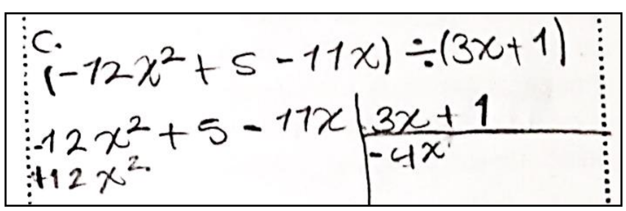


Ilustración 3-17 evidencia de trabajo de Saray

En el problema 3 Saray propone una fórmula para determinar el área de la figura 3-1:

$$\frac{a \cdot b}{2};$$

Y luego señala *“no sé cómo solucionarlo”.* Esto se ve en la ilustración 3-18.

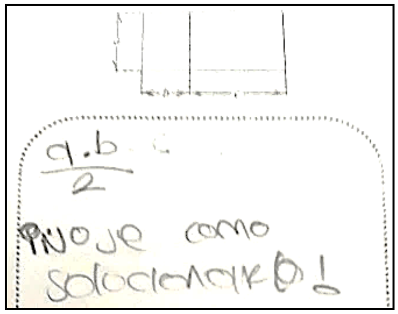


Ilustración 3-18 evidencia de trabajo de Saray

Es curioso ver que en las tres evaluaciones los estudiantes escribieron el área como el producto de dos o tres longitudes sobre dos. Es posible que la fórmula de cualquier área la asocien al área de un triángulo.

En el problema 4 Saray comienza aclarando que no entiende cómo solucionar el problema

> “*no sé cómo hacerlo, no sé cómo sacar el área de esas figuras, pues yo creo que se saca el área del rectángulo y cuadrado”,*

luego intenta determinar el área de las figuras asignado valores a los lados de los rectángulos, como se aprecia en la ilustración 3-19.

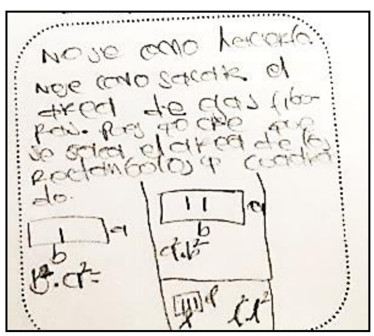


Ilustración 3-19 evidencia de trabajo de Saray

“$área\ 1 = b^2 \cdot a^2, área\ 2 = a^2 \cdot b^2\ y\ \ área\ 3 = l \cdot l = l^2$”

Al igual que Karen, Saray persiste en el empleo de las letras a y b, a pesar de que las longitudes en el problema 4 están representadas por las indeterminadas x y y.

Saray propone una solución para determinar el área de la baldosa en el problema 5, que describe en palabras:

“multiplicar la longitud del rectángulo 4 veces, luego multiplicar la longitud del cuadrado 4 veces luego sumar todo y listo”

Saray parece tener idea de lo que hay que hacer en el problema y tal vez cuando dice longitud realmente se refiere al área. Olvida claramente el cuadrado que está en el centro de la baldosa. Posteriormente propone dividir el área total de la figura entre ocho, porque para Saray, es el número de figuras contenidas en la baldosa, sugiriendo, tal vez, con esta operación que los cuadrados y los rectángulos contenidos en la baldosa tienen la misma área. De esta manera obtiene un valor de $15{,}125$, y asocia este valor con los lados de la figura 3-3, es decir, vuelve a confundir lados con áreas.

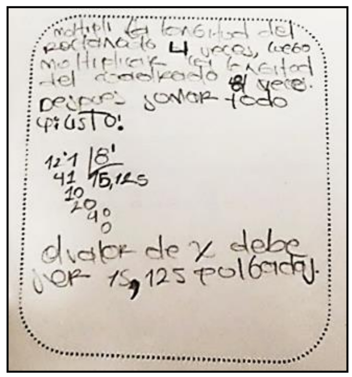


Ilustración 3-20 evidencia de trabajo de Saray

“El valor de x debe ser 15.125 pulgadas”

Para el punto seis Saray describe con palabras los procedimientos que le permitirán solucionar el problema, ver ilustraciones 3-21 y 3-22:

“primero multiplicar cuatro por ocho para sacar el área luego le busqué un valor a 1,2,3 y 4 después de eso, asumí que la respuesta correcta era 3 ya que 1=3, 2=3, 3=1,4=1 entonces sumando eso sería 3+3+1+1 igual a 8”

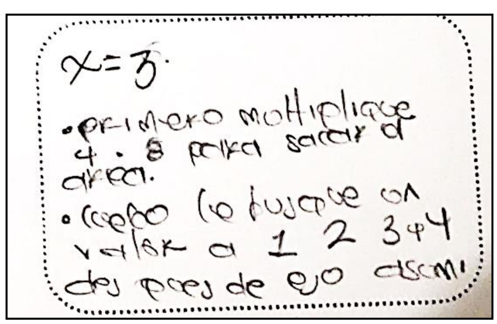


Ilustración 3-21 evidencia de trabajo de Saray

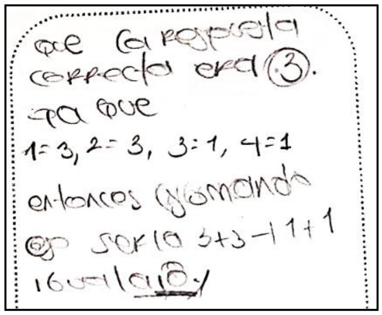


Ilustración 3-22 evidencia de trabajo de Saray

Para Saray, determinar la expresión que representa el área de la maqueta nos es tan importante como determinar el valor de la incógnita x.

Finalmente, Saray señala que tuvo las siguientes dificultades a la hora de resolver la prueba.

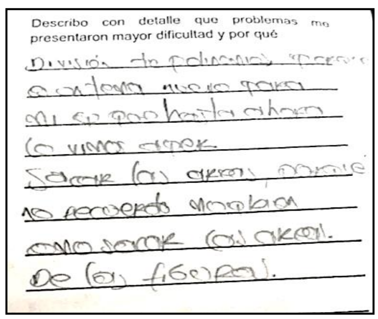


Ilustración 3-23 evidencia de trabajo de Saray

> *“División de polinomios porque es un tema nuevo para mí y que hasta ahora lo vimos ayer. Sacar las áreas porque **no recuerdo muy bien** cómo sacar las áreas de las figuras”*

A pesar de los errores que presentó Saray en la prueba, de los tres estudiantes que la presentaron, es la que demuestra más conocimientos en torno a las operaciones algebraicas. Esto puede deberse a varios factores subjetivos o relacionados con su entorno. Por otra parte, es posible que, al ser mayor que sus compañeros, se encuentre en un estadio de desarrollo cognitivo superior al de sus compañeros.

Los resultados obtenidos en la prueba de entrada permitirán orientar las dinámicas planeadas para que los estudiantes, a través del trabajo en la secuencia, identifiquen y corrijan sus dificultades a la hora de trabajar operaciones con expresiones algebraicas. Permitirán también, a través de la observación, apreciar la evolución de los conceptos algebraicos de los estudiantes a lo largo de toda la secuencia.

Los resultados son interesantes, en la medida en la que existen nociones para la suma, resta, y multiplicación, pero a la vez se desconocen los procedimientos para resolver divisiones, factorizar expresiones algebraicas y resolver problemas de aplicación; lo que eventualmente permitirá llevar a cabo reflexiones del impacto del trabajo desarrollado a lo largo de la secuencia, y si el trabajo desarrollado en esta altera los paradigmas adquiridos en la clase titular (suma, resta y multiplicación) y establece algunos nuevos (división, factorización y resolución de problemas).

3.4 Características de las guías de trabajo y talleres

Las *guías* fueron diseñadas para facilitar a los estudiantes dar el paso de lo concreto a lo abstracto, mediante el registro y la sistematización de los procesos y resultados obtenidos en el trabajo con "la caja de polinomios".

Se conciben como guías, ya que la mayoría de estas no solo recogía los datos, sino que mediante preguntas orientadoras buscaban conducir a los estudiantes a formular conjeturas que les permitieran la obtención de un algoritmo de resolución, para cada operación trabajada en la secuencia, esto es, resolver los ejercicios sin utilizar las fichas.

La dinámica consistía en tomar una cantidad importante de particularizaciones (ejercicios), y mediante preguntas orientadoras observar regularidades, patrones, sistematizar resultados y realizar conjeturas. Estas últimas serían producto de comparaciones entre los hallazgos obtenidos mediante el trabajo con el material concreto "la caja de polinomios" y el resultado que se obtenía a través del trabajo desarrollado en la guía, como lo exponen Mason, Burton y Stacey (1982):

> El proceso de hacer conjeturas depende de que se sea capaz de reconocer una ley o una analogía, o, en otras palabras, de ser capaz de hacer una generalización. Encontrar una ley puede ser en último caso un acto creativo fuera de tu control

> directo, pero, como ocurre con todos los procesos creativos, se puede hacer una gran cantidad de trabajo básico para favorecer la intuición. Una sugerencia obvia es la de hacer muchos ejemplos, puesto que ofrecen más información. (pág. 89)

Se diseñó este tipo de guías pensando en las dificultades que se pueden presentar cuando se espera que los estudiantes, por cuenta propia (sin la ayuda del maestro), resuelvan un problema, determinen regularidades, propongan conjeturas e hipótesis y las comprueben. Proceso extremadamente valioso, pero que requiere de un grado de autonomía elevado y un interés de los estudiantes por enfrentarse y resolver el problema; además de otras habilidades autosuficientes con las que estudiantes de esta edad, por lo general, no cuentan. Las guías buscaban también mantener los niveles de frustración por debajo del límite de tolerancia de los estudiantes. De esta manera fueron diseñadas para favorecer una serie de logros personales, ganar experiencia, autorregulación y habilidades de autogestión mediante la práctica. Están apoyadas en *modelos* particularmente: “la caja de polinomios” y las representaciones pictóricas. Según el MEN (2017) “Un modelo puede entenderse como un sistema figurativo mental, gráfico o tridimensional que reproduce o representa la realidad en forma esquemática para hacerla más comprensible” (pág. 52). El uso de estos y la oportuna orientación del maestro pueden reducir el impacto de la falta de habilidades de autorregulación y el efecto de los factores externos y emocionales que dificultan el aprendizaje:

> En una situación problema, la modelación permite decidir qué variables y relaciones entre variables son importantes, lo que posibilita establecer modelos matemáticos de distintos niveles de complejidad, a partir de los cuales se pueden hacer predicciones, utilizar procedimientos numéricos, obtener resultados y verificar qué tan razonable son éstos respecto a las condiciones iniciales. (MEN, 2017, pág. 56)

Las dinámicas de trabajo fueron casi las mismas durante todas las sesiones. Se ejemplificaban las *reglas de juego* de la caja de polinomios para la operación que se trabajaba en la sesión. Luego, se entregaba la guía de trabajo, los estudiantes resolvían todos los ejercicios (particularizaciones) con la caja de polinomios y de manera simultánea registraban los procesos y los resultados que obtenían mediante dibujos y lenguaje algebraico en la guía. Por último, sistematizaban los resultados y a partir de preguntas orientadoras establecían relaciones entre las respuestas logradas con la caja de polinomios y los insumos que arrojaban las preguntas orientadoras, estas relaciones debían ser presentadas como conjeturas propias a partir del trabajo realizado por el estudiante y sus compañeros. Esta manera de lograr conocimientos algebraicos se conoce como método inductivo en su forma más básica:

> En la inducción de propiedades matemáticas trataríamos primeramente de encontrar una regularidad entre ciertos objetos matemáticos, de forma que buscando similaridades entre estos, podemos pasar a un nivel de abstracción, por último, que nos permita generalizar la regularidad encontrada para particularizar a casos específicos a modo de comprobación de la validez de lo conjeturado. Es importante generalizar expresiones y entender su significado. (Socas, Camacho, Palarea, & Hernandez, 1996, pág. 152)

De esta manera se buscaba llegar a proponer el algoritmo que les permitía solucionar cualquier ejercicio similar, sin la necesidad de utilizar el material concreto.

Los ejercicios contenidos en las guías no fueron escogidos al azar, fueron casos particulares de un problema más general (proponer algoritmos para resolver OPPSI), teniendo en cuenta a Mason, Burton y Stacey (1982), las particularizaciones en este caso consistían "en concentrar la atención en algunos ejemplos para entender mejor el significado de la pregunta. Los ejemplos que eliges son especiales, en el sentido de que son casos particulares de una situación más general que se plantea en la pregunta" (Mason, Burton, & Stacey, 1982, pág. 21).
Por otro lado, en los talleres se trabajaron una serie de ejercicios que dieran cuenta de qué tan efectivo había sido el algoritmo propuesto.

De esta manera, se diferencian seis etapas en el trabajo que desarrollaran los estudiantes en cada sesión:

1. Trabajo con la caja de polinomios (concreto).
2. Registro pictórico del trabajo realizado con la caja de polinomios.
3. Registro mediante el lenguaje simbólico algebraico de las respuestas obtenidas con la caja de polinomios.

4. Sistematización de las respuestas obtenidas con la caja de polinomios.
5. Conjeturas, formulación de un algoritmo de resolución y
6. Resolución de ejercicios particulares (talleres) para poner a prueba el algoritmo.

Estas seis etapas se verán en cada una de las sesiones de trabajo.

3.5 Introducción a la caja de polinomios.

El análisis de los resultados mostró que los estudiantes, con los que se iba a llevar a cabo la secuencia, tenían algunos vacíos conceptuales relacionados con las operaciones básicas entre números enteros y sus propiedades. Para cumplir los objetivos del trabajo fue necesario fortalecer los conceptos relacionados con las operaciones básicas mencionadas anteriormente.

Se optó por iniciar la secuencia trabajando operaciones con números enteros a partir del uso parcial de la “caja de polinomios”. Así, se introducirá el material en un contexto más familiar para los estudiantes (operaciones aritméticas con enteros).

El material empleado para esta parte de la secuencia constaba del plano cartesiano y fichas cuadradas que representaban una unidad. Antes de explicar en qué consiste la caja de polinomios y cómo se trabajan las OPPSI con ella, se describe el trabajo realizado para fortalecer las operaciones con números enteros en los estudiantes, y los resultados obtenidos.

Teniendo en cuenta que la caja de polinomios es un material lúdico-didáctico, se mencionó durante todas las sesiones de la secuencia que, para poder “jugar” con el material se debían tener en cuenta algunas reglas, o ideas básicas, que se señalan a continuación.

Reglas o ideas básicas.

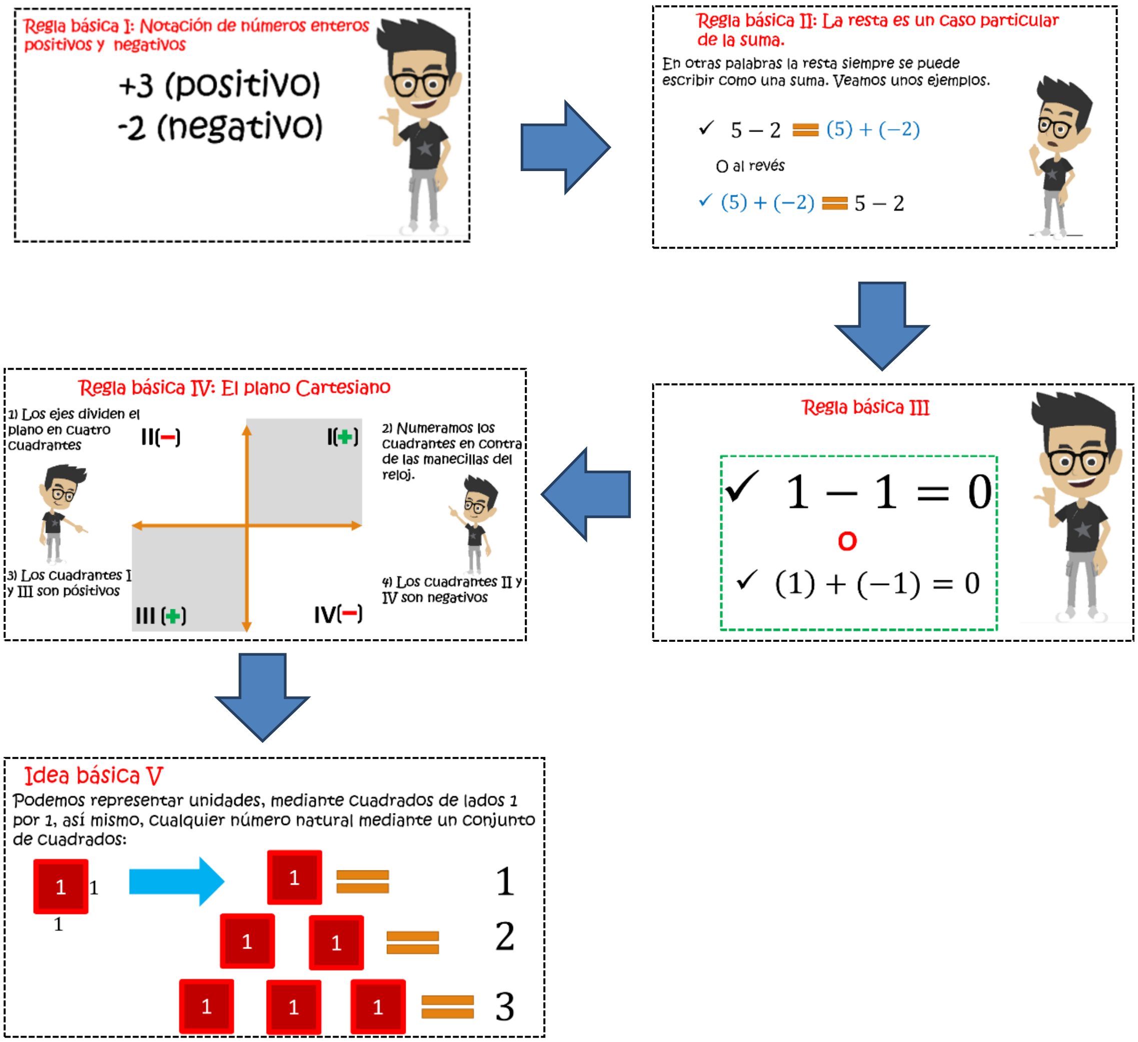


Ilustración 3-24 Ideas básicas para la suma de números enteros a partir de material concreto

Luego se llevaron a cabo algunos ejemplos que tenían doble intencionalidad: que los estudiantes manipularan el material y que se relacionaran con las reglas de juego. Se muestra continuación el ejemplo trabajado en clase.

Ejemplo

Resolver $(\mathbf{2}-\mathbf{5})+(-\mathbf{4}+\mathbf{5})$

Aplicando la regla básica II

$$(\mathbf{2}-\mathbf{5})+(-\mathbf{4}+\mathbf{5})=[(\mathbf{2})+(-\mathbf{5})]+[(-\mathbf{4})+(\mathbf{5})]$$

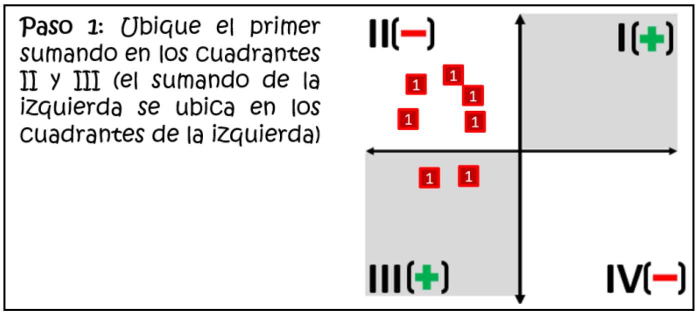


Ilustración 3-25 pasos para la suma de números enteros

Las cinco unidades negativas se ubican en el cuadrante II, ya que las fichas contenidas en este cuadrante se les asigna el signo negativo, de igual forma las dos unidades positivas se ubican en el tercer cuadrante. Se hace lo mismo con el segundo sumando en los cuadrantes I y IV.

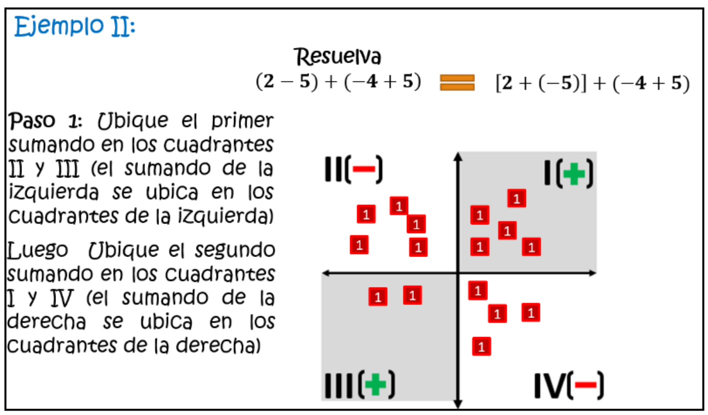


Ilustración 3-26 pasos para la suma de números enteros

Las unidades que están en los cuadrantes II y III se cancelan entre sí por ser opuestos aditivos, de manera similar las unidades que están en los cuadrantes I y IV.

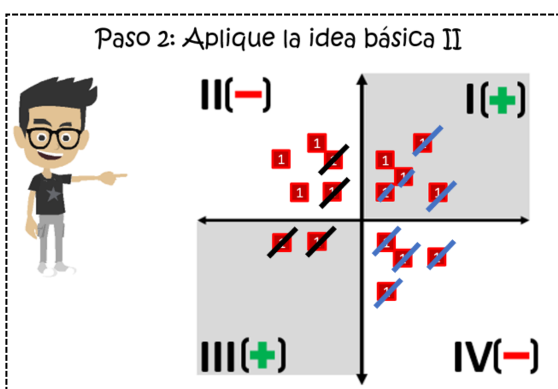


Ilustración 3-27 pasos para la suma de números enteros

Quedando:

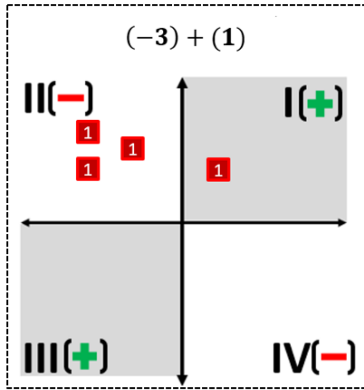


Ilustración 3-28 pasos para la suma de números enteros

Se aplica nuevamente la regla básica III, esta vez en los cuadrantes II y I:

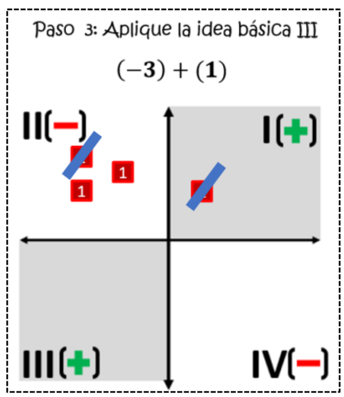


Ilustración 3-29 pasos para la suma de números enteros

De esta manera se obtiene:

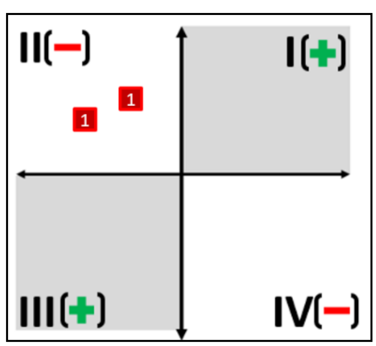


Ilustración 3-30 pasos para la suma de números enteros

Vale la pena señalar que durante el trabajo realizado con el material concreto los estudiantes registraban cada “paso” de dos maneras; mediante representaciones pictóricas y mediante lenguaje simbólico. Al final de cada ejercicio se retomaban los resultados escritos de manera simbólica, para que los estudiantes observaran patrones o regularidades que les permitieran recordar los procesos trabajados de las clases de matemáticas a lo largo de su vida escolar, o proponer, a partir del uso del material, conjeturas para realizar sumas de números enteros sin ayuda del material.

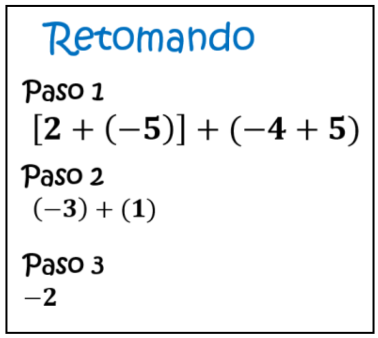


Ilustración 3-31 representación aritmética

Luego de la etapa de exploración se pasó al trabajo grupal y los estudiantes se dispusieron a realizar la primera actividad.

La actividad fue realizada en grupos de cuatro estudiantes, consistía en varios ejercicios de sumas de enteros que se debían desarrollar con el material. El trabajo desarrollado en la primera actividad tenía varios fines, entre los que se encontraban: mitigar errores en la suma de números enteros, desarrollar destrezas y agilidad al emplear el material para realizar cálculos aritméticos y que los estudiantes empezaran a realizar conjeturas al observar regularidades y patrones en sus resultados. El problema en esta actividad consistía proponer una conjetura que permitiera sumar dos números enteros de manera correcta.

A continuación, se muestran algunos resultados.

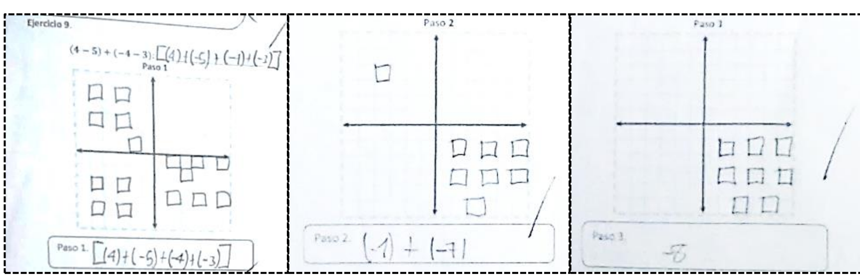


Ilustración 3-32 Resultados guía suma de enteros

La ilustración 3-32 y 3-33 muestran las operaciones escritas de manera simbólica.

$$[(\mathbf{4}) + (-\mathbf{5}) + (-\mathbf{4}) + (-\mathbf{3})]$$

$$= (-\mathbf{1}) + (-\mathbf{7})$$
$$= -\mathbf{8}$$

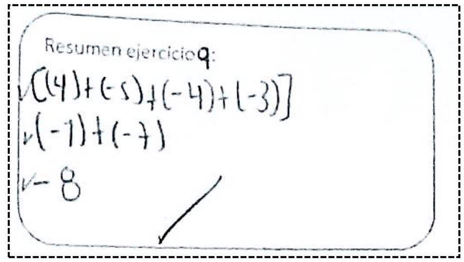


Ilustración 3-33 Resultados guía suma de enteros

Este grupo desarrollo a plenitud todos los ejercicios, pero cometió un error en el ejercicio 8, que se aprecia en la ilustración 3-34.

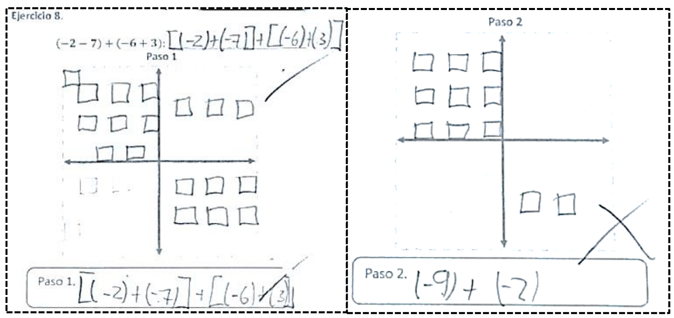


Ilustración 3-34 Resultados guía suma de enteros

Al final de los ejercicios se pidió a los estudiantes que propusieran una conjetura para sumar números enteros sin el uso de las fichas. A continuación, se muestran las respuestas de los dos grupos.

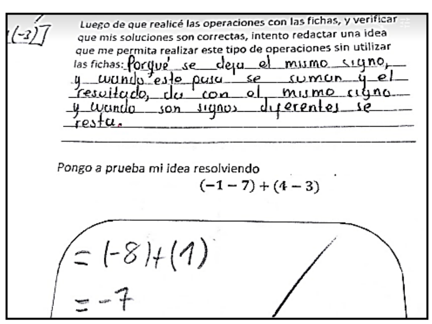
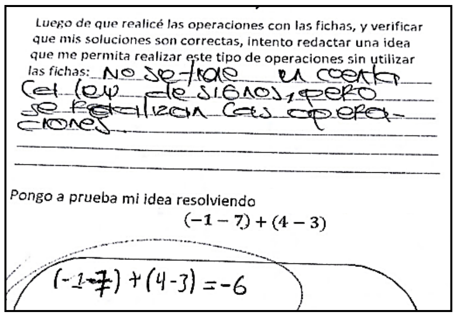


Ilustración 3-35 Resultados guía suma de enteros

> *"porque se deja el mismo signo y cuando esto pasa se suman y el resultado, da con el mismo signo y cuando son signos diferentes se resta"*

Lo que seguramente quieren decir los estudiantes es: “*si tienen el mismo signo se suman y se deja el mismo signo* (el signo no se altera), *cuando son signos diferentes se resta*”

El grupo dos no comete errores durante los ejercicios con el material concreto, pero si lo hacen al realizar el último ejercicio.


Luego de que realicé las operaciones con las fichas, y verificar que mis soluciones son correctas, intento redactar una idea que me permita realizar este tipo de operaciones sin utilizar las fichas:

Pongo a prueba mi idea resolviendo

$(-1-7)+(4-3)$

$(-1-7)+(4-3)=-6$

Ilustración 3-36 Resultados guía suma de enteros

“no se tiene en cuenta la ley de signos, pero se realizan las operaciones”

A pesar que la conjetura del grupo dos no es clara y no da información detallada de cómo se deberían sumar dos números enteros, se puede interpretar algo positivo cuando escriben *“no se tiene en cuenta la ley de signos”*, esto podría decir que entienden que en la suma de enteros no se multiplican los signos de los números, que en la experiencia de enseñanza-aprendizaje de números enteros, tiende a ser un error común.

Muchos de los estudiantes que se aprenden de memoria la “ley de signos para la multiplicación” presentan dificultades al resolver un ejercicio sencillo como: $-3+5$. Cuando se les indaga por el resultado de la operación tienden a decir que la respuesta es -2 , y si se les pregunta por qué la respuesta es -2, la mayoría tiende a contestar “*porque menos por más es menos”*. Por eso, a pesar de que la conjetura no es profunda, no se puede ignorar lo que se interpreta en la idea pues, le asigna cierto potencial al material para para reducir el error mencionado anteriormente.

El último ejercicio en ambos casos fue realizado sin ayuda de las fichas y empleando la conjetura propuesta por el grupo.

La forma plana de presentar la conjetura, para resolver sumas de números enteros sin el material por ambos grupos, puede tener varias causas: desinterés o falta de compromiso, el hecho de trabajar con un gran volumen de estudiantes a los que es muy difícil hacerles un acompañamiento personalizado y/o el hecho de que la única motivación es el gusto por aprender. Será muy interesante observar cómo los participantes con los que se finaliza la investigación evolucionan a lo largo de la secuencia en la elaboración y redacción de conjeturas.

3.6 Suma y resta de polinomios con la "caja de polinomios"

Antes que los estudiantes manipularan el material, se hizo una clase corta buscando que los estudiantes entendieran cómo se forman cada una de las fichas con las que iba a trabajar.

También, se extendieron algunas de las reglas, o ideas básicas, a expresiones generales. Por ejemplo, la ilustración 3-37 muestra cómo se "generalizó" la idea básica I.

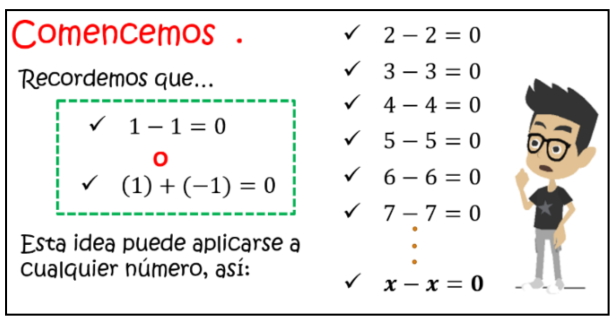


Ilustración 3-37 ideas básicas para entender cómo operar con el material

A continuación, se muestra la representación de la letra o indeterminada x. Estas "fichas", como le fueron presentadas los estudiantes, fueron diseñadas con colores en los bordes lo cual cumple un fin más que estético (se ahondará en el significado de los colores de los bordes, cuando se trabaje factorización y multiplicación), a cada lado rojo se le asigna el valor de una unidad, esto se puede observar en la ficha cuadrada 1 y también en la ficha rectangular x.

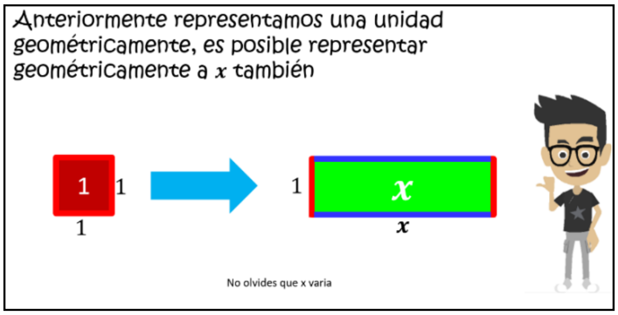


Ilustración 3-38 ideas básicas para entender cómo operar con el material

Se extendió la idea básica I a la resta de los cuadrados de los números naturales y luego se “generalizó”.

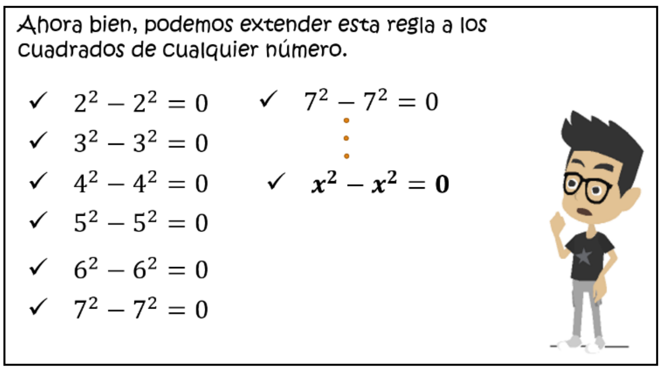


Ilustración 3-39 ideas básicas para entender cómo operar con el material

Nuevamente se asocia un valor a los lados de las fichas, en este caso la longitud del rectángulo es la indeterminada x, representada por el lado azul, y utilizando este lado se construye una ficha cuadrada también de lados x como se observa en la ilustración 3-40.

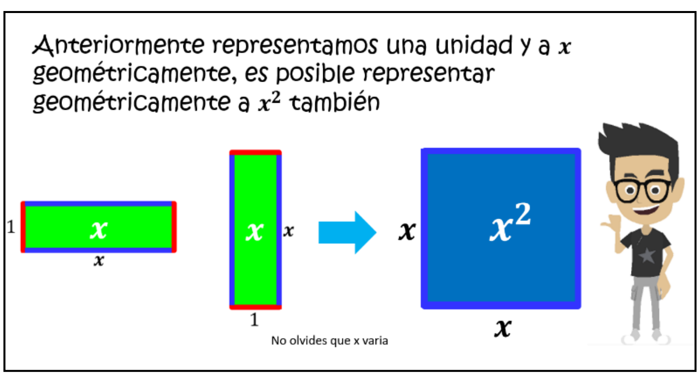


Ilustración 3-40 ideas básicas para entender cómo operar con el material

De esta manera, mediante las fichas se representa geométricamente la unidad, la indeterminada x y la indeterminada al cuadrado x^2. Es importante observar que también mediante los *lados* de las fichas se representan *longitudes*. En este caso, la *unidad* está representada por el lado de color rojo, tanto en la ficha roja (1), como en la ficha verde (x). Y la longitud x es representada por el lado de color azul en las fichas de color verde (x) y azul (x^2).

Por esto se debe ser cuidadoso cuando se hable de la unidad 1, o de la indeterminada x, ya que pueden representar el valor de una ficha o el lado de una ficha. Esto último debe ser interpretado según la operación que se trabaje. De la misma manera deberá ser orientado por el maestro y lo observaremos más adelante en la multiplicación, factorización y división. De momento, en la suma y la resta se trabajará con los valores de las fichas $(1, x\,, x^2)$.

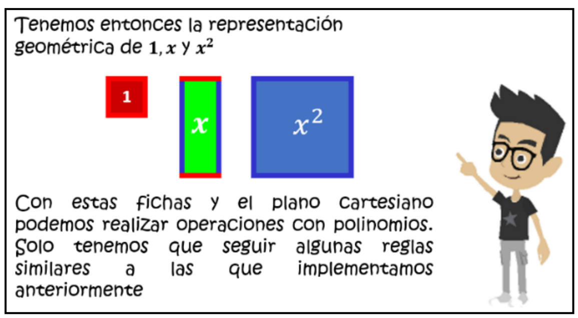


Ilustración 3-41 ideas básicas para entender cómo operar con el material

En las siguientes ilustraciones se muestra un ejemplo trabajado en clase. Es importante señalar que antes de resolver los ejemplos, se pedía a los estudiantes que propusieran una solución al mismo.

Se ubican los polinomios en los cuadrantes del plano cartesiano, cada término del polinomio está representado por un determinado número de fichas y el signo es designado por el cuadrante en el que se ubican las fichas. El primer sumando se ubica en los cuadrantes de la izquierda del eje vertical, cuadrantes II y III.

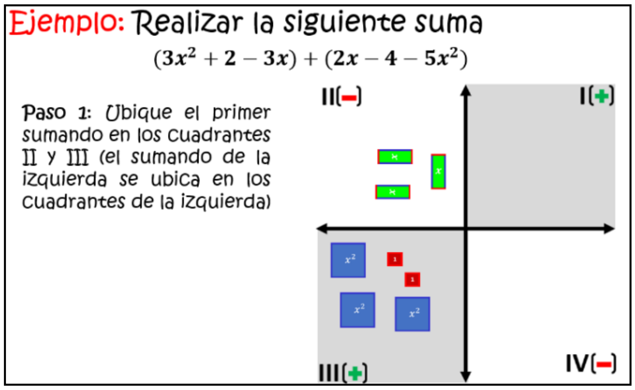


Ilustración 3-42 suma de polinomios mediante el uso del material

El segundo sumando se ubica en los cuadrantes de la derecha del eje vertical, cuadrantes I y IV.

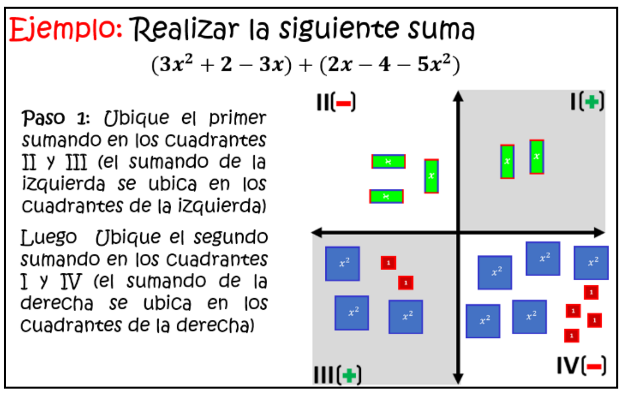


Ilustración 3-43 suma de polinomios mediante el uso del material

Se cancelan opuestos aditivos en los cuadrantes I y II, así como en los cuadrantes III y IV.

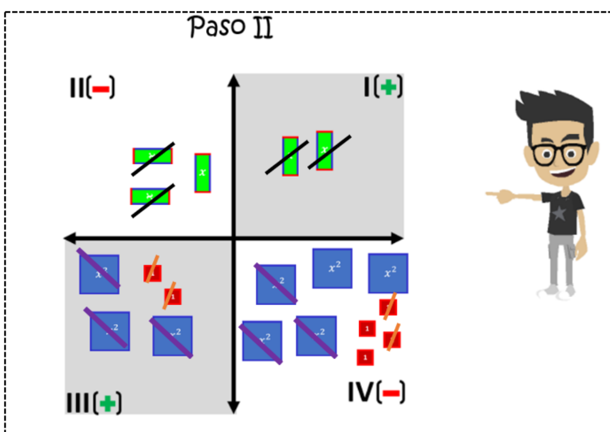


Ilustración 3-44 suma de polinomios mediante el uso del material

Se realizan las traducciones del resultado que arroja la caja de polinomios al lenguaje simbólico algebraico y se organiza el resultado en orden descendente, esto se hace visible para el estudiante cuando se le pide que escriba la respuesta organizando los términos de su respuesta según el tamaño de las fichas, yendo de mayor a menor tamaño. De esta manera se organizaban primero las fichas azules y de último las fichas rojas.

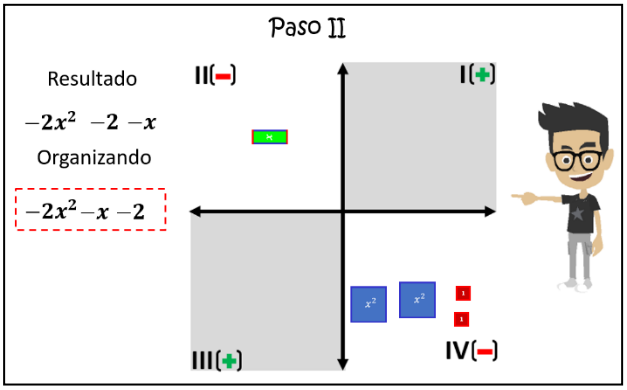


Ilustración 3-45 suma de polinomios mediante el uso del material

Los siguientes videos muestran los procesos realizados por los estudiantes en esta sesión:

Video 1

https://youtu.be/OM01SMfmgc4

Video 2

https://youtu.be/0Vbg4M82Pc0

El primer video muestra como William organiza los polinomios para realizar una suma de polinomios y el segundo muestra a una pareja de estudiantes resolviendo la suma

$$(3 - 4x - 5x^2) + (-5 + 2x + 5x^2);$$

mediante el uso del material.

En la ilustración 3-46 se muestra un registro fotográfico del trabajo que realizaron los estudiantes durante esta sesión.

Ilustración 3-46 registro del trabajo de los estudiantes

En el análisis de los resultados y en los momentos de observación en el aula se prestó mucha atención a los errores en los diferentes procesos, con el fin de entender sus orígenes y establecer estrategias de acompañamiento que permitieran mitigarlos:

> El análisis de errores, como ya hemos indicado, tiene un doble interés: de una parte, sirve para ayudar a los profesores a conducir mejor la enseñanza-aprendizaje del álgebra, insistiendo en aquellos aspectos en los que los alumnos cometen errores, y de otra, contribuye a una mejor preparación de estrategias para la corrección de los mismos. (Socas, Camacho, Palarea, & Hernandez, 1996, pág. 109)

A lo largo del trabajo de David por ejemplo, se presentaron algunos errores, que por el momento, se relacionan a dificultades asociadas a la concentración y la atención, en la ilustración 3-47, se observa el proceso de resolución para la suma.

$$(-x^2 - 4x - 8) + (4 + 4x^2 + 7x)$$

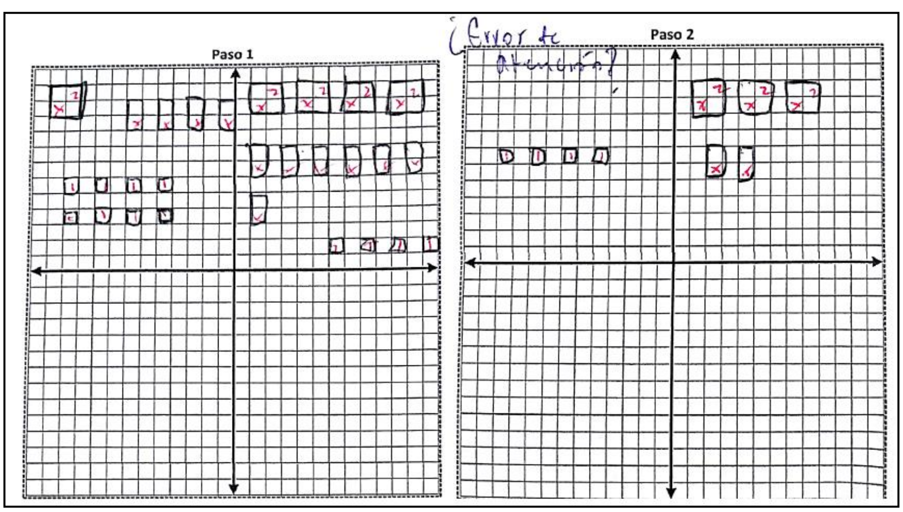


Ilustración 3-47 representación pictórica de los procesos de David

En el paso 1 se aprecia que David organiza de manera correcta las fichas en el plano cartesiano, se equivoca al *reducir* en la representación pictórica y también lo hace en la traducción al lenguaje algebraico, esto se aprecia en la ilustración 3-48.

