UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE MANIZALES

FACULTAD DE CIENCIAS Y ADMINISTRACION

CÀLCULO EN VARIAS VARIABLES

BERNARDO ACEVEDO FRIAS

MANIZALES ENERO 2001

TABLA DE CONTENIDO

1.Integrales dobles
1.1 Particiòn de un intervalo cerrado $[a,b]$
1.2 Concepto de integral en una variable
1.3 Particiòn del rectangulo Q= $[a,b] \times [c,d]$
1.4 Concepto de integral doble
1.5 Propiedades y ejemplos
1.6 Diversos tipos de regiones para calcular integrales dobles
1.7 Ejemplos

2. Integral triple
2.1 Concepto
2.2 Propiedades
2.3 Diversos tipos de regiones para calcular integrales triples
2.4 Diversas proyeeciones
2.5 Matriz Jacobiana
2.6 Jacobiano
2.7 Ejemplos
2.8 Teorema del cambio de variable
2.9 Cambios lineales en integrales dobles ,ejemplos
2.10 Coordenadas polares ,ejemplos
2.11 Cambios de variables en triples
2.12 Coordenadas cilindricas ,ejemplos
2.13 Coordenadas esfèricas ,ejemplos
2.14 Cambios lineales
2.15 Areas entre curvas ,ejemplos
2.16 Volùmenes ,ejemplos

3 Integrales de linea
3.1 Parametrizacion de curvas
3.2Masa de un alambre
3.3 Concepto de integral de linea de un campo escalar
3.4 Concepto de integral de linea de un campo escalar en coordenadas polares
3.5 Trabajo
3.6 Integral de linea de un campo vectorial
3.7 Propiedades
3.8 Algunos teoremas
3.9 Teorema de Green ejemplos
3.10 Teorema de Green generalizado ejemplos

4. Superficies
4.1 Definiciòn
4.2 Algunas parametrizaciones
4.3 Integral de superficie
4.4 area de superficies
4.5 Integral de superficies de campos vectoriales
4.6 Teorema de la divergencia
4.7 Teorema de Stokes

INRODUCCIÒN

Con el presente trabajo se pretende hacer una presentacion de los temas relacionados con la integral doble ,la integral triple , la integral de linea , la integral de superficie y sus aplicaciones en una forma clara y sencilla

Estos conceptos estan ilustrados con una variedad de ejercicios totalmente desarrollados para poder que el lector entienda con gran facilidad los conceptos tratados y pueda aplicarlos para solucionar problemas pràcticos en sus respectivas àreas

Antes de empezar a tratar las integrales múltiples , recordaremos la definiciòn de $\int_a^b f(x)\,dx$, siendo f(x) una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y para ello miraremos algunos conceptos previos.

Particiòn de un intervalo cerrado $[a,b]$.

Una particiòn de un intervalo cerrado $[a,b]$,es un subconjunto finito de puntos de $[a,b]$,que contiene los puntos a y b con algunas caracteristicas , por ejemplo los conjuntos siguientes $\{0,1\},\{0,1/2,1\},\{0,1/4,2/4,3/4,1\},\{0,1/5,2/5,3/5,4/5,1\},\{0,1/4,3/4,1\}$ son todas particiones del intervalo cerrado $[0,1]$,pero $\{0,3/4,2/4,1\}$ no es una particiòn del intervalo $[0,1]$, es decir ,diremos que P=$\{x_0,x_1,x_2,..x_n\}$es particiòn de un intervalo cerrado $[a,b]$ si $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ y que la particiòn divide a $[a,b]$ en un nùmero finito de intervalos $[x_0,x_1],[x_1,x_2],[x_2,x_3],...[x_{n-1},x_n]$,con longitudes $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, ...\Delta x_n$ (fig 1)

figura 1

Definiciòn de $\int_a^b f(x)\,dx$,siendo f(x) una funciòn continua en un intervalo cerrado $[a,b]$.

El propòsito es calcular el àrea de la regiòn encerrada por las curvas y=f(x) ≥ 0 , x=a , x=b y el eje x (fig 2)

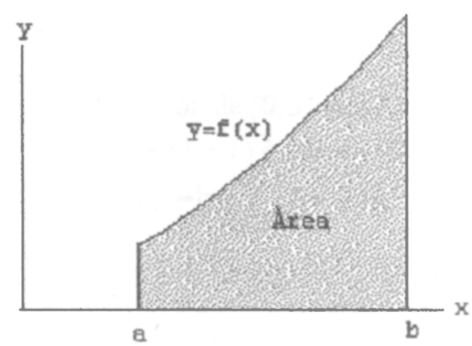


figura 2

y para ello consideremos una particiòn P=$\{x_0,x_1,x_2,..x_n\}$ de $[a,b]$ y tomaremos la longitud de cada intervalo igual , es decir, $\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$, k=1,2 ...,n y calcularemos el àrea del rectàngulo $A_k = f(t_k)\Delta x_k$ *para* $t_k = x_{k-1}$ (fig 3) y formamos $\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k$, que es la suma de las àreas de cada rectàngulo,el cual va a ser una aproximaciòn del àrea A.

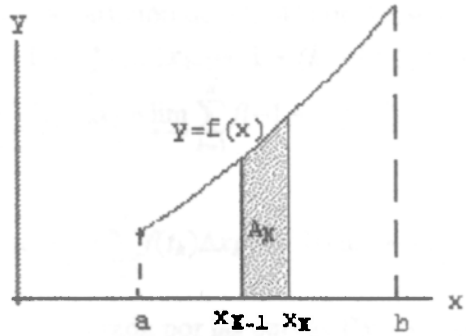


figura 3

Para obtener el àrea A ,haremos muchas màs particiones ,de tal forma que los rectàngulos queden bien pequeños de base ,y esto se logra haciendo tender n a infinito,es decir , Area $=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k=$ $\int_a^b$ f(x) dx , siendo t_k cualquier punto en $[x_{k-1},x_k]$ y esta expresiòn es la que define la $\int_a^b f(x)dx$,si el limite existe,en otras palabras ,

$$\text{Area} =\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx \quad \text{si } f(x)\geq 0$$

Ejemplo 1 . Calcular el àrea de la region limitada por y=2x+1, x=0, x=3 y el eje x (fig 4)

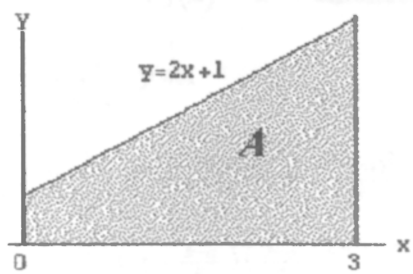


figura 4

Soluciòn. Sea P=$\{x_0,x_1,x_2,\ldots x_n\}$ una particiòn de $[0,3]$ con $\Delta x_k=\frac{3-0}{n}=\frac{3}{n}$,$x_0 = 0$, $x_1 = \frac{3}{n}$, $x_2 = \frac{2*3}{n}$, $x_3 = \frac{3*3}{n}$, $x_4 = \frac{4*3}{n}$,...,$x_{k-1} = (k-1)\frac{3}{n}$, $x_k = \frac{3*k}{n}$.....y asì si t_k=x_{k-1} entonces

Area$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k =\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{3}{n}(k-1))\frac{3}{n} =\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(2*\frac{3}{n}(k-1)+1)\frac{3}{n} =\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\frac{6}{n}(k-1)+1)\frac{3}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\frac{6*k}{n}-\frac{6}{n}+1)\frac{3}{n} =\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}(\frac{6*k}{n}-\frac{6}{n}+1)=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}(\sum_{k=1}^{n}\frac{6*k}{n}-\sum_{k=1}^{n}\frac{6}{n}+\sum_{k=1}^{n}1)$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{18}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k-\frac{18}{n^2}\sum_{k=1}^{n}1+\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}1\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{18}{n^2}*\frac{n(n+1)}{2}-\frac{18}{n^2}*n+\frac{3}{n}*n\right)$=9-0+3=12 luego

$$\text{Area} =\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k = \int_0^3 (2x+1)\,dx =12.$$

Ejemplo 2. calcular $\int_{-1}^{4} 10\,dx$ (Area encerrada por las curvas y = 10 , x=-1, x=4 y el eje x)

Soluciòn.Sea $P=\{x_0,x_1,x_2,...x_n\}$ una partición de $[-1,4]$ con $\Delta x_k=\frac{4-(-1)}{n}=\frac{5}{n}$, $x_0=-1$, $x_1=-1+\frac{5}{n}$, $x_2=-1+\frac{2*5}{n}$, $x_3=-1+\frac{3*5}{n}$, $x_4=-1+\frac{4*5}{n}$,...., $x_{k-1}=-1+(k-1)\frac{5}{n}$, $x_k=-1+\frac{5k}{n}$,....y asì si tomamos $t_k=x_k$ entonces $\int_{-1}^{4} 10\, dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(-1+\frac{5k}{n})\frac{5}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} 10*\frac{5}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{50}{n}\sum_{k=1}^{n} 1$
$=\lim_{n\to\infty}\frac{50}{n}*n=50$ luego

$$\text{Area} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k = \int_{-1}^{4} 10\, dx = 50.$$

Ejemplo Calcular $\int_a^b x^2\, dx$ (Area encerrada por las curvas $f(x)=x^2$, x=a , x=b y el eje x)

Solucion: Se particiona el intervalo $[a,b]$ en n subintervalos de igual longitud $\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$, $k = 1,2,.....n$ y asi

$x_0 = a$
$x_1 = a+\Delta x_1 = a+\left(\frac{b-a}{n}\right)$
$x_2 = a+2\Delta x_1 = a+2\left(\frac{b-a}{n}\right)$
.
.
$x_k = a+k\Delta x_1 = a+k\left(\frac{b-a}{n}\right)$
.
.
$x_n = a+n\Delta x_1 = a+n\left(\frac{b-a}{n}\right) = b$

Si tomamos $t_k = x_k = a+k\left(\frac{b-a}{n}\right)$ y como $f(x) = x^2$ entonces $f(t_k)=f\left(a+k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)$

$=\left(a+k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)^2=a^2+\frac{2ak(b-a)}{n}+\frac{k^2(b-a)^2}{n^2}$ y asi

$$\int_a^b x^2dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(a^2+\frac{2ak(b-a)}{n}+\frac{k^2(b-a)^2}{n^2}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{b-a}{n}\right)a^2\sum_{k=1}^{n}1+\left(\frac{b-a}{n}\right)2a\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}k+\left(\frac{b-a}{n}\right)\left(\frac{b-a}{n}\right)^2\sum_{k=1}^{n}k^2\right]=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left((b-a)a^2+(b-a)^2\frac{2a}{n^2}n\left(\frac{n+1}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{n^3}\left(\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}\right)\right)=(b-a)a^2+\frac{(b-a)^2}{2}2a+\frac{(b-a)^3}{3}=$$

$$(b-a)\left[a^2+ab-a^2+\frac{b^2}{3}-\frac{2ab}{3}+\frac{a^2}{3}\right]=(b-a)\left[\frac{a^2}{3}+\frac{ab}{3}+\frac{b^2}{3}\right]=\frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}$$ luego

$$\int_a^b x^2\, de = \frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}$$

Así como la definición de $\int_a^b f(x)$ fue motivada para hallar el area de una región , la integral doble , la motivaremos , hallando el volumen del sólido S limitado por las gràficas de las superficies $z = f(x,y) \geq 0$, x=a, x=b; y=c, y=d, z=0 y su tratamiento es muy similar

Sea $f(x,y)$ una función continua en $Q = [a,b] \times [c,d]$
y $P_1 = \{x_0,x_1,x_2.....x_n\}$ una partición de $[a,b]$ y $P_2 = \{y_0,y_1,.....,y_m\}$ una partición de $[c,d]$.

Una partición de Q , es un subconjunto de la forma $P=P_1 \times P_2$ $=\{(x_i,x_j)/x_i \in P_1, y_j \in P_2, 0\leq i\leq n, 0\leq j\leq m\}$ y descompone a Q en nm rectangulos que no se solapan $Rij = \{(x,y) / x_{i-1} \leq x \leq x_i, \; y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$ (fig 5).

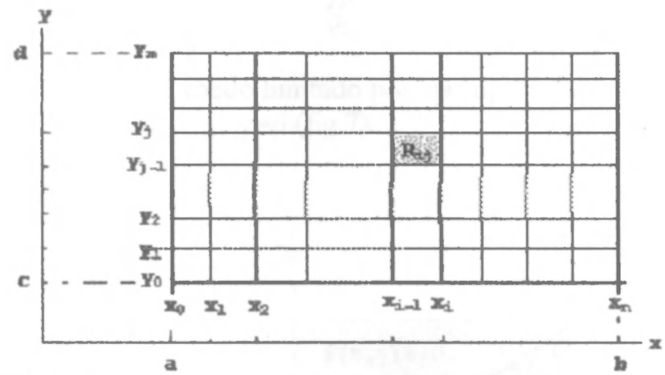


figura 5

y sea (t_i, s_j) un punto cualquiera en Rij y formemos $f(t_i s_j)\, \Delta x_i\, \Delta y_j$ el volumen del prisma (fig 6)

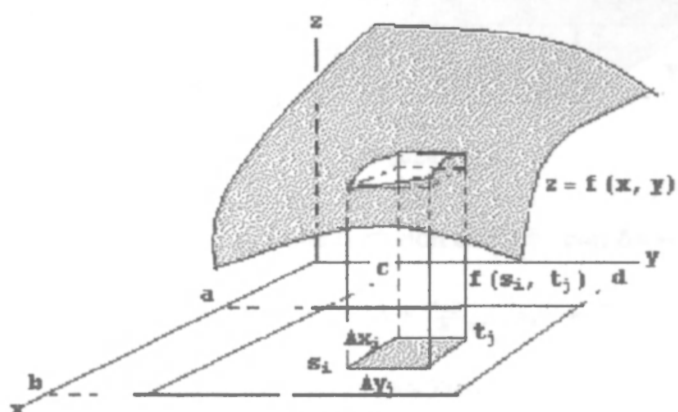


figura 6

y asi $\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} f(t_i, s_j)\, \Delta x_i\, \Delta y_j$ es el volumen aproximado y si hacemos bien pequeños los prismas , haciendo tender n a infinito y m a infinito obtenemos el volumen exacto , es decir,

$$V(s) = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} f(t_i, s_j)\, \Delta x_i\, \Delta y_j$$

y si este limite existe ,representa el valor de la integral doble ,es decir,

$$V(s) = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} f(t_i, s_j)\, \Delta x_i\, \Delta y_j = \iint_Q f(x,y)\,dxdy$$

Las propiedades de las integrales dobles son muy anàlogas a las de una variable,es decir,si α , $\beta \in R$ y si f(x,y) , g(x,y) son continuas en una region Q cerrada y acotada en el plano entonces

1. $\iint_Q (\alpha f(x,y) \pm \beta g(x,y))\,dxdy = \alpha \iint_Q f(x,y)\,dxdy \pm \beta \iint_Q g(x,y)\,dxdy$

2. Si $f(x,y) \geq g(x,y)$ en Q entonces $\iint_Q f(x,y)dxdy \geq \iint_Q g(x,y)dxdy$

3. Si Q se descompone en $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots Q_n$, que no se solapen entonces

$$\iint_Q f(x,y)dxdy = \iint_{Q_1} f(x,y)dxdy + \iint_{Q_2} f(x,y)dxdy + \iint_{Q_3} f(x,y)dxdy + \ldots + \iint_{Q_n} f(x,y)dxdy$$

Ejemplo 1. Calcular el volumen del sòlido limitado por las superficies
$f(x,y)=10$, $f(x,y)=0$, $x=3$, $x=6$, $y=4$, y $y=6$ (fig 7)

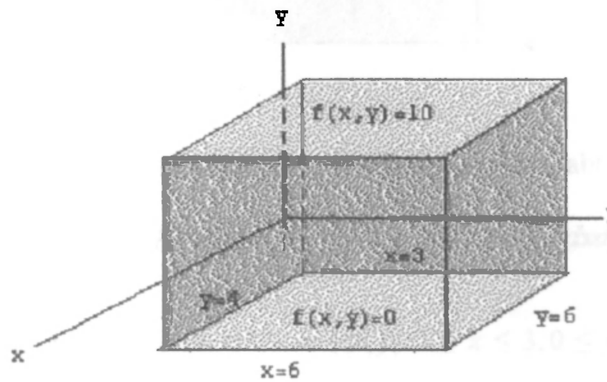


figura 7

Soluciòn. Sea $P_1=\{x_0,x_1,x_2,\ldots x_n\}$ una particiòn de $[3,6]$ con $\Delta x_i=\frac{6-3}{n}=\frac{3}{n}$, $1\leq i \leq n$, $x_0=3$,

$x_1=3+\frac{3}{n}$, $x_2=3+\frac{2*3}{n}$, $x_3=3+\frac{3*3}{n}$, $x_4=3+\frac{4*3}{n}, \ldots x_{i-1}=3+(i-1)\frac{3}{n}$,

$x_i=3+\frac{3*i}{n}, \ldots x_n=3+\frac{3n}{n}=6$ y $P_2=\{y_0,y_1,\ldots,y_m\}$una partición de

$[4,6]$ *con* $\Delta y_j=\frac{6-4}{m}=\frac{2}{m}$ $1\leq j \leq m$, $y_0=4$, $y_1=4+\frac{2}{m}$, $y_2=4+\frac{2*2}{m}$, $y_3=4+\frac{3*2}{m}$,

$y_4=4+\frac{4*2}{m}, \ldots, y_{j-1}=4+(j-1)\frac{2}{m}$, $y_j=4+\frac{2*j}{n}, \ldots y_m=4+\frac{2m}{m}=6$ y

sea $(t_i,s_j)=\left(3+\frac{3i}{n}, 4+\frac{2j}{m}\right)=(x_i,y_j)$, pero puede ser cualquiera punto en Rij y asi

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(t_i,s_j)\,\Delta x_i\,\Delta y_j = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} 10 \bullet \frac{3}{n} \bullet \frac{2}{m} = \frac{60}{mn}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} 1 = \frac{60}{mn} \bullet m \bullet n = 60$$

ya que $\sum_{j=1}^{m} 1 = \sum_{j=1}^{m}(j+1)-j = m+1-1 = m$, aplicando la propiedad telescòpica de las sumas finitas.

En forma anàloga $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$ luego

$$V(s) = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(t_i,s_j)\,\Delta x_i\,\Delta y_j = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{60}{mn} = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} 60 = 60 = \iint_Q 10\,dxdy =$$
$10(6-3)6-4)$

Ejemplo 2. Calcular $\iint_Q f(x,y)dxdy$ si $Q=\{(x,y)/0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 3\}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 \quad \text{si} \quad 0 \le x \le 3 \quad 0 \le y \le 1 \\ 2 \quad si \; 0 \le x \le 3 \quad 1 < y \le 2 \\ 3 \quad si \quad 0 \le x \le 3 \quad 2 < y \le 3 \end{cases} \quad (\text{fig } 8)$$

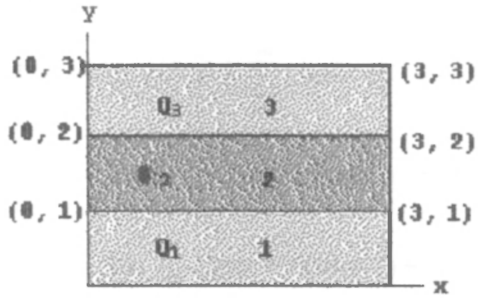


figura 8

$f(x,y)$ es una funciòn seccionalmentecontinua en Q ,luego es integrable en Q y

$$\iint\limits_{Q} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{Q_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{Q_2} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{Q_3} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{Q_1} 1dxdy + \iint\limits_{Q_2} 2dxdy + \iint\limits_{Q_3} 3dxdy$$

$= 1 \bullet 3 \bullet 1 + 2 \bullet 3 \bullet 1 + 3 \bullet 3 \bullet 1 = 3+6+9 = 18$ si $Q_1 = \{(x,y)/0 \le x \le 3, 0 \le y \le 1\}$

$,Q_2 = \{(x,y)/0 \le x \le 3, 1 < y \le 2\}$ $,Q_3 = \{(x,y)/0 \le x \le 3, 2 < y \le 3\}$. Recuerde que una funciòn seccionalmente continua en un intevalo cerrado es integrable

Ejemplo 3.Calcular $\iint\limits_{Q}(y+2x)dxdy$ si $Q = [1,3] \times [3,5]$

Soluciòn Sea $P_1 = \{x_0, x_1, x_2, ..x_n\}$ una particiòn de $[1,2]$ con $\Delta x_i = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n}$ $,1 < i \le n$, $x_0 = 1$ $,x_1 = 1 + \frac{1}{n}$, $x_2 = 1 + \frac{2}{n}$, $x_3 = 1 + \frac{3}{n}$, $x_4 = 1 + \frac{4}{n}, ..., x_{i-1} = 1 + (i-1)\frac{1}{n}$, $x_i = 1 + \frac{i}{n}, ...x_n = 1 + \frac{n}{n} = 2$ y $P_2 = \{y_0, y_1, ..., y_m\}$ una partición de $[3,5]$ *con* $\Delta y_j = \frac{5-3}{m} = \frac{2}{m}$ $1 \le j \le m$, $y_0 = 3$, $y_1 = 3 + \frac{2}{m}$,

$y_2 = 3 + \frac{2*2}{m}$, $y_3 = 3 + \frac{3*2}{m}$, $y_4 = 3 + \frac{4*2}{m}, ..., y_{j-1} = 3 + (j-1)\frac{2}{m}$, $y_j = 3 + \frac{2*j}{m}, ...y_m = 3 + \frac{2m}{m} = 5$

sea $(t_i s_j) = (x_i, y_j) = \left(1 + \frac{i}{n}, 3 + \frac{2j}{m}\right)$ pero puede ser cualquiera punto en Rij y

$f(t_i, s_j) = f\left(1 + \frac{i}{n}, 3 + \frac{2j}{m}\right) = 3 + \frac{2j}{m} + 2\left(1 + \frac{i}{n}\right) = 3 + \frac{2j}{m} + 2 + \frac{2i}{n} = \left(5 + \frac{2j}{m} + \frac{2i}{n}\right)$ y

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(t_i, s_j)\Delta x_i \Delta y_j = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left(5 + \frac{2j}{m} + \frac{2i}{n}\right)\frac{1}{n} \bullet \frac{2}{m} = \frac{1}{n} \bullet \frac{2}{m}\sum_{j=1}^{m}\left(5n + \frac{2jn}{m} + \frac{2}{n} \bullet \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n} \bullet \frac{2}{m}\sum_{j=1}^{m}\left(5n + \frac{2jn}{m} + (n+1)\right) = \frac{1}{n} \bullet \frac{2}{m}\left(5nm + \frac{2nm(m+1)}{2m} + m(n+1)\right) =$$

$\frac{1}{n} \bullet \frac{2}{m}(5mn + n(m+1) + m(n+1))$ y asì

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(t_i, s_j)\Delta x_i \Delta y_j = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}(5mn + n(m+1) + m(n+1))\frac{1}{n} \bullet \frac{2}{m} = (5+1+1)2 = 14 \text{ luego}$$

$$\iint\limits_{Q}(y+2x)dxdy = 14$$

Ahora tomemos $(t_i s_j) = (x_{i-1}, y_j) = \left(1 + \frac{i-1}{n}, 3 + \frac{2j}{m}\right)$ otro punto en R_{ij} y mostremos que el resultado no varia

$f(t_i,s_j)=f\left(1+\frac{i-1}{n},3+\frac{2j}{m}\right)=3+\frac{2j}{m}+2\left(1+\frac{i-1}{n}\right)=3+\frac{2j}{m}+2+\frac{2i}{n}-\frac{2}{n}=\left(5+\frac{2j}{m}+\frac{2i}{n}-\frac{2}{n}\right)$ y

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}f(t_i,s_j)\,\Delta x_i\,\Delta y_j=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left(5+\frac{2j}{m}+\frac{2i}{n}-\frac{2}{n}\right)\frac{1}{n}\bullet\frac{2}{m}=$$

$$\frac{1}{n}\bullet\frac{2}{m}\sum_{j=1}^{m}\left(5n+\frac{2jn}{m}+\frac{2}{n}\bullet\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)-2\right)=\frac{1}{n}\bullet\frac{2}{m}\sum_{j=1}^{m}\left(5n+\frac{2jn}{m}+(n+1)-2\right)=$$

$\frac{1}{n}\bullet\frac{2}{m}\left(5nm+\frac{2nm(m+1)}{2m}+m(n+1)-2m\right)=\frac{2}{mn}(5mn+n(m+1)+m(m+1)-2m)$ y asì

$\lim\limits_{m\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}f(t_i,s_j)\,\Delta x_i\,\Delta y_j=\lim\limits_{m\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{mn}(5mn+n(m+1)+m(n+1)-2m)\right)=2(5+1+1-0)=14$ y asì

$$\iint_Q (y+2x)\,dxdy=14.$$

Asì como $\int_a^b f(x)\,dx$ puede representar una àrea si $f(x)\geq 0$, un espacio si f(x) representa velocidad o una masa , si f(x) representa una densidad , asì tambien la integral doble puede representar un volumen ,una masa etc.

