

Informe de Práctica:

Ruta de Apoyo Pedagógico para la Enseñanza de Geometría y Trigonometría, en el curso ‘Matemáticas Básicas’ de la Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín

Way Supporting Education for the Teaching Geometry and Trigonometry, in the course ‘Basic Mathematics’ at the Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín.

por

Olmar Gómez

Trabajo presentado como requisito parcial para optar el título de

Magíster en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Directora: Olga Patricia Salazar Díaz



Universidad Nacional de Colombia - Sede Medellín
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas

Medellín, 2011

índice

Resumen	vii
Introducción	viii
1 Planteamiento del Problema	1
1.1 Justificación	1
1.2 Caracterización de la población	2
1.3 Descripción del problema	4
1.4 Formulación del problema	4
2 Objetivos	5
2.1 Objetivos generales	5
2.2 Objetivos específicos	5
3 Diseño Metodológico	6
3.1 Planificación	6
3.2 Método de la propuesta	6
3.3 Instrumentos de recolección de información	7
3.4 Población y muestra	7
4 Marco Teórico	8
4.1 Teoría de las “Situaciones Didácticas”	8
4.2 Orientaciones curriculares en matemáticas	9
4.2.1 ¿Cómo se aprende Geometría?	10
5 Análisis de Resultados	12
5.1 Resultados: Geometría	12
5.1.1 Seguimiento y evaluación: Geometría	13
5.1.2 Observaciones y autoevaluación: Geometría	20
5.2 Resultados: Trigonometría	21
5.2.1 Seguimiento y evaluación: Trigonometría	22
5.2.2 Observaciones y autoevaluación: Trigonometría	27
5.3 Generalidades en los resultados	30
5.4 Conclusiones y recomendaciones	37
5.4.1 Fortalezas en el proceso	38

5.4.2	Dificultades en el proceso	39
6	Propuesta Metodológica	40
6.1	Objetivos	40
6.1.1	Objetivos generales de aprendizaje	40
6.1.2	Objetivos específicos: Geometría Plana	40
6.1.3	Objetivos específicos: Geometría Espacial	40
6.1.4	Objetivos específicos: Trigonometría	41
6.2	Programa de estudio: Geometría y Trigonometría	41
6.2.1	Geometría plana	41
6.2.2	Geometría espacial	42
6.2.3	Trigonometría	42
6.3	Red conceptual	43
6.4	Competencias a desarrollar	44
6.5	Estrategias generales	44
6.5.1	Procedimientos: Geometría Plana	45
6.5.2	Procedimientos: Geometría Espacial	45
6.5.3	Procedimientos: Trigonometría	45
6.6	Medios y mediadores	46
6.7	Evaluación	46
6.8	Matemática formal y guías para el estudiante	47
6.8.1	Conceptos básicos: Geometría Plana	48
6.8.1.1	Objetivo de aprendizaje	48
6.8.1.2	Matemática formal	48
6.8.1.2.1	Medida de ángulos	50
6.8.1.2.2	Clases de ángulos	50
6.8.1.2.3	Triángulos	52
6.8.1.2.4	Propiedades de los triángulos	53
6.8.1.2.5	Clasificación de triángulos	54
6.8.1.2.6	Rectas y puntos notables en el triángulo	54
6.8.1.3	Ejercicios y problemas para resolver en clase	55
6.8.1.4	Ejercicios y problemas de estudio extraclase	56
6.8.2	Semejanza y congruencia de triángulos	57
6.8.2.1	Objetivo de aprendizaje	57
6.8.2.2	Matemática formal	57
6.8.2.2.1	Congruencia de triángulos	57
6.8.2.2.2	Criterios de congruencia	57
6.8.2.2.3	Relaciones entre algunos triángulos	58
6.8.2.2.4	Semejanza de triángulos	59
6.8.2.2.5	Teorema de Thales	59
6.8.2.2.6	Criterios de semejanza	60
6.8.2.3	Ejercicios y problemas para resolver en clase	61
6.8.2.4	Ejercicios y problemas de estudio extraclase	61
6.8.3	áreas y perímetros	63
6.8.3.1	Objetivo de aprendizaje	63

6.8.3.1.1	Matemática formal	63
6.8.3.2	Cuadriláteros	64
6.8.3.2.1	Perímetro de un polígono	65
6.8.3.2.2	área de un polígono	65
6.8.3.2.3	Circunferencia y círculo	65
6.8.3.2.4	Perímetro y área de algunas figuras planas	66
6.8.3.3	Ejercicios y problemas para resolver en clase	67
6.8.3.4	Ejercicios y problemas de estudio extraclase	68
6.8.4	Volumen y área superficial de sólidos	70
6.8.4.1	Objetivo de aprendizaje	70
6.8.4.2	Matemática formal	70
6.8.4.2.1	Volumen y área superficial de algunos sólidos	71
6.8.4.3	Ejercicios y problemas para resolver en clase	73
6.8.4.4	Ejercicios y problemas de estudio extraclase	74
6.8.5	Trigonometría: ángulos	76
6.8.5.1	Objetivo de aprendizaje	76
6.8.5.2	Matemática formal	76
6.8.5.2.1	ángulos	76
6.8.5.2.2	Medida de ángulos	77
6.8.5.2.3	ángulos coterminales	77
6.8.5.2.4	Funciones trigonométricas de ángulos	78
6.8.5.2.5	ángulo de referencia	80
6.8.5.2.6	Aplicación en área de un triángulo	81
6.8.5.3	Ejercicios y problemas para resolver en clase	82
6.8.5.4	Ejercicios y problemas de estudio extraclase	82
6.8.6	Aplicaciones de la trigonometría en triángulos rectángulos	84
6.8.6.1	Objetivo de aprendizaje	84
6.8.6.2	Matemática formal	84
6.8.6.2.1	Teorema de Pitágoras	84
6.8.6.2.2	Ley del seno y ley del coseno	86
6.8.6.3	Ejercicios y problemas para resolver en clase	90
6.8.6.4	Ejercicios y problemas de estudio extraclase	90
6.8.7	Funciones trigonométricas de números reales	92
6.8.7.1	Objetivo de aprendizaje	92
6.8.7.2	Matemática formal	92
6.8.7.2.1	Circunferencia unitaria	92
6.8.7.2.2	Función periódica	92
6.8.7.2.3	Funciones trigonométricas de números reales	92
6.8.7.2.4	Función seno	93
6.8.7.2.5	Función coseno	95
6.8.7.2.6	Función tangente	95
6.8.7.2.7	Gráficas de las otras funciones trigonométricas	97
6.8.7.3	Ejercicios y problemas para resolver en clase	98
6.8.7.4	Ejercicios y problemas de estudio extraclase	100
6.8.8	Identidades trigonométricas	101

6.8.8.1	Objetivo de aprendizaje	101
6.8.8.2	Matemática formal	101
6.8.8.2.1	Identidades trigonométricas fundamentales	102
6.8.8.2.2	Simplificación de expresiones trigonométricas	103
6.8.8.2.3	Demostración de identidades trigonométricas	103
6.8.8.2.4	¿Cómo probar que una ecuación es una Identidad?	104
6.8.8.2.5	Otras identidades trigonométricas importantes	105
6.8.8.3	Ejercicios y problemas para resolver en clase	108
6.8.8.4	Ejercicios y problemas de estudio extraclase	108
6.8.9	Ecuaciones trigonométricas	110
6.8.9.1	Objetivo de aprendizaje	110
6.8.9.2	Matemática formal	110
6.8.9.3	Ejercicios y problemas para resolver en clase	114
6.8.9.4	Ejercicios y problemas de estudio extraclase	114
A	Programa: Matemáticas Básicas	115
B	Encuesta Aplicada	120
B.1	Datos de identificación	120
B.2	Evaluación del curso	121
B.3	Autoevaluación	123
B.4	Evaluación del docente	126
B.5	Sugerencias y recomendaciones	126
C	Tabla de Seguimiento	127
	Bibliografía	128

índice de figuras

5.1	Temáticas abordadas en Geometría	13
5.2	Problema 'área y perímetro'	14
5.3	área y perímetro de figuras circulares	15
5.4	Problema semejanza de triángulos	16
5.5	Semejanza de triángulos	16
5.6	Problema 'volumen y área superficial'	17
5.7	Volumen de los sólidos	18
5.8	área Superficial	19
5.9	Resultados en Geometría vs. Asistencia	19
5.10	Geometría Plana: áreas y perímetros	20
5.11	Problemas de aplicación	21
5.12	ángulos y ley del coseno	23
5.13	Problema: 'ángulos y ley del coseno'	23
5.14	Ley del seno	24
5.15	Problema 'ley del coseno'	25
5.16	Problema: 'ley del coseno'	25
5.17	Identidades trigonométricas	26
5.18	Asistencia vs. Trigonometría	27
5.19	Relaciones trigonométricas en triángulo rectángulo	27
5.20	Funciones trigonométricas	28
5.21	Gráficas de funciones trigonométricas	29
5.22	Identidades trigonométricas	29
5.23	Ecuaciones trigonométricas	30
5.24	Boxplot: Geometría y Trigonometría	31
5.25	Motivación en las clases	32
5.26	Importancia del curso y nivel de satisfacción	33
5.27	Lenguaje de los libros de texto	34
5.28	Libros de texto como herramienta de estudio	35
5.29	Búsqueda de apoyo externo	35
5.30	Dedicación extraclase	36
5.31	Horas semanales en estudio independiente	36
5.32	Uso de las asesorías	37
6.1	Red conceptual: Geometría y Trigonometría	43

índice de tablas

1.1	Relación de edad de los estudiantes	2
1.2	Institución educativa de donde egresó	2
1.3	Año de graduación en el colegio	3
1.4	Programas académicos	3
5.1	Autoevaluación del proceso en el curso	31
5.2	Relación de edad de los estudiantes	33

Resumen

En este informe de práctica se estudian las fortalezas y debilidades de los estudiantes del curso “Matemáticas Básicas” en Geometría y Trigonometría, haciendo un análisis de la información recolectada en un grupo que cursó el primer semestre en el año 2011. En éste se presentan los registros de notas, una encuesta que valora aspectos importantes de las impresiones que tienen los estudiantes frente a su aprendizaje y a los recursos que se les ofrecieron en todo el semestre. A partir de ello, se propone una metodología que explica cómo dirigir la enseñanza y la evaluación en Geometría y Trigonometría, y además se diseñan guías de trabajo, tanto para estudiantes como para docentes, que recogen una serie de ejercicios que permiten fortalecer las falencias encontradas.

Abstract

In this report of practice studied strengths and weaknesses of the students of course basic mathematics in geometry and trigonometry making an analysis of the summary information in the group of saw in the first half of year 2011. In this analysis present the records of note, one question that values important aspects of the ideas that have the students about their learning and the resources offered throughout the semester. From the report propose a methodology for explain how to lead the education (teaching) and the assessment in geometry and trigonometry. Also design work guides for students and teachers that include some exercises to reinforce the weaknesses that were found.

Introducción

La Universidad Nacional de Colombia, fiel a su misión de fomentar el acceso con equidad al sistema educativo, formando profesionales competentes y socialmente responsables, decide incorporar en sus currículos el curso *Matemáticas Básicas*, el cual se ofrece a estudiantes que ingresan al primer semestre de la universidad y que no obtuvieron calificaciones altas en su examen de admisión. Debido a que los programas ofrecidos por la universidad requieren estudiantes capaces de procesar datos numéricos y usar un lenguaje matemático adecuado, tal que les posibilite adquirir las nociones de Cálculo Diferencial e Integral, además de otras áreas de la matemática necesarias para la formación profesional, crea el curso nivelatorio que impacte en los resultados y en la deserción por deficiencia académica.

Las dificultades y fortalezas que surgieron en el curso *Matemáticas Básicas* con relación al aprendizaje deben contribuir al cambio de visión de los profesores y estudiantes con respecto a la forma como se aprende y enseña ese conocimiento. A partir de las clases los estudiantes se hicieron más conscientes de la complejidad de los objetos matemáticos, principalmente en la capacidad de tomar distintas expresiones y significados en múltiples sistemas de representación (simbólica, gráfica o verbal), y en cuanto a su aplicabilidad e interacción dinámica con otros conceptos matemáticos. Como por ejemplo en los estudios de Trigonometría y Geometría, los cuales permiten resolver una gran cantidad de situaciones del mundo real, resultando fundamental interactuar con los distintos conceptos para aplicarlos en su solución.

En este sentido, se crea la propuesta para enseñar Geometría y Trigonometría, partiendo de las dificultades y fortalezas que muestran los estudiantes matriculados en el primer semestre del año 2011, que hicieron parte del grupo 15 de *Matemáticas Básicas*. Se hace un análisis de los resultados y a partir de ello se crea una propuesta metodológica, que guíe el proceso tanto para estudiantes como para docentes.

Como se expresa anteriormente, la propuesta está encaminada a desarrollar contenidos matemáticos básicos, específicamente de geometría y trigonometría. Se busca proveer a los estudiantes de herramientas indispensables para enfrentar los desafíos que se le planteen en el curso, y les posibilite iniciar los cursos de mayor nivel como álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica, Cálculo, Ecuaciones Diferenciales, Estadística y otras áreas del conocimiento.

Capítulo 1

Planteamiento del Problema

1.1 Justificación

Consciente de la realidad nacional en cuanto a la enseñanza de las matemáticas y al bajo rendimiento que se obtiene en esta asignatura, principalmente en los exámenes de bachillerato y en los cursos introductorios de las universidades, la Universidad Nacional de Colombia opta por mejorar la calidad y los resultados que obtienen los estudiantes en los primeros cursos de matemáticas que hacen parte de los distintos programas académicos. La estrategia que implementa es ofrecer un curso nivelatorio a los estudiantes de primer semestre que pasan el examen de admisión, pero que no obtienen puntajes satisfactorios en el área. Este curso, llamado *Matemáticas Básicas*, es ofrecido por la 'Escuela de Matemáticas' con una trayectoria de dos años de ejecución en la Sede Medellín, abordando temas de precálculo y haciendo una introducción a las matemáticas universitarias (Ver Anexo A).

Ahora bien, en el primer semestre del año 2011 se hace seguimiento al grupo 15 de *Matemáticas Básicas*, observando las dificultades y fortalezas que tienen los estudiantes frente a los temas tratados, específicamente en el área de Geometría¹ y Trigonometría². En este sentido, se registran las opiniones de los estudiantes frente a aspectos generales que influyen directamente en el aprendizaje, tales como materiales utilizados, libros de texto, acompañamiento de la universidad, entre otros; y recoge la autoevaluación que hace cada uno frente a los conocimientos específicos adquiridos durante el semestre, y a partir de ello, construir una metodología adecuada para la enseñanza de la geometría y la trigonometría, disminuyendo la deficiencia académica y la deserción por motivos académicos.

La información para este estudio fue recopilada por medio de un cuestionario aplicado a los estudiantes participantes (Ver Anexo B), y a partir de una matriz de seguimiento (Ver Anexo 3) donde se registraron los resultados obtenidos en las pruebas escritas elaboradas en el curso, pretendiendo dar a conocer la percepción de los estudiantes en cuanto a la organización curricular, y diagnosticar las fortalezas y debilidades con respecto a los temas.

¹Se abordan conceptos básicos de geometría plana y del espacio, como es el caso de triángulos, áreas, perímetros, clasificación de cuerpos, volumen, área superficial, entre otros.

²Trigonometría plana, estudiando las relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo.

