Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen XV No. 1 (2008), pp. 42–55

UNA NUEVA GENERALIZACIÓN DE LOS ESPACIOS $\mathbf{Semi - T_D}$

JESÚS ÁVILA GUZMÁN (*)
RONALD GENTIL RODRÍGUEZ (**)

Abstract. En este artículo se introducen los espacios $semi - T_{ac}$ como una generalización de los espacios $semi - T_D$ y de los espacios T_{ac} (introducidos en [11]). También se presentan algunas propiedades de estos espacios, relacionadas fundamentalmente con subespacios, funciones semi-continuas y homeomorfismos.

Palabras claves. Espacio topológico, puntos de acumulación, espacios $semi - T_D$, espacios T_{ac}.

2000 Mathematics Subject Classification: 54D10, 54A10.

Abstract. In this paper we introduce $semi - T_{ac}$ spaces as a generalization of $semi - T_D$ spaces and of T_{ac} spaces (introduced in [11]). Also, we present some properties of these spaces related to subspaces, semi-continuous functions and homeomorphisms.

Key words and phrases. Topological space, accumulation points, $semi-T_D$ spaces, T_{ac} spaces.

1. Introducción

Un espacio topológico se llama T_D, si los puntos de acumulación de todo punto es un cerrado. Esta noción topológica fue introducida por C. E. Aull y W. J. Thron [2] en 1963. Allí mostraron que esta noción se encuentra entre los axiomas bajos de separación, es decir, aquellos que se encuentran entre T_0 y T_1. Posteriormente con la introducción de los conjuntos semi-abiertos, definidos por N. Levine [9] en 1963; todas las nociones topológicas que involucraban abiertos, tendrían su correspondiente usando semi-abiertos. En

(*) Jesús Ávila Guzmán, Depto. de Matemáticas y Estadística, Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia. E-mail: javila@ut.edu.co
(**) Ronald Gentil Rodríguez. E-mail: ronald12cster@gmail.com
Trabajo parcialmente financiado por la Oficina de Investigaciones y Desarrollo Científico de la Universidad del Tolima (Colombia).

este sentido, se introdujeron las nociones de semi- separación, semi-conexidad, semi-compacidad, semi-continuidad, etc. [1,2,3, 4,5,6,9,13]. En particular, S. P. Arya y M. P. Bhamini estudiaron la noción $semi - T_D$ [1,3,4], como una generalización de la noción T_D. Otra vía para generalizar la noción T_D, fue presentada por C. M. Monsalve et al. [11] en 2007. Ellos definieron los subespacios $\delta(X) = \{x \in X \mid \{x\}'\text{es cerrado}\}$ llamado el conjunto de puntos ac-cerrados y $\lambda(X) = \{x \in X \mid \{x\}' \cap \delta(X) = \emptyset\}$ conjunto de puntos ac-libres. Entonces, definieron los espacios T_{ac} como aquellos donde $\lambda(X) \subseteq \delta(X)$. Y probaron entre otras propiedades que T_D implica T_{ac}, pero T_{ac} no implica T_0. El objetivo de este trabajo es generalizar las nociones $semi - T_D$ y T_{ac}. Para esto se definen los subespacios $\delta_s(X) = \{x \in X \mid \{x\}' \text{ es semi-cerrado}\}$ y $\lambda_s(X) = \{x \in X \mid \{x\}' \cap \delta_s(X) = \emptyset\}$. Y siguiendo el mismo esquema que en [11], se definen los espacios $semi - T_{ac}$ como aquellos donde $\lambda_s(X) \subseteq \delta_s(X)$. Además, se prueban propiedades de los operadores δ_s y λ_s, y se comparan con las obtenidas en [11] para δ y λ. También se estudian algunas condiciones suficientes para que la propiedad $semi - T_{ac}$ sea hereditaria y el comportamiento de esta propiedad por medio de homeomorfismos, funciones semi-continuas e irresolutas.

2. Preliminares

Para el desarrollo de este trabajo, es necesario utilizar las siguientes proposiciones y definiciones básicas de topología. Las demostraciones pueden ser consultadas en [7] y [12].

Proposición 2.1. Sea (X, τ) un espacio topológico, entonces

a) Si C es cerrado y $x \in C$ entonces $\{x\}' \subseteq C$.
b) Si A es un subespacio de X y $B \subseteq A$, entonces $B'_A = B'_X \cap A$.
c) Si $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \upsilon)$ es un homeomorfismo, entonces para cada $x \in X$, se tiene que $f(x)'_Y = f(x'_X)$.

Definición 2.2. Un subconjunto D de un espacio topológico (X, τ), se llama denso si $cl(D) = X$.

Proposición 2.3. Si D es denso y V es abierto, entonces $cl(V) = cl(V \cap D)$.

La noción de conjunto semi-abierto fue introducida por N. Levine en [9]. A partir de esto, todas las nociones topológicas definidas en términos de abiertos, tendrían su análogo en términos de semi-abiertos. A continuación se define esta importante noción y algunas de sus propiedades.

Definición 2.4. Sea (X, τ) un espacio topológico. $S \subseteq X$ es semi-abierto si existe un abierto V en X, tal que, $V \subseteq S \subseteq cl(V)$. El complemento de un conjunto semi-abierto es un conjunto semi-cerrado.

Proposición 2.5. Sea (X, τ) un espacio topológico.

a) S es semi-abierto, si y sólo si, $S \subseteq cl(int(S))$.
b) Todo conjunto abierto es semi-abierto.
c) Si A es abierto y S semi-abierto, entonces $A \cap S$ es semi-abierto.
d) C es semi-cerrado, si y sólo si, $int(cl(C)) \subseteq C$.
e) Todo conjunto cerrado es semi-cerrado.