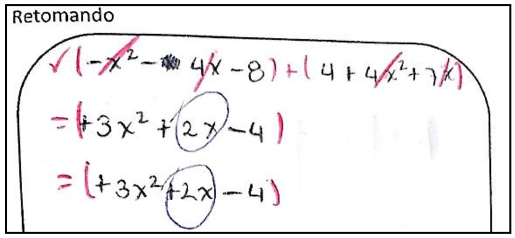


Ilustración 3-48 representación simbólica de los procesos de David

Luego, en el ejercicio 6

$$(-2x - 2 - 3x^2) + (-5 - 4x + 5x^2);$$

comete un error similar, este se aprecia en la ilustración 3-49.

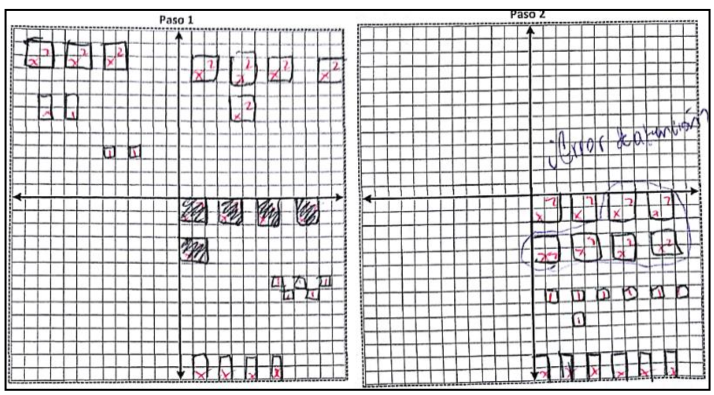


Ilustración 3-49 representación pictórica de los procesos de David

David dibuja cinco fichas tipo x^2, luego las tacha (corrigiendo su error), y finalmente las presenta en su respuesta final (cae nuevamente en el error). Sin embargo, cuando escribe el resultado en el lenguaje algebraico no comete errores. Razón por la cual se mantiene la hipótesis de que el error que comete David se debe más a un error de concentración al momento de realizar los dibujos.

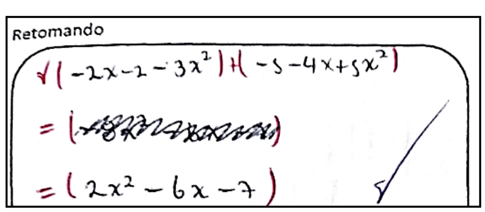


Ilustración 3-50 representación simbólica de los procesos de David

David resuelve de manera correcta el resto de los ejercicios, aunque no propone un algoritmo para realizar la suma de polinomios sin el uso de las fichas, ilustración 3-51.

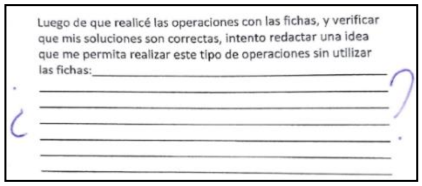


Ilustración 3-51 conjetura para la suma de polinomios de grado dos

Parece extender lo que ha aprendido o reaprendido hasta el momento, pues resuelve cuatro ejercicios de manera correcta, su procedimiento y forma de operar se muestran en la ilustración 3-52.

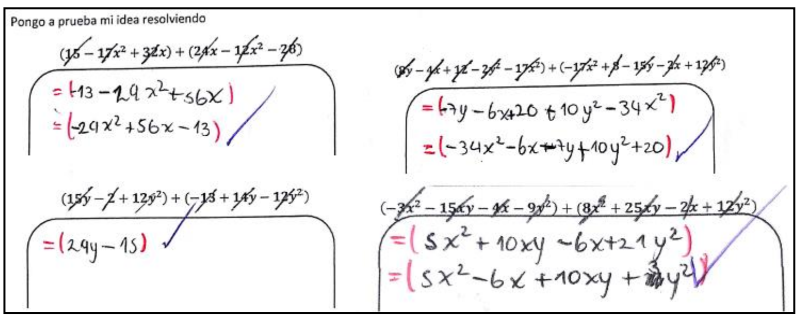


Ilustración 3-52 procesos de David para la suma de polinomios

Las siguientes imágenes presentan las propuestas de Saray, Karen y Cristian para realizar las operaciones sin las fichas.

Cristian no cometió errores a lo largo de los ejercicios, y plantea una conjetura algo elaborada de como sumar polinomios utilizando el material, pero por alguna razón no resuelve el último ejercicio de la profundización.

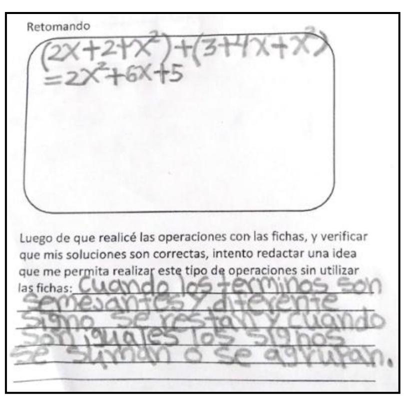


Ilustración 3-53 conjetura de Cristian para la suma de polinomios de grado dos

"*Cuando los términos son semejantes y diferente signo se restan, y cuando son iguales los signos se suman y se agrupan*"

Se observa una coherencia entre la conjetura que propone Cristian y la resolución de los ejercicios de profundización, cuya solución se aprecia en la ilustración 3-54. Si se toma como referencia las ideas de Mason, Burton y Stacey (1982). Cristian con su conjetura se podría estar acercando al proceso de generalización "El proceso de generalización comienza en cuanto intuyes un cierto esquema general subyacente, aunque todavía no puedes expresarlo claramente" (Mason, Burton, & Stacey, 1982, pág. 21).

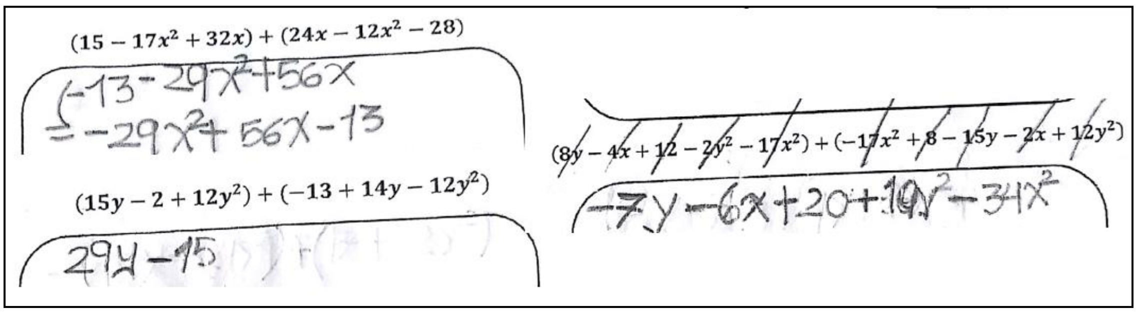


Ilustración 3-54 procesos de Cristian para la suma de polinomios

Karen cometió errores en el proceso de resolución de dos ejercicios; en la Ilustración 3-55 se observa la propuesta de Karen para sumar polinomios sin las fichas.

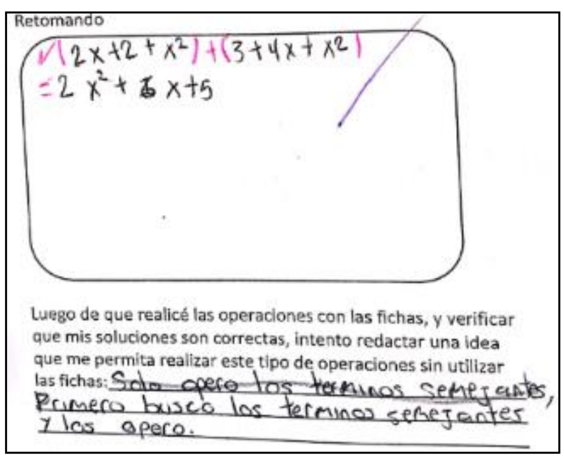


Ilustración 3-55 conjetura de Karen para la suma de polinomios

"*Primero busco los términos semejantes y los opero*"

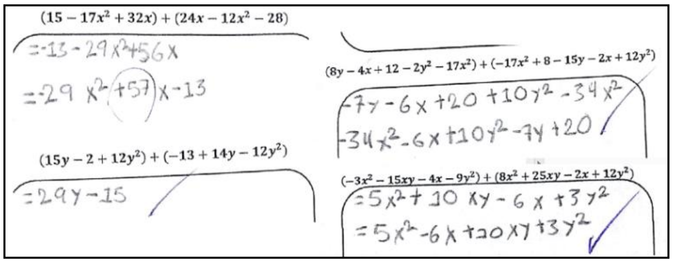


Ilustración 3-56 procesos de Karen para la suma de polinomios

Saray se equivocó al resolver dos ejercicios de la guía, y comete un error de *concentración* en uno de los ejercicios de profundización. Las ilustraciones 3-57 y 3-58 muestran la propuesta de Saray para la suma de polinomios y el proceso de resolución para la suma de polinomios respectivamente.

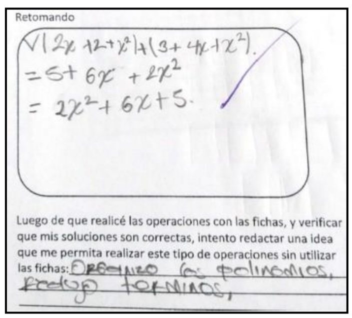


Ilustración 3-57 Conjetura de Saray para la suma de polinomios

"*Organizo los polinomios, redujo términos*"

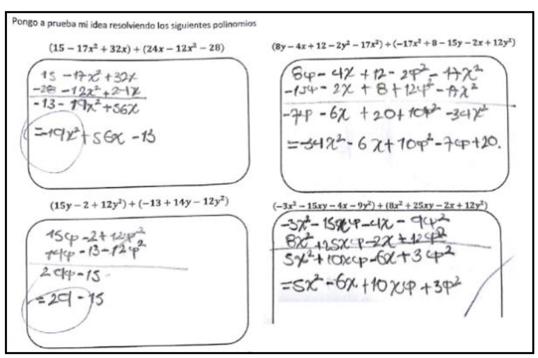


Ilustración 3-58 procesos de Saray para la suma de polinomios

Tanto Karen como Saray proponen conjeturas que carecen de profundidad, mostrando poco interés o importancia a esta parte de la guía, al igual que David, quien no realizó registros escritos de conjeturas. A pesar de que estos resultados sean poco alentadores, se debe tener presente que el aprendizaje es un proceso que se da bajo condiciones emocionales propicias, los estados emocionales favorables que tengan los estudiantes hacia el trabajo en el aula, las actitudes positivas hacia los modelos que se empleen y las diversas motivaciones que se presenten a lo largo de este proceso, tomarán tiempo en aparecer. Por el momento, y seguramente durante las primeras sesiones, se contará únicamente con la disposición que presentan la mayoría de los estudiantes de esta edad, quienes tienden a presentar una respuesta rápida y poco detallada cuando se les pide describir su trabajo:

> Esto es lo que suele pasarles a los niños en la escuela, que quieren acabar cuanto antes y con las mínimas molestias posibles. Apenas se leen los problemas, no entran de lleno en ellos, y así no hay ocasión de que se produzcan la menor chispa de interés. No es de extrañar, pues, que surjan dificultades. (Mason, Burton, & Stacey, 1982, pág. 131)

Causa bastante curiosidad la forma en la que Saray organiza los términos para la suma en los ejercicios de profundización, a diferencia de sus compañeros, Saray dispone los términos de forma vertical para realizar la suma de polinomios, mientras que Karen, Cristian y David suman los términos de manera horizontal, influenciados posiblemente por los ejemplos trabajados en clase. De esta manera adoptan un nuevo paradigma para efectuar una suma de polinomios, mientras Saray parece no modificar el que adquirió en su clase titular de álgebra.

Si se vuelve a la preevaluación y se piensa en los errores que se cometieron al realizar las sumas de polinomios, como por ejemplo en el trabajo de Karen, quien suma los exponentes de las indeterminadas $2x^2 + 3x^2 = x^4$, es claro que en este punto existía una necesidad de reducir de alguna forma las constantes (o coeficientes y exponentes). Este error es bastante común en los estudiantes que se encuentran en la transición del pensamiento aritmético al algebraico, ya que, para un estudiante de la edad de Karen, una operación cobra sentido únicamente cuando esta conduce a un resultado único. En la terminología de Collis, citado por Socas *et al* (1996), se conoce como *pensamiento de clausura*. Este pensamiento se da en el estadio temprano de operaciones concretas, donde operaciones como $3 + 5$ tienen sentido para el niño siempre y cuando la operación se presente como un resultado único $3 + 5 = 8$. Para Matz, citado también por Socas *et al* (1996) refleja una situación derivada de la aritmética, motivada por *dar una respuesta bien dada*. Otro ejemplo, muy común en las aulas de matemáticas, se observaría en la forma en la que los estudiantes promedio presentan la suma $7a + 10b$. Alimentados por su *pensamiento de clausura* la mayoría de los estudiantes tienden simplificar esta suma como $7a + 10b = 17ab$ (Socas, Camacho, Palarea, & Hernandez, 1996)

Se evidenció, y se evidenciará a lo largo de la secuencia, que el material atenúa dichos errores, tanto en los ejercicios que se realizaron con la caja de polinomios. como en los ejercicios de profundización (ver los procesos de los estudiantes en la suma de polinomios). La razón es simple, al visualizar los términos como objetos concretos (fichas) para los estudiantes es fácil entender por qué no es posible "reducir" fichas tipo x^2con fichas tipo x, a pesar de que estas se encuentren en el mismo cuadrante. Esto los lleva a que solo es posible reducir aquellas fichas que son del mismo tipo.

En el trabajo de aula se utilizaron las palabras *fichas semejantes,* que inmediatamente trajeron a la memoria de los estudiantes las palabras *términos semejantes* (utilizadas por los estudiantes en sus explicaciones), trabajadas en la clase titular. Cuando los estudiantes realizaron ejercicios de sumas y restas de polinomios que contenían diferentes indeterminadas, se les pidió que imaginaran nuevas fichas que llevaban por nombre la indeterminada trabajada en dichos ejercicios.

Cabe mencionar que se siente el peso de tratar de acompañar en sus procesos de manera personalizada a veinticinco estudiantes, esta puede ser una de las razones por la que se filtraron errores en los trabajos de los estudiantes. Que tal vez, con el debido acompañamiento, se pudieron haber evitado.

3.7 Resta de polinomios de primer y segundo grado mediante el empleo de la caja de polinomios.

Durante la sesión 3 se trabajó la resta de polinomios con la caja de polinomios. De la misma manera que con la suma, se realizó un ejemplo buscando relacionar a los estudiantes con las reglas de *juego* para la resta de polinomios. En las ilustraciones 3-59 a la 3-64 se muestra el ejemplo que se trabajó con los estudiantes.
La ubicación de las fichas sigue las mismas dinámicas que en la suma.

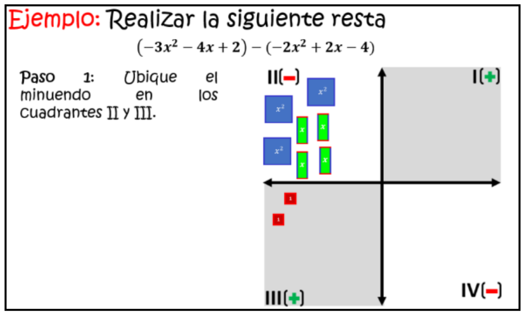


Ilustración 3-59 resta de polinomios mediante el uso del material

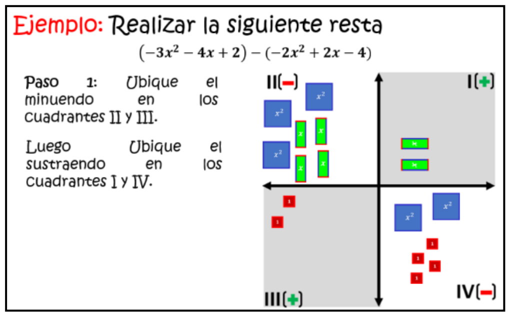


Ilustración 3-60 resta de polinomios mediante el uso del material

La ilustración 3-61 muestra lo que sucede cuando el signo menos afecta a un polinomio, los términos del polinomio que están contenidos en los cuadrantes I y IV pasan a los cuadrantes II y III respectivamente, de esta manera se puede representar de manera concreta el efecto que tiene el signo menos sobre un polinomio.

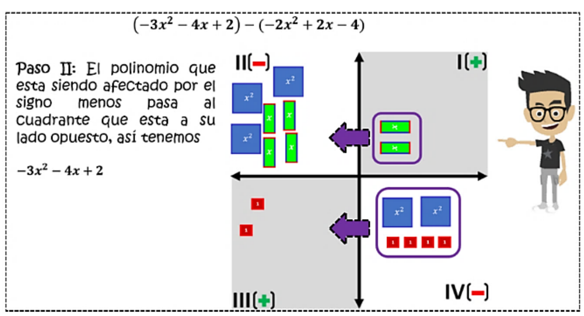


Ilustración 3-61 resta de polinomios mediante el uso del material

Una vez se trasladan los términos, estos se reescriben (utilizando el lenguaje simbólico algebraico) teniendo en cuenta los signos de los cuadrantes en los que quedan contenidos, en este caso los cuadrantes II y III.

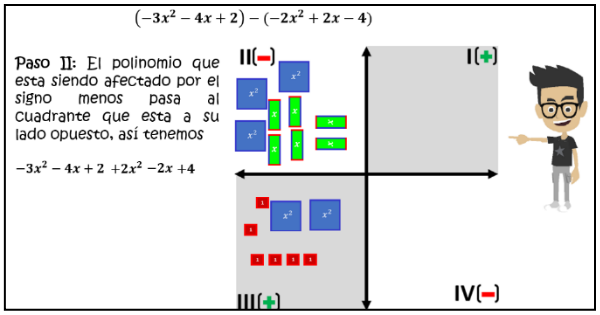


Ilustración 3-62 resta de polinomios mediante el uso del material

Luego, se cancelan opuestos aditivos en los cuadrantes II y III y se reducen los términos que quedan en el mismo cuadrante, como lo muestran las ilustraciones 3-63 y 3-64.

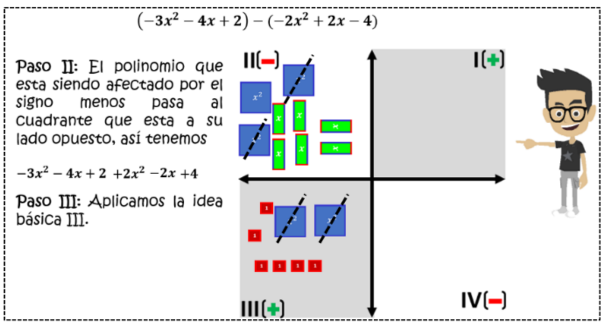


Ilustración 3-63 resta de polinomios mediante el uso del material

Por último, se expresa el resultado utilizando el lenguaje algebraico.

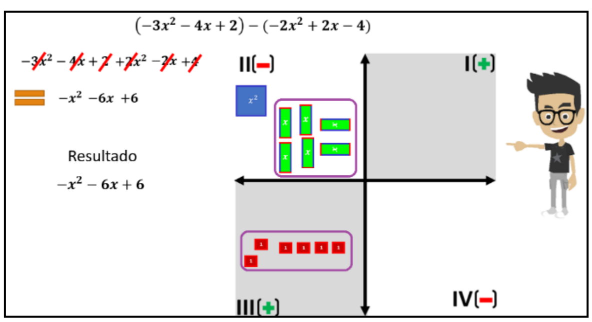


Ilustración 3-64 resta de polinomios mediante el uso del material

En seguida se analizan las particularidades de los procesos de resolución de los estudiantes.

De los cuatro estudiantes, Silvana fue la única que involucró en su proceso de resolución las seis etapas de trabajo (resolución con material concreto, registro pictórico, registro con lenguaje algebraico simbólico, sistematización de las respuestas obtenidas, formulación de un algoritmo de solución y puesta a prueba del algoritmo). Sin embargo, esto no fue suficiente para evitar que se presentaran errores similares a los que se presentan cuando se trabaja de manera convencional.

Aunque, en la observación en clase, no se percibieron inconvenientes en la primera etapa, es decir, cuando se solucionaron ejercicios con el material concreto, en las otras cinco etapas se presentaron una cantidad considerable de errores, que no pueden ser ignorados. Se analizan los resultados y luego se pensará en las posibles causas de los errores.

En la ilustración 3-65 vemos como Karen intenta solucionar la resta:

$$(-x + 2 - 4x^2) - (-4 - 2x - 2x^2);$$

sin embargo, en vez de trasladar los términos del polinomio contenidos en los cuadrantes II y III a los cuadrantes I y IV, traslada los términos del polinomio contenido en los cuadrantes I y IV a los cuadrantes II y III.

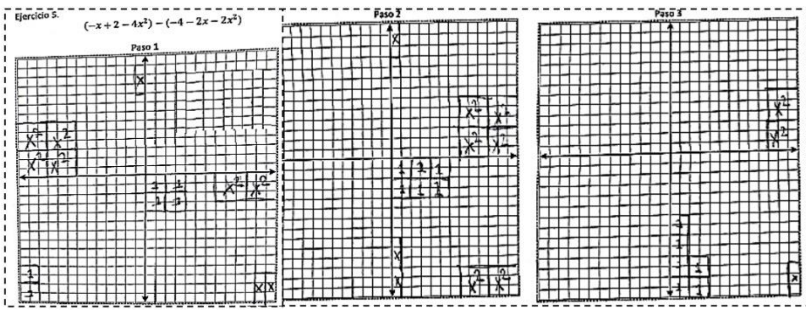


Ilustración 3-65 representación pictórica de los procesos de Karen

Esto se evidencia en el lenguaje algebraico.

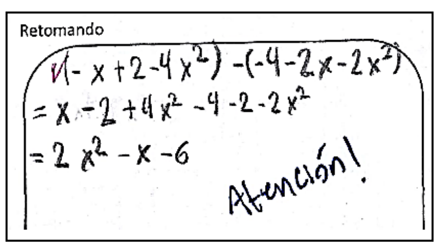


Ilustración 3-66 representación simbólica de los procesos de Karen

Lo que Karen realizó en el dibujo y con el lenguaje algebraico fue:

$$-(-x + 2 - 4x^2) + (-4 - 2x - 2x^2);$$

un error similar aparece en otro ejercicio de la guía de Karen.

Es preocupante observar que la idea del signo cambiando los términos de cuadrantes parece no haber sido asimilada correctamente, ni tampoco se pudo extender en el caso en el que los dos polinomios estaban afectados por el signo menos. Esto generó varios errores en el uso del lenguaje simbólico algebraico, estos errores se muestran en la ilustración 3-67.

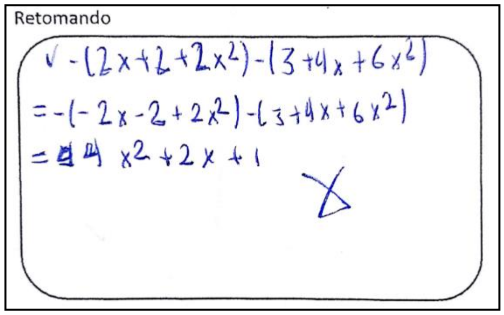


Ilustración 3-67 representación simbólica de los procesos de Karen

Es evidente que el material influyó muy poco en la respuesta de Karen, ya que los errores que se cometen en este trabajo son similares a los que se cometieron en la evaluación de entrada.

Aunque Karen realiza una conjetura para restar dos polinomios sin hacer uso de las fichas, esta deberá ser revisada y reestructurada, pues no hay patrones ni regularidades en las particularizaciones que realizó en su trabajo. Es decir, su conjetura no se soporta en el trabajo realizado en la guía y no se acerca a explicar cómo se resuelve una resta de polinomios.

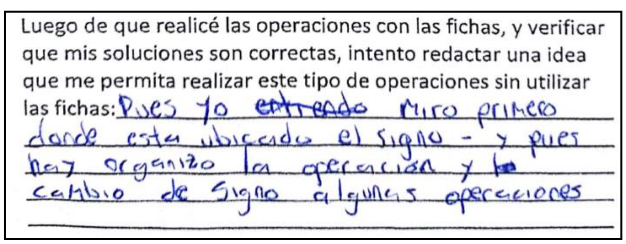

Luego de que realicé las operaciones con las fichas, y verificar que mis soluciones son correctas, intento redactar una idea que me permita realizar este tipo de operaciones sin utilizar las fichas: Pues yo ~~entrado~~ miro primero donde esta ubicado el signo - y pues hay organizo la operación y cambio de signo algunas operaciones

Ilustración 3-68 conjetura de Karen para la resta de polinomios

> *"Pues yo miro primero donde está ubicado el signo – y pues hay organizo la operación y cambio de signo algunas operaciones"*

Los resultados de Cristian, David y Saray generan mayor incertidumbre. Infortunadamente David solo utilizó las fichas para realizar las operaciones en los primeros dos ejercicios, después continuó sin realizar registros pictóricos, lo que invita a pensar que no utilizó el material. Los resultados son muy pobres tanto en el proceso de resolución de los ejercicios básicos, como en los de profundización.

David también propone una idea para resolver las restas sin ayuda del material. Si se comparan las ideas de David y las de Cristian no hay diferencia en la redacción, lo que indica que copiaron el trabajo el uno del otro, incluyendo los errores. Esto muestra un grado de desmotivación y desinterés de los estudiantes, que puede tener varias causas.

Las conjeturas que proponen obviamente no son resultado de un trabajo serio y dedicado. Pueden ser ideas recicladas de las clases que han tomado con su tutor titular, o el producto de un solo ejemplo particular, que extendieron a todo su trabajo.

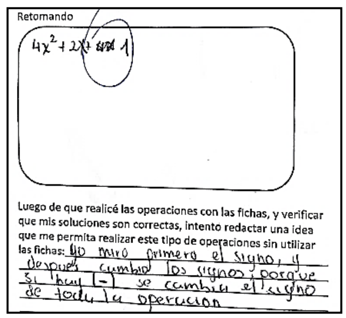


Ilustración 3-69 conjetura de David para la resta de polinomios

> *"Pues yo miro el signo, y después cambio los signos porque si hay (-) se cambia el signo de toda la operación"*

Los ejercicios de profundización confirman que efectivamente se ha avanzado poco o nada en la resta de polinomios, comparado con el trabajo que realizaron los estudiantes en la preevaluación.

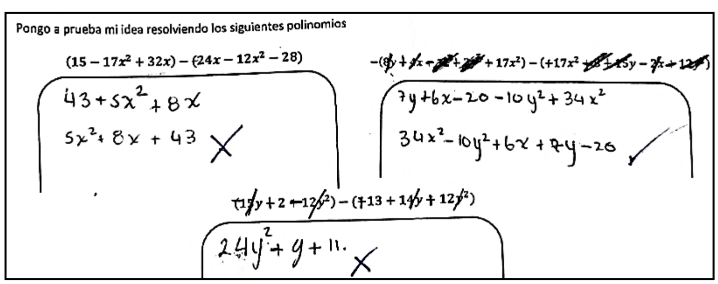


Ilustración 3-70 procesos de David para la resta de polinomios

Al igual que David, Cristian omitió los dibujos de sus procesos desde casi el inicio de su trabajo, sus resultados son similares a los de David, comente varios errores y el trabajo que realizó muestra un bajo compromiso. Prueba de ello es que en la idea para resolver la resta de polinomios aparece la misma respuesta que dio David.

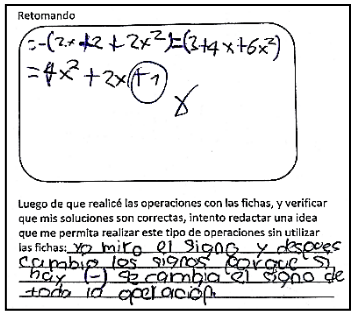


Ilustración 3-71 conjetura de Cristian para la resta de polinomios

“yo miro el signo, y después cambio los signos porque si hay (-) se cambia el signo de toda la operación”

Los errores que se comente Cristian en los ejercicios de profundización son casi idénticos a los de David.

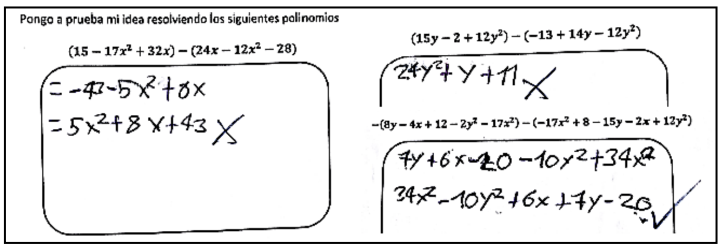


Ilustración 3-72 procesos de Cristian para la resta de polinomios

Por su parte Saray tampoco realiza conjeturas.

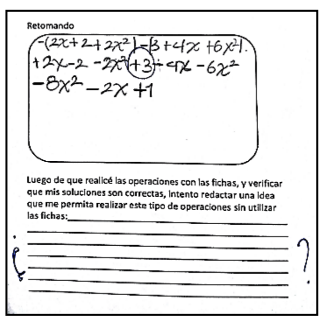


Ilustración 3-73 conjetura de Saray para la resta de polinomios

Saray abandona la representación mediante los dibujos a partir del cuarto ejercicio de la guía, e igual que sus compañeros, comete varios errores en sus procesos; algunos de los ejercicios hacen pensar que Saray entendió que cuando el signo menos antecede a un polinomio, escrito en paréntesis, cambia solo algunos de los signos de los términos del polinomio, en particular del segundo y tercer términos (ver ilustración 3-74).

Aunque Saray realiza de manera correcta dos de los ejercicios de profundización, no se puede atribuir este "logro" al material y al trabajo de la secuencia, dadas las dinámicas de trabajo en la guía.

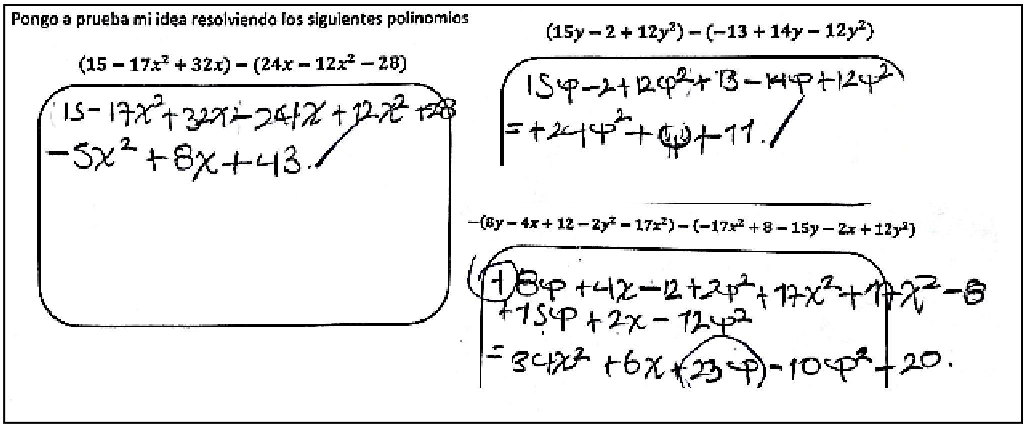


Ilustración 3-74 procesos de Saray para la resta de polinomios

Los errores que se cometieron a lo largo de esta sesión de trabajo se pueden atribuir a varias causas: el material no es apto para enseñar la resta de polinomios, la explicación del manejo del material no fue clara, los estudiantes no tenían ánimos de trabajar y/o que el acompañamiento que se hizo al trabajo personal no fue suficiente, entre otros.

Independientemente de la causa, se requiere reforzar la resta de polinomios. Para esto, en la sesión en la que se retome la resta, se trabajará en parejas y se dejará a un lado el registro gráfico, pues los estudiantes se quejaron porque tenían que realizar varios dibujos. Finalmente se planea hacer un acompañamiento más personalizado.

3.8 Repaso y resignificación de la Resta de polinomios

Con los aspectos identificados por mejorar se dio inicio al trabajo de restructuración de ideas, se buscó corregir los errores que se presentaron en la guía trabajada en la sesión tres, esta vez haciendo énfasis en el uso del material concreto y en su traducción al lenguaje algebraico (dejando a un lado el registro de los dibujos, por petición de los estudiantes).

Se optó esta vez por un taller que constaba de veintitrés ejercicios, sugiriendo que para resolver los primeros diez ejercicios se empleara la caja de polinomios, y el resto de los ejercicios podían ser resueltos utilizando el lenguaje algebraico. Aunque se aclaró que utilizar o no utilizar la caja de polinomios no era una camisa de fuerza. Esto se debe que los estudiantes en su proceso de aprendizaje pueden moverse entre lo concreto y lo abstracto según sus necesidades y habilidades. Los resultados se pueden ver en las ilustraciones 3-75 y 3-76.

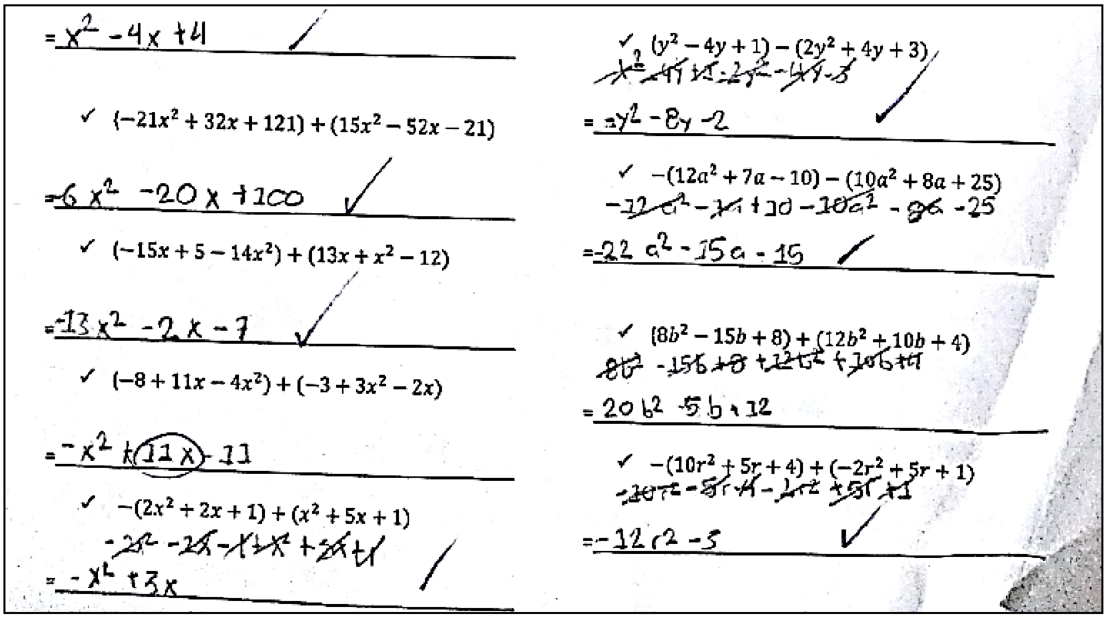


Ilustración 3-75 procesos de David y Karen para la resta de polinomios

Mientras que Karen y David comenten un solo error en los 23 ejercicios, al parecer de concentración, Saray y Cristian comenten 5 errores que se asocian a una especie de apatía, porque los pasos intermedios para la resta los escriben sobre la hoja de operaciones.

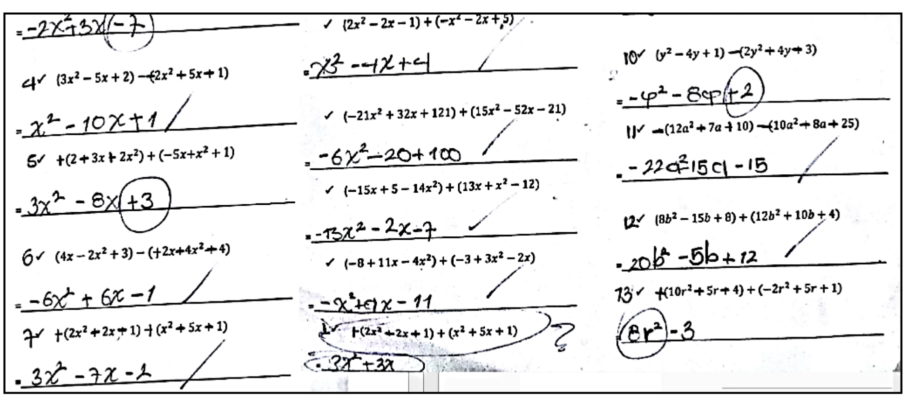


Ilustración 3-76 procesos de Cristian y Saray para la resta de polinomios

A pesar de los errores, si se compara el trabajo desarrollado en este último taller con los resultados de la preevaluación y el taller de la sesión tres, se observa un avance significativo que puede deberse al compromiso que asumieron esta vez los estudiantes con su trabajo, al acompañamiento que en este caso fue mayor, o a que no tuvieron que realizar el registro de los dibujos.

Para este punto se han logrado algunos avances importantes con el material: se ha disminuido el número de errores relacionados a la suma de expresiones con diferentes signos, los estudiantes reducen los términos de manera correcta, se aprecia que los estudiantes son capaces de extender las ideas trabajadas con el material concreto a ejercicios donde se cambia la indeterminada, o se altera el orden del polinomio.

4. Capítulo 4

4.1 Reglas para la construcción de cuadrados y rectángulos mediante la caja de polinomios.

El trabajo que se desarrolló en la sesión cinco tenía un enfoque lúdico, la idea era que los estudiantes “jugaran” con el material. El juego consistía en armar cuadrados o rectángulos con las fichas siguiendo la regla de los lados adyacentes (ver página 62).

En otras palabras, y teniendo en cuenta los colores de los bordes, para poder armar un cuadrado o rectángulo compuesto de varias fichas, los colores de los bordes de las fichas vecinas debían coincidir. Para esta sesión se asignaron valores positivos a todas las fichas, por lo que el uso del plano cartesiano no era necesario**.**

Por ser un trabajo de carácter exploratorio no se llevó a cabo una guía o taller, se escogieron algunos polinomios al azar y se les pidió a los estudiantes que armaran un cuadrado o rectángulo con las fichas, teniendo en cuenta la regla que se mencionó con anterioridad.

La ilustración 4-1 muestra la construcción de 2 rectángulos a. y b. y la de un cuadrado c, que corresponden a los polinomios $x^2 + 5x + 6$, $6x^2 + 8x + 2$ y $4x^2 + 4x + 1$, respectivamente.

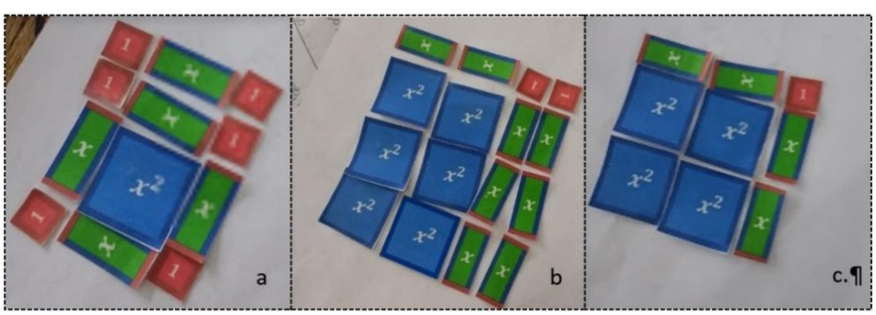


Ilustración 4-1 cuadrados y rectángulos formados con de la caja de polinomios

Vale la pena señalar que, aunque las figuras propuestas por los estudiantes son completamente válidas, algunas de ellas deberán ser modificadas. La razón es que el tiempo que les toma armar un cuadrado o rectángulo como el que se muestra en la ilustración 4-1 imagen a. es mucho mayor comparado al tiempo que les puede tomar armar los cuadrados o rectángulos en las imágenes b. y c. El ubicar las fichas de esta manera puede reducir la sensación de frustración que se da cuando no se logra armar una figura en un determinado tiempo, creando un ambiente favorable para el aprendizaje de los estudiantes:

> Tampoco es fácil mantener el pensamiento durante los periodos de frustración. Es necesario darse cuenta de que hay un conflicto por resolver, y tener confianza para aceptar el reto. Un profesor que entienda esto y sea sensible a los intereses de los alumnos, podrá escoger problemas que puedan provocar su razonamiento. (Mason, Burton, & Stacey, 1982, pág. 161)

4.1.1 Relación de los conceptos de área y multiplicación.

Antes de llegar a la explicación de la multiplicación de binomios de grado uno, se hizo una socialización de una de las interpretaciones que puede tener la multiplicación de dos "*números naturales"* y se extendió esta idea a la multiplicación de polinomios.

En la ilustración 4-2 se muestra un ejemplo en el que la multiplicación de dos "números" (longitudes) representa el área de un rectángulo.

Ilustración 4-2

Teniendo en cuenta el ejemplo anterior se pidió a los estudiantes que hallaran el área de los rectángulos y cuadrados que se muestran en la ilustración 4-3

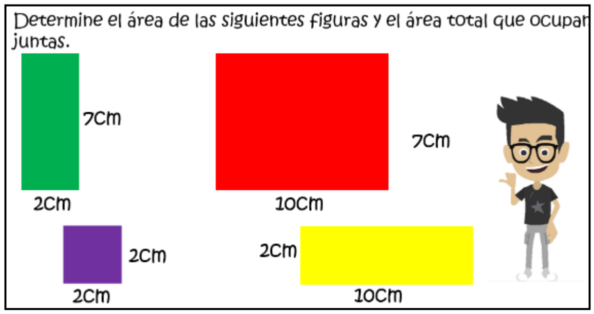


Ilustración 4-3

La ilustración 4-4 muestra las áreas para las figuras que se observan en la ilustración 4-3

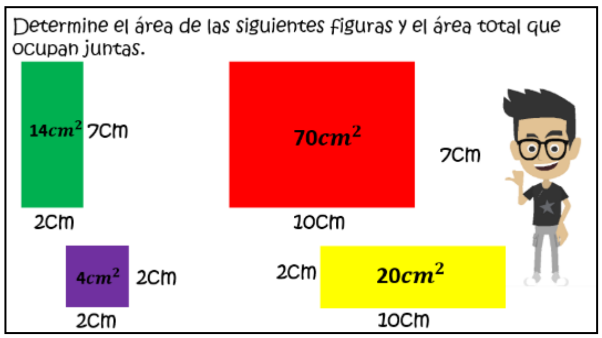


Ilustración 4-4

Estas figuras se juntaron a manera de rompecabezas, formando un rectángulo más grande. La intención de este ejemplo era mostrar las dos formas en las que se puede hallar el área de este rectángulo: una, sumando el área de las figuras que lo componen; otra, multiplicando sus longitudes, lo que nos lleva obviamente al mismo resultado, independientemente del método utilizado.