1.2 Caracterización de la población

Se recogió información sobre los estudiantes del curso *Matemáticas Básicas* de la Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín (Unalmed), los cuales fueron matriculados para el primer semestre del año 2011 y ubicados en el grupo 15. Al inicio se matricularon 36 estudiantes, pero 2 de ellos desertaron mientras se desarrollaba el curso, los cuales no fueron tenidos en cuenta en la medida que se analizan fortalezas y debilidades en el aprendizaje de la Geometría y Trigonometría. Por otro lado, se contó con un estudiante asistente matriculado en otro grupo. Por lo tanto, se analiza la información de 35 estudiantes de primer semestre.

Los 35 estudiantes indagados tienen edades entre 16 y 22 años, siendo mayor la concentración de los estudiantes que tienen 17 años, representados por el 54% del total del grupo, tal como se registra en la Tabla 1.1. Se puede observar que el grupo de estudiantes es bastante joven y su experiencia académica es similar en cuanto al tiempo dedicado a la educación formal.

Años	Edad				
	16	17	18	20	22
<i>N°. estudiantes</i>	3	19	10	2	1

Tabla 1.1: Relación de edad de los estudiantes

Por otro lado, se quiso indagar acerca del año de graduación y el carácter de la institución educativa donde hicieron la educación media, de tal forma que se determinara qué tiempo han permanecido sin recibir clases de matemáticas, mirando este factor como aspecto importante al momento de diseñar la estrategia pedagógica para dirigir el curso y posibilitar mejores resultados al final del semestre. Esta información se recopila en las Tablas 1.2 y 1.3:

Carácter de la institución	Sexo	
	<i>Femenino</i>	<i>Masculino</i>
<i>Pública</i>	2	9
<i>Privada</i>	3	21

Tabla 1.2: Institución educativa de donde egresó

En la información registrada en la Tabla 1.2 se evidencia que en su mayoría (60%) son estudiantes hombres egresados de instituciones educativas privadas. El grupo sólo contó con 5 mujeres (14,29%), tres de ellas egresadas de instituciones privadas, y 30 hombres (85,71%).

Año de graduación del colegio				
Año	<i>2006</i>	<i>2007</i>	<i>2009</i>	<i>2010</i>
<i>Nº. estudiantes</i>	1	1	1	32

Tabla 1.3: Año de graduación en el colegio

En la Tabla 1.3 se observa que la mayoría (91.42 %) son estudiantes recién egresados del colegio. Siendo un solo estudiante el que ha estado por 4 años aproximadamente sin realizar estudios superiores, ubicándose como el estudiante que más tiempo ha esperado antes de iniciar sus estudios de formación profesional. Se cuenta con estudiantes que terminaron su bachillerato y continuaron inmediatamente sus estudios universitarios, lo cual deja ver que el grupo ha tenido continuidad en su formación académica y mantiene conocimientos actualizados en el área.

Por otro lado, se verifican los diferentes programas académicos en los cuales están matriculados, donde se observa que son estudiantes de ciencias aplicadas, habiendo mayor concentración en el programa de “Ingeniería Mecánica” (62,85%), y en segundo lugar estaría “Zootecnia” (17,14%): (ver Tabla 1.4).

Programa académico	
Programa	<i>Número de estudiantes</i>
<i>Agronomía</i>	1
<i>Economía</i>	1
<i>Ingeniería Ambiental</i>	1
<i>Ingeniería Biológica</i>	1
<i>Ingeniería de Control</i>	1
<i>Ingeniería de Petróleos</i>	2
<i>Ingeniería Mecánica</i>	22
<i>Zootecnia</i>	6

Tabla 1.4: Programas académicos

Este diagnóstico es importante en la medida que permite crear estrategias metodológicas adecuadas para orientar el aprendizaje de los estudiantes, porque hablamos de un curso dirigido a estudiantes con poca experiencia en el aprendizaje autónomo, y con altas exigencias en cuanto a la diversidad de temas a tratar (ver Anexo A: Programa Académico), creando la necesidad de aprender a realizar lectura de textos matemáticos formales y a conformar grupos de aprendizaje colaborativo por parte de los estudiantes.

1.3 Descripción del problema

Los medios de comunicación hablan de los altos índices de deserción y de los alarmantes datos de ausentismo y bajo rendimiento en los primeros semestres de la universidad. El curso *Matemáticas Básicas* no escapa a estos males que están afectando severamente la educación colombiana. Por otra parte, los estudiantes llegan a la universidad con serias deficiencias en conceptos básicos y fundamentales de matemáticas, lo que conlleva a un alto grado de reprobación en los cursos básicos de dicha asignatura. Cuando se analizan los resultados obtenidos por los estudiantes en el primer curso de 'Matemáticas Básicas' en la Universidad Nacional Sede Medellín, las promociones no suelen superar el 50% a pesar de que estos estudiantes ya han obtenido el título de bachilleres y ganaron el examen de admisión de la universidad.

Teniendo en cuenta que corresponde a la educación matemática la formación intelectual del ser humano de manera que desarrolle su capacidad de razonamiento, la lógica, la criticidad y le ayude a enfrentar los retos de nuestra época relacionados con las ciencias y la tecnología; es que se debe prestar mayor atención a la problemática que ésta presenta, y a las contribuciones que la universidad ofrece a los estudiantes que inician su formación profesional con el curso *Matemáticas Básicas*.

Sin embargo, los resultados que presentan los estudiantes con relación al curso *Matemáticas Básicas* no es el único problema, hay otra serie de falencias que se relacionan directamente con la estructura curricular. Esta materia se ofrece en todas las sedes de la universidad, para aquellos estudiantes que no han obtenido un puntaje alto en la prueba de matemáticas del examen de admisión, pero que aún así han ganado el examen. Por tal motivo, es un curso que se ha estructurado desde la Sede Bogotá y se ha centralizado su estructura curricular, sin contar con las fortalezas y debilidades de los estudiantes. *Matemáticas Básicas* se compone de 29 sesiones de clase, de dos horas cada una, donde se abordan bastantes temas que van desde álgebra, geometría, trigonometría, teoría de números, entre otros. Pese a ser temas de repaso para los estudiantes, la realidad es que ellos no tienen los conocimientos necesarios para abordar todas las temáticas. En este caso se le exige al estudiante un alto trabajo autónomo, para lo cual no están acostumbrados, guiándose por textos que manejan una terminología formal y desde el colegio no se hace esta preparación.

1.4 Formulación del problema

¿Cuáles son las debilidades y fortalezas que tienen los estudiantes del curso *Matemáticas Básicas* de la Universidad Nacional de Colombia sede Medellín en el aprendizaje de Geometría y Trigonometría?

Y a partir de ello ¿Cómo mejorar los procesos académicos y la metodología del curso, de tal forma que los estudiantes puedan adquirir los conocimientos necesarios para comenzar los cursos básicos universitarios relacionados con estas dos áreas?

Capítulo 2

Objetivos

2.1 Objetivos generales

- Conocer las fortalezas y debilidades que presentan los estudiantes para afrontar el curso de *Matemáticas Básicas*, específicamente en las áreas de Geometría y Trigonometría.
- Diseñar una propuesta metodológica, tanto para estudiantes como para docentes, de tal forma que les facilite a los estudiantes una mayor facilidad en su aprendizaje y así obtener mejores resultados.

2.2 Objetivos específicos

- Aplicar una encuesta estructurada para analizar cuál es la impresión que tienen los estudiantes en cuanto al curso y su relación con el aprendizaje de la Geometría y Trigonometría.
- Hacer un seguimiento por tópicos o ejes temáticos, enfocado en Geometría y Trigonometría, durante todo el semestre, para verificar cuáles son las temáticas y procesos matemáticos donde presentan mayor dificultad.
- Construir una propuesta metodológica, basada en los conceptos básicos de Geometría y Trigonometría, y adecuada a las necesidades de los estudiantes, de tal forma que les facilite el acercamiento a textos matemáticos y a su aprendizaje autónomo.

Capítulo 3

Diseño Metodológico

3.1 Planificación

La presente propuesta se desarrollará en cuatro etapas:

- a) La primera es el desarrollo del curso, donde se interactúa con los estudiantes y se recolecta toda la información necesaria correspondiente a sus conocimientos e impresiones frente al área, y se evalúa lo que conocen frente a Geometría y Trigonometría.
- b) La segunda es el diseño, aplicación de los instrumentos de recolección de información y sistematización de los datos (encuesta estructurada a estudiantes, y seguimiento mediante pruebas escritas periódicas).
- c) La tercera etapa consiste en el planteamiento, justificación, descripción, formulación del problema y objetivos de la propuesta; de igual forma la revisión de fuentes bibliográficas y el diseño del marco teórico.
- d) Y por último, cuarta etapa del proceso, consiste en el análisis de la información para sintetizarla en resultados obtenidos, y así construir la propuesta metodológica para la enseñanza de la Geometría y Trigonometría.

3.2 Método de la propuesta

Esta propuesta se efectúa dentro del método descriptivo - cualitativo. Por un lado se presenta como descriptivo en cuanto intenta especificar los conocimientos que poseen los estudiantes o que van adquiriendo durante el desarrollo del curso. Los estudios descriptivos se centran en la recolección de información que muestren un contexto o unos resultados de un hecho [Herdández Sampieri *et al.*, 2000], traducido en esta propuesta como el hecho de detallar cuáles son

las fortalezas o debilidades académicas que poseen los estudiantes que cursan *Matemáticas Básicas*. Por otro lado, es cualitativa en cuanto intenta dar profundidad a los datos a partir de la interpretación, teniendo en cuenta la contextualización del ambiente y los detalles y las experiencias vividas [Herdández Sampieri *et al.*, 2000]. Asimismo, esta propuesta toma como modelo para la sistematización de los resultados la “Investigación Evaluativa”, la cual se ha convertido en una alternativa para evaluar la eficacia de los programas de acciones pedagógicas. El objeto de la investigación evaluativa es medir los resultados de un programa en razón de los objetivos propuestos para el mismo, con el fin de tomar decisiones sobre su proyección y programación para un futuro.

3.3 Instrumentos de recolección de información

Los instrumentos se diseñaron con la finalidad de desarrollar un método de interrogación que permitiera recoger información pertinente y de utilidad mediante preguntas o pruebas que han hecho las personas evaluadas. Se utilizan básicamente dos instrumentos: tabla de seguimiento y evaluación en pruebas escritas y encuesta a los estudiantes del curso *Matemáticas Básicas*:

- **Tabla de seguimiento y evaluación en pruebas escritas:** Permite recolectar los resultados que van obteniendo los estudiantes con relación a los temas que se evalúan en el curso. Se desarrollan siete pruebas escritas del 7% con respecto a la nota final del curso, y cada una aborda de cuatro a seis temas de los que se tratan en las clases. El objetivo de la tabla es recoger cuáles son los conocimientos que van adquiriendo los estudiantes, cuáles tienen mayor dificultad y en qué temáticas tienen mayor fortaleza (Ver Anexo 3).
- **Encuesta a los estudiantes:** De acuerdo con una serie de preguntas organizadas a manera de formulario se logra obtener información acerca de cómo se sintieron los estudiantes durante el desarrollo del curso, relacionado con los temas que se abordaron, cómo consideraron el curso y cuáles son los elementos a tener en cuenta para futura aplicación. La encuesta fue diseñada para ser respondida virtualmente mediante la aplicación “Google Docs”; todas las preguntas del cuestionario son preguntas cerradas. (ver Anexo 2).

3.4 Población y muestra

La población sobre la cual se desarrolló esta propuesta corresponde a la totalidad de estudiantes que hicieron parte del grupo 15 de Matemáticas Básicas del primer semestre del año 2011 (35 estudiantes en total). El curso lo componen 35 estudiantes, en su mayoría admitidos al programa de ingeniería mecánica, con edades entre 16 y 22 años. Del número de estudiantes se tiene un total de 5 mujeres y 30 hombres. Además, 19 estudiantes son graduados en Instituciones privadas y 16 en instituciones públicas.

Para la encuesta, se envió el formulario a todos los estudiantes, tan sólo 30 respondieron las preguntas.

Capítulo 4

Marco Teórico

4.1 Teoría de las “Situaciones Didácticas”

La educación matemática ha atravesado diversas etapas en los últimos años, el desarrollo de la Didáctica de la Matemática como ciencia ha replanteado el trabajo del profesor en el aula. El diseño de situaciones didácticas para promover el estudio de la matemática nos permite intervenir de manera más sistemática en el proceso de aprendizaje.

Esta forma de entender la educación matemática lleva a replantear el diseño de la planeación, es necesario incorporar factores que permitan atender la diversidad en el aula y promover el desarrollo de diferentes competencias que posibiliten la construcción de aprendizajes sólidos que impacten la vida de los estudiantes.

La Teoría de Situaciones Didácticas desarrollada por Brousseau [1986, 2007], constituye una teoría de la enseñanza que busca las condiciones para la generación de los conocimientos matemáticos, bajo la hipótesis de que los mismos no se construyen de manera espontánea. Esta producción supone establecer nuevas relaciones, transformar y reorganizar otras, e implica la validación según las normas y los procedimientos aceptados por la comunidad matemática, tanto de estos conocimientos como de las relaciones y formas de representación que se utilizan [Sadovsky, 2005].

Brousseau (2007) establece como una primera definición de situación didáctica la siguiente: “Una ‘situación’ es un modelo de interacción entre un sujeto y un medio determinado. [...] La situación es, entonces, un entorno del alumno diseñado y manipulado por el docente, que la considera como una herramienta”.

Una definición más rigurosa de situación didáctica es dada por el mismo Brousseau (1982, citado en Galvez, 1994), definiéndola como:

“...Un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr

que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución...” (p. 42).

Según Brousseau, pareciera haber razones para considerar el saber matemático, axiomáticamente presentado, como uno adaptado a la enseñanza: faculta definir los objetos que se estudian, proporciona un medio para organizar las actividades, y permite acumular en un mínimo tiempo un máximo de saberes bastante próximos al saber erudito.

Desde la perspectiva de Brousseau, el trabajo del profesor es inverso al del investigador, produciendo una recontextualización y repersonalización de los conocimientos, para simular una microsociedad científica, para que el alumno, a semejanza del científico, recontextualice y redesperepersonalice su saber, identificando su producción con el saber científico (de forma simulada, desde luego). En otras palabras, el trabajo del alumno es comparable a la actividad del científico: ocuparse de problemas para hacer matemáticas, encontrar buenas soluciones y buenas preguntas a las situaciones propuestas por el profesor. Por su parte, el maestro debe efectuar, no la comunicación de un conocimiento, sino la devolución de un buen problema. En síntesis: la enseñanza es la devolución al alumno de una situación didáctica correcta y el aprendizaje es una adaptación a esta situación.

Surge la noción de “contrato didáctico”, constituido por las reglas de juego y las estrategias de la situación didáctica. Está compuesto, además, por las responsabilidades y las expectativas de los protagonistas en la situación didáctica. En la modelización de Brousseau puede identificarse la influencia de Piaget, pues considera que el alumno aprende de sus experiencias, “el conocimiento existe y tiene sentido para el sujeto cognoscente sólo porque representa una solución óptima en un sistema de restricciones” [Brousseau, 1983].

No obstante, agrega que un medio sin intención didáctica es insuficiente para inducir al alumno a todos los conocimientos culturales que se desea que adquiriera. Para este autor, modelizar una situación de enseñanza consiste en producir un juego específico del saber pretendido, de modo que el conocimiento aparezca en la forma elegida, como la solución o como modo de establecer la estrategia óptima. En este caso el profesor debe poder representar todas las situaciones observadas en clase, establecer su significado, prever sus efectos y valorar su calidad.

4.2 Orientaciones curriculares en matemáticas

Inicialmente la concepción que se tenía del currículo de matemáticas era como un recetario de contenidos. Sin embargo, ahora con las nuevas discusiones que se han dado y a los nuevos constructos teóricos que argumentan otra concepción más compleja, no sólo entra a ser parte el saber matemático como tal, sino que también se tiene en cuenta el componente cultural, político, social, económico e histórico, además de unos nuevos planteamientos interdisciplinarios del proceso educativo.