Un estudio muy completo sobre las nociones semi-topológicas anteriormente mencionadas, se encuentra en [13]. Además, allí también estudian el semi-interior, la semi-adherencia, la semi-frontera, entre otras.

Ahora se definen los subespacios $\delta(X)$ y $\lambda(X)$, introducidos en [11]. Por medio de ellos es que se definen los espacios T_{ac}.

Definición 2.6. Si (X, τ) es un espacio topológico, entonces

$$\delta(X) = \{x \in X \mid \{x\}' \text{ es cerrado}\}$$

$$\lambda(X) = \{x \in X \mid \{x\}' \cap \delta(X) = \emptyset\}.$$

Definición 2.7. Un espacio topológico (X, τ), se llama T_{ac} si $\lambda(X) \subseteq \delta(X)$.

Las propiedades fundamentales de los operadores δ, λ y de los espacios T_{ac}, pueden ser consultadas en [11].

Definición 2.8. Un espacio topológico (X, τ) se llama:

a) T_D si para todo $x \in X$, $\{x\}'$ es cerrado.
b) $Semi - T_D$ si para todo $x \in X$, $\{x\}'$ es semi-cerrado.

La noción de semi-abierto ha permitido definir además los espacios $semi - T_2$, $semi - T_1$, $semi - T_0$, entre otras. Un estudio de ellos se encuentra en [1], [2], [3], [4] y [5].

De las definiciones anteriores se tiene el siguiente diagrama de implicaciones estrictas. Nótese que todo espacio T_D es $semi - T_D$.

$$\begin{array}{ccc} T_D & \Longrightarrow & semi - T_D \\ \Downarrow & & \\ T_{ac} & & \end{array}$$

Figura 1

Definición 2.9. La función $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \upsilon)$, se llama:

a) Semi-continua si $f^{-1}(V)$ es semi-abierto, para todo abierto V de Y.
b) Irresoluta si para todo semi-abierto S de Y, se tiene que $f^{-1}(S)$ es semi-abierto en X.
c) Pre-semi-abierta si para todo semi-abierto A de X, se tiene que $f(A)$ es semi-abierto en Y.
d) Semi-homeomorfismo si es biyectiva, irresoluta y pre-semi-abierta.

Las siguientes proposiciones relacionan las funciones continuas, abiertas y homeomorfismos; con las funciones irresolutas, pre-semi-abiertas y semi-homeomorfismos. Las demostraciones pueden ser consultadas en [6].

Proposición 2.10. Toda función continua y abierta entre espacios topológicos, es irresoluta y pre-semi-abierta.

Proposición 2.11. Todo homeomorfismo es un semi-homeomorfismo.

Proposición 2.12. Todo semi-invariante topológico es un invariante topológico.

3. Los Subespacios $\delta_{\mathbf{s}}(\mathbf{X})$ y $\lambda_{\mathbf{s}}(\mathbf{X})$

En este numeral se definen los subespacios $\delta_s(X)$ y $\lambda_s(X)$, similarmente a los subespacios $\delta(X)$ y $\lambda(X)$, introducidos en [11]. Para esto, se utiliza la noción de conjunto semi-cerrado. Además, se prueban algunas propiedades y se comparan con las obtenidas para $\delta(X)$ y $\lambda(X)$.

3.1 Definición y Ejemplos

Definición 3.1.1. Sea (X, τ) un espacio topológico. Se definen los subespacios $\delta_s(X)$ y $\lambda_s(X)$ como:

$$\delta_s(X) = \{x \in X \mid \{x\}' \text{ es semi-cerrado}\}$$

$$\lambda_s(X) = \{x \in X \mid \{x\}' \cap \delta_s(X) = \emptyset\}.$$

Nótese que $\delta_s(X)$ es una generalización de $\delta(X)$. La relación entre los subespacios $\delta_s(X)$, $\lambda_s(X)$ y $\delta(X)$, $\lambda(X)$ se presenta a continuación.

Proposición 3.1.2. En un espacio topológico (X, τ) se cumple:

a) $\delta(X) \subseteq \delta_s(X)$.
b) $\lambda_s(X) \subseteq \lambda(X)$.

Demostración. a) Se obtiene de manera directa ya que todo conjunto ce-rrado es semi-cerrado.

b) Sea $p \in \lambda_s(X)$, entonces $\{p\}' \cap \delta_s(X) = \emptyset$ y por $a)$ se tiene $\{p\}' \cap \delta(X) = \emptyset$. Luego $p \in \lambda(X)$.$\boxdot$

Ejemplo 3.1.3. Sea $(\mathbb{R}, \tau)$ el espacio topológico donde τ es la topología generada por la base $\beta = \{(-a, a) \mid a \in \mathbb{R}^+\}$. Encontremos los subespacios $\delta(\mathbb{R}), \lambda(\mathbb{R}), \delta_s(\mathbb{R})$ y $\lambda_s(\mathbb{R})$.

Si $p > 0$, entonces $\{p\}' = (-\infty, -p] \cup (p, +\infty)$. Ahora si $p < 0$, $\{p\}' = (-\infty, p) \cup [-p, +\infty)$. Finalmente, si $p = 0$, $\{0\}' = R - \{0\}$.

