

# Uso de la analogía de flujo compresible para elaborar un modelo numérico de aguas someras

Fabián Omar Betancourt Q.<sup>1</sup>, Arturo Palacio P.<sup>2</sup>  
Alejandro Rodríguez V.<sup>3</sup> y Daniel Fuentes del Río<sup>4</sup>

*1.Universidad Nacional de Colombia – Sede Medellín  
fabian\_omar@yahoo.com*

*2.Instituto de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México*

*3.Instituto de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México*

*4.Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad de Osaka*

*Recibido para evaluación: 10 de Agosto de 2007 / Aceptación: 18 de Septiembre de 2007 / Versión Final: 10 de Octubre de 2007*

## Resumen

En este trabajo se exploran las capacidades y limitaciones que ofrecen las ecuaciones de aguas someras basadas en la analogía del flujo compresible para representar el flujo en canales por medio de la validación con datos analíticos. La teoría de aguas someras se ha utilizado ampliamente para analizar diversos problemas hidrodinámicos, principalmente los relacionados con el flujo en cuerpos de agua, debido a su versatilidad para resolver problemas de tres dimensiones (3D) en forma simplificada en 2D. Por su parte la analogía de de flujo compresible ha sido empleada para reducir los costos experimentales. Le metodología consiste en establecer las relaciones matemáticas existentes entre las ecuaciones que representan el flujo en aguas someras y las ecuaciones que representan el flujo de un gas compresible, para luego implementarlas en el código PHOENICS. Se proponen dos casos básicos de validación con base en resultados analíticos (Rouse, 1946).

**Palabras Clave:** Modelo Numérico de Aguas Someras, Flujo Compresible, Flujo en Canales, Validación.

## Abstract

The main objective of this work is to explore the capabilities and limitations that the shallow water equations offer based on the analogy of compressible flow to represent the in channel flows through validation with analytical data. The shallow water theory has been widely used to analyze diverse hydrodynamic problems, mainly related to with flow in water bodies, due to its versatility to solve 3D problems in simplified 2D form. On the other hand, the analogy of compressible flow has been used to reduce experimental costs. We use the mathematical relation between the shallow water equation and the compressible gas flow, and implement this equation in PHOENICS code. This paper show a two validation cases with analytic data (Rouse, 1946).

**Key Words:** Shallow Water Numerical Model, Compressive Flow, Open Channel, Validation.

## 1. Introducción

La existencia de una analogía entre el flujo compresible y el flujo a superficie libre es conocida desde finales del siglo XIX y principios del siglo XX. Mach, quien descubrió las ondas en los gases, notó su similitud entre las ondas que se forman en los ríos; sin embargo, fue hasta 1911 cuando Isaachsen realizó una demostración experimental de la analogía, aplicándola en el estudio del flujo en toberas y expansiones súbitas en tuberías.

Posteriormente se realizaron diversos estudios experimentales utilizando la analogía hidráulica. En el caso de Estados Unidos, inicialmente se utilizó para estudiar los flujos supercríticos a través de flujos supersónicos. Von Kármán desarrolló la analogía en forma matemática, de manera que la analogía pudiera ser aplicada en cualquier dirección. Sin embargo, el trabajo más completo sobre analogía hidráulica vino en 1938, con la tesis doctoral de Preiswerk (1940a,b), que fue traducida como informe técnico de la NACA (National Advisory Committee for Aeronautics), hoy NASA (National Aeronautics and Space Administration).

Posteriormente, el uso de la analogía hidráulica para el estudio de flujo compresible se generalizó principalmente para el estudio de flujo transónico y supersónico, ya que la construcción de un túnel de viento capaz de reproducir esas condiciones de flujo resulta caro y laborioso, además la analogía se empezó a utilizar en gran medida para el estudio de ondas de choque.

Si se hace una comparación entre las ecuaciones del flujo compresible bidimensional y flujo en superficie libre, se puede llegar a la conclusión de que existe una analogía entre el comportamiento de estos flujos.

Hasta ahora, la analogía se ha aplicado en una gran variedad de experimentos, para el estudio del flujo en toberas, estudios meteorológicos, en máquinas de desplazamiento positivo así como turbo maquinaria y combustión. Actualmente, la analogía se sigue utilizando, en gran medida para observar patrones de flujo supersónico alrededor de cuerpos de geometría complicada y para el estudio de ondas de choque, como es el caso del estudio de Pal y Bose, que estudiaron el flujo supersónico alrededor de un objeto de forma triangular o el trabajo de De Chant y Caton, que hicieron mediciones para estudiar el flujo en toberas por medio de la analogía hidráulica (Fuentes, 2007).

En la literatura existe gran cantidad de trabajos que utilizan la analogía para diferentes aplicaciones, aunque la gran mayoría de ellos son experimentales. Durante los años 50, también se realizaron bastantes estudios para determinar el rango de aplicación de la analogía. Sobre este tema, los principales aportes fueron de Ippen (1950), donde se indica que en presencia de ondas de choque, la condición de flujo isoentrópico no se cumple; sin embargo, estableció que las limitaciones en el uso de la analogía hacen necesario el desarrollo de modificaciones o cuasianalogías, que permiten obtener resultados útiles para su uso en diseños aerodinámicos.

La analogía hidráulica de flujo compresible (AHFC) está basada en la equivalencia de las ecuaciones bidimensionales de flujo compresible adiabático y de flujo en superficie libre. Si se hace una comparación entre las ecuaciones del flujo compresible bidimensional y flujo en superficie libre, se puede llegar a la conclusión de que existe una analogía entre el comportamiento de estos flujos.

## 2. Descripción de las relaciones matemáticas empleadas

Los modelos de aguas someras convencionales resuelven las ecuaciones de Navier-Stokes promediadas en la profundidad, considerando que existen grandes diferencias entre la escala horizontal y vertical. El tratamiento del flujo en 2D con velocidades verticales promediadas es parte de la solución.

Las ecuaciones de aguas someras son de bastante utilidad para representar el flujo en: canales abiertos (ancho y profundidad variable, vertederos, saltos hidráulicos, rompimiento de olas, etc.), e hidrodinámica en gran escala (ríos, zonas costeras, estuarios y flujos de marea). Las consideraciones básicas de los modelos de aguas someras son: una distribución homogénea de la presión hidrostática, la consideración de que los fluidos son homogéneos e incompresibles, la existencia de una mezcla uniforme de fluidos en la vertical, y que la escala vertical es relativamente pequeña comparada con la horizontal.