Galeano (2002) identifica todos estos componentes que intervienen en distintos pasos de la curricularización y configuran la tendencia en la transformación del concepto. Para este autor, al considerar curricularizar como la “traducción del proceso histórico cultural actual y del conocimiento del contexto para interpretarlo con sentido, teniendo en cuenta las prácticas sociales; sino aquellas

que toman significado para la formación de la persona con una direccionalidad, lo aceptado como el “acervo cultural” de una sociedad, lo que debe ser comprendido e interpretado y reconstruido desde la participación”, el currículo como un sistema cuyos componentes están fuertemente interrelacionados, tanto el docente como el investigador poseen un útil marco de referencia, con el cual pueden valorar argumentaciones y reflexiones teóricas sobre él, así como formular e implementar innovaciones y reformas de manera consistente.

Desde el punto de vista de la enseñanza de la geometría y trigonometría la intervención en el aula debe estar orientada hacia el análisis de las propiedades de los espacios bidimensional y tridimensional, como a las figuras y cuerpos geométricos que estos contienen, a la resolución y planteamiento de problemas tanto de las matemáticas como de las otras ciencias, y a la habilidad para comunicar los procesos.

Luego, los sistemas geométricos se entienden como:

“conjunto de procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones a representaciones materiales”. [MEN, 1998].

4.2.1 ¿Cómo se aprende Geometría?

Los Van Hiele, matrimonio holandés que centró sus investigaciones en el estudio del aprendizaje de la geometría y cómo se produce la evolución del razonamiento geométrico, parten de sus experiencias como docentes para proponer un modelo de aprendizaje dividido en cinco niveles de desarrollo, caracterizado por tener una secuencialidad entre los niveles y no existir una relación de dependencia entre el nivel y la edad de una persona. A continuación se abordan brevemente.

- **Nivel 0: Visualización.** Una persona que tenga un pensamiento geométrico a este nivel, reconoce las figuras basándose en las características globales como la posición, el tamaño y la forma; utiliza algunas definiciones, sin comprenderlas. Por ejemplo, identifica cierta figura cuando se encuentra en determinada posición, pero cuando ésta se gira, ya no es reconocida. En este nivel, los razonamientos se hacen sobre las formas.
- **Nivel 1: Análisis.** En este nivel, las personas identifican las partes y algunas propiedades de las figuras geométricas, pero no identifican las propiedades entre los grupos de figuras. Por ejemplo, reconoce las características esenciales de los paralelogramos, pero no reconoce a un cuadrado, rectángulo o rombo como elementos de este tipo de figuras. En este nivel, los individuos razonan sobre las clases de las formas.
- **Nivel 2: Clasificación o deducción informal.** En esta etapa, los estudiantes determinan las figuras por sus propiedades, y se empiezan a encontrar relaciones lógicas entre las diversas clases de figuras geométricas. Por ejemplo, se observa al cuadrado como un caso particular del rombo o el cuadrado como un caso del rectángulo. En este nivel, los razonamientos de los

sujetos son las propiedades de clases de figuras.

- **Nivel 3: Razonamiento deductivo (deducción).** En este nivel, las personas organizan una serie lógica de enunciados que les permite concluir o determinar algunas propiedades y características de los objetos geométricos, aunque no reconocen la necesidad del rigor matemático.
- **Nivel 4: Rigor.** El nivel más alto del pensamiento geométrico es el rigor matemático. En esta etapa, las personas razonan formalmente, haciendo uso del método deductivo. Se espera que las personas que estudien un curso de geometría universitaria razonen a este nivel.

Capítulo 5

Análisis de Resultados

5.1 Resultados: Geometría

La propuesta para la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría en el curso *Matemáticas Básicas* supuso un recorrido metodológico que implicó la planificación, ejecución y evaluación de aspectos fundamentales en la geometría plana y del espacio, necesarios para iniciar los cursos de matemáticas universitarias. A continuación se detallan los temas que se abordan durante las clases (ver Anexo 1):

1. Geometría Plana

- (a) ángulos y triángulos
- (b) Medición de ángulos
- (c) Relaciones entre ángulos
- (d) Clasificación de triángulos
- (e) Rectas y puntos notables en un triángulo
- (f) Congruencia y semejanza de triángulos

2. área y perímetro de figuras planas

- (a) Rectángulo y cuadrado
- (b) Paralelogramo y Trapecio
- (c) Triángulo
- (d) Círculo

3. Geometría espacial

- (a) Volumen y área superficial de sólidos
- (b) Paralelepípedo
- (c) Cilindro circular recto
- (d) Cono circular recto
- (e) Esfera

Básicamente se pueden categorizar en tres tipos las actividades que se realizan en las clases de geometría: conceptualización, resolución de problemas y demostraciones, con las que se espera que los alumnos desarrollen su razonamiento geométrico. Desde este punto de vista, la metodología implementada durante las clases fue partir de la conceptualización y directamente aplicarla a problemas y ejercicios específicos del área, posibilitando el trabajo en equipo y el desarrollo individual por parte de los estudiantes.

5.1.1 Seguimiento y evaluación: Geometría

Las nuevas tendencias sobre enseñanza de la matemática promueven el aprendizaje mediante la resolución de problemas. Comúnmente los estudiantes se enfrentan a situaciones cotidianas que permiten la aplicación de los conceptos formales propios del área, es por ello que resolver problemas se constituye como el mejor medio para enseñar la Geometría [García Peña & López Escudero, 2008]. Sin embargo, en *Matemáticas Básicas* se busca que no sólo se apliquen los conceptos sino que se deduzcan a partir de las demostraciones.

A continuación se presentan los resultados obtenidos por los estudiantes con relación a temas vistos en las clases de Geometría:

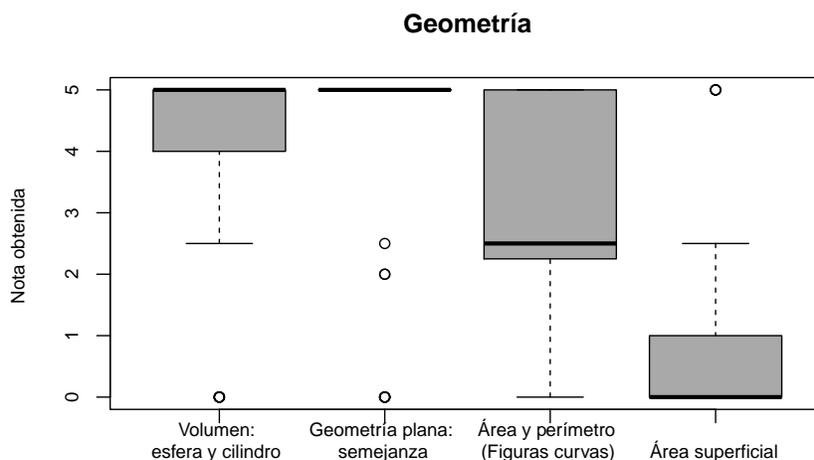


Figura 5.1: Temáticas abordadas en Geometría

Al inicio se optó por la clase expositiva como método didáctico, tratando de generar ambientes de participación de tal forma que se aclararan dudas surgidas a lo largo de las explicaciones. Además, se adiciona un componente individual, variando el planteamiento del problema y la estructura de la pregunta, creando la necesidad de implementar algunos procedimientos y estrategias geométricas, esto se hace sin marginar el trabajo de grupo.

Con relación a las temáticas abordadas, se observa en el gráfico anterior (Ver Figura 5.1) que en el tema “Semejanza de Triángulos” los estudiantes obtuvieron excelentes resultados, obteniendo notas en 5.0, sólo hubo tres casos atípicos que perdieron la prueba, siendo éste el tema mejor aprendido por parte de los estudiantes. En segundo lugar, se encuentra el tema “Volúmenes”, los estudiantes fueron capaces de hallar el volumen de la esfera y el cilindro aplicados a una situación problema, aún así hubo estudiantes que obtuvieron notas deficientes en este aspecto. En tercer lugar, se ubica el tema “áreas y Perímetros”, específicamente para figuras curvas, donde los estudiantes obtienen notas entre 0.0 y 5.0, concentrándose más del 50% por debajo de la nota mínima necesaria para ganar la prueba. En cuanto a “áreas Superficiales”, los estudiantes no fueron capaces de desarrollar esta parte de la prueba.

En este sentido, se abordaron problemas como los que se enuncian a continuación:

Ejemplo 5.1.1 *Todos los arcos con los que se ha trazado esta figura son iguales, pertenecen a circunferencias de radio 6m. Calcule su área y su perímetro.*

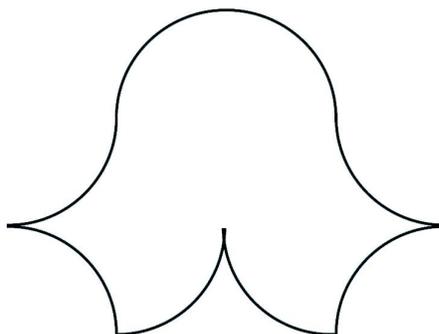


Figura 5.2: Problema ‘área y perímetro’

Para calcular el área del círculo basta con conocer su radio, pero para el resto de figuras circulares, como el sector, el segmento, la corona o el trapecio circular, habrá que conocer otros elementos que ayuden a relacionarlos con el área del círculo, tal como se ve en el **Ejemplo 5.1.1**. La resolución de este tipo de problemas, donde la parte gráfica cobra un valor central en el desarrollo del ejercicio, exigen un buen nivel de observación, destreza en la comprensión de enunciados matemáticos e interpretación gráfica.

Una vez dada la explicación se dejó una serie de ejercicios abordando esta temática para que continuaran con el trabajo extraclase, dándoles bibliografía de tal forma que resolvieran ejercicios con un grado de dificultad cada vez mayor. El desarrollo de habilidades necesarias para resolver problemas de tipo geométrico, implica el manejo conceptual de algunas relaciones y procedimientos geométricos. A continuación se pueden observar los resultados que obtienen los estudiantes frente a esta temática:

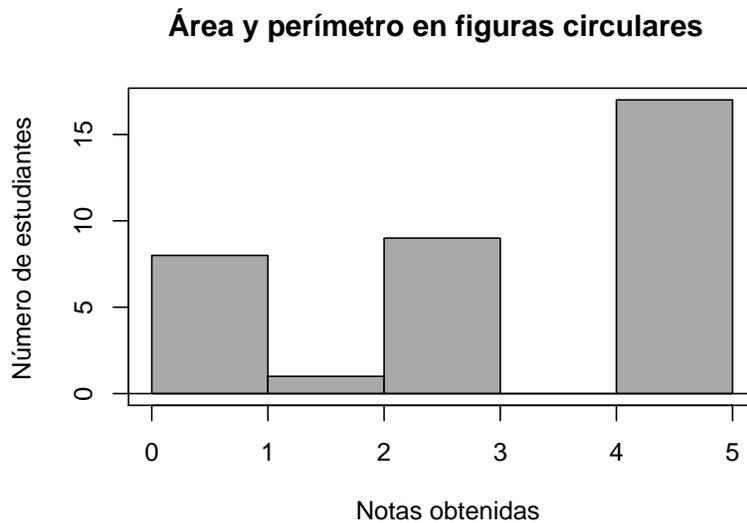


Figura 5.3: área y perímetro de figuras circulares

Como puede apreciarse en la gráfica (ver Figura 5.3), los estudiantes mantuvieron notas distribuidas en niveles bajos y superiores con referencia a “áreas y perímetros en figuras curvas”, estos resultados muestran que aún es un tema que presenta dificultad para conceptualizar, tanto desde el punto de vista de las propiedades como de los procedimientos geométricos. 17 estudiantes obtuvieron notas superiores entre 4.0 y 5.0 (48,57%), mientras que 18 estudiantes (51,43%) obtienen notas por debajo de 3.0. Esto deja ver la dificultad que tienen los estudiantes para visualizar y abstraer relaciones en las formas geométricas, su poca habilidad para conjeturar acerca de las propiedades geométricas en una figura y la deficiencia para extrapolar propiedades de unos objetos a otros.

Ahora bien, para comprender estas falencias en la geometría plana, es importante analizarlos a partir de la teoría de Van Hiele. Desde este punto de vista, el modelo contempla niveles de razonamiento para los cuales se dan los rasgos que presenta un estudiante en cada uno de ellos [García Peña & López Escudero, 2008]. Para el caso de áreas y perímetros de figuras curvas, y para el caso de semejanza de triángulos, es necesario que el estudiante maneje altos niveles de razonamiento, que sea capaz de hacer deducciones lógicas para demostrar propiedades de las figuras, aún así los estudiantes presentan falencias para hacer este tipo de profundizaciones geométricas.

A continuación se presenta un ejemplo acerca de la temática trabajada, y acerca de los ejercicios que los estudiantes desarrollaron en las clases de geometría:

Ejemplo 5.1.2 Sabiendo que \overline{BD} es bisectriz de $\angle ABC$, calcule el valor de x .

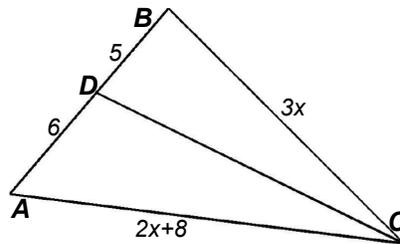


Figura 5.4: Problema semejanza de triángulos

La noción de congruencia de figuras, que suele describirse de manera informal como figuras que tienen el mismo tamaño y la misma forma, y la noción informal de figuras semejantes, como las que tienen la misma forma [Godino & Ruiz, 2002], requieren un nivel de deducción o prueba, llamado, por los Van Hiele, nivel 4 de razonamiento. En este nivel el estudiante es capaz de realizar razonamientos lógicos formales; comprende la estructura axiomática de las matemáticas, y acepta la posibilidad de llegar al mismo resultado desde distintas premisas [García Peña & López Escudero, 2008]. Para el caso anterior es necesario que el estudiante sea capaz de realizar deducciones para hallar x , y así la medida de los lados.

Geometría plana: semejanza de triángulos

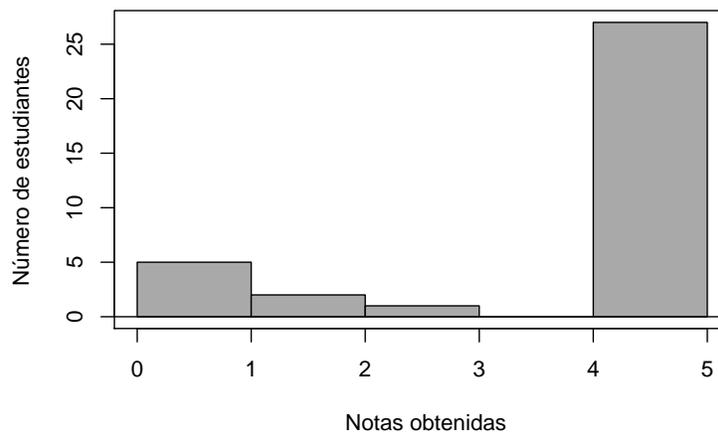


Figura 5.5: Semejanza de triángulos

Frente al tema de “Semejanza de Triángulos” (ver Figura 5.5), 27 estudiantes (77,14%) obtienen notas satisfactorias entre 4.0 y 5.0, mientras que 8 estudiantes (22,86%) no logran aplicar los criterios de semejanza para solucionar problemas.

Por otro lado, *Matemáticas Básicas* contempla el aprendizaje del cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos básicos, como es el caso de la esfera, el cilindro, el cono, el paralelepípedo, entre otros. Este concepto matemático de volumen es uno de los contenidos más importantes dentro de la geometría del espacio, el cual también es retomado en el cálculo a través del estudio de la integral.