Se observa que para todo p, $\{p\}'$ no es cerrado. Así $\delta(\mathbb{R}) = \emptyset$ y $\lambda(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Ahora, $int(cl(\{p\}')) = int((-\infty, -p] \cup [p, +\infty)) = \emptyset \subseteq \{p\}'$. Por tanto $(-\infty, -p] \cup (p, +\infty) = \{p\}'$ es semi-cerrado.

De igual manera se obtiene que $\{p\}'$ es semi-cerrado cuando $p < 0$.

Para $p = 0, \{0\}' = \mathbb{R} - \{0\}$ no es un semi-cerrado ya que $int(cl(\{0\}')) = int(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \nsubseteq \mathbb{R} - \{0\} = \{0\}'$.

Por tanto, $\delta_s(\mathbb{R}) = \mathbb{R} - \{0\}$ y $\lambda_s(\mathbb{R}) = \emptyset$.

3.2 Propiedades de los Operadores δ_s y λ_s

Uno de los objetivos de este trabajo es determinar si los operadores δ_s y λ_s cumplen propiedades similares a las obtenidas en [11], con los operadores δ y λ. Allí por ejemplo probaron la idempotencia del operador δ y algunas contenencias que se daban cuando se componían los dos operadores.

Proposición 3.2.1. Sea (X, τ) un espacio topológico, entonces se cumple:

a) $\delta_s(\delta_s(X)) \subseteq \delta_s(X)$.
b) $\delta_s(X) \cap \lambda_s(X) \subseteq \lambda_s(\delta_s(X))$.
c) $\delta_s(\lambda_s(X)) \subseteq \lambda_s(X)$.
d) $\lambda_s(\delta_s(X)) \subseteq \delta_s(X)$.
e) $\lambda_s(\lambda_s(X)) \subseteq \lambda_s(X)$.

Demostración. a), c), d) y e) Evidentes.

b) Si $x \in \delta_s(X) \cap \lambda_s(X)$, entonces $x \in \delta_s(X)$ y $x \in \lambda_s(X)$. Por tanto $\{x\}'_X \cap \delta_s(X) = \emptyset$. Ahora, como $x \in \delta_s(X)$, entonces $\{x\}'_X \cap \delta_s(X) = \{x\}'_{\delta_s(X)} = \emptyset$. Luego $\{x\}'_{\delta_s(X)} \cap \delta_s(\delta_s(X)) = \emptyset$. Entonces $x \in \lambda_s(\delta_s(X))$.$\boxdot$

En los siguientes ejemplos se muestra que las otras contenencias de a), b), c) y d) de la Proposición 3.2.1, no se tienen en general. Para la otra contenencia de e), no contamos con un contra-ejemplo ni con una demostración.

Ejemplo 3.2.2. Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $\tau = \{\{3, 4\}, \{2, 3, 4, 5\}, \emptyset, X\}$, una topología sobre X. Entonces se tiene que $\delta_s(X) = \{1, 2, 5, 6\}$, $\lambda_s(X) = \emptyset$, $\delta_s(\delta_s(X)) = \{1, 6\}$ y $\lambda_s(\delta_s(X)) = \emptyset$. Así $\delta_s(X) \nsubseteq \delta_s(\delta_s(X))$.

Ejemplo 3.2.3. Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $\tau = \{\{1, 2\}, \emptyset, X\}$, una topología sobre X. Entonces se tiene que $\delta_s(X) = \{3, 4, 5\}$, $\lambda_s(X) = \emptyset$, $\delta_s(\delta_s(X)) = \emptyset$ y $\lambda_s(\delta_s(X)) = \delta_s(X)$. Así $\lambda_s(\delta_s(X)) \nsubseteq \delta_s(X) \cap \lambda_s(X)$.

Ejemplo 3.2.4. Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales y $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$. Entonces se tiene que $\delta_s(\mathbb{R}) = \emptyset$ y $\lambda_s(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Así, $\delta_s(\lambda_s(\mathbb{R})) = \delta_s(\mathbb{R}) = \emptyset$. Por tanto $\lambda_s(\mathbb{R}) \nsubseteq \delta_s(\lambda_s(\mathbb{R}))$.

Ejemplo 3.2.5. Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y $\tau = \{\{2\}, \emptyset, X\}$ una topología sobre X. Entonces se tiene que $\delta_s(X) = X$ y $\lambda_s(X) = \emptyset$. Así, $\lambda_s(\delta_s(X)) = \lambda_s(X) = \emptyset$. Luego $\delta_s(X) \nsubseteq \lambda_s(\delta_s(X))$.

La siguiente proposición muestra una condición suficiente para que se tengan las otras contenencias de c) y e) de la Proposición 3.2.1. Esto permitirá definir más adelante, los espacios $semi - T_{ac}$.

Proposición 3.2.6. Sea (X, τ) un espacio topológico. Si $\lambda_s(X) \subseteq \delta_s(X)$, entonces

a) $\lambda_s(X) \subseteq \delta_s(\delta_s(X))$.
b) $\lambda_s(X) \subseteq \lambda_s(\delta_s(X))$.
c) $\lambda_s(X) \subseteq \delta_s(\lambda_s(X))$.
d) $\lambda_s(X) \subseteq \lambda_s(\lambda_s(X))$.