Las ecuaciones de aguas someras convencionales se obtienen por medio de la integración en la vertical de las ecuaciones de Navier-

Stokes y realizando las manipulaciones algebraicas necesarias, de acuerdo a las expresiones finales mostradas a continuación para las ecuaciones de:

- Conservación de Cantidad Masa

$$\frac{dh}{dt} + \frac{d(hu)}{dx} + \frac{d(hV)}{dy} = 0 \quad (1)$$

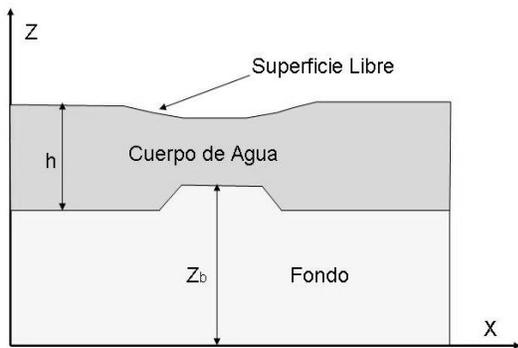
- Conservación de Momentum en X

$$\frac{d(hU)}{dt} + \frac{d(hU^2)}{dx} + \frac{d(hUV)}{dy} = -\frac{d(g h^2 / 2)}{dx} + \nu h \left( \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} \right) - gh \frac{d(Z_b)}{dx} - \frac{g(U^2 + V^2)^{1/2} U}{C^2} \quad (2)$$

- Conservación de Momentum en Y

$$\frac{d(hu)}{dt} + \frac{d(hV^2)}{dy} + \frac{d(hUV)}{dx} = -\frac{d(g h^2 / 2)}{dy} + \nu h \left( \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} \right) - gh \frac{d(Z_b)}{dx} - \frac{g(U^2 + V^2)^{1/2} V}{C^2}, \quad (3)$$

en donde:  $h$  es la profundidad total en m,  $U$  y  $V$  son las velocidades promedio en m/s,  $Z_b$  es la elevación del fondo del mar con respecto a un nivel de referencia en m,  $g$  es la aceleración de la gravedad en  $m/s^2$ ,  $\nu$  es la viscosidad cinemática efectiva en  $m^2/s$  y,  $C$  es el coeficiente de fricción de Chezy en  $m^{1/2}/s$ . En la Figura 1 se observan las coordenadas empleadas para las ecuaciones planteadas.



**Figura 1.** Sistema de coordenadas empleadas en la implementación del modelo de aguas someras.

Este trabajo propone que es posible implementar un modelo de aguas someras basado en la analogía de flujo compresible, tal como se deduce a continuación retomando algunos de los trabajos clásicos acerca del tema (Preiswerk, 1940a,b).

Partiendo de la ecuación de Bernoulli tenemos:

$$p + \frac{\rho c^2}{2} + \rho g z = p_1 + \frac{\rho c_1^2}{2} + \rho g z_1 \quad (4)$$

Si se supone que el agua fluye desde una gran reserva, en donde la velocidad del agua  $c_0=0$ , y la profundidad o tirante vale  $h$ , entonces la ecuación queda:

$$p + \frac{\rho}{2} c^2 + \rho g z = p_0 + \rho g z_0 \quad (5)$$

Por lo que  $c^2$  queda:

$$c^2 = 2g(z_0 - z) + 2(p_0 - p)/\rho \quad (6)$$

Asumiendo que la velocidad vertical es muy pequeña con respecto a la aceleración de la gravedad, entonces:

$$P_0 = \rho g(h_0 - z_0) \quad (7)$$

$$P = \rho g(h - z) \quad (8)$$

Sustituyendo las ecuaciones anteriores en  $c^2$  queda:

$$c^2 = 2g(z_0 - z) + 2 \frac{\rho g(h_0 - z_0) - \rho g(h - z)}{\rho} \quad (9)$$

Reduciendo términos semejantes:

$$c^2 = 2g(h_0 - h) = 2g\Delta h \quad (10)$$

Como se puede ver en la ecuación anterior, la velocidad sólo depende de la profundidad, entonces la velocidad máxima, que corresponde a la velocidad de una ola queda:

$$c = \sqrt{2gh_0} \quad (11)$$

Ahora, haciendo el cociente:

$$\left( \frac{c}{c_m} \right)^2 = \frac{2g\Delta h}{2gh_0} = \frac{\Delta h}{h_0} \quad (12)$$

Para un gas compresible, la velocidad máxima, que corresponde con la velocidad del sonido está dada por:

$$c^2 = 2C_p(T_0 - T) \quad (13)$$

$$c_{\max} = \sqrt{2i_0} \quad (14)$$

donde:  $i_0 = C_p T_0$

Ahora, considerando el cociente:

$$\left(\frac{c}{c_{\max}}\right)^2 = \frac{2gC_p(T_0 - T)}{2g(C_p T_0)} = \frac{T - T_0}{T_0} = \frac{\Delta T}{T_0} \quad (15)$$

Ahora, se comparan los cocientes de velocidad sobre velocidad máxima, para el caso de flujo compresible, y para la ecuación de Bernoulli.

$$\left(\frac{c^2}{c_{\max}^2}\right) = \frac{\Delta h}{h_0} = \frac{\Delta T}{T_0} \quad (16)$$

La ecuación de conservación de masa.

La ecuación de la conservación de masa para un flujo incompresible en estado permanente, refleja que la cantidad de fluido que entra a un volumen de control es la misma que sale en ausencia de almacenamientos internos. Para el caso del agua, se tiene que  $\rho$  es constante, entonces el volumen que entra es igual al volumen que sale,

$$dq_e = dq_s$$

en donde:

$$dq_e = uhdv + vhdv \quad (17)$$

$$dq_s = \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) \left(h + \frac{\partial h}{\partial x} dx\right) dy + \left(v + \frac{\partial v}{\partial y} dy\right) \left(h + \frac{\partial h}{\partial y} dy\right) dx \quad (18)$$

entonces,

$$uhdv + vhdv = \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) \left(h + \frac{\partial h}{\partial x} dx\right) dy + \left(v + \frac{\partial v}{\partial y} dy\right) \left(h + \frac{\partial h}{\partial y} dy\right) dx \quad (19)$$

Dividiendo entre  $dy dx$  reduciendo términos se llega a que:

$$u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + h \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (20)$$

que es igual a

$$\frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(vh)}{\partial y} = 0 \quad (21)$$

Para el caso de un gas compresible,

$$q_e = \rho u dy + \rho v dx \quad (22)$$

$$q_s = \left(\rho u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) dx\right) dy + \left(\rho v + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) dy\right) dx \quad (23)$$

Entonces,

$$\rho u dy + \rho v dx = \left(\rho u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) dx\right) dy + \left(\rho v + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) dy\right) dx \quad (24)$$

Si se reducen los términos semejantes y se divide entre  $dx dy$  se llega a:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (25)$$

Al igual que se hizo en el caso de la ecuación de la energía, si se compara la ecuación de la conservación de masa para un gas y para flujo a superficie libre:

$$\frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(vh)}{\partial y} = 0 \quad \text{para flujo en superficie libre}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad \text{para flujo de un gas compresible}$$

Se puede llegar a la conclusión que  $\rho y h$  son análogas puesto que si se sustituye una por la otra en las ecuaciones anteriores, ambas resultan ser idénticas. Además, de la comparación de la ecuación de la energía, se determina que  $h$  también es análogo a  $T$ .

Si ahora se toma en cuenta la ecuación para un proceso adiabático en un gas ideal.

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

Anteriormente se llegó a que la densidad del gas compresible  $\rho$  y la temperatura  $T$  son análogas simultáneamente al tirante  $h$ , por lo que se puede establecer que:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{h}{h_0} \quad y \quad \frac{T}{T_0} = \frac{h}{h_0}$$

Si ambas se sustituyen en la ecuación para un proceso adiabático en un gas ideal se llega a que:

$$\frac{h}{h_0} = \left( \frac{h}{h_0} \right)^{\frac{1}{k-1}} \quad (26)$$

La expresión anterior solo puede ser cierta si  $k=2$ . Sin embargo, en la naturaleza no existe ningún gas que tenga  $k = c_p/c_v = 2$ , sin embargo, hay muchos fenómenos que no dependen del valor de  $k$ , por lo que el uso de la analogía tiene sentido para algunos fenómenos. De la misma forma, Spalding (1985) explica cómo la analogía de flujo compresible puede emplearse incluso para el estudio de fenómenos de aguas profundas.