Los estudiantes aplicaron este tema a transformaciones de los cuerpos geométricos básicos, observando formas geométricas y relacionándolas con los sólidos básicos, de tal forma que aplicaran los cálculos de volúmenes. Con respecto a esto, se presentaron problemas como el que se enuncia a continuación:

Ejemplo 5.1.3 *El sólido de la figura está conformado por un cilindro recto de radio R y altura $2R$ que tiene en un extremo una semiesfera y en el otro un cono circular recto de altura R . Si el volumen total del sólido es $3\pi m^3$, halle el área de su superficie.*

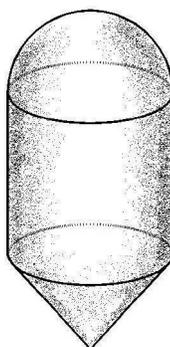


Figura 5.6: Problema ‘volumen y área superficial’

En el problema anterior, es importante que el estudiante reconozca la figura como la unión de una semiesfera, un cilindro recto y un cono circular recto, comprenda el enunciado y las relaciones entre las distintas medidas de la figura, y así aplicar los distintos procedimientos para encontrar el volumen de cada una de estas partes, en este caso dan unas medidas establecidas como el radio $r = R$, la altura del cilindro $h_1 = 2R$ y la altura del cono $h_2 = R$. Aún así, debe hacerse previamente un proceso de deducción o validación de las fórmulas de los volúmenes para cada una de las figuras que la componen:

$$V(\text{esfera}) = \frac{4\pi r^3}{3} \quad V(\text{cilindro}) = \pi r^2 h_1 \quad V(\text{cono}) = \frac{\pi r^2 h_2}{3}$$

En cuanto a la evaluación del tema de “Volumen”, los resultados que obtuvieron los estudiantes fueron los siguientes:

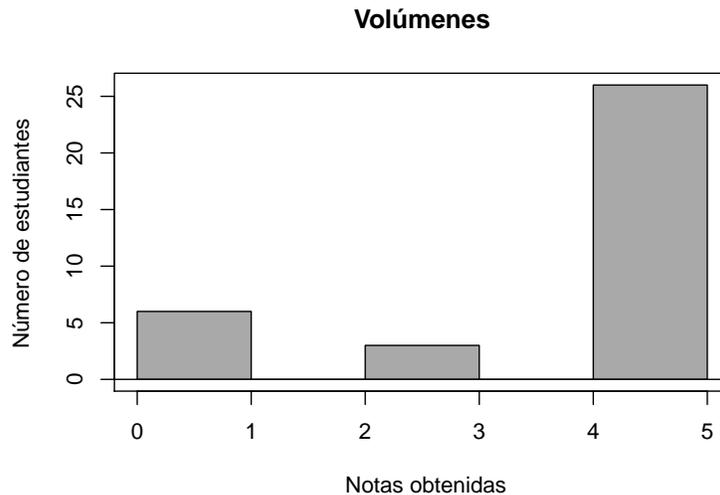


Figura 5.7: Volumen de los sólidos

En general, la mayoría de los estudiantes logran comprender el tema y obtienen satisfactoriamente el volumen de un sólido. 26 estudiantes (74.28 %) responden acertadamente a la pregunta por el volumen, mientras que 9 estudiantes (25.72 %) no logran hacerlo, se les dificulta encontrar las relaciones de tal forma que les permitan aplicar las distintas propiedades y fórmulas establecidas. Aún así, se puede decir que fue un tema que se fortaleció en el curso, en la medida que se logran realizar estos procedimientos de manera eficiente, puesto que gran parte de los estudiantes obtienen notas superiores entre 4.0 y 5.0.

Por otro lado, observando los resultados frente al “área superficial de cuerpos geométricos”, los estudiantes presentan mayor dificultad para realizar este tipo de procedimientos. En ejercicios como el anterior (**Ejemplo 5.1.3**), los estudiantes hallan el volumen sin mayor problema, pero cuando se les pide el área superficial, ésta genera mayor dificultad:

Desde este punto de vista, se debe comprender el concepto de área superficial como el área de la parte externa del cuerpo (desde un punto de vista informal). El área superficial, tanto para el cono como para el cilindro, es el área de las bases más el área lateral, mientras que para la esfera es cuatro veces el área de una circunferencia de igual radio:

$$A(\text{esfera}) = 4\pi r^2 \quad A(\text{cilindro}) = 2\pi r^2 + 2\pi r h_1 \quad A(\text{cono}) = \pi r \sqrt{h_2^2 + r^2} + \pi r^2$$

De acuerdo con ello, los siguientes son los resultados de los estudiantes frente a estos procesos:

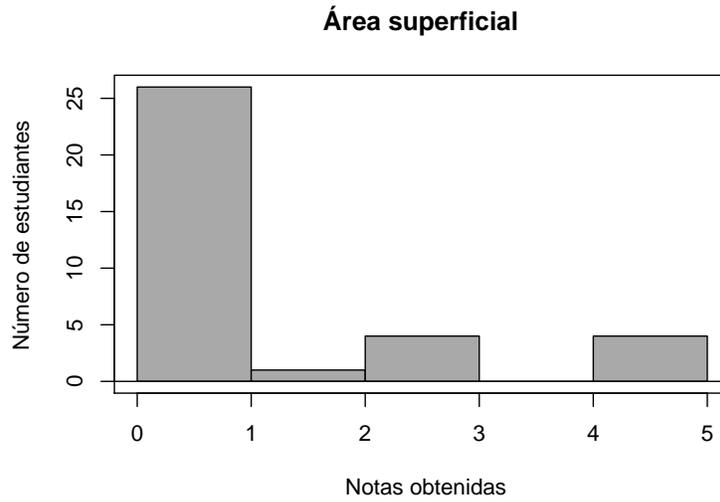


Figura 5.8: área Superficial

31 estudiantes (88,57 %) obtienen notas inferiores a 3.0, encontrándose la mayoría entre quienes obtienen notas entre 0.0 y 1.0; tan sólo 4 estudiantes (11,43 %) responden acertadamente a la pregunta por el área superficial.

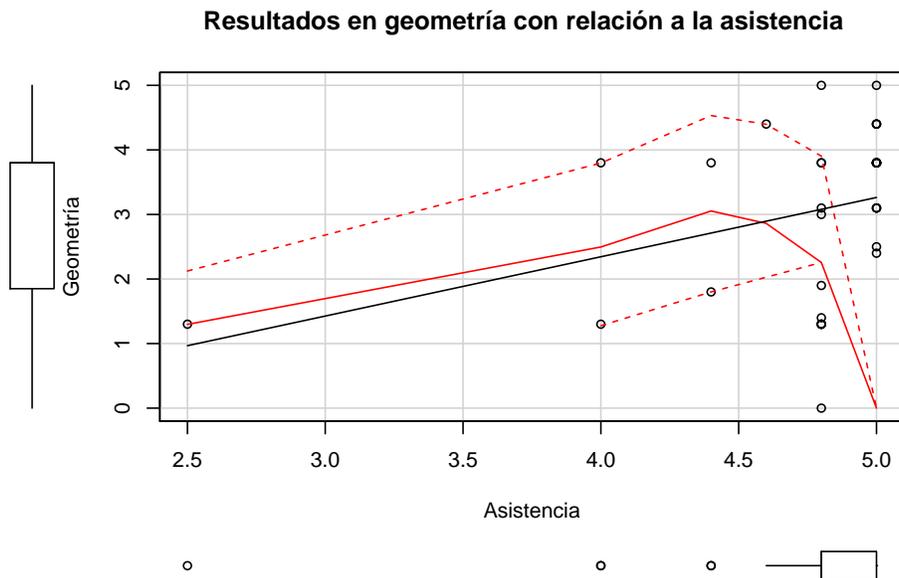


Figura 5.9: Resultados en Geometría vs. Asistencia

Ahora, frente a la asistencia de los estudiantes a las clases de geometría y a sus resultados en

esta temática, se observa en el gráfico anterior (ver Figura 5.9) que el nivel de asistencia a las clases de *Matemáticas Básicas* fue bastante bueno, pese a ello, las explicaciones y todas las actividades desarrolladas en torno a las temáticas del área no fueron suficientes porque en los resultados de geometría hay aspectos donde se presenta dificultad. Frente a esto se puede ver la importancia que tienen los estudios extraescolares, debido a que la asistencia a clase no es suficiente para obtener buenos resultados en el área.

5.1.2 Observaciones y autoevaluación: Geometría

Para conocer sobre las percepciones que tienen los estudiantes frente a su nivel de aprendizaje en geometría, con relación a los estudios realizados en el curso *Matemáticas Básicas*, se tomaron como referencia los estudiantes que realizaron una encuesta electrónica (ver Anexo 2), donde se les plantearon preguntas tales como: en qué medida consideras que dominas los contenidos del curso, qué tanto aprendieron, y cómo creen que se encuentran preparados para iniciar cursos más avanzados de matemáticas. En el siguiente gráfico se muestran las respuestas que dan los estudiantes frente a geometría plana:

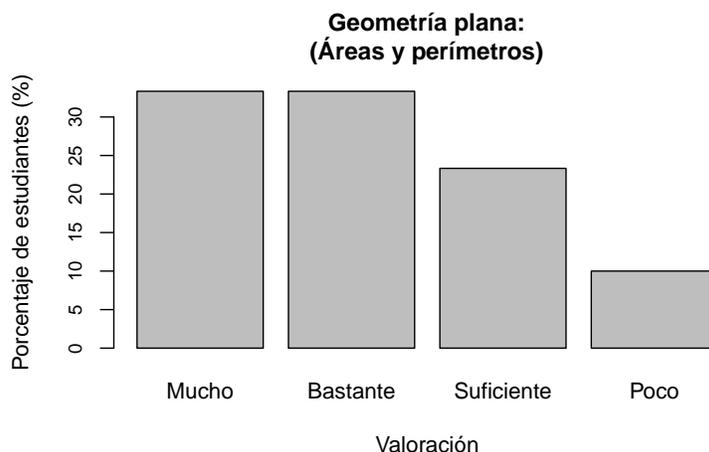


Figura 5.10: Geometría Plana: áreas y perímetros

En términos generales, los estudiantes afirman que manejan bien algunos conceptos de geometría plana, como es el caso de áreas y perímetros, que comprendieron el tema y se encuentran preparados para aplicarlos en otros cursos de matemáticas que verán a lo largo de su carrera. En el gráfico se puede apreciar que el 66,67% de los estudiantes dicen tener niveles altos de dominio del tema (mucho-bastante), otro 23,33% dicen tener suficientes conceptos del área, elementos básicos que les pueden permitir adquirir nuevos conocimientos, si bien no consideran que su aprendizaje fue amplio en geometría, sienten que cuentan con conceptos y procedimientos que podrían aplicar en otras áreas de las matemáticas. Sin embargo, un 10% dicen haber aprendido poco con respecto a esta temática (ver Figura 5.10).

Ahora bien, con respecto a la resolución de problemas de tipo geométrico, los estudiantes dicen lo siguiente:

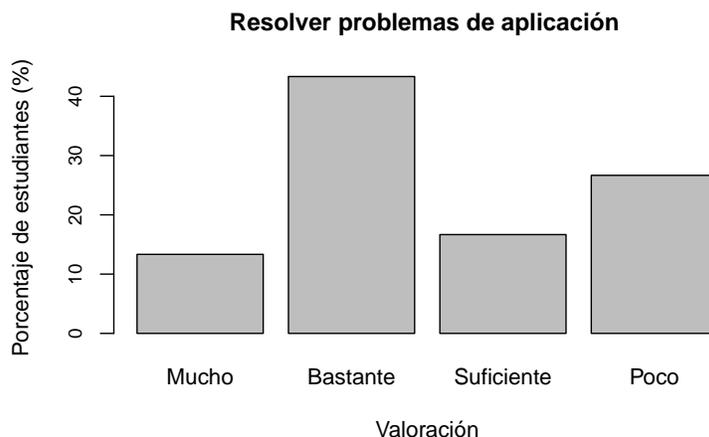


Figura 5.11: Problemas de aplicación

Los estudiantes dicen que a pesar de no disponer de muchos elementos conceptuales que les permitan resolver problemas de aplicación, son bastantes las habilidades que adquirieron con relación al inicio del curso. El 43.33% de los estudiantes dicen que aprendieron “bastante” frente a la resolución de problemas, específicamente a interpretar textos matemáticos, determinar elementos importantes dentro de un problema y aplicar procedimientos específicos, mientras que el 16,67% dice que aprendió lo suficiente en las clases para obtener nuevas herramientas matemáticas, si bien no evalúan su aprendizaje en un nivel alto, aprendieron lo necesario para iniciar estudios superiores en matemáticas. Sin embargo, el 26,67% de los estudiantes dicen que son pocos los conocimientos adquiridos frente a este tema.

5.2 Resultados: Trigonometría

El estudio de la trigonometría es importante, en la medida que permite resolver situaciones problema del mundo real, resultando fundamental en cualquier tipo de aplicación basada en geometría y distancias. De hecho, ha cobrado importancia en los estudios de navegación y geodesia, además de aquellos casos en los que no es posible hacer mediciones de manera directa o donde las distancias son inaccesibles, como las distancias astronómicas. Otras aplicaciones interesantes de la trigonometría se realizan en física, siendo muy importante en el estudio de fenómenos periódicos, por ejemplo en el flujo de corriente alterna [Flores Gil, 2008].

La propuesta de enseñanza y aprendizaje de Trigonometría en el curso *Matemáticas Básicas* se fundamenta en los problemas de aplicación, destacando aquellas situaciones que involucran a los

triángulos planos: rectángulo y oblicuángulo. Además, resolviendo ejercicios donde se apliquen los conceptos de razón, función y una serie de identidades y ecuaciones trigonométricas.

A continuación se detallan los temas que se abordan durante las clases (ver Anexo 1: Programa académico):

1. **ángulos**

- (a) Funciones trigonométricas de ángulos
- (b) ángulo de referencia
- (c) Aplicación (área de un triángulo)

2. **Aplicaciones de trigonometría de triángulos rectángulos**

- (a) Ley de seno
- (b) Ley de coseno

3. **Identidades trigonométricas**

- (a) Simplificación de expresiones trigonométricas
- (b) Demostración de identidades trigonométricas
- (c) Fórmulas de adición y sustracción
- (d) Fórmulas para el ángulo doble y para el semiángulo
- (e) Ecuaciones trigonométricas

4. **Funciones trigonométricas de números reales y sus gráficas**

- (a) Circunferencia unitaria
- (b) Función periódica

5.2.1 **Seguimiento y evaluación: Trigonometría**

A pesar que los términos seguimiento y evaluación tienden a ser tratados como uno solo, dentro del desarrollo de las clases se constituyeron como dos actividades relacionadas. El seguimiento y evaluación hizo parte de todo el proceso de planificación y desarrollo de las clases. Por un lado el seguimiento consistió en el análisis y recopilación en forma sistemática de información relacionada con el aprendizaje e impresiones de los estudiantes frente a trigonometría, mientras que la evaluación se basó fuertemente en el desarrollo de pruebas escritas con las temáticas planificadas. Por lo tanto, se hizo seguimiento evaluativo con relación a las temáticas, específicamente en el campo de la Trigonometría, y se evaluaron algunos aspectos importantes y elementales para dar inicio a los cursos de matemáticas universitarias. Con relación a ésto se observa lo siguiente:

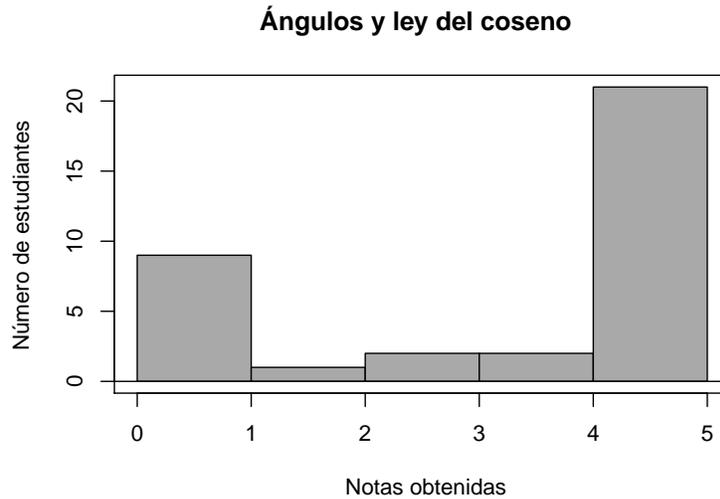


Figura 5.12: ángulos y ley del coseno

En el gráfico anterior se observa que 21 estudiantes (60%) logran obtener notas superiores a 4.0 con relación al manejo de ángulos y la ley del coseno. Otros 2 estudiantes (5,71%) obtienen notas entre 3.0 y 4.0, mientras que 12 de los estudiantes (34,29%) no logran comprender estos conceptos.

