Sobre la ecuación de Black–Scholes

Gerardo Oleaga[1]

Departamento de Matemática Aplicada
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
Madrid

Exploramos la deducción de la ecuación de Black–Scholes de tres maneras distintas y explicamos por qué la ecuación es necesaria en un contexto de precios estocásticos. Después de introducir las herramientas básicas aplicamos las siguientes estrategias para su deducción: la primera utiliza la idea de replicación con una cartera autofinanciada, la segunda utiliza la eliminación local del riesgo y el concepto de *precio del riesgo en el mercado*, y la tercera considera la replicación para el precio *forward* de la opción en función del precio forward del activo. Cuando el precio del subyacente es estocástico concluimos que, para obtener el precio de una opción, es necesario disponer de un modelo de evolución del precio del activo, pues otras estrategias ingenuas de valoración no son aplicables.

Palabras claves: la ecuación de Black–Scholes.

We explore the derivation of the Black–Scholes equation in three different ways and explain why the equation is needed in the context of stochastic prices. After introducing the basic tools we apply the following strategies: the first uses the idea of self–financing portfolio replication, the second uses the local elimination of risk and the concept of *market price of risk*, and the third considers the replication of the forward price of the option based on the forward price of the asset. When the price of the underlying is stochastic we conclude that, to get the price of an option, we must have a model for asset price dynamics, since other naive valuation strategies are not applicable.

Keywords: Black–Scholes equation.

MSC: 62P05, 97M30.

[1] `goleaga@mat.ucm.es`

1 Introducción

El trabajo de Fisher Black y Myron Scholes [4], que aparece en 1973 y en cuyas discusiones previas participó activamente Robert Merton, es un hito en la historia de las Matemáticas Financieras así como lo fue previamente el trabajo de Markowitz sobre selección de carteras [8]. Una historia detallada sobre las dificultades encontradas por los autores para desarrollar y dar a conocer las nuevas ideas de valoración puede leerse en el excelente libro de Peter Bernstein [3].

Esta nota sobre la ecuación de Black–Scholes comienza donde acaba el artículo de Pablo Amster, publicado en este mismo `Boletín de Matemáticas` [1], al cual remitimos al lector para fijar algunas ideas básicas. En estas páginas proponemos un breve repaso de las herramientas matemáticas utilizadas para la valoración de una opción: el modelo browniano geométrico de evolución de precios, el lema de Itô, el concepto de replicación y el de eliminación del riesgo, para con ellas deducir la ecuación de tres modos distintos. El trabajo concluye con una observación interesante en la que no se suele reparar en los libros de texto: si el activo subyacente de la opción evolucionara de manera suave, la fórmula de Black–Scholes no sería necesaria para valorarla. Como veremos, en ese caso sería posible replicar el contrato con una estrategia independiente del modelo de precios del activo subyacente (*cf.* [5]). Esa misma estrategia falla en el caso estocástico, según discutimos hacia el final del artículo.

Los ingredientes básicos que utilizaremos son:

a. El proceso de precios S_t de un activo del mercado (por ejemplo una acción).

b. Una cuenta bancaria elemental con ecuación

$$\begin{aligned} dB_t &= rB_t dt\,, \\ B_0 &= 1\,, \end{aligned} \tag{1}$$

es decir, la variación instantánea de la cuenta es proporcional al dinero que hay en ella a tiempo t y a la longitud del invervalo (dt) del depósito, mientras que la constante de proporcionalidad es r, la tasa de interés, que suponemos constante.

c. Un contrato de una opción *Call* que otorga el derecho, pero no la obligación, de comprar el activo S a un precio K en el instante T (llamado tiempo de ejercicio). El contrato paga en ese instante T la cantidad:

$$C\left(S_T, T\right) = \max\left(S_T - K, 0\right) \ ,$$

donde K es el precio, fijado en el inicio del intervalo, al que el poseedor de la opción puede comprar el activo a tiempo T, si es que le conviene. Si S_T es menor o igual que K, es mejor comprar el activo en el mercado, pues en caso de desigualdad estricta perdería dinero comprando a precio K y en caso de igualdad no necesitaría la opción, al ofrecer el mismo precio que el mercado. En ambos casos no ejerce el derecho de comprar y el valor intrínseco de la misma es cero. Por otra parte, si $S_T > K$ la opción tiene un valor intrínseco positivo, pues el vendedor de la opción compensa con la cantidad $S_T - K > 0$, para que el comprador adquiera el activo al precio K.