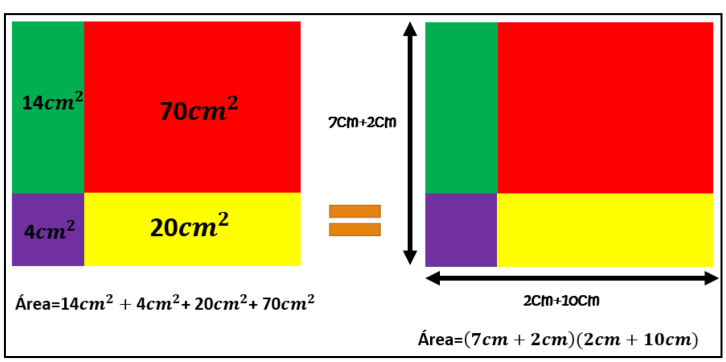


Ilustración 4-5 dos maneras de determinar el área de un rectángulo compuesto

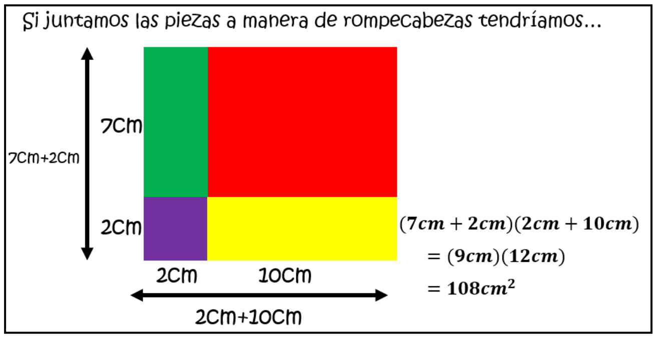


Ilustración 4-6

Partiendo de esta idea y teniendo en cuenta que las fichas poseen sus propias longitudes y áreas, es posible mostrar que la multiplicación de binomios de grado uno se puede representar geométricamente mediante la caja de polinomios.

Como se explicó anteriormente, en la multiplicación se usarán los lados de las fichas, para lo cual, los colores de los bordes serán de gran utilidad.
Aquí es importante tener en cuenta que la lectura de las fichas se puede realizar de dos maneras.

1. Leyendo el valor de la ficha.
2. Leyendo los lados de la ficha.

La interpretación y uso de las fichas se debe realizar según el contexto de la operación que se esté trabajando. Por ejemplo, si se piensa en la suma $(2x + 3) + (x + 1)$ o en la resta $(2x + 3) - (x + 1)$, se deberá tener en cuenta el valor que tiene cada ficha escrito en su interior (lo que vale una ficha), para ubicar los términos del binomio en el cuadrante que les corresponda. En la ilustración 4-7 se muestra cómo se efectuaría la suma $(2x + 3) + (x + 1)$ y su respectivo resultado $3x + 4$.

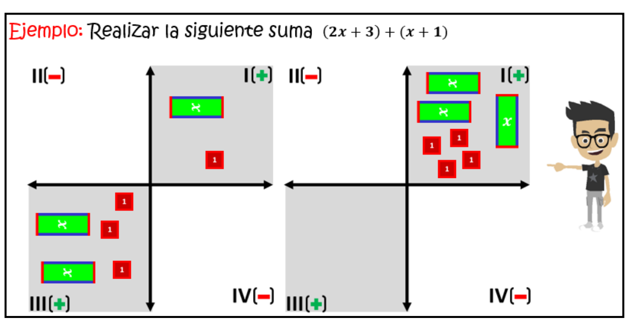


Ilustración 4-7 suma de dos binomios

Pero si se piensa en la expresión $(2x+3)(x+1)$ cada binomio representa un factor o un lado de una figura compuesta, en este caso se construyen los factores utilizando los lados de las fichas, de esta manera se podrá representar geométricamente la multiplicación; las ilustraciones 4-8 y 4-9 muestran esta situación.

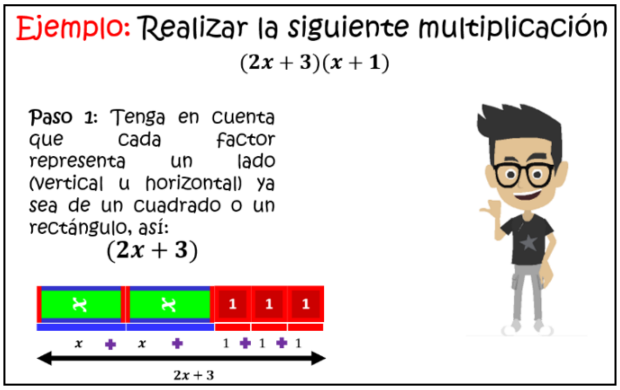


Ilustración 4-8 multiplicación de polinomios mediante el uso del material.

Se deben utilizar los dos factores para formar los lados del cuadrado o del rectángulo, en la ilustración 4-8 se construyó el horizontal por lo que ahora se debe construir el vertical.

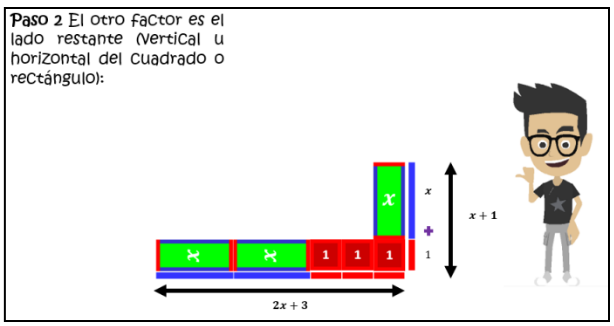


Ilustración 4-9 multiplicación de polinomios mediante el uso del material.

Nótese que, aunque en este caso el valor del lado azul que es x coincide con el *valor de la ficha* que también es x, son los lados de las fichas los que se están teniendo en cuenta para representar cada uno de los factores de la multiplicación. También es posible construir cualquiera de los dos factores utilizando las fichas tipo x^2 y fichas de tipo x (esto se debe tener en cuenta cuando se multipliquen binomios por monomios o monomios por monomios).

Para completar la multiplicación se rellena el *marco* formado por los dos factores, a manera de rompecabezas, teniendo en cuenta *la regla de los lados adyacentes*. De esta manera los factores en la multiplicación representan los lados de un rectángulo y el producto el área de este.

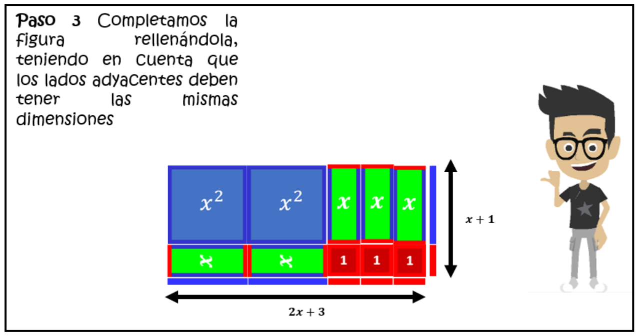


Ilustración 4-10 multiplicación de polinomios mediante el uso del material.

Como se señaló en la sesión cinco, los estudiantes podían en principio organizar las fichas como quisieran y el resultado del área de la figura compuesta sería el mismo, sin embargo, se busca que los índices de frustración se mantengan lo más bajo posible y que los estudiantes utilicen el tiempo de la secuencia de manera efectiva, por lo que se requiere un orden especial en la construcción del rectángulo o el cuadrado, que es precisamente el que se observa en la ilustración 4-10.

A continuación se muestran algunos rectángulos alternativos que se pueden construir cuando se multiplica los lados $(2x + 3)(x + 1)$

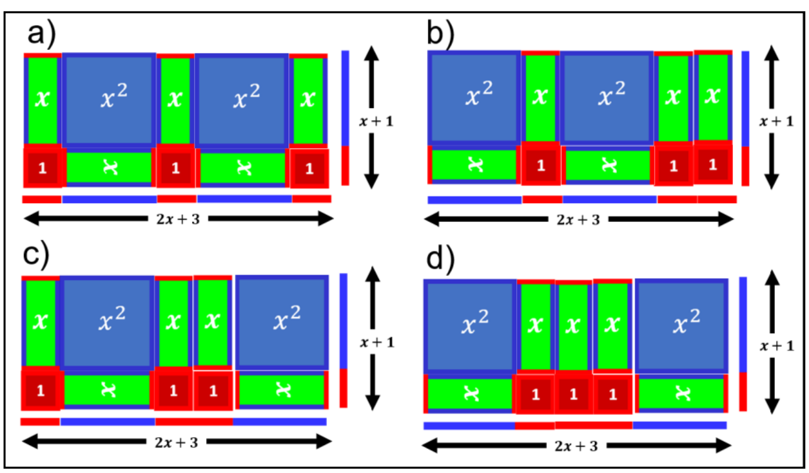


Ilustración 4-11 algunas de las formas en las que se puede representar la multiplicación

$$(\mathbf{2x + 3})(\mathbf{x + 1})$$

El problema de los rectángulos a), b), c), d) está, como se mencionó anteriormente, en el tiempo que les toma a los estudiantes construirlos. Por otro lado, la lectura de su composición es subjetiva, o bien todos se pueden leer como $2x^2 + 5x + 3$, o dependiendo del estudiante, se pueden presentar diversas formas para el producto intermedio, que serían útiles para el fin del trabajo, si los lados se escriben de otra manera. A continuación, se muestran algunas de las posibles escrituras.

a) $(1 + x + 1 + x + 1)(x + 1) = x + 1 + x^2 + x + x + 1 + x^2 + x + x + 1 = 2x^2 + 5x + 3$

b) $(x + 1 + x + 2)(x + 1) = x^2 + x + x + 1 + x^2 + x + 2x + 2 = 2x^2 + 5x + 3$

c) $(1 + x + 2 + x)(x + 1) = x + 1 + x^2 + x + 2x + 2 + x^2 + x = 2x^2 + 5x + 3$

d) $(x + 3 + x)(x + 1) = x^2 + x + 3x + 3 + x^2 + x = 2x^2 + 5x + 3$

La configuración que se retoma en la ilustración 4-12 facilita la construcción de la figura porque visualmente el valor de la ficha coincide con el de sus lados, así, se construye el cuadrado o el rectángulo de manera más eficiente. Se le debe recordar siempre al estudiante que tenga en cuenta los lados de las fichas, que son los que construyen la figura, de no hacerlo así esta estrategia se puede convertir en un aspecto por mejorar cuando se multipliquen monomios por monomios y binomios por binomios todos de grado uno.

Si se escribe el producto intermedio por grupos de fichas semejantes como muestra la ilustración 4-12, la configuración permitirá que los estudiantes establezcan relaciones entre el trabajo con la caja de polinomios y la manera en la que han venido multiplicando binomios en la clase del maestro titular, relacionando de manera implícita a los estudiantes con la ley distributiva. Por último, los llevará a proponer una conjetura para la multiplicación de dos binomios de grado uno con coeficientes enteros.

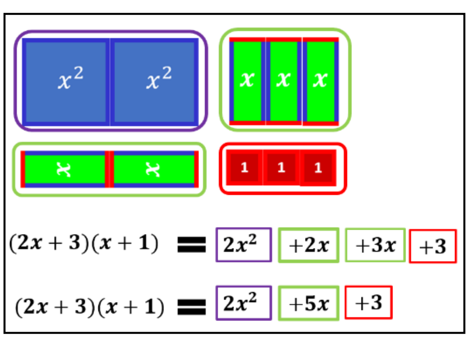


Ilustración 4-12 configuración recomendada para la multiplicación de binomios de grado uno.

Para la fecha en la que se trabajó por primera vez la multiplicación, aún se contaba con un grupo robusto de estudiantes y coincidió con el último sábado de trabajo, pues los estudiantes saldrían a vacaciones de fin de año. Luego de la explicación, se trabajaron ejercicios al azar para para familiarizar a los estudiantes con la multiplicación mediante el uso de la caja de polinomios.

No se empleó una guía de trabajo para sistematizar las respuestas de los estudiantes debido a que se daría una interrupción a la secuencia de casi dos meses, y se consideró conveniente retomar las prácticas de sistematización para el siguiente año. Así, los ejercicios que se trabajaron en esta sesión tuvieron un fin exploratorio.
Las ilustraciones 4-13 y 4-14 muestran la manera en la que David realizó la traducción del material concreto al lenguaje simbólico algebraico

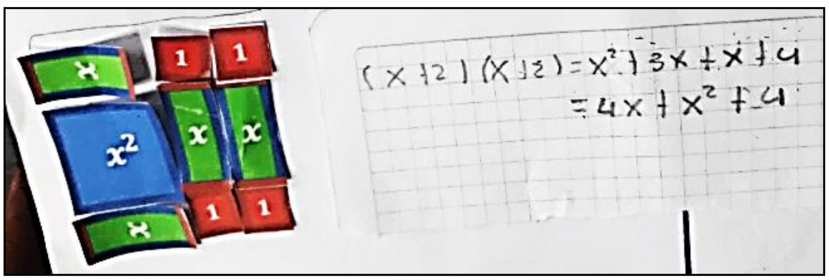


Ilustración 4-13 proceso de David para la multiplicación de binomios.

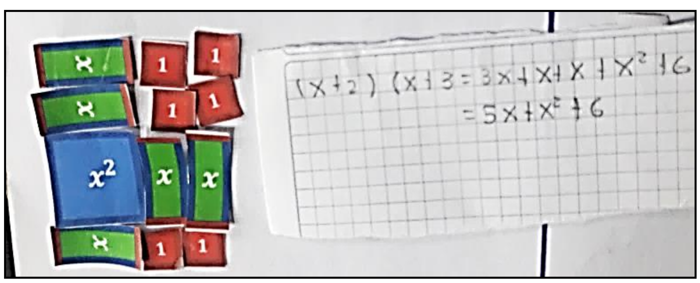


Ilustración 4-14 proceso de David para la multiplicación de binomios.

Es interesante observar que seguramente David tomando como referencia el ejemplo que se trabajó en clase, escribe un producto intermedio antes de presentar el producto de los factores en los dos ejercicios que se muestran en las ilustraciones 4-13 y 4-14.
Por ejemplo, en la ilustración 4-14, donde David determina el producto de los factores $(x+2)(x+3)$ escribe:

$$(x+2)(x+3) = 3x + x + x + x^2 + 6$$
$$= 5x + x^2 + 6;$$

La respuesta presenta particularidades interesantes, una de las que llama la atención es la forma en la que organiza los términos del producto. Esto muestra que el material está reforzando de manera indirecta la idea de la propiedad conmutativa de la suma, pues no importa el orden en el que se presenten los términos (a pesar de que ya se habían trabajado en orden descendente). La segunda, que, aunque en ningún momento se comete un error en el ejercicio, el producto intermedio no guarda una relación con los factores en la forma en que los escribe David. Impidiendo que se sistematicen los resultados en busca de regularidades o patrones que permitan proponer un algoritmo para la multiplicación.

Por ser esta la última sesión de trabajo en el año escolar antes de que los estudiantes se marcharan, se aprovechó la oportunidad para realizar una pequeña entrevista que permitiera conocer su opinión con respecto al trabajo en el aula. Las entrevistas fueron registradas en video. Y se realiza su respectiva transcripción.

Saray

https://youtu.be/gG7is2BBkhg

"pues la verdad ***me parece pues muchísimo mejor con ese método****, porque es que* ***uno gráficamente o sea como que entiende más*** *sí, porque es que digamos a veces el profesor de álgebra decía que teníamos que cambiar los signos en la resta y eso, pues yo eso a ese man no le entendía. Yo, pero ¿por qué hay que cambiar los signos?* ***y pues claro, con el plano cartesiano y eso pues es muchísimo más fácil.*** *Además, eso de la multiplicación y todo es muchísimo más fácil así.* ***O sea, uno lo entiende más, porque como que el cerebro de uno se acostumbra*** *como que …* ***se acuerda de las fichas y todo eso y lógicamente uno entiende más****"*

Karen

https://youtu.be/Q-I1TupjCpc

"*pues… antes de que yo empezara pues a venir a las clases y eso eh era como que o sea no entendía nada si, o sea algunos temas los cogía, pero otros no,* ***y era como toda tonta y no sabía nada****. Pero pues ya que empecé a venir a las clases*

> *y eso, el método que usa el profe es chévere porque* ***las fichas hacen que uno entienda bien*** *si, o sea,* ***que uno como que vea eso en la realidad, entonces eso hace que como que el cerebro de uno funcione mejor*** *y… pues ya. Y ahora me va mejor porque entiendo más cosas; un ejemplo en la multiplicación, bueno así pues eh en varios ejercicios que nos pone el profesor pues* ***ya los entiendo mejor****”.*

Se aprecian detalles valiosos de la entrevista con Karen y Saray. Por ejemplo, desde la parte académica Karen considera que ha ampliado sus conocimientos relacionados con las operaciones entre polinomios, siente que *sabe más,* tiene una apreciación positiva de la caja de polinomios y lo considera una excelente herramienta para favorecer su aprendizaje “*las fichas hacen que uno entienda bien”*. En sus palabras señala que el material ha atenuado la dificultad que le presenta asimilar nociones abstractas y le permite acercarse a ellas de una manera sencilla y agradable *“que como que uno ve eso en la realidad, entonces eso hace que como que el cerebro de uno funcione mejor”.* Por otro lado, el material ha tenido un impacto positivo en su seguridad y autoestima, ya que antes de trabajar con la caja de polinomios, cuando se trataba de temas de álgebra, Karen se sentía insegura y confundida acerca de lo que sabía y/o aprendía.

> Un estado de confianza y tranquilidad hace posible observar y recordar detalles que, en cambio, pasan inadvertidos cuando se está excitado o deprimido. (Mason, Burton, & Stacey, 1982, pág. 150)

Saray muestra afinidad con las ideas que expresa Karen, hay una particularidad en las dos entrevistas y es que las dos señalan que el material tiene un efecto positivo en su *cerebro*, seguramente señalando que los procesos de aprendizaje son mucho más sencillos con el uso del material.

4.2 Multiplicación de polinomios

4.2.1 Multiplicación de polinomios de grado uno con coeficientes naturales

Luego de las vacaciones de fin de año, y una vez los estudiantes habían retomado sus actividades escolares, se solicitó nuevamente permiso a rectora de la institución para trabajar con el grupo con el que se había iniciado la investigación, se hizo la respectiva convocatoria y únicamente respondió un grupo de ocho estudiantes, el número de estudiantes fluctuaría hasta convertirse en el grupo de cuatro estudiantes con los que se realizó la investigación final.

Trabajar con el grupo reducido favoreció los procesos de aprendizaje de los estudiantes dado que fue posible realizar un acompañamiento personalizado, los factores de distracción se redujeron drásticamente y por ende aumentaron los niveles de concentración en todas las actividades. Durante la sesión siete y ocho en un primer momento se retomó el trabajo desarrollado en la sesión seis y posteriormente se buscó, mediante el material concreto, el registro a partir de los dibujos y una guía o taller, acercarse a un algoritmo para la multiplicación de binomios de grado uno.

En la guía de trabajo de esta sesión cada ejercicio venía acompañado, como se muestra en la ilustración 4-16, de dos pasos, uno que se denominó *resultado parcial* (productos intermedios) y donde se escribía el resultado en “grupos” de la manera que mostró el ejemplo que se observa en la ilustración 4-12, y otro que se denominó *resultado final* (producto) donde los estudiantes expresaban el resultado *simplificado*, al final de cada dibujo se preguntaba por la forma que tenía la figura (cuadrado o un rectángulo). Saber si se trataba de un cuadrado o rectángulo relacionaría de manera implícita la factorización y la multiplicación (en el apartado de la factorización se profundiza en esta relación). También se esperaba que los estudiantes identificaran las características de los *cuadrados o cuadrados perfectos.*

Antes de presentar el trabajo realizado por los estudiantes, es importante señalar que no se ejemplificó la multiplicación de monomios por monomios y ni la de monomios por binomios, fue algo que los estudiantes dedujeron por cuenta propia.

En la ilustración 4-15 se presentan los procesos concretos de los ejercicios 1,2 y 4, y en la ilustración 4-16 se observa la representación mediante dibujos y lenguaje algebraico de los mismos, realizadas por Cristian.

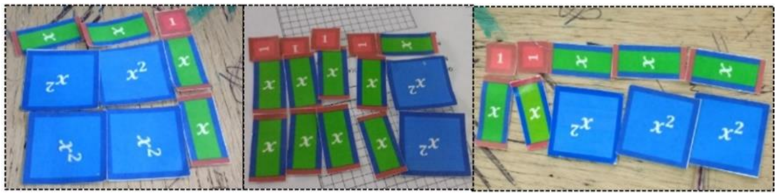


Ilustración 4-15 representación concreta de los procesos de Cristian.

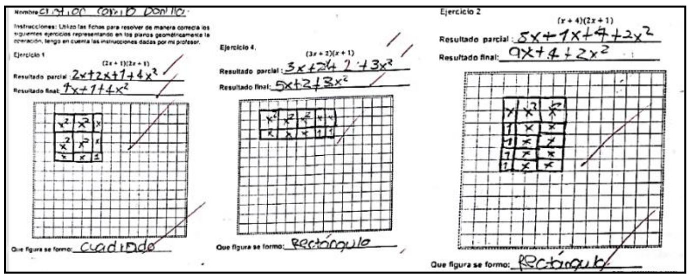


Ilustración 4-16 representación pictórica y simbólica de los procesos de Cristian.

Cristian presenta sus respuestas en un orden diferente al convencional, pero la forma en que las escribe será de utilidad para generalizar sus procesos. Por ejemplo, en el ejercicio dos, al multiplicar $(x+4)(2x+1)$ obtiene $8x+1x+4+2x^2$ y lo *simplifica* a $9x+4+2x^2$; aunque ambos resultados son correctos, en el momento en el que se retomen tanto los productos intermedios como el producto al final de la guía, que es donde se utilizan las particularizaciones para buscar un patrón que lleve a una regla general, será de gran utilidad organizar sus resultados en forma descendente y para esto se utilizará el orden el tamaño de las fichas (de las más grandes a las más pequeñas).

Cristian no mostró ningún error en el desarrollo de este trabajo, en la ilustración 4-17, se muestran algunos de sus procedimientos:

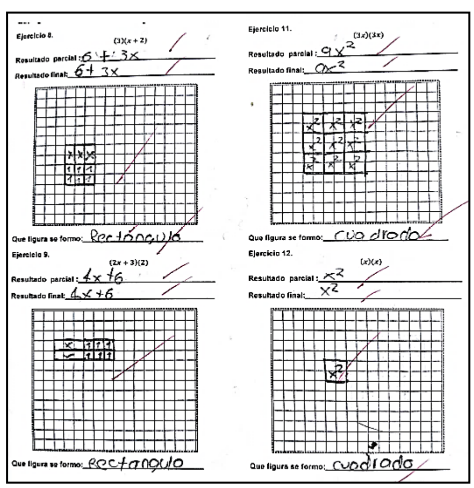
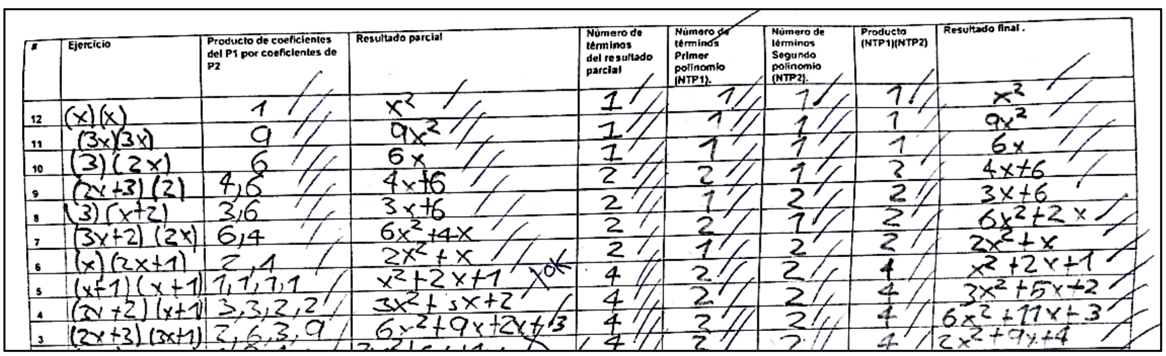


Ilustración 4-17 representación pictórica y simbólica de los procesos de Cristian.

Como se observa en la ilustración 4-17 Cristian logró relacionar muy bien el trabajo que realizó de multiplicación de binomios por binomios, con la multiplicación de binomios por monomios y monomios por binomios. Sus compañeros también lograron esta relación.

La tabla que se presenta en la ilustración 4-18 fue diseñada para recoger los resultados que arrojaron las particularizaciones (ejercicios). Como se observa en la tabla, en la primera columna se le pedía al estudiante escribir el ejercicio que trabajó con caja de polinomios.

Se comienza con el ejercicio número doce y se avanza de manera descendente. Se puede apreciar en la tabla que si se sigue este orden; primero se registran los datos de los productos que arrojaban los monomios por monomios, luego los monomios por binomios y finalmente los binomios por binomios (la tabla busca sistematizar) y si el estudiante es un buen observador, es posible que extienda el producto $(x)(x) = x^2$, a otras multiplicaciones.



#	Ejercicio	Producto de coeficientes del P1 por coeficientes de P2	Resultado parcial	Número de términos del resultado parcial	Número de términos Primer polinomio (NTP1).	Número de términos Segundo polinomio (NTP2).	Producto (NTP1)(NTP2)	Resultado final .
12	(x)(x)	1	x^2	1	1	1	1	x^2
11	(3x)(3x)	9	$9x^2$	1	1	1	1	$9x^2$
10	(3)(2x)	6	6x	1	1	1	1	6x
9	(2x+3)(2)	4,6	4x+6	2	2	1	2	4x+6
8	(3)(x+2)	3,6	3x+6	2	1	2	2	3x+6
7	(3x+2)(2x)	6,4	$6x^2+4x$	2	2	1	2	$6x^2+2x$
6	(x)(2x+1)	2,1	$2x^2+x$	2	1	2	2	$2x^2+x$
5	(x+1)(x+1)	1,1,1,1	x^2+2x+1 ok	4	2	2	4	x^2+2x+1
4	(3x+2)(x+1)	3,3,2,2	$3x^2+5x+2$	4	2	2	4	$3x^2+5x+2$
3	(2x+3)(3x+1)	2,6,3,9	$6x^2+9x+2x+3$	4	2	2	4	$6x^2+11x+3$
	[illegible]	[illegible]	[illegible]	4	2	2	4	$2x^2+9x+4$

Ilustración 4-18 representación simbólica de los procesos de Cristian.

En la segunda columna se le pedía al estudiante que realizara la multiplicación de todos los coeficientes del primer factor por todos los coeficientes del segundo factor y los escribiera separados por comas (para evitar que los sumara o se confundiera con un número base diez), la intención era simplificar el problema lo más que se pudiera al tener que multiplicar únicamente números naturales de una magnitud pequeña, los estudiantes estaban sobre terreno familiar y podían operar con tranquilidad para irse acercando a realizar multiplicaciones sin el material. Según Mason, Burton y Stacey (1982):

> Al enfrentarse con un problema, cualquiera puede empezar probando algunos ejemplos concretos que lleven el problema a un área de confianza o seguridad, por así decirlo. No es conveniente tantear con ejemplos que son en sí mismos abstractos y lejanos. La idea es interpretar el problema por medio de ejemplos que

sean muy concretos y que inspiren confianza; sin intentar, por el momento, resolver el problema mismo. (págs. 34-35)

En la tercera columna se registraba el producto intermedio de los polinomios, este resultado se había obtenido con las fichas, y la tabla buscaba que el estudiante utilizara todas sus habilidades de observación para comparar la columna dos (producto de los coeficientes, realizado sin la caja de polinomios) y estableciera una relación con la columna tres (producto intermedio de los polinomios, realizado con la caja de polinomios).

Las columnas 4,5,6 y 7 buscaban establecer una relación entre el producto del número de términos del primer factor y el segundo factor, con el número de términos que se obtiene en el producto intermedio, esta regularidad sirve de guía para que el estudiante sepa cuantos términos debe contener el producto intermedio, de esta manera se buscaba atenuar errores como los que se cometieron en la preevaluación (ver ilustración 3-7). Para ello era necesario comparar la columna 4 (obtenida mediante el uso del material) y la columna 7 (obtenida sin la ayuda del material)
Se hace la transcripción de una fila trabajada por Cristian, para brindar una mejor idea de sus procesos:

Tabla 4-1 Procesos de Cristian para la sistematización de la multiplicación de polinomios

#	Ejercicio	Producto de coeficientes del P1 por coeficientes de P2	Resultado parcial	Número de términos del resultado parcial	Número de términos Primer polinomio (NTP1).	Número de términos Primer polinomio (NTP2).	Producto (NTP1) (NTP2)	Resultado final.
3	$(2x+3)(3x+1)$	2,6,3,9	$6x^2+9x+2x+3$	4	2	2	4	$6x^2+11x+3$

Una vez que se completaba la tabla se realizaban algunas preguntas orientadoras que le permitieran al estudiante establecer relaciones entre los contenidos de las columnas. La ilustración 4-19 muestra las respuestas de Cristian.

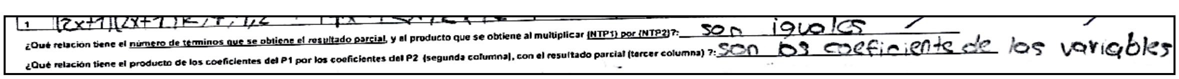

¿Qué relacion tiene el número de terminos que se obtiene el resultado parcial, y el producto que se obtiene al multiplicar (NTP1) por (NTP2)?: son iguales
¿Qué relación tiene el producto de los coeficientes del P1 por los coeficientes del P2 (segunda columna), con el resultado parcial (tercer columna) ?: son los coeficiente de los variables

Ilustración 4-19 Procesos de Cristian para la sistematización de la multiplicación de polinomios

"¿Qué relación tiene el número de términos (NT) que se obtiene en el resultado parcial y el producto que se obtiene al multiplicar (NTP1) por (NTP2*) ?:*

R/ *son iguales*

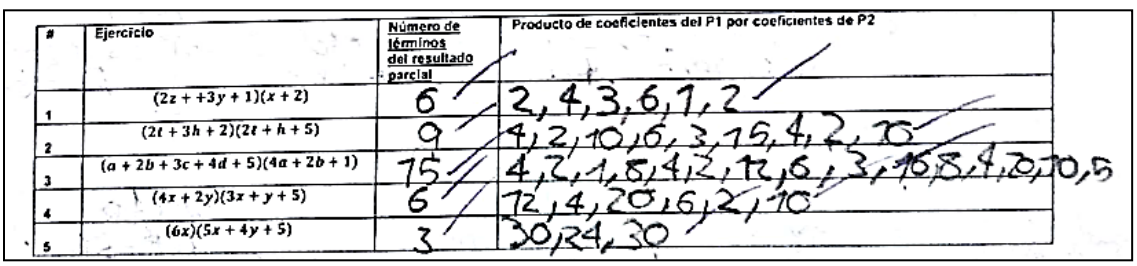
¿Qué relación tiene el producto de los coeficientes del P1 por los coeficientes del P2 (segunda columna), con el resultado parcial (tercera columna) ?:

R/*son los coeficientes de las indeterminadas”*

Luego se pedía a los estudiantes extender las ideas obtenidas, producto del trabajo realizado hasta ahora, a polinomios con más de dos términos, mediante la siguiente pregunta:

> *¿Cuántos términos surgirán de las siguientes multiplicaciones en el resultado parcial? ¿Qué coeficientes tendrá cada término?*

La respuesta de Cristian se aprecia en la ilustración 4-20.

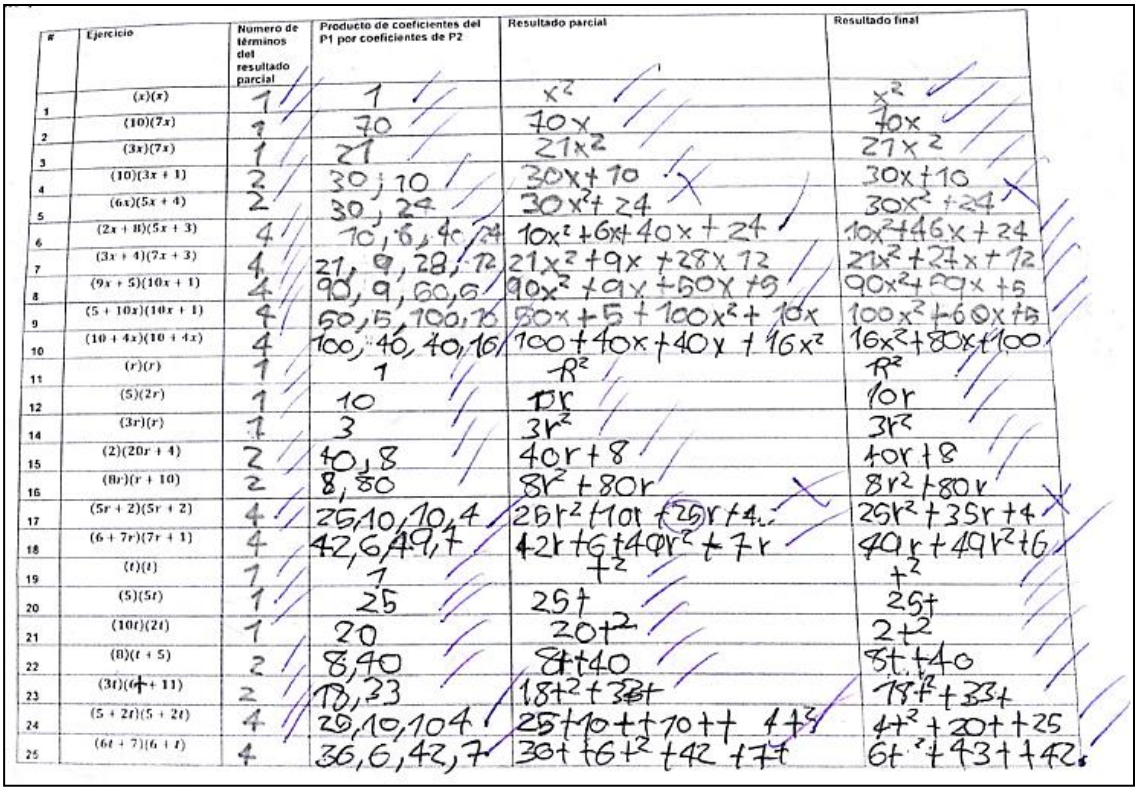


#	Ejercicio	Número de términos del resultado parcial	Producto de coeficientes del P1 por coeficientes de P2
1	$(2z + +3y + 1)(x + 2)$	6	2, 4, 3, 6, 1, 2
2	$(2t + 3h + 2)(2t + h + 5)$	9	4, 2, 10, 6, 3, 15, 4, 2, 10
3	$(a + 2b + 3c + 4d + 5)(4a + 2b + 1)$	15	4, 2, 1, 8, 4, 2, 12, 6, 3, 16, 8, 4, 20, 10, 5
4	$(4x + 2y)(3x + y + 5)$	6	12, 4, 20, 6, 2, 10
5	$(6x)(5x + 4y + 5)$	3	30, 24, 30

Ilustración 4-20 Procesos de Cristian para la sistematización de la multiplicación de polinomios

Se evidencia que Cristian realiza la multiplicación de coeficientes en orden, además que determina el número de términos del producto intermedio (resultado parcial) a partir de los términos que tiene cada factor de la multiplicación.

Por último, se particularizó un poco más, variando en los factores el orden de los términos y también cambiando la indeterminada, los resultados fueron satisfactorios y se pueden apreciar en la ilustración 4-21.



#	Ejercicio	Número de términos del resultado parcial	Producto de coeficientes del P1 por coeficientes de P2	Resultado parcial	Resultado final
1	$(x)(x)$	1	1	x^2	x^2
2	$(10)(7x)$	1	70	$70x$	$70x$
3	$(3x)(7x)$	1	21	$21x^2$	$21x^2$
4	$(10)(3x+1)$	2	30; 10	$30x+10$	$30x+10$
5	$(6x)(5x+4)$	2	30, 24	$30x^2+24$	$30x^2+24$
6	$(2x+8)(5x+3)$	4	10, 6, 40, 24	$10x^2+6x+40x+24$	$10x^2+46x+24$
7	$(3x+4)(7x+3)$	4	21, 9, 28, 12	$21x^2+9x+28x+12$	$21x^2+37x+12$
8	$(9x+5)(10x+1)$	4	90, 9, 50, 5	$90x^2+9x+50x+5$	$90x^2+59x+5$
9	$(5+10x)(10x+1)$	4	50, 5, 100, 10	$50x+5+100x^2+10x$	$100x^2+60x+5$
10	$(10+4x)(10+4x)$	4	100, 40, 40, 16	$100+40x+40x+16x^2$	$16x^2+80x+100$
11	$(r)(r)$	1	1	r^2	r^2
12	$(5)(2r)$	1	10	$10r$	$10r$
14	$(3r)(r)$	1	3	$3r^2$	$3r^2$
15	$(2)(20r+4)$	2	40, 8	$40r+8$	$40r+8$
16	$(8r)(r+10)$	2	8, 80	$8r^2+80r$	$8r^2+80r$
17	$(5r+2)(5r+2)$	4	25, 10, 10, 4	$25r^2+10r+25r+4$	$25r^2+35r+4$
18	$(6+7r)(7r+1)$	4	42, 6, 49, 7	$42r+6+49r^2+7r$	$49r+49r^2+6$
19	$(t)(t)$	1	1	t^2	t^2
20	$(5)(5t)$	1	25	$25t$	$25t$
21	$(10t)(2t)$	1	20	$20t^2$	$2t^2$
22	$(8)(t+5)$	2	8, 40	$8t+40$	$8t+40$
23	$(3t)(6t+11)$	2	18, 33	$18t^2+33t$	$18t^2+33t$
24	$(5+2t)(5+2t)$	4	25, 10, 10, 4	$25+10t+10t+4t^2$	$4t^2+20t+25$
25	$(6t+7)(6+t)$	4	36, 6, 42, 7	$36t+6t^2+42+7t$	$6t^2+43t+42$

Ilustración 4-21 Procesos de Cristian para la sistematización de la multiplicación de polinomios

Un ejemplo de que Cristian ha construido conceptos valiosos relacionados con la multiplicación de binomios se aprecia en el ejercicio veinticinco que pide resolver la multiplicación $(6t+7)(6+t)$. Se puede ver que a pesar del cambio del orden convencional del segundo factor y la indeterminada, Cristian realiza de manera correcta la multiplicación. Los procesos para este ejercicio se observan en la ilustración 4-21 y se transcriben en la tabla 4-2:

Tabla 4-2 Procesos de Cristian para la sistematización de la multiplicación de polinomios

#	Ejercicio	Número de términos del resultado parcial	Producto de coeficientes del P1 por coeficientes de P2	Resultado parcial	Resultado Final
25	$(6t+7)(6+t)$	4	$36, 6, 42, 7$	$36t+6t^2+42+7t$	$6t^2+43t+42$

Las ideas que se desarrollaron en este trabajo las muestra Karen en el siguiente video.

Karen

https://youtu.be/W-FsdLyvDS4

Por último, se señalan los errores cometidos por los compañeros de Cristian, tres en total dos de Saray y uno de David. Karen y Cristian no cometieron errores.

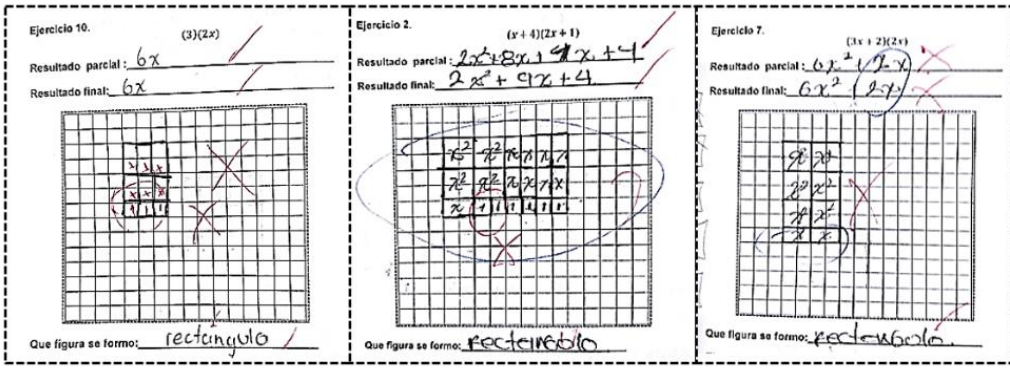


Ilustración 4-22 Procesos de David y Saray para la sistematización de la multiplicación de polinomios.

Se piensa en errores producto de la falta de concentración, porque Saray y David se equivocaron en la transcripción de los dibujos. Pero no del todo en el uso del lenguaje algebraico y tampoco tuvieron errores en el trabajo con la con la caja de polinomios.

Ilustración 4-23 Procesos de David y Saray para la sistematización de la multiplicación de polinomios

En relación con la formalización del concepto, vale la pena señalar que los estudiantes en general presentaron pocos errores y los que se encontraron están relacionados más a la multiplicación de números naturales que a el manejo de las expresiones algebraicas. Lo que es muy reconfortante, pues los errores se han venido reduciendo de manera progresiva.

La multiplicación con enteros negativos se trabaja teniendo en cuenta tanto los signos de los ejes como los signos de los cuadrantes, en algunos casos para llegar al producto (resultado final) es necesario realizar dos pasos. El segundo paso es una gran oportunidad para repasar la resta utilizando el material.

4.2.2 Multiplicación de polinomios de grado uno con coeficientes enteros

Para la multiplicación de polinomios con coeficientes enteros se hará uso del plano cartesiano y se tendrán en cuenta los signos de ejes y cuadrantes, la ilustración 4-24 muestra los signos de cada eje y de cada cuadrante:

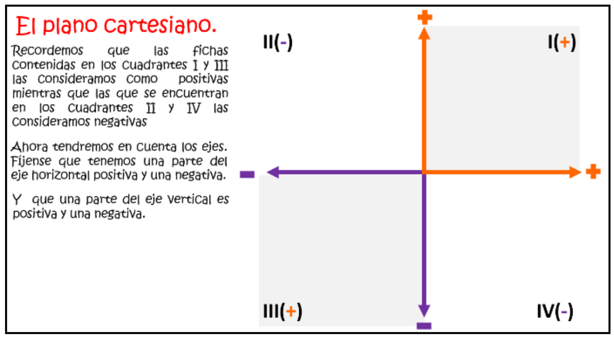


Ilustración 4-24 plano cartesiano con sus respectivos ejes y cuadrantes.

La ilustración 4-25 muestra las diferentes posiciones en las que se puede ubicar una ficha. El cuadrante define el signo de la ficha y los ejes definen el signo de sus lados, de esta manera: en la posición **a** los lados son $+1$ y $+x$, debido a que estos lados están a lo largo de los ejes positivos x y y,el signo de la ficha es positivo porque se encuentra en el cuadrante uno que también es positivo. De la misma manera en la posición **b**. En la posición **c** se tienen lados $+1$ y $-x$ y el signo de la ficha es negativo $-x$. En la posición **d** se tienen lados -1 y $+x$ y el signo de la ficha es negativo $-x$. En la posición **e.** Se tienen lados -1 y $-x$ y el signo de la ficha es positivo, x, de la misma manera en la posición **f**. En la posición **g.** Se tienen lados -1 y $+x$ y el signo de la ficha es negativo, $-x$ y por último, en la posición **h.** Se tienen lados 1 y $-x$ y el signo de la ficha es negativo, $-x$.

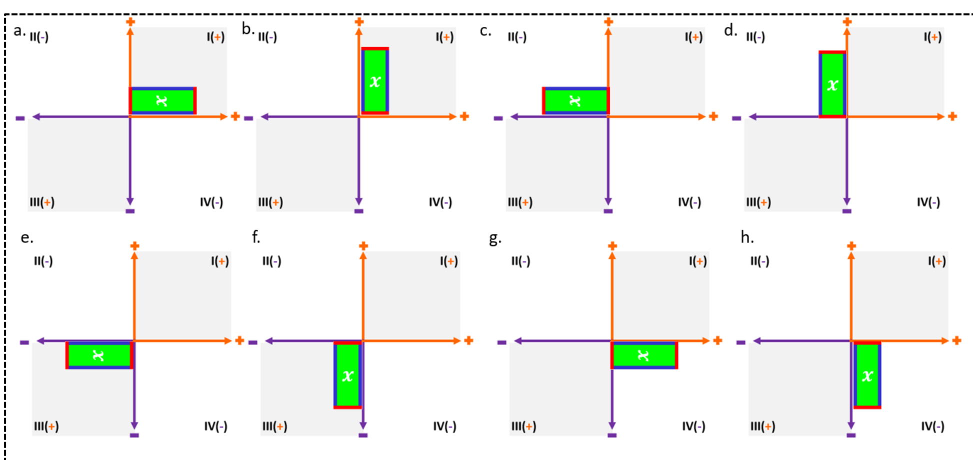


Ilustración 4-25 Posibles posiciones de una ficha tipo $\boldsymbol{x}$ en el plano cartesiano

Se muestra como ejemplo la multiplicación de $(x+3)(2x-2)$ en las ilustraciones 4-26 a la 4-28.