Se trabajan problemas como los que se enuncian a continuación, verificando capacidad de análisis, comprensión de textos matemáticos y aplicación de procedimientos trigonométricos:

Ejemplo 5.2.1 Una torre de 23,5m de altura forma un ángulo de $110,2^\circ$ con el camino inclinado sobre el cual se ubica. Determine el ángulo subtendido por la torre en un punto situado camino abajo a 28,2m de su base (Ver Figura 5.13).

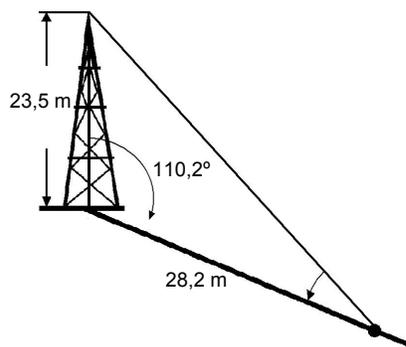


Figura 5.13: Problema: 'ángulos y ley del coseno'

Es importante tener presente que los estudiantes conocen poco acerca de la trigonometría, en

tanto es un área de poca preocupación en los currículos escolares. En la mayoría de los colegios, el estudio de la trigonometría se hace en el primer semestre del grado décimo, sin mayor profundización en conceptos y formas de aplicación. Ejemplos como el anterior muestran cómo algunos estudiantes presentan dificultad para interpretar problemas, hallar relaciones entre lados y ángulos, y aplicar procedimientos trigonométricos. 9 estudiantes (25,7%) obtienen notas entre 0 y 1.0 al enfrentarse a este tipo de situaciones.

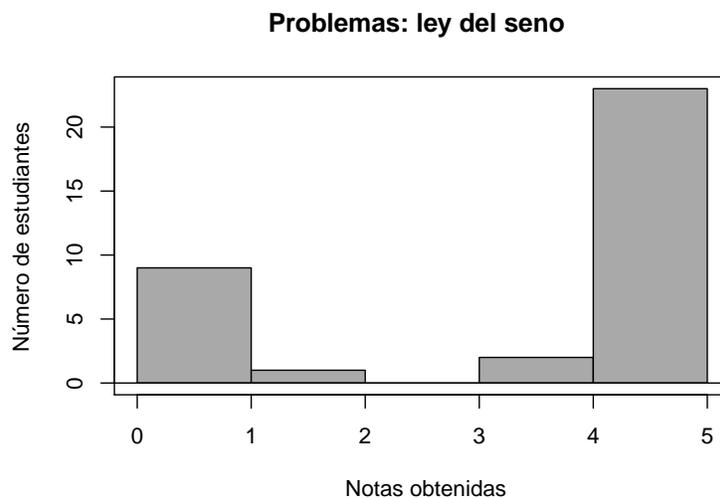


Figura 5.14: Ley del seno

Por otro lado, la trigonometría es especialmente importante en el entorno, a partir de ella muchas obras artísticas (dibujos, pinturas, esculturas) y arquitectónicas se han construido, o por lo menos han incluido sus conceptos. Es por ello que se busca que los estudiantes adquieran habilidades para comprender las propiedades de las formas, pero también reconocer la métrica que poseen. Desde este punto de vista, la ley del seno se convierte en una relación importante que debe ser aprendida, en tanto relaciona los lados de un triángulo con sus respectivos ángulos, siempre útil para resolver cierto tipo de problemas.

Se evalúa a los estudiantes en la capacidad de comprender y aplicar en un problema dado la “Ley de Seno”, con respecto a este tema se verifica que 25 estudiantes (71,42%) logran resolverlo, comprenden el problema y aplican los procedimientos adecuados. Sin embargo, 10 estudiantes (28,58%) no logran hacerlo, obtienen notas entre 0.0 y 2.0. Aún así, se concentra la mayor parte de los estudiantes en un nivel superior (entre 4.0 y 5.0).

Para explicar este tema, se presentan problemas como el que se enuncia a continuación, donde los estudiantes pueden aplicar sus conocimientos:

Ejemplo 5.2.2 Una rampa está inclinada a un ángulo de $41,3^\circ$ con respecto del suelo. Un extremo de una tabla de 20,6 pie de longitud se localiza en el suelo en un punto P que está a 12,2 pie de la base Q de la rampa, y el otro extremo reposa sobre la rampa en un punto R. Determine la distancia desde el punto Q hacia arriba de la rampa hasta el punto R. (Ver Figura 5.15).

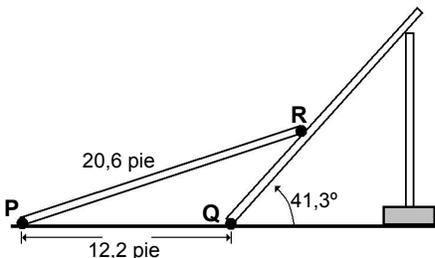


Figura 5.15: Problema ‘ley del coseno’

Otro de los temas importantes es la “Ley del Coseno”, en la cual se presentan dificultades en tanto los estudiantes no reconocen las situaciones en donde se puede aplicar ley del seno y ley del coseno. Los resultados obtenidos con respecto a este tema se dan a continuación:

Problemas: ley del coseno

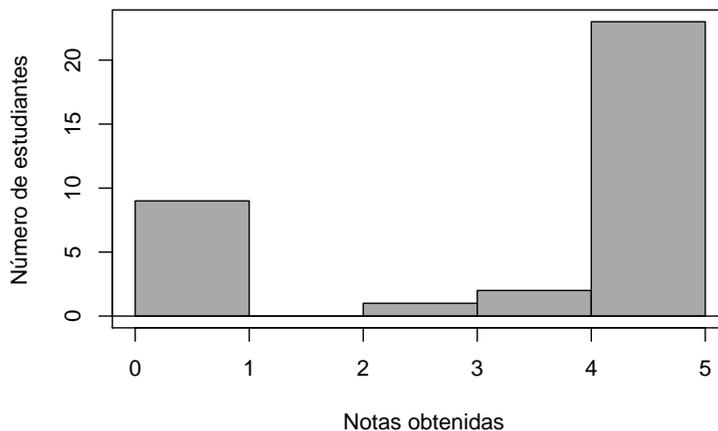


Figura 5.16: Problema: ‘ley del coseno’

La gráfica muestra que 23 estudiantes (65,71%) obtienen notas entre 4.0 y 5.0, es decir, se clasifican en un nivel alto con relación a la aplicación y comprensión de la ley del coseno (ver Figura 5.16). 2 estudiantes (5,71%) obtienen notas entre 3.0 y 4.0, logran resolver el ejercicio, aplican los medios adecuados, pero falta mejorar la estructura y presentación de los datos y fórmulas matemáticas. Sin embargo, aún hay 10 estudiantes (29,58%) que no logran aplicar los procedimientos

trigonométricos para resolver este tipo de problemas. Sobre todo, 9 estudiantes (25,72 %) que obtienen las notas más bajas, entre 0.0 y 1.0.

Por otro lado, evaluando los conocimientos acerca de las “Identidades Trigonométricas”, se observa que a pesar de haber estudiantes que presentan dificultades, son muchos los que obtienen notas satisfactorias (ver Figura 5.17):

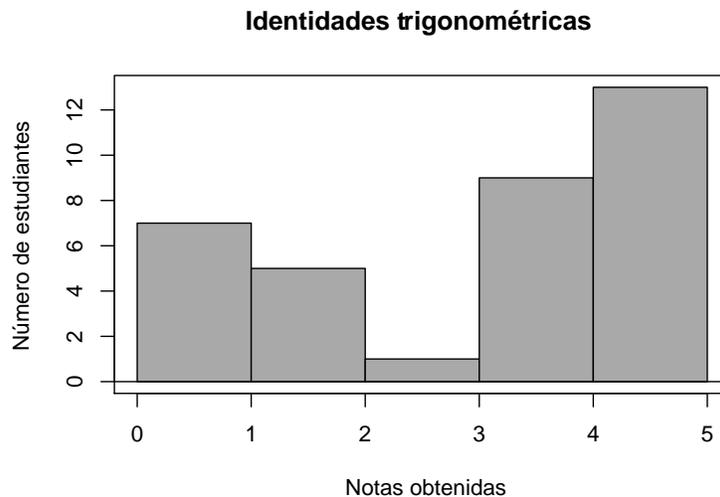


Figura 5.17: Identidades trigonométricas

Las identidades trigonométricas posibilitan realizar deducciones y aplicar algoritmos algebraicos. Estas identidades son expresiones trigonométricas que presentan formas complicadas o extendidas y que pueden ser reemplazadas por expresiones equivalentes. Por ello, estos procedimientos exigen un nivel más alto de análisis y conocimientos frente al álgebra y a la trigonometría. Con respecto al seguimiento que se les hace a los estudiantes del curso *Matemáticas Básicas*, se encuentra que 13 de ellos (37,14%) no logran resolver ejercicios de identidades trigonométricas, mientras que 22 estudiantes (62,86%) obtienen notas satisfactorias para este tema.

Es por ello que es importante enfatizar en el tema de identidades, en la medida que son más de una tercera parte del grupo que presenta falencias para solucionar ejercicios de este tipo. Aún siendo un tema que aplica las propiedades del álgebra, es importante que el estudiante desarrolle estrategias de simplificación de expresiones trigonométricas.

En términos generales, en el siguiente gráfico (ver Figura 5.18), se registra la asistencia a las clases y los resultados en el área de trigonometría. En el gráfico puede apreciarse que la asistencia a clase fue buena, y aparte de ello obtuvieron excelentes resultados en las pruebas aplicadas para evaluar sus conocimientos en trigonometría.

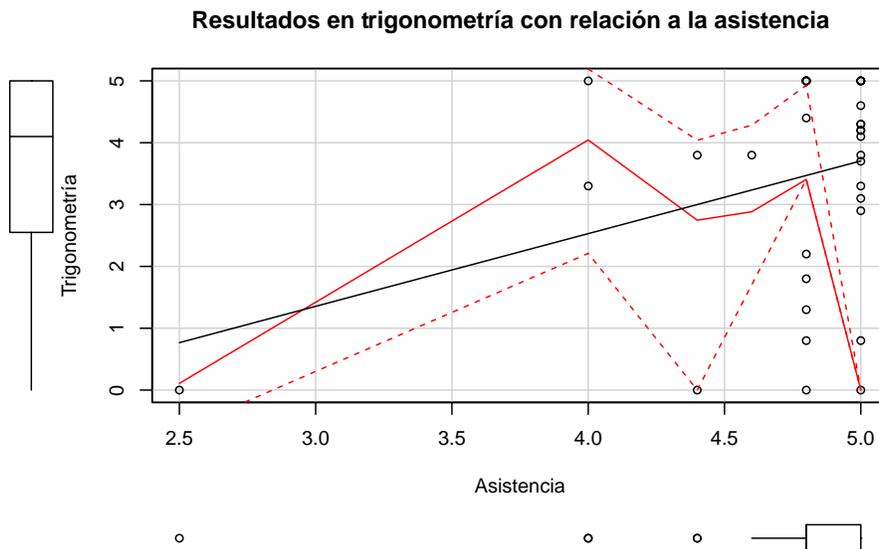


Figura 5.18: Asistencia vs. Trigonometría

5.2.2 Observaciones y autoevaluación: Trigonometría

Este apartado pretende dar a conocer la percepción que tienen los estudiantes que culminaron el curso *Matemáticas Básicas* durante el primer periodo del año 2011, acerca de su aprendizaje y al desarrollo del curso. Además, se presentan las preferencias que tienen respecto a las temáticas vistas, y los aspectos positivos que consideran les han ayudado en su desempeño como estudiantes universitarios.

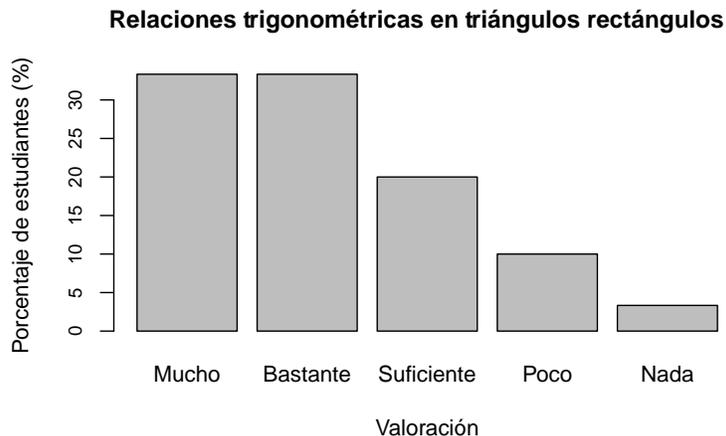


Figura 5.19: Relaciones trigonométricas en triángulo rectángulo

Ante las respuestas : Indica en qué medida consideras que dominas cada uno de estos temas, las respuestas que dan los estudiantes con relación a trigonometría son las siguientes:

En el gráfico (ver Figura 5.19) se puede observar que el 33,33% de los estudiantes dicen tener mucho dominio del tema, es decir, aprenden los conceptos, los aplican, encuentran las relaciones trigonométricas en un triángulo rectángulo, aplican el Teorema de Pitágoras y son capaces de encontrar relaciones entre los ángulos y los lados del triángulo rectángulo. El 33,33% dicen que tienen bastante dominio del tema y aprendieron aspectos necesarios para los cursos de matemáticas que verán a lo largo de su carrera. El 20 % dicen que manejan aspectos suficientes para entender otras temáticas, mientras que tan sólo 13,34% de los estudiantes dicen manejar pocos o ninguno de los conocimientos básicos trabajados en las clases, los cuales serán necesarios para los siguientes cursos de matemáticas.