Demostración. a) Sea $x \in \lambda_s(X)$, entonces $\{x\}'_X \cap \delta_s(X) = \emptyset$. Como $\lambda_s(X) \subseteq \delta_s(X)$ se tiene que $x \in \delta_s(X)$. Además, $\{x\}'_X \cap \delta_s(X) = \{x\}'_{\delta_s(X)} = \emptyset$ y $\emptyset$ es semi-cerrado en $\delta_s(X)$. Por tanto $\{x\}'_{\delta_s(X)}$ es semi-cerrado en $\delta_s(X)$. Así, $x \in \delta_s(\delta_s(X))$.

b) Basta aplicar la hipótesis en la parte b) de la Proposición 3.2.1.

c) Si $x \in \lambda_s(X)$ se tiene que $\{x\}'_X \cap \delta_s(X) = \emptyset$. Como $\lambda_s(X) \subseteq \delta_s(X)$, entonces $\{x\}'_X \cap \lambda_s(X) = \{x\}'_{\lambda_s(X)} = \emptyset$. Por tanto $\{x\}'_{\lambda_s(X)}$ es semi-cerrado en $\lambda_s(X)$. Entonces, $x \in \delta_s(\lambda_s(X))$.

d) Si $x \in \lambda_s(X)$ se tiene que $\{x\}'_X \cap \delta_s(X) = \emptyset$. Como $\lambda_s(X) \subseteq \delta_s(X)$, entonces $\{x\}'_X \cap \lambda_s(X) = \{x\}'_{\lambda_s(X)} = \emptyset$. Así $\{x\}'_{\lambda_s(X)} \cap \delta_s(\lambda_s(X)) = \emptyset$. Por tanto $x \in \lambda_s(\lambda_s(X))$.⊡

Las siguientes proposiciones están encaminadas a encontrar una condición suficiente, para que se cumplan las otras contenencias en a) y b) de la Proposición 3.2.1.

Proposición 3.2.7. Si A es abierto y S semi-abierto, entonces $A \cap S$ es semi-abierto en A.

Demostración. Si $A \cap S = \emptyset$, nada a probar. Supongamos que $A \cap S \neq \emptyset$. Por la parte c) de la Proposición 2.5, existe un abierto O tal que $O \subseteq A \cap S \subseteq cl(O)$. Luego $O \cap A \subseteq A \cap S \cap A \subseteq cl(O) \cap A$ y $O \cap A \subseteq A \cap S \subseteq cl(O) \cap A$. Como $O \subseteq A$ se tiene que $O \cap A \subseteq A \cap S \subseteq cl_A(O) = cl_A(O \cap A)$. Por tanto, $A \cap S$ es semi-abierto en A. ⊡

Corolario 3.2.8. Si A es abierto y S semi-cerrado entonces $A \cap S$ es semi-cerrado en A.

Demostración. S^c es semi-abierto y por la proposición anterior $A \cap S^c$ es semi-abierto en A. Entonces, $(A \cap S^c)^{c_A} = A \cap S$ es semi-cerrado en A.⊡

Proposición 3.2.9. Si $\delta_s(X)$ es abierto entonces:

a) $\delta_s(X) \subseteq \delta_s(\delta_s(X))$.
b) $\lambda_s(\delta_s(X)) \subseteq \delta_s(X) \cap \lambda_s(X)$.

Demostración. *a*) Si $y \in \delta_s(X)$ entonces $\{y\}'$ es semi-cerrado en X. Por el corolario anterior $\{y\}' \cap \delta_s(X) = \{y\}'_{\delta_s(X)}$ es semi-cerrado en $\delta_s(X)$. Por lo tanto $y \in \delta_s(\delta_s(X))$.

b) Basta probar que $\lambda_s(\delta_s(X)) \subseteq \lambda_s(X)$. Si $y \in \lambda_s(\delta_s(X))$ entonces $\{y\}'_{\delta_s(X)} \cap \delta_s(\delta_s(X)) = \emptyset$. Luego $\{y\}' \cap \delta_s(X) \cap \delta_s(\delta_s(X)) = \emptyset$ y por la parte a) se tiene $\{y\}' \cap \delta_s(X) = \emptyset$. Esto implica que $y \in \lambda_s(X)$.⊡

En la siguiente proposición se muestra la relación existente entre el conjunto de puntos cerrados ($\gamma(X)$ según [8]) y los subespacios $\delta_s(X)$ y $\lambda_s(X)$. Nótese que si $\delta_s(X) = X$, entonces $\lambda_s(X) = \gamma(X)$.

Proposición 3.2.10. Si $\{x\}$ es cerrado, entonces $x \in \lambda_s(X) \cap \delta_s(X)$.

Demostración. Como $\{x\}$ es cerrado entonces $\{x\}'_X = \emptyset$, que es semi-cerrado. Por tanto $x \in \delta_s(X)$. Además $\{x\}'_X \cap \delta_s(X) = \emptyset \cap \delta_s(X) = \emptyset$, por lo que $x \in \lambda_s(X)$.$\boxdot$

Nótese entonces que $\gamma(X) \subseteq \lambda_s(X) \cap \delta_s(X)$. Para la otra contenencia no contamos con un contra-ejemplo, ni con una demostración.

4. Espacios Topológicos Semi – $\mathbf{T_{ac}}$

4.1 Definición y Algunas Propiedades

En [11], definen los espacios topológicos T_{ac} como aquellos donde $\lambda(X) \subseteq \delta(X)$. Siguiendo este mismo esquema, a continuación se definen los espacios topológicos *semi*$-T_{ac}$, utilizando los subespacios $\delta_s(X)$ y $\lambda_s(X)$. Muchas otras nociones semi-topológicas han sido definidas y estudiadas, entre ellas semi-interior, semi-clausura, axiomas de semi-separación, semi-compacidad, etc. Algunos de estos tópicos pueden ser consultados en [1], [6] y [13].