Afrontemos ahora con formalidad el problema de evaluar la $\iint_Q f(x,y)\,dxdy$, si $f(x,y)$ es una función continua en Q y para ello consideremos los siguientes tipos de regiones.

1. Q un rectangulo de la forma $Q=[a,b]\times[c,d]$
2. $Q=\{(x,y)/\ a\leq x\leq b,\ g(x)\leq y\leq h(x)\}$
3. $Q=\{(x,y)/\ c\leq y\leq d;\ q(y)\leq x\leq l(y)\}$

Caso 1

1.Si $f(x,y)$ es una función continua en Q=$[a,b]\times[c,d]$ entonces

$$\iint_Q f(x,y)xdy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy.$$

Para calcular $\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx$, primero se calcula $\int_c^d f(x,y)\,dy$,considerando a x como constante y asì se obtiene que $\int_c^d f(x,y)\,dy$ =A(x) (Es una funciòn en x) y luego se calcula $\int_a^b A(x)\,dx$.

En forma anàloga para calcular $\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy$, se calcula primero $\int_a^b f(x,y)\,dx$ considerando a y como constante , para obtener $\int_a^b f(x,y)\,dx = B(y)$ y luego se calcula $\int_c^d B(y)dy$.

Ejemplo 1.Calcular $\iint_Q (4-x^2-y)dxdy$ si $Q=[0,1]\times[0,2]$

Soluciòn $\iint_Q (4-x^2-y)dxdy = \int_0^1\int_0^2 (4-x^2-y)dydx = \int_0^2\int_0^1 (4-x^2-y)dxdy$.

a. $\int_0^1\int_0^2 (4-x^2-y)dydx = \int_0^1 (4y-x^2y-\frac{y^2}{2})_0^2\,dx = \int_0^1 (8-2x^2-2)dx$

$= \int_0^1 (6-2x^2)dx = (6x-\frac{2x^3}{3})_0^1 = 6-\frac{2}{3} = \frac{16}{3}$.

b. $\int_0^2\int_0^1 (4-x^2-y)dxdy = \int_0^2 (4x-\frac{x^3}{3}-yx)_0^1 dy = \int_0^2 (4-\frac{1}{3}-y)\,dy = \int_0^2 (\frac{11}{3}-y)dy =$

$(\frac{11y}{3}-\frac{y^2}{2})_0^2 = \frac{22}{3}-\frac{4}{2} = \frac{16}{3}$ y asì

$\iint_Q (4-x^2-y)dxdy = \int_0^1\int_0^2 (4-x^2-y)dydx = \int_0^2\int_0^1 (4-x^2-y)dxdy. = \frac{16}{3}$.

Ejemplo 2.Calcular $\iint_Q e^{x+y}dxdy$ si $Q=[1,2]\times[0,3]$

Soluciòn $\iint_Q e^{x+y}dxdy = \int_1^2\int_0^3 e^{x+y}\,dydx = \int_0^3\int_1^2 e^{x+y}\,dxdy$.

a. $\int_1^2\int_0^3 e^{x+y}\,dydx = \int_1^2 (e^{x+y})_0^3 dx = \int_1^2 (e^{x+3}-e^x)dx = (e^{x+3}-e^x)_1^2 = (e^5-e^2)-(e^4-e^1) =$

$e^5-e^4-e^2+e^1$

b. $\int_0^3\int_1^2 e^{x+y}\,dxdy = \int_0^3 (e^{x+y})_1^2 dy = \int_0^3 (e^{2+y}-e^{1+y})dy = (e^{2+y}-e^{1+y})_0^3 = (e^5-e^4)-(e^2-e^1) =$

$e^5-e^4-e^2+e^1$.

luego $\iint_Q e^{x+y}dxdy = e^5-e^4-e^2+e^1$.

Ejemplo 3.Calcular $\iint_Q [\frac{x}{2}][y]\,dxdy$ si $Q=[0,4]\times[0,2]$ (fig 9)

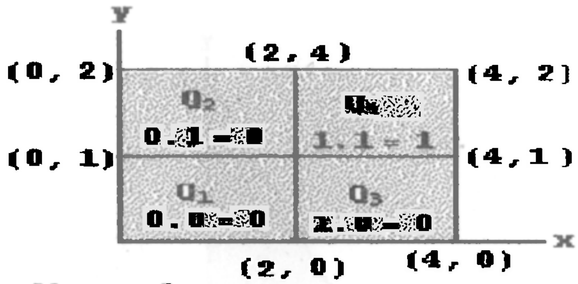


figura 9

Soluciòn $\left[\frac{x}{2}\right] = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le \frac{x}{2} < 1 \; ; \; 0 \le x < 2 \\ 1 & \text{si } 1 \le \frac{x}{2} < 2 \quad 2 \le x < 4 \\ 2 & \text{si } 2 \le \frac{x}{2} < 3 \quad 4 \le x < 6 \end{cases}$ y

$$[y] = \begin{cases} 0 \text{ si } 0 \le y < 1 \\ 1 \text{ si } 1 \le y < 2 \\ 2 \text{ si } 2 \le y < 3 \end{cases}$$

luego $\iint_Q \left[\frac{x}{2}\right][y]\,dxdy = \iint_{Q_1} 0 \bullet 0 dxdy + \iint_{Q_2} 1 \bullet 0 dxdy + \iint_{Q_3} 0 \bullet 1 dxdy + \iint_{Q_4} 1 \bullet 1 dxdy = \iint_{Q_4} dxdy$

$= \int_1^2 \int_2^4 dxdy = \int_1^2 (x)_2^4\, dy = \int_1^2 2dy = (2y)_1^2 = 4\text{-}2 = 2.$

Caso 2. Cuando la region de integraciòn es de la forma

$Q = \{(x,y) / \, a \le x \le b, \; g(x) \le y \le h(x)\}$ fig 10

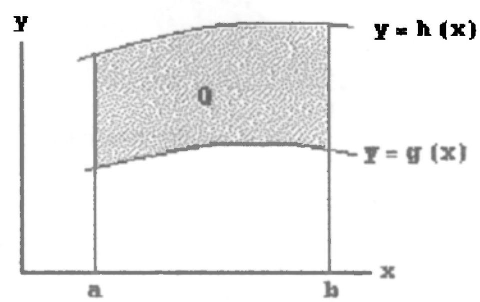


figura 10

La integral $\iint_Q f(x,y)xdy = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dydx$ y èsta se calcula integrando $\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy$ considerando a x como una constante y luego integrando el resultado con respecto a x entre a y b.

Ejemplo 1. Calcular $\iint_Q (x^2 + y^2 + 1)\, dxdy$ si Q es la region limitada por el gràfico de y=2-2x , x=0 , y =0.(fig 11)

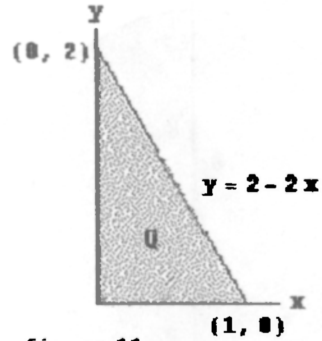


figura 11

Soluciòn . $\iint_Q (x^2+y^2+1)dxdy = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (x^2+y^2+1)dydx =$

$\int_0^1 \left(x^2y + \frac{y^3}{3} + y \right)_0^{2-2x} dx = \int_0^1 \left(x^2(2-2x) + \frac{(2-2x)^3}{3} + (2-2x) \right) dx$

$= \int_0^1 \left(2x^2 - 2x^3 + \left(\frac{8-24x+24x^2-8x^3}{3} \right) + 2 - 2x \right) dx = \int_0^1 \left(-\frac{14x^3}{3} + 10x^2 - 10x + \frac{14}{3} \right) dx = \frac{11}{6}$.

Ejemplo 2. Calcular $\iint_Q xdxdy$ si Q es la region limitada por el gràfico de las curvas x+y=4 ,y los ejes coordenados (fig 12)

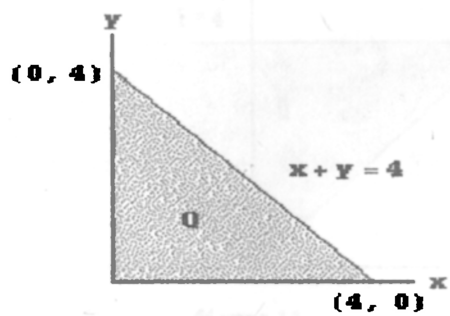


figura 12

Soluciòn . $\iint_Q xdxdy = \int_0^4 \int_0^{4-x} xdydx = \frac{32}{3}$.

jemplo 3. Calcular $\iint_Q xy\,dxdy$ si Q es la region limitada por el gràfico de las curvas y=x^2,y=8-x^2 fig 13

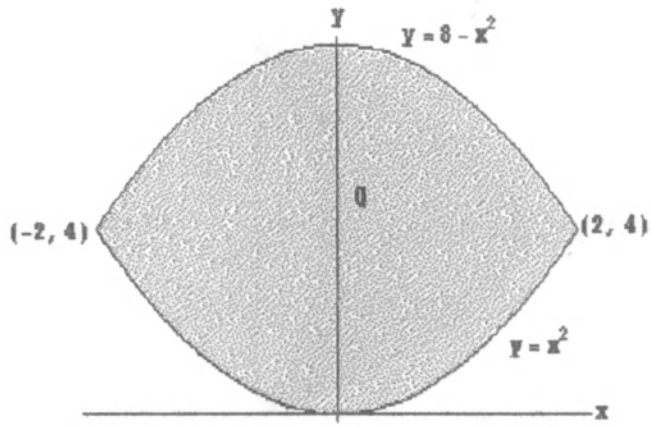


figura 13

Soluciòn . $\iint_Q xy\, dxdy = \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{8-x^2} xdydx = 0.$

Ejemplo 4. Calcular $\iint_Q (x+y)\, dxdy$ si Q es la region limitada por el gràfico de las curvas y=|x| , y=4 fig 14

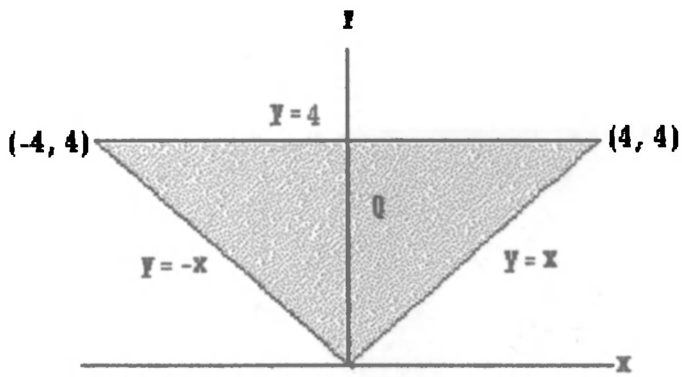
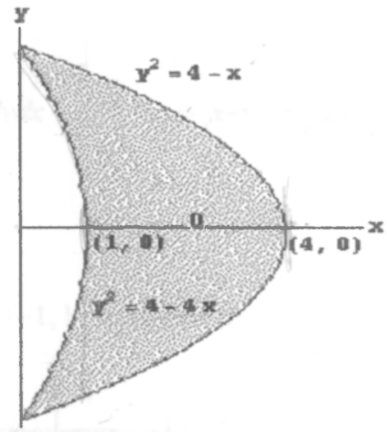


figura 14

Soluciòn . $\iint_Q (x+y)\, dxdy = \int_0^4\int_{-y}^{y}(x+y)dxdy = \frac{128}{3} = \int_{-4}^{0}\int_{-x}^{4}(x+y)dydx + \int_0^4\int_x^4 (x+y)dydx.$

Ejemplo 5. Calcular $\iint_Q y\, dxdy$ si Q es la region limitada por el gràfico de las curvas $y^2 = 4\text{-}x$, $y^2 = 4\text{-}4x$ (fig15)

figura 15



Soluciòn . $\iint_Q ydxdy = \int_0^1 \int_{-\sqrt{4-x}}^{-\sqrt{4-4x}} ydydx + \int_0^1 \int_{-\sqrt{4-4x}}^{\sqrt{4-x}} ydydx + \int_1^4 \int_{-\sqrt{4-x}}^{\sqrt{4-x}} ydydx = 0.$

Ejemplo 6. Calcular $\iint_Q |\cos(x+y)|\, dxdy$ (| |)Valor absoluto.

Q$=[0,\pi] \times [0,\pi]$ (fig 16)

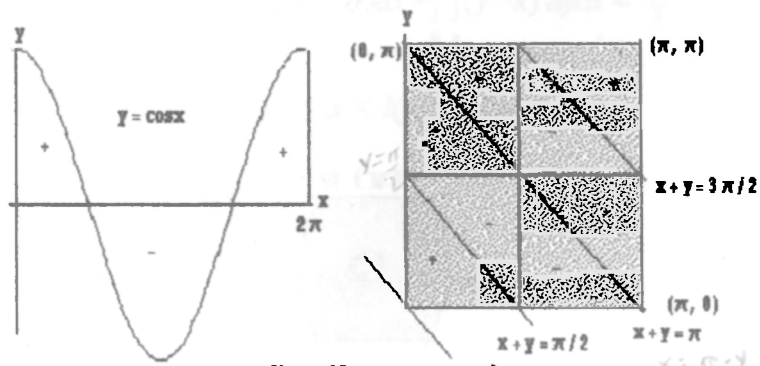


figura 16

$$|\cos x| = \begin{cases} \cos x & \text{si} \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ -\cos x & \text{si} \quad \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2} \\ \cos x & \text{si} \quad \frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{5\pi}{2} \end{cases}$$

$$|\cos(x+y)| = \begin{cases} \cos(x+y) & \text{si} \quad 0 \le x+y \le \frac{\pi}{2} \\ -\cos(x+y) & \text{si} \quad \frac{\pi}{2} \le x+y \le \frac{3\pi}{2} \\ \cos(x+y) & \text{si} \quad \frac{3\pi}{2} \le x+y \le \frac{5\pi}{2} \end{cases}$$

así $\iint_Q |\cos(x+y)|\, dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \cos(x+y)\, dydx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\pi} -\cos(x+y)\, dydx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{\frac{3\pi}{2}-x} -\cos(x+y)\, dydx +$
$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_{\frac{3\pi}{2}-x}^{\pi} \cos(x+y)\, dydx = 2\pi.$

Ejemplo 7. Calcular $\iint_Q |(x-y)|\, dxdy$ $Q = [-1,1] \times [0,2]$ (fig 17)

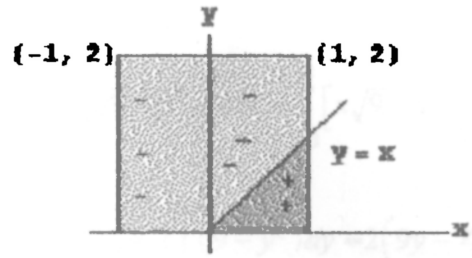


figura 17

Solución . $|(x-y)| = \begin{cases} x-y & si \quad x \geq y \\ -(x-y) & si \quad x < y \end{cases}$ luego

$\iint_Q |(x-y)|\, dxdy = \int_{-1}^{0} \int_0^{2} (y-x)\, dydx + \int_0^{1} \int_0^{x} (x-y)\, dydx + \int_0^{1} \int_x^{2} (y-x)\, dydx = \frac{13}{3}$

Caso 3. $Q = \{(x,y)/\ c \leq y \leq d,\ q(y) \leq x \leq l(y)\}$ (fig 18).

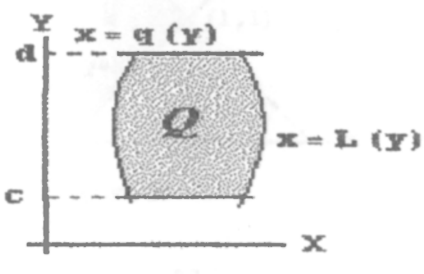


figura 18

En èste caso la integral se calcula asì :

$\iint_Q f(x,y) xdy = \int_c^d \int_{q(y)}^{l(y)} f(x,y) dxdy$ y èsta se calcula integrando $\int_{q(y)}^{l(y)} f(x,y) dx$ considerando a y como constante y luego integrando el resultado con respecto a y entre c y d.

Ejemplo 1. Calcular $\iint_Q \sqrt{9-y^2}\, dxdy$ si $Q = \{(x,y)/\ x^2 + y^2 \leq 9\}$ (fig 19)

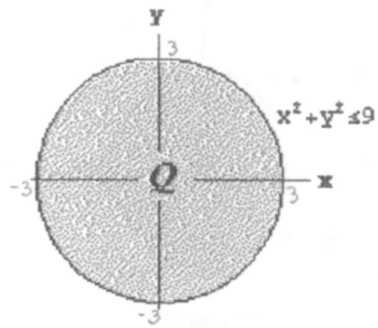


figura 19

Soluciòn . $\iint\limits_Q \sqrt{9-y^2}\ dxdy = \int\limits_{-3}^{3}\int\limits_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} \sqrt{9-y^2}\ dxdy = \int\limits_{-3}^{3}\left[x\sqrt{9-y^2}\right]_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} dy =$

$\int\limits_{-3}^{3}\left(\sqrt{9-y^2}-\left(-\sqrt{9-y^2}\right)\right)\sqrt{9-y^2}\,dy = 2\int\limits_{-3}^{3}\left(9-y^2\right)dy = 2\left(9y-\frac{y^3}{3}\right)_{-3}^{3} =$
$2\left[\left(27-\frac{27}{3}\right)-\left(-27+\frac{27}{3}\right)\right] = 72$

Ejemplo 2. Calcular $\iint\limits_Q (x+y)\ dxdy$ si Q es la region limitada por el gràfico del a curvas y=x,x+y=2,x=0(fig20)

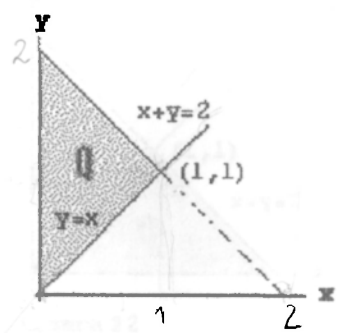


figura 20

Soluciòn. $\iint\limits_Q (x+y)\ dxdy = \int\limits_0^1\int\limits_0^y (x+y)\ dxdy + \int\limits_1^2\int\limits_0^{2-y} (x+y)dxdy = \frac{4}{3}$

Ejemplo 3. Calcular $\iint\limits_Q x\ dxdy$ si Q es la region limitada por el gràfico de las curvas $y=2-x^2$, $y=x^2$ fig 21

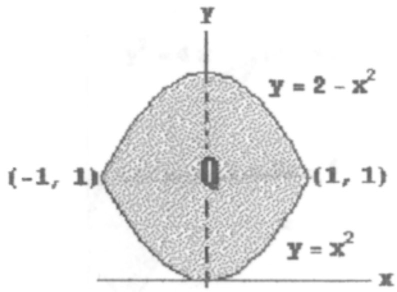


figura 21

Soluciòn. $\iint\limits_Q x\,dxdy = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x\,dxdy + \int_1^2 \int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} xdxdy = 0.$

En algunas oportunidades se puede calcular la integral $\iint\limits_Q f(x,y)xdy$ por el caso 2 ò por el caso 3 .y pero en otras se puede calcular solamente por uno de los dos casos como se ilustrarà con los ejemplos siguientes :

Ejemplo 1 . Calcular $\iint\limits_Q x\,dxdy$ si Q es la region limitada por el gràfico de las curvas y=0 , x+y=2 , y=x fig 22