Ahora bien, se indaga sobre las “Funciones Trigonométricas” y sus gráficas, y las respuestas que dan los estudiantes al respecto muestran lo siguiente:

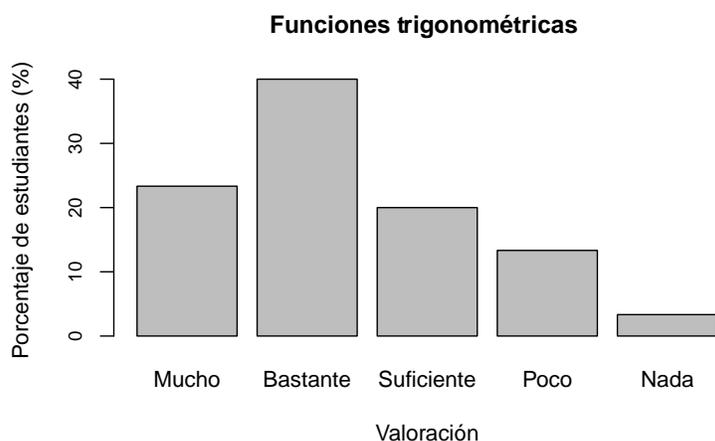


Figura 5.20: Funciones trigonométricas

En cuanto a las funciones trigonométricas (ver Figura 5.20) el 63,33% de los estudiantes dicen tener alto dominio (mucho-bastante) del tema de funciones y realizar sus gráficas. El 20% dicen tener suficientes conocimientos, es decir, manejan aspectos básicos y necesarios sin hacer suficientes reflexiones del tema, manteniendo un nivel medio de comprensión. Sin embargo, 16,67% dicen manejar pocos o ninguno de los conceptos vistos en las clases.

Desde este punto de vista, los estudiantes autovaloran su aprendizaje en un buen nivel de desempeño, a pesar de haber quienes presentan dificultades, en general se habla de manejar conceptos trigonométricos y procedimientos que les posibilitarán adquirir nuevos conocimientos en otros cursos de matemáticas.

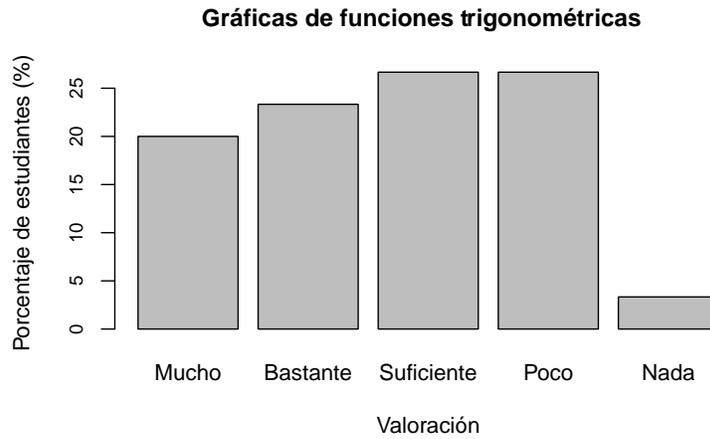


Figura 5.21: Gráficas de funciones trigonométricas

El 43,33% de los estudiantes comprendieron el tema acerca de cómo graficar una función y reconocen sus regularidades (ver Figura 5.21), dicen tener alto dominio del tema (mucho-bastante), es decir, saben graficar funciones, analizar movimientos en el plano y encuentran relaciones, mientras que el 26,67% dicen tener suficientes conocimientos, si bien no alcanzan a tener un nivel alto en el tema, manejan ideas básicas suficientes para comenzar los cursos de matemáticas propios de su carrera. Aún así, un 30% de los estudiantes dicen saber poco o nada de las gráficas de las funciones, es decir, terminan el curso *Matemáticas Básicas* con bastantes falencias en este aspecto.

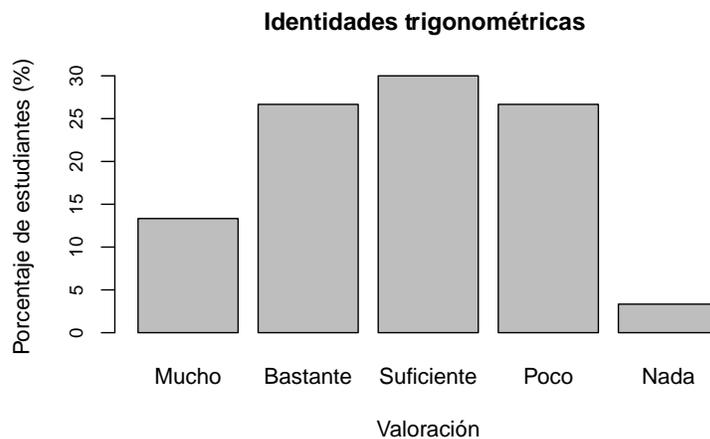


Figura 5.22: Identidades trigonométricas

El 13,33% de los estudiantes dicen tener mucho dominio del tema, es decir, reconocen y

comprenden las identidades trigonométricas fundamentales, y las aplican para encontrar expresiones trigonométricas semejantes. El 26,67% conocen bastante acerca de identidades trigonométricas y realizan ejercicios al respecto. Y el 30% dicen tener suficientes conocimientos. De acuerdo con ello, se observa que, en general, el 70% adquiere elementos conceptuales importantes con respecto a este tema, realizan ejercicios y aplican las identidades fundamentales para reducir o amplificar expresiones trigonométricas. Mientras que un 30 % dicen manejar pocos o ninguno de los conceptos trabajados en las clases.

En cuanto al tema de “Ecuaciones Trigonométricas”, los estudiantes responden lo siguiente (ver Figura 5.23):

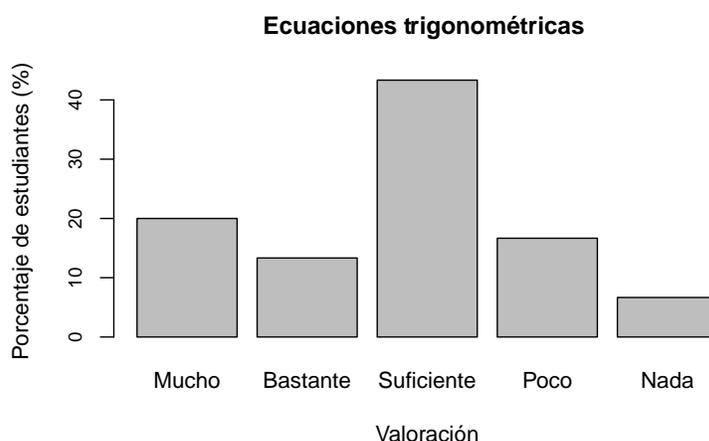


Figura 5.23: Ecuaciones trigonométricas

Se evidencia en las respuestas que los conceptos no fueron comprendidos por todos los estudiantes. Sin embargo, se observa que el 33,33% adquirieron alto dominio conceptual y procedimental de las ecuaciones (mucho-bastante). El 43,33% dicen que sus conocimientos son suficientes, mientras que el 23,34% de los estudiantes aprendieron poco o nada del tema.

5.3 Generalidades en los resultados

Se hace necesario mirar algunas generalidades frente a los hábitos de estudio de los estudiantes, de tal forma que se puedan observar algunas causas de las dificultades y fortalezas que adquirieron durante el curso de *Matemáticas Básicas*:

Frente a esta situación, se observa en términos generales cómo fueron los resultados en Geometría y Trigonometría (ver Figura 5.24). Estos dos aspectos que fueron evaluados durante las clases muestran el nivel académico que presentan los estudiantes que hacen el curso nivelatorio.

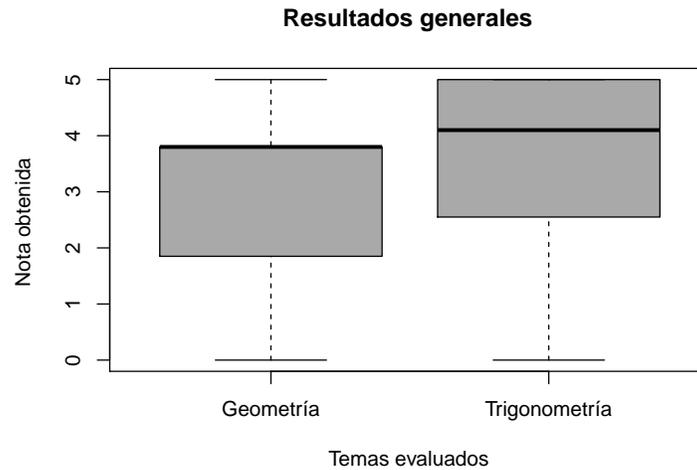


Figura 5.24: Boxplot: Geometría y Trigonometría

En la gráfica (Figura 5.24) se evidencia que los estudiantes obtuvieron mejores resultados en trigonometría que en geometría.

Por otra parte, se les pregunta a los estudiantes sobre su rendimiento académico y dedicación al estudio extracurricular y al autoaprendizaje. Para ello se desarrolló una autoevaluación para que cada uno valorara sus niveles de apropiación.

	Autoevaluación (en %)				
	<i>Excelente</i>	<i>Muy Bueno</i>	<i>Bueno</i>	<i>Indiferente</i>	<i>Malo</i>
Participación en clase	13,33	30	40	16,67	0
La asimilación de contenidos	10	40	43,33	3,33	3,34
Resultados en el curso	3,33	10	60	6,67	20
Participación en asesorías	10	6,67	30	26,66	26,67

Tabla 5.1: Autoevaluación del proceso en el curso

La asimilación de contenidos se puede catalogar como buena, pese a que hay estudiantes que tuvieron dificultades en el aprendizaje de las temáticas abordadas. Desde este punto de vista, en la tabla 5.1 el 10% evalúa su proceso de aprendizaje como excelente, mientras que el 40% lo autovaloran muy bueno, sólo el 3,33% son indiferentes a ello o dicen haber tenido una mala asimilación. Sin embargo, los estudiantes tienen poco acercamiento a las asesorías, son indiferentes a ellas o no aprovecharon estos espacios que ofrece la universidad, frente a ello sólo el 10% valora como excelente el uso que le dio a las asesorías, mientras que el 6,67% dice que tuvo muy buen

acercamiento a estos espacios. Además, con respecto al promedio obtenido en el curso, sus resultados fueron regulares, el 20% de los estudiantes dicen que sus resultados fueron malos, el 6,67% dicen que su proceso fue insuficiente o indiferente, mientras que el 60% dicen que tuvo buenos resultados, quedando en un nivel medio, sólo el 10% dice que su proceso fue excelente.

Frente a su motivación, siendo este un factor indispensable en el desarrollo del curso, y sobre todo en el aprendizaje de las temáticas abordadas, se encuentra que los estudiantes se autoevalúan de la siguiente forma:

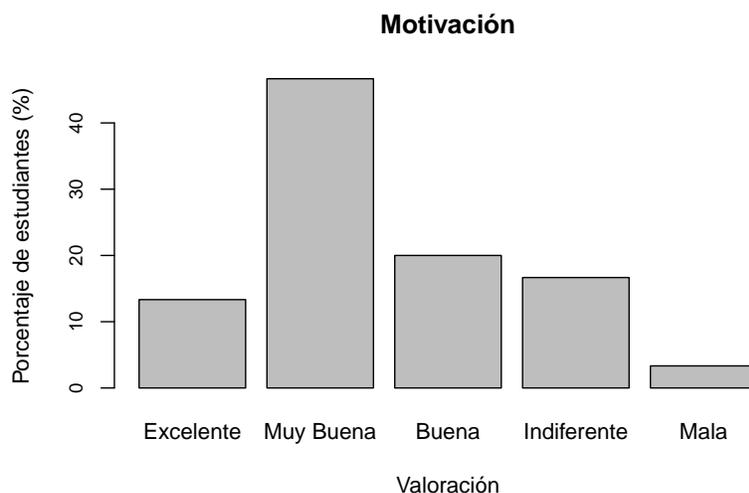


Figura 5.25: Motivación en las clases

El manejo de la motivación es imprescindible durante todo el proceso educativo, en la medida que se constituye en un factor que condiciona la capacidad de aprender. Para conseguir que los estudiantes aprendan es necesario despertar su atención, crear en ellos un genuino interés por el estudio y estimular su deseo de conseguir los resultados previstos.

El 60% de los estudiantes dicen que su motivación durante todo el curso siempre fue alta (excelente y muy buena), mientras que el 6,67% dicen que su motivación es indiferente, en todo momento lo vieron como un requisito o como responsabilidad adquirida dentro de su carrera, y el 3,33% dice que su motivación es mala. De acuerdo con estos indicadores, en términos generales, se puede apreciar que los estudiantes estuvieron motivados durante todo el semestre.

En cuanto a los contenidos del curso, los estudiantes dieron sus apreciaciones con respecto a la claridad, estructura y organización curricular, aplicabilidad de los temas y concreción. Estas fueron las respuestas obtenidas:

Los contenidos del curso (en %)					
	<i>Muy Alta</i>	<i>Alta</i>	<i>Media</i>	<i>Baja</i>	<i>Muy Baja</i>
Claridad	6,67	63,33	23,33	6,67	0
Aplicación práctica	20	56,67	23,33	0	0
Concreción	23,33	53,34	23,33	0	0
Estructuración	23,33	60	13,33	3,34	0

Tabla 5.2: Relación de edad de los estudiantes

En la Tabla 5.2 se muestra que los estudiantes dan buenas apreciaciones frente a la estructura y orden de los temas del curso. Tanto en la claridad, como en estructuración, en aplicabilidad y concreción, los estudiantes dan altas valoraciones. Sólo algunos estudiantes dicen que la claridad del curso (6,67%) y estructuración (3,34%) fue baja.

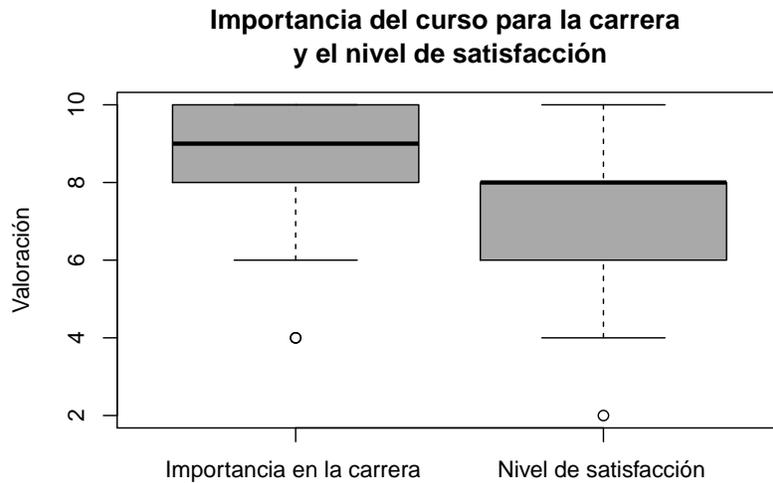


Figura 5.26: Importancia del curso y nivel de satisfacción

Aparte de los temas anteriores, se les pregunta a los estudiantes sobre la importancia que cobra el curso para su carrera universitaria (ver Figura 5.26), y qué satisfacción le ha traído ver la materia. De 1 a 10 hicieron la valoración, siendo 10 la nota máxima y más positiva que pueden dar. Se observa en el anterior gráfico (Figura 5.26) que los estudiantes dicen que es un curso con bastante incidencia dentro de su formación profesional, en la medida que les ofrece herramientas importantes al iniciar su carrera. El 75% de los estudiantes da la valoración más alta entre 8 y 10. Pese a ello, en cuanto al nivel de satisfacción se observa que no es igual de alta la valoración, porque el 75% evalúan su satisfacción entre 6 y 10.