Para representar la multiplicación mediante la caja de polinomios se debe tener en cuenta que cada factor representa un lado de un rectángulo. Los factores pueden representar tanto lados verticales como horizontales. Para este caso se toma $(x+3)$ como el lado horizontal y $(2x-2)$ como el lado vertical.

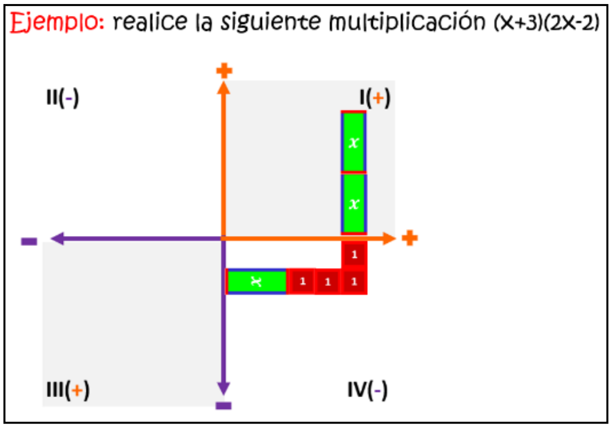


Ilustración 4-26 multiplicación de polinomios mediante el uso del material.

Una vez configurados los lados se "rellena" la figura con fichas tipo $1, x$ y x^2teniendo en cuenta la regla de los lados adyacentes.

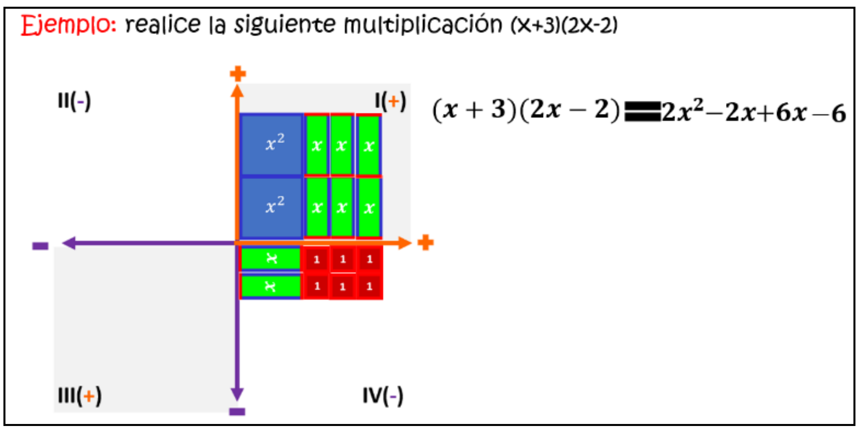


Ilustración 4-27 multiplicación de polinomios mediante el uso del material.

Finalmente se revisa si existen fichas con signos opuestos y se cancelan entre sí. En este ejemplo se pueden cancelar dos fichas tipo x del cuadrante I, positivas, con dos fichas tipo x del cuadrante IV, negativas, resultando:

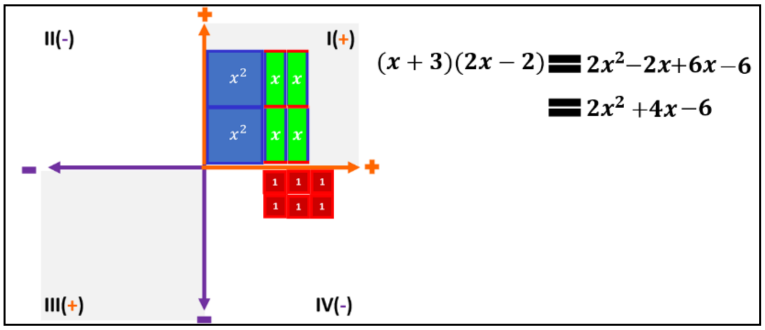


Ilustración 4-28 multiplicación de polinomios mediante el uso del material.

Posterior a la multiplicación se trabajó con los estudiantes una guía muy similar a la de multiplicación de polinomios con coeficientes naturales, bajo las mismas dinámicas de particularizar, sistematizar y generalizar. Los resultados se muestran a continuación.

Las ilustraciones 4-29 y 4-30 presentan el trabajo de Saray, se observan los dos pasos que se realizan con el material y luego se registran los resultados mediante lenguaje pictórico y simbólico algebraico.

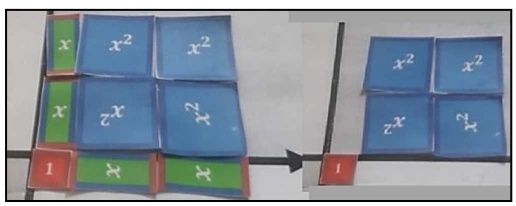


Ilustración 4-29 Procesos de Saray para la multiplicación de polinomios.

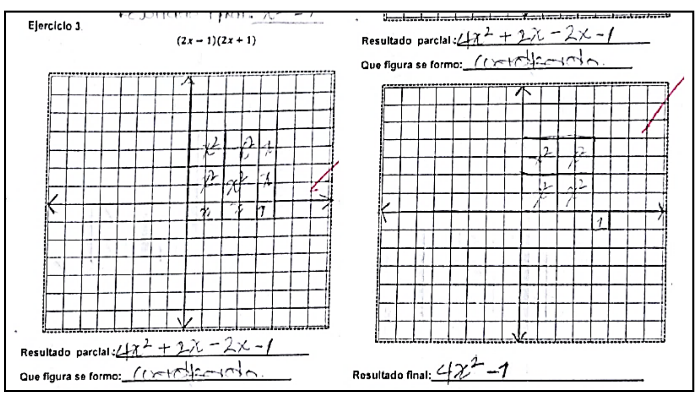


Ilustración 4-30 Procesos de Saray para la multiplicación de polinomios.

$$(2x-1)(2x+1) = 4x^2 + 2x - 2x - 1 = 4x^2 - 1$$

David muestra el proceso de resolución de la multiplicación $(2x-3)(2x-2)$, como aquí no hay fichas opuestas tipo x el ejercicio se puede realizar en un paso.

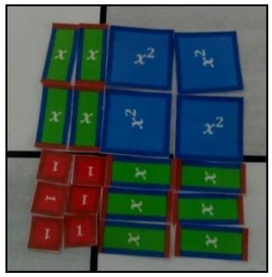


Ilustración 4-31 Procesos de David para la multiplicación de polinomios.

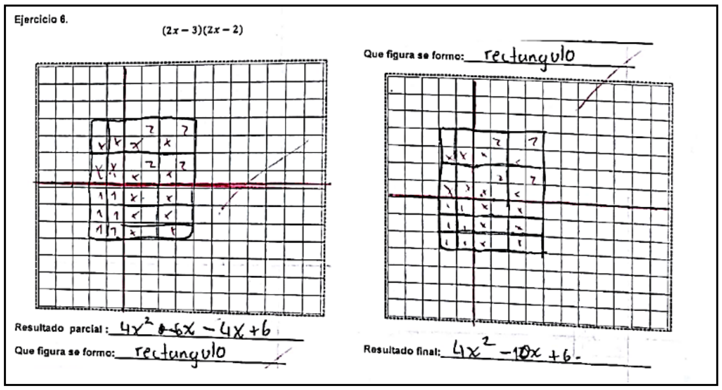
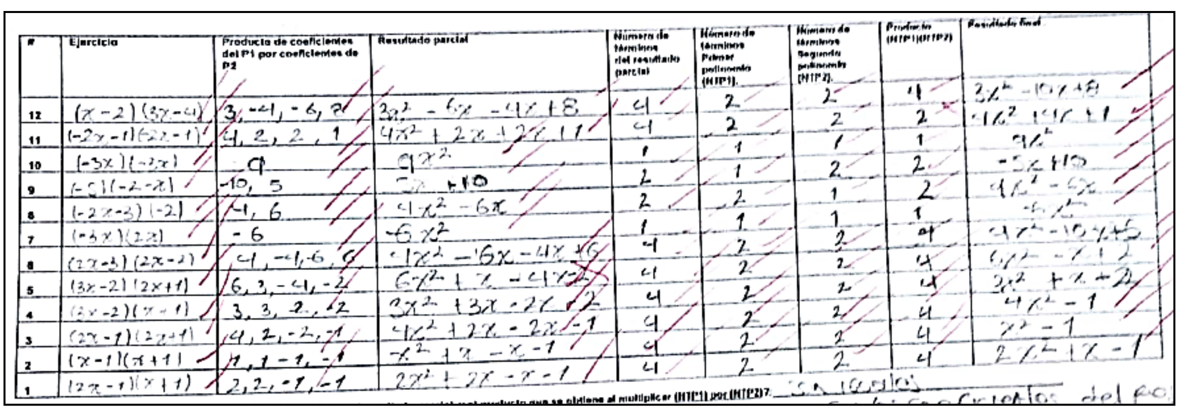


Ilustración 4-32 Procesos de David para la multiplicación de polinomios.

$$(2x-3)(2x-2) = 4x^2 - 6x - 4x + 6 = 4x^2 - 10x + 6;$$

La ilustración 4-33 presenta la sistematización de procesos de Saray, la tabla donde se recopila el trabajo de los estudiantes guarda el mismo esquema que la tabla trabajada en la multiplicación de polinomios con coeficientes naturales, la única diferencia radica en que en este caso los coeficientes de los polinomios son enteros.

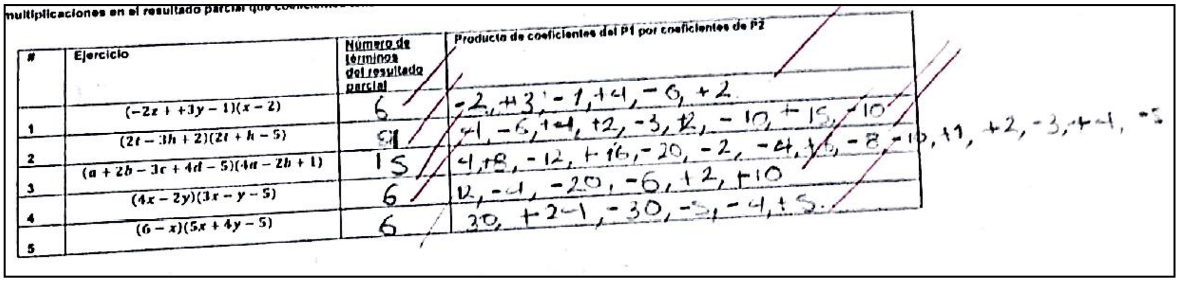


#	Ejercicio	Producto de coeficientes del P1 por coeficientes de P2	Resultado parcial	Número de términos del resultado parcial	Número de términos Primer polinomio (NTP1)	Número de términos Segundo polinomio (NTP2)	Producto (NTP1)(NTP2)	Resultado final
12	$(x-2)(3x-4)$	3, −4, −6, 8	$3x^2-6x-4x+8$	4	2	2	4	$3x^2-10x+8$
11	$(-2x-1)(-2x-1)$	4, 2, 2, 1	$4x^2+2x+2x+1$	4	2	2	2	$4x^2+4x+1$
10	$(-3x)(-3x)$	9	$9x^2$	1	1	1	1	$9x^2$
9	$(-5)(-2-x)$	−10, 5	[illegible] $+10$	2	1	2	2	$-5x+10$
8	$(-2x-3)(-2)$	4, 6	$4x^2-6x$	2	2	1	2	$4x^2-6x$
7	$(-3x)(2x)$	−6	$-6x^2$	1	1	1	1	$-6x^2$
6	$(2x-3)(2x-2)$	4, −4, −6, 6	$4x^2-6x-4x+6$	4	2	2	4	$4x^2-10x+6$
5	$(3x-2)(2x+1)$	6, 3, −4, −2	$6x^2+3x-4x-2$	4	2	2	4	$6x^2-x-2$
4	$(3x-2)(x+1)$	3, 3, −2, −2	$3x^2+3x-2x-2$	4	2	2	4	$3x^2+x-2$
3	$(2x-1)(2x+1)$	4, 2, −2, −1	$4x^2+2x-2x-1$	4	2	2	4	$4x^2-1$
2	$(x-1)(x+1)$	1, 1, −1, −1	$x^2+x-x-1$	4	2	2	4	x^2-1
1	$(2x-1)(x+1)$	2, 2, −1, −1	$2x^2+2x-x-1$	4	2	2	4	$2x^2+x-1$

... al producto que se obtiene al multiplicar (NTP1) por (NTP2)? son iguales ... coeficientes del ...

Ilustración 4-33 Procesos de Saray para la sistematización de la multiplicación de polinomios.

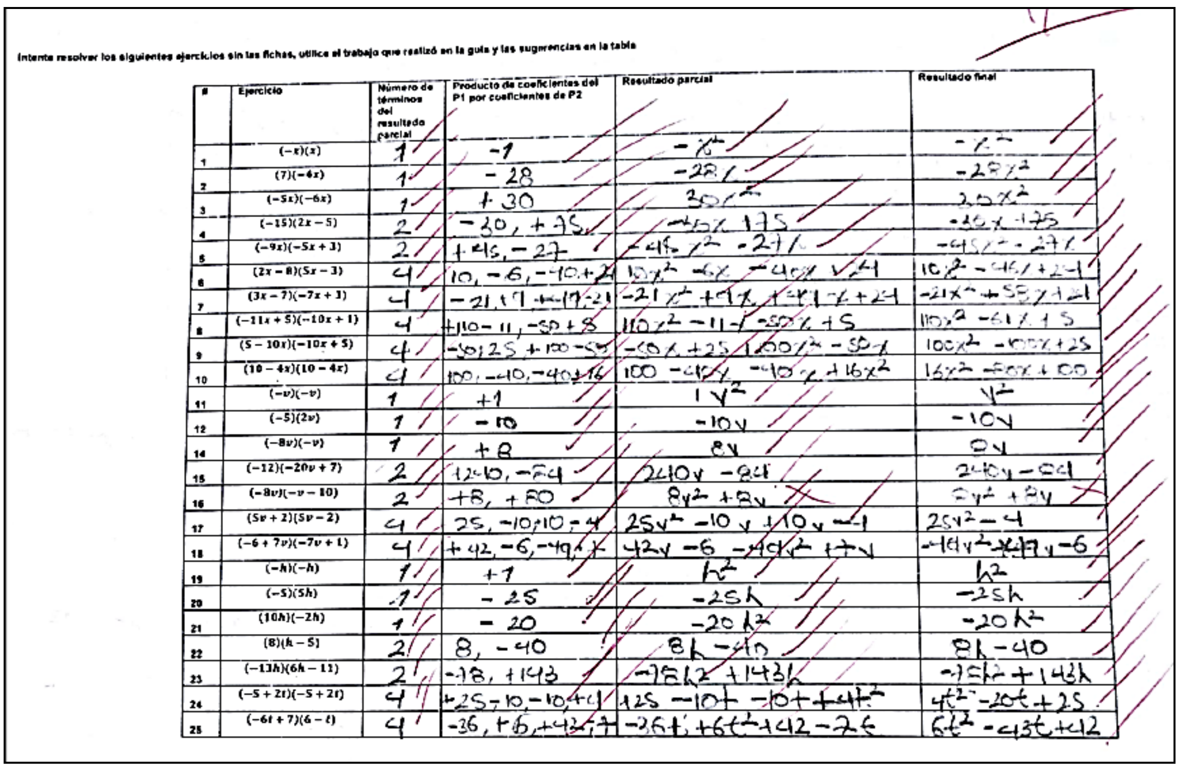
De esta manera, el trabajo realizado en estas sesiones extiende y refuerza los conceptos desarrollados anteriormente. Durante este trabajo se recordó y se reforzó la relación entre el producto del número de términos de cada factor de la multiplicación con el número de términos que se obtiene en el producto intermedio. La ilustración 4-34 muestra este proceso.


multiplicaciones en el resultado parcial que

#	Ejercicio	Número de términos del resultado parcial	Producto de coeficientes del P1 por coeficientes de P2
1	$(-2z + 3y - 1)(x - 2)$	6	-2, +3, -1, +4, -6, +2
2	$(2t - 3h + 2)(2t + h - 5)$	9	+4, -6, +4, +2, -3, +2, -10, +15, -10
3	$(a + 2b - 3c + 4d - 5)(4a - 2b + 1)$	15	4, +8, -12, +16, -20, -2, -4, +6, -8, +10, +1, +2, -3, +4, -5
4	$(4x - 2y)(3x - y - 5)$	6	12, -4, -20, -6, +2, +10
5	$(6 - x)(5x + 4y - 5)$	6	30, +24, -30, -5, -4, +5

Ilustración 4-34 Procesos de Saray para la sistematización de la multiplicación de polinomios.

Para cerrar el trabajo en esta guía, se extendió el concepto trabajado a la multiplicación de polinomios con coeficientes enteros e indeterminadas diferentes de x, se trabajaron más ejercicios en con el fin de reforzar las ideas planteadas por los estudiantes, esto se puede observar en la última tabla de la guía.


Intente resolver los siguientes ejercicios sin las fichas, utilice el trabajo que realizó en la guía y las sugerencias en la tabla

#	Ejercicio	Número de términos del resultado parcial	Producto de coeficientes del P1 por coeficientes de P2	Resultado parcial	Resultado final
1	$(-x)(x)$	1	-1	$-x^2$	$-x^2$
2	$(7)(-4x)$	1	-28	$-28x$	$-28x^2$
3	$(-5x)(-6x)$	1	+30	$30x^2$	$30x^2$
4	$(-15)(2x - 5)$	2	-30, +75	$-30x + 75$	$-30x + 75$
5	$(-9x)(-5x + 3)$	2	+45, -27	$+45x^2 - 27x$	$-45x^2 - 27x$
6	$(2x - 8)(5x - 3)$	4	10, -6, -40, +24	$10x^2 - 6x - 40x + 24$	$10x^2 - 46x + 24$
7	$(3x - 7)(-7x + 3)$	4	-21, +9, +49, -21	$-21x^2 + 9x + 49x + 21$	$-21x^2 + 58x + 21$
8	$(-11x + 5)(-10x + 1)$	4	+110, -11, -50, +5	$110x^2 - 11x - 50x + 5$	$110x^2 - 61x + 5$
9	$(5 - 10x)(-10x + 5)$	4	-50, 25, +100, -50	$-50x + 25 + 100x^2 - 50x$	$100x^2 - 100x + 25$
10	$(10 - 4x)(10 - 4x)$	4	100, -40, -40, +16	$100 - 40x - 40x + 16x^2$	$16x^2 - 80x + 100$
11	$(-v)(-v)$	1	+1	$1v^2$	v^2
12	$(-5)(2v)$	1	-10	$-10v$	$-10v$
14	$(-8v)(-v)$	1	+8	$8v$	$8v$
15	$(-12)(-20v + 7)$	2	240, -84	$240v - 84$	$240v - 84$
16	$(-8v)(-v - 10)$	2	+8, +80	$8v^2 + 8v$	$8v^2 + 8v$
17	$(5v + 2)(5v - 2)$	4	25, -10, 10, -4	$25v^2 - 10v + 10v - 4$	$25v^2 - 4$
18	$(-6 + 7v)(-7v + 1)$	4	+42, -6, -49, +7	$42v - 6 - 49v^2 + 7v$	$-49v^2 + 49v - 6$
19	$(-h)(-h)$	1	+1	h^2	h^2
20	$(-5)(5h)$	1	-25	$-25h$	$-25h$
21	$(10h)(-2h)$	1	-20	$-20h^2$	$-20h^2$
22	$(8)(h - 5)$	2	8, -40	$8h - 40$	$8h - 40$
23	$(-13h)(6h - 11)$	2	-78, +143	$-78h^2 + 143h$	$-78h^2 + 143h$
24	$(-5 + 2t)(-5 + 2t)$	4	+25, -10, -10, +4	$+25 - 10t - 10t + 4t^2$	$4t^2 - 20t + 25$
25	$(-6t + 7)(6 - t)$	4	-36, +6, +42, -7	$-36t + 6t^2 + 42 - 7t$	$6t^2 - 43t + 42$

Ilustración 4-35 Procesos de Saray para la sistematización de la multiplicación de polinomios.

En el proceso de sistematización Saray descubre o redescubre un algoritmo para la multiplicación, esto es muy interesante porque presenta la multiplicación en forma horizontal y si se presta atención a los procesos de multiplicación de Saray en la evaluación de entrada, la forma en la que llevaba a cabo la multiplicación y el paso intermedio de esta, era de manera vertical. El siguiente video muestra el momento exacto en el que descubre o redescubre el algoritmo.

Saray

https://youtu.be/NVBoTH12bwY

Es motivante observar que Saray solo se equivoca en un ejercicio de los veinticinco planteados en la guía de trabajo y que se trata de un error de concentración y/o atención, pues su procedimiento en la columna anterior fue correcto. Además, los estudiantes no cometieron ningún error relevante al trabajar con el material concreto, ni en la representación de este mediante dibujos. Cristian cometió algunos errores en la formalización del concepto relacionados con la multiplicación de enteros, eventualmente se realizó la respectiva retroalimentación.

Luego del trabajo con la guía, se pidió a los estudiantes que propusieran una forma de realizar la multiplicación sin las fichas. La idea que propone Saray, muy similar a la de sus compañeros, se muestra en la ilustración 4-36.

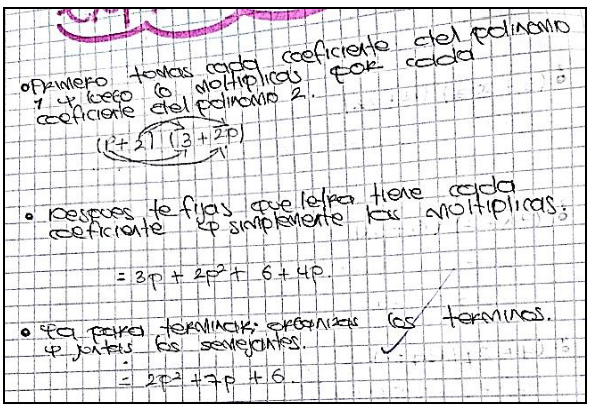


Ilustración 4-36 algoritmo para la multiplicación propuesto por Saray.

Saray propone el siguiente algoritmo para la multiplicación:

“Primer tomas cada coeficiente del polinomio 1 y luego lo multiplicas por cada coeficiente del polinomio 2

$$(p+2)(3+2p)$$

Después te fijas qué letra tiene cada coeficiente y simplemente las multiplicas

$$= 3p + 2p^2 + 6 + 4p$$

Ya para terminar examinas los términos y juntas los semejantes

$$= 2p^2 + 7p + 6\text{”.}$$

Luego se les pidió poner a prueba este algoritmo con algunos ejercicios de profundización, la ilustración 4-37 muestra los procedimientos de Saray:

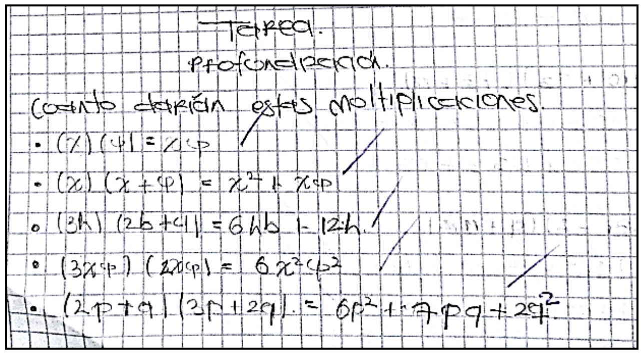


Ilustración 4-37 Procesos de Saray para la multiplicación de polinomios.

Para cerrar el trabajo de estas sesiones, se realizó un taller de multiplicación con indeterminadas diferentes de x y coeficientes enteros. Parte de los procesos de Saray se presentan en la ilustración 4-38.

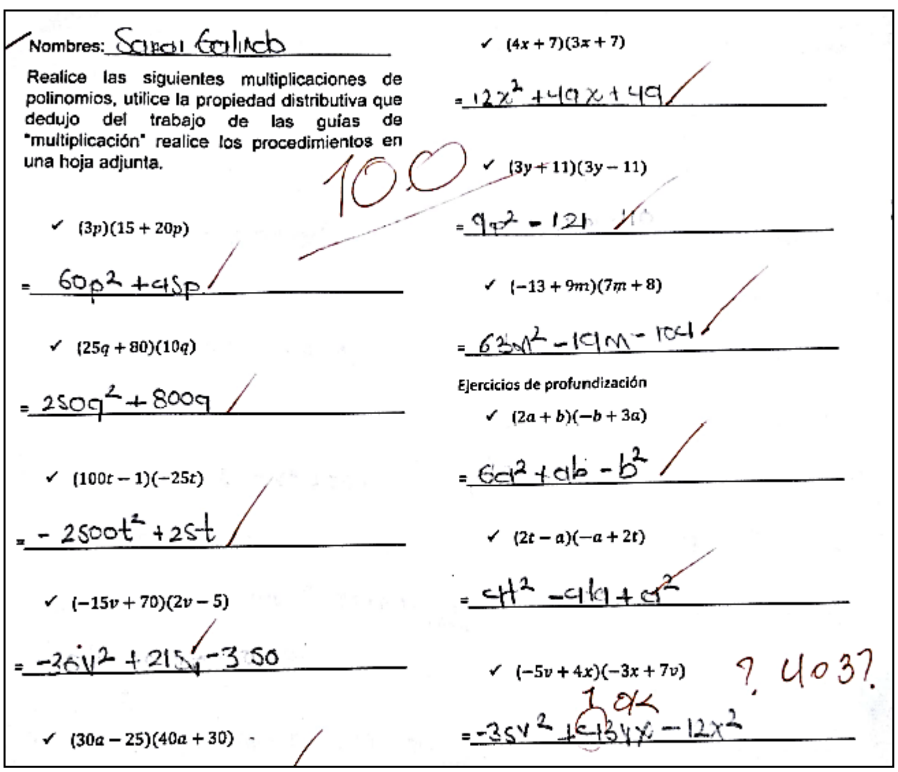


Ilustración 4-38 Procesos de Saray para la multiplicación de polinomios.

Saray y David no presentaron dificultades ni cometieron errores en el desarrollo de la guía, las dificultades que presentan Karen y Cristian se asocian con las tablas de multiplicar y el producto de indeterminadas, estas se muestran en la ilustración 4-39.

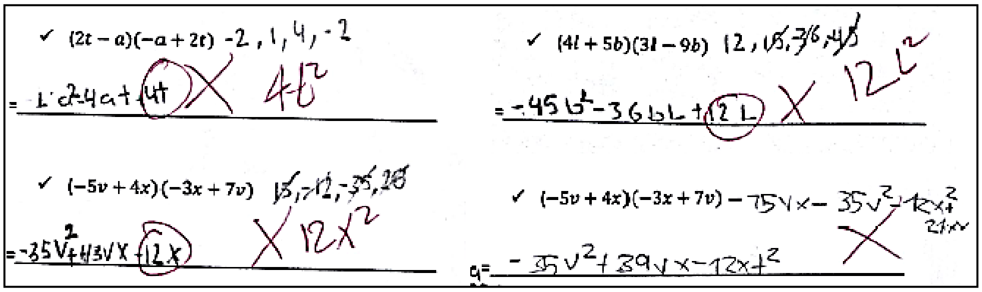


Ilustración 4-39 Procesos de Cristian para la multiplicación de polinomios.

Algunos de los procesos en los talleres fueron registrados en video, a continuación, se presenta un enlace

David

https://youtu.be/yIiDPp1Jqh8

5. Capítulo 5

5.1 Factorización.

El trabajo de factorización se llevó a cabo durante varias sesiones, pues conectaba todos los temas trabajados en la secuencia hasta el momento.

A lo largo de todas las sesiones se realizaron varias particularizaciones con el fin de llegar a una regla que recogiera todos los “*casos de factorización”* que involucran a los polinomios de grado dos. Para esto se trabajaron en principio binomios, buscando que los estudiantes dedujeran el factor común de dos términos y que eventualmente extendieran esta idea para factorizar polinomios de grados dos.

Antes de trabajar con los estudiantes la teoría y las *reglas de juego,* se retomó la multiplicación para dar un significado geométrico a la factorización y relacionar estas dos operaciones.

A manera de ejercicio, y para recordar lo trabajado en sesiones anteriores David colaboró resolviendo la multiplicación que se muestra en la ilustración 5-1 mediante el uso de lenguaje algebraico y el algoritmo desarrollado en sesiones anteriores.

David

https://youtu.be/SLxIZSkDUjg

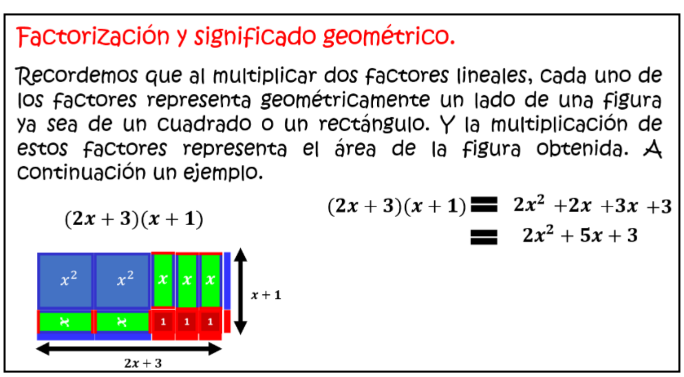


Ilustración 5-1 multiplicación de binomios lineales mediante el uso del material.

Recordando que los factores en la multiplicación representan los lados de un rectángulo y el producto el área del rectángulo obtenido, factorizar es entonces un proceso *inverso* a la multiplicación. Es decir, esta vez los estudiantes tienen un polinomio de grado dos (un área) que se puede representar mediante la caja de polinomios, y con este material se debe armar un rectángulo y determinar sus lados.

Factorizar es entonces un proceso inverso a la multiplicación, es decir dado el polinomio que representa el área de un rectángulo, se busca determinar los lados de este rectángulo.

Dos casos; trinomios y binomios.

Para poder desarrollar la factorización utilizando el material didáctico, dividiremos nuestros ejercicios en dos casos, los que son trinomios (tres términos) y los que son binomios (dos términos), comenzaremos con los binomios.

Binomios.

Utilizaremos las fichas para formar el rectángulo o el cuadrado que sea más "eficiente" comenzando ya sea con las fichas que representan la unidad (1) y las que representan a las x^2.

Ilustración 5-2 Idea básica detrás de la factorización con la caja de polinomios.

La factorización de los binomios buscaba que las expresiones factorizadas fuesen tal que por los menos uno de los dos factores fuese *irreducible,* a esto en las fichas se le denominó el rectángulo o cuadrado más *eficiente*. Se recomendó a los estudiantes siempre comenzar organizando los cuadrados, ya fuesen tipo x^2 o tipo 1

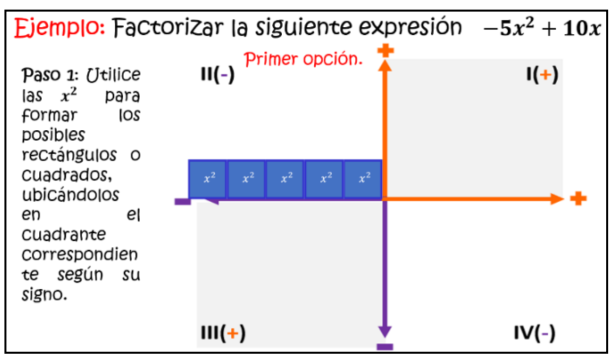


Ilustración 5-3 factorización de polinomios mediante la caja de polinomios.

El siguiente paso era completar el rectángulo con las fichas tipo x, entonces se presentaban varias opciones dependiendo de los coeficientes de los binomios, de esta manera, tanto en los ejemplos como en los ejercicios, se buscaron binomios que tuvieran solo dos divisores comunes 1 y otro divisor diferente a 1 (particularizaciones necesarias para sistematizar los resultados de manera efectiva), ya que si se escogían por ejemplo un binomio como $8x + 8$, habría cuatro formas de presentar el rectángulo por tener 8 y 8 cuatro divisores comunes, la ilustración 5-4 muestra las posibles configuraciones.

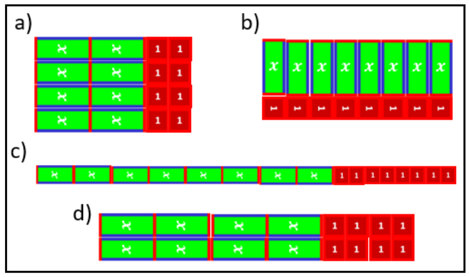


Ilustración 5-4 posibles encuadres para la factorización de $8x + 8$.

Se busca entonces, que los estudiantes determinen al armar la figura el factor o lado que contenga el máximo común divisor de los dos términos del binomio.

Continuando con el ejemplo

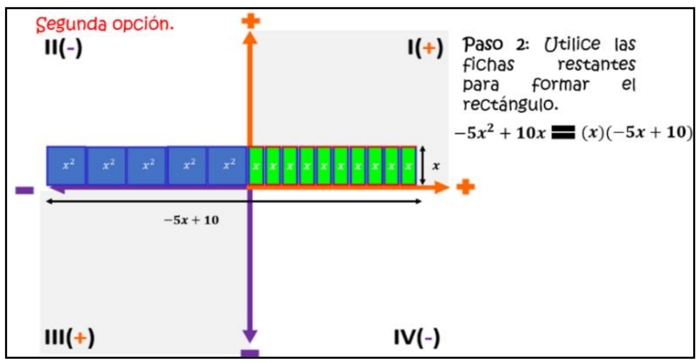


Ilustración 5-5 factorización de polinomios mediante la caja de polinomios.

Sin embargo, el primer factor no contiene el máximo común divisor entre los términos del binomio, de esta manera se debe reconfigurar la figura buscando que sea más *eficiente:*

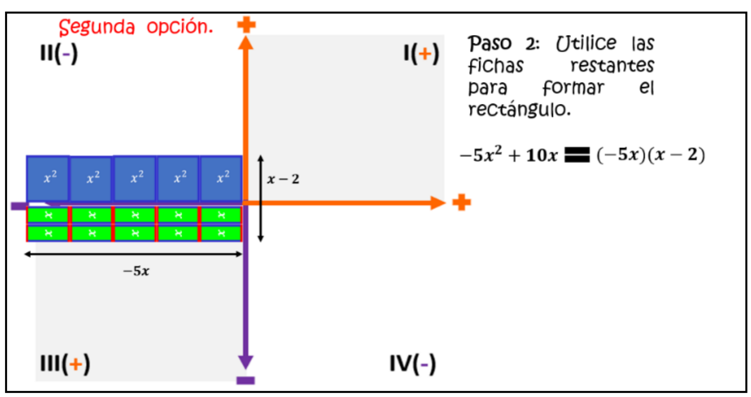


Ilustración 5-6 factorización de polinomios mediante la caja de polinomios.

El trabajo de los estudiantes en la factorización de binomios se muestra a continuación, se toma como referencia a Karen:

$$6x^2 + 2x; \quad 9x + 6x^2; \quad -6x + 4x^2;$$

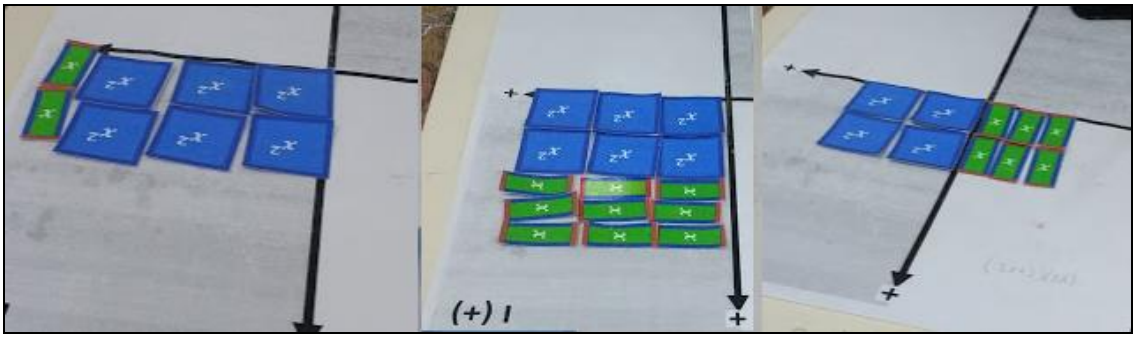


Ilustración 5-7 procesos de Karen para la factorización de polinomios.

La trasncripcion pictórica se muestra en la ilustración 5-8.

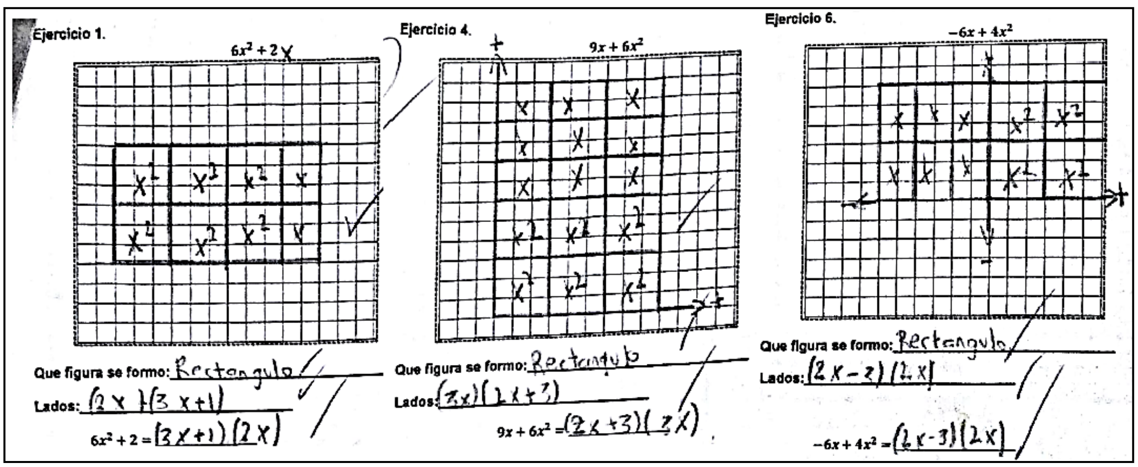
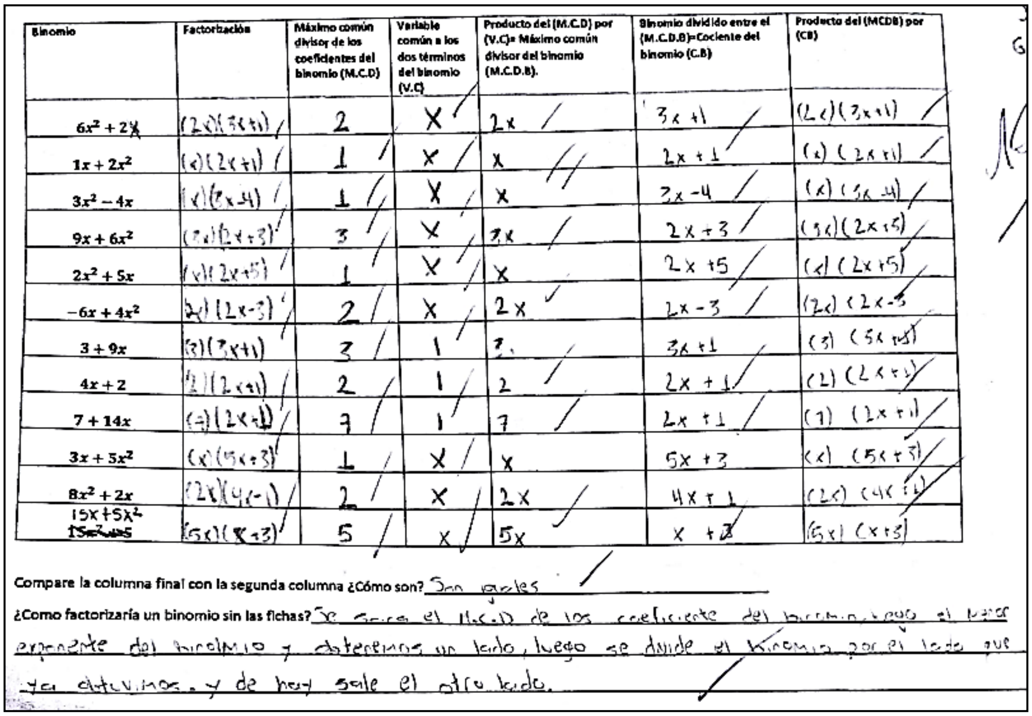


Ilustración 5-8 procesos de Karen para la factorización de polinomios.

Karen y sus compañeros no cometieron errores a lo largo del trabajo, a excepción de Cristian que cometió un error en una multiplicación a lo largo de todo su trabajo, no se presentaron errores en las operaciones con el material concreto, ni en las representaciones pictóricas. Se realizó entonces la sistematización del trabajo de los estudiantes mediante la tabla que se muestra en la ilustración 5-9.



Binomio	Factorización	Máximo común divisor de los coeficientes del binomio (M.C.D)	Variable común a los dos términos del binomio (V.C)	Producto del (M.C.D) por (V.C)= Máximo común divisor del binomio (M.C.D.B).	Binomio dividido entre el (M.C.D.B)=Cociente del binomio (C.B)	Producto del (MCDB) por (CB)
$6x^2+2x$	(2x)(3x+1)	2	x	2x	3x+1	(2x)(3x+1)
$1x+2x^2$	(x)(2x+1)	1	x	x	2x+1	(x)(2x+1)
$3x^2-4x$	(x)(3x-4)	1	x	x	3x-4	(x)(3x-4)
$9x+6x^2$	(3x)(2x+3)	3	x	3x	2x+3	(3x)(2x+3)
$2x^2+5x$	(x)(2x+5)	1	x	x	2x+5	(x)(2x+5)
$-6x+4x^2$	(2x)(2x-3)	2	x	2x	2x-3	(2x)(2x-3
$3+9x$	(3)(3x+1)	3	1	3	3x+1	(3)(3x+1)
$4x+2$	(2)(2x+1)	2	1	2	2x+1	(2)(2x+1)
$7+14x$	(7)(2x+1)	7	1	7	2x+1	(7)(2x+1)
$3x+5x^2$	(x)(5x+3)	1	x	x	5x+3	(x)(5x+3)
15x+5x²	(5x)(x+3)	5	x	5x	x+3	(5x)(x+3)
$8x^2+2x$	(2x)(4x-1)	2	x	2x	4x+1	(2x)(4x+1)

Compare la columna final con la segunda columna ¿Cómo son? Son iguales

¿Como factorizaría un binomio sin las fichas? Se saca el M.C.D de los coeficiente del binomio, luego el menor exponente del binomio y obtenemos un lado, luego se divide el binomio por el lado que ya obtuvimos, y de hay sale el otro lado.

Ilustración 5-9 sistematización de los procesos de Karen para la factorización de polinomios.