Retomando las ecuaciones de un proceso adiabático para un gas compresible:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \left( \frac{T}{T_0} \right), \quad (27)$$

Sustituyendo  $\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{h}{h_0}$  y  $\frac{T}{T_0} = \frac{h}{h_0}$  en la ecuación anterior, se obtiene,

$$\frac{p}{p_0} = \left( \frac{h}{h_0} \right)^2 \text{ o bien } \left( \frac{p}{p_0} \right)^{1/2} = \frac{h}{h_0} \quad (28)$$

Con las ecuaciones anteriores se ha podido establecer una analogía entre la densidad, la presión y la temperatura con el tirante del flujo en superficie libre.

Ahora, se sabe que  $c^2 = 2g(h_0 - h)$ , entonces,

$$h = h_0 - \frac{c^2}{2g}. \quad (29)$$

Considerando que  $c^2 = u^2 + v^2$ , entonces sustituyendo en la ecuación anterior queda:

$$h = h_0 - \frac{1}{2g}(u^2 + v^2) \quad (30)$$

Derivando la ecuación (30) con respecto a  $x$  y con respecto a  $y$  se tiene:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{1}{g} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (31)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = -\frac{1}{g} \left( u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (32)$$

La ecuación de conservación de la masa (25), se puede escribir de la forma:

$$u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + h \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Sustituyendo  $\frac{\partial h}{\partial x}$  y  $\frac{\partial h}{\partial y}$ , obtenidas anteriormente, dividiendo entre  $h$  y reordenando los términos queda:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \left( 1 - \frac{u^2}{gh} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \left( 1 - \frac{v^2}{gh} \right) - \frac{uv}{gh} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \quad (33)$$

Tomando en cuenta la condición de flujo irrotacional,  $\nabla \times C = 0$ , se tiene que el vector será el gradiente de una función escalar, es decir

Que si  $\nabla \times C = 0$ ,  $C = \nabla \phi$ , donde  $\phi$  se llama función de potencial de velocidades, entonces:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \text{ y } v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (34)$$

$$\text{Entonces si } u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \phi_{xx}$$

Si ahora se sustituyen las ecuaciones anteriores, en la ecuación de conservación de masa de la forma (30) se obtiene:

$$\phi_{xx} \left( 1 - \frac{\phi_x^2}{gh} \right) + \phi_{yy} \left( 1 - \frac{\phi_y^2}{gh} \right) - \phi_{xy} \frac{\phi_x \phi_y}{gh} = 0 \quad (35)$$

Ahora, si se utiliza la ecuación de conservación de masa para un gas compresible:

$$u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

A continuación se sustituye en la ecuación anterior:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{1}{gC_p T} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (37)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = -\frac{1}{gC_p T} \left( u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (38)$$

Con base en las funciones de velocidad potencial se llega a:

$$\varphi_{xx} \left( 1 - \frac{\varphi_x^2}{a^2} \right) + \varphi_{yy} \left( 1 - \frac{\varphi_y^2}{a^2} \right) - \varphi_{xy} \frac{\varphi_x \varphi_y}{a^2} = 0 \quad (39)$$

donde  $a^2 = k \frac{p}{\rho}$

Si en la ecuación (35), que corresponde a flujo en superficie libre se sustituye el término  $gh$  por  $a^2$ , se llega a la ecuación (39), por lo que se puede concluir que ambos términos son análogos. Cabe resaltar que  $\sqrt{gh}$  corresponde a la velocidad de una ola en flujo a superficie libre, y el término  $a^2$  corresponde a la velocidad del sonido en flujo compresible, por lo que se puede concluir que la velocidad del sonido y la velocidad de una ola, son análogos.

El número de Mach (Ma) se define como el cociente entre la velocidad y la velocidad local del sonido.  $Ma = \frac{c}{a}$ , y el número de Froude como el cociente entre la velocidad y la velocidad de una ola  $Fr = \frac{v}{c}$ . Como la velocidad del sonido y la velocidad de una ola son cantidades análogas, se puede concluir que el número de Mach y el número de Froude son análogos, por lo que:

$Ma < 1$ , flujo subsónico      —     $Fr < 1$ , flujo subcrítico.

$Ma = 1$ , sónico                      —     $Fr = 1$ , flujo crítico.

$Ma > 1$ , flujo supersónico      —     $Fr > 1$ , flujo supercrítico.

A manera de resumen, el siguiente cuadro muestra la equivalencia de las variables por medio de la analogía.

**Tabla 1.** Equivalencia de las variables de flujo compresible y flujo con superficie libre.

Flujo compresible	Flujo en superficie libre
$\frac{\rho}{\rho^{1/2}}$	$\frac{H}{H}$
Velocidad del sonido	Velocidad de una ola
Mach	Fraude
Onda de choque	Salto hidráulico
Flujo subsónico	Flujo subcrítico
Flujo sónico	Flujo crítico
Flujo supersónico	Flujo supercrítico

Fuente: Fuentes (2007).

### 3. Implementación en el código PHOENICS

Cada una de las ecuaciones de transporte presentadas previamente se discretiza empleando el método de volumen finito. Es decir, el dominio de solución es subdividido en pequeños volúmenes de control, asociando un punto nodal a cada uno de ellos. Las variables escalares y la presión son almacenadas en dichos nodos, mientras que las velocidades son almacenadas en las caras de los volúmenes localizadas entre los puntos nodales. De esta manera, los volúmenes de control para las velocidades quedan defasados con respecto a los empleados para las variables escalares.

Este método de discretización es empleado por *PHOENICS* Ludwig et al (1990), que es el código utilizado para llevar a cabo las simulaciones numéricas, que se presentan en este trabajo. El nombre del código PHOENICS resulta del acrónimo de *Parabolic Hyperbolic or Elliptic Numerical Integration Code Series*. Es un software de propósito general capaz de predecir cualitativamente y cuantitativamente el flujo de fluidos en máquinas, tuberías, equipos de proceso, canales, lagos, mares, etc. Es uno de los primeros utilizados en la técnica de Dinámica de Fluidos Computacional, ya que la primera versión salió en 1981.

El algoritmo de solución se basa en el procedimiento iterativo de Patankar y Spalding (1972), *SIMPLE*, modificado de acuerdo al algoritmo de Spalding (1982), *SIMPLEST*. En términos generales, las variables escalares se resuelven utilizando el método implícito de Stone (1968). En seguida, las velocidades se obtienen al resolver las ecuaciones de cantidad de movimiento utilizando los valores de presión de la iteración previa; posteriormente, la

ecuación de continuidad es ajustada resolviendo una ecuación de corrección de presión que determina los ajustes requeridos para las velocidades y las presiones. Este procedimiento es repetido varias veces hasta que la solución cumple con un criterio de convergencia especificado.