Otro aspecto importante es verificar cómo les parecieron los libros de texto trabajados en el curso. *Matemáticas Básicas* se basó primordialmente en los textos “Matemáticas previas al cálculo” [Leithold, 2008] y “Precálculo: matemáticas para el cálculo” [Stewart *et al.*, 2007], con relación a ello, los estudiantes dicen lo siguiente:

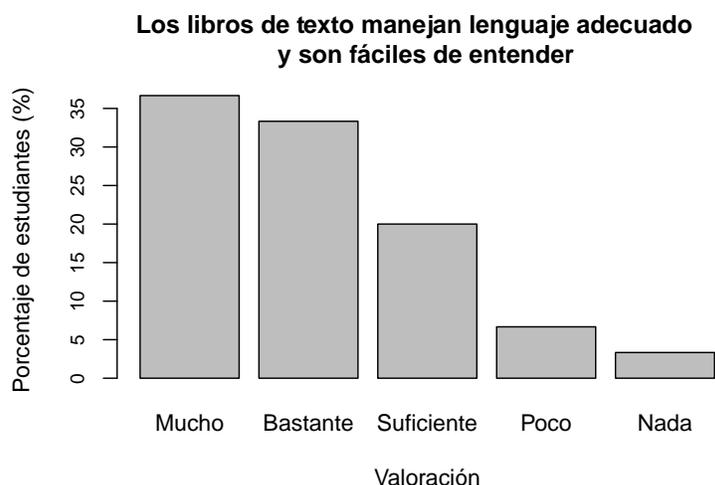


Figura 5.27: Lenguaje de los libros de texto

En este aspecto es importante comprender la dificultad que presentan los estudiantes para guiar su aprendizaje en textos de tipo matemático, con lenguaje formal y generalizaciones que son aplicadas en los ejercicios resueltos. En las clases escolares son pocas las veces que se enfrentan los estudiantes a libros de texto, todo se les explica y pocas veces se deja que adquieran los conocimientos a partir de los libros. Por ello algunos estudiantes llegan a la universidad con la misma dificultad.

Frente al lenguaje que manejan los textos, el 36,67% de los estudiantes afirman que presentaban mucha facilidad para comprenderlos, otros dicen que comprendieron bastantes conceptos a partir de ellos (33,33%), mientras que el 10% los encuentran poco comprensivos o absolutamente no entendieron nada de ellos.

Uno de los grandes problemas que enfrentan los estudiantes en la actualidad es el uso de textos matemáticos que tienen que ser leídos de manera independiente como parte de la formación universitaria. Más aún, la clave para obtener buenos resultados en los exámenes se encuentra en su competencia lectora. Es por ello que este aspecto cobra importancia en el curso introductorio y nivelatorio *Matemáticas Básicas*.

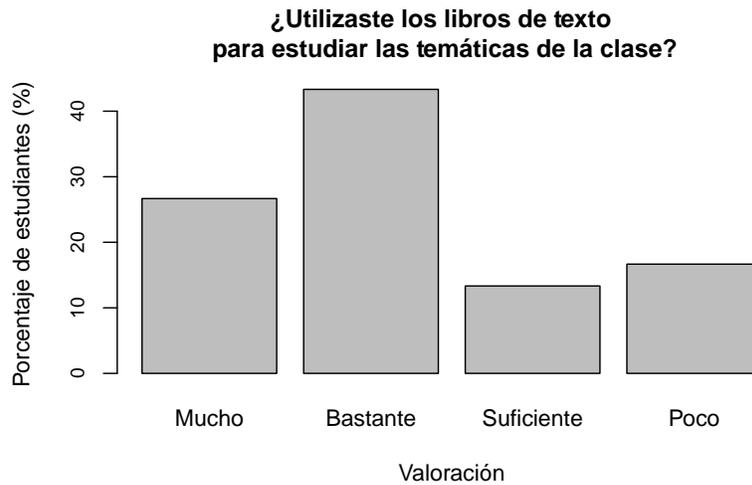


Figura 5.28: Libros de texto como herramienta de estudio

El uso de los libros de texto como herramienta fundamental en el estudio de los temas fue bastante bueno, el 70% de los estudiantes dicen que utilizaron constantemente los libros (mucho-bastante), un 13,33% afirman que utilizaron los libros suficientemente para estudiar para las evaluaciones, mientras que un 16,67% dicen que fue poco el uso que le dieron a este material.

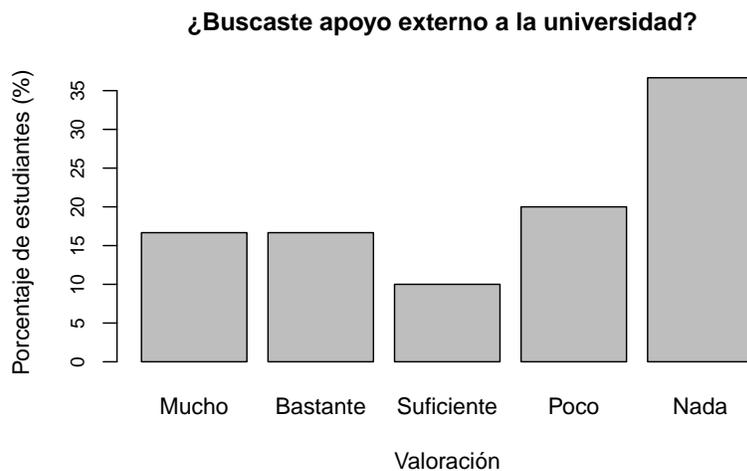


Figura 5.29: Búsqueda de apoyo externo

Se les pregunta a los estudiantes si pidieron ayuda externa a la universidad para estudiar los temas, visitando bibliotecas o profesores particulares, entre otras (ver Figura 5.29).

El 56,67% de los estudiantes responden que no requirieron ayuda externa a la universidad, o en algunos casos fue poca la ayuda que buscaron. Mientras que el 33,33% buscaron constantemente (mucho-bastante) ayuda en otras personas para que les explicaran las temáticas. (ver Figura 5.29).

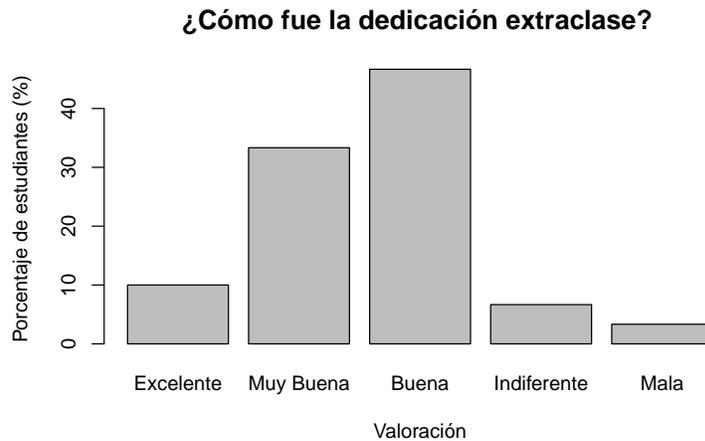


Figura 5.30: Dedicación extraclase

Ahora, por lo regular dedicaron tiempo extraclase estudiando para las evaluaciones. El 90% dicen que su dedicación fue buena, muy buena o excelente, mientras que el 10% piensan que fue mala la dedicación que prestaron a la materia (ver Figura 5.30).

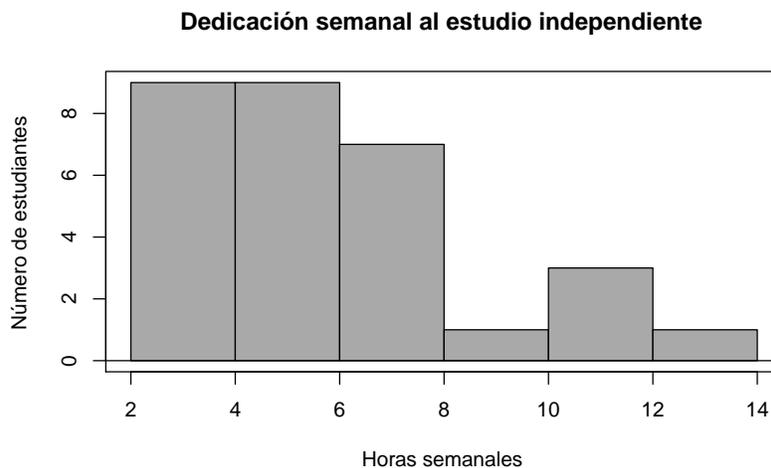


Figura 5.31: Horas semanales en estudio independiente

Por otro lado, en la gráfica (Figura 5.31) se registraron las horas semanales que invirtieron los estudiantes en el estudio extraclase. Normalmente los estudiantes invirtieron entre 2 a 8 horas semanales en su estudio, mientras que otros pocos llegaron a invertir hasta 14 horas a la semana estudiando los temas que se dan en cada una de las sesiones.

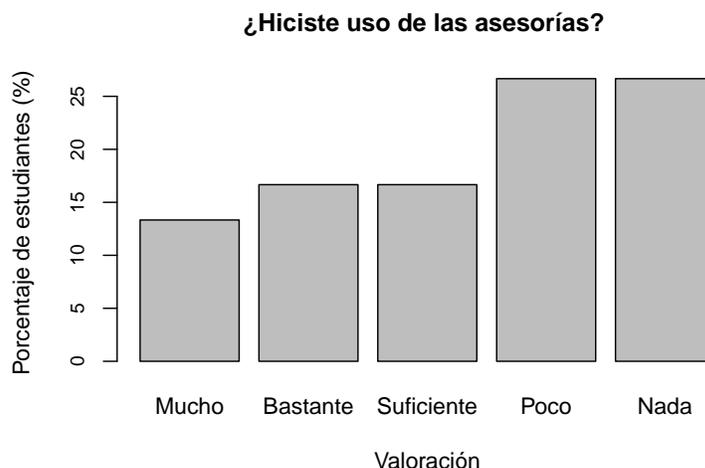


Figura 5.32: Uso de las asesorías

En la gráfica anterior se evidencia que los estudiantes no dedicaron tiempo para asistir a las asesorías como medio de profundización en los temas. El 53,33% asistió poco o en ningún momento se acercó a resolver sus dudas en las asesorías, mientras que sólo un 16,67% (bastante) dice que asistió constantemente, y un 13,33% (mucho) afirma haber asistido a todos los espacios de asesoría. Sin embargo, no se puede relacionar la asistencia a las asesorías con haber logrado ganar el curso puesto que no se tiene información acerca de ello.

5.4 Conclusiones y recomendaciones

A manera de hipótesis:

“ podría afirmarse que los estudiantes llegan menos preparados que en otras épocas, en la medida que se acostumbran en el colegio a tener mucho tiempo para superar cualquier meta, el sinnúmero de posibilidades que se les da en el colegio para recuperar un área implica que se acostumbren a llevar una vida más tranquila y despreocupada por su formación. Hay un mínimo esfuerzo y siempre consideran que vendrá oportunidad tras oportunidad después de la pérdida, tal como pasa en el colegio. A lo anterior se le suma que los jóvenes presentan deficiencias en manejo de procesos algebraicos y de razonamiento lógico, como también en lecto - escritura. Hay estudiantes que no pueden resolver un problema sencillamente porque no lo comprenden” .

Aunque el análisis de los resultados en el aprendizaje de la Geometría y la Trigonometría deja claras las falencias y dificultades con las cuales terminan los estudiantes el curso *Matemáticas Básicas*, también es cierto que no se estableció un análisis previo de los conocimientos que poseen los estudiantes al iniciar el curso. El análisis a priori hubiera enriquecido las posibilidades de interpretación de los resultados. Aunque la caracterización de los estudiantes no se pudo enriquecer con la prueba de entrada, los resultados acerca de las dificultades en el aprendizaje se pueden mejorar a través de la implementación de situaciones problemáticas que requieran un mayor uso de cambios entre representaciones, que impliquen diferentes modos de comunicar resultados matemáticos. Ahora bien, pensar en una solución para cerrar la brecha de lo aprendido en un colegio y el acceso a la universidad es utópico, sin embargo, sí tiene sentido crear una propuesta para darle herramientas matemáticas básicas para la vida universitaria.

5.4.1 Fortalezas en el proceso

- Dentro de los beneficios recibidos que más señalaron los estudiantes que culminaron *Matemáticas Básicas*, está el desarrollo de habilidades y destrezas de razonamiento y obtener nuevos conocimientos matemáticos. Estos elementos son importantes puesto que representan un indicador para el éxito de los estudiantes en los cursos de matemáticas universitarias.
- Se fortaleció la comprensión de los conceptos semejanza y congruencia, y aprendieron a realizar demostraciones deductivas sencillas para encontrar que dos triángulos son semejantes.
- Los estudiantes reconocen el concepto de volumen de un cuerpo geométrico como la cantidad de espacio que ocupa dicho cuerpo, reconocen distintas transformaciones de los sólidos y aplican sin dificultad las fórmulas matemáticas para encontrar el volumen.
- Se fortaleció la capacidad de resolver problemas, mejorando las habilidades para interpretar textos matemáticos, determinando elementos importantes dentro de un problema y aplicando procedimientos algorítmicos para resolverlo.
- Los estudiantes reconocen los distintos tipos de ángulos, ya sea según su medida (agudo, recto, obtuso, nulo, completo, negativo), sea con respecto a su posición (consecutivos, adyacentes, opuestos por el vértice), según su suma (complementarios o suplementarios), dados entre paralelas (correspondientes, alternos internos, alternos externos), o en la circunferencia (central, inscrito, semiinscrito, interior, exterior, circunscrito).
- Otra fortaleza es la capacidad de comprender y aplicar en un problema dado la ley de seno. Los estudiantes reconocen en un problema, las condiciones para aplicar esta propiedad de los triángulos.
- Presentan capacidad en aplicación y comprensión de la ley del coseno. Logran resolver el ejercicio aplicando los medios adecuados.
- En las funciones trigonométricas son capaces de hacer gráficas y analizar los movimientos en el plano.

- Los estudiantes aprenden los conceptos, los aplican, encuentran las relaciones trigonométricas en un triángulo rectángulo, aplican el Teorema de Pitágoras y son capaces de encontrar relaciones entre los ángulos y los lados del triángulo rectángulo.
- En cuanto a la motivación, afirman que durante todas las clases mantuvieron el interés por la materia, más por ser de primer semestre y estar a la expectativa del nivel de los cursos universitarios en matemáticas.
- Se hace un reconocimiento acerca de la estructura y orden de los temas del curso. Tanto en la claridad, como en estructuración, en aplicabilidad y concreción, los estudiantes dan buenas valoraciones.
- Los textos guías del curso manejan lenguaje adecuado, lo cual genera facilidad de comprensión, por tal motivo fueron utilizados constantemente para repasar y estudiar para las evaluaciones.
- Los estudiantes dedican suficiente tiempo extraclase para estudiar las temáticas trabajadas en clase.

5.4.2 Dificultades en el proceso

- Con respecto a áreas y perímetros en figuras curvas, los resultados muestran que aún es un tema que presenta dificultad para conceptualizar, tanto desde el punto de vista de las propiedades como de los procedimientos geométricos.
- Dificultad para hacer deducciones lógicas y demostrar algunas propiedades de las figuras geométricas.
- Los estudiantes no son capaces de desarrollar procedimientos adecuados para hallar el área superficial de cuerpos geométricos. Además, presentan falencias para reconocer transformaciones de los sólidos y así deducir propiedades, descomponer las figuras y encontrar el área superficial a partir de las fórmulas de los cuerpos básicos.
- Los estudiantes no logran desarrollar eficazmente los procesos algebraicos aplicados a las identidades trigonométricas. Es decir, no encuentran expresiones trigonométricas equivalentes a partir de las identidades básicas y operaciones algebraicas.
- Los estudiantes no dedican tiempo para asistir a las asesorías como medio de profundización en los temas. Este espacio es desaprovechado y no se acercan para aclarar dudas.
- Falta mejorar la estructura y presentación de los datos y fórmulas matemáticas. Los estudiantes no son capaces de ordenar las ideas y los procesos matemáticos para comunicar su razonamiento.