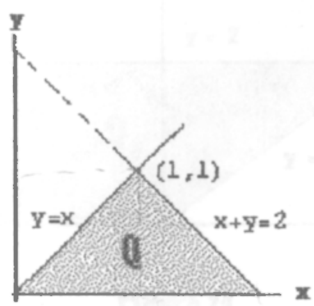


figura 22

Soluciòn.
Para hallar el punto (1,1) iguale x+y=2 con y=x y asì

$$\iint\limits_Q x\,dxdy = \int_0^1 \int_0^x x\,dydx + \int_1^2 \int_0^{2-x} xdydx = \int_0^1 \int_y^{2-y} x\,dxdy = 1.$$

Ejemplo 2 . Calcular $\iint\limits_Q y\,dxdy$ si Q es la region limitada por el gràfico de las curvas $y^2 = 4x$, y=2x-4 fig 23

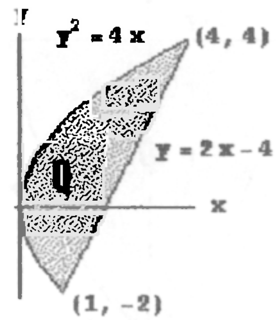


figura 23

Solución. Los puntos (4,4) , (1,-2) se hallan igualando las curvas ;despeje x de y=2x-4 y reemplácelo en $y^2 = 4x$ y solucione esta ecuación de segundo grado en y y así y= 4 ,y=-2.

$$\iint_Q y\,dxdy = \int_0^1 \int_{-\sqrt{4x}}^{\sqrt{4x}} y\,dydx + \int_1^4 \int_{2x-4}^{\sqrt{4x}} y\,dydx = \int_{-2}^{4} \int_{\frac{y^2}{4}}^{\frac{y+4}{2}} y\,dxdy = 9.$$

Ejemplo 3 . Calcular $\iint_Q dxdy$ si Q es la region limitada por el gràfico de las curvas x=-2 ,y=2 ,y=x ,y=0 fig 24

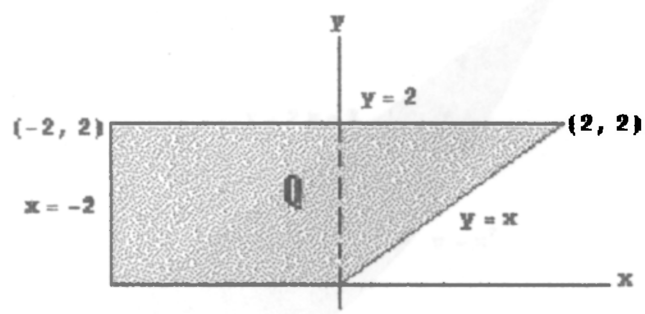


figura 24

Solución. $\iint_Q dxdy = \int_{-2}^{0}\int_{0}^{2} dydx + \int_{0}^{2}\int_{x}^{2} dydx = \int_{0}^{2}\int_{-2}^{y} dxdy = 6.$

Ejemplo 4 . Calcular $\iint_Q 3x\,dxdy$ si Q es la region limitada por el gràfico de las curvas $y=x^2$, y=4 fig 25

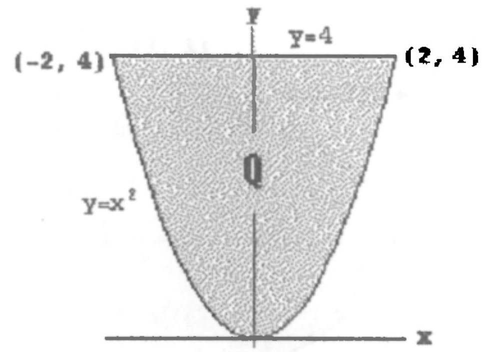


figura 25

Soluciòn. $\iint_Q 3x\,dxdy = \int_0^4 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} 3x\,dxdy = \int_{-2}^{2} \int_{x^2}^{4} 3x\,dydx = 0.$

Ejemplo 5 . Calcular $\iint_Q dxdy$ si Q es la region limitada por el gràfico de las curvas $y=x^2$, $y=2x+3$ fig 26

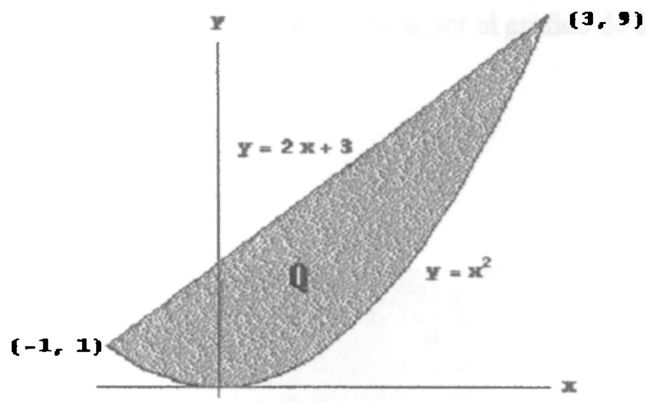


figura 26

Soluciòn. Para hallar los puntos de intersecciòn (-1,1).,(3,9) iguale las curvas y

$\iint_Q dxdy = \iint_Q x^2\,dxdy = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dxdy + \int_1^9 \int_{\frac{y-3}{2}}^{\sqrt{y}} dxdy = \frac{32}{3}.$

Ejemplo 6 . Calcular $\iint_Q x^2\,dxdy$ si Q es la region limitada por el gràfico de las curvasx$=y^2$,x$=-2y^2+3$ fig27

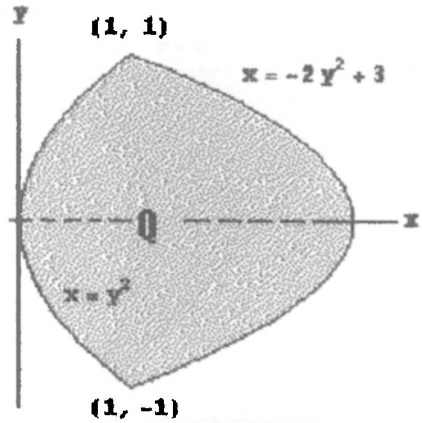


figura 27

Soluciòn. $\iint_Q x^2\,dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{3-2y^2} x^2 dxdy = \int_0^1\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} x^2\,dydx + \int_1^3\int_{-\sqrt{\frac{3-x}{2}}}^{\sqrt{\frac{3-x}{2}}} x^2 dydx = \frac{348}{35}$.

Ejemplo 6 . Calcular $\iint_Q dxdy$ si Q es la region limitada por el grafico de las curvas y=x , y=x-4 ,y=0 ,y=2 fig 27a

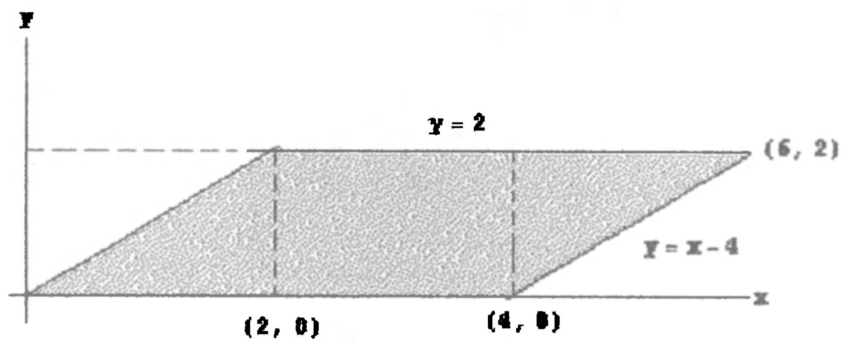


figura 27 a

Soluciòn. $\iint_Q dxdy = \int_0^2\int_y^{4+y} dxdy = \int_0^2\int_0^x dydx + \int_2^4\int_0^2 dydx + \int_4^6\int_{x-4}^{2} dydx = 8$

Ejemplo 7 . Calcular $\iint_Q xy\,dxdy$ si Q es la region limitada por el grafico de las curvas $x^2 + (y-2)^2 = 4$, y=4 , $y = \frac{x^2}{4}$ .fig 28

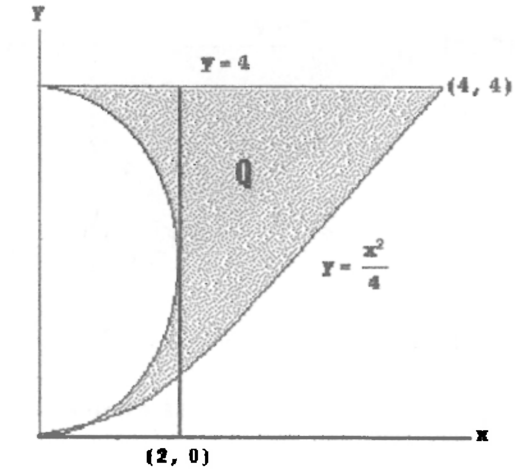


figura 28

Soluciòn. $\iint_Q xydxdy = \int_2^4\int_{\frac{x^2}{4}}^4 xydydx + \int_0^2\int_{\frac{x^2}{4}}^{2-\sqrt{4-x^2}} xy\,dydx + \int_0^2\int_{2+\sqrt{4-x^2}}^4 xydydx = \int_0^4\int_{\sqrt{4-(y-2)^2}}^{\sqrt{4y}} xydxdy = 32.$

Ejemplo 8 . Calcular $\iint_Q \sin(y^3)\,dydx$ si Q es la region limitada por el gràfico de las curvas $y=\sqrt{x}$, $x=0$, $y=2$ fig 30

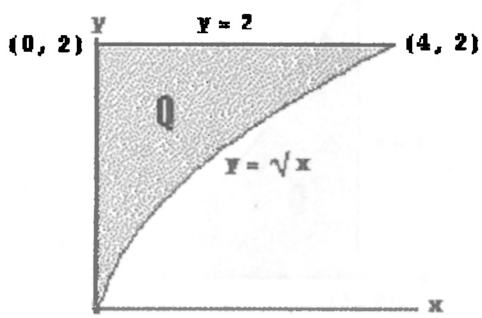


figura 30

Soluciòn. $\iint_Q \sin(y^3)\,dydx = \int_0^4\int_{\sqrt{x}}^2 \sin(y^3)dydx$ (Dificil de solucionar)=

$$\int_0^2\int_0^{y^2} \sin(y^3)dxdy = \int_0^2 \sin(y^3)(x)_0^{y^2}dy = \frac{1}{3}\int_0^2 3y^2\sin(y^3)dy = \frac{1}{3}\int_0^8 \sin u\,du = \frac{1}{3}(1-\cos 8)$$

Ejemplo 9 . Calcular $\iint_Q e^{y^2}\,dydx$ si Q es la region limitada por el gràfico de las curvas $y=\frac{x}{2}$, $y=2$,$x=0$,fig 31

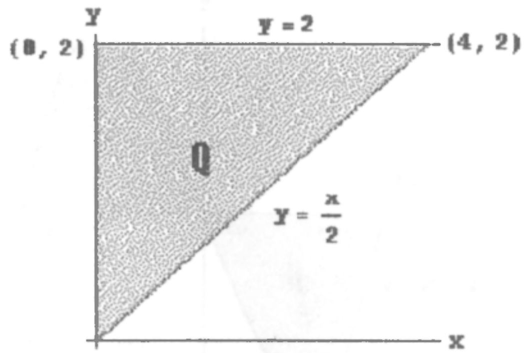


figura 31

Soluciòn. $\iint_Q e^{y^2}\mathrm{dydx} = \int_0^4\int_{\frac{x}{2}}^2 e^{y^2}dydx$ (Dificil de solucionar)$= \int_0^2\int_0^{2y} e^{y^2}dxdy = \int_0^2 e^{y^2}2ydy = e^4 - 1$.

Ejemplo 10 . Calcular $\iint_Q y\cos(x^5)$ dydx , si Q es la region limitada por el gràfico de las curvas $x=\sqrt{y}$, y =0 , x=2 , fig32

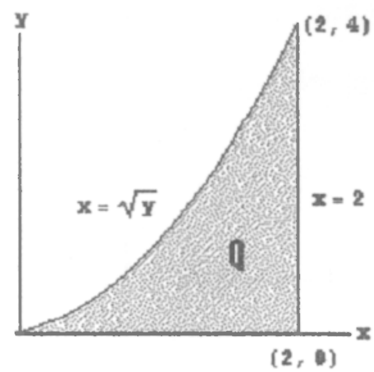


figura 32

Soluciòn. $\iint_Q y\cos(x^5)$ dydx$= \int_0^4\int_{\sqrt{y}}^2 y\cos(x^5)$dxdy (Dificil)$=$

$\int_0^2\int_0^{x^2} y\cos(x^5)$dydx$= \int_0^2 \frac{x^4}{2}\cos(x^5)dx= \frac{\sin 32}{10}$.

Ejemplo 12 . Calcular $\iint_Q dxdy$ si Q es la region limitada por el grafico de las curvas y=$x^3 - 4x$ y el eje x fig 33

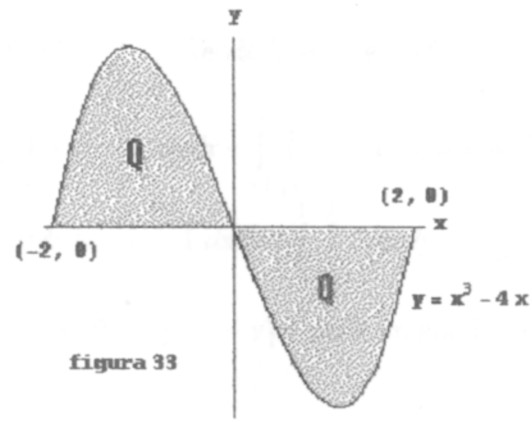


figura 33

Soluciòn. $y=x^3-4x=x(x-2)(x+2)$,entonces los puntos de intersecciòn de la curva con el eje x son (-2,0),(0,0),(2,0), luego

$\iint_Q dxdy = \iint_{Q_1} dxdy + \iint_{Q_2} dxdy = \int_{-2}^{0}\int_{0}^{x^3-4x} dydx + \int_{0}^{2}\int_{x^3-4x}^{0} dydx = 8$ El otro caso es dificil, pues hay que de $y=x^3-4x$ despejar x

Ejercicios.

A.Mostrar que

1. $\int_0^2\int_{x^2}^4 x\, e^{y^2} dydx = \frac{1}{4}e^{16} - \frac{1}{4}$.

2. $\int_0^2\int_{\frac{y}{2}}^1 e^{x^2} dxdy = e - 1$.

3. $\int_0^1\int_{2y}^2 \cos x^2 dxdy = \frac{1}{4}\sin 4$

5. $\int_0^1\int_y^1 e^{x^2} dxdy = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}$.

6. $\int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{8-x^2} 3y\,dydx = 256 = \int_0^4\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} 3y\,dxdy + \int_4^8\int_{-\sqrt{8-y}}^{\sqrt{8-y}} 3y\,dxdy$

7. $\int_0^2\int_{\frac{y}{2}}^{3-y} 3x\,dxdy = \int_0^1\int_0^{2x} 3x\,dydx + \int_1^3\int_0^{3-x} 3x\,dydx = 12$.

8. $\int_0^1\int_0^x 3dydx + \int_1^2\int_0^{2-x} 3dydx = \int_0^1\int_y^{2-y} 3dxdy = 3$.

9. . $\int_0^1 \int_0^{x^2} xe^y dydx + \int_1^3 \int_0^{\frac{3-x}{2}} xe^y dydx = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} xe^y dxdy = \frac{13}{2}e - 15$

10. $\iint_Q |(y - x^2)| \, dxdy = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{x^2} (x^2 - y) dydx + \int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{1} (y - x^2) dydx = \frac{12}{5}$ si $Q = [-1,1] \times [-1,-1]$

11. $\iint_Q [x + y] \, dxdy = \int_0^1 \int_0^{1-y} 0 dxdy + \int_0^1 \int_{1-y}^{2-y} 1 \, dxdy + \int_0^1 \int_{2-y}^{2} 2 \, dxdy + \int_1^2 \int_0^{2-y} 1 \, dxdy + \int_1^2 \int_{2-y}^{3-y} 2 \, dxdy$
$+ \int_1^2 \int_{3-y}^{2} 3 \, dxdy = 6$ *si* $Q = [0,2] \times [0,2]$ y $[x + y] =$ parte entera de x+y

12. $\iint_Q dxdy = \pi ab$ si Q es la regiòn limitada por el gràfico de $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Integrales triples.

Las Integrales triples se definen de manera anàloga a las Integrales dobles .El cambio de orden de integraciòn en una integral triple es màs complicado .

La integral $\iint_Q f(x,y) \, dxdy$ se calculò sobre una region cerrada y acotada del plano xy. En forma anàloga la integral triple $\iiint_S f(x,y,z) dzdydx$ se calcula sobre una region S ,sòlida , cerrada y acotada del espacio R^3

Si f(x,y,z) es una funciòn definida en S, entonces la integral triple de f(x,y,z) sobre S se define por :

$\iiint_S f(x,y,z) \, dzdydx = \lim_{m \to \infty} \lim_{n \to \infty} \lim_{p \to \infty} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} f(x_i, y_j, z_k) \, \Delta z_k \, \Delta x_i \, \Delta y_j$ siempre y cuando este lìmite exista

Al igual que en las integrales dobles ,el càlculo de integrales triples ,usando la definiciòn es compleja y por ello buscaremos mecanismos màs pràcticos

Propiedades.

1. $\iiint_S (\alpha$ f(x,y,z) $\pm \beta$ g(x,y,z)$)dzdydx =$

$\alpha \iiint_S$ f(x,y,z) $dzdydx \pm \beta \iiint_S$ g(x,y,z)$dzdydx$. $\alpha, \beta \in R$.

2. Si f(x,y,z) $\geq$g(x,y,z) en S entonces $\iiint_S$ f(x,y,z) $dzdydx \geq \iiint_S$ g(x,y,z)$dzdydx$.

3. $\iiint_S$ f(x,y,z) $dzdydx = \iiint_{S_1}$ f(x,y,z) $dzdydx + \iiint_{S_2}$ f(x,y,z) $dzdydx + ... + \iiint_{S_n}$ f(x,y,z) $dzdydx$

si $S = \cup S_i$ (no se solapan)

TIPOS DE REGIONES

1. Integraciòn sobre un paralelipipedo.

Si f(x,y,z) es continua en S=$[a,b]\times[c,d]\times[m,n]$,la integral triple

$\iiint_S$ f(x,y,z) *dzdydx* se puede calcular asì :

$$\iiint_S f(x,y,z)\,dzdydx=\int_a^b\int_c^d\int_m^n f(x,y,z)\,dzdxdy=\int_c^d\int_a^b\int_m^n f(x,y,z)\,dzdxdy$$ o en cualquier orden dxdydz dxdzdy dydzdx dydzdx con el necesario ajuste en los lìmites de integraciòn.

La integral $\int_a^b\int_c^d\int_m^n$ f(x,y,z) dzdxdy se calcula, primero integrando

$\int_m^n$ f(x,y,z) dz,manteniendo fijos a x y a y.El resultado se integra respecto a y ,manteniendo fijo a x ,y finalmente se integra con respecto a x. En forma anàloga se calculan las otras 5 integrales.

Ejemplo 1 .Calcular $\iiint_S xy^3z^2\,dzdydx$ si S=$[-1,3]\times[1,4]\times[0,2]$.