d. La hipótesis de *ausencia de oportunidades de arbitraje* o, dicho de otro modo, la imposibilidad de hacer dinero sin asumir riesgos. Las estrategias de inversión que en determinados escenarios permiten ganar dinero con inversión nula se denominan *oportunidades de arbitraje* y se asume que no pueden existir en el mercado (o que desaparecen rápidamente). Esta hipótesis se suele utilizar de la siguiente manera: consideremos dos contratos C^1 y C^2 tales que a tiempo T *valen exactamente lo mismo para todos los estados posibles del mercado.* Si los precios iniciales C_0^1 y C_0^2 fueran distintos, por ejemplo $C_0^1 < C_0^2$, existiría una clara oportunidad de arbitraje. Al inicio del intervalo *vendemos* el contrato C^2 (esto implica el compromiso de responder por las obligaciones contractuales) y compramos el contrato C^1 (esto nos da derecho a cobrar lo estipulado en el contrato en las condiciones establecidas). Al final del intervalo cumplimos con nuestras obligaciones con el contrato C^2, pues $C_T^1 = C_T^2$ entregando lo que recibimos del primer contrato para pagar los compromisos asumidos con el segundo. En el instante inicial hemos ganado $\left(C_0^2 - C_0^1\right)$ y esta cantidad crece en la cuenta bancaria a la tasa de interés continua r. Concluyendo, si no se admiten oportunidades de arbitraje en el modelo, cuando dos contratos tienen valores idénticos para todos los escenarios posibles en un instante dado, deben tener también el mismo precio en los instantes previos.

2 El modelo estocástico de precios

2.1 ¿Son predecibles los precios de las acciones?

Esta pregunta nos lleva al año 1900 y a la tesis doctoral de un joven matemático francés en La Sorbona: Louis Bachelier. En su extraordinario trabajo titulado *La teoría de la especulación* [2] hizo el primer esfuerzo por utilizar las matemáticas para predecir el comportamiento del mercado de acciones e inspiró el estilo de muchos de los trabajos teóricos posteriores. De hecho, descubrió una fórmula que anticipó el trabajo de Einstein sobre el comportamiento de partículas sujetas a choques aleatorios en el espacio. Desarrolló el concepto de proceso estocástico, ahora universal, e hizo el primer intento de valorar contratos tales como futuros y opciones, que ya eran utilizados en esa época.

Bachelier se propuso establecer *la ley de probabilidades del cambio de precios consistente con el estado del mercado en un instante dado*. Esto lo llevó a investigaciones más profundas en la teoría de la probabilidad y de partículas sometidas a choques aleatorios. A pesar de su análisis original y brillante, su trabajo no fue bien valorado y le resultó difícil encontrar un puesto académico. Veinte años después de presentar su tesis explicó que para realizar su modelo se había inspirado en fenómenos naturales, estableciendo un inesperado vínculo que resultó ser una fuente de gran progreso en la modelización matemática de las finanzas.

Breve descripción del modelo propuesto por Bachelier

Bachelier describio los precios como *paseos aleatorios*. Sea X_t la posición de una partícula a tiempo t, con salida a tiempo $t = 0$ desde una posición x_0, que se mueve con periodicidad temporal k una distancia h hacia la izquierda o hacia la derecha dependiendo del resultado de arrojar una moneda normal. Podemos calcular la probabilidad de que la partícula se encuentre en una posición x a tiempo $t = T$:

$$\mathrm{Prob}\left\{X_T = x | X_0 = x_0\right\} .$$

Las posiciones posibles x que puede alcanzar la partícula dependerán del número de veces N que arrojemos la moneda y del tamaño del paso espacial h:

$$X_T = x_0 + \sum_{n=1}^{N} h\, Z_n \,,$$

donde $T := N\,k$, y las Z_n son variables aleatorias con distribución:

$$Z_n = \begin{cases} +1 & p = 1/2 \\ -1 & 1-p = 1/2 \end{cases}$$

Éste es un proceso estocástico discreto, un juego de *suma cero* en el que es igualmente probable ganar o perder la misma cantidad. Se puede probar que el valor esperado de X_T es x_0 y, bajo la condición de independencia de las variables, su varianza es Nh^2. A medida que $N \to \infty$ podemos encontrar a X_T a una distancia arbitraria de su valor inicial. Nótese que como N es el número de pasos necesarios para llegar hasta T, el único modo de obtener una varianza finita al disminuir el paso temporal es que h tienda a cero cuando N tiende a infinito. Por lo tanto, usando que $k = T/N$ tenemos que:

$$\frac{h^2}{k} = \frac{\mathrm{Var}\,(X_T)}{T} \,.$$

Si permitimos que h y k tiendan a cero haciendo que el cociente $\sigma^2 := h^2/k$ permanezca constante, obtenemos siempre una variable final con varianza finita. En ese caso, σ^2 representa a la "varianza por unidad de tiempo":

$$\mathrm{Var}\,(X_T) = \sigma^2 T \,.$$

El problema de hallar la distribución límite de esta variable había sido abordado por el matemático francés (radicado en Gran Bretaña) Abraham de Moivre en la segunda edición de su libro *The doctrine of chances* en 1738. Utilizando el triángulo de Pascal y la aproximación asintótica del factorial demostró lo que se conoce como un caso particular del *teorema central del límite*:

$$\lim_{N\to\infty} P\left(A \leq X_T \leq B\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \int_A^B e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2 T}}\, dx\,.$$

Es decir que la variable X_T, en el límite cuando los pasos temporales y los espaciales tienden a cero manteniendo constante σ^2, es una variable normal centrada en la posición inicial x_0 y con varianza $\sigma^2 T$. Este trabajo fue generalizado por Laplace en su *Théorie Analitique des Probabilités* de 1812 conociéndose posteriormente como el *teorema de de Moivre–Laplace.*

La misma distribución límite puede obtenerse utilizando variables normales estándar en lugar de las Z_n discretas. En ese caso tenemos que la posición de la partícula a tiempo T viene dada por una variable continua:

$$W_T = x_0 + \sum_{n=1}^{N} h\, Z_n\,,$$

donde $T := N\,k$, y las Z_n son variables normales estándar independientes. Tomando límite para T fijo, $N \to \infty$ y $\sigma^2 = h^2/k$ fijo obtenemos el mismo límite que obtuvo de Moivre (la suma de variables normales es también normal y, al ser independientes, su varianza es aditiva). Antes de tomar límite, podemos reescribir esto como:

$$W_{t+k} - W_t = h\, Z_t\,,$$

donde t es alguno de los instantes nk para $0 \leq n \leq N-1$. Para $\sigma = 1$ tenemos que $h = \sqrt{k}$ y en el límite escribimos:

$$\begin{aligned} dW_t &\approx \sqrt{k} Z_t\,,\\ Z_t &\sim \mathcal{N}(0,1)\,. \end{aligned}$$

Cuando $x_0 = 0$ el proceso estocástico definido por W_t se llama *proceso de Wiener o movimiento browniano* y sirve de base para formular otros modelos de evolución estocástica.

La formulación de Bachelier no resulta adecuada para describir los precios pues el proceso que él define admite valores negativos. Sin embargo, Bachelier realiza un aporte fundamental al ser el primero en proponer la no predictibilidad del mercado utilizando un modelo estocástico continuo que es fundamental para construir otros modelos más realistas.

2.2 El modelo basado en el movimiento browniano geométrico

Para resolver los problemas del modelo de Bachelier se propone un modelo multiplicativo discreto en el tiempo (véase el artículo de Samuelson [9] o el texto [7]), en el cual obtenemos el precio en el instante siguiente multiplicando por un factor positivo:

$$S_{n+1} = f_n S_n \,,$$

donde $f_n > 0$ es el factor (aleatorio) aplicado en el paso n. Si aplicamos logaritmos, obtenemos un modelo aditivo similar al propuesto por Bachelier:

$$\ln S_{n+1} = \ln f_n + \ln S_n \,,$$

es decir, el logaritmo del precio es perturbado en cada instante por una variable aleatoria $X_n := \ln f_n$. Al asumir que estas variables son normales independientes encontramos nuevamente que la varianza y la media crecen linealmente con el número de pasos temporales. Si llamamos ν, σ^2 a la media y la varianza de $\ln S_N$ cuando $\Delta t := 1/N$, $t := n\Delta t$, tenemos que:

$$X_t \sim \mathcal{N}\left(\nu t,\, \sigma^2 t\right) \,.$$

Escribimos entonces el proceso continuo:

$$d \ln S_t = \nu\, dt + \sigma\, dW_t \,.$$

Este modelo garantiza la positividad de los precios. Integrándolo, obtenemos que S_T está distribuida como una variable *lognormal*:

$$\ln S_T - \ln S_0 = \nu\, T + \sigma\, W_T \Rightarrow S_T = S_0\, e^{\nu T + \sigma W_T} \,.$$

Como veremos a continuación, el modelo diferencial se puede escribir también de otra manera utilizando una versión simplificada del conocido *lema de Itô [6]*.

2.3 El lema de Itô

Si X_t es una función suave de t, y F una función suave de una variable x, el diferencial de la composición $F(X_t)$ puede calcularse por regla de la cadena:

$$d\left(F\left(X_t\right)\right) = F'\left(X_t\right)\, dX_t\,.$$

Sin embargo, cuando X_t sigue un modelo del tipo

$$dX_t = \nu\, dt + \sigma\, dW_t\,,$$

$(dX_t)^2$ incluye un término de orden dt que debemos incorporar al diferencial. Brevemente, tenemos que:

$$(dX_t)^2 = \mu\,(dt)^2 + 2\nu\sigma dt\, dW_t + \sigma^2\,(dW_t)^2\;. \tag{2}$$

Los dos primeros términos no aportan nada al diferencial total, pues en ambos casos son de orden mayor que dt. Sin embargo, el último término estocástico viene dado por:

$$\sigma^2\;(dW_t)^2 = \sigma^2\, dt + \text{términos estocásticos de mayor orden}\,.$$

Si no incluimos el aporte del último término de (2), el diferencial de $F(X_t)$ estará incompleto, y el error cometido se hará notar cuando intentemos recuperar el valor de $F(X_T)$ para un instante futuro T. En el caso de X_t estocástico tenemos que:

$$\begin{aligned} d\left(F\left(X_t\right)\right) &= F'\left(X_t\right) dX_t + \frac{1}{2}F''\left(X_t\right)\left(dX_t\right)^2 \\ &= F'\left(X_t\right)\left(\nu dt + \sigma dW_t\right) + \frac{\sigma^2}{2}F''\left(X_t\right) dt \\ &= \left(\nu F'\left(X_t\right) + \frac{\sigma^2}{2}F''\left(X_t\right)\right) dt + \sigma F'\left(X_t\right) dW_t\,. \end{aligned}$$

La fórmula de Itô [6] nos permite escribir el modelo logarítmico anterior en una expresión que involucra directamente al diferencial del precio, en lugar del diferencial de su logaritmo. Si $S_t = S_0 \exp\left(X_t\right)$, con $X_t := \nu t + \sigma W_t$, entonces tenemos que:

$$
\begin{aligned}
dS_t &= S_0 \exp\left(X_t\right)\left(\left(\nu + \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dW_t\right) \\
&= S_t \left(\left(\nu + \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dW_t\right) \,.
\end{aligned}
$$

Finalmente, escribimos el modelo browniano geométrico en la forma más compacta:

$$
\begin{aligned}
\frac{dS_t}{S_t} &= \mu\, dt + \sigma\, dW_t\,, \\
\mu : &= \nu + \frac{\sigma^2}{2}\,.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

La cantidad dS_t/S_t nos indica la *rentabilidad instantánea*, μ es su *deriva* o *media instantánea* y σ representa su *volatilidad instantánea*. Este modelo de precios es el que utilizaremos para deducir la ecuación de Black–Scholes en todos los casos.