Capítulo 6

Propuesta Metodológica

6.1 Objetivos

6.1.1 Objetivos generales de aprendizaje

- Calcular medidas en figuras y cuerpos geométricos, aplicando las fórmulas y procedimientos básicos de geometría y trigonometría.
- Desarrollar habilidades necesarias para aplicar los conocimientos geométricos y trigonométricos a través de problemas, y así comprender el mundo físico que los rodea.

6.1.2 Objetivos específicos: Geometría Plana

- Conocer los axiomas, postulados, teoremas y corolarios que rigen a la geometría plana, y desarrollar capacidades de deducción para lograr demostraciones mediante un conjunto de razonamientos.
- Caracterizar y definir con precisión elementos geométricos, de tal forma que se puedan construir y clasificar a partir de sus propiedades.
- Identificar las rectas y los puntos notables de un triángulo y reconocer sus propiedades, de tal forma que puedan ser aplicados a situaciones problema.
- Comprender y aplicar en situaciones problema las fórmulas de cálculo del área y perímetro de las principales figuras planas.

6.1.3 Objetivos específicos: Geometría Espacial

- Clasificar y enunciar propiedades de los principales cuerpos geométricos (sólidos regulares, prismas, pirámides y cuerpos redondos).
- Plantear y resolver problemas empleando elementos de la geometría del espacio.
- Comprender y utilizar las fórmulas de volúmenes y área superficial de los cuerpos geométricos, de tal forma que puedan ser aplicados en la resolución de problemas de la vida cotidiana.

6.1.4 Objetivos específicos: Trigonometría

- Identificar los conceptos básicos de la trigonometría plana, especialmente los diferentes sistemas de medición de ángulos.
- Establecer las relaciones matemáticas entre las medidas de las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo con las medidas de sus ángulos, de manera que resulte posible comprender el concepto de razón trigonométrica y sus definiciones.
- Resolver problemas topográficos y del mundo físico cuyo modelo matemático implique aplicar las distintas relaciones trigonométricas (razones trigonométricas, Teorema de Pitágoras, ley del seno y del coseno).
- Conocer las funciones trigonométricas básicas (seno, coseno y tangente) y las secundarias (cotangente, secante y cosecante), saber representarlas en el plano cartesiano y verificar su naturaleza periódica.
- Adquirir el concepto de identidad trigonométrica, de tal forma que se resuelvan ejercicios de aplicación.
- Identificar y resolver ecuaciones trigonométricas.

6.2 Programa de estudio: Geometría y Trigonometría

En la escogencia de los contenidos a impartir en geometría y trigonometría fue necesario seleccionarlos mediante tres ejes temáticos que abarcan los conocimientos necesarios que deben adquirir los estudiantes al finalizar el curso *Matemáticas Básicas*, trabajados desde las dimensiones conceptual, procedimental y actitudinal, evitando en el alumno la adquisición de una base de datos, y en su lugar, lograr el verdadero aprendizaje. Sin embargo, es importante ver estos tres ejes ligados uno de otro, de tal forma que los estudiantes encuentren las regularidades y convergencias de estas dos ramas, y puedan determinar cuáles son los puntos que las diferencian, lográndose fomentar la obtención de las competencias que les permitan conducirse de forma efectiva en el proceso de aprendizaje (ver Figura 6.1: Mapa conceptual).

A continuación se detallan los temas a enseñar:

6.2.1 Geometría plana

1. Introducción, Rectas y ángulos.
2. Antecedentes históricos.
3. Conceptos básicos (punto, recta, plano).
4. Sistema de medición.
5. Divisiones de la línea recta (semirrecta, segmento).
6. Posiciones de la recta en el plano.
7. Definición, notación y clasificación de ángulos.
8. Unidades de medidas de ángulos.
9. Conversiones.
10. Medición de ángulos.

11. Polígonos y figuras circulares.
12. Definición, notación y clasificación de triángulos.
13. Rectas y puntos notables en el triángulo.
14. Congruencia de triángulos.
15. Semejanza de triángulos.
16. Definición, notación y clasificación de polígonos.
17. Clasificación de cuadriláteros.
18. ángulos interiores y exteriores.
19. Diagonales.
20. Perímetro y área.
21. Definición y notación de la circunferencia.
22. Elementos de la circunferencia.
23. ángulo en la circunferencia.
24. Perímetro y área de figuras circulares.

6.2.2 Geometría espacial

1. Definición, notación y clasificación de sólidos.
2. Poliedros.

3. Sólidos regulares.
4. Cuerpos redondos.
5. Volumen y área superficial.

6.2.3 Trigonometría

1. Concepto de trigonometría.
2. Razones y relaciones trigonométricas.
3. Funciones trigonométricas de ángulos agudos.
4. Resolución de triángulos rectángulos.
5. Signo de las funciones trigonométricas.
6. Identificación de funciones en el círculo unitario.
7. Funciones de ángulos de cuadrantes.
8. Ley de los senos.
9. Ley de los cosenos.
10. Solución de triángulos oblicuángulos.
11. Identidades fundamentales.
12. Demostración de identidades.
13. Ecuaciones trigonométricas.

6.3 Red conceptual

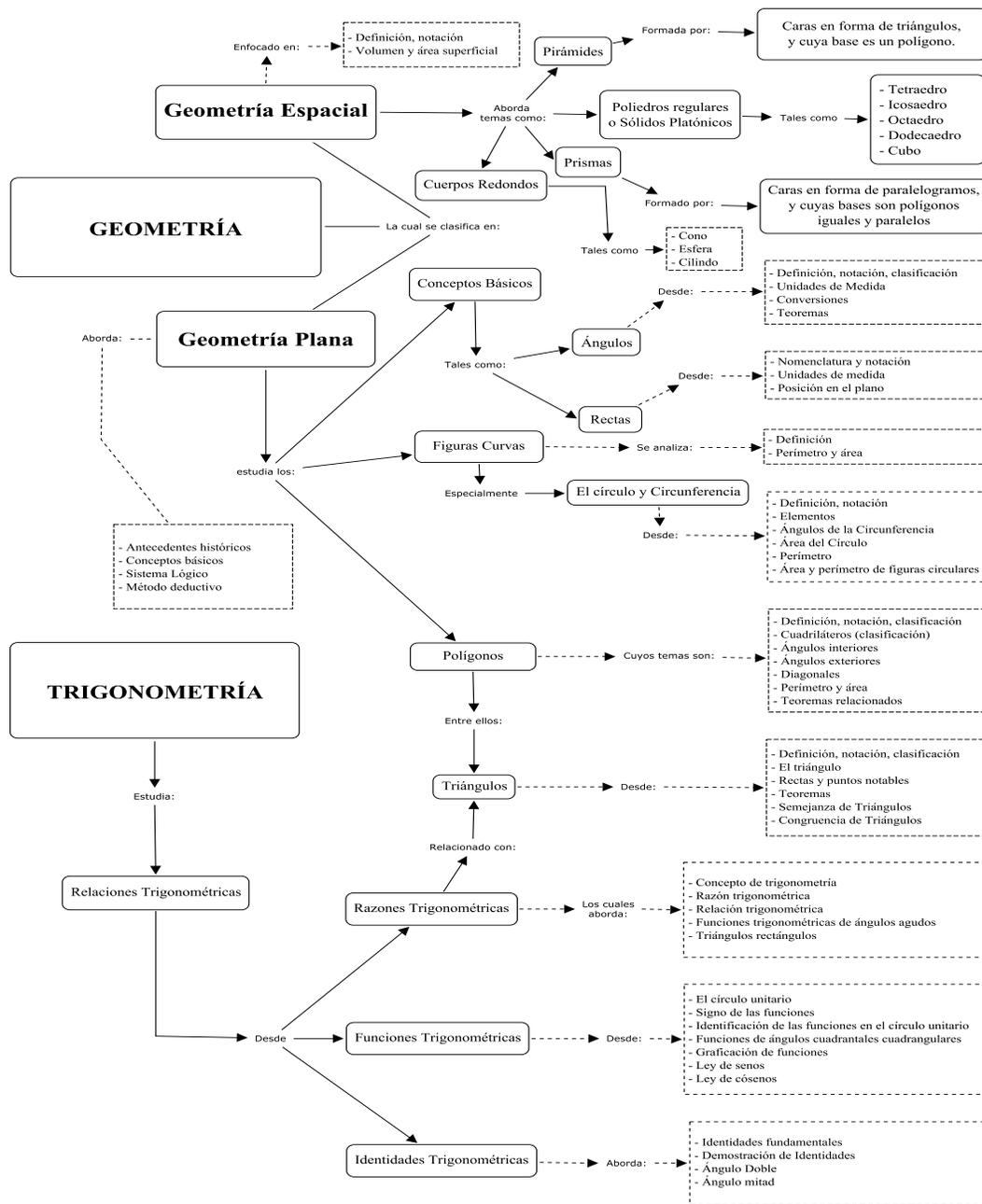


Figura 6.1: Red conceptual: Geometría y Trigonometría

6.4 Competencias a desarrollar

- Formular y resolver problemas en donde se identifiquen variables, algoritmos, información de diagramas, textos, buscando pruebas para fundamentar sus resultados y así evaluar, juzgar o inferir de acuerdo con sus procedimientos.
- Manejar el lenguaje algebraico para el proceso de resolución de problemas y ejercicios de aplicación.
- Manejar y procesar información necesaria en sus procesos de aprendizaje, especialmente en lo concerniente a procedimientos matemáticos.
- Desarrollar algoritmos para resolver problemas reales y buscar pruebas para sustentar sus resultados.
- Leer y comprender textos matemáticos, de tal forma que argumenten y comuniquen resultados.
- Evaluar la pertinencia de lo obtenido.

6.5 Estrategias generales

- Lectura y análisis de textos matemáticos formales (comentadas en las clases).
- Graficación de funciones, dibujos geométricos y planos a escala.
- Planteamiento de problemas.
- Presentación de resultados.
- Utilización de páginas web.
- Actividades extraclase.
- Trabajos en equipo.
- Trabajos individuales.
- Explicaciones magistrales.
- Asesorías extraclases.
- Utilización de software de matemáticas para validar procedimientos (Cabri, Geogebra, Maple, Mathematica).

6.5.1 Procedimientos: Geometría Plana

- Utilización de la terminología y notaciones adecuadas para describir objetos geométricos, reconociendo posiciones de rectas y de ángulos.
- Elaboración y utilización de estrategias personales de clasificación de acuerdo con las propiedades de las figuras geométricas bidimensionales.
- Reconocimiento de propiedades de los triángulos y los cuadriláteros.
- Aplicación de algoritmos para hallar áreas y perímetros de figuras geométricas.
- Clasificación de figuras en términos de congruencia y semejanza, y aplicación de estas relaciones en la resolución de problemas.
- Utilización de distintas estrategias para la resolución de problemas geométricos, describiendo de forma oral o escrita los procedimientos utilizados.

6.5.2 Procedimientos: Geometría Espacial

- Clasificación de acuerdo con las propiedades de los cuerpos geométricos.
- Obtención y reconocimiento de un cuerpo geométrico a partir de la unión de otros.
- Utilización de la terminología y notaciones adecuadas para describir objetos tridimensionales, especialmente cuerpos geométricos.
- Utilización de las propiedades y conceptos de la geometría espacial en la resolución de problemas concretos.
- Aplicación de algoritmos para hallar volúmenes y áreas superficiales en cuerpos geométricos.

6.5.3 Procedimientos: Trigonometría

- Explicación e identificación de las relaciones existentes entre los lados del triángulo.
- Resolución de problemas relacionados con los contenidos.
- Desarrollo y análisis de gráficas de funciones.
- Elaboración de ejercicios de identidades trigonométricas por medio de explicaciones magistrales y de consultas bibliográficas.
- Resolución de ecuaciones trigonométricas.
- Alternar el trabajo individual con el de grupo, y propiciar el intercambio de ideas y procedimientos trigonométricos entre los estudiantes.

6.6 Medios y mediadores

- Guías para los estudiantes.
- Ejercicios y problemas.
- Calculadora y computador.
- Libro de texto guía.
- Fotocopias y material impreso.
- Tablero y tizas.
- Regla, escuadra y compás.
- Marcadores y lapiceros.
- Software para graficar.

6.7 Evaluación

La evaluación está basada en datos cuantitativos sobre su proceso de aprendizaje: conceptos aprendidos, capacidades de planificar procedimientos, resolución de problemas, lenguaje adecuado en el desarrollo de ejercicios de aplicación, qué esfuerzos realiza y qué avances logra en su aprendizaje. La valoración conjunta de logros, avances y esfuerzos será lo que permita, tanto al profesor como al estudiante, tomar las decisiones sobre los métodos de estudio. La evaluación del curso *Matemáticas Básicas* tiene en cuenta los siguientes aspectos:

- Tareas extraclase: talleres para entregar.
- Realización de pruebas escritas al final de los temas.
- Lista de asistencia a cada una de las sesiones de clase.

Criterios de Evaluación	
Conceptos y terminología	<ul style="list-style-type: none">- Explica y demuestra completa comprensión del concepto matemático.- Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
Razonamiento matemático	<ul style="list-style-type: none">- Usa razonamiento matemático complejo y refinado.- Aplica procesos deductivos para demostrar teoremas y relaciones entre diferentes objetos matemáticos.
Aplicación de procedimientos matemáticos	<ul style="list-style-type: none">- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, geométricos y algebraicos, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.- Cuantifica y representa matemáticamente las magnitudes de los objetos geométricos y trigonométricos.

Resolución y planteamiento de problemas.	<ul style="list-style-type: none"> - Utiliza distintas estrategias como la particularización, la representación gráfica, organización de la información o ensayo y error, a la hora de resolver problemas.
Habilidad para comunicar conceptos y procedimientos	<ul style="list-style-type: none"> - Presenta adecuada y ordenadamente manifestaciones orales y escritas en el desarrollo de un ejercicio, con procesos matemáticos bien razonados y argumentados. - Tiene letra legible, con buena ortografía y justifica correctamente los distintos procedimientos.

6.8 Matemática formal y guías para el estudiante

Las guías de aprendizaje, elemento fundamental de la propuesta metodológica para la enseñanza de geometría y trigonometría, promueven el trabajo individual y en equipo, con actividades que propician la reflexión y el aprendizaje colaborativo por medio de la interacción, la participación activa y la construcción de conocimientos. Estas guías fueron elaboradas inicialmente por la “Escuela de Matemáticas” de la Universidad Nacional de Colombia - Sede Medellín, y ahora se hicieron algunas modificaciones, de tal forma que cobren mayor importancia en el desarrollo de las clases. Las guías fueron modificadas a partir de las fortalezas y debilidades encontradas en los estudiantes, además retoma la matemática formal de los textos de Stewart (2007), Leithold (2008) y el “curso de geometría” de Felipe de Jesús Landaverde.

La guía de aprendizaje constituye un recurso muy importante, ésta apunta a reforzar la comprensión de la información, direcciona el trabajo de la clase y posibilita la construcción y comparación de los conocimientos adquiridos. Por otro lado, las guías diseñadas para los estudiantes y profesores forman una herramienta básica para el trabajo, permitiendo el análisis sistemático y conceptual, profundizan e integran contenidos y promueven la reflexión y la autonomía de los estudiantes.

En este sentido, la propuesta intenta darle mayor funcionalidad a las guías, anexándole los ejercicios para desarrollar en clase, sea por grupos o de manera expositiva por parte del profesor, los cuales posibilitan que los estudiantes previamente tengan claridad acerca del desarrollo de las clases, y lleven planteamientos claros a cada uno de los encuentros. Por otro lado, se adiciona el complemento de ejercicios de aplicación extraclase, los cuales posibilitan el contacto directo con el objeto de estudio y permite plantear interrogantes, problemas, hipótesis y establecer relaciones con los conocimientos adquiridos. Además, les da material de estudio para fomentar la dedicación extraclase y acercamiento a las asesorías.