Definición 4.1.1. Un espacio topológico (X, τ) se llama *semi*$-T_{ac}$ si $\lambda_s(X) \subseteq \delta_s(X)$.

Ejemplo 4.1.2. Sea $X = \{1, 2, 3, 4\}$ y $\tau = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \emptyset, X\}$. Veamos que X es *semi* $- T_{ac}$.

$$\begin{gathered}\{1\}' = \{2, 3, 4\}, \text{ es semi-cerrado.}\\ \{2\}' = \{3, 4\}, \text{ es semi-cerrado.}\\ \{3\}' = \{4\}, \text{ es semi-cerrado.}\\ \{4\}' = \emptyset, \text{ es semi-cerrado.}\end{gathered}$$

Así $\delta_s(X) = X$ y $\lambda_s(X) = \{4\}$.

Con la siguiente proposición se muestra que los espacios *semi* $- T_{ac}$ son una generalización de los espacios T_{ac}, introducidos en [11]. Esta noción no se encuentra referenciada en la literatura consultada.

Proposición 4.1.3. Todo espacio topológico T_{ac} es *semi* $- T_{ac}$.

Demostración. Como X es T_{ac}, entonces $\lambda(X) \subseteq \delta(X)$. Por la Proposición 3.1.2 se tienen las contenencias $\lambda_s(X) \subseteq \lambda(X)$ y $\delta(X) \subseteq \delta_s(X)$. Luego $\lambda_s(X) \subseteq \lambda(X) \subseteq \delta(X) \subseteq \delta_s(X)$. Así, $\lambda_s(X) \subseteq \delta_s(X)$. Luego X es *semi* $- T_{ac}$.$\boxdot$

Recuérdese que un espacio topológico X es T_D si para todo $x \in X$, $\{x\}'$ es cerrado. Y es *semi* $- T_D$ si para todo $x \in X$, $\{x\}'$ es semi-cerrado. Así, $T_D \Longrightarrow$ *semi*$-T_D$. En la siguiente proposición se muestra la relación existente entre los espacios *semi* $- T_D$ y *semi* $- T_{ac}$.

Proposición 4.1.4. Todo espacio topológico $semi - T_D$ es $semi - T_{ac}$.

Demostración. Se obtiene directamente ya que si el espacio es $semi - T_D$, entonces $\delta_s(X) = X$ y por lo tanto $\lambda_s(X) \subseteq \delta_s(X)$.$\boxdot$

En general el recíproco de las proposiciones anteriores no se cumple, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.1.5. Considérese el espacio topológico del ejemplo 3.1.3. Entonces $\delta(\mathbb{R}) = \emptyset$ y $\lambda(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $\delta_s(\mathbb{R}) = \mathbb{R} - \{0\}$ y $\lambda_s(\mathbb{R}) = \emptyset$. Y como $\lambda_s(X) \subseteq \delta_s(X)$ y $\lambda(X) \nsubseteq \delta(X)$ se tiene que este espacio topológico es $semi - T_{ac}$ y no T_{ac}. Además, nótese que $\{0\}' = \mathbb{R} - \{0\}$ no es semi-cerrado. Por tanto, este espacio no es $semi - T_D$. En consecuencia, $T_{ac} \neq semi - T_{ac}$ y $semi - T_D \neq semi - T_{ac}$.

De las Proposiciones 4.1.3 y 4.1.4, y del ejemplo anterior; el diagrama de la Figura 1 se ve modificado de la siguiente manera. Nótese además, que este diagrama nos permite considerar la propiedad $semi - T_{ac}$, como un nuevo axioma de semi-separación.

$$
\begin{array}{ccc}
T_D & \Longrightarrow & semi - T_D \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
T_{ac} & \Longrightarrow & semi - T_{ac}
\end{array}
$$

Figura 2

4.2 Subespacios

En este numeral se muestra que la propiedad $semi - T_{ac}$ no es hereditaria. Es decir, que no todo subespacio de un espacio $semi - T_{ac}$ es $semi - T_{ac}$. Además, se presentan algunas condiciones suficientes para que un subespacio herede dicha propiedad.

En los siguientes ejemplos se muestra que la propiedad $semi - T_{ac}$ no se hereda a todo subespacio, aún si este es cerrado ó abierto.

Ejemplo 4.2.1. Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $\tau = \{\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}, \emptyset, X\}$ una topología sobre X. Entonces $\delta_s(X) = \{3, 4, 5\}$ y $\lambda_s(X) = \{5\}$. Así, X es $semi - T_{ac}$. Ahora para $A = \{1, 2\}$ se tiene que $\delta_s(A) = \emptyset$ y $\lambda_s(A) = A$. Así, A no es $semi - T_{ac}$.

Ejemplo 4.2.2. Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $\tau = \{\{3\}, \{2, 3, 4\}, \emptyset, X\}$ una topología sobre X. Entonces $\delta_s(X) = X$ y $\lambda_s(X) = \emptyset$. Así, X es $semi - T_{ac}$. Ahora para $A = \{1, 5\}$ se tiene que $\delta_s(A) = \emptyset$ y $\lambda_s(A) = A$. Así, A no es $semi - T_{ac}$.

Ya que la propiedad $semi{-}T_{ac}$ no se hereda a todos los subespacios, las proposiciones siguientes están encaminadas a encontrar algunas clases particulares de subespacios, que sí heredan dicha propiedad.

Proposición 4.2.3. Sea (X, τ) un espacio topológico y $D, S \subseteq X$. Si D es denso y S es semi-abierto en X, entonces $S \cap D$ es semi-abierto en D.