Soluciòn .Usaremos dos de ls 6 posibilidades para el càlculo de la integral.

$$i.\ \iiint_S xy^3z^2\,dzdydx=\int_1^4\int_{-1}^3\int_0^2 xy^3z^2\,dzdxdy=\int_1^4\int_{-1}^3\left(xy^3\frac{z^3}{3}\right)_0^2dxdy=\int_1^4\int_{-1}^3\frac{8}{3}\,xy^3dxdy=$$

$$\frac{8}{3}\int_1^4\left(\frac{x^2}{2}y^3\right)_{-1}^3dy=\frac{8}{3}\int_1^4\left(\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\right)y^3\,dy=\frac{8}{3}\cdot 4\int_1^4 y^3\,dy=\left(\frac{32}{3}\frac{y^4}{4}\right)_1^4=680.$$

$$ii.\ \iiint_S xy^3z^2\,dzdydx=\int_1^4\int_0^2\int_{-1}^3 xy^3z^2\,dxdzdy=\int_1^4\int_0^2\left(y^3z^2\frac{x^2}{2}\right)_{-1}^3dzdy=\int_1^4\int_0^2 y^3z^2\left(\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\right)dzdy$$

$$4\int_1^4\int_0^2 y^3z^2dzdy=4\int_1^4\left(y^3\frac{z^3}{3}\right)_0^2dy=\frac{32}{3}\left(\frac{y^4}{4}\right)_1^4=\frac{32}{3}\cdot\frac{1}{4}(256-1)=680.$$

2. Integrales triples sobre regiones màs generales .

a. S ={(*x*,*y*,*z*) / a ≤ x ≤ b , q(x) ≤ y ≤ h(x) , g(x,y) ≤ z ≤ k(x,y)} entonces

$$\iiint_S f(x,y,z)\,dzdydx=\int_a^b\int_{q(x)}^{h(x)}\int_{g(x,y)}^{k(x,y)} f(x,y,z)\,dzdydx.$$

Ejemplo 1 .Calcular $\iiint_S (2x+3y)\,dzdydx$ si S està limitado por el gràfico de las superficies

2x+3y+z =6 , z =0 , x =0 ,y =0 fig 35

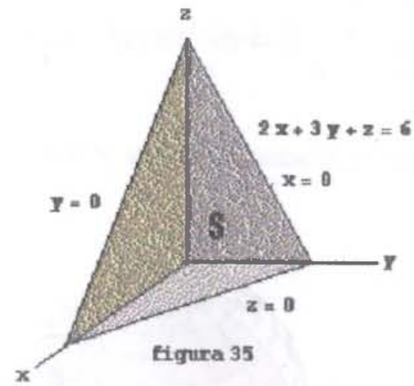


figura 35

i. Proyectando el sòlido en el plano xy fig 36 ,se tiene que

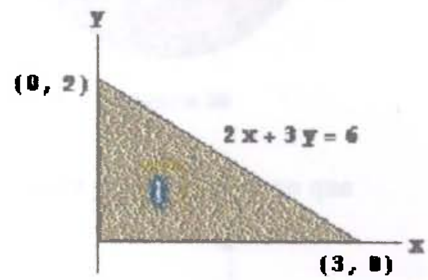


figura 36

$$\iiint_S (2x+3y)\, dzdydx = \iint_Q \left[\int_0^{6-2x-3y} (2x+3y)\, dz \right] dydx = \int_0^3 \int_0^{2-\frac{2x}{3}} \int_0^{6-2x-3y} (2x+3y)\, dzdydx = 18$$

$$\int_0^3 \int_0^{2-\frac{2x}{3}} ((2x+3y)z)\Big|_0^{6-2x-3y} dydx = \int_0^3 \int_0^{2-\frac{2x}{3}} (2x+3y)(6-2x-3y)\, dydx = \int_0^3 \int_0^{2-\frac{2x}{3}} (12x-4x^2-12xy+18y-9y^2)\, dydx$$

ii. Proyectando el sòlido en el plano yz fig 37 ,se tiene que

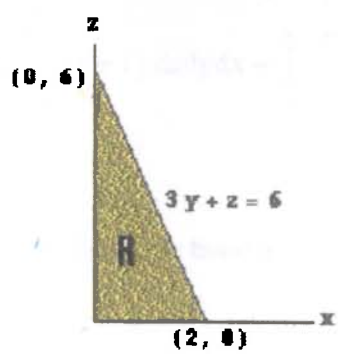


figura 37

$$\iiint_S (2x+3y)\, dzdydx = \iint_R \left[\int_0^{\frac{6-3y-z}{2}} (2x+3y)\, \mathrm{d}x \right] dydz = \int_0^6 \int_0^{\frac{6-z}{3}} \int_0^{\frac{6-3y-z}{2}} (2x+3y)\, \mathrm{dxdydz} = 18.$$

Ejemplo 2 .Calcular $\iiint_S (z+1)\, dzdydx$ si S està limitado por el gràfico de la superficie $x^2+y^2+z^2 = a^2$ fig 38

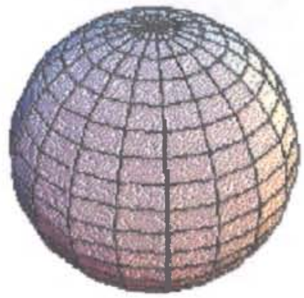


figura 38

i. Proyectando el sòlido en el plano xy fig 39 ,se tiene que

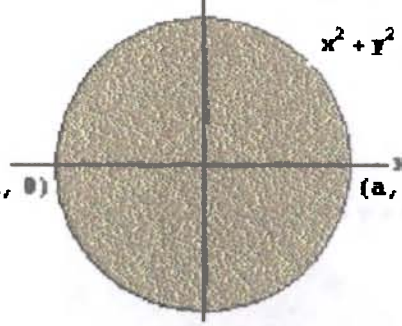


figura 39

$$\iiint_S (z+1)\, dzdydx = \int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} (z+1)\, \mathrm{dzdydx} = \int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} (z+1)\, \mathrm{dzdxdy}$$

$$= \frac{4}{3}\pi a^3$$

ii. Proyectando el sòlido en el plano yz fig 40 ,se tiene que

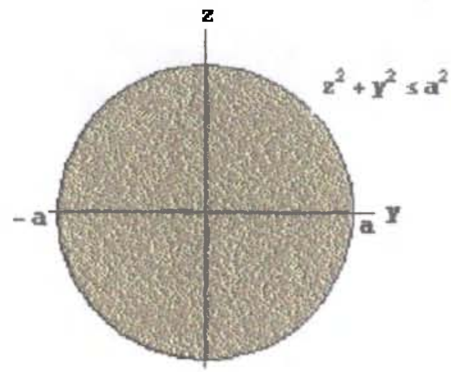


figura 40

$$\iiint_S (z+1)\, dzdydx = \int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}}\int_{-\sqrt{a^2-z^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-z^2-y^2}} (z+1)\ \mathrm{dxdydz}$$

$$= \int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}}\int_{-\sqrt{a^2-z^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-z^2-y^2}} (z+1)\ \mathrm{dxdzdy} = \frac{4}{3}\pi a^3$$

Ejemplo 3 .Calcular $\iiint_S (x+y+z)\, dz\, dx\, dy$ si S està limitado por el gràfico de las superficies z+y =6 , x – 4 , y = 0, z = 0 , x = 0 fig 41

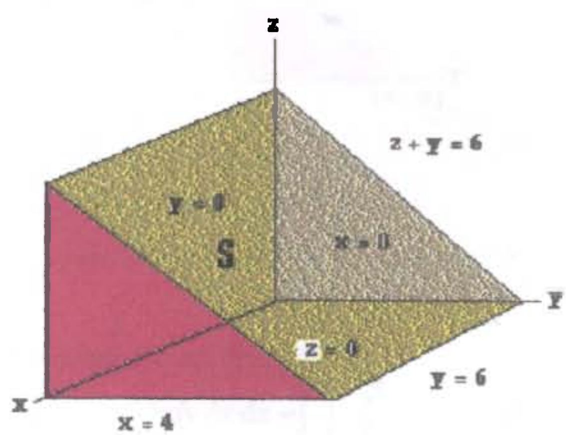


figura 41

Soluciòn . i . Proyectando el sòlido en el plano xy fig 42 ,se tiene que

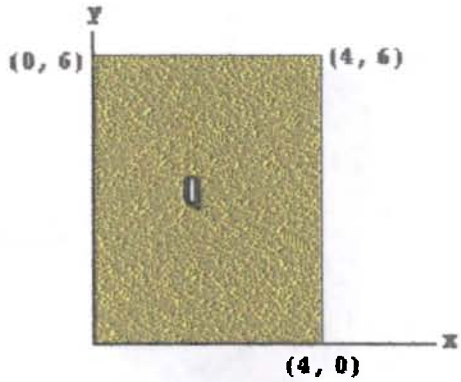


figura 42

$$\iiint_S (x+y+z)\,dz\,dx\,dy = \int_0^4 \int_0^6 \int_0^{6-y} (x+y+z)\,dz\,dy\,dx = \int_0^6 \int_0^4 \int_0^{6-y} (x+y+z)\,dz\,dx\,dy = 144$$

ii. Proyectando el sòlido en el plano yz fig 43 ,se tiene que

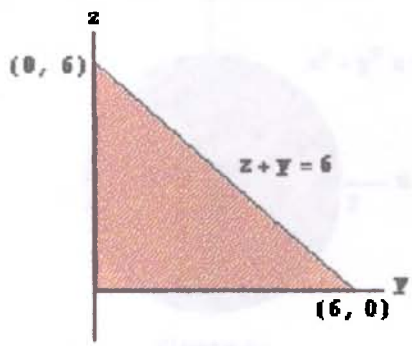


figura 43

$$\iiint_S (x+y+z)\,dz\,dx\,dy = \int_0^6 \int_0^{6-z} \int_0^4 (x+y+z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^6 \int_0^{6-y} \int_0^4 (x+y+z)\,dx\,dz\,dy = 144$$

iii. Proyectando el sòlido en el plano xz ,se tiene que

$$\iiint_S (x+y+z)\,dz\,dx\,dy = \int_0^4 \int_0^6 \int_0^{6-z} (x+y+z)\,dy\,dz\,dx = \int_0^6 \int_0^4 \int_0^{6-z} (x+y+z)\,dy\,dx\,dz = 144.$$

Ejemplo 3 .Calcular $\iiint_S (x+z)\,dz\,dx\,dy$ si el sòlido S esta limitado por el gràfico de las superficies $x^2+y^2 = 4$, $z = 0$, $z = 5$ fig 45

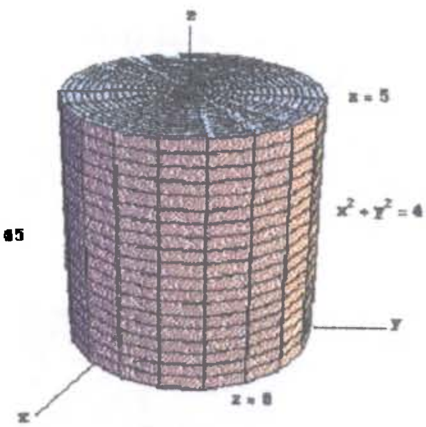


figura 45

Soluciòn .

i . Proyectando el sòlido S en el plano xy fig 46 ,se tiene que

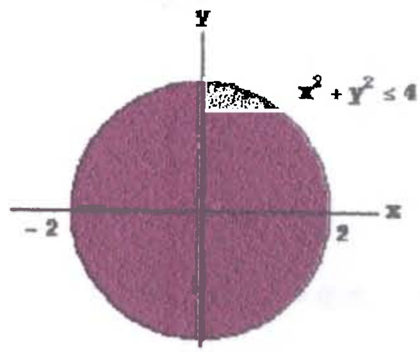


figura 46

$$\iiint_S (x+z)\, dz\, dx\, dy = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{5} (x+z)\, dz\, dy\, dx = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\int_{0}^{5} (x+z)\, dz\, dx\, dy = 0$$

ii.Proyectando el sòlido S en el plano yz fig 47 ,se tiene que :

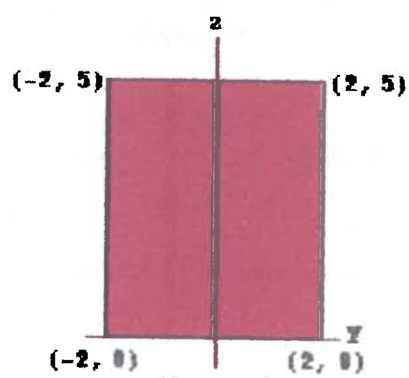


figura 47

$$\iiint_S (x+z)\, dz\, dx\, dy = \int_{-0}^{5} \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (x+z)\, dx\, dy\, dz = \int_{-2}^{2} \int_{0}^{5} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (x+z)\, dx\, dz\, dy = 0$$

Ejemplo 4 .Calcular $\iiint_S dz\, dx\, dy$ si el sòlido S està limitado por el gràfico de las superficies $x^2+y^2=z$, $z=9$ fig 49

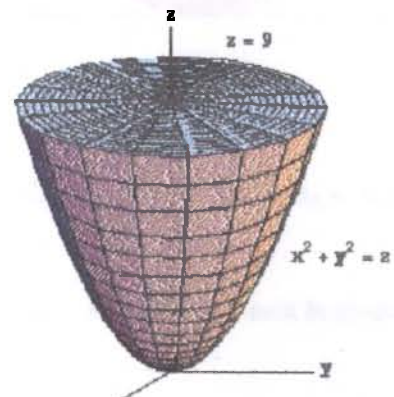


figura 49

Soluciòn .

i . Proyectando el sòlido S en el plano xy fig 50 ,se tiene que:

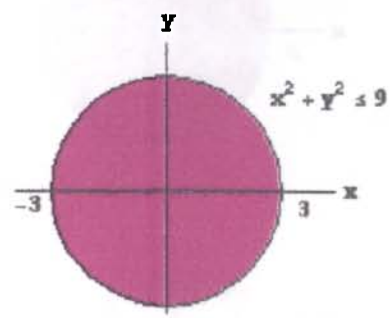


figura 50

$$\iiint_S dz\, dx\, dy = \int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{9} dz\, dy\, dx = \int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} \int_{x^2+y^2}^{9} dz\, dx\, dy = \frac{81}{2}\pi .$$

ii.Proyectando el sòlido S en el plano yz fig 51 ,se tiene que :

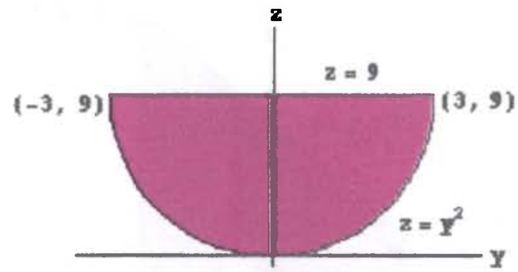


figura 51

$$\iiint\limits_S dz\,dx\,dy = \int_0^9 \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \int_{-\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{z-y^2}} dx\,dy\,dz = \int_{-3}^{3} \int_{y^2}^{9} \int_{-\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{z-y^2}} dx\,dz\,dy = \frac{81}{2}\pi.$$

Ejemplo 5 .Calcular $\iiint\limits_S x^2 dz\,dx\,dy$ si el sòlido S esta limitado por el gràfico de las superficies $x^2+y^2 = 36$, $y+z=9$, $z=0$.

Soluciòn .

i . Proyectando el sòlido S en el plano xy fig 53 ,se tiene que:

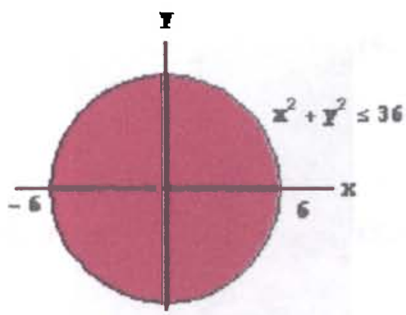


figura 53

$$\iiint\limits_S x^2 dz\,dx\,dy = \int_{-6}^{6} \int_{-\sqrt{36-x^2}}^{\sqrt{36-x^2}} \int_0^{9-y} x^2\, dzdydx = \int_{-6}^{6} \int_{-\sqrt{36-y^2}}^{\sqrt{36-y^2}} \int_0^{9-y} x^2\, dzdxdy = 2916\pi.$$

ii.Proyectando el sòlido S en el plano yz fig 54 ,se tiene que :

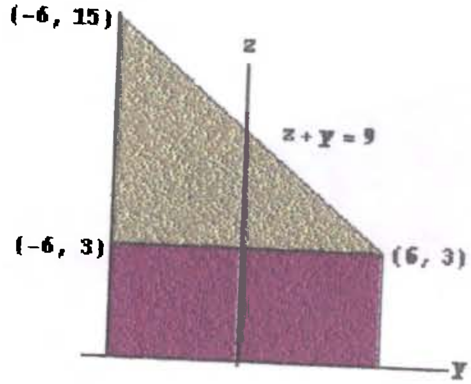


figura 54

$$\iiint_S x^2\,dz\,dx\,dy = \int_0^3\int_{-6}^{6}\int_{-\sqrt{36-y^2}}^{\sqrt{36-y^2}} x^2\,dx\,dy\,dz + \int_3^{15}\int_{-6}^{9-z}\int_{-\sqrt{36-y^2}}^{\sqrt{36-y^2}} x^2\,dx\,dy\,dz = 2916\pi\,.$$

ii.Proyectando el sòlido S en el plano xz fig 55 ,se tiene que :

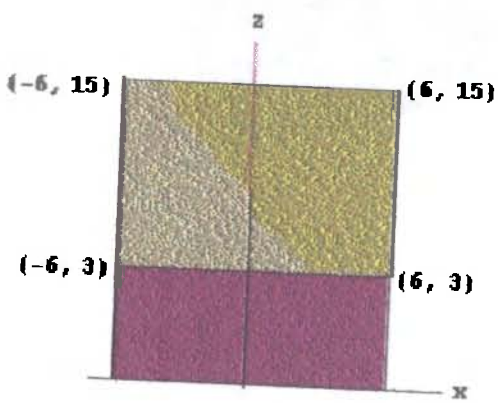


figura 55

$$\iiint_S x^2\,dz\,dx\,dy = \int_0^3\int_{-6}^{6}\int_{-\sqrt{36-x^2}}^{\sqrt{36-x^2}} x^2\,dy\,dx\,dz + \int_3^{15}\int_{-6}^{6}\int_{-\sqrt{36-x^2}}^{9-z} x^2\,dy\,dx\,dz = 2916\pi$$

Ejemplo 6 .Calcular $\iiint_S x\,dz\,dx\,dy$ si el sòlido S està limitado por el gràfico de las superficies $z = 0, z = x,\ y^2 = 4 - x$ fig 56

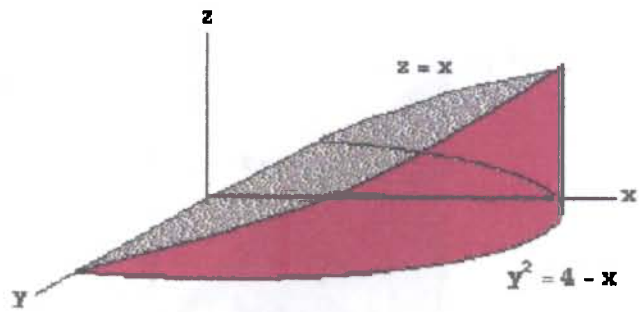


figura 56

Soluciòn .

i . Proyectando el sòlido S en el plano xy fig 57 ,se tiene que:

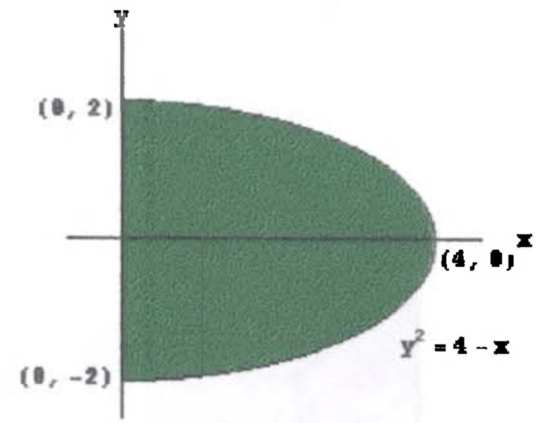


figura 57

$$\iiint_S x\, dz\, dx\, dy = \int_0^4 \int_{-\sqrt{4-x}}^{\sqrt{4-x}} \int_0^x x\, dzdydx = \int_{-2}^{2} \int_0^{4-y^2} \int_0^x x\, dzdxdy = \frac{4096}{105}$$

ii.Proyectando el sòlido S en el plano yz fig 58 ,se tiene que :

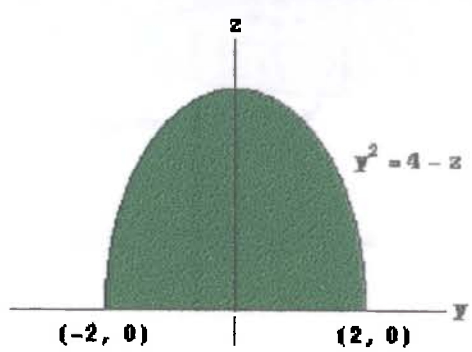


figura 58

$$\iiint_S x\, dz\, dx\, dy = \int_0^4 \int_{-\sqrt{4-z}}^{\sqrt{4-z}} \int_z^{4-y^2} x\, dx\, dy\, dz = \int_{-2}^{2} \int_0^{4-y^2} \int_z^{4-y^2} x\, dx\, dz\, dy = \frac{4096}{105}$$

iii.Proyectando el sòlido S en el plano xz fig 59 ,se tiene que :

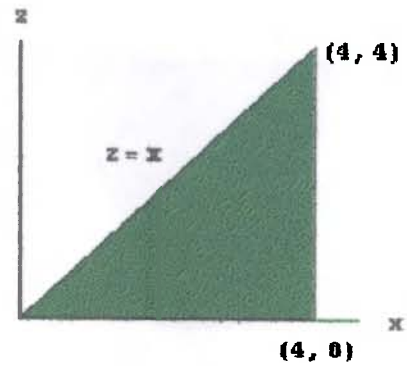


figura 59

$$\iiint_S x\,dz\,dx\,dy = \int_0^4 \int_0^x \int_{-\sqrt{4-x}}^{\sqrt{4-x}} x\,dy\,dz\,dx = \int_0^4 \int_z^4 \int_{-\sqrt{4-x}}^{\sqrt{4-x}} x\,dy\,dx\,dz = \frac{4096}{105}$$

Ejemplo 7 .Calcular $\iiint_S z\,dz\,dx\,dy$ si el sòlido S està limitado por el gràfico de las superficies $z = 0, z = 5, y = 9, y = x^2$ fig 60

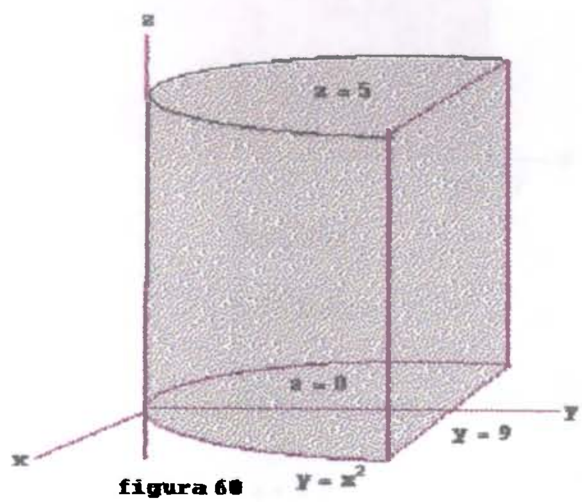


figura 60

Soluciòn .

i . Proyectando el sòlido S en el plano xy fig 61,se tiene que:

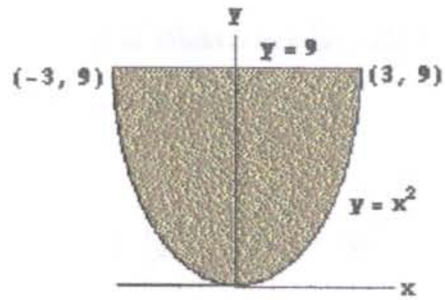


figura 61

$$\iiint_S z\,dz\,dx\,dy = \int_{-3}^{3}\int_{x^2}^{9}\int_{0}^{5} z\,dzdydx = \int_{0}^{9}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\int_{0}^{5} z\,dzdxdy = 450$$

ii.Proyectando el sòlido S en el plano xz fig 62 ,se tiene que :

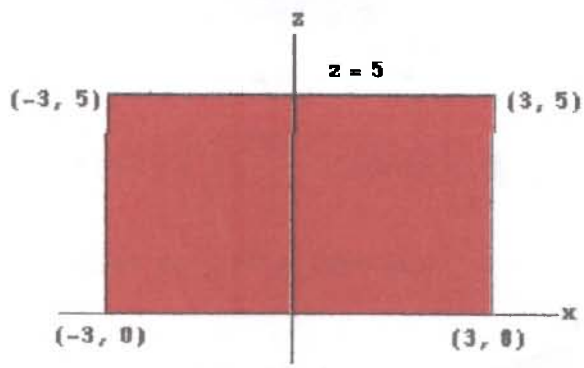


figura 62

$$\iiint_S z\,dz\,dx\,dy = \int_{0}^{5}\int_{-3}^{3}\int_{x^2}^{9} z\,dy\,dx\,dz = \int_{-3}^{3}\int_{0}^{5}\int_{x^2}^{9} z\,dy\,dz\,dx = 450$$

iii.Proyectando el sòlido S en el plano yz fig 63,se tiene que :