La segunda columna recoge todos los ejercicios que se trabajaron a lo largo de la guía, lo que quiere decir que las factorizaciones que aparecen en esta columna son producto del trabajo realizado con la caja de polinomios. Nuevamente se consideró conveniente que los estudiantes trabajaran primero con los coeficientes de los binomios y luego relacionarlos con las indeterminadas, es así como en la columna tres se pide determinar el máximo común divisor (MCD) de los coeficientes del binomio, en la columna cuatro se pide identificar la indeterminada que tenían en común los términos del binomio, la columna cinco arroja el producto del MCD de los coeficientes y la indeterminada común a los términos del polinomio, a este resultado se le denominó el máximo común divisor de los términos del binomio (MCDB), que sería el primer factor; luego mediante división se obtiene el segundo factor:

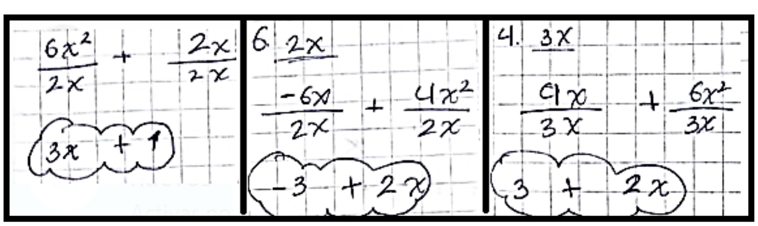


Ilustración 5-10 procesos de Karen para la factorización de polinomios

Se escribe la multiplicación de los factores contenidos en la quinta y sexta columnas y por último se comparan las columnas dos y siete, la columna dos obtenida mediante la caja de polinomios y la columna siete obtenida con el trabajo mediante la tabla.

Se reescribe una fila del trabajo de Karen, y se retoma su idea de cómo factorizar un binomio.

Tabla 5-1 Sistematización de la factorización

Binomio	**Factorización**	**Máximo común divisor entre los coeficientes del binomio**	**Indeterminada común de menor exponente a los términos del binomio (IC)**	**Producto del MCD por la IC=máximo común divisor del binomio (MCDB)**	**Binomio dividido entre el (MCDB)= Cociente del binomio (CB)**	**Producto del MCDB por el CB**
$-6x+4x^2$	$(2x)(2x-3)$	2	x	$2x$	$(2x-3)$	$(2x)(2x-3)$

A la pregunta ¿Cómo factorizaría un binomio sin las fichas? Karen escribe lo siguiente:

"*se saca el MCD de los coeficientes del binomio, luego el menor exponente del binomio y obtenemos **un lado**, luego se divide el binomio por **el lado** que ya obtuvimos y de ahí sale **el otro lado***"

La idea que propone Karen fue elaborada a la par con sus compañeros en una discusión grupal. Es de destacar que no solo propusieron un algoritmo retórico que permite determinar la factorización de un binomio sin ayuda de la caja de polinomios, sino que en el algoritmo se le asigna un significado geométrico a cada factor. Por ejemplo, el factor común es considerado como una lado horizontal o vertical (de un rectángulo o cuadrado) y el otro factor es el lado faltante.

En la siguiente sesión se empezó a trabajar con trinomios haciendo énfasis en la idea de *los encuadres mínimos*, la explicación que se llevó a cabo en la clase se muestra en las ilustraciones 5-11 a la 5-15.

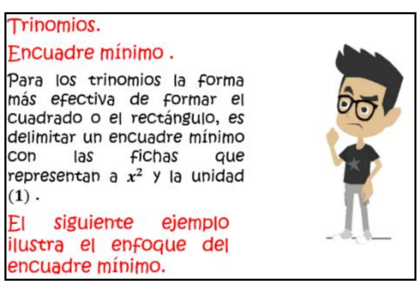


Ilustración 5-11 Idea de los encuadres mínimos.

Aunque para factorizar un trinomio es posible “armar” el rectángulo de diferentes maneras, por ejemplo, para el trinomio $2x^2 + 4x + 2$ existen diferentes configuraciones, como se muestra en la ilustración5-12.

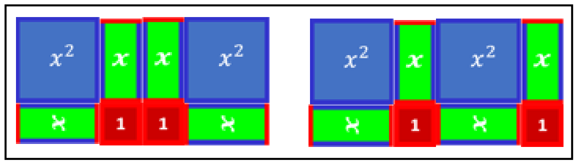


Ilustración 5-12 posibles configuraciones para la factorización de $\mathbf{2x^2 + 4x + 2}$

La idea de los encuadres mínimos ofrece ventajas para los estudiantes al trabajar la factorización, por ejemplo; les permite hallar con mayor celeridad el rectángulo que se forman con los términos del trinomio y relaciona los rectángulos obtenidos con la multiplicación. Se muestra en la ilustración 5-13, seis de los posibles encuadres mínimos que se pueden formar para el trinomio $2x^2 + 4x + 2$.

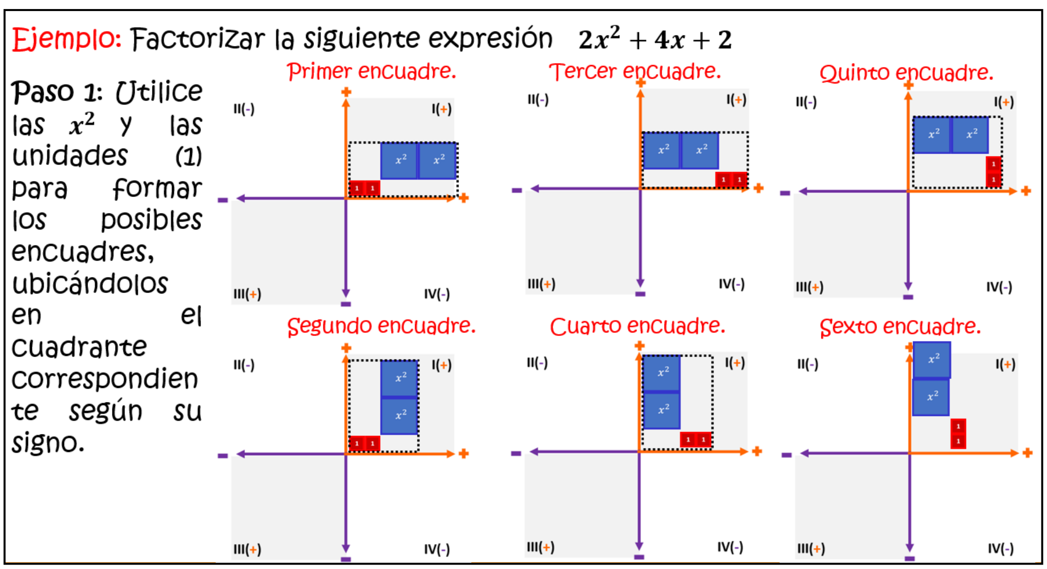


Ilustración 5-13 factorización de polinomios mediante el uso de la caja de polinomios.

Una vez se tienen los posibles encuadres, se intenta completar el rectángulo o cuadrado con las fichas tipo x que brinda el trinomio, sin que sobre o falte ningún tipo de ficha. En este caso, cuatro de ellas.

Tal y como se observa en la ilustración 5-14, no todos los encuadres funcionan, por lo que los estudiantes deberán ir jugando y explorando, para determinar qué encuadre conviene más para cada trinomio. Saray, por ejemplo, al tratar de factorizar $-2x^2 + 4x - 2$, señala que este procedimiento es como un juego.

Karen y Saray

https://www.youtube.com/watch?v=Vo1bkw0uO7o

"**_Karen:_** *y ahí ya no sé qué hacer, porque me quedó mal*

Saray: *Es que empieza a jugar con las fichas puedes pasar esta para acá, así, eso es como jugar Tetris, algo así*

Karen: *Uy Saray es re-inteligente*"

Retomando el ejemplo

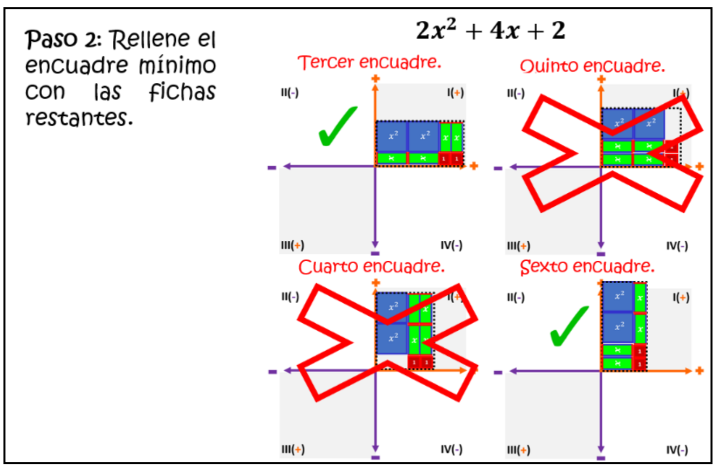


Ilustración 5-14 factorización de polinomios mediante el uso de la caja de polinomios.

Cabe señalar que el tercer encuadre también era una opción y que para este trinomio hay ocho encuadres que permiten determinar la factorización. Basta con rotar el rectángulo que aparece en el tercer cuadrante a favor o en contra de las manecillas del reloj para identificar cuatro de los posibles encuadres que pueden utilizarse. Los otros cuatro se dan si se rota la figura 180° respecto al eje vertical u horizontal y se rota nuevamente a favor o en contra de las manecillas del reloj.

Para hallar la factorización se determinan los lados de la figura, teniendo en cuenta los signos de los ejes del plano cartesiano. En la ilustración 5-15 se tiene $(2x + 2)(x + 1)$ para el tercer encuadre de la ilustración 5-13. Y para el sexto encuadre de la ilustración 5-13

$(x+1)(2x+2)$, expresiones equivalentes y que a la vez refuerzan de manera implícita la ley conmutativa para la multiplicación de binomios.

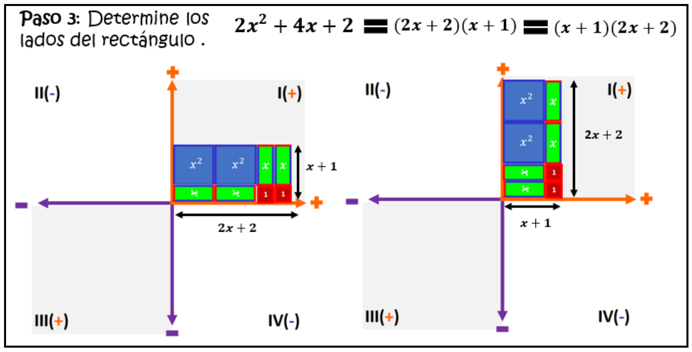


Ilustración 5-15 factorización de polinomios mediante el uso de la caja de polinomios.

En el caso en el que el trinomio tenga términos negativos se hace uso de los cuadrantes II y/o IV. En las ilustraciones 5-16 a la 5-18 se observa un ejemplo de factorización donde se hace uso del cuadrante IV para factorizar la expresión x^2-1, conocida como *diferencia de cuadrados*. En este caso se debe escribir el binomio como un trinomio, esto es $x^2-1 = x^2+0x-1$

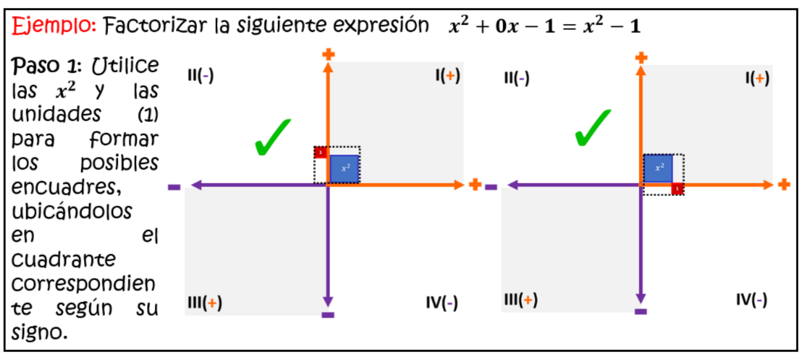


Ilustración 5-16 factorización de polinomios mediante el uso de la caja de polinomios.

Determinado el encuadre mínimo se rellena con fichas opuestas tipo x

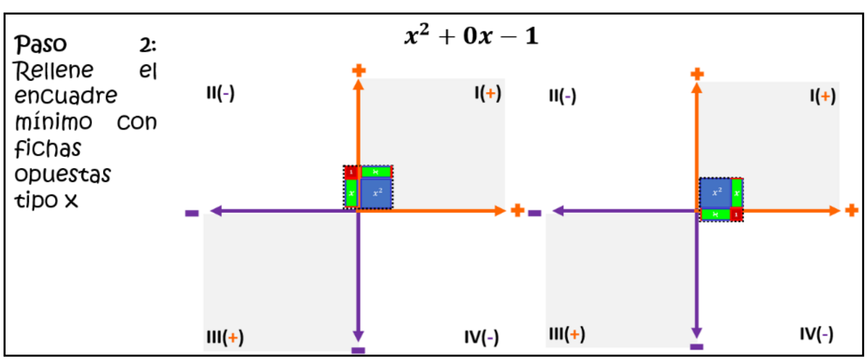


Ilustración 5-17 factorización de polinomios mediante el uso de la caja de polinomios.

Así, $x^2 - 1$ queda representado mediante la caja de polinomios como $x^2 + x - x - 1$. Por último, se determinan los lados del cuadrado.

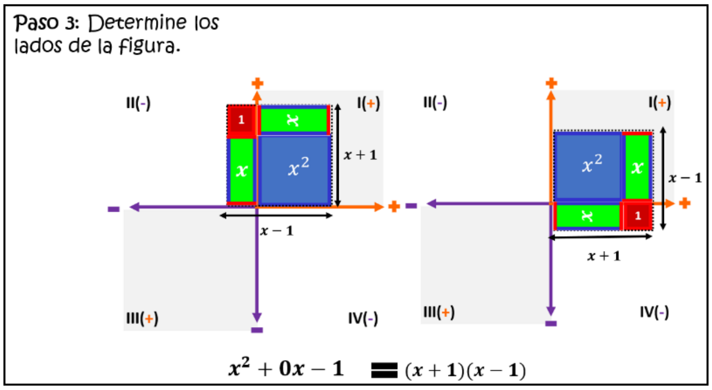


Ilustración 5-18 factorización de polinomios mediante el uso de la caja de polinomios.

Una vez se realizó la explicación de la factorización de trinomios, se comenzó a trabajar, como de costumbre, con una cantidad importante de particularizaciones.
Se dio inicio al trabajo con una serie de once ejercicios que contenían tanto binomios como trinomios. Este trabajo fue de carácter exploratorio en el caso de los trinomios, y de refuerzo para el caso de los binomios.

Se toma como referencia el trabajo de Cristian, quien al igual que sus compañeros, no cometió ningún error en el desarrollo de los ejercicios o particularizaciones. Las ilustraciones 5-19 y 5-20 muestran el trabajo concreto, la transcripción a dibujos y lenguaje algebraico.

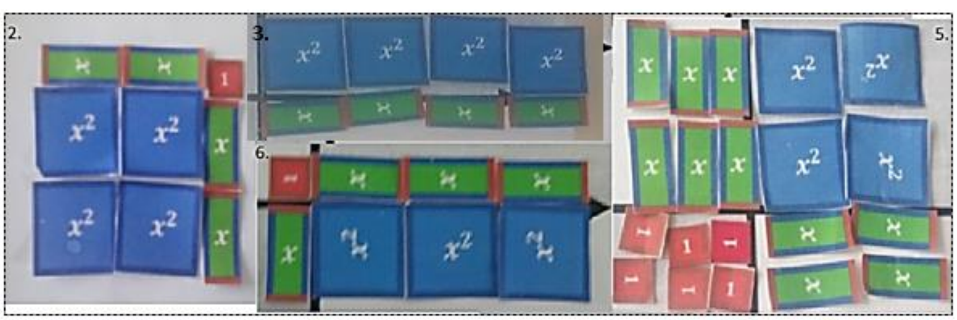


Ilustración 5-19 Procesos de factorización de Cristian mediante el uso de la caja de polinomios.

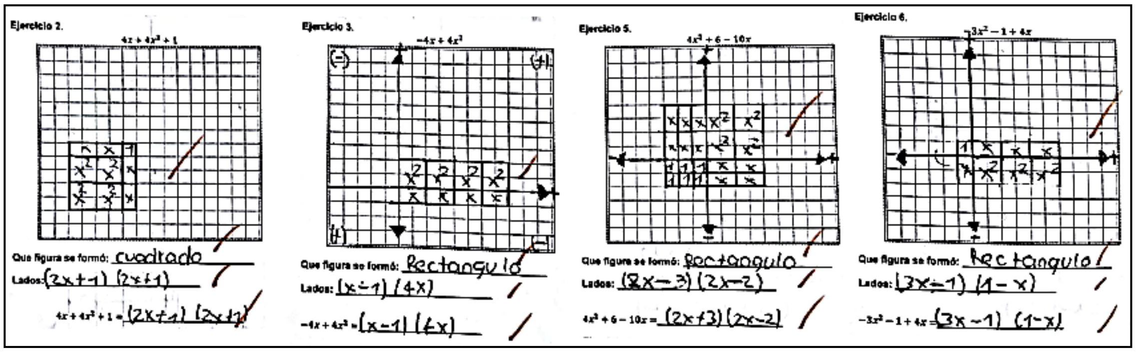


Ilustración 5-20 Procesos de factorización de Cristian mediante el uso de la caja de polinomios.

"Ejercicio 2

$4x + 4x^2 + 1 = (2x + 1)(2x + 1)$ *Cuadrado*

Ejercicio 3

$-4x + 4x^2 = (x - 1)(4x)$ *Rectángulo*

Ejercicio 5

$4x^2 + 6 - 10x = (2x - 3)(2x - 2)$ *Rectángulo*

Ejercicio 6

$-3x^2 - 1 + 4x = (3x - 1)(1 - x)$ *Rectángulo"*

Es interesante observar que cuando solo se trata de manejar el material y transcribir los dibujos, Cristian tiende a no equivocarse. También es importante recordar que esta es la primera vez que los estudiantes trabajan factorización, el material parece hasta el momento ser una buena herramienta para la enseñanza de este tema en particular.

El siguiente trabajo consistía en utilizar lo cosechado del taller de factorización y la guía de factor común, para que los estudiantes propusieran un algoritmo para la factorización de polinomios de grado dos. Para lograr esto, se utilizaron dos guías que contenían en total treinta y cinco particularizaciones y dos tablas para organizar, comparar y sistematizar las respuestas obtenidas con la caja de polinomios.

Se analiza parte del trabajo de David de la primera guía que se muestra en las ilustraciones 5-21 y 5-22.

En la ilustración 5-21 se observa el trabajo realizado con la caja de polinomios, el ejercicio 6 requiere de dos pasos y el ejercicio 10. Solamente de uno. En la ilustración 5-22 David transcribe su trabajo mediante dibujos y lenguaje algebraico.

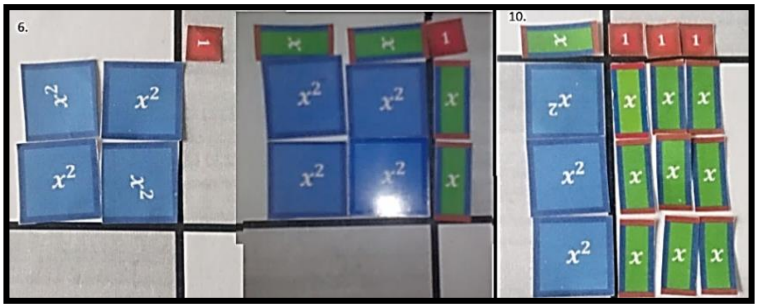


Ilustración 5-21 Procesos de factorización de David mediante el uso de la caja de polinomios.

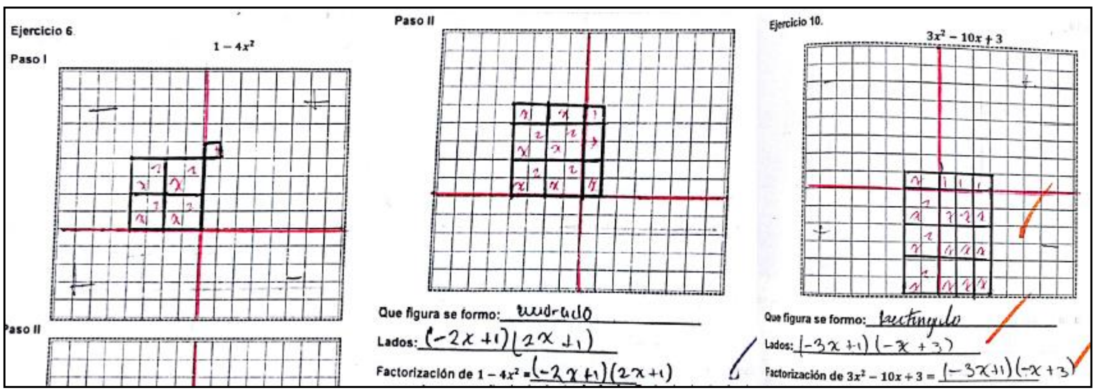


Ilustración 5-22 Procesos de factorización de David mediante el uso de la caja de polinomios.

David realiza un excelente trabajo a lo largo de toda la guía y el proceso de las cinco etapas, en un pequeño descuido dibuja en el paso dos el paso I pero no comete ningún error de importancia. Se utilizaron diferentes tipos de particularizaciones, por ejemplo, en los ejercicios tres y cuatro se recurrió a trinomios cuyo coeficiente principal era negativo y no están escritos en un orden particular (ascendente o descendente).

El hecho de que los estudiantes puedan factorizar estas expresiones sin "ordenarlas" desde el principio, muestra la versatilidad del material y probablemente implanta la idea que expresiones como

$$6-2x^2-x \quad \text{y} \quad -2x^2-x+6$$

son iguales.

En esta sesión de ejercicios Cristian y Saray cometen algunos errores, la frecuencia con la que aparecen errores se da en mayor medida en la etapa en la que tienen que transcribir sus respuestas al lenguaje algebraico y en algunos casos al ubicar las fichas en el tablero. Cristian y Saray manifiestan, que no se trata de falta de comprensión, sino que son descuidos relacionados a su concentración:

> *“**Profesor:** ¿A qué creen que se deben los errores que se están cometiendo, no están entendiendo O…?*
> ***Cristian**: no profe, si yo entiendo re bien, es que me da pereza escribir, pero ya.*
> ***Saray:** si profe, yo entiendo, es solo que a veces me desconcentro.”*

Las ilustraciones 5-23 y 5-24 muestran los errores cometidos por Cristian y por Saray

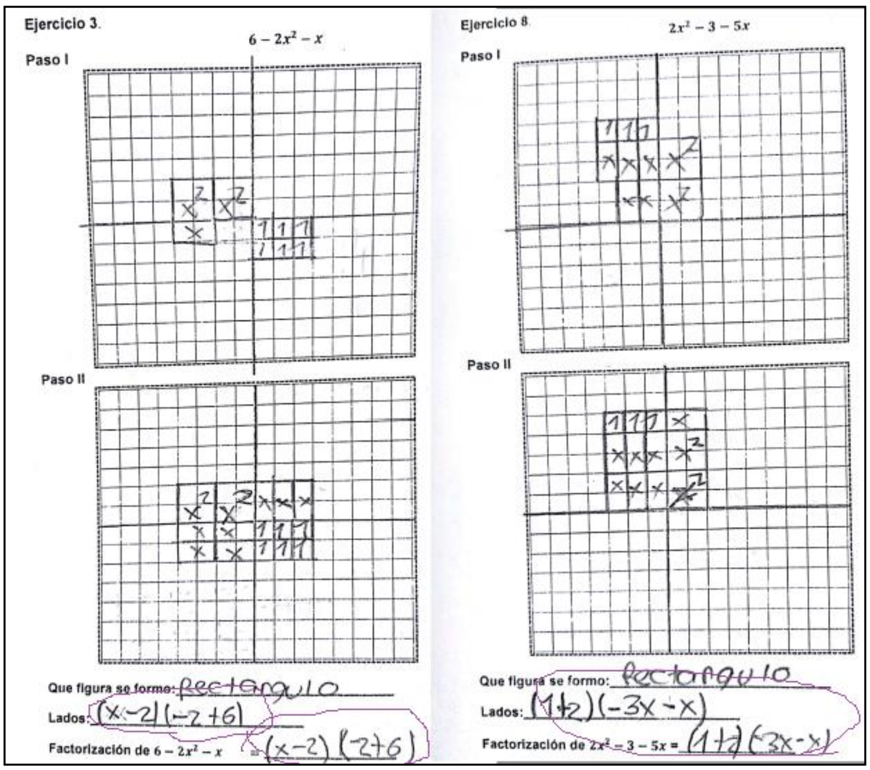


Ilustración 5-23 errores en los procesos de factorización.

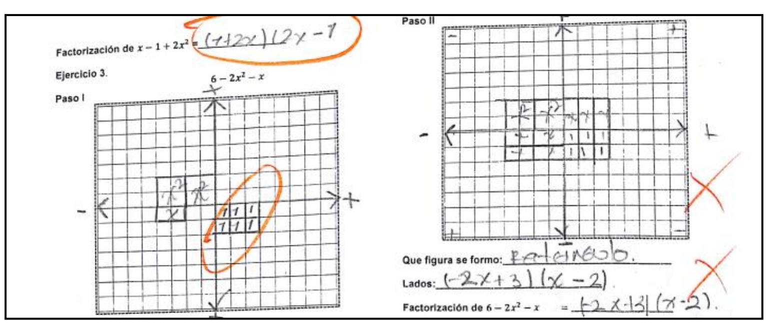


Ilustración 5-24 errores en los procesos de factorización.

El trabajo que se ha desarrollado hasta este punto muestra situaciones muy interesantes relacionadas a los errores que comenten los estudiantes cuando trabajan con el material. Se observa que se comenten pocos errores al trabajar con la caja de polinomios, y los errores que se cometen están relacionados con la ubicación de las fichas en los cuadrantes, que se propagan a la representación mediante dibujos y por supuesto, a la transcripción al lenguaje simbólico algebraico. Esto tiende a dificultar la sistematización de los resultados obtenidos y eventualmente la formulación de los algoritmos.

Es posible que los errores que se cometen al ubicar las fichas en el tablero estén relacionados con el diseño del plano cartesiano impreso, porque, aunque en los ejemplos que se desarrollaron en clase los planos tenían diferenciados, mediante colores, los ejes positivos y negativos, así como los cuadrantes positivos y negativos, las impresiones al ser en blanco y negro no tenían un impacto visual en los estudiantes. Se cree entonces que, si al material impreso se le asignara un color para ejes y cuadrantes negativos y otro para ejes y cuadrantes positivos, el porcentaje de errores podría decrecer.

Por último, las transcripciones al lenguaje algebraico requieren especial atención por parte del docente, sobre todo cuando se organizan los datos para la sistematización en la tabla, si bien es complicado hacerle seguimiento a todos los estudiantes cuando se encuentren en este proceso, se recomienda que los estudiantes comparen su trabajo con un par, de esta manera los estudiantes aprecian el trabajo de sus compañeros y pueden identificar algunos errores basados en la comparación.

Continuando con el análisis del trabajo de David, en las ilustraciones 5-25 y 5-26 se muestra la sistematización de su trabajo.

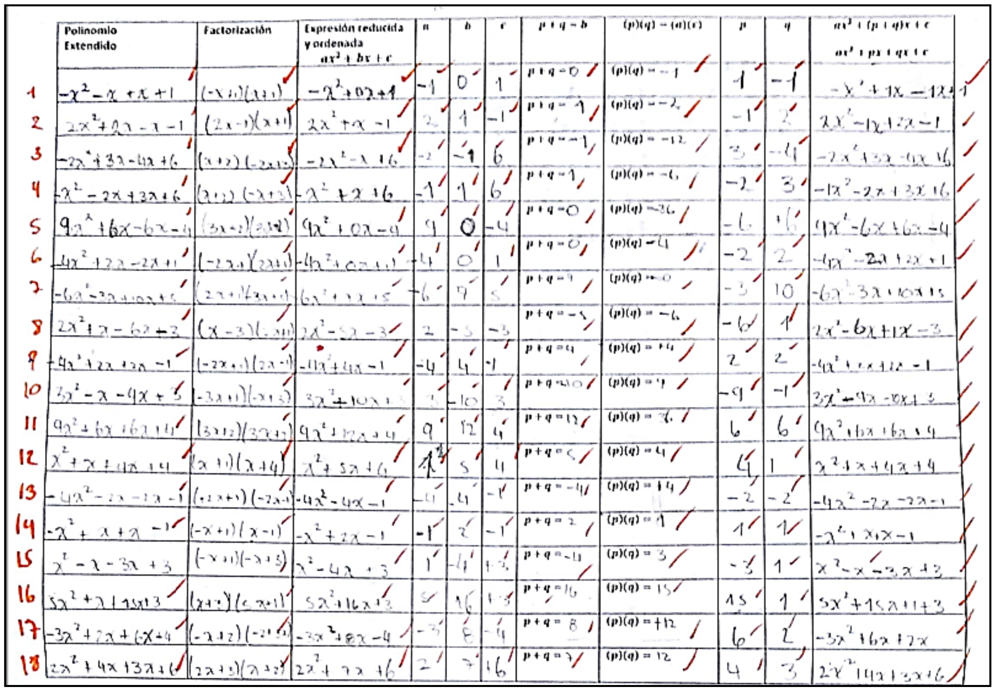


Ilustración 5-25 Sistematización de los procesos de David para la factorización de polinomios.

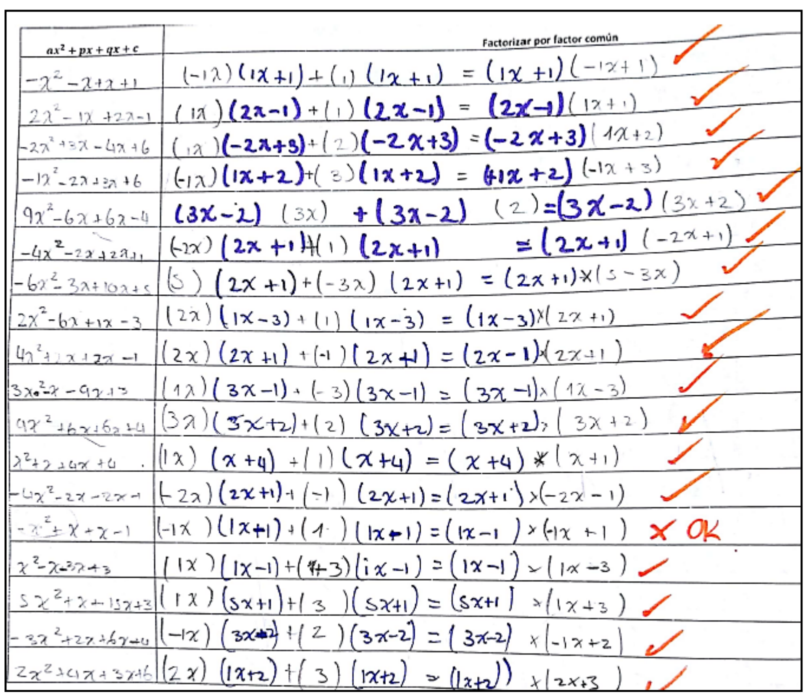


Ilustración 5-26 Sistematización de los procesos de David para la factorización de polinomios.

Se realiza la transcripción de dos filas de las tablas que recogen el trabajo de David, estos dos ejercicios fueron mostrados en su representación concreta y mediante dibujos en las ilustraciones 5-21 y 5-22.

Vale la pena señalar que, ni en esta guía ni en la siguiente se pidió al estudiante formular un algoritmo para la factorización, en su lugar, se pidió que en el trabajo final de factorización se establecieran criterios que definieran cuándo un polinomio de grado dos es o no factorizable.

Tabla 5-2 Sistematización de los procesos de David para la factorización de polinomios.

#	**Polinomio extendido**	**Factorización**	**Expresión reducida y ordenada**	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$
6	$-4x^2+2x-2x+1$	$(-2x+1)(2x+1)$	$-4x^2+0x+1$	-4	0	1
10	$3x^2-x-9x+3$	$(-3x+1)(-x+3)$	$3x^2-10x+3$	3	-10	3

$\boldsymbol{p+q=b}$	$\boldsymbol{(p)(q)=(a)(c)}$	$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{ax^2+(p+q)x+c}$ $\boldsymbol{ax^2+px+qx+c}$
$p+q=0$	$(p)(q)=-4$	-2	2	$-4x^2+2x-2x+1$
$p+q=-10$	$(p)(q)=9$	-9	-1	$3x^2-x-9x+3$

En seguida, se explica la intención de cada columna. En la segunda columna se pedía a los estudiantes que escribieran el polinomio extendido, esto lo facilitaba el trabajo realizado con la caja de polinomios una vez se había logrado formar el cuadrado o el rectángulo. Cada grupo de fichas contenido en el rectángulo es un término del polinomio y el signo de cada término depende del cuadrante en el que el grupo este contenido. La tercera columna, también obtenida mediante la caja de polinomios, recoge la factorización, que no son más que los lados del cuadrado o rectángulo. Si se presta atención al trabajo realizado por David, se observa que la factorización tanto del ejercicio seis y diez presentan una escritura particular (ver tabla 5-2), esto puede deberse a la forma en la que David armó el rectángulo (en el ejercicio 10, ver ilustraciones 5-21 y 5-22) y la manera en la que organiza los términos dentro de cada factor. Las columnas cuatro, cinco y seis empiezan a recolectar y sistematizar la información que se tiene del polinomio, para lograr la factorización sin ayuda de la caja de polinomios.

La séptima y octava columnas establecen relaciones entre los coeficientes del trinomio y dos números nuevos que serán representados por las letras p y q y que serán clave para la factorización de polinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, (con a, b y c enteros) sin la ayuda del material. Estos dos números, como ya se mostró en el marco disciplinar, cumplen dos condiciones establecidas en las columnas siete y ocho de la tabla 5-2, deben ser tales que $p + q = b$ y $(p)(q) = (a)(c)$. Cuando se factoriza teniendo en cuenta el encuadre mínimo, los números p y q son arrojados por el trabajo realizado con la caja de polinomios, y son los coeficientes de los términos representados en el cuadrado o rectángulo por las fichas tipo x. Por ejemplo, en el trinomio $-3x^2 + x + 4$, los números que satisfacen las condiciones $p + q = 1$ y $(p)(q) = -12$ son $p = -3$ y $q = 4$, p y q son indistintos, es decir, en cualquier caso se pudo haber escrito $p = 4$ y $q = -3$. La ilustración 5-27 muestra que los números p y q corresponden a los coeficientes de las fichas tipo x contenidas en los cuadrantes I y II (esto se puede ver de forma general en la ilustración 2-6).

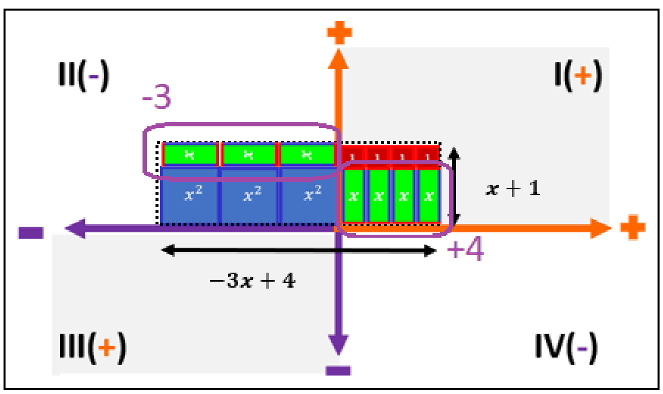


Ilustración 5-27 Los números p y q siempre están contenidos en la configuración que se logra en la caja de polinomios.

Aunque se esperaba que los estudiantes reconocieran a p y q dentro del cuadrado o rectángulo que armaban utilizando la caja de polinomios, en la práctica se dio solo hasta la última guía de trabajo de factorización, en los trabajos anteriores la forma en la que determinaron los valores de p y q fue mediante *tanteo*, lo que se consideró como una oportunidad para que repasaran las tablas de multiplicar y la suma con números enteros.

En la última columna se pide escribir el polinomio extendido en la forma $ax^2 + px + qx + c$, recordando que este se obtiene mediante el trabajo desarrollado en las columnas 4 a 11, es decir, sin ayuda de la caja de polinomios. Luego, se pide comparar el polinomio obtenido en la columna doce con el polinomio extendido brindado por la caja de polinomios en la columna dos, los cuales deben coincidir.

Tabla 5-3 Sistematización de los procesos de David para la factorización de polinomios

$\boldsymbol{ax^2 + px + qx + c}$	**Factorización por factor común**
$-4x^2 - 2x + 2x + 1$	$(-2x)(\mathbf{2x+1}) + (1)(\mathbf{2x+1}) = (\mathbf{2x+1})(-2x+1)$
$3x^2 - x - 9x + 3$	$(1x)(\mathbf{3x-1}) + (-3)(\mathbf{3x-1}) = (\mathbf{3x-1})(1x-3)$

La tabla 5-3 retoma lo trabajado en la tabla 5-2 en su primera columna y en la segunda columna los estudiantes utilizan el algoritmo que construyeron en la guía de factor común para llevar a cabo la factorización del trinomio, tomando el factor común de los dos primeros términos y el factor común de los términos tres y cuatro. Esto arroja una expresión equivalente como muestra la tabla 5-3, cuyos sumandos tienen un nuevo factor común. De esta manera se logra la factorización del trinomio.

Los estudiantes utilizaron como recurso un color diferente para facilitar la identificación del factor común de la expresión que se determinaba en la segunda columna de la tabla 5-3. Para finalizar el trabajo se comparaba la factorización obtenida con la caja de polinomios (columna 3) y la lograda mediante el trabajo realizado en las columnas de la 4 a la 11 y en la columna 2 de la tabla 5-3.

El trabajo de la siguiente guía (guía tres) de esta sesión tiene una estructura similar a la guía de factorización de polinomios de grado dos, en ella se mezclan trinomios y binomios, se empleará como un repaso del trabajo desarrollado en la guía de factor común y la de factorización de polinomios de grado dos, además busca establecer una relación entre la factorización de estos dos tipos de expresiones. Para esta guía se trabajaron quince particularizaciones, se toma como referencia el trabajo de Saray, el cual se muestra a continuación en las ilustraciones 5-28 y 5-29.

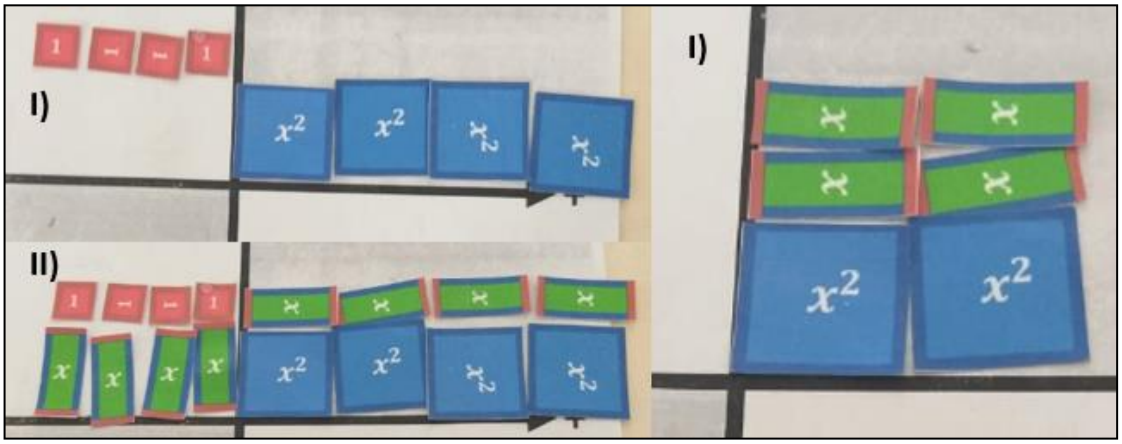


Ilustración 5-28 procesos de Saray para la factorización de polinomios.

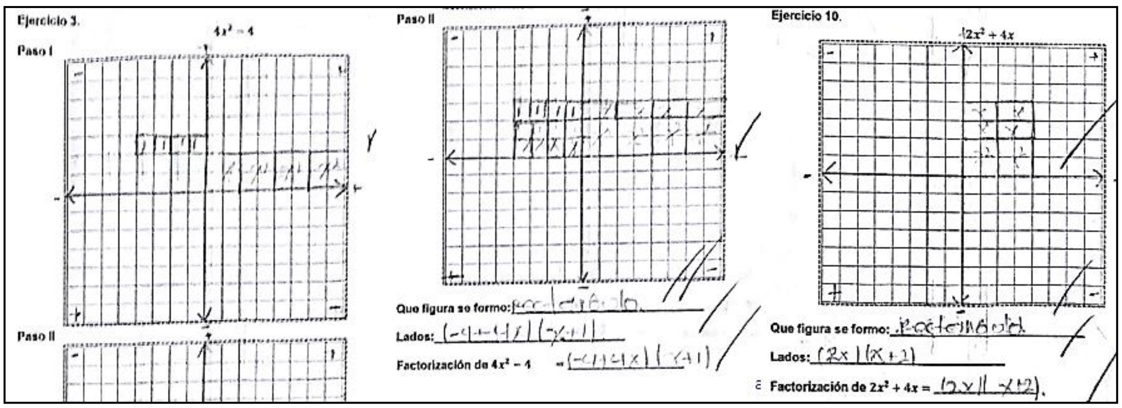


Ilustración 5-29 procesos de Saray para la factorización de polinomios.

A esta sesión de trabajo asistieron únicamente Saray y Karen, por lo que no se puede llevar registro del trabajo de David y de Cristian.

Teniendo en cuenta que se buscaba establecer relaciones entre la factorización de trinomios y binomios, la ilustración 5-29 muestra la factorización de un trinomio en el ejercicio 3 y un binomio en el ejercicio 10. La organización y sistematización del trabajo de Saray se muestra en las ilustraciones 5-30 y 5-31.

	Polinomio Extendido	Factorización	Expresión reducida y ordenada ax^2+bx+c	a	b	c	$p+q=b$	$(p)(q)=(a)(c)$	p	q	$ax^2+(p+q)x+c$ / $ax^2+px+qx+c$
1	$x^2+6x-x-6$	$(x+6)(x-1)$	x^2+5x-6	1	5	-6	$p+q=5$	$(p)(q)=-6$	6	-1	$x^2+6x-1x-6$
2	$x^2+x-x-1$	$(-1+x)(x+1)$	x^2-1	1	0	-1	$p+q=0$	$(p)(q)=-1$	1	-1	$x^2+1x-1x-1$
3	$4x^2-4x+4x-4$	$(-1+4x)(x+1)$	$4x^2-4$	4	0	-4	$p+q=0$	$(p)(q)=-16$	4	-4	$4x^2+4x-4x-4$
4	$x^2-2x+2x-4$	$(-2+x)(x+2)$	x^2-4	1	0	-4	$p+q=0$	$(p)(q)=-4$	2	-2	$x^2+2x-2x-4$
5	$4x^2-6x+6x-9$	$(3+2x)(2x+3)$	$4x^2-9$	4	0	-9	$p+q=0$	$(p)(q)=-36$	6	-6	$4x^2+6x-6x-9$
6	$4x^2-6x-6x+9$	$(3+2x)(-3+2x)$	$4x^2-12x+9$	4	-12	9	$p+q=-12$	$(p)(q)=36$	-6	-6	$4x^2-6x-6x+9$
7	x^2+4x+4	$(x+2)(x+2)$	x^2+4x+4	1	4	4	$p+q=4$	$(p)(q)=4$	2	2	$x^2+2x+2x+4$
8	$2x^2-5x-2x+5$	$(-1+x)(2x-5)$	$2x^2-7x+5$	2	-7	5	$p+q=-7$	$(p)(q)=10$	-2	-5	$2x^2-2x-5x+5$
9	$6x^2-6x-2x+2$	$(-2+2x)(3x-1)$	$6x^2-8x+2$	6	-8	2	$p+q=-8$	$(p)(q)=12$	-6	-2	$6x^2-6x-2x+2$
10	$2x^2+4x$	$(2x)(x+2)$	$2x^2+2x$	2	4	0	$p+q=4$	$(p)(q)=0$	4	0	$2x^2+4x+0x+0$
11	$4x^2+12x$	$(4x)(x+3)$	$4x^2+12x$	4	12	0	$p+q=12$	$(p)(q)=0$	4	0	$4x^2+4x+0x$
12	$3x^2+4x$	$(x)(+3x+4)$	$3x^2+4x$	3	4	0	$p+q=4$	$(p)(q)=0$	3	0	$3x^2+3x+0x$
13	$4x^2+6x$	$(2x)(3+2x)$	$4x^2+6x$	4	6	0	$p+q=6$	$(p)(q)=0$	6	0	$4x^2+6x+0x$
14	$9x+3$	$(3)(3x+1)$	$9x+3$	9	3	0	$p+q=3$	$(p)(q)=0$	3	0	$9x^2+3x+0x$
15	$8x^2-2x$	$(2x)(-1+4x)$	$8x^2-2x$	8	-2	0	$p+q=-2$	$(p)(q)=0$	-2	0	$8x^2-2x+0$
							$p+q=$	$(p)(q)=$			

Ilustración 5-30 Sistematización de los procesos de Saray para la factorización de polinomios.