Como todo procedimiento iterativo, la convergencia del método se logra a través de una cuidadosa linealización de los términos fuente, junto con una apropiada relajación de las variables de flujo. Se emplearon 2 tipos de relajación inercial y lineal. La relajación inercial es empleada para las velocidades y resulta de agregar al término fuente de la variable  $\phi$  la expresión:

$$S_{\phi, r} = \lambda ( \phi_{p, pre} - \phi_p ) \quad (40)$$

donde  $\lambda$  es el llamado término de inercia, definido como:

$$\lambda = \frac{\rho V_p}{t_r} \quad (41)$$

donde  $V_p$  es el volumen de la celda,  $t_r$  es el intervalo de tiempo falso y el subíndice *pre* se refiere al valor de la iteración previa. Para la presión se empleó la relajación lineal dada por:

$$\phi = \alpha \phi_{calc} + ( 1 - \alpha ) \phi_{pre}, \quad (42)$$

donde  $\alpha$  es el factor de relajación y el subíndice *calc* se refiere al valor calculado. El criterio de convergencia es tal que para cada variable, la suma de los valores absolutos de los residuales en todo el dominio sea menor del 1% del valor de referencia asignado a cada variable. Un requerimiento adicional es que los valores de las variables dependientes monitoreadas en una localidad del dominio, no cambien en más del 0.1% entre ciclos sucesivos de iteración.

### 3.1. Condiciones de frontera

Para el análisis del modelo de aguas someras basado en la analogía de flujo compresible, es posible incorporar condiciones de frontera en el fondo del canal, en las paredes del canal, en las entradas y salidas del canal y en la superficie libre por el arrastre del viento, de acuerdo con los siguientes criterios.

- Fondo del Canal

Groen y Groves (1962), citados por Vreugdenhil (1994), calculan el efecto cortante del fondo por medio de las siguientes expresiones

empleadas habitualmente en los modelos de aguas someras:

$$\frac{\tau_{bx}}{\rho} = C_f u \sqrt{u^2 + v^2} \quad (43)$$

$$\frac{\tau_{by}}{\rho} = C_f v \sqrt{u^2 + v^2}$$

donde:  $\tau_b$ , es el esfuerzo cortante en el fondo en la dirección  $X$  y  $Y$ ,  $u$  y  $v$ , son las componentes de la velocidad en la dirección  $X$  y  $Y$ , respectivamente, y  $C_f$  es el coeficiente de fricción de fondo estándar, generalmente con valores entre 0.0025 y 0.003 para aguas someras.

- Paredes del Canal

Como condición de frontera para las paredes, el efecto de fricción se incluye en las ecuaciones de cantidad de movimiento y se calcula a partir del esfuerzo cortante de pared local. Dicho esfuerzo cortante se obtiene siguiendo el procedimiento descrito por Rodi (1993), el cual emplea las funciones de pared típicas para flujos con rozamiento, y que consiste básicamente en especificar las condiciones de frontera en un punto externo a la subcapa viscosa, donde la Ley Logarítmica es válida y la turbulencia se puede considerar en equilibrio local.

Para tal punto, a una distancia  $\delta$  de la superficie sólida, la velocidad resultante paralela a dicha superficie se determina como:

$$U_{res} = \frac{U_*}{\kappa} \ln ( E y^+ ) \quad (44)$$

Donde  $\kappa$  es la constante de Von Karman igual a 0.435,  $E$  es un factor de rugosidad, igual a 9.0 para superficies lisas, y la velocidad de fricción  $U_*$  está dada por:

$$U_* = ( \tau / \rho )^{1/2} \quad (45)$$

siendo  $\tau$  el cortante de pared, y la distancia adimensional  $y^+$ , se define como:

$$y^+ = \frac{U_* \delta}{\nu}, \quad (46)$$

donde  $\nu$  es la viscosidad cinemática.

- Efecto del Viento

Por lo que corresponde a la superficie libre, el efecto del viento se introduce a través de un esfuerzo cortante aplicado sobre la

superficie de acuerdo con:

$$\tau = C_d \rho_a U_{10}^2 \quad (47)$$

donde  $C_d$  es el coeficiente de fricción para el cual se asignó el valor propuesto por Wu (1980),  $\rho_a$  es la densidad del aire y  $U_{10}$  es la velocidad del aire a 10 metros sobre el nivel del agua.

Wu (1980), encontró que el coeficiente de arrastre se puede calcular a partir de las siguientes correlaciones dependiendo de la velocidad del viento:

$$\text{Cuando } U_{10} \text{ está entre 0 y 1 m/s: } C_{10} = 0.5 U_{10}^{1/2} * 10^{-3} \quad (48)$$

$$\text{Cuando } U_{10} \text{ está entre 1 y 15 m/s: } C_{10} = (0.8 + 0.065 U_{10}) * 10^{-3} \quad (49)$$

$$\text{Cuando } U_{10} \text{ es mayor de 15 m/s: } C_{10} = 2.26 * 10^{-3} \quad (50)$$

## 4. Simulación numérica

La validación del modelo de aguas someras con base en la analogía de flujo compresible, se realizó con base en dos casos analíticos reportados por Rouse (1946). Esta validación tiene como objetivo corroborar que los resultados numéricos del modelo propuesto representan adecuadamente las variaciones de la superficie libre y de la velocidad de flujo experimentadas por un fluido que fluye en un canal que sufre cambios de profundidad o cambios de ancho, y por ende puede ser empleado para representar la hidrodinámica propia de las zonas litorales donde los efectos asociados al cambio de la superficie libre determinan en gran parte todos los procesos de flujo.

La secuencia seguida corresponde a la presentación de cada uno de los casos planteados (canal con reducción de ancho y canal con cambio de profundidad), iniciando por la presentación de los datos analíticos, los parámetros empleados para llevar a cabo las simulaciones descritas e implementar los casos en el código PHOENICS, y la presentación de los resultados obtenidos. Dadas las características de los casos analíticos, se considera un flujo laminar libre de fricción. En este punto vale la pena mencionar que, aunque la implementación del modelo cuenta con la posibilidad de representar condiciones de frontera asociadas al fondo, a las paredes y a la superficie libre del canal, tal como se muestra en la implementación, en este trabajo no se incluyen resultados sobre estos fenómenos.

Las ecuaciones de transporte se resolvieron en dos dimensiones para las variables  $U_p$ ,  $V_i$  y  $P_j$ ; por lo que la densidad se resuelve por medio del método de corrección de presiones.

Cuando se calcula el comportamiento de la velocidad bidimensional y el tirante de un canal, en muchas ocasiones es necesario determinar la influencia de un objeto que tiene influencia sobre la coordenada vertical. En este caso la simulación es bidimensional y por tanto se hace difícil de tomar en cuenta. En este caso, por medio de la introducción de objetos porosos en el dominio de la simulación, fue posible determinar la influencia de objetos colocados en el piso de los canales. Los valores de las porosidades en PHOENICS son factores generalmente menores o iguales a uno, por los que se multiplican las áreas o volúmenes de las celdas. En el presente trabajo se tratan dos casos interesantes: el primero simula un canal con un obstáculo en el fondo, y el segundo simula la reducción del ancho de un canal, en el que se utiliza un objeto capaz de simular un obstáculo.