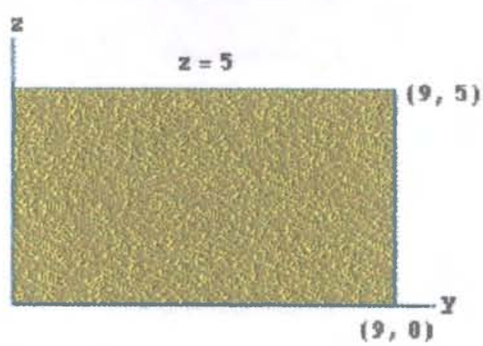


figura 63

$$\iiint_S z\,dz\,dx\,dy = \int_{0}^{5}\int_{0}^{9}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} z\,dx\,dy\,dz = \int_{0}^{9}\int_{0}^{5}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} z\,dx\,dz\,dy = 450$$

Ejemplo 8 .Calcular $\iiint_S y\, dz\, dx\, dy$ si el sòlido S esta limitado por el gràfico de las superficies

$z = x^2 + y^2 + 1 \quad x = 0, \; y = 0, \; 2x + y = 2$

Soluciòn .

i . Proyectando el sòlido S en el plano xy fig 65 ,se tiene que:

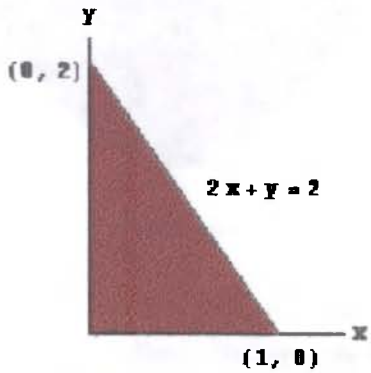


figura 65

$$\iiint_S y\, dz\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^{2-2x} \int_0^{x^2+y^2+1} y\, dzdydx = \int_0^2 \int_0^{\frac{2-y}{2}} \int_0^{x^2+y^2+1} y\, dzdxdy = \frac{23}{15}$$

ii.Proyectando el sòlido S en el plano yz fig 66 ,se tiene que :

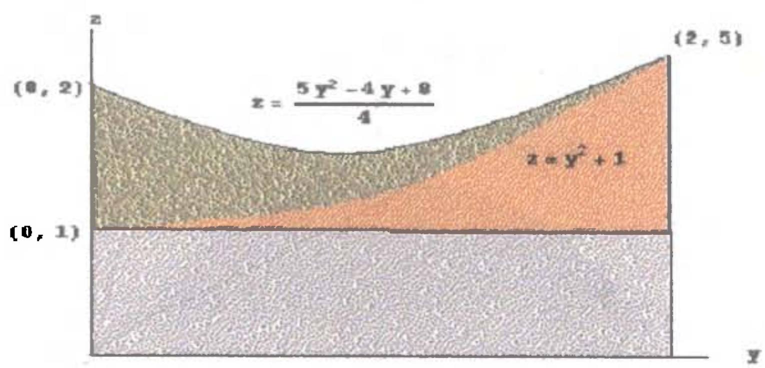


figura 66

$$\iiint_S y\, dz\, dx\, dy = \int_0^2 \int_0^1 \int_0^{\frac{2-y}{2}} y\, dx\, dz\, dy + \int_0^2 \int_{y^2+1}^{\frac{5y^2-4y+8}{4}} \int_{\sqrt{z-1-y^2}}^{\frac{2-y}{2}} y\, dx\, dz\, dy + \int_0^2 \int_1^{y^2+1} \int_0^{\frac{2-y}{2}} y\, dx\, dz\, dy = \frac{23}{15}$$

Ejemplo 9 .Calcular $\iiint_S x^2\, dz\, dx\, dy$ si S es el sòlido limitado por las superficies

$3z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (*interior a* $3z = x^2 + y^2$) fig 67

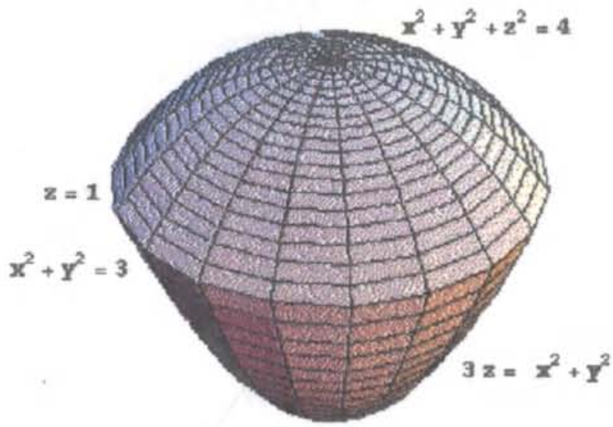


figura 67

Soluciòn .

i . Proyectemos el sòlido S en el plano xy .Hallemos la curva de intersecciòn de las superficies $3z=x^2+y^2$, $x^2+y^2+z^2=4$.Como $x^2+y^2+z^2=4$ entonces $3z+z^2=4$,luego $z^2 + 3z - 4 = 0 =(z+4)(z-1)$,es decir,$z=-4$,$z=1$,entonces $x^2+y^2 = 3z = 3.1 = 3$ es la curva de intersecciòn en $z=1$,asì la proyecciòm en el plano xy es $\{(x,y)/x^2+y^2 \leq 3\}$ y

$$\iiint_S x^2\, dz\, dx\, dy = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}} \int_{(x^2+y^2)/3}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} x^2\, dzdydx = \frac{49}{30}\pi.$$

ii.Proyectando el sòlido S en el plano yz fig 68,se tiene que :

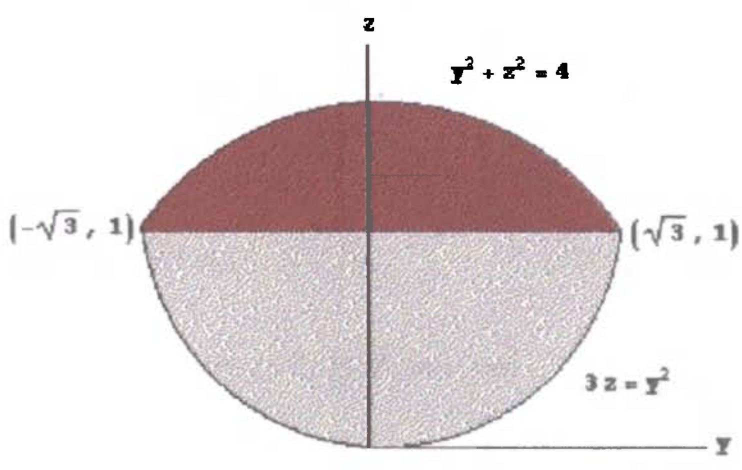


figura 68

$$\iiint_S x^2\, dz\, dx\, dy = \int_1^2 \int_{-\sqrt{3-z^2}}^{\sqrt{3-z^2}} \int_{-\sqrt{4-y^2-z^2}}^{\sqrt{4-y^2-z^2}} x^2 dxdydz + \int_0^1 \int_{-\sqrt{3z}}^{\sqrt{3z}} \int_{-\sqrt{3z-y^2}}^{\sqrt{3z-y^2}} x^2 dxdydz$$

b.Considere el ejemplo anterior y considere S el sòlido exterior fig 69

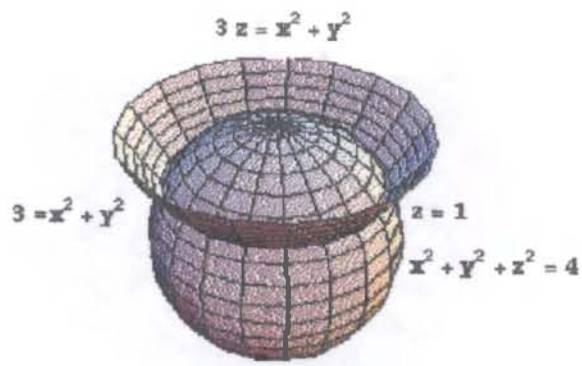


figura 69

i . Proyectando el sòlido S en el plano xy fig 70 se tiene

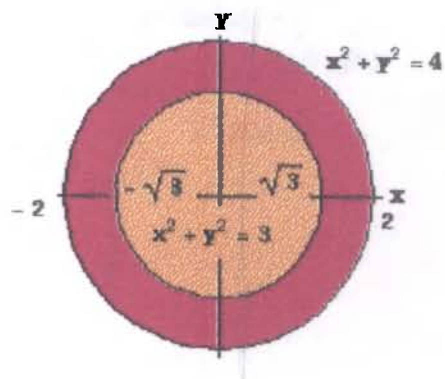


figura 70

$$\iiint_S x^2\,dz\,dx\,dy = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{(x^2+y^2)/3} x^2\,dzdydx + \int_{-2}^{-\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} x^2\,dzdydx$$

$$+\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} x^2\,dzdydx + \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\int_{\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} x^2\,dzdydx + \int_{\sqrt{3}}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} x^2\,dzdydx$$

ii.Proyectando el sòlido S en el plano yz fig 71 ,se tiene que

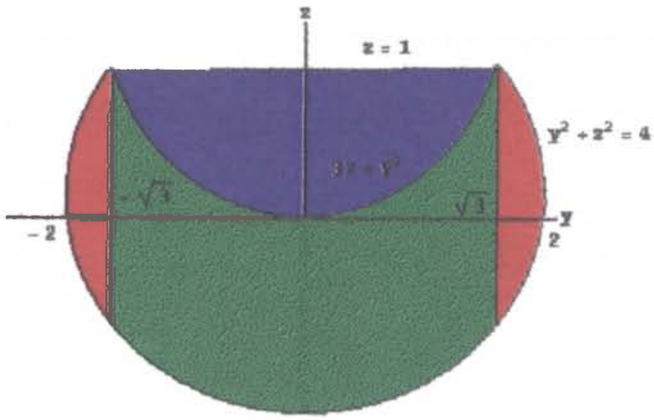


figura 71

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\int_{y^2/3}^{1}\int_{-\sqrt{4-y^2-z^2}}^{-\sqrt{3z-y^2}} x^2\,dxdzdy+\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\int_{y^2/3}^{1}\int_{\sqrt{3z-y^2}}^{\sqrt{4-y^2-z^2}} x^2\,dxdzdy+\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{3-y^2}}^{y^2/3}\int_{-\sqrt{4-z^2-y^2}}^{\sqrt{4-z^2-y^2}} x^2 dxdzdy+$$

$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\int_{-\sqrt{4-z^2-y^2}}^{\sqrt{4-z^2-y^2}} x^2 dxdzdy+\int_{\sqrt{3}}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\int_{-\sqrt{4-z^2-y^2}}^{\sqrt{4-z^2-y^2}} x^2 dxdzdy.$$

Ejercicios.

Mostrar que :

1. $\int_0^1\int_0^2\int_0^3 dzdydx = 6$. 2. $\int_0^1\int_0^2\int_1^3 (x+y+z)dxdydz = 14$. 3. $\int_0^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^a dzdydx = \frac{1}{2}a\pi$

4. $\iiint_S dz\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\int_{z^2}^{2-z^2}\int_0^{4-z} dxdydz = \frac{32}{3}$ si S està limitado por las superficies $y=2-z^2$, $y=z^2$, $x+z=4$, $x=0$

5. $\iiint_S dz\,dx\,dy = \int_{-3}^{3}\int_{-1}^{2}\int_0^{9-x^2} dzdydx = 144$ si S està limitado por las superficies $y=9-x^2$ $z=0$, $y=-1$, $y=2$.

6. $\iiint_S dz\,dx\,dy = \int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_4^{\sqrt{25-x^2-y^2}} dzdydx$ si S està limitado por las superficies $x^2+y^2+z^2=25$, $z\geq 4$.

7. $\iiint_S dz\,dx\,dy = \int_{-2}^{2}\int_0^{6}\int_4^{4-x^2} dzdydx = -32$ si S està limitado por las superficies $z=4-x^2$, $y=0$, $y=6$, $z=0$.

8. $\iiint_S dz\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{2-y^2}\int_0^4 dx\,dz\,dy = \frac{32}{3}$ si S està limitado por las superficies z=y^2 ,z=2-y^2 ,x=4 , x=0

Matriz Jacobiana.

Sea φ un campo vectorial ,$\varphi : R^n \to R^n$ con $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x))$, donde $\varphi_k : R^n \to R$ se llama funciòn componente y a

$$M\varphi = \begin{bmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

se llama matriz jacobiana ; al det(Mφ)=$|M\varphi| = \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)}{\partial(x_1, x_2, ..., x_n)}$

$= J_\varphi$ *se llama el jacobiano*

Ejemplo 1. $\varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v)) = (u+v, u-v) = (\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v))$ entonces

$$M_\varphi = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2. Si $\varphi(x,y,z) = (xy, xz, y) = (u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z))$ entonces

$$M_\varphi = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & x & 0 \\ z & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Una propiedad ùtil del jacobiano es

$\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,s)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \bullet \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,s)}$ y de aquì $\frac{\partial(u,v)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \bullet \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1$ entonces

$$1 = J\varphi^{-1} \bullet J\varphi$$

Teorema del cambio de variable

Sea φ inyectiva ,con derivadas parciales continuas en A$\subseteq R^n$,J$\varphi \neq 0$, y $\varphi : R^n \to R^n$, $f : R^n \to R$ *con* f acotada y continua en $\varphi(A) \subset R^n$ entonces f$\circ\varphi$ es integrable en A y

$$\int_{\varphi(A)} f = \int_A (f \circ \varphi)|J_\varphi|$$

La demostraciòn està fuera del alcance de este texto

En dos dimensiones se tiene que :

$\varphi : R^2 \to R^2, f : R^2 \to R$ y

$$\int_{\varphi(A)} \text{f} = \iint_{\varphi(A)} \text{f(x,y)dxdy} = \iint_A \text{f}(\varphi(u,v))|J_\varphi|dudv$$

donde φ(u,v) $=(x(u,v),y(u,v)) = (x,y)$ y hay que hallar $\varphi(u,v)$, A ,f$\circ\varphi$,J_φ fig 72

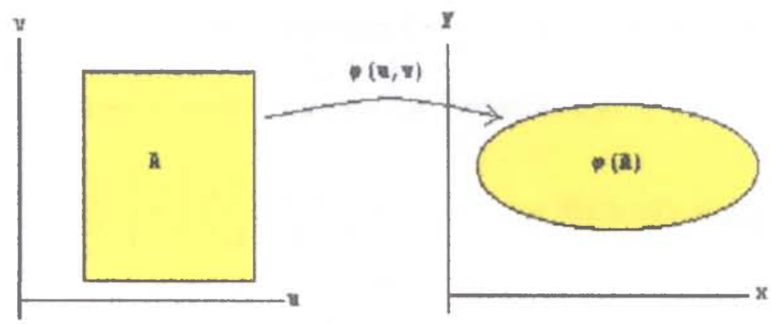


figura 72

y en tres dimensiones $\varphi : R^3 \to R^3, f : R^3 \to R$ y

$$\int_{\varphi(A)} \text{f} = \iint_{\varphi(A)} \text{f(x,y,z)dzdxdy} = \iint_A \text{f}(\varphi(u,v,w))|J_\varphi|dudvdw$$

donde φ(u,v,w) $=(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)) = (x,y,z)$ y hay que hallar $\varphi(u,v)$, A ,f$\circ\varphi$,J_φ

En general la integral $\int_{\varphi(A)}$ f es dificil de resolver , pero haciendo un cambio de variable apropiado , la integral $\int_A (f \circ \varphi)|J_\varphi|$ *es* màs fàcil de solucionar .No hay una forma general para hacer el cambio de variable , en algunas oportunidades depende de la region $\varphi(A)$ y en otras del integrando f.
Con los ejemplos siguientes se pretende dar claridad a la aplicaciòn de este teorema y su porquè ,còmo hallar $\varphi(u,v)$, A ,f$\circ\varphi$,J_φ.

Ejemplo 1 . Calcular la integral $\iint_{\varphi(A)} (x-y)^{10} (x+y)^{20}$ dxdy con $\varphi(A)=\{(x,y) \,/ |x| + |y| \leq 9\}$.fig 73

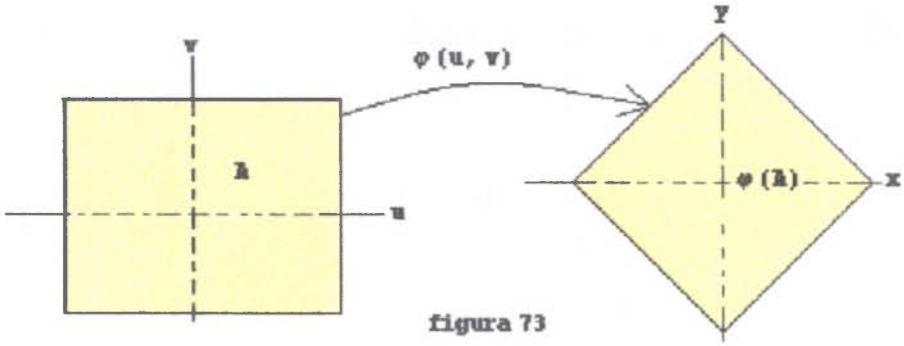


figura 73

Solución .

Sea u=x+y , v = x-y entonces u+v =2x entonces $x = \frac{u}{2} + \frac{v}{2}$ y u-v = 2y entonces $y = \frac{u}{2} - \frac{v}{2}$ y asì $\varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v)) = (x,y) = \left(\frac{u}{2} + \frac{v}{2}, \frac{u}{2} - \frac{v}{2}\right)$.

Como u=x+y entonces u =9 y u=-9 y para v = x-y entonces v =9 y v=-9 luego A $=[-9,9] \times [-9,9]$

$$y\ J_\varphi = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \text{ y } f(\varphi(u,v)) = f\left(\frac{u}{2} + \frac{v}{2}, \frac{u}{2} - \frac{v}{2}\right) =$$

$$\left(\frac{u}{2} + \frac{v}{2} - \left(\frac{u}{2} - \frac{v}{2}\right)\right)^{10} \left(\frac{u}{2} + \frac{v}{2} + \frac{u}{2} - \frac{v}{2}\right)^{20} = v^{10} u^{20}, \text{ así}$$

$$\iint_{\varphi(A)} (x-y)^{10} (x+y)^{20}\, dxdy = \int_{-9}^{0} \int_{-9-x}^{9+x} (x-y)^{10} (x+y)^{20}\, dydx + \int_{0}^{9} \int_{x-9}^{9-x} (x-y)^{10} (x+y)^{20}\, dydx$$

$$= \int_{-9}^{9} \int_{-9}^{9} v^{10} u^{20} \left|-\frac{1}{2}\right| dudv = \frac{1}{2} \int_{-9}^{9} \int_{-9}^{9} v^{10} u^{20}\, dudv = \frac{2289\,122\,546\,861\,674\,989\,771\,899\,392\,854}{77}$$

Ejemplo 2 . Calcular la integral $\iint_{\varphi(A)} x\, dxdy$ con $\varphi(A) = \{(x,y) / |x| + |y| \leq 9\}$. fig 74

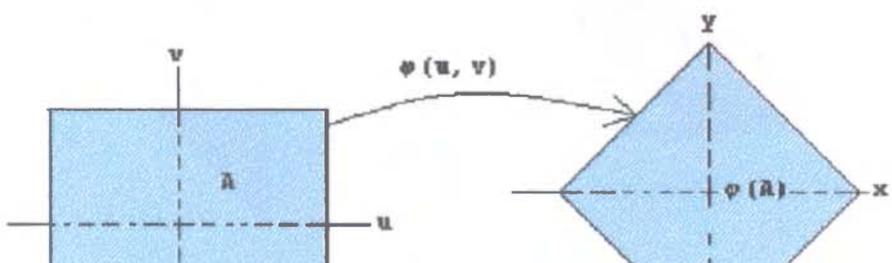


figura 74

Sea u=x+y entonces u =9 y u=-9 y v = x-y entonces v =9 y v=-9 ,com en el ejemplo anterior

, luego

A $=[-9,9] \times [-9,9]$ $J_\varphi = -\frac{1}{2}$ y $f(\varphi(u,v)) = f\left(\frac{u}{2} + \frac{v}{2}, \frac{u}{2} - \frac{v}{2}\right) = \frac{u+v}{2}$ *entonces*

$$\iint_{\varphi(A)} x\, dxdy = \int_{-9}^{0} \int_{-9-x}^{9+x} x\, dydx + \int_{0}^{9} \int_{x-9}^{9-x} x\, dydx = \int_{-9}^{9} \int_{-9}^{9} \left(\frac{u+v}{2}\right) \left|-\frac{1}{2}\right| dudv = \frac{1}{2} \int_{-9}^{9} \int_{-9}^{9} \left(\frac{u+v}{2}\right) dudv = 0$$

Ejemplo 3 . Calcular la integral $\iint\limits_{\varphi(A)} y\,\mathrm{dxdy}$ con $\varphi(A)$ la regiòn limitada por el gràfico de las curvas x+y =9 ,x=0 , y =0 fig 75

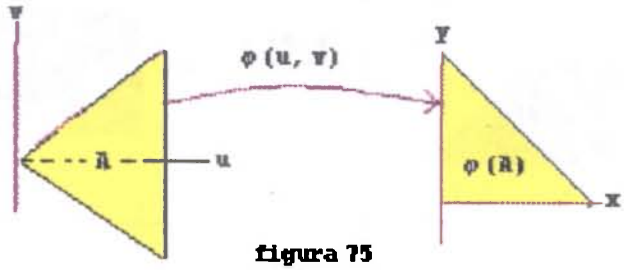


figura 75

Soluciòn . Sea u=x+y ,v=x-y ,luego $x = \frac{u}{2} + \frac{v}{2}$, $y = \frac{u}{2} - \frac{v}{2}$, $J_\varphi = -\frac{1}{2}$, $f(\varphi(u,v)) = f(\frac{u}{2} + \frac{v}{2}, \frac{u}{2} - \frac{v}{2}) = \frac{u-v}{2}$
Como u=x+y entonces u=9 .Como u=x+y ,v=x-y ,para x=0 se tiene que u=y y v=-y entonces u=-v y para y=0 ,u=x , v= x ,entonces u=v ,luego A es la region limitada por u=v ,u=-v y u=9 ,asì que

$$\iint\limits_{\varphi(A)} y\,\mathrm{dxdy} = \int_0^9 \int_0^{9-x} y\,\mathrm{dydx} = \frac{1}{2}\int_0^9 \int_{-u}^{u} \left(\frac{u-v}{2}\right) \mathrm{dvdu} = \frac{243}{2}.$$

Ejemplo 4 . Calcular la integral $\iint\limits_{\varphi(A)} (x+y)\,\mathrm{dxdy}$ con $\varphi(A)$ la regiòn limitada por el gràfico de las curvas x+y =10 x+y=4 , x =0 , y=0 fig 76.