	$ax^2+px+qx+c$	Factorizar por factor común
1	$x^2+6x-x-6$	$(x).(x+6)+(-1).(x+6)=(x-1).(x+6)$
2	$x^2+x-x-1$	$(x).(x+1)+(-1).(x+1)=(x+(-1)).(x+1)$
3	$4x^2+4x-4x-4$	$(4x).(x+1)+(-4).(+x+1)=(4x-4).(x+1)$
4	$x^2+2x-2x-4$	$(x).(x+2)+(-2).(x+2)=(x-2).(x+2)$
5	$4x^2+6x-6x-9$	$(2x).(2x+3)+(-3).(2x+3)=(2x-3)(2x+3)$
6	$4x^2-6x-6x+9$	$(2x)\cdot(2x-3)+(-3).(2x-3)=(2x+3).(2x-3)$
7	$x^2+2x+2x+4$	$(x).(x+2)+(2).(x+2)=(x+2).(x+2)$
10	$2x^2+4x$	$(2x).(x+2)$
9	$6x^2+6x+2x+2$	$(6x).(x+1)+(2).(x+1):(6x+2)(x+1)$
11	$4x^2+4x$	$(4x).(x+1)$
12	$3x^2+3x$	$(3x).(x+1)$
13	$4x^2+6x$	$(2x).(2x+3)$
14	$9x+3$	$(3).(3x+1)$
15	$8x^2-2x$	$(2x).(4x-1)$
8	$2x^2-2x-5x+5$	$(2x).(x-1)+(-5).(x-1)=(2x-5).(x-1)$

Ilustración 5-31 Sistematización de los procesos de Saray para la factorización de polinomios.

Se realiza la transcripción de los ejercicios tres y diez y se analizan los procesos llevados a cabo por Saray

Tabla 5-4 Sistematización de los procesos de Saray para la factorización de polinomios.

#	**Polinomio extendido**	**Factorización**	**Expresión reducida y ordenada**	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$
3	$4x^2-4x+4x-4$	$(-4+4x)(x+1)$	$4x^2-4$	4	0	-4
10	$2x^2+4x$	$(2x)(x+2)$	$2x^2+4x$	2	4	0

$\boldsymbol{p+q=b}$	$\boldsymbol{(p)(q)=(a)(c)}$	$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{ax^2+(p+q)x+c}$ $\boldsymbol{ax^2+px+qx+c}$
$p+q=0$	$(p)(q)=-16$	4	-4	$4x^2+4x-4x-4$
$p+q=4$	$(p)(q)=0$	4	0	$2x^2+4x+0x+0$

Las tablas que se trabajaron en esta guía son exactamente iguales a las que se trabajaron en la guía de factorización de trinomios, por lo que el fin de cada columna ya mencionó anteriormente. De esta manera se centrará la atención en los procesos de resolución que presentó Saray.

Es interesante la forma en la que Saray organizó las fichas en el ejercicio tres. El orden que eligió Saray para formar, en este caso el rectángulo, la lleva a factorizar una diferencia de cuadrados de una manera diferente a la convencional, pero completamente válida (ver ilustraciones 5-30 y 5-31 y tablas 5-4 y 5-5 ejercicio 3).

En el ejercicio diez utiliza el mismo algoritmo para factorizar un trinomio y descubre al final que debido a que el valor de q y c son cero, la factorización solo se lleva a cabo con los coeficientes a y p, es decir ha evidenciado que $2x^2+4x$ es equivalente a $2x^2+4x+0$, un trinomio de segundo grado con término independiente igual a cero. Esto se observa en las tablas 5-4 y 5-5.

Tabla 5-5 Sistematización de los procesos de Saray para la factorización de polinomios.

$ax^2 + px + qx + c$	Factorización por factor común
$4x^2 + 4x - 4x - 4$	$(4x)(\boldsymbol{x+1}) + (-4)(\boldsymbol{x+1}) = (\boldsymbol{4x-4})(x+1)$
$2x^2 + 4x$	$(2x)(\boldsymbol{x+2})$

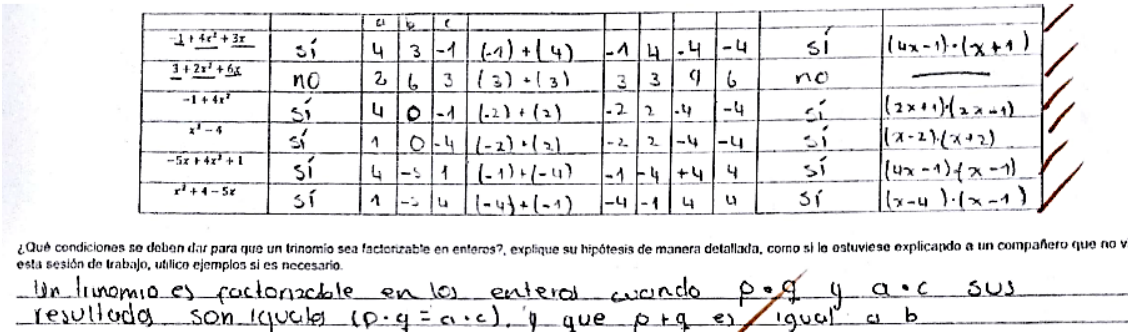
El trabajo de Saray fue estupendo, realizó todos los procesos de manera correcta y se nota una mejora en comparación a su trabajo de la guía anterior.

Para la última sesión de trabajo, a la que no pudieron asistir ni Saray ni Karen por una situación familiar (que infortunadamente se extenderá por varias sesiones), Cristian y David establecieron, a partir de varias particularizaciones, un criterio que les permitió definir cuándo era posible factorizar un polinomio de segundo grado. En otras palabras, se apropiaron de la idea que estaba implícita en todo el trabajo desarrollado en las guías anteriores. Se toman partes del trabajo de David y partes del trabajo de Cristian para el respectivo análisis.

Las tablas que se observan en las ilustraciones 5-32 y 5-33 muestran el trabajo completo desarrollado por David.

Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$	¿Factorizable en los enteros?	a	b	c	$b = p + q$ b escrito como una suma	p	q	$p \cdot q$	$a \cdot c$	¿Factorizable en los enteros?	Factorización
$2x^2 - 4x + 3$	no	2	-4	3	(-3)+(-1)	-3	-1	3	6	no	—
$3x^2 + 7x + 2$	sí	3	7	2	6 + 1	6	1	6	6	sí	(3x+1)(x+2)
$2x^2 + 7x + 3$	sí	2	7	3	6+1	6	1	6	6	sí	(2x+1)·(x+3)
$2 + 5x + 3x^2$	sí	3	5	2	3+2	3	2	6	6	sí	(3x+2)·(x+1)
$-6x + 4 + x^2$	no	1	-6	4	(-5)+(-1)	-5	-1	5	4	no	—
$4x + 1 + x^2$	no	1	4	1	3 + 1	3	1	3	1	no	—
$6 + x^2 + 8x$	no	1	8	6	7+1	7	1	7	6	no	—
$4x^2 - 3$	no	4	0	-3	(-2)+(2)	-2	2	-4	-12	no	—
$2x^2 + 5x + 3$	sí	2	5	3	3 + 2	3	2	6	6	sí	(x+1)·(2x+3)
$4x^2 - 4x - 1$	no	4	-4	-1	(-4)+(0)	-4	0	0	-4	no	—
$1 + 5x + 6x^2$	sí	6	5	1	3 + 2	3	2	6	6	sí	(3x+1)·(2x+1)
$2 + 3x^2 + 6x$	no	3	6	2	(6)+(0)	6	0	0	6	no	—
$7x + 6x^2 + 1$	sí	6	7	1	(6)+(1)	6	1	6	6	sí	(x+1)·(6x+1)
$3x^2 + 8x + 2$	no	3	8	2	(7)+(1)	7	1	7	6	no	—
$x^2 + 5x + 6$	sí	1	5	6	(2)+(3)	2	3	6	6	sí	(x+2)·(x+3)
$1 + 7x + 2x^2$	no	2	7	1	(1)+(6)	1	6	6	2	no	—
$4x^2 - 3x - 1$	sí	4	-3	-1	(-4)+(1)	-4	1	-4	-4	sí	(x-1)·(4x-1)
$6 + x^2 + 7x$	sí	1	7	6	6 + 1	6	1	6	6	sí	(x+1)·(x+6)

Ilustración 5-32 Sistematización de los procesos de David para la factorización de polinomios.



		a	b	c							
$-1+4x^2+3x$	sí	4	3	-1	(-1) + (4)	-1	4	-4	-4	sí	$(4x-1)\cdot(x+1)$
$3+2x^2+6x$	no	2	6	3	(3) + (3)	3	3	9	6	no	–––
$-1+4x^2$	sí	4	0	-1	(-2) + (2)	-2	2	-4	-4	sí	$(2x+1)\cdot(2x-1)$
x^2-4	sí	1	0	-4	(-2) + (2)	-2	2	-4	-4	sí	$(x-2)\cdot(x+2)$
$-5x+4x^2+1$	sí	4	-5	1	(-1) + (-4)	-1	-4	+4	4	sí	$(4x-1)(x-1)$
x^2+4-5x	sí	1	-5	4	(-4) + (-1)	-4	-1	4	4	sí	$(x-4)\cdot(x-1)$

¿Qué condiciones se deben dar para que un trinomio sea factorizable en enteros?, explique su hipótesis de manera detallada, como si le estuviese explicando a un compañero que no v esta sesión de trabajo, utilice ejemplos si es necesario.

Un trinomio es factorizable en los enteros cuando p·q y a·c sus resultados son iguales (p·q = a·c), y que p+q es igual a b

Ilustración 5-33 Sistematización de los procesos de David para la factorización de polinomios.

Se transcriben las dos primeras filas de la tabla que se muestra en la ilustración 5-32 y se transcribe la respuesta que da David a la pregunta:

> *¿Qué condiciones se deben dar para que un trinomio sea factorizable en enteros?, explique su hipótesis de manera detallada, como si le estuviese explicando a un compañero que no vino a esta sesión de trabajo, utilice ejemplos si es necesario.*

Aunque el esquema de la tabla es muy similar a las trabajadas anteriormente para la factorización, existen algunas diferencias sutiles pero importantes. Por ejemplo, en este caso se propusieron trinomios que son irreducibles en los enteros, la columna dos indaga si el trinomio era factorizable, este trabajo se desarrollaba con la caja de polinomios formando el cuadrado o rectángulo. Las columnas de las tres a la doce se completaban, como en las guías anteriores, con los datos que daba el ejercicio propuesto en la columna uno, es decir, sin la caja de polinomios. Al final se respondía la pregunta que se señaló anteriormente y por último, ponían a prueba una conjetura que nació producto del trabajo en esta guía realizando algunos ejercicios particulares.

Tabla 5-6 Sistematización de los procesos de David para la factorización de polinomios.

Trinomio de la forma ax^2+bx+c	**¿Factorizable en los enteros?**	a	b	c	$b=p+q$ **escrito como una suma**
$-1+4x^2+3x$	si	4	3	-1	$(-1)+(4)$
$3+2x^2+6x$	no	2	6	3	$(3)+(3)$

p	q	$p \cdot q$	$a \cdot c$	**¿Factorizable en los enteros?**	**Factorización**
-1	4	-4	-4	si	$(4x-1)(x+1)$
3	3	9	6	no	----------------

Una vez los estudiantes completaron la tabla, su trabajo consistió en buscar regularidades que les permitieran establecer cuándo era posible factorizar un polinomio de segundo grado. Para Mason, Burton y Stacey (1982) los procesos que se han desarrollado en las guías de esta sesión (y en las anteriores) de particularizar, aleatoriamente, sistemáticamente, hábilmente y conjeturar, procesos que llevan a la generalización, hacen parte de la esencia del pensamiento matemático:

> Intentar dar sentido a un modelo subyacente se llama generalizar. Significa observar que hay ciertos aspectos comunes a distintos casos particulares, e ignorar, en cambio otros aspectos. Una vez formulada la generalización se convierte en una conjetura que debe ser investigada para ver si se confirma o no. (Mason, Burton, & Stacey, 1982, pág. 35)

A partir de su trabajo David formula la siguiente conjetura.

> **"*un trinomio es factorizable en los enteros cuando $p \cdot q$ y $a \cdot c$ sus resultados son iguales $(p \cdot q = a \cdot c)$ y que $p + q = b$*".**

La conjetura propuesta por David muestra una evolución importante en la forma de proponer conjeturas y también una redacción de ideas más descriptiva y concisa. Es gratificante observar que los estudiantes a partir del trabajo que han desarrollado a lo largo de la secuencia han propuesto un criterio para factorizar polinomios de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c$, con a, b y $c \in \mathbb{Z}$. Esto se considera un gran logro en el proceso de aprendizaje de los estudiantes, no solo porque se formularon conjeturas y se hayan desarrollado procedimientos de manera correcta, sino que, al haber llegado a este punto, los estudiantes han abierto la posibilidad de explorar el lado más fascinante de las matemáticas, el de determinar conjeturas y proponer "leyes", esto los ha llenado de seguridad y motivación, ¡se han empoderado de su trabajo!

> Uno de los aspectos de las matemáticas más agradables y que más satisfacción da es la gran cantidad de leyes que se pueden encontrar en cualquiera de sus ramas. La esperanza de encontrar una regularidad en los resultados de una investigación matemática es un sentimiento que crece según uno se va enfrentando al pensamiento matemático, y que predispone a descubrir y reconocer leyes. (Mason, Burton, & Stacey, 1982, pág. 90)

En las ilustraciones 5-34 y 5-35 se toma como ejemplo el trabajo de Cristian para mostrar cómo comprueba con ciertos casos particulares su conjetura.

En la ilustración 5-34 se observa el procedimiento que lleva a cabo Cristian, para factorizar la expresión $3a^2 + 4 + 8a$, primero determina si es posible factorizarla, es decir determina un p y un q tales que $p \cdot q = a \cdot c = 12$ y $p + q = b = 8$, que en este caso se pueden determinar. Cristian los establece como $p = 6$ y $q = 2$, así reescribe $3a^2 + 4 + 8a$ como $3a^2 + 6a + 2a + 4$ y lo factoriza por factor común como $(3a + 2)(1a + 2)$.

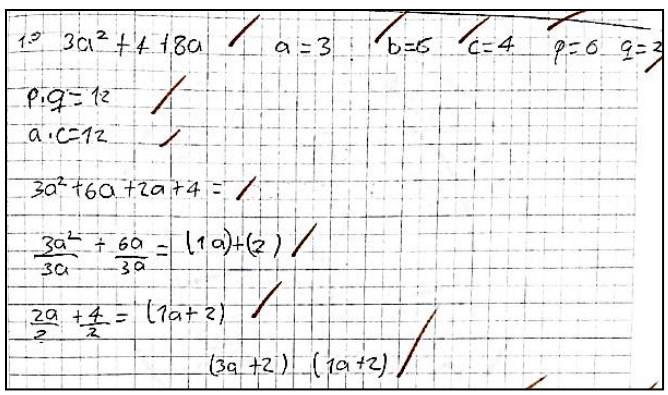


Ilustración 5-34 Aplicación del criterio de factorización propuesto por David y Cristian.

Por otro lado, en la ilustración 5-35, Cristian establece que no es posible factorizar $3 + 4b^2 + 14b$, señala:

> "*no es factorizable porque no cumple la hipótesis planteada*"

En otras palabras, no es posible hallar dos números enteros, p y q tales que $p \cdot q = a \cdot c = 12$ y $p + q = b = 14$.

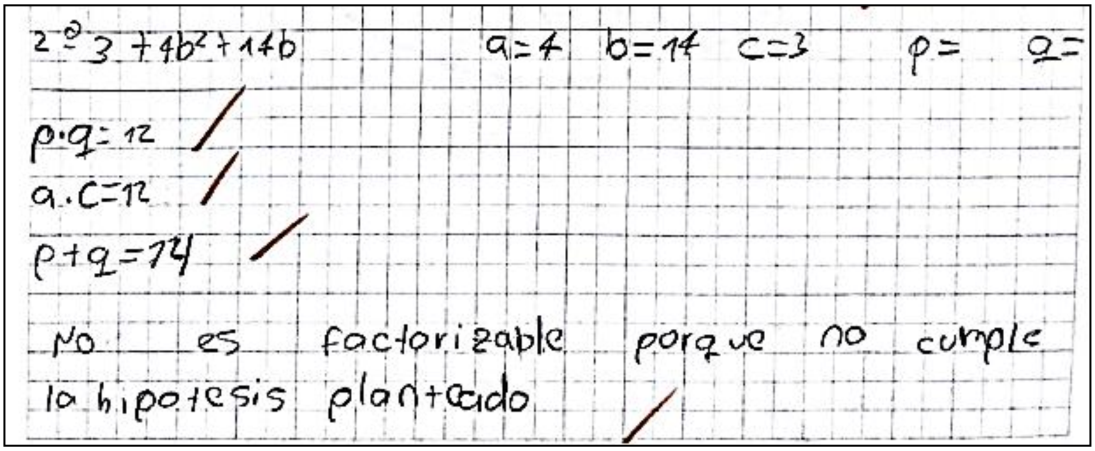


Ilustración 5-35 Aplicación del criterio de factorización propuesto por David y Cristian.

5.2 División de polinomios

Durante la sesión de división se realizó una explicación de cómo trabajar la operación con el material y los estudiantes desarrollaron un trabajo que consistía en resolver ocho particularizaciones con el material, con el lenguaje pictórico y simbólico. A esta sesión no asistieron Karen ni Saray.

Las ilustraciones 5-36 y 5-37 muestran un significado geométrico para la división de números enteros, que se extendería para la división con la caja de polinomios.

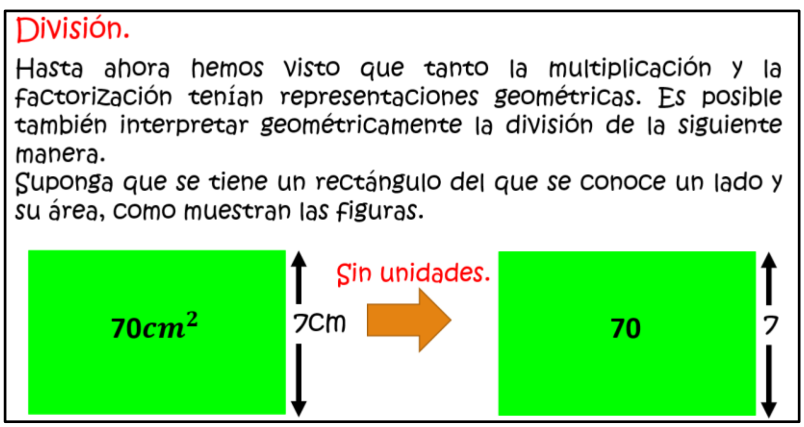


Ilustración 5-36 representación geométrica de la división de dos números enteros.

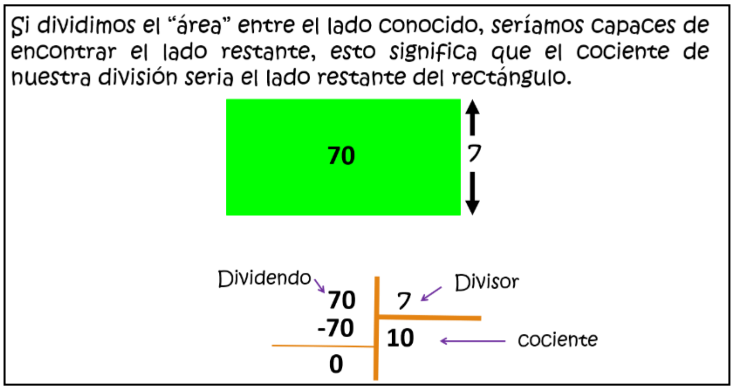


Ilustración 5-37 representación geométrica de la división de dos números enteros.

Una vez se mostró la idea detrás de la división con números naturales, que son familiares para los estudiantes, se procedió a explicar la división con la caja de polinomios.

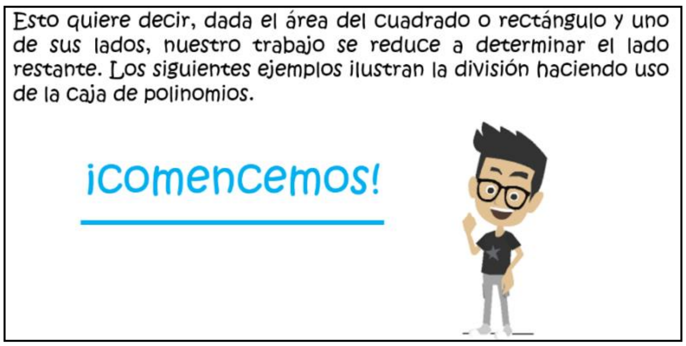


Ilustración 5-38

La clave en la división radica en que una vez se conocen los términos del dividendo se deben organizar de manera tal, que uno de los lados obligatoriamente sea el divisor. Para lograr esto en el menor tiempo posible, es recomendable comenzar ubicando siempre las fichas cuadradas.

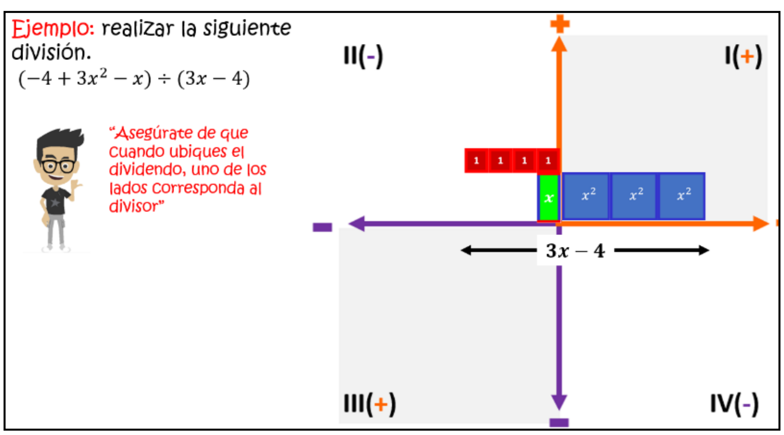


Ilustración 5-39 representación geométrica de la división mediante la caja de polinomios

Una vez se ha conseguido la figura se completa el rectángulo rellenado, en este caso, con fichas opuestas tipo x.

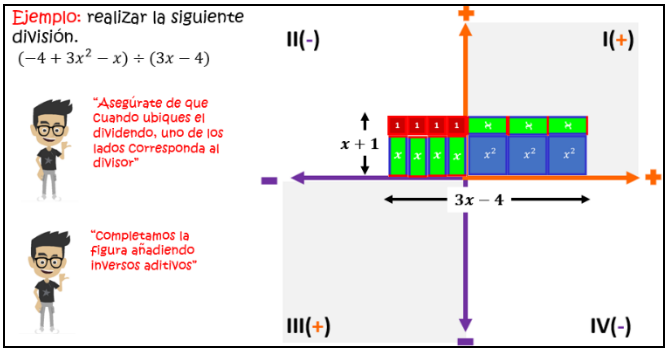


Ilustración 5-40 representación geométrica de la división mediante la caja de polinomios

Por último, se escriben el divisor, el cociente y el residuo en el esquema visual tradicionalmente usado para la división.

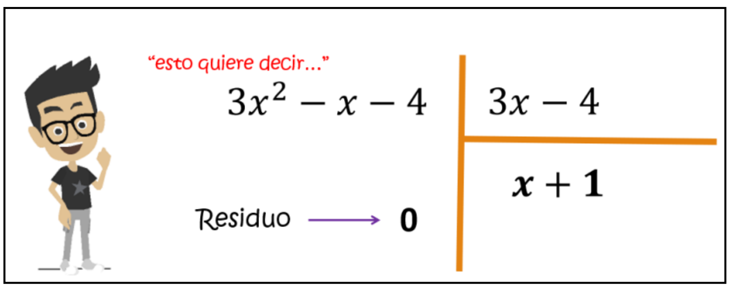


Ilustración 5-41 representación geométrica de la división mediante la caja de polinomios

Las ilustraciones 5-43 a la 5-46 muestran un ejemplo de una división que no es exacta:

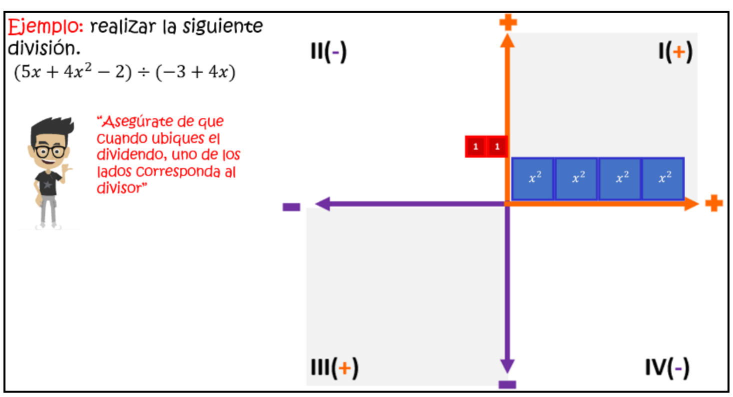


Ilustración 5-42 representación geométrica de la división mediante la caja de polinomios

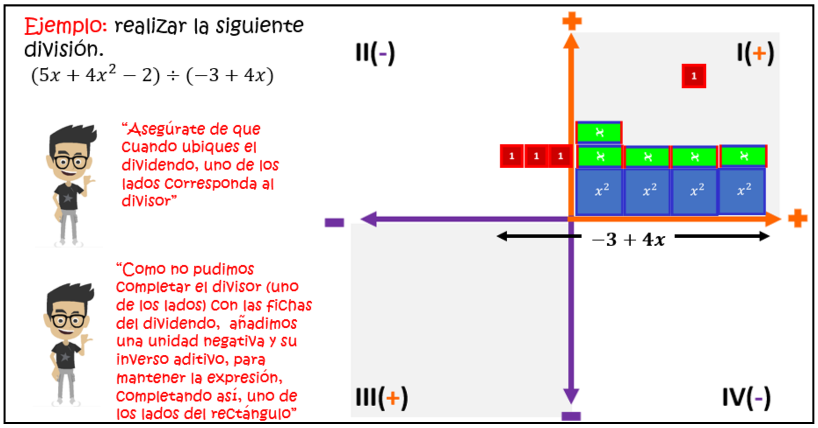


Ilustración 5-43 representación geométrica de la división mediante la caja de polinomios

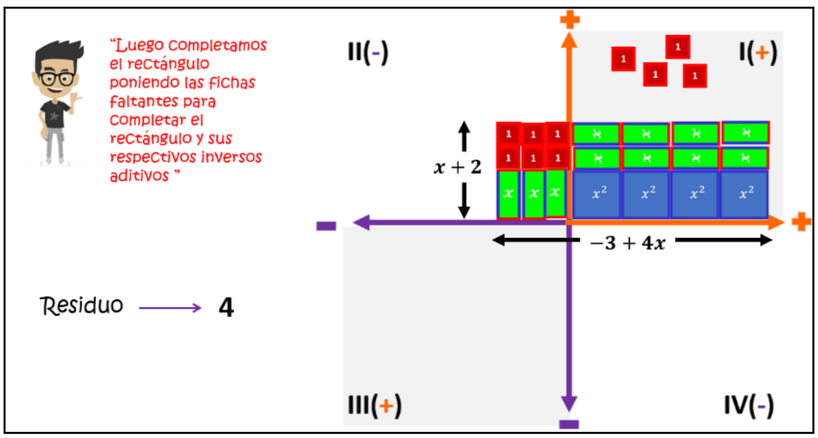


Ilustración 5-44 representación geométrica de la división mediante la caja de polinomios

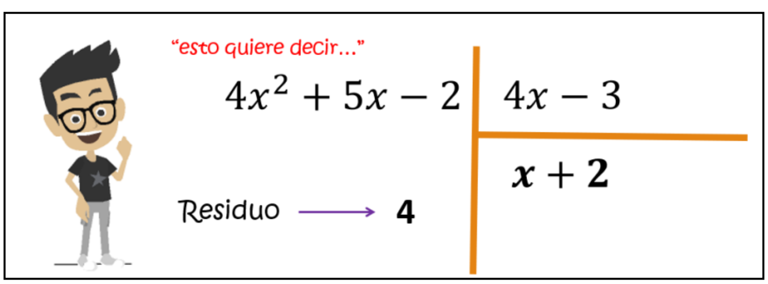


Ilustración 5-45 representación geométrica de la división mediante la caja de polinomios

Se analiza el trabajo de Cristian y David, quienes durante esta sesión realizaron un trabajo conjunto, en las imágenes se muestra la transcripción en dibujos de la división de los ejercicios $(-5x + 6x^2 - 4) \div (3x - 4)$ y $(-2 + 5x + 2x^2) \div (2x - 3)$, respectivamente.

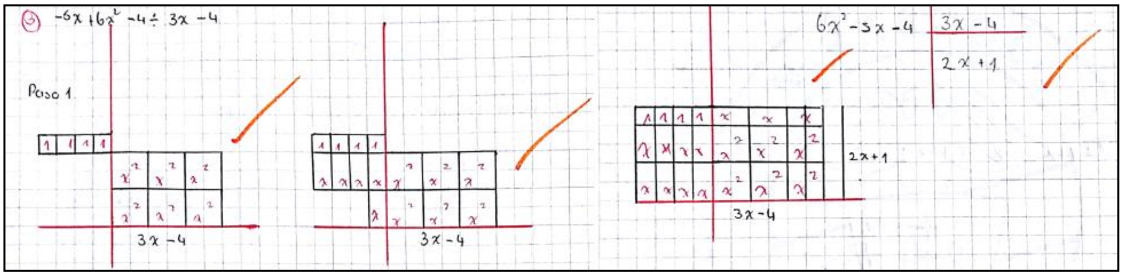


Ilustración 5-46 Procesos de David y Cristian para la división de polinomios.

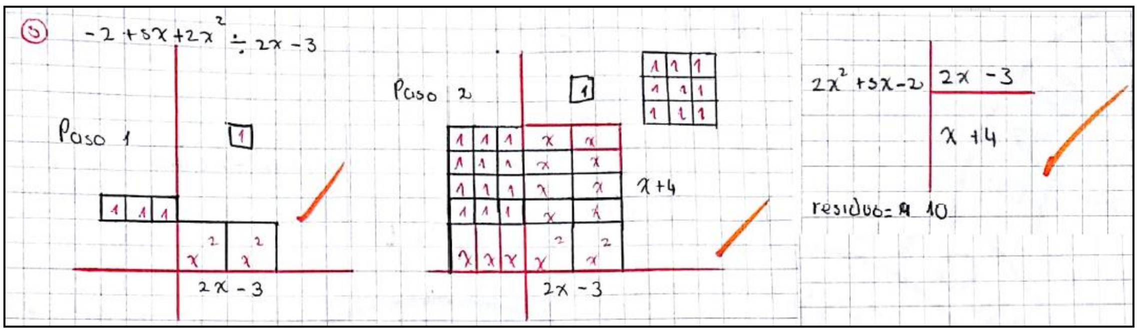


Ilustración 5-47 Procesos de David y Cristian para la división de polinomios.

El trabajo desarrollado durante estas sesiones se diferencia un poco de las dinámicas que se venían trabajando en las guías. Si bien se emplea el material como de costumbre, no se diseñó una guía para registrar los resultados obtenidos y tampoco se solicitó determinar un algoritmo. En cambio, se realizó un acompañamiento en el desarrollo de cada ejercicio y se trató de relacionar lo trabajado en esta sesión con todo el trabajo desarrollado a lo largo de la secuencia y los métodos empleados por su profesor titular. De esta manera se hizo una aproximación al algoritmo de división.

En la ilustración 5-48 se observa el trabajo en el algoritmo de la división. Para el ejercicio $(-5x + 6x^2 - 4) \div (3x - 4)$

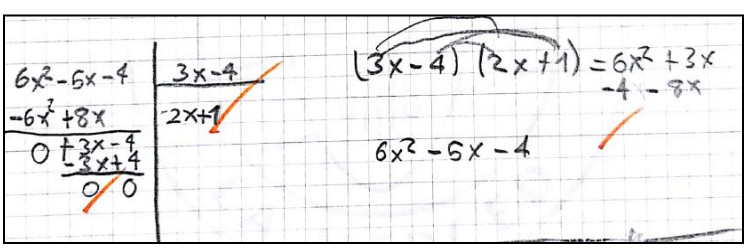


Ilustración 5-48

De la transcripción a dibujos se puede decir que los estudiantes asimilaron muy bien las reglas de la caja de polinomios para la división y que desarrollan con facilidad divisiones exactas de polinomios y con residuo, con ayuda del material. Por otro lado, el algoritmo de la división parece haber sido asimilado también. Hay algo interesante y es ver como los estudiantes utilizan la multiplicación para verificar que la división se desarrolló de manera correcta, de esta manera establecen una relación entre la división y la multiplicación.

Los siguientes links conducen a videos que muestran la evolución de los procesos de Cristian y David en la división, desde que trabajaron con las fichas, hasta que lograron trabajar con el lenguaje simbólico.

Resolución de divisiones con la caja de polinomios

https://youtu.be/kZ6ItorBPHo

Acercándose al algoritmo de división I

https://youtu.be/VPYk4uI_9-0

Acercándose al algoritmo de división II

https://youtu.be/5IFfivHrgM8

.

6. Capítulo 6

6.1 Enfoque del material a la resolución de problemas de aplicación

Durante el trabajo desarrollado en estas sesiones se utilizaron los conocimientos adquiridos a lo largo de la secuencia para resolver problemas de aplicación. Se utilizó la evaluación de entrada (modificada ligeramente) con dos fines; el primero, aprovechar los problemas de aplicación que contenía esta evaluación y el segundo, comparar los resultados que se obtuvieran en esta “nueva evaluación”, con los resultados arrojados al principio de la secuencia por la evaluación de entrada.

En este apartado se analizan los resultados obtenidos por los estudiantes y se comparan con el trabajo desarrollado en la prueba de entrada. Cabe señalar que, aunque hasta este punto se empiezan a abordar problemas de aplicación, los estudiantes estuvieron resolviendo problemas propios de la disciplina, como proponer algoritmos para resolver sumas, restas, multiplicaciones, factorizaciones y divisiones algebraicas, desde el principio de la secuencia.

El trabajo en esta sesión comenzó con la resolución de la evaluación de entrada. El análisis de los resultados se hará por partes, es decir, se analizan los puntos uno y dos solucionados por Karen, tres y cuatro resueltos por Saray, cinco y seis por Cristian, y cinco b y seis b por David. Y se realiza una apreciación completa de los trabajos de los estudiantes al terminar este seguimiento particular.

La evaluación estaba compuesta en sus dos primeros puntos por ejercicios de suma, resta, multiplicación, división y factorización.

6.2 Evaluación de entrada (corrección)

Parte I de la evaluación (puntos 1 y 2)

1) *Resuelvo las siguientes operaciones, describiendo cada uno de los pasos que utilizo para llegar al resultado final.*

   a) $-(2x^2 - 4 + 5x) - (-2 - 3x^2 + 2x)$

   b) $(3x - 4)(-2 + 7x)(-12x^2 + 5 - 11x) \div (3x + 1)$

   c) $(-12x^2 + 5 - 11x) \div (3x + 1)$

2) *Factorizo las siguientes expresiones algebraicas, describiendo cada uno de los pasos que utilizo para llegar al resultado final.*

   a) $x^2 - 7 - 6x$

   b) $x - 2 + 6x^2$

   c) $x^2 - 25$

   d) $6x^2y + 3xy - 14x - 7$

La ilustración 6-1 muestra el trabajo desarrollado por Karen.

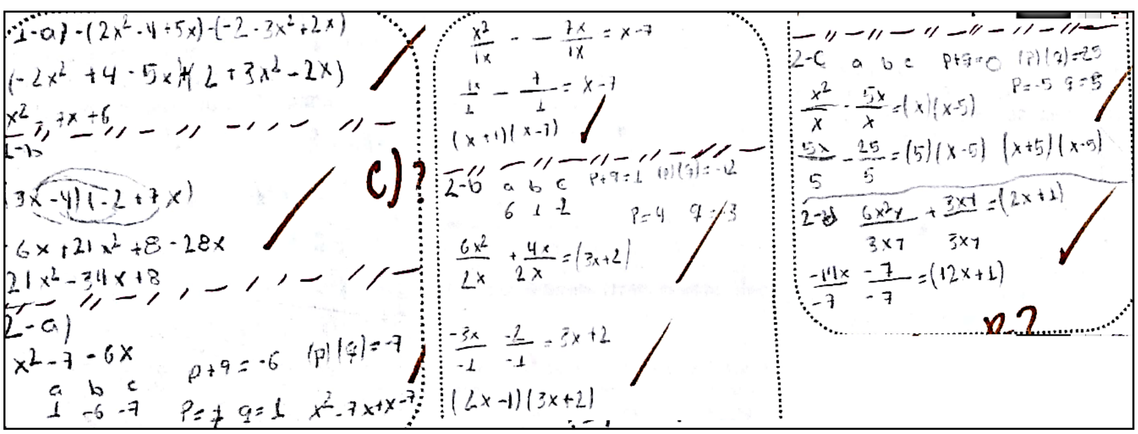


Ilustración 6-1 procesos de Karen en la corrección de la evaluación de entrada.

Karen no comete errores en sus procesos, sin embargo, no resuelve la división y el ejercicio 2 d) lo deja incompleto. Desafortunadamente Karen no asistió a la sesión en la que se trabajó división de polinomios, por lo que no contaba con las herramientas suficientes para solucionar este ejercicio. Sin embargo, es curioso observar que en esta evaluación decidió no resolver la división, mientras que en la evaluación de entrada si lo intentó (ver ilustración 3-8), se cree que por responsabilidad moral no se comprometió a llevar a cabo procesos que no conocía y que estaba segura de que este punto no influiría en los resultados (nota) obtenidos en su evaluación. Para la factorización en el punto 2d realiza procedimientos correctos, pero no finaliza; no se atribuye esta particularidad en sus procesos a una falta de conocimiento, tal vez sea, un descuido en la escritura de sus procesos.

Parte II de la evaluación (puntos 3 y 4)

3) *En el siguiente espacio en blanco realizo un escrito donde le explico detalladamente a un compañero cómo determinar el área de la siguiente figura, de dos maneras diferentes.*

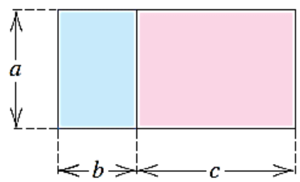


Figura 6-1

4) *La figura ilustra la vista superior de una habitación de forma cuadrada. El área de la sección I está destinada para el dormitorio, el área II se ha destinado para un closet y el área III para el baño de la habitación*

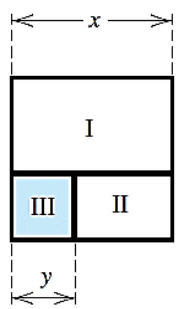


Figura 6-2

3) *Determino el área de cada una de las secciones y describo paso a paso como llego al resultado final de cada una.*
4) *Propongo dos formas diferentes de hallar el área conjunta de las secciones I y II, describo con detalle cómo lo hice.*
5) *Si $x = 5m$ y $y = 1.5m$, ¿cuál sería el área que ocuparían el dormitorio y el armario? ¿Qué área ocuparía el baño?*

Saray por su parte realiza un muy buen trabajo en los problemas tres y cuatro, incluso en el problema tres propone dos formas de determinar el área de la figura y en el problema cuatro propone y utiliza la forma más elaborada para determinar una solucion numerica al problema.

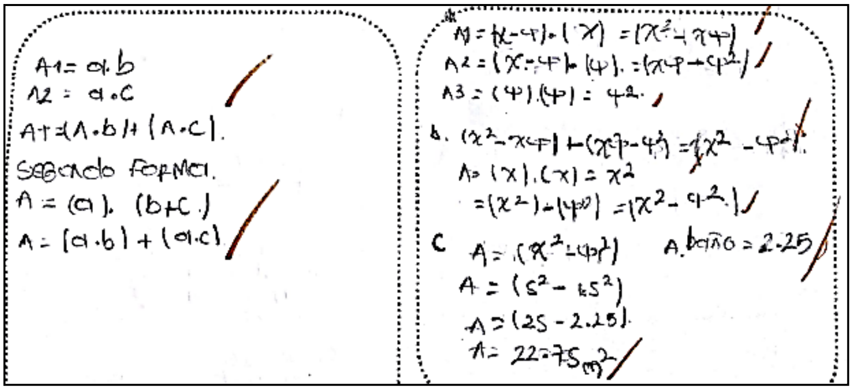


Ilustración 6-2 procesos de Saray en la corrección de la evaluación de entrada

Si se compara el trabajo que se observa en la ilustración 6-2 con el que presentó en la evaluación de entrada, se aprecia una evolución soprendente en los proceso de resolución de problemas y la aplicación de los algoritmos. Se observa que los estudiantes, en particular Saray, han trascendido a resolver problemas con indeterminadas diferentes a x, incluso problemas que involucran dos incógnitas.

Parte III de la evaluación (puntos 5 y 6)

5) *Se pretende diseñar una baldosa que presenta la siguiente forma geométrica:*

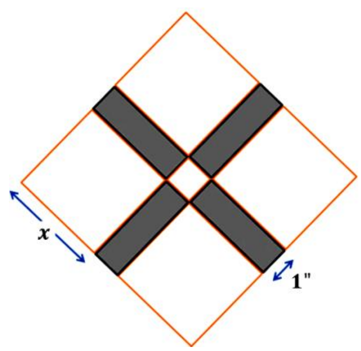


Figura 6-3

*Se determinó la longitud menor del rectángulo como una pulgada (**1”**) y la longitud del cuadrado mayor es desconocida.*

a) Propongo dos maneras diferentes de hallar el área de la baldosa. Describo el paso a paso de cómo lo hago.

*b) Cuál debe ser el valor de **x** si el área total de la baldosa es de 121 pulgadas cuadradas.*

6) Se desea diseñar la maqueta de una oficina sobre un sector rectangular. Para ello, se divide el área del rectángulo como se muestra en la figura:

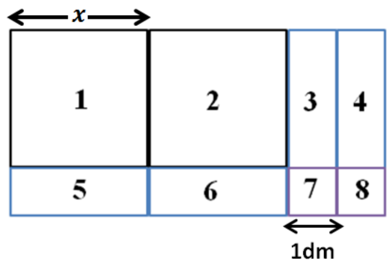


Figura 6-4

*Las áreas 1 y 2 deben ser iguales entre ellas, así mismo las áreas 3, 4,5 y 6. Se decide que el lado de las secciones cuadradas menores será de un decímetro (**1dm**), mientras que no se han determinado los lados de los cuadrados mayores.*

a) Proponga dos maneras diferentes para determinar el área de la oficina. Describa el paso a paso de los procedimientos empleados para tal fin.

*b) Si se desea que el espacio para la maqueta de la oficina ocupe un área máxima de treinta y dos decímetros cuadrados (**32 dm^2**) ¿Cuál debe ser la longitud de **x?***

Del trabajo de Saray se pasa al trabajo de Cristian, quien propone dos formas de determinar el área en los dos problemas; una multiplicando los lados de la figura y otra sumando las áreas individuales que componen la figura.