Otro aspecto muy importante en el cálculo del tirante es que por medio de la analogía hidráulica se hacen simulaciones bidimensionales, y el tirante, que bien se podría determinar por medio de una tercera coordenada, se calcula como una propiedad del fluido, es decir, en la justificación matemática se determinó que la densidad, temperatura y presión son análogas al tirante, la temperatura y la presión respectivamente. Sin embargo, para evitar la solución de la ecuación de la energía, se toma el valor de la densidad como análogo directo al tirante, por lo que este se calcula como una propiedad del fluido.

## 5. Resultados y Discusión

De acuerdo con la descripción del modelo de aguas someras implementado en el código PHOENICS con base en la analogía de flujo compresible, se realizaron dos simulaciones enfocadas a establecer la capacidad del modelo implementado para reproducir el comportamiento de flujo en canales con ancho y fondo variable en condiciones ideales, es decir sin considerar los efectos asociados con la fricción y la turbulencia inducida por los cambios de sección y los aumentos de velocidad. Igualmente, no se consideraron casos asociados con oleaje y con corrientes inducidas por acción del viento. A continuación se presentan los

resultados y discusiones de las simulaciones realizadas.

### 5.1. Simulación de un Canal con Ancho Variable

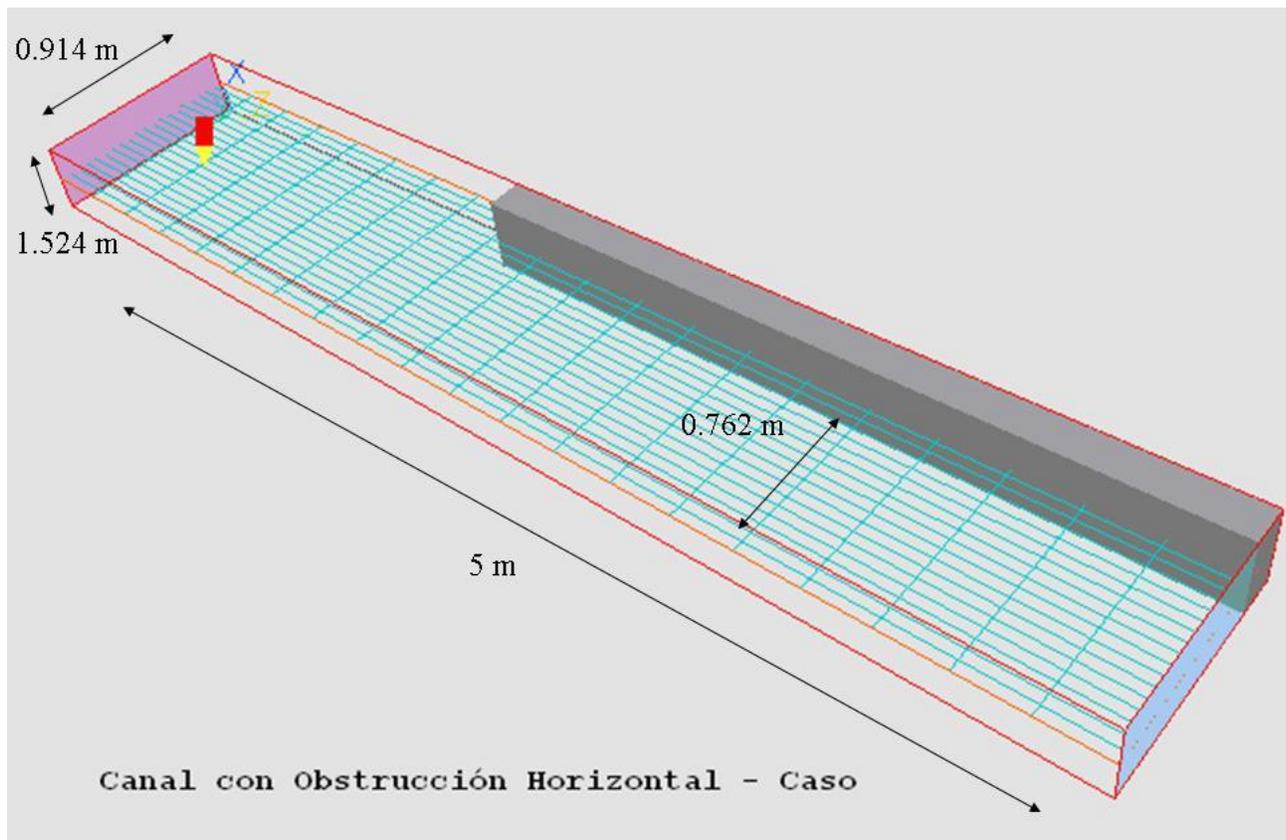
Rouse (1946) reportó un caso analítico en el cual el ancho inicial de canal se reduce, lo cual ocasiona una disminución en la elevación de la superficie libre y un aumento de velocidad, tal como se muestra en la Tabla 2.

**Tabla 2.** Datos analíticos del canal con ancho variable

Zona del Canal	Ancho	Altura Superficie Libre	Velocidad de Flujo	Energía Total
Sin Reducción	6 ft	5 ft	3 ft/s	5.14 ft
Reducción	1.828 m	1.524m	0.914 m/s	1.566 m
Con Reducción	5 ft	4.93 ft	3.65 ft/s	5.14 ft
Reducción	1.524 m	1.502 m	1.112 m/s	1.566 m

Fuente: Rouse (1946).

La implementación del modelo de aguas someras en el código PHOENICS, se hizo por medio de la analogía de flujo compresible, siendo en este caso el cambio de densidad el parámetro que indica la variación de la superficie libre. Inicialmente, se definió la geometría del canal, el cual tiene una longitud de 5 m, un ancho de 0.914 m en su parte ancha y 0.762 en su parte angosta, la cual se extiende 2 m después de la reducción del ancho del canal. Para la determinación de la geometría del canal se tuvo en cuenta el concepto de simetría computacional, la cual permite representar únicamente la mitad del canal, reduciendo de esta forma el costo computacional de la simulación. La malla seleccionada luego de comprobar la independencia de la misma con respecto a los resultados tiene 200 celdas en la dirección de flujo, 200 celdas en el ancho y una celda en la vertical, tal como se observa en la Figura 2.



**Figura 2.** Geometría del canal con ancho variable.

La implementación del caso en el código PHOENICS requiere la selección del modelo de flujo compresible, la definición de las condiciones de frontera y la caracterización de la variación de la altura vía la densidad y la asignación de una presión de referencia en función de la menor altura alcanzada por la superficie libre correspondiente a la altura de la entrada en el presente caso.

La altura y la presión de referencia, se obtienen por medio de las siguientes expresiones:

$$h = h_A \sqrt{P - P_{REF}} \quad (51)$$

donde:  $h_A$  es un multiplicador que permite convertir la raíz de la diferencia relativa entre la presión en la superficie libre y la presión de referencia,  $P$  es la presión en un punto de la superficie libre y  $P_{REF}$  es la presión de referencia. Las variables  $h_A$  y  $P_{REF}$ , se calculan por medio de las siguientes relaciones:

$$h_A = \sqrt{\frac{2}{g}} \quad (52)$$

$$P_{REF} = \frac{h_{ini}^2 g}{2} \quad (53)$$

donde:  $g$ , es la aceleración de la gravedad y  $h_{ini}$ , corresponde a la mínima altura alcanzada por la superficie libre.

En cuanto a las condiciones de frontera, a la entrada se consideró un flujo de masa en función de la velocidad de ingreso y el área de flujo, y a la salida una frontera libre para el flujo de masa sobre un área menor debido al cambio de ancho del canal.