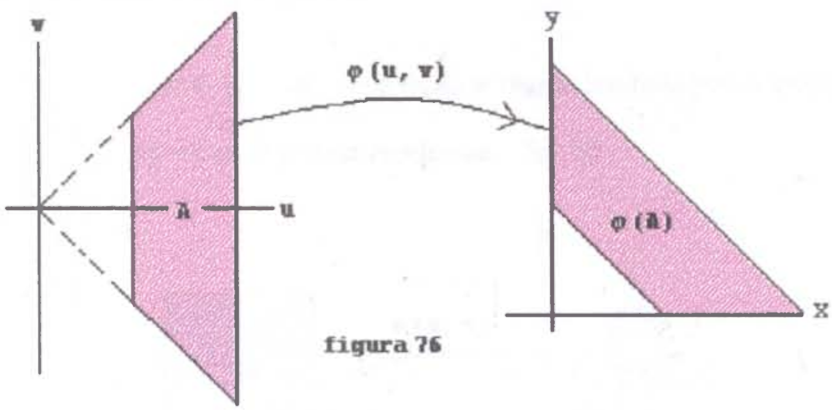


figura 76

Soluciòn . Sea u=x+y ,v=x-y ,luego $x = \frac{u}{2} + \frac{v}{2}$, $y = \frac{u}{2} - \frac{v}{2}$, $J_\varphi = -\frac{1}{2}$,
$f(\varphi(u,v)) = f(\frac{u}{2} + \frac{v}{2}, \frac{u}{2} - \frac{v}{2}) = \frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2} = u.$
Como u=x+y entonces u=10,u=4 .Como u=x+y ,v=x-y ,para x=0 se tiene que u=y y v=-y entonces u=-v y para y=0 , u=x , v= x , entonces u=v , luego A es la region limitada por u=v , u=-v y u=10 , u=4,asì que

$$\iint\limits_{\varphi(A)} (x+y)\,\mathrm{dxdy} = \int_0^4 \int_{4-x}^{10-x} (x+y)\,\mathrm{dydx} + \int_4^{10} \int_0^{10-x} (x+y)\,\mathrm{dydx} = \frac{1}{2}\int_4^{10} \int_{-u}^{u} u\,\mathrm{dvdu} = 312.$$

Ejemplo 5 . Calcular la integral $\iint\limits_{\varphi(A)} (x-y)^3$ dxdy con $\varphi(A)$ la regiòn limitada por el gràfico de las curvas x=y y=x-5 ,y =4 , y=6 , fig 77

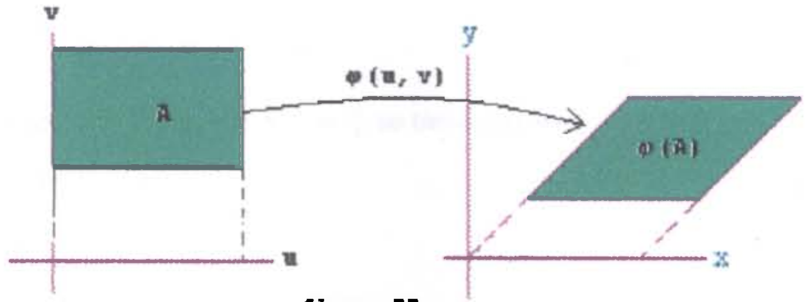


figura 77

Soluciòn . Sea u=x+y ,v=y entonces u=5 ,u= 0,v=4 ,v = 6 , f($\varphi(u,v)$)=$f(u+v,v)$=$u+v-v$=u^3

$$I_\varphi = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \text{ y asì}$$

$$\iint\limits_{\varphi(A)} (x-y)^3 \,\text{dxdy} = \int_4^6\int_4^x (x-y)^3\text{dydx} + \int_6^9\int_4^6 (x-y)^3\text{dydx} + \int_9^{11}\int_{x-5}^6 (x-y)^3\text{dydx}$$

$$= \int_0^5\int_4^6 u^3 \bullet 1 \,\text{dvdu} = \frac{625}{2}$$

Ejemplo 6 . Calcular la integral $\iint\limits_{\varphi(A)}$ dxdy con $\varphi(A)$ la regiòn limitada por el gràfico de las curvas x=y,y=5x ,$y = x$, xy=2 ,xy =4 en el primer cuadrante . fig 78

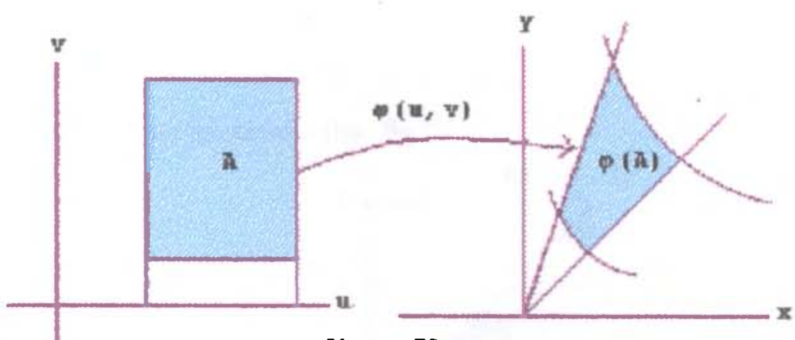


figura 78

Soluciòn . Sea u = xy ,v = $\frac{y}{x}$. *entonces* y = vx ,luego u = x(vx) = x^2 v,es decir ,x =$\sqrt{\frac{u}{v}}$ Como y = vx = v $\sqrt{\frac{u}{v}}$ = $\sqrt{u}.\sqrt{v}$.

$$I_\varphi = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{u}.\sqrt{v}} & \frac{1}{2}v^{-3/2}u^{1/2} \\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{4v} + \frac{1}{4v} = \frac{1}{2v}.$$

$$J_{\varphi^{-1}} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ \frac{-y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{y}{x} + \frac{y}{x} = 2\frac{y}{x} = 2v$$

$$f(\varphi(u,v)) = f\left(\sqrt{\tfrac{u}{v}}, \sqrt{u}.\sqrt{v}\right) = 1$$

Como u = xy entonces u = 2 ,u = 4 y $v = \frac{y}{x}$ se tiene que v = 1 , v = 5 y así

$$\iint_{\varphi(A)} dxdy = \int_2^4 \int_1^5 \frac{1}{2v}\, dvdu = \ln 5.$$

Ejercicios.

1. Calcular $\iint_{\varphi(A)} xy\, dxdy$ Q limitada por xy = 2 , xy = 4 , $xy^3 = 2$, $xy^3 = 6$, primer cuadrante.

2. Calcular $\iint_{\varphi(A)} (x+y)^{40}\, dxdy$ si Q es la region limitada por los graficos de las curvas x+y = 1 ,x+y = 4,x=0,y=0.

3. Calcular $\iint_{\varphi(A)} (x-y)sen(x+y)\, dxdy$ si Q es la region limitada por los graficos de las curvas x+y = 3π ,x+y = π ,$x-y = \pi, x-y = -\pi$

4. Calcular $\iint_{\varphi(A)} (\sqrt{x-2y}+\frac{y^2}{4})dxdy$ si Q es el triàngulo de vèrtices $(0,0),(4,0)\ (4,2)$ $(v = x-2y, u = y/2)$

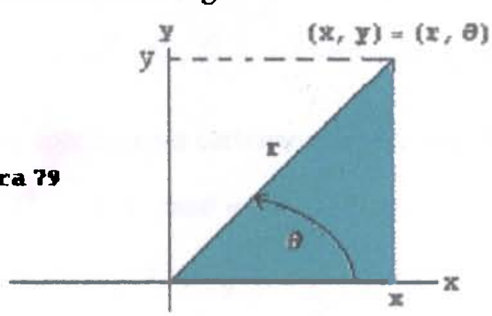
5. Calcular $\int_0^1 \int_0^{1-x} e^{\frac{y}{x+y}} dydx$.

6.Calcular $\int_0^1 \int_0^{2-2y} e^{\frac{x-2y}{x+2y}} dxdy$.

Coordenadas Polares.

Recordemos algunos aspectos fundamentales fig 79

figura 79



de la fig 79 $\cos\theta = \frac{x}{r}$, $\sin\theta = \frac{y}{r}$ entonces $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ y $x^2+y^2 = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2$ luego $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\frac{y}{x} = \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \tan\theta$, $\varphi(r,\theta) = (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ y

$$J_\varphi = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ sen\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

Pasar un punto de coordenadas polares a cartesianas y viceversa.

Para pasar puntos de coordenadas polares a coordenadas cartesianas se utiliza $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

1. *P*asar el punto $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ a coordenadas cartesianas.

$r = 1$, $x = r\cos\theta = 1.\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = r\sin\theta = 1.\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y así el punto en coordenadas polares $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$
corresponde en coordenadas cartesianas al punto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2. *P*asar el punto $\left(1, \frac{3\pi}{4}\right)$ a coordenadas cartesianas $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

$r = 1$, $x = r\cos\theta = 1.\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = r\sin\theta = 1.\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y así el punto en coordenadas polares $\left(1, \frac{3\pi}{4}\right)$
corresponde en coordenadas cartesianas al punto $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

3. *P*asar el punto $\left(1, \frac{5\pi}{4}\right)$ a coordenadas cartesianas.

$r = 1$, $x = r\cos\theta = 1.\cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = r\sin\theta = 1.\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ y así el punto en coordenadas polares $\left(1, \frac{3\pi}{4}\right)$ corresponde en coordenadas cartesianas al punto $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Pasar un punto de coordenadas cartesianas a polares.

1. *P*asar el punto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ en coordenadas cartesianas a coordenadas polares .

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$,$\tan\theta = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$, entonces $\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = 7\pi/4$

así el punto en coordenadas cartesianas $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, corresponde en coordenadas polares al punto $(1, 7\pi/4)$.

2. *P*asar el punto $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ en coordenadas cartesianas a coordenadas polares .

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$,$\tan\theta = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$, entonces $\theta = \pi - \frac{\pi}{4} = 3\pi/4$

así el punto en coordenadas cartesianas $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, corresponde en coordenadas polares al punto $(1, 3\pi/4)$.

3. *P*asar el punto $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ en coordenadas cartesianas a coordenadas polares .

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$,$\tan\theta = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$, entonces $\theta = \pi + \frac{\pi}{4} = 5\pi/4$

así el punto en coordenadas cartesianas $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, corresponde en coordenadas polares al punto $(1, 5\pi/4)$.

1.Pasar la ecuaciòn $x^2+y^2 = 4$ a coordenadas polares.
$x^2+y^2 = (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = r^2 = 4$ entonces $r = 2$.
2.Pasar la ecuaciòn $x+y = 6$ a coordenadas polares.

$x+y = r\cos\theta + r\sin\theta = r(\cos\theta+\sin\theta) = 6$ entonces $r = \frac{6}{\cos\theta+\sin\theta}$.
Si $r = \frac{6}{\cos\theta+\sin\theta}$ entonces $6 = r\cos\theta + r\sin\theta = x+y$.
3.Pasar la ecuaciòn $x^2+y^2 = 4x$ a coordenadas polares.
$x^2+y^2 = (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = r^2 = 4r\cos\theta$,entonces $r = 4\cos\theta$.
Si $r = 4\cos\theta$, $r^2 = 4r\cos\theta$ entonces $x^2+y^2 = 4x$.
4 .Pasar la ecuaciòn $(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2$ a coordenadas polares.
$(x^2+y^2)^2 = r^4 = r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta$ entonces $r^2 = \cos 2\theta$.

Si $r^2 = \cos 2\theta$ entonces $r^4 = r^2\cos 2\theta = r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta$ luego $(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2$.

1. Calcular $\iint_{\varphi(A)} e^{x^2+y^2}\,dxdy$; $\varphi(A) = \{(x,y)/\ x^2+y^2 \le 4\}$ fig 80

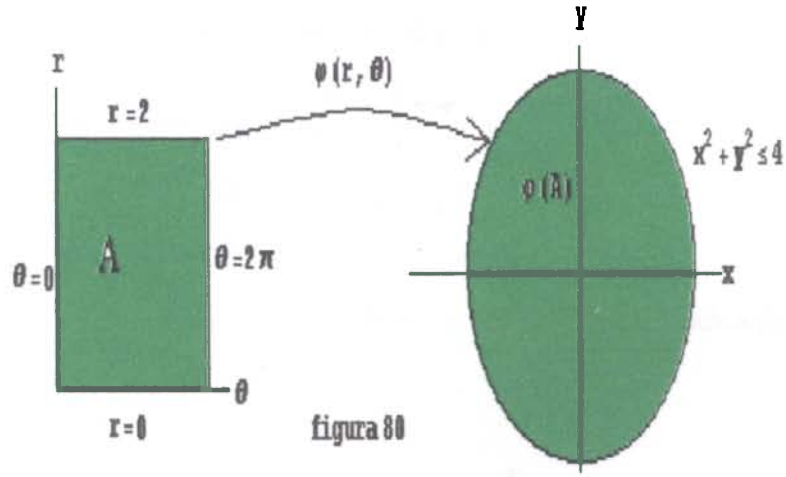


figura 80

Soluciòn.

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $\varphi(r,\theta) = (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ $0 \le r \le 2,\quad 0 \le \theta \le 2\pi$

$$I_\varphi = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ sen\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

$$\iint_{\varphi(A)} e^{x^2+y^2}\,dxdy = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} e^{x^2+y^2}\,dydx = \int_0^{2\pi}\int_0^{2} e^{r^2}\,r\,drd\theta = \pi e^4 - \pi.$$

2. Calcular $\iint_{\varphi(A)} x\,dxdy$; $\varphi(A)$ es la region limitada por los graficos de las curvas $y = x$,$x = 0$, $x^2+y^2 = 4$ primer cuadrante fig 81

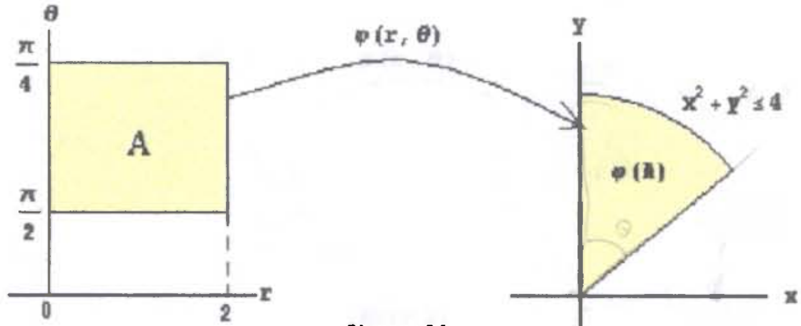


figura 81

Soluciòn. Como y = x entonces $x^2+x^2 = 4$,luego $2x^2 = 4$ y asì $x = \pm\sqrt{2} = y$

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $\varphi(r,\theta) = (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ $0 \le r \le 2$, $\pi/4 \le \theta \le \pi/2$

$$J_\varphi = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ sen\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

$$\iint_{\varphi(A)} x\,dxdy = \int_0^{\sqrt{2}} \int_x^{\sqrt{4-x^2}} x\,dydx = \int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^2 (r\cos\theta)r\,drd\theta = \frac{8}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{2}$$

3. Calcular $\iint_{\varphi(A)} (x^2+y^2)^2\,dxdy$; $\varphi(A)$ es la region limitada por la grafica de la curva $(x^2+y^2) = 2x$ fig 82

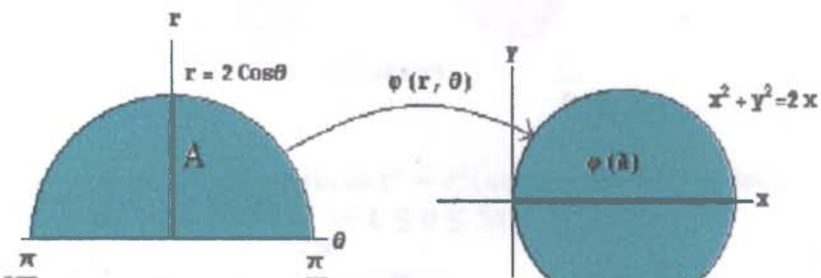


figura 82

Soluciòn . $(x^2+y^2) = 2x$ equivale a $r = 2\cos\theta$ $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$ y asì

$$\iint_{\varphi(A)} (x^2+y^2)^2\,dxdy = \int_0^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} (x^2+y^2)^2\,dydx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} (r^2)^2 r\,drd\theta = \frac{10}{3}\pi$$

4. Calcular $\iint_{\varphi(A)} y\,dxdy$; $\varphi(A)$ es la region limitada por la grafica de las curvas $(x^2+y^2) = 2y, x^2+(y-1)^2 = 1$ fig 83

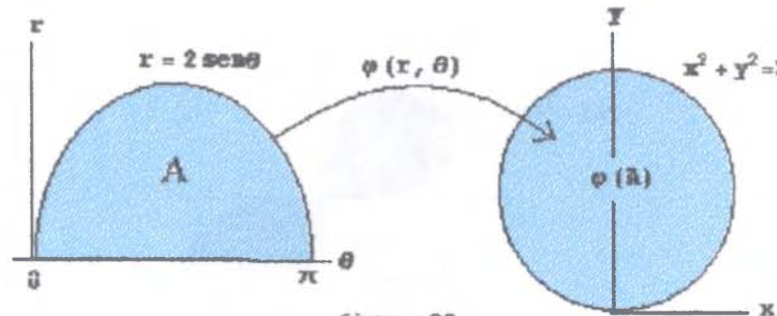


figura 83

Soluciòn . $\iint_{\varphi(A)} y\,\mathrm{dxdy} = \int_{-1}^{1}\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} y\,\mathrm{dydx} = \int_{0}^{\pi}\int_{0}^{2\sin\theta} (r\sin\theta)\mathrm{r}\mathrm{d}\mathrm{r}\mathrm{d}\theta = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{1} (1 + r\sin\theta)\mathrm{r}\mathrm{d}\mathrm{r}\mathrm{d}\theta = \pi$

3. Calcular $\iint_{\varphi(A)} \mathrm{dxdy}$; $\varphi(A)$ es la region limitada por la grafica de la curva $(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2$ *fig* 84

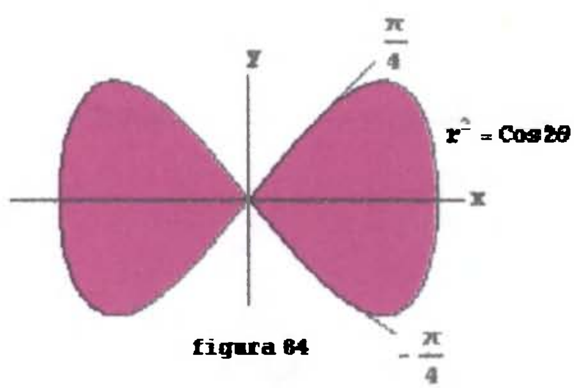


figura 84

La ecuaciòn $(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2$ en polares es $r^4 = r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$, es decir , $r^2 = \cos 2\theta$ que es positiva *para* $-\pi/4 \le \theta \le \pi/4$, $3\pi/4 \le \theta \le 5\pi/4$

$$\iint_{\varphi(A)} \mathrm{dxdy} = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_{0}^{\sqrt{\cos 2\theta}} r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta + \int_{3\pi/4}^{5\pi/4}\int_{0}^{\sqrt{\cos 2\theta}} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta =$$

$$\int_{0}^{\pi/4}\int_{0}^{\sqrt{\cos 2\theta}} r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta + \int_{3\pi/4}^{5\pi/4}\int_{0}^{\sqrt{\cos 2\theta}} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta + \int_{7\pi/4}^{2\pi}\int_{0}^{\sqrt{\cos 2\theta}} r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 1.$$

5. Calcular $\iint_{\varphi(A)} y\,\mathrm{dxdy}$; $\varphi(A)$ es la region limitada por la grafica de la curva $(x^2+y^2)^2 = 2xy$ fig 85

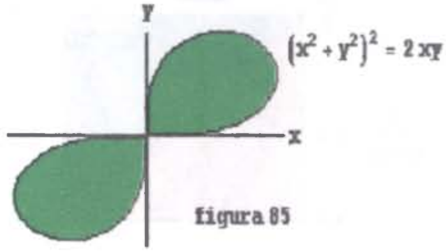


figura 85

Soluciòn
La ecuaciòn de la curva en polares es $r^2 = \sin 2\theta$ y alcanza el màximo valor cuando $2\theta = \pi/2$,es decir,$\theta = \pi/4$ fig 85

$$\iint_{\varphi(A)} y\,\mathrm{dxdy} = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\sqrt{\sin 2\theta}} (r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta + \int_{\pi}^{3\pi/2}\int_0^{\sqrt{\sin 2\theta}} (r\sin\theta)r\,dr\,d\theta.$$

6. Calcular $\iint_{\varphi(A)} x\mathrm{dxdy}$; $\varphi(A)$ es la region limitada por la grafica de las curvas x+y=4 ,x+y=1 x=0 , y=0.fig 87

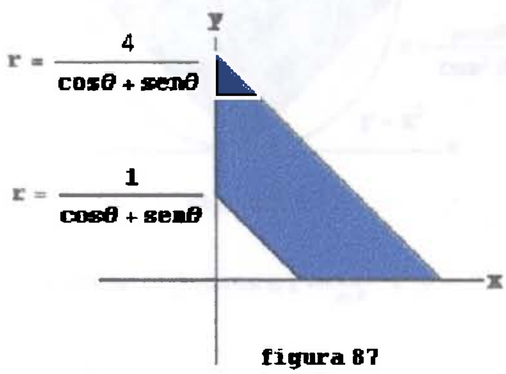


figura 87

Soluciòn . Las ecuciònes de las curvas x+y=4 , x+y=1 en coordenadas polares es $r = \frac{4}{\cos\theta+\sin\theta}$, $r = \frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}$.

$$\iint_{\varphi(A)} x\mathrm{dxdy} = \int_0^{\pi/2}\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{4}{\cos\theta+\sin\theta}} (r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\ .$$

7. Calcular $\iint_{\varphi(A)} x\mathrm{dxdy}$; $\varphi(A)$ es el cuadrado de lado 1 fig 88

10. Calcular $\iint\limits_{\varphi(A)} y \, \mathrm{dxdy}$,$\varphi(A)$ es la region limitada por el gràfico r=1+cosθ fig 91

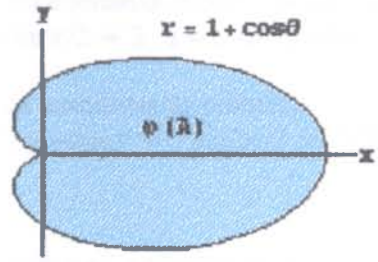


figura 91

Soluciòn . $\iint\limits_{\varphi(A)} y \, \mathrm{dxdy} = \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\theta} (r\sin\theta) r \, \mathrm{dr} \, d\theta = 0$.