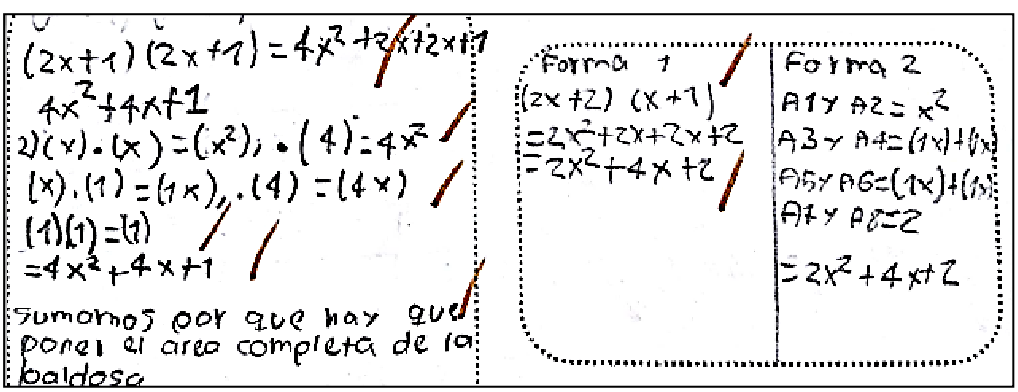


Ilustración 6-3 procesos de Cristian en la corrección de la evaluación de entrada

Cristian comete un error en la igualdad.

$$(x) \cdot (x) = (x^2), \cdot (4) = 4x^2;$$

$$(x) \cdot (1) = (1x), \cdot (4) = (4x);$$

Este problema de escritura en las igualdades se presenta con frecuencia en las aulas de matematicas, al trabajar la igualdad de manera horizontal. Aunque se entiende la intención de Cristian, es claro que se debe trabajar en la rigurosidad que implica el escribir una igualdad.

Sin embargo, se aprecia que Cristian tiene un buen manejo de sus procesos y el significado de estos. Para determinar el área, en el punto cinco propone la multiplicación de los lados externos de la figura y también la suma de cada una de las áreas, como muestra la ilustración 6-3 donde escribe

"sumamos porque hay que poner el área completa de la baldosa"

Es decir, una vez determinó cada una de las áreas que componen la baldosa las suma para determinar el área total.

Aunque no hacía parte del trabajo de la secuencia enseñar a los estudiantes a resolver ecuaciones de segundo grado, se intentó utilizar la factorización para determinar las raíces del polinomio,en otras palabras, resolver las ecuaciones de segundo grado que se presentaban en los problemas cinco y seis y darle la solución al problema. David realiza este procedimiento de manera correcta

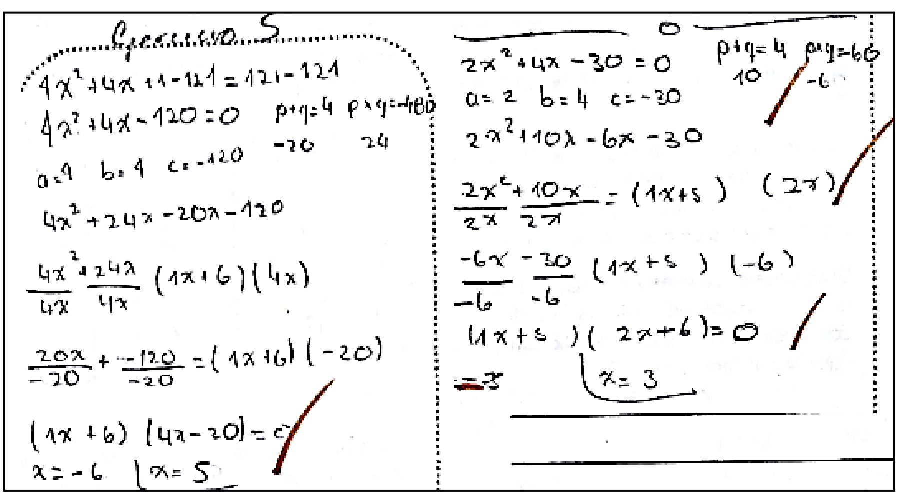


Ilustración 6-4 procesos de David en la corrección de la evaluación de entrada

Del análisis particular de los procesos desarrollados por cada estudiante en su trabajo se puede decir que: David desarrolló de manera correcta todos y cada uno de los puntos planteados en la evalucion de entrada. Tanto Karen como Saray no resolvieron los puntos 1.c) (División de polinomios), el punto 2.d), el ejercicio 6 y tampoco resolvieron las ecuaciones cuadráticas de los puntos 5.b) y 6.b). Es importante recordar que Saray y Karen no estuvieron presentes en varias sesiones (por razones de fuerza mayor), incluyendo la sesión en la que se trabajó división, lo que seguramente influyó en el desempeño presentado en este trabajo. Por último, Cristian no resuelve el punto 2.c).

Fueron pocos los errores que cometieron los estudiantes al realizar nuevamente la evaluación de entrada. Básicamente estuvieron asociados a dos situaciones en particular que se muestran en seguida.

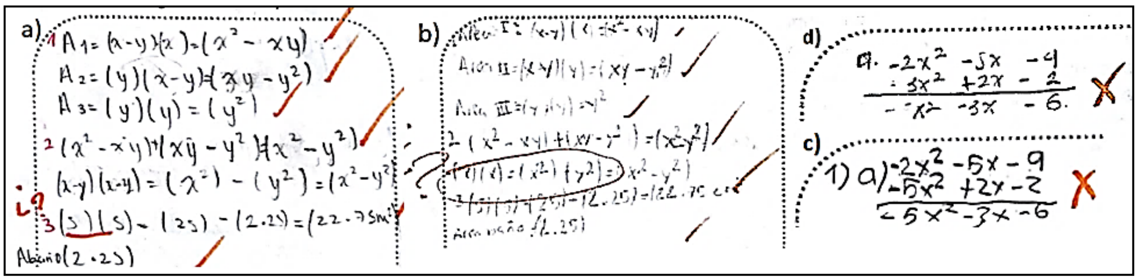


Ilustración 6-5 procesos de los estudiantes en la corrección de la evaluación de entrada

Los errores en a) y b) estan asociados a la igualdad, errores similares a los que cometió Cristian.

Saray y Cristian comenten errores en la resta de polinomios d) y c), la escritura vertical de la resta evidencia que el material no rompió el paradigma que se había impuesto por el docente titular de álgebra. Para cerrar el trabajo se realizó una retroalimentación enfocada en los errores cometidos.

6.3 Preevaluación (preparación para presentar la prueba de salida)

El siguiente trabajo consistió en solucionar una preevaluación, la intención de este trabajo era que en el proceso de resolución los estudiantes aclararan dudas relacionadas a cualquier tema que les hubiese presentado dificultad a lo largo de la secuencia. Y se prepararan para presentar la evaluación de salida.

La preevaluación contenía ejercicios similares a los trabajados en clase y problemas algebraico-geométricos tomados de las preguntas que libera el ICFES de las pruebas saber noveno.

Nuevamente están ausentes Saray y Karen, se lleva a cabo la sesión de trabajo con la presencia de David y Cristian

Preevaluación

Punto I

1) *Resuelvo las siguientes operaciones*
   a) $-(-3x^2 - 4x + 5) + (-2 - 3x^2 - 2x)$
   b) $(-5x + 7)(-4 + 6x)$
   c) $(4x^2 + 4 + 8x) \div (2x + 1)$

La ilustración 6-6 muestra los procesos realizados por Cristian en el ejercicio, se observa cómo Cristian desarrolla de manera correcta los ejercicios a) b) y c) de la preevaluación, que involucran resta de polinomios, multiplicación y división, respetivamente. Comienza por la división y finaliza con la multiplicación, desarrollando cada paso con precisión

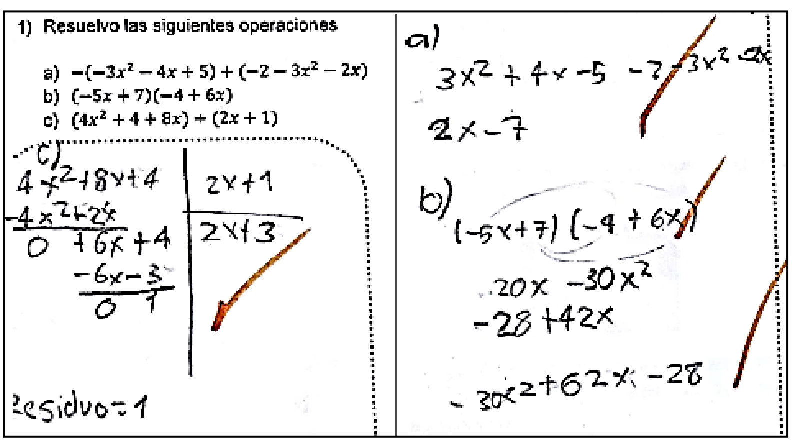


Ilustración 6-6 procesos de Cristian en el desarrollo de la preevaluación.

El trabajo desarrollado en la anterior sesión y la retroalimentación tuvieron un impacto positivo en Cristian, por un lado, se observa que desarrolló completa la división y por otro, la resta la realizó de manera horizontal. Los dos procesos en este caso fueron desarrollados correctamente.

2) *Factorizo las siguientes expresiones algebraicas describiendo cada uno de los pasos que utilizo para llegar al resultado final.*
   a) $4x^2 - 16$
   b) $13x + 6 + 6x^2$
   c) $-4 + x^2 + 3x$

La ilustración 6-7 contiene los procesos que desarrolla David, quien también tiene éxito en sus procesos de resolución y determina las factorizaciones correctas de cada expresión.

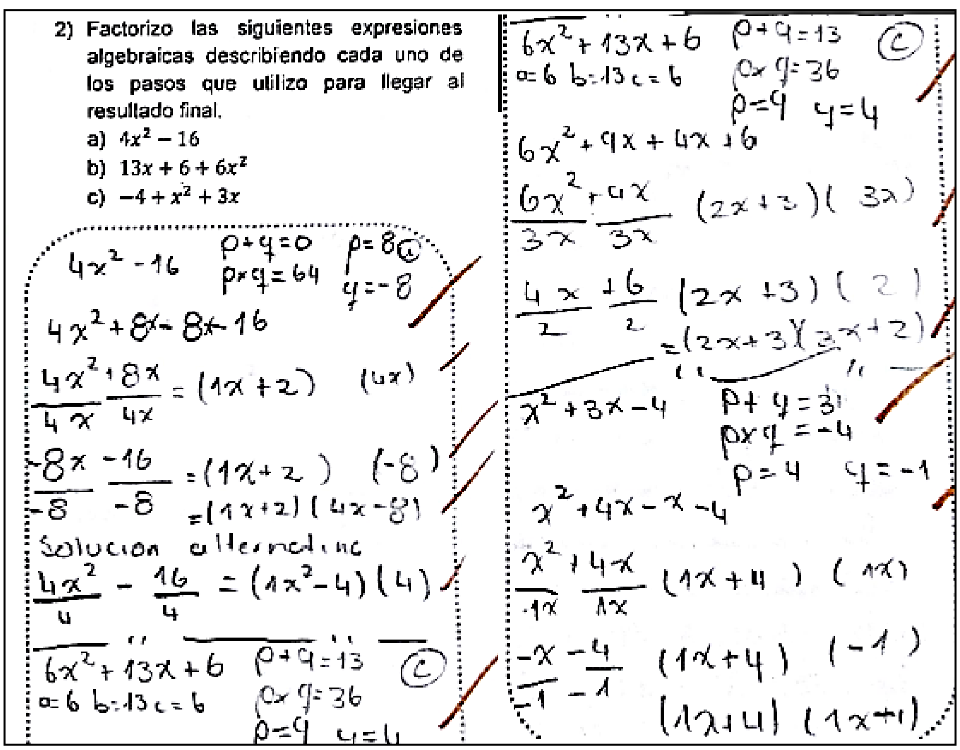


Ilustración 6-7 procesos de David en el desarrollo de la preevaluación.

Es muy interesante ver cómo se expresa la factorización de la diferencia de cuadrados que aparece en el ejercicio 2.a. porque no la factoriza de forma convencional al utilizar el algoritmo de factor común (esto ya se había visto en los procesos de otros compañeros).

David escoge la factorización que en este caso considera más conveniente para la expresión, pero no solo eso, sino que también propone una alternativa para factorizar la expresión.

$$"4x^2 - 16 = 4x^2 + 8x - 8x - 16 = (1x + 2)(4x - 8)$$

Solución alternativa

$$4x^2 - 16 = (1x^2 - 4)(4)"$$

Los estudiantes han cambiado el papel introvertido que demostraron en la preevaluación a un papel más propositivo y asertivo en este punto de la secuencia, el hecho de que el estudiante proponga una manera diferente de factorizar demuestra seguridad frente a este tema.

Puntos 3 y 4

3) *Observa las figuras dibujadas sobre la cuadrícula.*

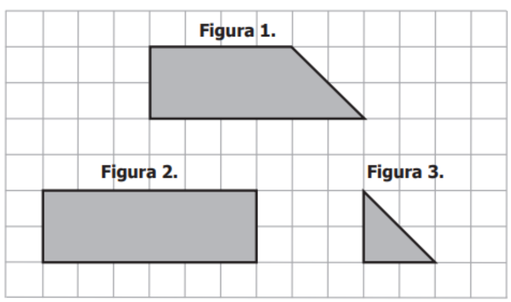


Figura 6-5

El área de la figura 2 es igual a:

- A. *el área de la figura 1 más el área de la figura 3.*
- B. *dos veces el área de la figura 1.*
- C. *tres veces el área de la figura 3.*
- D. *el área de la figura 1 menos el área de la figura 3.*

Explica tu razonamiento.

4) *Un rectángulo se divide en cuatro regiones como lo muestra la siguiente figura.*

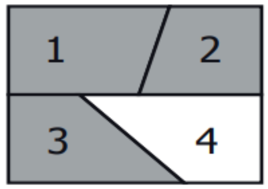


Figura 6-6

¿Cuál(es) de los siguientes procedimientos permite(n) calcular el área de la región sombreada?

I. Sumar las áreas de las regiones 1, 2 y 3

II. Hallar el área del rectángulo y restar el área de la región 4

III. Sumar las áreas de las regiones 2, 3 y 4

A. I solamente.

B. II solamente.

C. I y II solamente.

D. I y III solamente.

Explica tu razonamiento.

En los problemas tres y cuatro se podría utilizar el razonamiento empleado con la caja de polinomios para la factorización (suma y restas de áreas). Se pude ver como Cristian responde de manera correcta el problema 3, en el problema cuatro le falla un poco la redacción, pero, aunque su idea no esté muy bien redactada, es correcta.

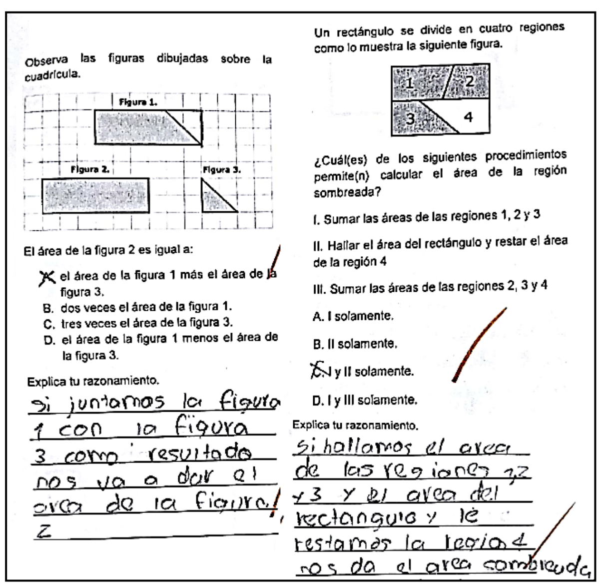


Ilustración 6-8 procesos de Cristian en el desarrollo de la preevaluación.

Punto tres

Explica tu razonamiento.

"Si juntamos la figura 1 con la figura 3 como resultado nos va a dar el área de la figura"

Punto cuatro

Explica tu razonamiento.

"Si hallamos el área 1,2 y3 y el área del rectángulo le restamos la región 4 nos da el área sombreada"

Lo que Cristian quiere decir es que, si se halla el área 1,2 y 3 se determina el área sombreada. Y también se puede hallar el área sombreada si al área del rectángulo se le resta la región 4.

Punto 5.

5) *Observa la figura que se muestra a continuación.*

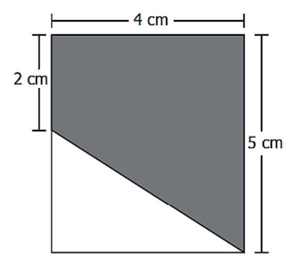


Figura 6-7

I. $(4\text{ cm} \times 2\text{ cm}) + \left[\dfrac{(4\text{ cm} \times 3\text{ cm})}{2}\right]$

II. $(4\text{ cm} \times 5\text{ cm}) - \left[\dfrac{(4\text{ cm} \times 3\text{ cm})}{2}\right]$

III. $(4\text{ cm} \times 3\text{ cm}) - \left[\dfrac{(4\text{ cm} \times 3\text{ cm})}{2}\right]$

¿Cuál o cuáles de los siguientes procedimientos permite(n) hallar el área del trapecio sombreado?

A. I solamente.

B. I y II solamente.

C. II y III solamente.

D. III solamente.

Explica tu razonamiento.

En el problema cinco David describe cómo determinar el área de la figura de dos formas, al elegir la opción correcta, más interesante aún es que sin que el problema lo pida decide determinar un valor para el área en cada caso. Es decir, comprueba que su solución sea correcta. La ilustración 6-9 muestra el razonamiento de David.

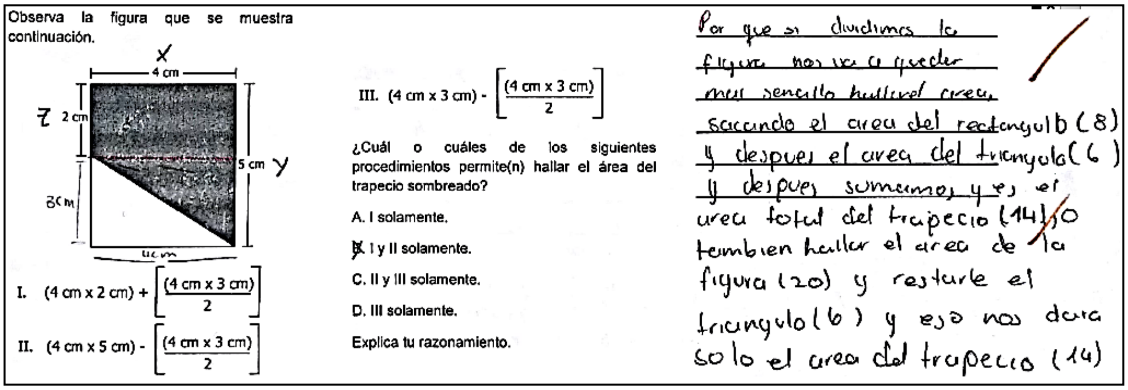


Ilustración 6-9 procesos de David en el desarrollo de la preevaluación.

Punto cinco

Explica tu razonamiento:

*"Porque si dividimos la figura nos va a quedar más sencillo hallar el área, sacando el área del rectángulo **(8)** y después el área del triángulo **(6)** y después sumamos, y es el área total del trapecio **(14).** O también hallar el de la figura **(20)** y restarle el triángulo **(6)** y eso nos da solo el área del trapecio **(14)**"*

Como se puede apreciar en sus procesos, David tiene claro lo que representan las expresiones numéricas que aparecen en las opciones de respuesta del punto cinco y las describe en palabras. Los números en negrita (sin unidades) representan las áreas que obtiene en el proceso de resolución. En la Ilustración 6-9, aunque no muy definido, se aprecia un segmento de recta, paralelo al lado de la figura que mide 4cm, que utiliza para construir el rectángulo que menciona en su razonamiento.

Aunque desde la formalidad, David comete un error al trabajar el área sin unidades, realiza los cálculos de manera correcta. Por otro lado, es casi natural que no asocie una unidad de medida para el área, ya que durante la secuencia no se hizo énfasis el trabajo de sistema de unidades, no porque no fuera importante, sino porque las unidades no tienen lugar cuando se trabaja con indeterminadas en el álgebra. El punto seis no se consideró en el trabajo de los estudiantes, está relacionado con una secuencia numérica y fue viciado por el docente, por lo tanto, no le aporta a la investigación.

Punto 7

7) *En una pared cuadrada de 16 m^2 de área se dibujó el diseño que se presenta en la figura.*

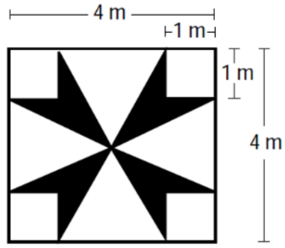


Figura 6-8

¿Cuál es el área de la superficie pintada de negro en la pared?

A. 2 m^2

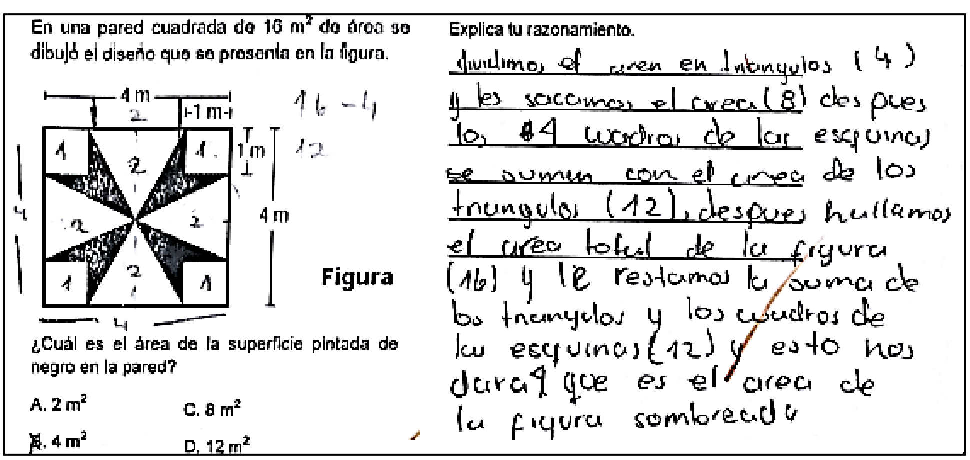
B. 4 m^2

C. 8 m^2

D. 12 m^2

Explica tu razonamiento.

En el problema siete se hace más evidente como, en este caso, David extiende lo que ha aprendido en la secuencia y lo emplea en un problema que utiliza valores numéricos para representar tanto lados como áreas.


En una pared cuadrada de 16 m^2 de área se dibujó el diseño que se presenta en la figura.

4 m
1 m
1 m
4 m
16 − 4
12
Figura

¿Cuál es el área de la superficie pintada de negro en la pared?

A. 2 m^2 C. 8 m^2

B. 4 m^2 D. 12 m^2

Explica tu razonamiento.

dividimos el area en triangulos (4) y les sacamos el area (8) despues los 4 cuadros de las esquinas se suman con el area de los triangulos (12), despues hallamos el area total de la figura (16) y le restamos la suma de los triangulos y los cuadros de las esquinas (12) y esto nos dara 4 que es el area de la figura sombreada

Ilustración 6-10 procesos de David en el desarrollo de la preevaluación.

La ilustración 6-10 muestra el razonamiento de David, se observa cómo utiliza el dibujo para determinar los lados que le permiten resolver el problema y escribe el área (sin unidades) de cada figura en su interior.

> **Punto siete**
>
> Explica tu razonamiento:
>
> *"Dividimos la figura en triángulos (4) y les sacamos el área* ***(8)*** *después los cuatro cuadrados de las esquinas se suman con el área de los triángulos* ***(12),*** *después hallamos el área total de la figura* ***(16)*** *y le restamos la suma de los triángulos y los cuadrados de las esquinas* ***(12)*** *y esto nos dará* ***(4)*** *que es el área de la figura sombreada****"***

Si bien se presentan algunos errores de redacción y de formalidad en el lenguaje, se entiende lo que David desea trasmitir con sus palabras y se evidencia un razonamiento que lo conduce a determinar el valor correcto del área.

6.4 Prueba de salida o evaluación final

La evaluación final la realizaron los cuatro estudiantes, afortunadamente se contó con la presencia de Saray y Karen para hacer el cierre de la secuencia, la evaluación la presentaron en parejas y la transcripción de los procesos y las respuestas, de manera individual.

Cabe señalar que la evaluación de salida era una evidencia más de trabajo, por lo que independientemente de los resultados que esta arrojase no opacarían el trabajo desarrollado por los estudiantes a lo largo de la secuencia. Algunos investigadores opinan que la evaluación no debe proporcionar solamente resultados, los procesos y progresos que realizaron los estudiantes frente a los problemas que abordaron a lo largo de la secuencia, son igualmente valiosos:

> Si se pretende una evaluación formal de los alumnos o realizar un informe, quizá sea mejor tratar aspectos como grado de progreso hacia una solución, calidad de

> la explicación, aplicación de una determinada estrategia, en su caso, abordaje de una ampliación del problema original, etc. (Stacey & Groves, 1999, pág. 20)

Por otro lado, Mason, Burton y Stacey (1982):

> Es lamentable que el éxito se mida normalmente con razón del objetivo alcanzado, con lo que el no alcanzarlo es visto como un fracaso… …y las observaciones anteriores parecen indicar que nuestra omnipresente búsqueda de confianza y soporte se resquebraja y cae precisamente por la naturaleza de nuestros objetivos. Exigir que se dé la respuesta, y lo que es peor, de forma más elegante y rápida que cualquier otro, es pedir a la larga el fracaso. (pág. 153)

En seguida se realiza el análisis de los procesos y los resultados de la evaluación de salida, siendo esta la última de una cantidad importante de evidencias recolectadas a lo largo de la secuencia, que recogen el trabajo desarrollado por los estudiantes.

Problema 1: *Observa la figura que se muestra a continuación.*

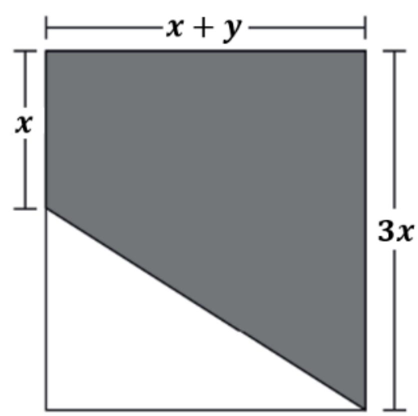


Figura 6-9

Determina la expresión algebraica que representa el área del trapecio de dos maneras diferentes. Expresa tu respuesta factorizada.

Las ilustraciones 6-11 a la 6-14 muestran los procedimientos de David y Karen

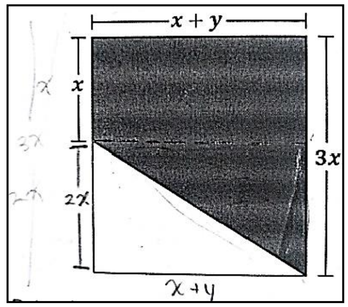


Ilustración 6-11 Procesos de Karen y David en la evaluación final o de salida.

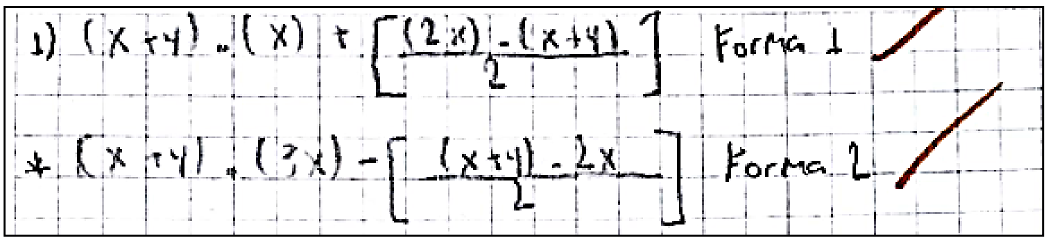

$1)\ (x+y)\cdot(x) + \left[\frac{(2x)\cdot(x+y)}{2}\right]$ Forma 1
$(x+y)\cdot(3x) - \left[\frac{(x+y)\cdot 2x}{2}\right]$ Forma 2

Ilustración 6-12 Procesos de Karen y David en la evaluación final o de salida.

David y Karen determinaron las áreas de dos maneras

$$(x + y)(x) + \left[\frac{(2x) \cdot (x + y)}{2}\right] \ \boldsymbol{Forma\ 1}.$$

$$(x + y)(3x) - \left[\frac{(x + y) \cdot (2x)}{2}\right] \ \boldsymbol{Forma\ 2}.$$

Luego, en las ilustraciones 6-13 y 6-14 explican cada uno de sus procedimientos, simplificando al final sus resultados:

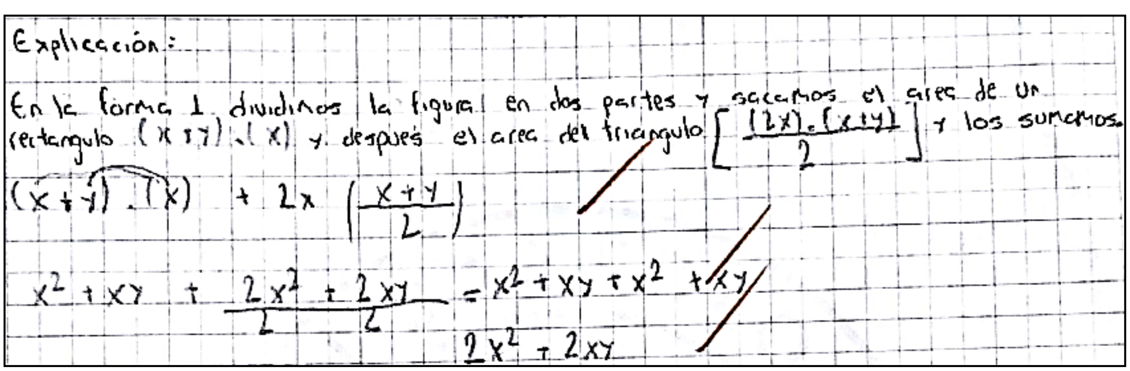
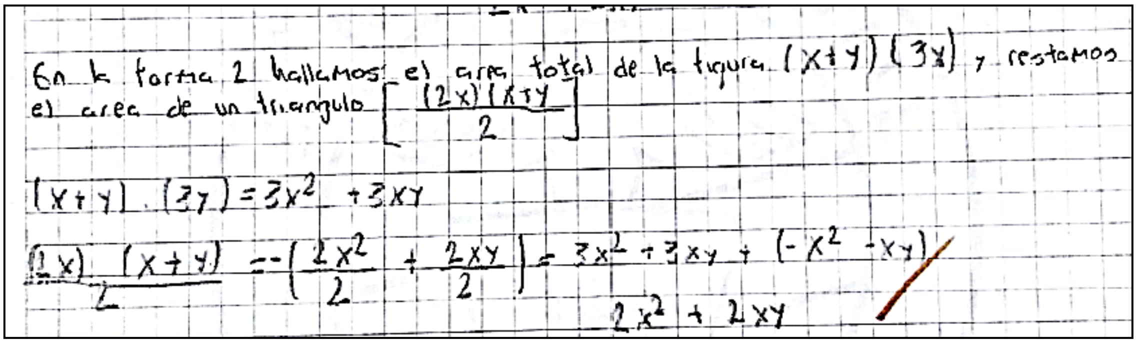

Explicación:
En la forma 1 dividimos la figura en dos partes y sacamos el area de un rectangulo $(x+y)\cdot(x)$ y despues el area del triangulo $\left[\frac{(2x)\cdot(x+y)}{2}\right]$ y los sumamos.
$(x+y)\cdot(x) + 2x\left(\frac{x+y}{2}\right)$
$x^2 + xy + \frac{2x^2 + 2xy}{2} = x^2 + xy + x^2 + xy$
$2x^2 + 2xy$

Ilustración 6-13 Procesos de Karen y David en la evaluación final o de salida.

"*explicación: En la forma 1 dividimos las figuras en dos partes y sacamos el área de un rectángulo* $(x+y)\cdot x$ *y después el área del triangulo* $\left[\frac{(2x)\cdot(x+y)}{2}\right]$ *y los sumamos*

$(x+y)(x)+2x\left(\frac{x+y}{2}\right)= x^2+xy+\frac{2x^2+2xy}{2\quad 2}=x^2+xy+x^2+xy=2x^2+2xy$ "



En la forma 2 hallamos el area total de la figura $(x+y)(3x)$ y restamos el area de un triangulo $\left[\frac{(2x)(x+y)}{2}\right]$

$(x+y).(3x)=3x^2+3xy$

$\frac{(2x)(x+y)}{2}=-\left(\frac{2x^2}{2}+\frac{2xy}{2}\right)=3x^2+3xy+(-x^2-xy)$

$2x^2+2xy$

Ilustración 6-14 Procesos de Karen y David en la evaluación final o de salida.

En la forma 2 hallamos el área total de la figura $(x+y)(3x)$ *y restamos el área de un triángulo* $\left[\frac{(2x)\cdot(x+y)}{2}\right]$

$$(x+y)(3x)=3x^2+3xy$$

$\frac{2x(x+y)}{2}=\frac{2x^2}{2}+\frac{2xy}{2},\ 3x^2+3xy+(-x^2-xy)=2x^2+2xy$ "

David y Karen realizan un muy buen trabajo, desde que determinan los lados restantes en la figura 1 del problema 1 (ilustración 6-11) hasta que presentan su respuesta final. Si se observa con cuidado en la ilustración 6-11, al lado izquierdo se observa cómo David y Karen determinan el lado del triángulo blanco. Vale la pena señal que se comete un error al realizar la multiplicación $2x\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{2x^2+2xy}{2\quad 2}$ este se observa en la ilustración 6-13. Retroalimentación relacionada a este error se realizó al finalizar la secuencia.

Una vez determinan los lados del rectángulo que aparece en el problema 1, proponen dos fórmulas para determinar el área de la parte sombreada del rectángulo. Esto se puede apreciar en la explicación que realizan de sus procedimientos.

Los procesos que realizan para determinar las dos áreas muestran el nivel que están manejando al realizar las operaciones de suma, resta, multiplicación y división. Vale la pena señalar que este es un problema que involucra dos indeterminadas (que tiene un nivel de dificultad un poco más elevado). Pero esto no es impedimento para que Karen y David demuestren y apliquen lo que han aprendido a lo largo de la secuencia.

Por otro lado, las ilustraciones 6-15 y 6-16 muestran los procesos de Saray y Cristian. Saray y Cristian también proponen dos formas de determinar las áreas de la parte sombreada, la ilustración 6-15 muestra la forma en la que determinan los lados restantes del rectángulo y las ecuaciones que proponen para determinar el área sombreada.

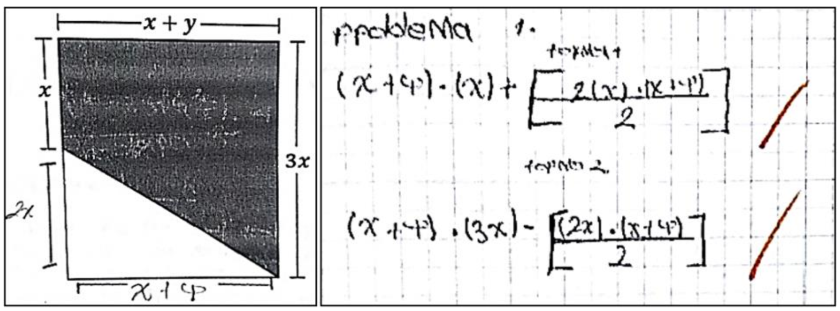


Ilustración 6-15 Procesos de Saray y Cristian en la evaluación final o de salida.

$$(x+y)(x)+\left[\frac{(2x)\cdot(x+y)}{2}\right]\ \boldsymbol{Forma\ 1}.$$

$$(x+y)(3x)-\left[\frac{(x+y)\cdot(2x)}{2}\right]\ \boldsymbol{Forma\ 2}.$$

La ilustración 6-16 muestra la explicación de Saray y Cristian para la solución del problema uno.

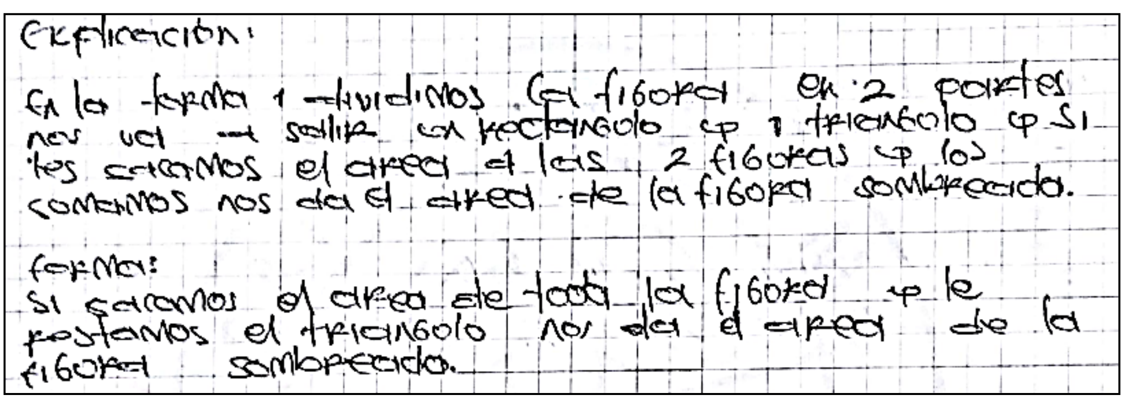


Ilustración 6-16 Procesos de Saray y Cristian en la evaluación final o de salida.

"Explicación:

en la forma 1 dividimos la figura en 2 partes nos va a salir un rectángulo y 1 triangulo y si les sacamos el área a las dos figuras y los sumamos nos da el área de la figura sombreada

Forma 2: Si sacamos el área de toda la figura y le restamos el triángulo nos da el área de la figura sombreada"

Saray y Cristian no se molestan en simplificar las expresiones que proponen para hallar el área de la región sombreada, pero esto no debe opacar el hecho de que las dos expresiones algebraicas que presentan son completamente válidas, ni mucho menos la explicación que realizan de sus procedimientos.

Problema 2: *La figura muestra los tres primeros pasos de una secuencia de construcción de cuadrados:*

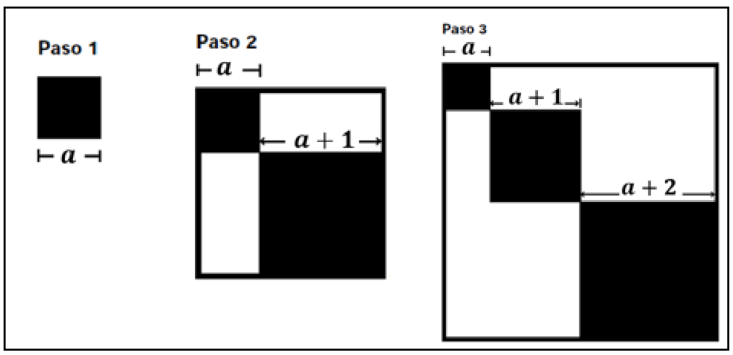


Figura 6-10

Determina la expresión algebraica que representa el área de la región en blanco de la figura que aparece en el paso 3.

Las ilustraciones 6-17 y 6-18 muestran los procesos de David y Karen

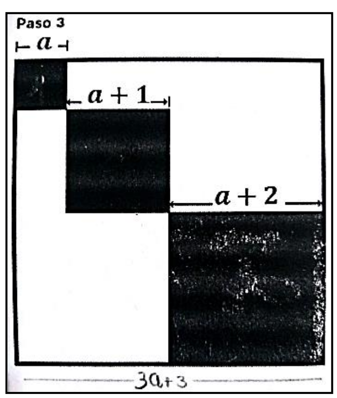


Ilustración 6-17 Procesos de Karen y David en la evaluación final o de salida.

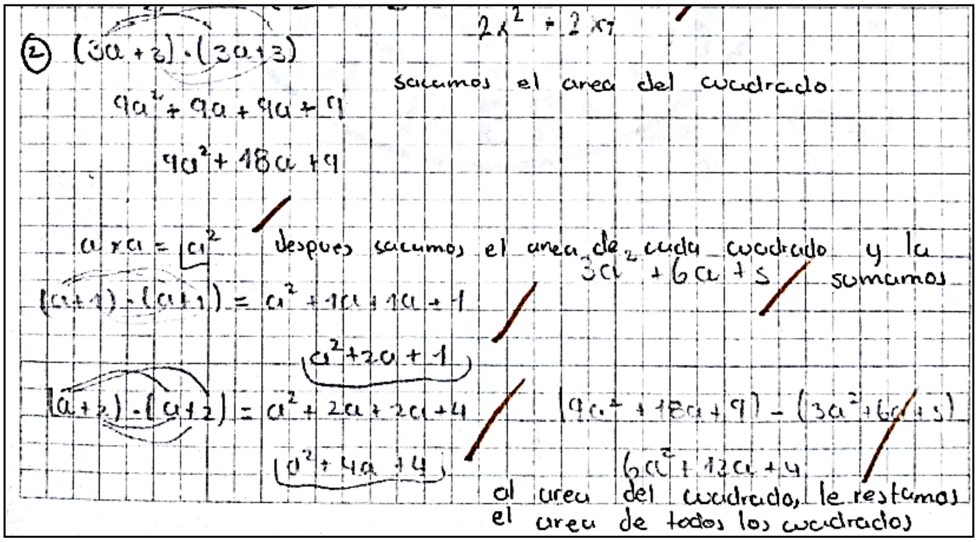


Ilustración 6-18 Procesos de Karen y David en la evaluación final o de salida.

“$(3a + 3)(3a + 3)$

$9a^2 + 9a + 9a + 9$ *sacamos el área del cuadrado*

$9a^2 + 18a + 9$

$a \times a = \boldsymbol{a^2}$ *Después sacamos el área de cada cuadrado y la sumamos*

$(a + 1)(a + 1) = a^2 + 1a + 1a + 1 = \boldsymbol{a^2 + 2a + 1}$

$(a + 2)(a + 2) = a^2 + 2a + 2a + 4 = \boldsymbol{a^2 + 4a + 4}$

$(9a^2 + 18a + 9) - (\boldsymbol{3a^2 + 6a + 5}) = 6a^2 + 12a + 4$ *el área de los cuadrados, les restamos el área de todos los cuadrados”*

Las ilustraciones 6-19 y 6-20 muestran las respuestas de Saray y Cristian, se observa en la ilustración 6-19 cómo determinaron los lados de los rectángulos blancos para determinar el área total en blanco.

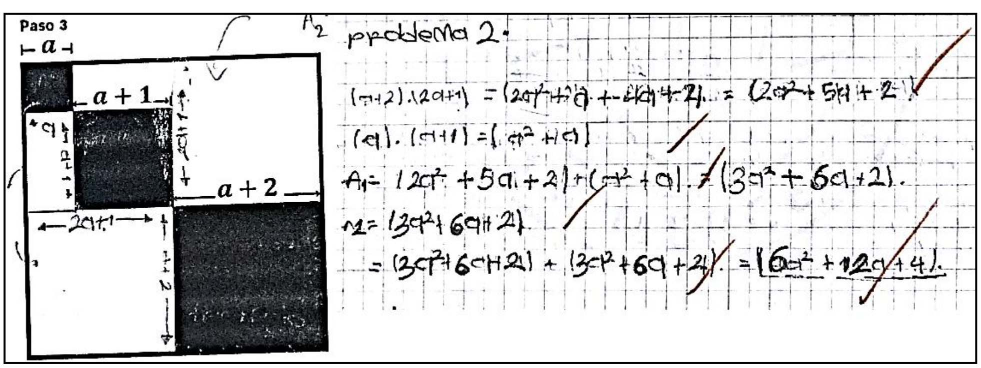


Ilustración 6-19 Procesos de Saray y Cristian en la evaluación final o de salida.

“*Problema 2*

$(a+2)(2a+1) = 2a^2 + a + 4a + 2 = 2a^2 + 5a + 2$

$(a)(a+1) = a^2 + a$

$A_1 = (2a^2 + 5a + 2) + (a^2 + a) = 3a^2 + 6a + 2$

$A_2 = 3a^2 + 6a + 2$

$A = (3a^2 + 6a + 2) + (3a^2 + 6a + 2) = (\boldsymbol{6a^2 + 12a + 4})$"

En la ilustración 6-20 se muestra la explicación de las operaciones realizadas para determinar el área en blanco.