Los resultados obtenidos muestran una muy buena correlación con los datos analíticos presentados con anterioridad, tal como se puede observar en las Figuras 3 y 4. Tanto la velocidad como la profundidad de la superficie libre experimentan un cambio gradual y no puntual como el propuesto por el caso analítico simulado, lo cual está directamente relacionado con la conformación de una onda de cambio extendida a los dos lados de la restricción de flujo. Una vez estabilizada esta onda de cambio, el flujo se comporta de manera estable, similar a como sucede en la realidad. En las figuras en cuestión la velocidad está dada en m/s y la altura de la superficie libre en metros (representada en el modelo por la densidad como se mencionó anteriormente). En las Figuras 3 y 4, se evidencia con claridad la capacidad del modelo propuesto para representar los cambios de velocidad y altura de la superficie libre del caso analítico simulado, tal como lo indican los datos analíticos incluidos en las Figuras 3 y 4.

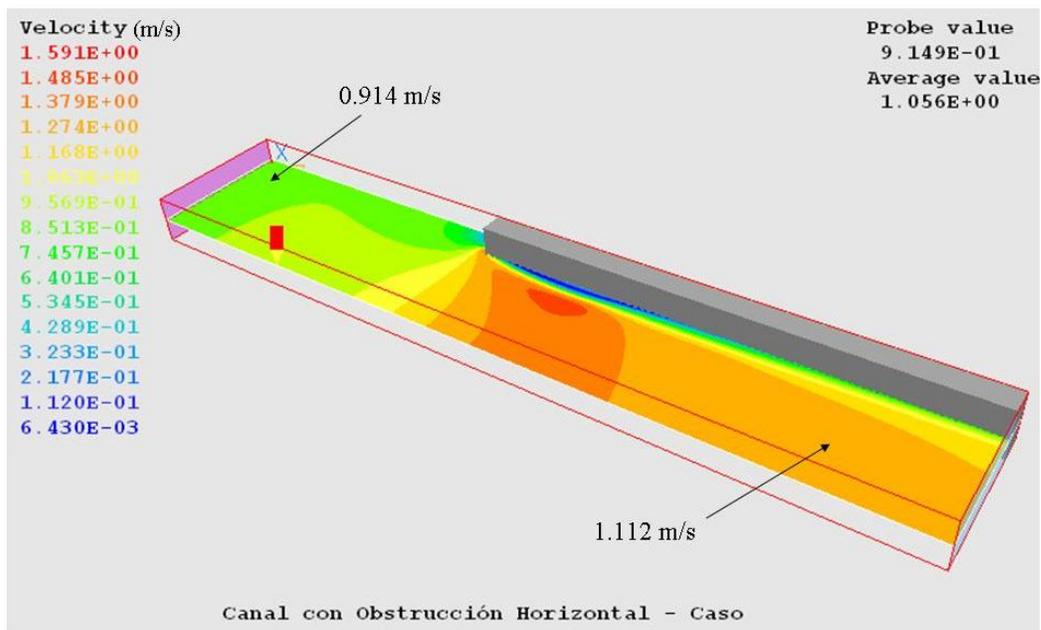


Figura 3. Comportamiento de la velocidad en el canal con ancho variable.

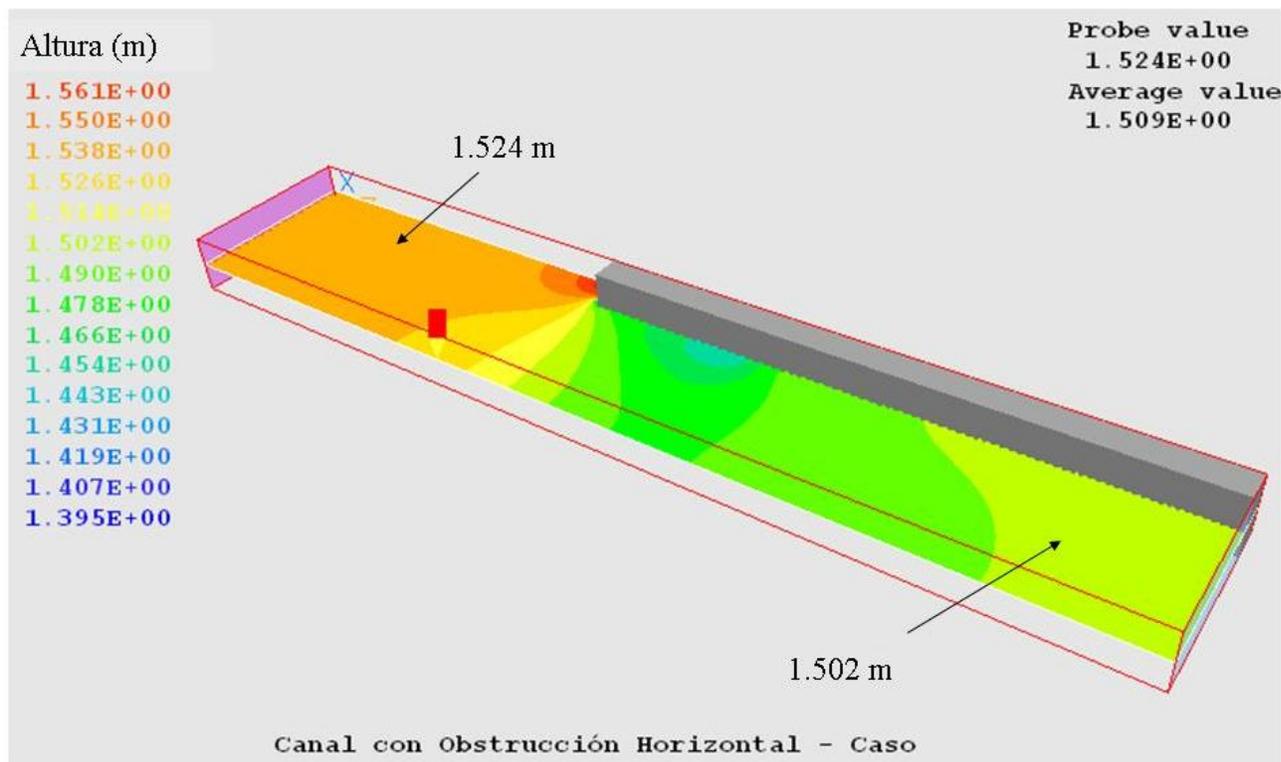


Figura 4. Comportamiento de la superficie libre en el canal con ancho variable.