11. Calcular $\iint\limits_{\varphi(A)} \mathrm{dxdy}$,$\varphi(A)$ es la region limitada por el gràfico interior a r = 1 y exterior a r $= \frac{1}{1+\cos\theta}$ fig 92

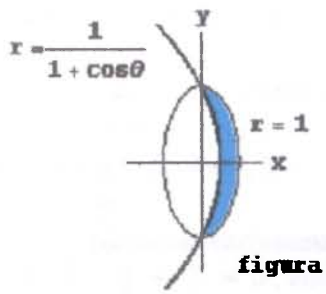


figura 92

Soluciòn . $\iint\limits_{\varphi(A)} \mathrm{dxdy} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\frac{1}{1+\cos\theta}}^{1} r \, \mathrm{dr} \, d\theta = -\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\pi$.

Cambios de variables en integrales triples.

Coordenadas cilindricas. Las coordenadas cilindricas son una generalizaciòn de las coordenadas polares

$\cos\theta = \frac{x}{r}$, $\sin\theta = \frac{y}{r}$ entonces x = r cos θ , y = rsin θ , z = z

$\varphi(r,\theta,z) = (x,y,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ y

$$J_\varphi = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Para pasar de coordenadas cilindricas a coordenadas cartesianas se utiliza x = r cos θ , y = rsin θ , z = z y para pasar de coordenadas cartesianas a coordenadas cilindricas se utiliza r = $\sqrt{x^2 + y^2}$

$z = z$, $\tan\theta = \frac{y}{x}$ con mucho cuidado

Ejemplo 1 . Pasar el punto $(3, \pi/2, 5)$ en coordenadas cilindricas a coordenadas cartesianas.
$x = r\cos\theta = 3\cos\pi/2 = 0$, $y = r\sin\theta = 3\sin\pi/2 = 3$, $z = 5$ asì el punto es $(0, 3, 5)$

Ejemplo 2 . Pasar el punto $(7, 2\pi/3, -4)$ en coordenadas cilindricas a coordenadas cartesianas.
$x = r\cos\theta = 7\cos 2\pi/3 = -7 \cdot \frac{1}{2} = -7/2$, $y = r\sin\theta = 7\sin 2\pi/3 = 7\sqrt{3}/2$, $z = -4$ asì el punto es $\left(-\frac{7}{2}, \frac{7\sqrt{3}}{2}, -4\right)$.

Ejemplo 3 . Pasar el punto $(1, 1, 2)$ en coordenadas cilindricas a coordenadas cartesianas.
$x = r\cos\theta = 1\cos 1$, $y = r\sin\theta = 1\sin 1$, $z = 1$ asì el punto es $(\cos 1, \sin 1, 1)$.

Ejemplo 4 . Pasar el punto $(\sqrt{2}, 5\pi/4, 2)$ en coordenadas cilindricas a coordenadas cartesianas.
$x = r\cos\theta = \sqrt{2}\cos 5\pi/4 = \sqrt{2} \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} = -1$, $y = r\sin\theta = \sqrt{2}\sin 5\pi/4 = \sqrt{2} \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} = -1$, $z =$ asì el punto es $(-1, -1, 2)$.

Ejemplo 5 . Pasar el punto (-1,0,1) en coordenadas cartesianas a coordenadas cilindricas.
$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (0)^2} = 1$, $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0$, entonces $\theta = \pi$ asì el punto es $(1, \pi, 1)$

Ejemplo 6 . Pasar el punto (1,-1,3) en coordenadas cartesianas a coordenadas cilindricas.
$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-1}{1} = -1$, entonces $\theta = -\pi/4$ o $2\pi - \pi/4 = 7\pi/4$ asì el punto es $(\sqrt{2}, 7\pi/4, 3)$.

Ejemplo 7 . Pasar el punto (1,0,0) en coordenadas cartesianas a coordenadas cilindricas.
$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (0)^2} = 1$, $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$, entonces $\theta = 0$ asì el punto es $(1, 0, 0)$.

Ejemplo 8 . Pasar el punto (-1,0,0) en coordenadas cartesianas a coordenadas cilindricas.
$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (0)^2} = 1$, $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0$, entonces $\theta = \pi$ asì el punto es $(1, \pi, 0)$.

Ejemplo 9 . Pasar el punto (0,-3,-3) en coordenadas cartesianas a coordenadas cilindricas.
$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(0)^2 + (-3)^2} = 3$, $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-3}{3} = -1$, entonces $\theta = 3\pi/2$ asì el punto es $(3, 3\pi/2, -3)$.

Ejemplo 10 . Pasar el punto (-1,1,2) en coordenadas cartesianas a coordenadas cilindricas.
$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$, $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{-1} = -1$, entonces $\theta = 3\pi/4$ asì el punto es $(\sqrt{2}, 3\pi/4, 2)$.

Ejemplo 11 . Pasar el pumto (-1,-1,4) en coordenadas cartesianas a coordenadas cilindricas.
$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-1}{-1} = 1$, entonces $\theta = \pi/4 + \pi = 5\pi/4$ asì el punto es $(\sqrt{2}, 5\pi/4, 4)$

Ejemplo . La ecuaciòn $z = x^2 + y^2$ en coordenadas cilindricas es $z = r^2$, pues , $z = x^2 + y^2 = (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = r^2$
Ejemplo La ecuaciòn $x + y + z = 0$ en coordenadas cilindricas es $r\cos\theta + r\sin\theta + z = 0$
Ejemplo La ecuaciòn $x^2 + y^2 = 6y$ en coordenadas cilindricas es $r = 6\sin\theta$, pues
$x^2 + y^2 = r^2 = 6r\sin\theta = 6y$ y asì $r = 6\sin\theta$

Ejemplo La ecuaciòn $r = 6\cos\theta$ en coordenadas cartesianas es $x^2 + y^2 = 6x$, pues si $r = 6\cos\theta$ entonces multiplicando por r ambos lados de la ecuaciòn se tiene $r^2 = 6r\cos\theta$, es decir , $x^2 + y^2 = 6x$

Ejemplo La ecuaciòn $r = 4$ en coordenadas cartesianas es $x^2 + y^2 = 16$,pues si $r = 4$ entonces multiplicando por r ambos lados de la ecuaciòn se tiene $r^2 = 16$,es decir , $x^2 + y^2 = 16$

Ejemplo La ecuaciòn $r^2 + z^2 = 16$ en coordenadas cartesianas es $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

Coordenadas esfèricas

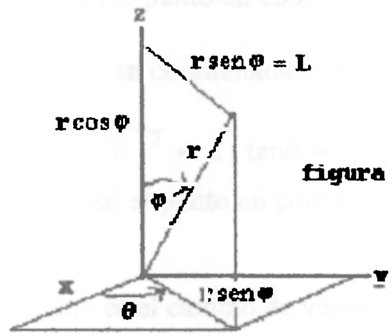


figura 94

De la fig 94 se deduce que :

$\cos\varphi = \frac{z}{r}$ entonces $z = r\cos\varphi$, $\sin\varphi = \frac{L}{r} =$ entonces $L = r\sin\varphi$, $\cos\theta = \frac{x}{r}$ entonces $x =$

$r\cos\theta\sin\varphi$

$\sin\theta = \frac{y}{L}$ entonces $y = L\sin\theta = r\sin\varphi\sin\theta$ luego

$\psi(r,\theta,\varphi) = (r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi)$ y $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\tan\theta = \frac{y}{x}$, $\cos\varphi = \frac{z}{r}$

$$J\psi = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -r\sin\varphi \end{vmatrix} = -r^2\sin\varphi.$$

Ejemplo 1 . Pasar el punto $(1,0,0)$ en coordenadas cartesianas a coordenadas esfèricas

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(1)^2 + (0)^2 + (0)^2} = 1$, $\tan\theta = \frac{y}{x}$ luego $\theta = 0$ fig , $\cos\varphi = \frac{z}{r} = \frac{0}{1} = 0$, entonces $\varphi = \pi/2$ asì el punto en coordenadas esfèricas es $(1,0,\pi/2)$.

Ejemplo 2 . Pasar el punto $(0,0,1)$ en coordenadas cartesianas a coordenadas esfèricas

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(0)^2 + (0)^2 + (1)^2} = 1$, $\tan\theta = \frac{y}{x}$ luego $\theta = 0$, $\cos\varphi = \frac{z}{r} = \frac{1}{1} = 1$, entonces $\varphi = 0$ asì el punto en coordenadas esfèricas es $(1,0,0)$

Ejemplo 3 . Pasar el punto $(0,1,0)$ en coordenadas cartesianas a coordenadas esfèricas

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(0)^2 + (1)^2 + (0)^2} = 1$, $\tan\theta = \frac{y}{x}$ luego $\theta = \pi/2$, $\cos\varphi = \frac{0}{r} = 0$, entonces $\varphi = \pi/2$ asì el punto en coordenadas esfèricas es $(1,\pi/2,\pi/2)$.

Ejemplo 4 . Pasar el punto $(0,0,-1)$ en coordenadas cartesianas a coordenadas esfèricas

$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{(0)^2+(0)^2+(-1)^2} = 1$, $\tan\theta = \frac{y}{x}$ luego $\theta = 0$, $\cos\varphi = \frac{z}{r} = \frac{-1}{1} = -1$, entonces $\varphi = \pi$ asì el punto en coordenadas esfèricas es $(1,0,\pi)$.

Ejemplo 5 . Pasar el punto $(1,1,\sqrt{2})$ en coordenadas cartesianas a coordenadas esfèricas

$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{(1)^2+(1)^2+(\sqrt{2})^2} = 2$, $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{1} = 1$ luego $\theta = \pi/4$, $\cos\varphi = \frac{z}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, entonces $\varphi = \pi/4$, asì el punto en coordenadas esfèricas es $(2,\pi/4,\pi/4)$.

Ejemplo 6 . Pasar el punto $(-1,-1,\sqrt{2})$ en coordenadas cartesianas a coordenadas esfèricas

$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(\sqrt{2})^2} = 2$, $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-1}{-1} = 1$ luego $\theta = \pi/4 + \pi = 5\pi/4$, $\cos\varphi = \frac{z}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, entonces $\varphi = \pi/4$, asì el punto en coordenadas esfèricas es $(2,5\pi/4,\pi/4)$.

Ahora mostraremos con ejemplos como es el cambio de variable cuando se aplican coordenadas cilìndricas y coordenadas esfèricas

*Ejemplo*1. Calcular $\iiint\limits_{\varphi(A)} x^2\, dzdydx$, donde $\varphi(A) = \{(x,y,z) \,/\, x^2+y^2+z^2 \leq 9\}$ fig 95

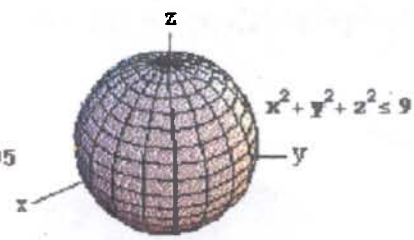


figura 95

Soluciòn . $\iiint\limits_{\varphi(A)} x^2\, dzdydx = \int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{-\sqrt{9-x^2-y^2}}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} x^2\, dzdydx = \int_0^{2\pi}\int_0^{3}\int_{-\sqrt{9-r^2}}^{\sqrt{9-r^2}} (r\cos\theta)^2\, r\, dzdrd\theta$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{3}\int_0^{\pi} (r\cos\theta\sin\varphi)^2\, r^2\sin\varphi\, d\varphi drd\theta = \frac{324}{5}\pi.$$

*Ejemplo*2. Calcular $\iiint\limits_{\varphi(A)} z^2\, dzdydx$, $\varphi(A)$ es el sòlido limitado por el grafico de las superficies $x^2+y^2 = 4$, $z = 2$, $z = -2$ fig 96

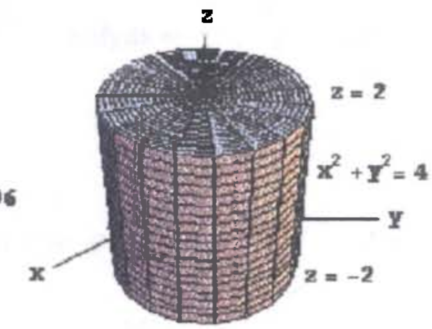


figura 96

Solución . Si $z = 2$ entonces $r = 2/\cos\varphi$. Si $z = -2$ entonces $r = -2/\cos\varphi$. Si $x^2+y^2 = 4$ entonces $(r\cos\theta\sin\varphi)^2 + (r\sin\theta\sin\varphi)^2 = r^2\sin^2\varphi = 4$ luego $r = 2/\sin\varphi$.

$$\iiint_{\varphi(A)} z^2\,dzdydx = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{-2}^{2} z^2\,dzdydx = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{2}\int_{-2}^{2} z^2\,r\,dzdrd\theta = \frac{64}{3}\pi =$$

$$\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\pi/4}\int_{0}^{2/\cos\varphi} (r\cos\varphi)^2\, r^2\sin\varphi\; dr d\varphi d\theta + \int_{0}^{2\pi}\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\int_{0}^{2/\sin\varphi} (r\cos\varphi)^2\, r^2\sin\varphi\; dr\, d\varphi\, d\theta +$$

$$\int_{0}^{2\pi}\int_{3\pi/4}^{\pi}\int_{0}^{-2/\cos\varphi} (r\cos\varphi)^2 r^2\sin\varphi dr d\varphi d\theta = \frac{64}{3}\pi.$$

Ejemplo3. Calcular $\iiint_{\varphi(A)} dzdydx$, donde $\varphi(A) = \{(x,y,z) \,/\, x^2+y^2+z^2 \le 9 \;; z \le 0\}$ fig 97

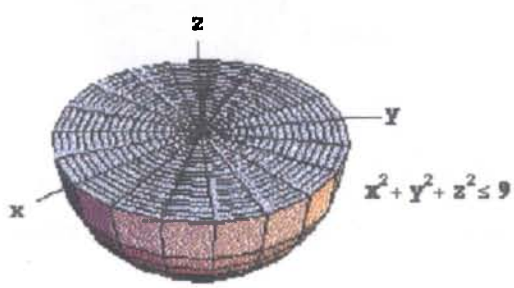


figura 97

Solución . $\iiint_{\varphi(A)} dzdydx = \int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{-\sqrt{9-x^2-y^2}}^{0} dzdydx = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{3}\int_{-\sqrt{9-r^2}}^{0} r\,dzdrd\theta = 18\pi$

$$= \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{3}\int_{\pi/2}^{\pi} r^2\sin\varphi\; d\varphi dr d\theta = 18\pi$$

Ejemplo4. Calcular $\iiint_{\varphi(A)} dzdydx$, donde $\varphi(A) = \{(x,y,z) \,/\, x^2+y^2+z^2 \le 9 \;, x \le 0 \,, y \le 0, z \ge 0\}$

Soluciòn . $\iiint\limits_{\varphi(A)} dzdydx = \int_{-3}^{0}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{0}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} dzdydx = \int_{\pi}^{3\pi/2}\int_{0}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-r^2}} r\, dzdrd\theta = \frac{9}{2}\pi$

$$= \int_{\pi}^{3\pi/2}\int_{0}^{3}\int_{0}^{\pi/2} r^2 \sin\varphi\; d\varphi drd\theta = \frac{9}{2}\pi.$$

Ejemplo 5. Calcular $\iiint\limits_{\varphi(A)} dzdydx$, donde $\varphi(A) = \{(x,y,z) \,/\, x^2+y^2+z^2 \leq 9 \;; x \leq 0 \,, y \geq 0,\}$

Soluciòn . $\iiint\limits_{\varphi(A)} dzdydx = \int_{-3}^{0}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{-\sqrt{9-x^2-y^2}}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} dzdydx$

$$= \int_{\pi/2}^{\pi}\int_{0}^{3}\int_{-\sqrt{9-r^2}}^{\sqrt{9-r^2}} r\, dzdrd\theta = 9\pi = \int_{\pi/2}^{\pi}\int_{0}^{3}\int_{0}^{\pi} r^2 \sin\varphi\; d\varphi drd\theta = 9\pi$$

Ejemplo 6. Calcular $\iiint\limits_{\varphi(A)} z\, dzdydx$, $\varphi(A)$ es el sòlido limitado por el gràfico de las superficies $x^2+y^2 = z$, $z = 4$,fig100

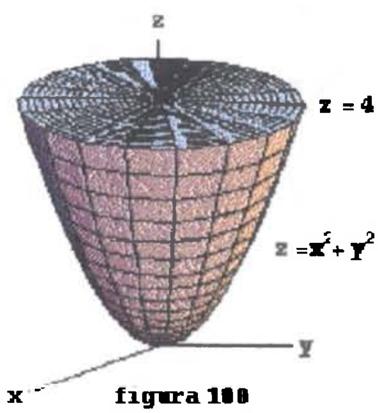


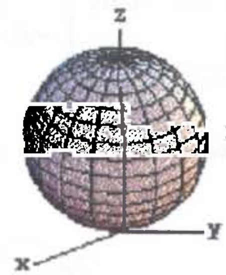
figura 100

Soluciòn .La curva de intersecciòn de las dos superficies es $x^2+y^2 = 4$. $\varphi = ar\tan 1/2$

$z = 4$,entonces $r=4/\cos\varphi$, y $z=x^2+y^2$, $r=\cos\varphi/(\sin\varphi)^2$, luego

$$\iiint\limits_{\varphi(A)} dzdydx = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{4} dzdydx = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{2}\int_{r^2}^{4} r\, dzdrd\theta = 8\pi =$$

$$\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\arctan 1/2}\int_{0}^{4/\cos\varphi} r^2 \sin\varphi drd\varphi d\theta + \int_{0}^{2\pi}\int_{\arctan 1/2}^{\pi/2}\int_{0}^{\cos\varphi/(\sin\varphi)^2} r^2 \sin\varphi drd\varphi d\theta.$$

Ejemplo 6. Calcular $\iiint\limits_{\varphi(A)} dzdydx$, donde $\varphi(A) = \{(x,y,z) \,/\, x^2+y^2+(z-1)^2 \leq 1\}$ fig 101 figura 101  $x^2+y^2+(z-1)^2\le 1$

Soluciòn . Si $x^2+y^2+(z-1)^2 = 1$ entonces $z=1\pm\sqrt{1-x^2-y^2}$.

$$\iiint_{\varphi(A)} dzdydx = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} dzdydx = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{1}\int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{1+\sqrt{1-r^2}} r\,dzdrd\theta = \frac{4}{3}\pi$$

$$= \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{2\cos\varphi} r^2\sin\varphi\,drd\varphi d\theta = \frac{4}{3}\pi = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{1} r^2\sin\varphi\,drd\varphi d\theta$$

Ejemplo 7. Calcular $\iiint_{\varphi(A)} (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\,dzdydx$, donde $\varphi(A) = \{(x,y,z) / 1\le x^2+y^2+z^2 \le 4\}$

Soluciòn . $\iiint_{\varphi(A)} (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\,dzdydx = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{-\sqrt{1-x^2-y^2}} (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}dzdydx+$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}dzdydx+\int_{-2}^{-1}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}dzdydx+$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}dzdydx+\int_{-1}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}dzdydx+$$

$$\int_{1}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}dzdydx = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{4-r^2}}^{-\sqrt{1-r^2}} dzdrd\theta+\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{1}\int_{\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} dzdrd\theta+$$

$$\int_{0}^{2\pi}\int_{1}^{2}\int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} dzdrd\theta = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\pi}\int_{1}^{2} r\,dzdrd\theta = \pi^3$$

Ejemplo 9. Calcular $\iiint_{\varphi(A)} (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\,dzdydx$, donde $\varphi(A)$ està limitado por $x^2+y^2+z^2 = 16$ y $x^2+y^2 = 4$ fuera de èste

$$\iiint_{\varphi(A)} (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\,dzdydx = \int_{-4}^{-2}\int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}}\int_{-\sqrt{16-x^2-y^2}}^{\sqrt{6-x^2-y^2}} (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}dzdydx$$

$$+\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{16-x^2}}^{-\sqrt{4-x^2}}\int_{-\sqrt{16-x^2-y^2}}^{\sqrt{16-x^2-y^2}}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}dzdydx+\int_{-2}^{2}\int_{\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}}\int_{-\sqrt{16-x^2-y^2}}^{\sqrt{16-x^2-y^2}}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}dzdydx+$$

$$\int_{2}^{4}\int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}}\int_{-\sqrt{16-x^2-y^2}}^{\sqrt{16-x^2-y^2}}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}dzdydx=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{-\sqrt{4-r^2}}^{-\sqrt{1-r^2}}dzdrd\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\int_{2/\sin\varphi}^{4}rdrd\varphi d\theta=-\frac{8}{3}\pi\frac{-3\sqrt{3}+4\pi}{(2+\sqrt{3})(-2+\sqrt{3})}.$$

Ejemplo 10. Calcular $\iiint\limits_{\varphi(A)}$ dzdydx , $\varphi(A)$ es el sòlido limitado por el gràfico de la superficie $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ fig 105

figura 105

$x/a=r\cos\theta\sin\varphi$, $y/b=r\sin\theta\sin\varphi$, $z/c=r\cos\varphi$ luego
$\varphi(r,\theta,\varphi)=(arcos\theta\sin\varphi, brsin\theta\sin\varphi, crcos\varphi)$ $J_\varphi=-abcr^2\sin\varphi$ y asì

$$\iiint\limits_{\varphi(A)}dzdydx=\int_{-a}^{a}\int_{(-b/a)\sqrt{a^2-x^2}}^{(b/a)\sqrt{a^2-x^2}}\int_{-c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}}^{c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}}dzdydx=\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}abcr^2\sin\varphi d\varphi d\theta dr=\frac{4}{3}\pi abc.$$

Ejemplo 11. Calcular $\iiint\limits_{\varphi(A)}$ dzdydx , $\varphi(A)$ es el sòlido limitado por el gràfico de las superficies
$x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$, $z=-2$, $z=2$.
Soluciòn .

$$\iiint\limits_{\varphi(A)}dzdydx=\int_0^{2\pi}\int_1^2\int_{-2}^{2}rdzdrd\theta=15\pi=\int_0^{2\pi}\int_0^{\arctan 2/3}\int_0^{3/\cos\varphi}r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta+$$

$$\int_0^{2\pi}\int_{\arctan 2/3}^{3\pi/4}\int_0^{3/\sin\varphi}r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta+\int_0^{2\pi}\int_{3\pi/4}^{\pi}\int_0^{-2/\cos\varphi}r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta-$$

$$\left(\int_0^{2\pi}\int_0^{\arctan 1/3}\int_0^{3/\cos\varphi}r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta+\int_0^{2\pi}\int_{\arctan 1/3}^{\pi-\arctan 1/3}\int_0^{1/\sin\varphi}r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta+\int_0^{2\pi}\int_{\pi-\arctan 1/2}^{\pi}\int_0^{-2/\cos\varphi}r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta\right)$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_{\arctan 1/3}^{\arctan 2/3}\int_{1/\sin\varphi}^{3/\cos\varphi}r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta+\int_0^{2\pi}\int_{\arctan 2/3}^{3\pi/4}\int_{1/\sin\varphi}^{2/\sin\varphi}r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta+\int_0^{2\pi}\int_{3\pi/4}^{\pi-\arctan 1/2}\int_{1/\cos\varphi}^{-2/\cos\varphi}r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta.$$

Ejemplo 11. Calcular $\iiint\limits_{\varphi(A)}$ xyz dzdydx , $\varphi(A)$ es el sòlido limitado por el gràfico de las superficies xy = 1 , xy = 4 , xz = 1 , xz = 9 ,yz = 4 , yz = 9 primer octante .