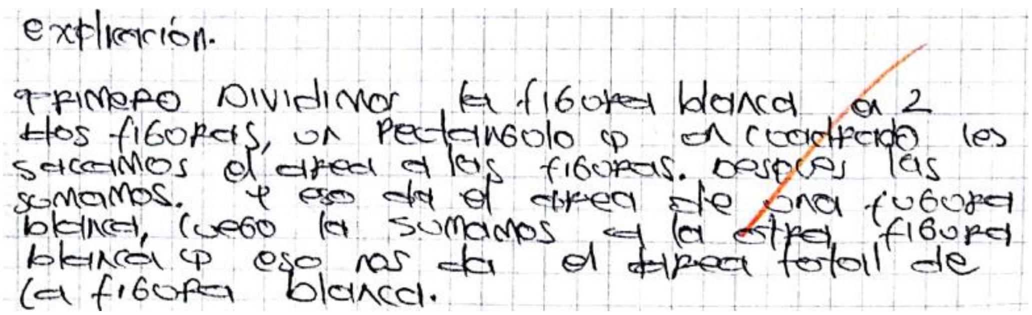

explicación.
Primero dividimos la figura blanca a 2 dos figuras, un rectángulo y un cuadrado les sacamos el área a las figuras. después las sumamos. Y eso da el área de una figura blanca, luego la sumamos a la otra figura blanca y eso nos da el área total de la figura blanca.

Ilustración 6-20 Procesos de Saray y Cristian en la evaluación final o de salida.

“Primero dividimos la figura blanca a 2 figuras, un rectángulo y un cuadrado y al cuadrado les sacamos el área” a las figuras. después las sumamos. Y eso da el área de una figura blanca, luego la sumamos a la otra figura blanca y eso nos da el área total de la figura blanca”

Es interesante observar que cada pareja decidió determinar el área que se solicitaba en el problema 3 de maneras diferentes, Karen y David determinaron el área del cuadrado de lado $3a + 3$ y le restaron las áreas de los cuadrados negros, mientras que Saray y Cristian determinaron el área de las regiones blancas (cuatro rectángulos blancos) y al final las sumaron. Los dos procedimientos son completamente válidos, las operaciones intermedias fueron desarrolladas satisfactoriamente y conducen a las dos parejas a la misma expresión algebraica, que en este caso toma, como empieza a ser costumbre, un significado geométrico.

Problema 3: *En una pared cuadrada se dibujó el diseño que se presenta en la figura.*

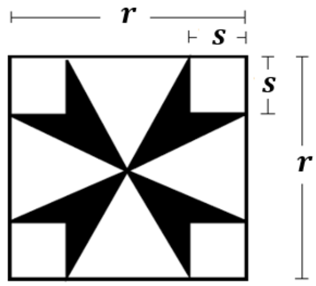


Figura 6-11

Determina la expresión algebraica que representa el área en negro de la pared.

Las ilustraciones 6-21 y 6-22 muestran los procesos de David y Karen

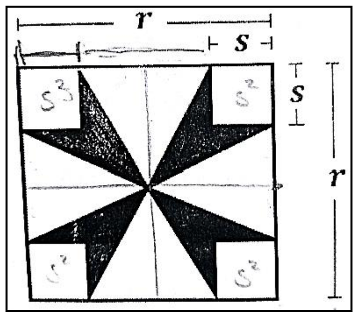


Ilustración 6-21 Procesos de Karen y David en la evaluación final o de salida.

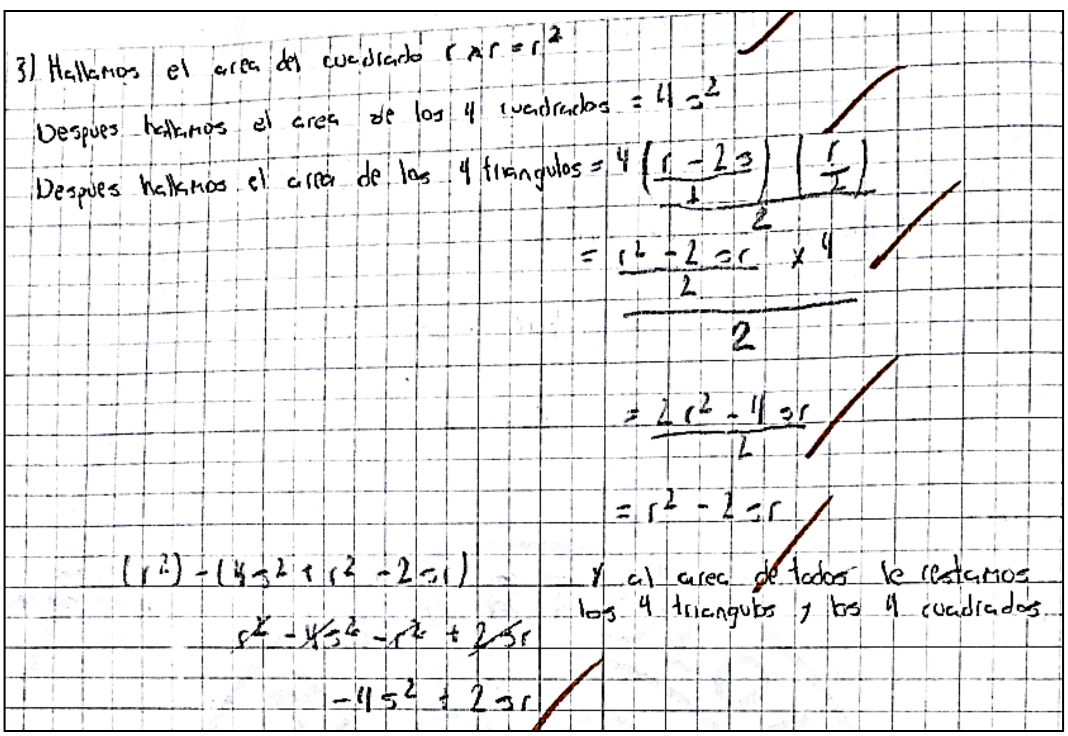


Ilustración 6-22 Procesos de Karen y David en la evaluación final o de salida.

"Hallamos el área del cuadrado $r \times r = r^2$ *Después hallamos el área de los cuatro cuadrados* $= 4s^2$ *después hallamos el área de los triángulos*

$$\frac{4\left(\frac{r-2s}{1}\right)\left(\frac{r}{2}\right)}{2} = \frac{\frac{r^2-2sr}{2}\times 4}{2} = \frac{2r^2-4sr}{2} = r^2-2sr$$

$(r^2) - (4s^2 + r^2 - 2sr)$ *y al área de todo le restamos 4 triángulos y los cuatro cuadrados*

$$r^2 - 4s^2 - r^2 + 2sr = -4s^2 + 2sr\text{"}$$

El problema tres muestras que David y Karen se han apropiado completamente de los procesos de resolución de las operaciones algébricas que se trabajaron a lo largo de la secuencia y que adicional a esto, son capaces de emplearlas para resolver un problema de aplicación relacionado con áreas de manera efectiva.

Las ilustraciones 6-23 y 6-24 muestran los procesos de Saray y Cristian.

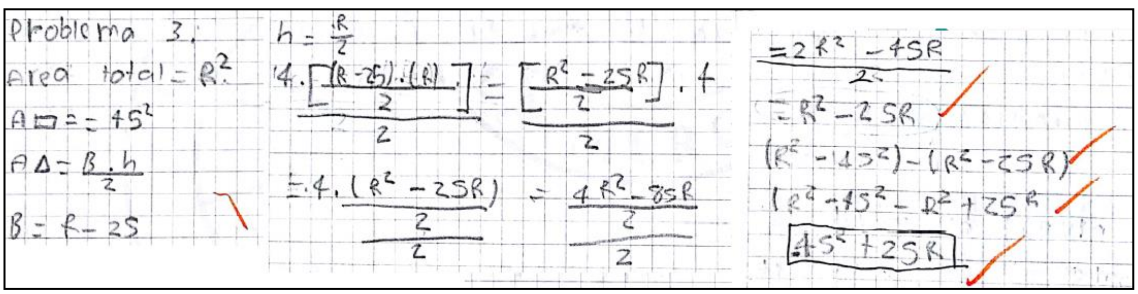


Ilustración 6-23 Procesos de Saray y Cristian en la evaluación final o de salida.

"Problema 3.

$$\textbf{\textit{Área total}} = \boldsymbol{r^2},\ \boldsymbol{A_c = 4s^2},\ \boldsymbol{A_T = \frac{Bh}{2}},\ \boldsymbol{B = R - 2s},\ \boldsymbol{h = \frac{R}{2}}$$

$$\frac{4\left[\frac{(R-2S)(R)}{2}\right]}{2} = \frac{\left[\frac{R^2-2SR}{2}\right]\cdot 4}{2} = \frac{\frac{4\cdot(R^2-2SR)}{2}}{2} = \frac{\frac{4R^2-8SR}{2}}{2} = \frac{2R^2-4SR}{2}$$

$$= R^2 - 2SR,$$

$$= (R^2 - 4S^2) - (R^2 - 2SR)$$

$$= R^2 - 4S^2 - R^2 + 2SR$$

$$= \boldsymbol{-4S^2 + 2SR}\text{"}$$

En la ilustración 6-24 Saray y Cristian explican su proceder

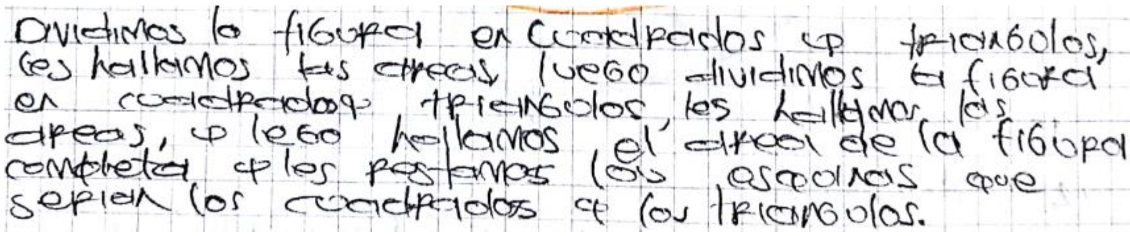


Ilustración 6-24 Procesos de Saray y Cristian en la evaluación final o de salida.

"*Dividimos la figura en cuadrados y triángulos, les hallamos las áreas, luego dividimos la figura en cuadrados y triángulos, les hallamos las áreas, y luego hallamos el área de la figura completa y le restamos las esquinas que serían los cuadrados y los triángulos"*

Los procesos de resolución que emplean Saray y Cristian demuestran que, al igual que sus compañeros, también se están apropiados del álgebra que se trabajó a lo largo de la secuencia y que son capaces de aplicarla a problemas en contextos geométricos.
Para cerrar el análisis de la prueba de salida, se mencionan algunas particularidades de los resultados de los estudiantes:

Es indispensable que los estudiantes aprendan a diferenciar y utilizar el lenguaje matemático de la forma correcta, pues se repiten en varios de los trabajos afirmaciones como:

"hallar el área de la figura ***(20)*** *y restarle el triángulo* ***(6)*** *y eso nos da solo el área del trapecio* ***(14)"*** y

"*luego hallamos el área de la figura completa y le restamos las esquinas que serían los cuadrados y los triángulos"*

Donde se aprecia que una figura geométrica para los estudiantes es sinónimo de área.

En todos los problemas se trabajaron indeterminadas diferentes de x, esto no fue un impedimento para que los estudiantes desarrollaran los procesos de manera correcta, por lo que el trabajo de la secuencia, como se ha venido mencionando, fue extendido por los estudiantes a contextos más amplios. Teniendo en cuenta los resultados que se observaron a la largo de la esta, podría decirse que se aprovechó bastante el enfoque de la resolución de problemas, en la medida que cada éxito alcanzado por los estudiantes hizo crecer en ellos su actitud positiva frente a el trabajo desarrollado en esta:

> La práctica en la resolución de problemas sólo es útil si contribuye a ir construyendo una especie de almacén de éxitos, de donde saldrán en el futuro las buenas ideas y las actitudes positivas. (Mason, Burton, & Stacey, 1982, pág. 127)

Por último, cuando se comparan los procesos llevados a cabo por cada pareja de estudiantes se observa que mientras David y Karen se sienten más cómodos realizando y explicando sus procedimientos con una combinación entre el leguaje retorico y el algebraico, Cristian y Saray utilizan netamente el lenguaje algebraico. Siendo los dos métodos para este nivel de escolaridad, completamente apropiados.

6.5 Entrevista

Como se mencionó anteriormente, el trabajo se cerraría con una pequeña entrevista, la intención era registrar las percepciones de los estudiantes frente al trabajo desarrollado, su experiencia y sentir frente a la secuencia. La entrevista quedo registrada en video, se muestra a continuación el link y su respetiva transcripción.

https://www.youtube.com/watch?v=1fwKi-nBUgo

> ***Profesor:*** *Estamos acá con los cuatro estudiantes del Silveria Espinosa de Rendón, que vinieron a trabajar durante algunos sábados, varios sábados, en las temáticas de álgebra.*
>
> *Entonces se presentan y vamos a hacer unas preguntas.*
>
> ***David:*** *mi nombre es David y tengo quince años.*
>
> ***Karen:*** *mi nombre es Karen Silvana*
>
> ***Cristian****: Cristian Camilo*
>
> ***Saray:*** *Saray*

Profesor: *Bueno de uno a diez Karen ¿cuánto sabias de operaciones de álgebra antes de comenzar a trabajar los sábados?*

Karen: *yo creo que uno.*

Cristian: *yo tres*

Saray: *yo por ahí un seis*

David: *como un dos*

Profesor: *Ahora, después del trabajo ustedes consideran que son capaces de resolver ejercicios que involucran operaciones algebraicas como: suma, resta, multiplicación factorización y división,*

Todos: *SI*

David: *ahora si estamos en el nivel diez*

Profesor: *¿Cómo se sintieron resolviendo los problemas que involucraban los conceptos algebraicos?… por ejemplo, una vez presentamos una evaluación de entrada, David no estuvo, pero Cristian tuvo la oportunidad de volver presentar la evaluación, esa evaluación tenía problemas, la evaluación de hoy tenía problemas y la evaluación que hicimos hace ocho días también, ¿Cómo se sintieron Cristian y David que estuvieron presentes (en todas las evaluaciones) y como se sintieron ahorita ustedes dos que asistieron hoy (Saray y Karen, que no asistieron a algunas sesiones por situaciones familiares)*

Cristian: *bien profe pues porque ya la pude resolver sin ningún problema*

David: *eh, pues al comienzo teníamos mucha dificultad para desarrollar los ejercicios, pero ya no, ya era muy fácil hacerlo, ya lo sabemos hacer muy bien.*

Profesor: *¿Hoy cómo se sintieron ustedes? Karen y Saray que no venían hace tiempo, pero arrancaron hoy trabajando (resolviendo la evaluación)*

Karen: *Pues al principio pienso que éramos como muy… o sea nos quedábamos mucho tiempo pensando en un solo ejercicio y pues no podíamos hacer nada, o sea no lo podíamos solucionar. En cambio, pues yo que hace harto no venimos y eso, o sea pues ya es como más fácil la capacidad para entender cada ejercicio, pues ya tenemos ya tenemos algunas bases*

Saray: *Pues bien, pues al principio me sentí perdida porque no había venido, pero bien.*

Profesor: *¿qué les gustó de lo que trabajamos en la clase? ¿qué mejorarían? y ¿qué propondrían para mejorar?*

David: *pues yo pienso que no hay nada que mejorar porque pues todo lo que hicimos estuvo muy bien, o sea nada estuvo mal, entonces las clases fueron muy dinámicas y el profesor nos explicaba muy bien todos los temas, cuando no entendíamos pues no pasaba al siguiente tema hasta que todos entendiéramos, entonces pues pienso que todo estuvo bien, o sea no hubo cosas malas (aspectos por mejorar)*

Saray, Cristian: Estamos de acuerdo con David.

Karen: *no pues a mí también me gustó, pues yo digo que uno de los temas que más me gustó fue lo de la factorización. Porque la verdad fue un tema que la verdad lo necesitábamos mucho, y pues que como que uno escucha ese nombre y pues uno como que se atrofia, pero pues es fácil sí.*

Profesor: *¿qué opinan del material y la metodología con la que trabajamos?*

David: *pues que es una buena estrategia de aprendizaje, pues porque es una manera nueva de que nosotros aprendamos, es una manera muy dinámica y no estar siempre como con lo tradicional, sino que el profesor se encargó de innovar estudiando ese método de las fichas, para que nos facilitara más a nosotros el aprendizaje.*

Saray: *pues a mí me parece muy bueno, o sea uno entiende más viendo las cosas así gráficamente y eso, ahora yo cuando estoy en clase o en alguna evaluación (en la clase titular) tengo que hacer algún ejercicio todo como que lo asimilo (asocio) a las fichas, entonces me queda muy fácil.*

Cristian: *Pues estuvo muy bueno ese material porque es una forma diferente pues de entender las cosas, pues nada, me ayudo reharto eso.*

Karen: *pues yo pienso que estuvo mejor porque el profesor que a nosotros nos dictaba álgebra (titular) nos mostraba la cosas como alguna manera más complicada, en cambio pues con las fichas es más fácil entender. Las fichas nos ayudan a entenderlo mejor.*

Profesor: *Uno de los problemas que tuvimos cubriendo los temas de la secuencia estaba relacionado con el tiempo, avanzábamos lento porque nos veíamos cada ocho o quince días ¿ustedes creen que, si se aplicara con mayor frecuencia el método por ejemplo tres veces a la semana, aprenderían más rápido o aprenderían más?*

David: *pues si y pues lo de que a veces por los festivos y todo eso pues no nos podíamos ver, pero pues si lo estudiáramos más seguido pues también sería mejor porque aprenderíamos más del profesor y pues creo que tendría más cosas para enseñarnos.*

Profesor: *a pesar de estas dificultades con el tiempo, porque a veces pasaban casi dos o tres semanas que no nos veíamos ¿tú piensas que se te olvidaba lo que trabajábamos?*

David: *No pues porque el profesor si no entendíamos muy bien el tema, pues nos hacía mucho énfasis en eso, pues porque el profesor se aseguraba que siempre que saliéramos de acá tuviéramos el tema bien claro.*

Saray: *no a mí no se me olvidaba, pero pues si me gustaría que fuera más seguido*

Profesor: *¿creen que el material evitaba que se les olvidara?*

Todos: *si obvio, claro*

Saray: *claro porque uno llegaba y seguíamos trabajando con las fichas o sea todo era una continuación de los que estábamos viendo*

Cristian: *no pues a mí no se me olvidaba nada porque pues yo me acordaba más que todo cuando trabajábamos con las fichas, pues yo me acordaba de eso*

Karen: *Pues profe yo pienso que no, porque un ejemplo lo que decía Cristian, cuando trabajábamos con las fichas… porque si usted nos ponía a hacer un ejercicio o algo así, ya nos íbamos acordando de cada ficha como iba cuadrada en qué cuadrante y todo eso si, entonces pues eso nos ayudaba a facilitar todo eso.*

Profesor: *¿ustedes les recomendarían a los profesores de matemáticas que utilizaran este método? ¿y por qué?*

David: *Si lo recomendaría y se los daría a conocer, pues si no lo conocen, pues porque es un método más práctico y más dinámico para aprender y no estar siempre con lo mismo sino que es algo nuevo, es algo diferente, las clases son más divertidas con todas esas fichas y a uno se le facilita más con gráficos es más fácil con figuras y todo eso*

Saray: *¡CLARO QUE LO RECOMENDARIA! Profe yo lo recomendaría porque es super práctico digamos para todas las personas que se les dificulta el álgebra, es super fácil y como que el cerebro entiende más como si se le muestra gráficamente.*

Cristian: *yo también lo recomendaría pues porque los profesores comúnmente como lo enseñan. o sea, no es que lo enseñen mal, sino que a uno se le van olvidando las cosas, pero como que con las fichas uno recuerda más el tema.*

Karen: *yo también pienso lo mismo porque… yo si lo recomendaría porque profe porque, por ejemplo, explicaban algo un tema y eso, o sea uno lo podía tener en el cuaderno, pero muchos de los pasos que hay que seguir para solucionarlo son como… o sea, es mejor tenerlo con las fichas pues uno ya se acuerda de que un ejemplo hay que eliminar fichas…*

Profesor: *¿De cuánto creen ustedes que dependen ahora de las fichas, después de haber hecho la última evaluación? ¿Creen que dependen mucho de ellas o dieron un paso en el que ya no tuvieron que utilizarlas? ¿las utilizaron hoy?*

David: *No, pues al comienzo si teníamos que utilizar las fichas, pero pues ya hoy, no (evaluación), la clase pasada (preevaluación) tampoco las utilizamos, pues hemos venido varias clases ya sin usar las fichas y pues ya hoy en la evaluación final, no tuvimos que utilizar las fichas*

Saray, Silvana y Cristian: estamos de acuerdo con David

Profesor: *¿De uno a diez cuanto creen que han aprendido con el método?*

David*; DIEZ*

Saray: *diez*

Cristian: *diez*

Karen: *diez también*

Profesor: *¿Cómo se podría aprender más, como creen que podríamos hacer para que el aprendizaje aumentara con este método?*

David: *pues podríamos… o sea seguir viendo las clases.*

Profesor: *¿les gustaría que el curso siguiera a pesar de que es los sábados?*

David: *Si, o sea que el curso siguiera.*

Cristian*; yo vendría los sábados festivos, yo vendría todos los días*

David: *o sea, es un aprendizaje que necesitamos mucho, cotidianamente en el colegio lo necesitamos diariamente, pues porque, o sea, los profesores entre semana nos explican, pero muy por encima en cambio usted si hasta que todos no lo tengamos claro como que no pasa al siguiente tema…*

Saray: *además el hecho de que seamos tan pocos hace que se enfoque bien en cada estudiante, entonces digamos si yo no entendía, venia y me explicaba, así los demás ya hubieran entendido.*

Karen: *el hecho de que seamos tan pocos estudiantes hace que usted tenga el tiempo para poder explicarnos a todos… yo creo que sería bueno, un día entre semana y de pronto el sábado*

David: *necesitamos más tiempo, porque la frecuencia no es tan importante porque nosotros duramos quince días sin vernos y pues la frecuencia no importa, lo que importa es si nosotros continuamos haciendo esto, lo importante es el tiempo que le dediquemos a esto, o sea la frecuencia con lo que o hagamos no lo hagamos no tiene nada que ver, pues porque si nosotros los queremos hacer en la casa ahí se va a ver la frecuencia*

Saray: *si lo pudiéramos seguir practicando, un ejemplo, hasta que saliéramos después de bachillerato, pues porque nos ayuda para todo, pues porque los profesores pueden explicar en general, pero en muchas ocasiones uno no entiende los temas, en cambio, aquí es mucho más sencillo pues entender eso*

Profesor *¿Cómo harían para no olvidar lo aprendido?*

David: *seguirlo trabajando, o sea, ahí si va la frecuencia*

Cristian: *seguirlo trabajando en casa*

David: *se trata de constancia, si se tenemos alguna duda pues le preguntamos a usted*

Profesor; *bueno muchas gracias muchachos*

Cristian: *ah gracias a usted profe*

David: *Gracias profe*

Saray: *y Silvana: ¡gracias!*

El trabajo desarrollado en la secuencia parece haber favorecido los procesos de aprendizaje de los estudiantes y también permitió que los estudiantes asignaran un significado a las operaciones algebraicas que se desarrollaron. Adicionalmente, se atrevieron a realizar conjeturas y formular hipótesis que les permitieron trabajar eventualmente sin la caja de polinomios.

7. Conclusiones y recomendaciones

7.1 Conclusiones

La “caja de polinomios” permitió resolver el problema de investigación que motivó la realización de este trabajo. La experiencia con el material, el enfoque desde la resolución de problemas, los procesos metacognitivos y la documentación que se realizó para “formalizar” los métodos empleados para la enseñanza de las OPPSI, complementaron la solución al problema y desembocaron en el paradigma que arroja la investigación presentada en este documento.

Si bien este paradigma también deberá ser modificado y repensado para favorecer en mayor medida la enseñanza-aprendizaje del álgebra, las observaciones que se harán en primera instancia están relacionadas con los aspectos positivos que se encuentran explícitos e implícitos como resultado de este trabajo (conclusiones), mientras que aquello que pueda enriquecer otras dimensiones de la investigación será mencionado más adelante (recomendaciones):

1. Como se señaló en el capítulo dos, si se tiene en cuenta el desarrollo histórico del álgebra es posible identificar dos características principales en su construcción: el uso del lenguaje simbólico desde su estructura formal; y el uso de los modelos que permitió a lo largo de la historia dotar de significado y comprender ciertas estructuras algebraicas. Un proceso que busque favorecer la enseñanza-aprendizaje del álgebra, en particular de las OPPSI, deberá incluir diferentes actividades que permitan establecer una relación entre estas dos características principales.
2. Los modelos o lenguajes empleados a lo largo de la secuencia (concreto, pictórico y simbólico), favorecieron los conceptos e ideas relacionadas con las OPPSI. El

hecho de comunicar los procesos de resolución de tres formas diferentes les permitió a los estudiantes comparar y establecer relaciones entre unas y otras. Por otra parte, tener tres modelos de referencia por los que podían moverse indistintamente, favoreció sus procesos de pensamiento, independientemente del estadio de desarrollo cognitivo en el que se encontraran. De esta manera, la secuencia se adaptó a los ritmos de trabajo de cada estudiante facilitando la abstracción de los conceptos y asignando *una interpretación y un significado,* tanto a las indeterminadas como a las operaciones algebraicas.

3. El enfoque desde la resolución de problemas de la secuencia permitió que los estudiantes se ejercitaran con cada una de las particularizaciones trabajadas, en los tres lenguajes, teniendo en mente un horizonte claro (proponer los respectivos algoritmos que les permitieran trabajar sin el material). Los casos particulares prepararon el terreno para las conjeturas y su posterior verificación. Esto permitió la transición del lenguaje concreto al algebraico, siendo estos los primeros pasos para formalismos en un nivel más avanzado.

4. La formulación de conjeturas permitió la transformación de los procesos de aprendizaje de los estudiantes, porque una vez formuladas se pusieron a prueba a partir de ejemplos particulares, se reflexionó sobre ellas y fueron analizados desde una posición crítica por parte de cada estudiante, pares y docente. Lo que dio paso a su respectiva verificación y posterior transformación. Por otro lado, si se desea que las conjeturas sean cada vez más elaboradas y profundas, las dinámicas que se establezcan en el aula deben estar diseñadas para que los estudiantes alcancen pequeños logros que favorezcan sus estados emocionales, favoreciendo un ambiente de seguridad y confianza en el que se les anime a hacer conjeturas cada vez más atrevidas.

5. Debido a su estructura lúdica, el uso de la “caja de polinomios” llevó a los estudiantes a tener una actitud positiva frente al álgebra, disminuyó la carencia de sentido que aparece cuando los estudiantes empiezan a manipular expresiones que contienen letras, así como las dificultades generadas por los procedimientos formales cuando los procesos de abstracción no se han asimilado y redujo también los estados emocionales irracionales y arbitrarios que se desencadenan hacia la

misma. Si se piensa en que el objetivo de la clase es favorecer una actitud positiva hacia el álgebra, y no el brindar una serie de respuestas concretas a diversos problemas, emplear las dinámicas de la secuencia pueden ser una opción que permitiría crear una atmósfera de confianza para fortalecer los procesos de enseñanza-aprendizaje del álgebra.

6. Si bien “la caja de polinomios” es una excelente herramienta para presentar a los estudiantes las OPPSI, es en la factorización donde se presenta su mayor potencial y se evidencia con mayor claridad su enfoque lúdico. El brindarle al estudiante una serie de fichas y pedirle que arme un rectángulo a modo de rompecabezas, así como el disponer y reorganizar estas fichas de múltiples maneras para lograr el objetivo, sumerge al estudiante en un juego matemático que no le es indiferente.

6. Las dinámicas implementadas en la secuencia permitieron, en primera instancia, asignarle a la factorización de polinomios de grado dos en una indeterminada un significado geométrico. Posteriormente en se determinó un método a partir de las particularizaciones desarrolladas en las guías, que permitió a los estudiantes factorizar sin las fichas empleando un algoritmo único, Concibiendo la factorización como un proceso general y no como casos aislados que no se relacionan entre sí.

7. La implementación de la caja de polinomios permite trabajar de manera general e implícita propiedades de los números enteros entre las que se encuentran:

   - ✓ El opuesto aditivo.
   - ✓ La propiedad conmutativa de la suma.
   - ✓ La propiedad asociativa de la suma.
   - ✓ El elemento neutro.

   Y de manera explícita propiedades de la multiplicación como:

   - ✓ La propiedad conmutativa.
   - ✓ La propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma.

8. Las dinámicas establecidas en la secuencia bajo el enfoque de la resolución de problemas, acompañadas del uso de la caja de polinomios, permitieron a los

estudiantes acercarse a resolver con un lenguaje simbólico algebraico problemas de aplicación de una manera completamente natural, demostrando una evolución importante en comparación con los resultados que se presentaron en la prueba de entrada. Se evidencia en el trabajo de los estudiantes una interpretación del concepto de área, mayor que la que tenían al inicio en la secuencia, así como habilidades para resolver problemas que relacionan la geometría con el álgebra, mostrando avances significativos en la siguiente competencia específica de MEN: *“calcular áreas de polígonos regulares mediante composición de figuras o propiedades de la misma”* (MEN, 2017).

9. Las dinámicas de la secuencia favorecieron los aspectos memorísticos de los estudiantes. Por un lado, la caja de polinomios al ser un material concreto y visual permitió que los estudiantes recordaran con facilidad su funcionamiento; y por otro, los logros alcanzados en las diferentes actividades realizadas en la secuencia los llevó a que evocaran las sensaciones de éxito cosechadas a lo largo de esta, favoreciendo las acciones y momentos clave para la resolución de nuevos problemas. El hecho de que los procesos de aprendizaje no se vieran seriamente alterados, aún cuando trascurrían largos intervalos de tiempo sin que los estudiantes asistieran a una sesión de clase, es evidencia de que las dinámicas de trabajo tuvieron un impacto positivo en la memoria y procesos de aprendizaje de los estudiantes.

7.2 Recomendaciones

Independientemente de las dinámicas que se trabajen en el aula es necesario tener siempre presente que la enseñanza-aprendizaje del álgebra, se transforman con la práctica. En ningún caso se da como el producto de una sola actividad, ni tampoco surge de manera espontánea.

Por esta razón, es importante contar con un amplio abanico de recursos que se empleen con sentido crítico, mejorarlos y potenciarlos a través de la experiencia para favorecer cada vez más los procesos cognitivos y emocionales de los estudiantes hasta llevarlos a convertirse en seres autónomos y conscientes de su aprendizaje.

De esta manera los resultados destacables de este trabajo no son más que una oportunidad para favorecer dichos procesos. En la medida en la que se potencien las prácticas aquí contenidas y se tengan en cuenta los aspectos por mejorar, surgirán ideas que ampliaran el abanico de recursos para la enseñanza-aprendizaje del álgebra.

1. Es necesario tener en cuenta que la “caja de polinomios” es un material lúdico que en ningún momento remplaza los formalismos que se trabajan en las operaciones con polinomios. Su uso tiene fines motivacionales e incluyentes que permiten una transición más amena al manejo del lenguaje simbólico. Y sirve como introducción al trabajo con polinomios que involucren, por ejemplo, grados mayores a dos, coeficientes racionales, irracionales y reales, así como resignificar las operaciones a su definición formal.

2. El pensamiento algebraico puede ser alimentado desde edades tempranas, respetando desde luego el estadio de desarrollo cognitivo en el que se encuentre el estudiante. Una manera de ir introduciendo a los estudiantes de grados menores (cuarto, quinto) al uso de la “caja de polinomios” es empleando su equivalente en aritmética “los bloques aritméticos multibase”. Realizar multiplicaciones de números naturales y números decimales con este material, puede favorecer el potencial de “la caja de polinomios” en grados superiores de dos maneras: trabajando relaciones concretas entre la aritmética y la geometría se prepara el terreno para establecer relaciones entre el álgebra y la geometría, y estableciendo dos lenguajes que conducen al mismo resultado, el concreto y el simbólico, se favorecen los estadios de desarrollo cognitivo y las relaciones entre los lenguajes aritmético, algebraico y pictórico.

3. El conocimiento de: la matemática pura, de los contextos del álgebra escolar, del conocimiento informal que tengan los estudiantes de la disciplina, los estadios de desarrollo cognitivo de los estudiantes y el uso de estrategias lúdicas, didácticas y pedagógicas son insumos necesarios para la construcción de procesos sólidos desde el primer contacto de los estudiantes con el álgebra, se recomienda entonces:

a) Tener un cuidado especial con el uso del lenguaje y el significado de las letras en las “álgebras” que se desarrollan en el contexto escolar, álgebra como aritmética generalizada (letra como generalizadora del modelo aritmético), álgebra como herramienta para la solución de ecuaciones (letra como incógnita), álgebra como estructura (letra como indeterminada) y álgebra funcional (letra como variable funcional) (Socas, Camacho, Palarea, & Hernandez, 1996).

b) Determinar mediante pruebas de entrada las nociones que tienen los estudiantes de los temas que se abordaran en la clase. Realizar un análisis a fondo de los resultados que arroje la prueba puede ser útil de dos maneras; se pueden diagnosticar dificultades relacionadas con la aritmética para evitar que se extiendan al álgebra, y por otro lado, determinar los mecanismos informales que emplean los estudiantes para obtener respuestas a diferentes problemas. Estos últimos deben ser puestos aprueba en clase para identificar sus fortalezas y limitaciones, con el fin de llevar paulatinamente a los estudiantes a identificar los beneficios que ofrecen los métodos formales frente a los métodos informales.

c) Hacer uso de diferentes lenguaje o modelos para la comprensión de las temáticas que requieren de un pensamiento formal. Esto permite que todos los estudiantes, independientemente del estadio de desarrollo cognitivo en el que se encuentren, se acerquen de manera más asertiva al formalismo de las estructuras algebraicas.

4. Se recomienda que las primeras expresiones algebraicas que maneje el estudiante (en grado sexto) estén en el contexto del “álgebra como aritmética generalizada” (Socas, Camacho, Palarea, & Hernandez, 1996) el uso de fórmulas de física, área o “demostraciones” de propiedades de los números enteros como $(a+b)+c = a+(b+c)$ mediante casos particulares, puede favorecer la transición de la aritmética al “álgebra generalizada” y posteriormente a los otros “tipos de álgebra”. Las fórmulas de física pueden ser presentadas mediante experimentos llamativos enmarcando este trabajo en un ámbito interdisciplinar.

5. Teniendo en cuenta que los aspectos por mejorar que se presentaron al trabajar con la caja de polinomios están relacionados con la ubicación de las fichas en los cuadrantes, y a la lectura de los lados de la figura según el eje en el que estén ubicados. Vale la pena revisar el diseño del plano cartesiano impreso, ya que al ser en blanco y negro puede no tener el mismo impacto visual en los estudiantes que el que tendría un plano que le asigne un respectivo color a los ejes y cuadrantes negativos, y otro color a los ejes y cuadrantes positivos. Utilizando esta sencilla estrategia es posible que el porcentaje de errores decrezca y así mismo la propagación de estos a la representación pictórica y por supuesto a la transcripción al lenguaje algebraico, favoreciendo la sistematización de los resultados obtenidos y eventualmente la formulación de los algoritmos.
6. Las transcripciones al lenguaje algebraico requieren especial atención por parte del docente, sobre todo cuando se organizan los datos para su sistematización. Para este fin, se recomienda que los estudiantes revisen su trabajo con sus pares, de esta manera los estudiantes pueden identificar errores basados en la comparación y se propician momentos de autorreflexión y reflexión colaborativa para el aprendizaje.

7. La operación con la que los estudiantes tuvieron mayores dificultades, incluso con el uso del material, fue la resta. El hecho de tener que trasladar las fichas de un cuadrante a otro parece requerir mayor atención por parte del estudiante. Por lo que se recomienda que los procesos que se desarrollan en esta operación sean deliberadamente lentos. Estos procesos pueden ser revisados por pares y de ser necesario por el docente para evitar confusiones y sacar el máximo provecho al material. Una serie de particularizaciones que vaya en aumento tanto en cantidad como en dificultad puede favorecer la compresión de los procesos de la resta.

8. La construcción del material puede guardar diferentes proporciones en relación con cada estudiante, es decir se pueden construir diferentes “paquetes” de fichas cada uno con medidas diferentes para fortalecer la idea de indeterminada. Esta pequeña variante en el material puede causar interrogantes interesantes en los estudiantes, como, por ejemplo: ¿Por qué mis fichas son más pequeñas que las de mi compañero? A lo que se puede contra preguntar ¿el tamaño de las fichas influye en los resultados finales? Por otro lado, el material tal y como señalan Soto,

Mosquera y Gómez (Soto, Mosquera, & Gómez, 2005) se puede trabajar en dos indeterminadas x^2, y^2 y xy tal y como muestra la ilustración 188.

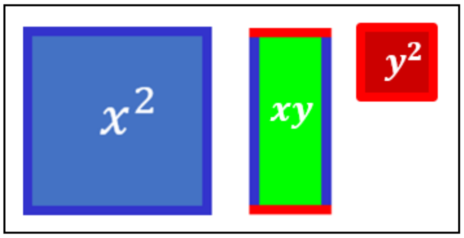


Ilustración 7-1 la caja de polinomios para dos indeterminadas

Este material puede ser utilizado con los estudiantes que presenten dificultades al tratar de extender el trabajo desarrollado con polinomios de una indeterminada a ejercicios o problemas con dos indeterminadas.

9. Teniendo en cuenta que el mayor potencial lúdico de la caja de polinomios se encuentra en la factorización Actividades con enfoque “competitivo” donde se “recompense” aquellos estudiantes que con ciertas fichas armen determinado rectángulo en el menor tiempo posible, primero contra sus pares y luego en una competencia contra reloj. O competencias en las que el estudiante determine si, dada una expresión algebraica, y utilizando su equivalente en fichas con la caja de polinomios, es posible construir un rectángulo, pueden utilizarse como excusa para formular conjeturas relacionadas con los criterios de factorización y/o la deducción del “encuadre mínimo”.

A.Anexo: Autorización de Padres de familia para la divulgación de resultados

DOCUMENTO DE AUTORIZACIÓN DE USO DE IMAGEN SOBRE FOTOGRAFÍAS Y FIJACIONES AUDIOVISUALES (VIDEOS) PARA USO PÚBLICO

(Para que los estudiantes que aparecen en el video, lo entreguen al docente)

Atendiendo al ejercicio de la Patria Potestad, establecido en el Código Civil Colombiano en su artículo 288, el artículo 24 del Decreto 2820 de 1974 y la Ley de Infancia y Adolescencia, el colegio____ solicita la autorización escrita del padre/madre de familia o acudiente del (la) estudiante____________________________________, identificado(a) con tarjeta de identidad número___________________, alumno de la Institución Educativa__________________________________ para que aparezca ante la cámara, en una videograbación con fines pedagógicos que se realizará en las instalaciones del colegio mencionado.

El propósito del video es evidenciar el desarrollo de la Experiencia Significativa con uso pedagógico de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones – TIC denominada ____en la enseñanza/aprendizaje de _________________________________, el cual será aportado como soporte a la postulación en la convocatoria **ICT Training for Colombian Teachers 2016** que adelanta el Ministerio de Educación Nacional y quedará como documentación de la propuesta; así mismo el video será objeto de evaluación como parte de los requisitos de la convocatoria y podrá ser publicado en las plataformas del Portal Educativo Colombia Aprende y Redmaestros, así como podrá ser utilizado con fines demostrativos ante otros docentes. Sus fines son netamente pedagógicos, sin lucro y en ningún momento será utilizado para objetivos distintos.

Autorizo,

___________________________________ ________________

Nombre del padre/madre de familia o acudiente Cédula de ciudadanía

__________________________________ ________________

Nombre del estudiante Tarjeta de Identidad

Fecha:___ /_____/_______

Calle 43 No. 57 - 14 Centro Administrativo Nacional, CAN, Bogotá, D.C.
PBX: +57 (1) 222 2800 - Fax 222 4953
www.mineducacion.gov.co - atencionalciudadano@mineducacion.gov.co

B. Anexo: Guías y material empleado en la secuencia

Teniendo en cuenta que el material empleado es demasiado extenso como para incluirse en este trabajo, se decidió presentarlo a través del siguiente enlace.

https://www.dropbox.com/sh/1ys35e4ifo3wbo5/AAAyuRMjTb4N4L41NGPpoglQa?dl=0

En este enlace se pueden obtener: las guías, los talleres y las evaluaciones empleadas durante toda la secuencia didáctica.

Bibliografía

Acevedo, M., & Falk, M. (1997). *Redescubriendo el Álgebra: De la solución de ecuaciones al álgebra abstracta.* Bogotá: Universidad Nacional.

Ballén, J. O. (2012). *El álgebra geométrica como recurso didáctico para la factorización de polinomios de segundo grado (tesis de maestría).* Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

Cifuentes, D., Colorado, A., Erazo, P., & Aponte, F. (10 de 30 de 2014). *http://www.saludcapital.gov.co.* Obtenido de http://www.saludcapital.gov.co: http://www.saludcapital.gov.co/DSP/Diagnsticos%20distritales%20y%20locales/Local/2013/16.Dx_Local_Puente_Aranda_PRELIMINAR_Versi%C3%B3n_Octubre_30_de_2014.pdf

D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la matemática. .* Bologna: Magisterio.

Elliot, J. (2010). *La investigación-acción en educación.* Madrid: Morata.

Fraleigh, J. (1982). *Álgebra abstracta primer curso.* Rhode Island: Adison Wesley.

García, J. (1998). Didactica de las ciencias Resolución de problemas y desarrollo de la creatividad. Medellín: Colciencias.

Hitt, F. (1997). Sistemas semióticos de representación. *Avances y perspectivas*, 190-196.

Investigación acción del profesorado. (1988). Bogotá: Nueva fuente Educativa.

Kline, M. (1990). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días.* Madrid: Alianza Universidad.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Pensar matemáticamente.* Barcelona: Labor S.A.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D., & Gowar, N. (2014). *Rutas hacia/raíces del álgebra.* Ibagué: Universidad del Tolima .

MEN. (2017). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas.* Bogotá: Ministerio de educación nacional.

Nocedo de León, I. C. (2001). *Metodología de la investigación educacional.* Madrid: Pueblo y Educación.

O'connor, J., & Robertson, E. (10 de Mayo de 2017). *History of mathematics*. Obtenido de History of mathematics: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Diophantus.html

Polya, G. (1973). *How to solve it: A New Aspect of Mathematical Method.* Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas.* Madrid: Comares.

Rooney, A. (2011). *The story of the mathematics.* Londres: Arcturus publishing limited.

Sandoval, Y. E. (2010). *Las representaciones geométricas como herramientas para la construcción del significado de expresiones y operaciones algebraicas (tesis de maestría).* Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, Tegucigalpa.

Santos Trigo, L. M. (2007). *La resolución de problemas matemáticos fundamentos cognitivos.* Madrid: Trillas.

Socas, M., Camacho, M., Palarea, M., & Hernandez, J. (1996). *Iniciación al álgebra.* España: SINTESIS.

Soto, F., Mosquera, S., & Gómez, C. (2005). La caja de polinomios. *Enseñanza Universitaria*, 15.

Stacey, K., & Groves, S. (1999). *Strategies for problem solving.* Victoria : Latitude Pb.

Stewart, I. (2009). *Taming the infinite: The history of mathematics .* Londres: Quercus .

Tangarife, D. (2013). *Transición del pensamiento numérico al pensamiento algebraico a través de la estrategia didáctica-algeblocks.* Universidad Nacional de Colombia, Manizales.

Valderrama, J. C. (2015). *La tecnología como mediador en la enseñanza de la factorización de polinomios cuadráticos para grado octavo (tesis maestría).* Universidad Nacional de Colombia, Medellín.

Vasco, C. (1979). *El álgebra renacentista.* Bogotá: Universidad Nacional.

Villarroel, J. M. (2014). *Propuesta para la enseñanza de las operaciones básicas y el proceso de factorización de polinomios, con la herramienta didáctica “caja de polinomios”, en estudiantes de grado octavo de la I.E María Cano (tesis maestría).* Universidad Nacional de Colombia, Medellín.