## 5.2. Simulación de un Canal con Fondo Variable

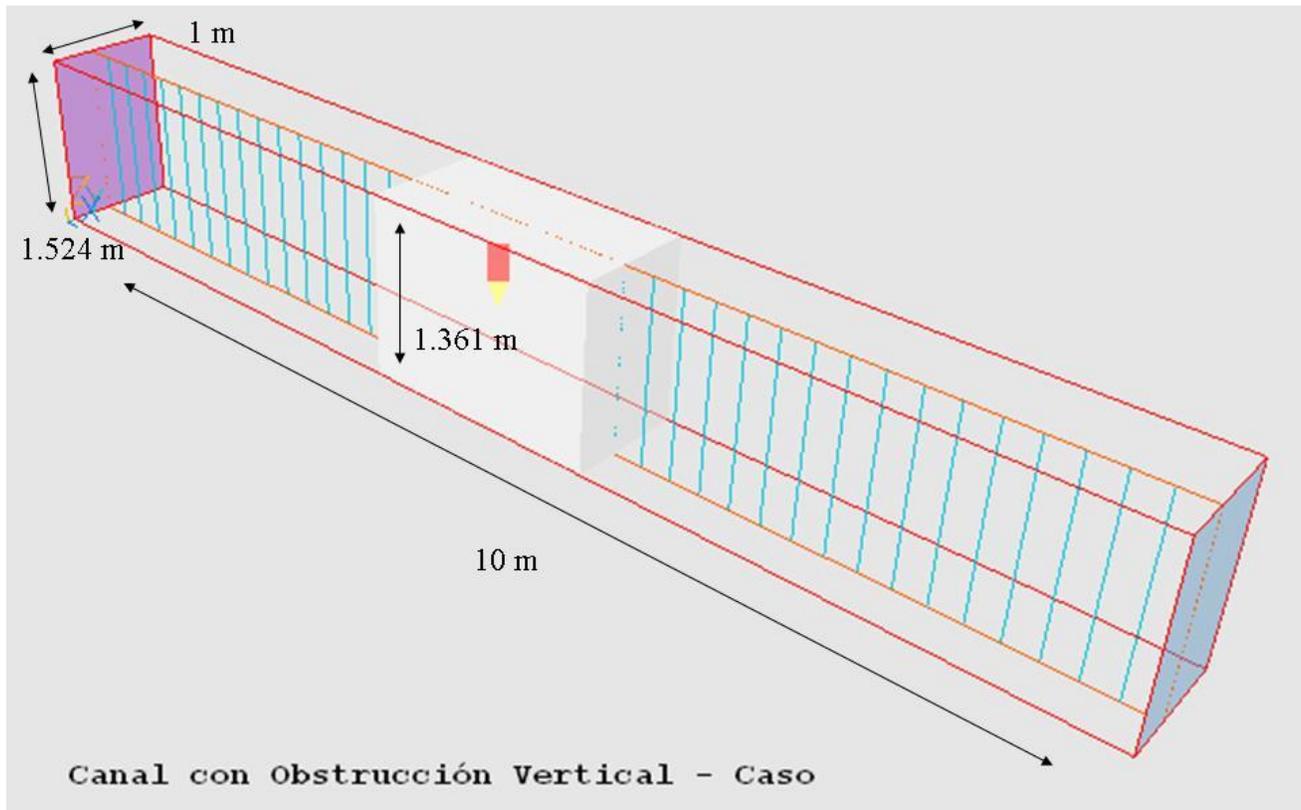
Rouse (1946), reportó un caso analítico en el cual el fondo inicial del canal de 5 ft, se reduce en 6 pulgadas, lo cual ocasiona una disminución en la elevación de la superficie libre y un aumento de velocidad, tal como se muestra en la Tabla 3.

Tabla 3. Datos analíticos del canal con fondo variable.

Zona del Canal	Altura Superficie Libre	Velocidad de Flujo	Energía Total
Fondo Inicial	5 ft	3 ft/s	5.14 ft
	1.524m	0.914 m/s	1.566 m
Con Cambio de Fondo	4.465 ft	3.359 ft/s	5.14 ft
	1.361 m	1.024 m/s	1.566 m

Fuente: Rouse (1946).

La implementación del modelo de aguas someras se realizó nuevamente por medio de la analogía de flujo compresible, siendo nuevamente el cambio de densidad el parámetro que indica la variación de la superficie libre. En el caso del canal con fondo variable, se definió una geometría del canal con una longitud de 10 m, un ancho unitario y una altura de 1.524 m, con el fin de representar la reducción de la profundidad en 6 pulgadas, equivalentes a 0.152 m por medio de una disminución en la porosidad de la malla en 10%; dicho cambio de profundidad fue ubicado 5 m después de la entrada, y con una longitud de 2 m, tal como se muestra la Figura 5.