Demostración. Como S es semi-abierto en X, existe un abierto V en X con $V \subseteq S \subseteq cl(V)$. Por la Proposición 2.3 se tiene que $cl(V) \subseteq cl(V \cap D)$. Entonces $V \subseteq S \subseteq cl(V \cap D)$. Así,

$$V \cap D \subseteq S \cap D \subseteq cl(V \cap D) \cap D = cl_D(V \cap D)$$

Por tanto $S \cap D$ es semi-abierto en D.$\boxdot$

Proposición 4.2.4. Sea (X, τ) un espacio topológico y $D, C \subseteq X$. si D es denso y C es semi-cerrado en X, entonces $C \cap D$ es semi-cerrado en D.

Demostración. Si C es semi-cerrado en X, entonces C^c es semi-abierto en X y por la proposición anterior se tiene que $C^c \cap D$ es semiabierto en D. Ahora, como $C^c \cap D = (C \cap D)^{c_D}$, entonces $C \cap D$ es semi-cerrado en D.$\boxdot$

Proposición 4.2.5. Sea (X, τ) un espacio topológico. Si A es denso y $\delta_s(X) \subseteq A$, entonces:

a) $\delta_s(X) \subseteq \delta_s(A)$.
b) $\lambda_s(A) \subseteq \lambda_s(X)$.

Demostración. *a*) Sea $x \in \delta_s(X)$, entonces $\{x\}'$ es semi-cerrado en X. Como A es denso, por la Proposición 4.2.4 se tiene que $\{x\}' \cap A$ es semi-cerrado en A. Además, como $\delta_s(X) \subseteq A$, entonces $x \in A$ y $\{x\}' \cap A = \{x\}'_A$ que es semi-cerrado en A. Así, $x \in \delta_s(A)$.

b) Sea $x \in \lambda_s(A)$, entonces $\{x\}'_A \cap \delta_s(A) = \{x\}' \cap A \cap \delta_s(A) = \emptyset$. Por la parte a) se tiene que $\delta_s(X) \subseteq \delta_s(A) \subseteq A$, entonces $\{x\}' \cap \delta_s(X) = \emptyset$. Por tanto $x \in \lambda_s(X)$.$\boxdot$

En la siguiente proposición se presenta una condición suficiente para que un subespacio de un espacio $semi - T_{ac}$, sea $semi - T_{ac}$.

Proposición 4.2.6. Sea (X, τ) un espacio topológico $semi - T_{ac}$ y $A \subseteq X$. Si A es denso y $\delta_s(X) \subseteq A$, entonces (A, τ_A) es $semi - T_{ac}$.

Demostración. Como X es $semi{-}T_{ac}$ se cumple que $\lambda_s(X) \subseteq \delta_s(X)$. Ahora, por la Proposición 4.2.5 se tiene que $\lambda_s(A) \subseteq \lambda_s(X) \subseteq \delta_s(X) \subseteq \delta_s(A)$. Luego (A, τ_A) es $semi - T_{ac}$.$\boxdot$

En la siguiente proposición se relacionan los subespacios $\delta_s(X)$, $\lambda_s(X)$, $\delta_s(A)$ y $\lambda_s(A)$, cuando A es un subespacio abierto y cerrado de X. Esto permitirá más adelante, encontrar otra clase de subespacios que heredan la propiedad $semi-T_{ac}$.

Proposición 4.2.7. Sea (X,τ) un espacio topológico y $A\subseteq X$. Si A es abierto y cerrado, entonces:

a) $\delta_s(X)\cap A=\delta_s(A)$.
b) $\lambda_s(X)\cap A=\lambda_s(A)$.

Demostración. a) Si $x\in\delta_s(X)\cap A$, entonces $\{x\}'$ es semi-cerrado en X y así $(\{x\}')^c$ es semi-abierto. Como A es abierto, $(\{x\}')^c\cap A=A-\{x\}'$ es semi-abierto en X. Ahora, como $x\in A$ y A es cerrado entonces por la parte b) de la Proposición 2.1 se tiene que $\{x\}'_A=\{x\}'\cap A=\{x\}'$. Así, $A-\{x\}'_A$ es semi-abierto en X. Luego existe un conjunto abierto V en X con $V\subseteq A-\{x\}'_A\subseteq cl(V)$. Como $V\subseteq A-\{x\}'_A$, entonces $V\subseteq A$ y $V\cap A=V$. Entonces $V\cap A\subseteq A-\{x\}'_A\subseteq cl(V\cap A)$, lo cual implica que $A-\{x\}'_A$ es semi-abierto en A. Se concluye entonces que $\{x\}'_A$ es semi-cerrado en A. Por lo tanto $x\in\delta_s(A)$.