Soluciòn . u = xy , v = xz , w = yz , luego $1 \leq u \leq 4$, $1 \leq v \leq 9$, $4 \leq w \leq 9$

$uvw = x^2y^2z^2$ entonces xyz $= \sqrt{uvw}$.

$$J_{\varphi^{-1}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x & 0 \\ z & 0 & x \\ 0 & z & y \end{vmatrix} = -2yxz\ y.$$

$$\iiint\limits_{\varphi(A)} xyz\ dzdydx = \int_1^4 \int_1^9 \int_4^9 \tfrac{1}{2} dwdvdu = 60.$$

Ejemplo 12. Calcular $\iiint\limits_{\varphi(A)}$ dzdydx , $\varphi(A)$ es el sòlido limitado por el gràfico de las superficies $x+y+z = 0,\ x+y-z = 0,\ x-y-z = 0,\ 2x-z = 1.$

Soluciòn . u $= x+y+z$, v $= x+y-z$, w = $x-y-z$, *entonces* u = 0 , v = 0, w = 0 y 2x-z = 1 ,se transforma en

$u + w - \frac{1}{2}(u-v) = 1$ (ya que u+w = 2x , u-v = 2z luego z = $\frac{u-v}{2}$) y esto implica que u+v+2w = 2 y asì

$$\iiint\limits_{\varphi(A)} dzdydx = \int_0^2 \int_0^{2-u} \int_0^{1-(\frac{u+v}{2})} \tfrac{1}{4} dwdvdu = \tfrac{1}{6}$$

Ejercicios .

Colocar lìmites en la integral $\iiint\limits_{\varphi(A)} z$ dzdydx sin cambio de variable ,en cilindricas y en esfèricas

1.$\varphi(A)$ limitado por las gràficas de las superficies $z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)$, z = h $\geq$ 0

2. $\varphi(A)$ limitado por las gràficas de las superficies z = $-\sqrt{x^2+y^2}$, z = -1 .

3.$\varphi(A)$ limitado por las gràficas de las superficies z = $\sqrt{4-x^2-y^2}$, z = 0 , $x^2+y^2 = 1$

4.$\varphi(A)$ limitado por las gràficas de las superficies z = 4-$\sqrt{x^2+y^2}$, z = 1.

5.$\varphi(A)$ limitado por las gràficas de las superficies $x^2+y^2 - 4,\ z = 0,\ x^2+y^2 = z$

Aplicaciones.

1..Area entre curvas.

Recordemos que si f(x)-g(x) $\geq$ 0 , entonces $\int_a^b (f(x) - g(x))dx$,representa el àrea encerrada por y = f(x) , y = g(x) $x = a$, x = b y el eje x fig 110

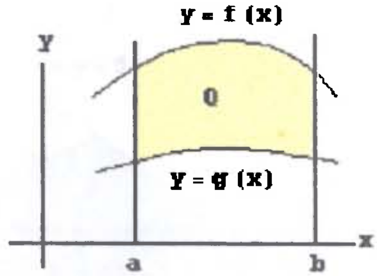


figura 110

pero $\int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} dydx = \iint_Q dydx$ asì el area de la region Q $= \iint_Q dydx$

1. Hallar el àrea limitada por el gràfico de $y^2 = 1 - x,\ 2y = x + 2$ *fig* 111

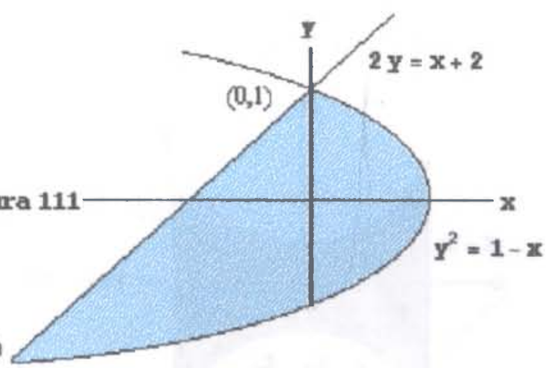


figura 111

Los puntos de intersecciòn de las curcas es $(0,1)$ y $(-8,-3)$ luego

$$A(Q) = \iint_Q dydx = \int_{-8}^{0} \int_{-\sqrt{1-x}}^{(x+2)/2} \mathrm{dydx} + \int_{0}^{1} \int_{-\sqrt{1-x}}^{\sqrt{1-x}} \mathrm{dydx} = \int_{-3}^{1} \int_{2y-2}^{1-y^2} \mathrm{dxdy} = \tfrac{32}{3}$$

2. Hallar el àrea limitada por los gràficos de $y^2 = 2x - 2$, x+y =5. fig 112

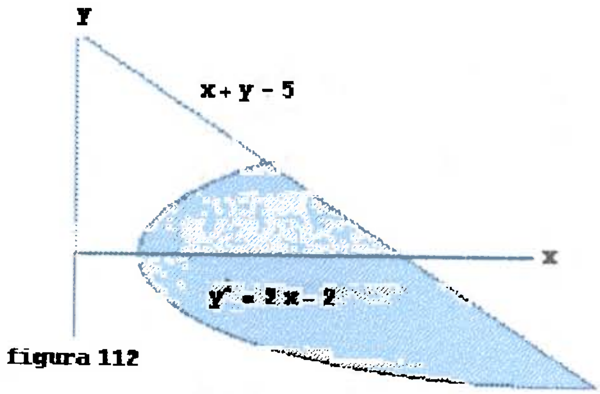


figura 112

Los puntos de intersecciòn son $(3,2)$ y $(9,-4)$, despeje y de x+y =5 y reemplàcelo en $y^2 = 2x - 2$.

$$A(Q) = \iint_Q dydx = \int_{-4}^{2}\int_{\frac{y^2+2}{2}}^{5-y} \mathrm{dxdy} = \int_{1}^{3}\int_{-\sqrt{2x-2}}^{\sqrt{2x-2}} \mathrm{dydx} + \int_{3}^{9}\int_{-\sqrt{2x-2}}^{5-x} \mathrm{dydx} = 18$$

3. Hallar el àrea limitada por los gràficos de $y^2 - x^2 = 1$, $x = \pm 2$,*fig* 113

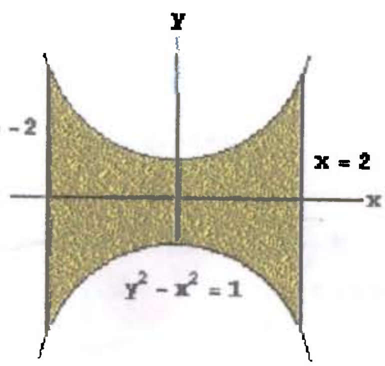


figura 113

Los puntos de intersecciòn son $(2,\pm\sqrt{5})$, $(-2,\pm\sqrt{5})$, luego

$$A(Q) = \iint_Q dydx = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{x^2+1}}^{\sqrt{x^2+1}} \mathrm{dydx} = \int_{-1}^{1}\int_{-2}^{2} \mathrm{dxdy} + \int_{-\sqrt{5}}^{-1}\int_{-2}^{-\sqrt{y^2-1}} \mathrm{dxdy}$$

$$+ \int_{-\sqrt{5}}^{-1}\int_{\sqrt{y^2-1}}^{2} \mathrm{dxdy} + \int_{1}^{\sqrt{5}}\int_{-2}^{-\sqrt{y^2-1}} \mathrm{dxdy} + \int_{1}^{\sqrt{5}}\int_{\sqrt{y^2-1}}^{2} \mathrm{dxdy}.$$

Ejemplo 4 . Hallar el area limitada por el gràfico de $|x| + |y| \leq 4$. fig 114

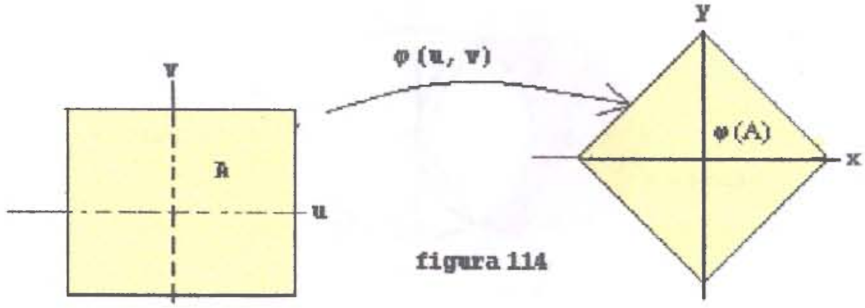


figura 114

Sea u=x+y entonces u =4 y u=-4 y v = x-y entonces v =9 y v=-4 ,$x = \frac{u}{2} + \frac{v}{2}$, $y = \frac{u}{2} - \frac{v}{2}$,

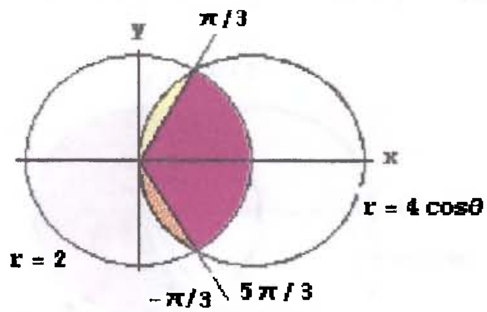
luego

$A = [-4,4] \times [-4,4]$, $J_\varphi = -\frac{1}{2}$ y $f(\varphi(u,v)) = f(\frac{u}{2} + \frac{v}{2}, \frac{u}{2} - \frac{v}{2}) = 1$ *entonces*

$$\iint\limits_{\varphi(A)} dxdy = \int_{-4}^{0}\int_{-4-x}^{4+x} dydx + \int_{0}^{4}\int_{x-4}^{4-x} dydx = \int_{-4}^{4}\int_{-4}^{4} \left|-\tfrac{1}{2}\right| dudv = \tfrac{1}{2}\int_{-4}^{4}\int_{-4}^{4} dudv = 32$$

Ejemplo 5 . Hallar el area limitada por los gràficos de $x^2+y^2 = 4$, $x^2+y^2 = 4x$ (comun) fig 115

figura 115



Los puntos de intersecciòn son $(1, \sqrt{3})$ y $(1, -\sqrt{3})$, que se obtienen igualando las curvas

De $x^2+y^2 = 4$ se tiene que $y = \pm\sqrt{4-x^2}$, y que $x = \pm\sqrt{4-y^2}$. $x^2+y^2 = 4x$ equivale a $(x-2)^2+y^2 = 4$ y De aquì $x = 2 \pm \sqrt{4-y^2}$ y $y = \pm\sqrt{4x-x^2}$ luego

$$A(Q) = \iint\limits_{Q} dydx = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dxdy = \int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} dydx + \int_{1}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dydx = -2\sqrt{3} + \tfrac{8}{3}\pi$$

$$= \int_{-\pi/3}^{\pi/3}\int_{0}^{2} rdrd\theta + \int_{\pi/3}^{\pi/2}\int_{0}^{4\cos\theta} rdrd\theta + \int_{3\pi/2}^{5\pi/3}\int_{0}^{4\cos\theta} rdrd\theta = -2\sqrt{3} + \tfrac{8}{3}\pi = 2\left(\int_{0}^{\pi/3}\int_{0}^{2} rdrd\theta + \int_{\pi/3}^{\pi/2}\int_{0}^{4\cos\theta} rdrd\theta\right)$$

Ejemplo 5 . Hallar el area limitada por los gràficos de $x^2+y^2 = 4$, $x^2+y^2 = 4x$ (interior a $x^2+y^2 = 4$ y exterior a $x^2+y^2 = 4x$) fig 116

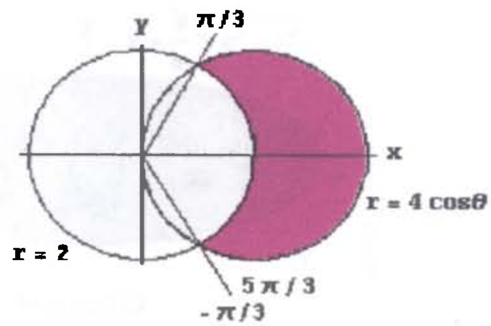


figura 116

$$A(Q) = \iint_Q dydx = \int_1^2 \int_{\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} dydx + \int_1^2 \int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{-\sqrt{4-x^2}} dydx + \int_2^4 \int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} dydx = \tfrac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3} =$$

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{\sqrt{4-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}} dxdy + \int_{-2}^{-\sqrt{3}} \int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}} dxdy + \int_{\sqrt{3}}^{2} \int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}} dxdy = \tfrac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3}$$

$$= \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \int_2^{4\cos\theta} rdrd\theta = \int_0^{\pi/3} \int_2^{4\cos\theta} rdrd\theta + \int_{5\pi/3}^{2\pi} \int_2^{4\cos\theta} rdrd\theta = \tfrac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3}$$

Ejemplo 5 . Hallar el area limitada por los gràficos de $x^2+y^2 = 4$, $x^2+y^2 = 4x$ (interior a $x^2+y^2 = 4$ y exterior a $x^2+y^2 = 4x$) fig 117

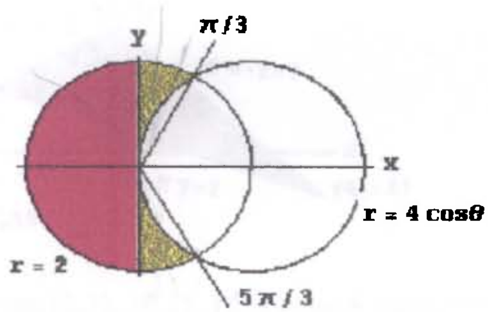


figura 116

$$A(Q) = \iint_Q dydx = \int_{-2}^{0} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dydx + \int_0^1 \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dydx + \int_0^1 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{4x-x^2}} dydx = \tfrac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3}$$

$$= \int_{\pi/3}^{\pi/2} \int_{4\cos\theta}^{2} rdrd\theta + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_0^2 rdrd\theta + \int_{3\pi/2}^{5\pi/3} \int_{4\cos\theta}^{2} rdrd\theta = \tfrac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3} \ .$$

Ejemplo 6 . Hallar el area limitada por el gràfico de $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ fig 118

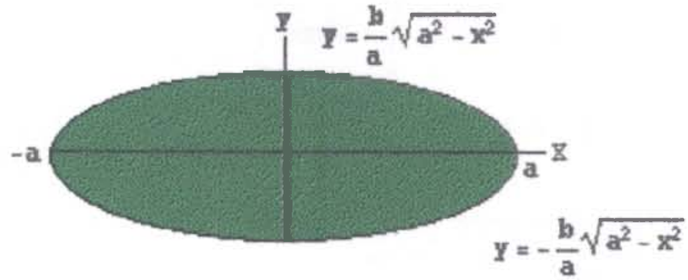


figura 118

Soluciòn . x=arcosθ y =brsinθ ,$\varphi(r,\theta) = (x,y) = (ar\cos\theta, br\sin\theta)$

$$J_\varphi = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ bsen\theta & rb\cos\theta \end{vmatrix} = abr.$$

$$A(Q) = \iint_Q dydx = \int_{-a}^{a} \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dydx = \int_0^{2\pi} \int_0^1 abrdrd\theta = \pi ab.$$

Ejemplo .Hallar el àrea encerrada por el gràfico de x+2y =2 , y-x =1 , 2x+y = 7 fig 119

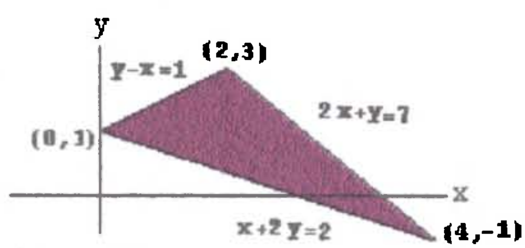


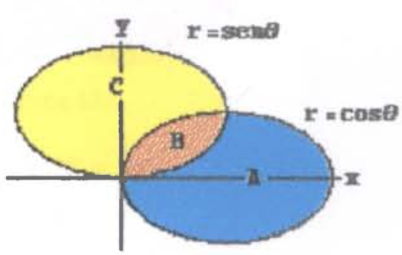
figura 119

Soluciòn . Los puntos de intersecciòn son (2,3) , (0,1) , (4,-1) que se obtienen igualando las curvas luego

$$A(Q) = \iint_Q dydx = \int_0^2 \int_{\frac{2-x}{2}}^{1+x} dydx + \int_2^4 \int_{\frac{2-x}{2}}^{7-2x} dydx = 6$$

Ejemplo .Mostrar que el àrea encerrada por el gràfico de $x^2+y^2 = x$, $x^2+y^2 = y$ viene dado por fig 120

figura 120



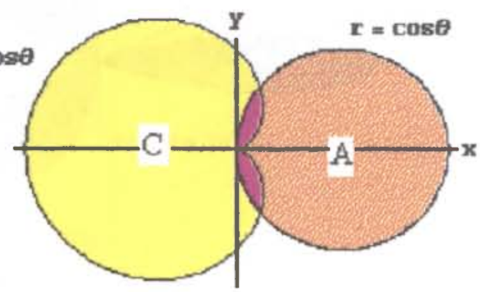
$$\text{Area(A)} = \iint_Q dydx = \iint_{Q_1} rdrd\theta = \int_{-\pi/2}^{0}\int_{0}^{\cos\theta} \text{rdrd}\theta + \int_{0}^{\pi/4}\int_{\sin\theta}^{\cos\theta} \text{rdrd}\theta = \tfrac{1}{8}\pi + \tfrac{1}{4}.$$

$$\text{Area(B)} = \iint_Q dydx = \iint_{Q_1} rdrd\theta = \int_{0}^{\pi/4}\int_{0}^{\sin\theta} \text{rdrd}\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_{0}^{\cos\theta} \text{rdrd}\theta = \tfrac{1}{8}\pi - \tfrac{1}{4}$$

$$.\text{Area(C)} = \iint_Q dydx = \iint_{Q_1} rdrd\theta = \int_{\pi/2}^{\pi}\int_{0}^{\sin\theta} \text{rdrd}\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_{\cos\theta}^{\sin\theta} \text{rdrd}\theta = \tfrac{1}{8}\pi + \tfrac{1}{4}.$$

Ejemplo .Mostrar que el àrea encerrada por el gràfico de $r = \cos\theta$ y $r = 1\text{-}\cos\theta$ viene dado por fig121

figura 121



$$\text{Area(A)} = \iint_Q dydx = \iint_{Q_1} rdrd\theta = \int_{-\pi/3}^{\pi/3}\int_{1-\cos\theta}^{\cos\theta} \text{rdrd}\theta = -\tfrac{1}{3}\pi + \sqrt{3}$$

$$\text{Area(B)} = \iint_Q dydx = \iint_{Q_1} rdrd\theta = 2\left(\int_{0}^{\pi/3}\int_{0}^{1-\cos\theta} \text{rdrd}\theta + \int_{\pi/3}^{\pi/2}\int_{0}^{\cos\theta} \text{rdrd}\theta\right) = \tfrac{7}{12}\pi - \sqrt{3}.$$

$$\text{Area(C)} = \iint_Q dydx = \iint_{Q_1} rdrd\theta = \int_{\pi/3}^{\pi/2}\int_{\cos\theta}^{1-\cos\theta} \text{rdrd}\theta + \int_{\pi/2}^{3\pi/2}\int_{0}^{1-\cos\theta} \text{rdrd}\theta +$$

$$\int_{3\pi/2}^{5\pi/2}\int_{\cos\theta}^{1-\cos\theta} \text{rdrd}\theta = \tfrac{4}{3}\pi - 1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Ejemplo .Mostrar que el àrea encerrada por el gràfico de $r = 1 + \sin\theta$ viene dado por fig 122

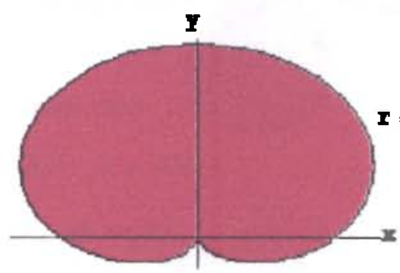


figura 122

$$\text{Area} = \iint_Q dydx = \iint_{Q_1} rdrd\theta = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{1+\sin\theta} \text{rdrd}\theta = \tfrac{3}{2}\pi$$

Ejemplo .Mostrar que el àrea encerrada por el gràfico de $r^2 = \sin 2\theta$ viene dado por fig 122