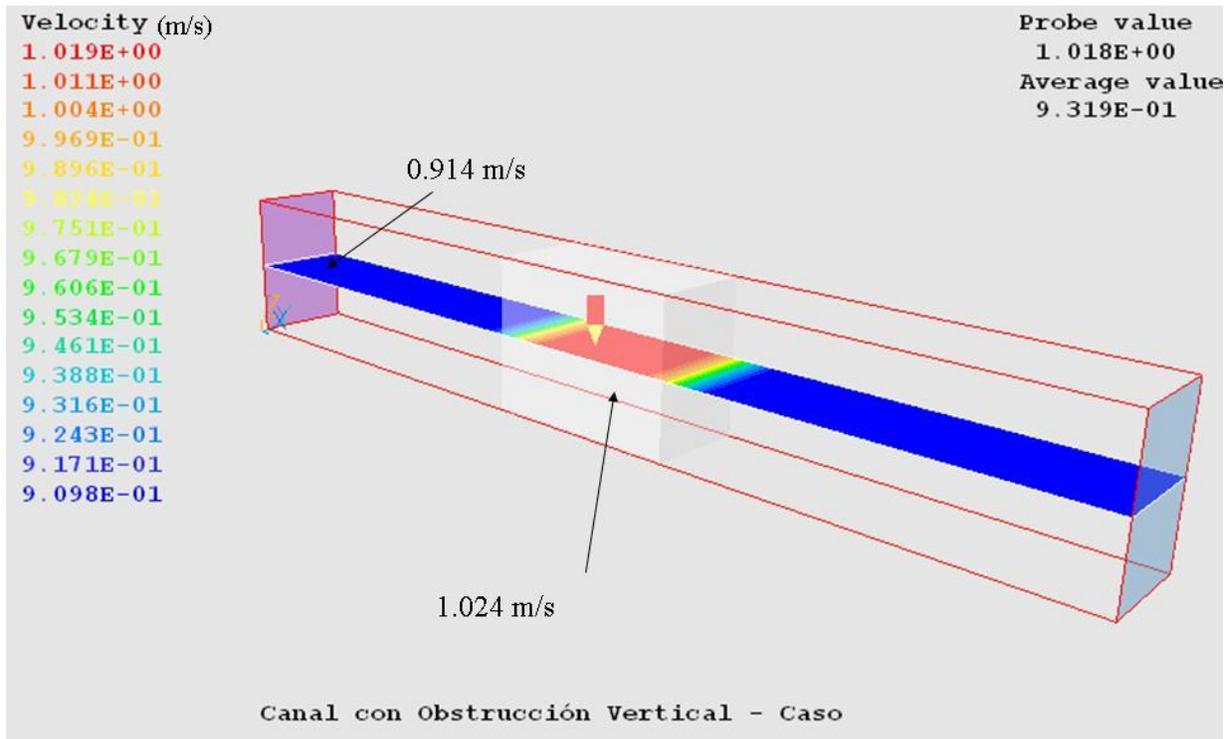


**Figura 5.** Geometría del canal con variación de profundidad.

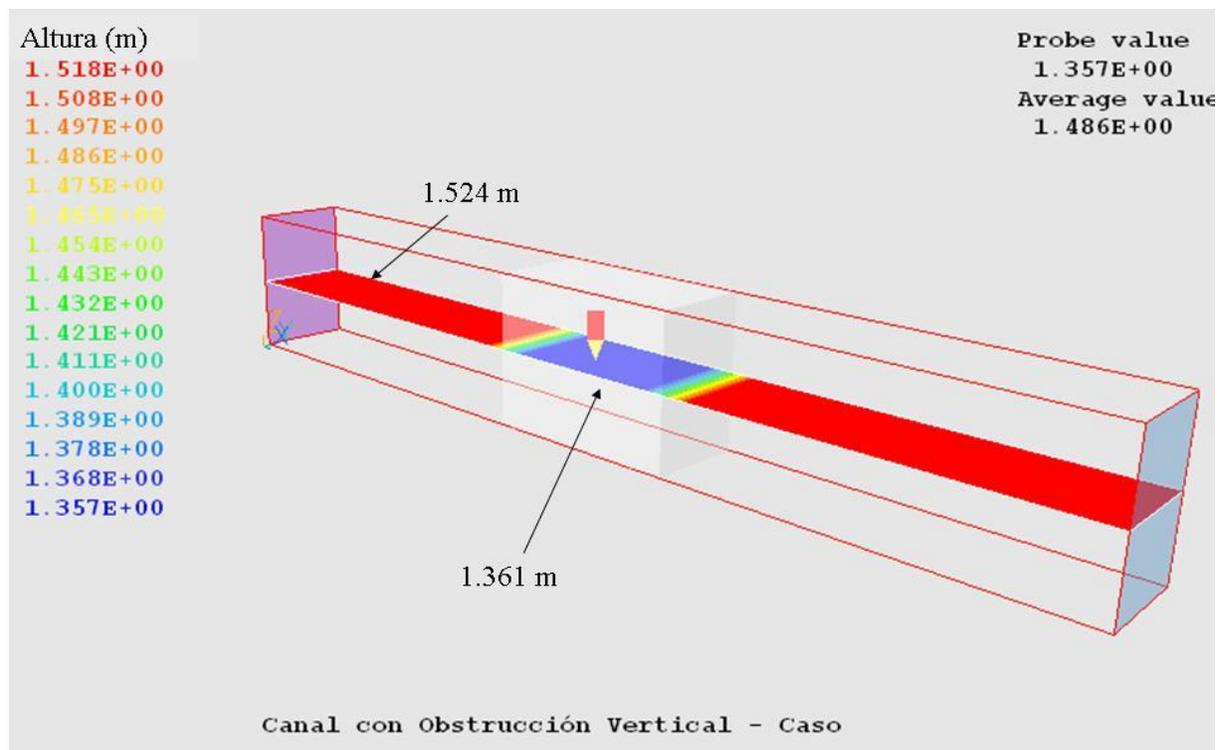
La implementación del caso de fondo variable siguió la misma metodología descrita en la implementación del caso de ancho variable.

Los resultados obtenidos presentan muy buena correlación con los datos analíticos presentados con anterioridad, tal como se puede observar en las Figuras 6 y 7. La velocidad y la superficie libre no experimentan un cambio gradual, tal como el observado en el caso del canal de ancho variable debido al uso del cambio

de porosidad para representar el cambio de profundidad, ya que como se explica en la Introducción, las ecuaciones de aguas someras son básicamente en 2 dimensiones. En las figuras 6 y 7 la velocidad está dada en m/s y la altura de la superficie libre en metros. Igual que en caso anterior, en las figuras mencionadas se señala con claridad la capacidad que tiene el modelo propuesto para representar los cambios de velocidad y altura de la superficie libre del caso analítico simulado.



**Figura 6.** Comportamiento de la velocidad en el canal con fondo variable.



**Figura 7.** Comportamiento de la superficie libre en el canal con fondo variable.

## 6. Conclusiones y Recomendaciones Referencias

Se simula el flujo en canales con ancho y fondo variable empleando el modelo de aguas someras basado en la analogía de flujo compresible implementado en el código numérico PHOENICS. Los resultados muestran, al menos para los casos analíticos considerados, que su representación es sencilla, que los resultados de los casos es ajustada a los datos analíticos y que el consumo de tiempo y memoria de cómputo es reducido.

Por medio de la introducción de objetos porosos en el dominio computacional, es posible simular elementos que representen cambios de profundidad. La existencia de objetos porosos implica una reducción del área de las celdas, por lo que tiene influencia en el resultado; sin embargo, físicamente no existe ninguna reducción del área de flujo. El efecto de la porosidad, sería contrario dependiendo si el flujo es subcrítico o supercrítico.

De acuerdo con los resultados de la validación del modelo de aguas someras basado en la analogía de flujo compresible, se establece que el modelo planteado podría ser empleado para representar adecuadamente los principales fenómenos asociados a zonas litorales, tales como las interacciones entre oleajes, cambios de profundidad y obstrucciones de flujo, influencia del viento, fricción de fondo y modelado de la turbulencia, entre otros. Spaulding (1985) menciona que este tipo de implementación también podría ser empleado para representar el comportamiento de la hidrodinámica de fenómenos en aguas profundas.

Igualmente, por medio de la analogía de flujo compresible podrían calcularse los cambios de velocidad y altura de la superficie libre para flujos en régimen subcrítico, y supercrítico. Adicionalmente, el modelo implementado puede ser empleado para predecir flujos que involucren saltos hidráulicos rectos y oblicuos.

### Reconocimientos

Trabajo Realizado en el Instituto de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México

Fuentes del Río, D. 2007. Analogía Hidráulica de Flujo Compresible. Tesis de Maestría. Universidad Nacional Autónoma de México, II-UNAM, México.

Harlow, F. H. y Nakayama, P. I. 1968. Transport of Turbulence Energy Decay Rate. LA-3854, Los Alamos Science Lab., U. California, USA.

Ippen, A. y Harleman, D. 1950. Studies on the validity of the Hydraulic Analogy to Supersonic Flow. Fuerza Aerea de E.U. Wright Air Development Center. Technical Report 5985. EUA.

Lauder, B. E. y Spaulding, D. B. 1972. Mathematical Models of Turbulence. Academic Press.

Ludwig, J. C. 1990. Qin, H. Q., and Spalding, D. B. The PHOENICS Reference Manual for version 1.5, CHAM TR/200, CHAM Ltd, London.

Spaulding, B. 1985. The Computation Of Flow Around Ships with Allowance for Free-Surface and Density-Gradient Effects, Proceedings of the 1st International Maritime Simulation Symposium, Munich, pp 101-113.

Preiswerk, E. 1940a. Application of the methods of gas dynamics to water flows with free surface, Part I: Flows with no energy dissipation. NACA TN 934 EUA.

Preiswerk E. 1940b. Application of the methods of gas dynamics to water flows with free surface, Part II: Flows with momentum discontinuities (Hydraulic Jumps). NACA TN 935. EUA.

Rodi, W. 1993. Turbulence models and their application in hydraulics. a state-of-the-art review. 3rd Ed. IAHR Monograph, Balkema, Rotterdam NL.

Rouse, H. 1946. Elementary Mechanics of Fluids, New York, Dover.

Vreugdenhil, C. 1994. Numerical methods for shallow water flow, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

Wu, J. 1980. Wind-Stress coefficients over sea surface near neutral conditions - A Revisit. Journal of Physical Oceanography. 10:727-740.