Si $x\in\delta_s(A)$, entonces $\{x\}'_A$ es semi-cerrado en A y $x\in A$. Como $\{x\}'_A=\{x\}'\cap A$, entonces existe un abierto W en A tal que $W\subseteq A-(\{x\}'\cap A)\subseteq cl_A(W)$. Como $x\in A$ y A es cerrado, entonces por la parte b) de la Proposición 2.1 se tiene que $\{x\}'\cap A=\{x\}'$. Luego $W\subseteq A-\{x\}'=(\{x\}')^c\cap A\subseteq cl_A(W)$. Entonces $W\cup A^c\subseteq((\{x\}')^c\cap A)\cup A^c\subseteq cl(W)\cup A^c=cl(W\cup A^c)$. Ahora como A^c es abierto en X entonces $W\cup A^c$ es abierto en X y $((\{x\}')^c\cap A)\cup A^c=((\{x\}')^c\cup A^c)\cap(A\cup A^c)=(\{x\}'\cap A)^c\cap X=(\{x\}'\cap A)^c=(\{x\}')^c$. Entonces, $W\cup A^c\subseteq(\{x\}')^c\subseteq cl(W\cup A^c)$. Lo cual prueba que $(\{x\}')^c$ es semi-abierto en X. Así, $\{x\}'$ es semi-cerrado en X. Se obtiene entonces que $x\in\delta_s(X)$ y $x\in A$. Por lo tanto $x\in\delta_s(X)\cap A$.

b) Si $x\in\lambda_s(X)\cap A$, entonces $x\in\lambda_s(X)$ y $x\in A$. Así, $\{x\}'\cap\delta_s(X)=\emptyset$. Como A es cerrado y $x\in A$, por la parte b) de la Proposición 2.1 se tiene que $\{x\}'_A=\{x\}'\cap A=\{x\}'$. Entonces $\{x\}'_A\cap\delta_s(X)=\emptyset$ y por la parte a) de esta proposición se tiene que $\{x\}'_A\cap\delta_s(A)=\emptyset$. Por tanto $x\in\lambda_s(A)$.

Si $x\in\lambda_s(A)$, entonces $\{x\}'_A\cap\delta_s(A)=\emptyset$. Por la parte a) se tiene que $\{x\}'\cap A\cap\delta_s(X)\cap A=\emptyset$. Lo cual implica que $\{x\}'\cap\delta_s(X)=\emptyset$, ya que $\{x\}'\subseteq A$ por ser A cerrado. Entonces, $x\in\lambda_s(X)$ y así $x\in\lambda_s(X)\cap A$.$\boxdot$

Proposición 4.2.8. Sea (X,τ) un espacio topológico $semi-T_{ac}$ y $A\subseteq X$. Si A es abierto y cerrado entonces (A,τ_A) es $semi-T_{ac}$.

Demostración. Sea $x \in \lambda_s(A)$, entonces por la parte b) de la proposición anterior se tiene que $x \in \lambda_s(X)$ y como X es $semi-T_{ac}$, $x \in \delta_s(X)$. Finalmente, por la parte a) de la proposición anterior se tiene que $x \in \delta_s(A)$. Por lo tanto, A es $semi - T_{ac}$.$\boxdot$

En el siguiente ejemplo se muestra un subespacio de un espacio $semi - T_{ac}$ que es $semi - T_{ac}$ pero no es abierto, no es cerrado, no es denso y no contiene el subespacio $\delta_s(X)$. De esta forma se observa que el recíproco de las proposiciones 4.2.6 y 4.2.8 no se cumple en general.

Ejemplo 4.2.9. Considérese el espacio topológico $semi - T_{ac}$ del Ejemplo 4.2.2. Para $A = \{1\}$ se tiene que (A, τ_A) es $semi - T_{ac}$. Pero obsérvese que A no es abierto, no es cerrado, no es denso y $\delta_s(X) \nsubseteq A$.

4.3 La Propiedad Semi-$\mathbf{T_{ac}}$ y las Funciones

En este numeral se estudia el comportamiento de la propiedad $semi - T_{ac}$ por medio de funciones semi-continuas, irresolutas y por homeomorfismos. Recuérdese que una función $f : X \longrightarrow Y$ es semi-continua si la imagen recíproca de todo abierto es semi-abierto, irresoluta si la imagen recíproca de todo semi-abierto es semi-abierto y pre-semi-abierta si la imagen directa de todo semi-abierto es semi-abierto. Primero se determinarán condiciones suficientes para que una función $f : X \longrightarrow Y$ cumpla $f^{-1}(\delta_s(Y)) = \delta_s(X)$ y $f^{-1}(\lambda_s(Y)) = \lambda_s(X)$.

Proposición 4.3.1. Sea $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \upsilon)$ un homeomorfismo, entonces:

a) $f^{-1}(\delta_s(Y)) = \delta_s(X)$.
b) $f^{-1}(\lambda_s(Y)) = \lambda_s(X)$.

Demostración. a) Si $p \in f^{-1}(\delta_s(Y))$, entonces $f(p) \in \delta_s(Y)$. Por lo tanto $\{f(p)\}'_Y$ es semi-cerrado en Y. Ahora, como f es continua y abierta, por la Proposición 2.10 se tiene que f es irresoluta, entonces $f^{-1}(\{f(p)\}'_Y)$ es semi-cerrado en X. Además por la parte c) de la Proposición 2.1 se tiene que $\{f(p)\}'_Y = f(\{p\}'_X)$, entonces $f^{-1}(f(\{p\}'_X))$ es semi-cerrado en X. Y como f es biyectiva $f^{-1}(f(\{p\}'_X)) = \{p\}'_X$ es semi-cerrado en X. Por tanto $p \in \delta_s(X)$.

Si $p \in \delta_s(X)$, entonces $\{p\}'_X$ es semi-cerrado en X. Por la Proposición 2.10 y por la parte c) de la Proposición 2.1, se tiene que $f(\{p\}'_X) = \{f(p)\}'_Y$ es semi-cerrado en Y. Por tanto $f(p) \in \delta_s(Y)$ y así $p \in f^{-1}(\delta_s(Y))$.

b) Si $q \in f^{-1}(\lambda_s(Y))$, entonces $f(q) \in \lambda_s(Y)$. Por tanto $\{f(q)\}'_Y \cap \delta_s(Y) = \emptyset$. Por la parte c) de la Proposición 2.1, se tiene que $\{f(q)\}'_Y = f(\{q\}'_X)$ y por la parte a) de esta proposición $\delta_s(Y) = f(\delta_s(X))$. Entonces $f(\{q\}'_X) \cap f(\delta_s(X)) =$

$f(\{q\}'_X \cap \delta_s(X)) = \emptyset$. Así, $f^{-1}(f(\{q\}'_X \cap \delta_s(X))) = \{q\}'_X \cap \delta_s(X) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$. Por tanto $q \in \lambda_s(X)$.

Si $q \in \lambda_s(X)$, entonces $\{q\}'_X \cap \delta_s(X) = \emptyset$. Por tanto $f(\{q\}'_X \cap \delta_s(X)) = f(\{q\}'_X) \cap f(\delta_s(X)) = f(\emptyset) = \emptyset$. Por la parte c) de la Proposición 2.1 se tiene que $\{f(q)\}'_Y = f(\{q\}'_X)$. Y por la parte a) de esta proposición $f^{-1}(\delta_s(Y)) = \delta_s(X)$. Entonces $\{f(q)\}'_Y \cap f(f^{-1}(\delta_s(Y))) = \{f(q)\}'_Y \cap \delta_s(Y) = \emptyset$. Así, $f(q) \in \lambda_s(Y)$. De donde $q \in f^{-1}(\lambda_s(Y))$.$\boxdot$

Nótese ahora que la propiedad $semi - T_{ac}$ no se preserva por funciones semi-continuas, ni irresolutas. Esto se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.3.2. Sea $f : (\mathbb{R}, discreta) \longrightarrow (\mathbb{R}, trivial)$, donde $f(x) = x$. Entonces f es continua y por tanto es semi-continua. Además, $(\mathbb{R}, discreta)$ es $semi - T_{ac}$ y $(\mathbb{R}, trivial)$ no. Y f es irresoluta, ya que f es continua y los semi-abiertos en $(\mathbb{R}, trivial)$ coinciden con los abiertos.

Al parecer, la propiedad $semi - T_{ac}$ no se preserva por semi-homeomorfismos. Sin embargo, no contamos con un contra-ejemplo.

Con la siguiente proposición se muestra que la propiedad $semi-T_{ac}$ es un invariante topológico. Recuérdese que todo homeomorfismo es un semi-homeomorfismo y que todo semi-invariante topológico es un invariante topológico. Pero el recíproco en general no se tiene [6].

Proposición 4.3.3. Sea $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \upsilon)$ un homeomorfismo. Si X es $semi - T_{ac}$ entonces Y es $semi - T_{ac}$.

Demostración. Por la parte b) de la Proposición 4.3.1 se tiene que $f^{-1}(\lambda_s(Y)) = \lambda_s(X)$. Como el espacio es $semi - T_{ac}$, entonces $\lambda_s(X) \subseteq \delta_s(X)$. Y por la parte a) de la Proposición 4.3.1 se tiene que $f^{-1}(\delta_s(Y)) = \delta_s(X)$. Así, $f^{-1}(\lambda_s(Y)) \subseteq f^{-1}(\delta_s(Y))$, por lo que $\lambda_s(Y) \subseteq \delta_s(Y)$. Entonces, Y es $semi - T_{ac}$.$\boxdot$

Referencias

[1] Arya S. P. and Bhamini M. P., Some Generalizations of $T_D - spaces$, Math. Vesnik, 6(19)(34)(1992), 221-230.

[2] Aull C. E. and Thron W. J., Separation Axioms Between T_0 and T_1, Indag. Math., 24(1963), 26-37.

[3] Bhamini M. P., Nayar S. P. and Arya S. P., Semi-topological Properties, Internat. J. Math. & Math. Sci., 15(2)(1992), 267-272.

[4] Bhamini M. P. and Nayar S. P., Semi $T_D - spaces$, Math. Vesnik, 49(1997), 81-84.

[5] Caldas M., A Separation Axiom Between $Semi - T_0$ and $Semi - T_1$, Mem. Fac. Sci. Koch. Univ. (math), 18(1997), 37-42.

[6] Crossley S. G. and Hildebrand S. K., Semi-topological Properties, Fund. Math., 74(1972), 233-254.

[7] Engelking R., Outline of General Topology, Nort Holland, Amsterdam (1968).

[8] Gaona P., El Operador de Puntos Cerrados en Topología General. Tesis Maestría, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá (2001).

[9] Levine N., Semi-open Sets and Semi-continuity in Topological Spaces, Amer. Math. Monthly, 70(1963), 36-41.

[10] Maheshwari S. N. and Prasad R., Some New Separation Axioms, Ann. Soc. Sci. Bruxelles, 89(1975), 395-402.

[11] C. M. Monsalve, A. A. Rodríguez y J. Avila Guzmán, A New Generalization of T_D-spaces, Miss. J. Math. Sc., Vol. 19 (1)(2007).

[12] Munkres J. R., Topology a First Course, Prentice-Hall, New Jersey, (1975).

[13] Pacheco C. M., Conjuntos Semi-abiertos, Tesis Universidad nacional de Colombia, Tunja (1990).

[14] VeeraKumar M. K. R. S., Between Closed Sets and g-closed Sets, Departament of Mathematics, Nagarjuna University, Nagarjuna Nagar-522 510, Guntur, A.R. India.(1991).

Recibido: Junio de 2007. Aceptado para publicación: Mayo de 2008