3 Tres maneras de obtener la ecuación de Black–Scholes

3.1 La replicación instantánea

Asumiendo que el precio del activo subyacente S sigue el movimiento browniano geométrico (3), construimos una cartera con x unidades del activo S y y unidades de dinero en una cuenta bancaria (tanto en depósito como en deuda). En el instante t, nuestra cartera tiene un valor:

$$
V_t = x_t\, S_t + y_t\, B_t\,. \tag{4}
$$

La idea básica de la replicación es que, para cualquier escenario en el instante final T, los valores de nuestra cartera coincidan con los de la opción *Call*:

$$
C_T \equiv C\left(S_T,\, T\right) = \max\left(S_T - K,\, 0\right)\,.
$$

La replicación del precio se realiza en intervalos infinitesimales ajustando las unidades de los activos de modo que el precio de la cartera y el del contrato sean idénticos para todo t, en cada escenario posible. Por otra parte, es importante que no se agregue dinero externo a la cartera, pues en ese caso no se podría garantizar la igualdad de los precios de la cartera y de la opción. Esta condición, que impide agregar dinero o desbalancear arbitrariamente las unidades de la cartera, se llama de *autofinanciamiento*. En términos matemáticos podemos verlo así: consideremos el intervalo $[t, t+dt)$. Asumiremos que en ese intervalo las unidades x_t y y_t que tenemos invertidas en el activo y en el banco respectivamente, *no cambian*. Entonces, la variación del valor de la cartera se produce solamente por la variación del precio del activo y por el crecimiento de la cuenta bancaria, *pero no porque hayamos cambiado la estructura de la cartera*. En el instante $t + dt$ modificamos los pesos de la cartera pero *sin alterar el valor total de la misma*, es decir, si sacamos algo del banco lo hacemos para aumentar nuestra posición en el activo y viceversa: si vendemos parte de nuestras posiciones en el activo, las depositamos en el banco. Concretamente:

$$V_t = x_t\, S_t + y_t\, B_t\,, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} V_{t+dt} &= x_t\, S_{t+dt} + y_t\, B_{t+dt} \\ &= x_{t+dt}\, S_{t+dt} + y_{t+dt}\, B_{t+dt}\,. \end{aligned} \tag{6}$$

V_{t+dt} queda invariante al modificar los pesos $x_t \to x_{t+dt}$ y $y_t \to y_{t+dt}$ en el instante $t + dt$. Al hacer la diferencia entre los valores para tiempo $t + dt$ (6) y t (5) tenemos que:

$$dV_t = x_t\, dS_t + y_t\, dB_t$$

de modo que, utilizando sólo la última igualdad de (6), la condición de autofinanciamiento se escribe como:

$$dx_t\, S_{t+dt} + dy_t\, B_{t+dt} = 0\,.$$

Incorporando ahora los modelos para el activo y la cuenta bancaria tenemos que:

$$\begin{aligned} dV_t &= x_t\, S_t\, (\mu\, dt + \sigma\, dW_t) + y_t\, r\, B_t\, dt \\ &= (x_t\, S_t\, \mu + y_t\, r\, B_t)\, dt + x_t\, \sigma\, S_t\, dW_t\,. \end{aligned} \tag{7}$$

El precio de la opción es una función del precio del activo y del tiempo. Aplicando el lema de Itô a la función $C(S_t, t)$:

$$dC(S_t,\, t) = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \mu\, S_t \, \frac{\partial C}{\partial S} + S_t^2 \, \frac{\sigma^2}{2} \, \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) dt + \sigma\, S_t \, \frac{\partial C}{\partial S} \, dW_t \,. \tag{8}$$

Para que coincida (7) con (8) basta entonces con elegir:

$$x_t = \frac{\partial C}{\partial S} \left(S_t, t\right) \,,$$

y despejar de (5) el valor de y_t:

$$y_t = B_t^{-1} \left(V_t - S_t \frac{\partial C}{\partial S} \left(S_t, t\right) \right) .$$

Asumiendo que en el instante t la cartera y el contrato tienen el mismo valor, es decir: $V_t = C(S_t, t)$, entonces:

$$y_t = B_t^{-1} \left(C\left(S_t, t\right) - S_t \frac{\partial C}{\partial S} \left(S_t, t\right) \right) .$$

Para que V_t replique exactamente a C, falta que las partes deterministas (las que están multiplicadas por dt) de (7) y (8) coincidan:

$$\frac{\partial C}{\partial S} \, S_t \, \mu + \left(C - S_t \, \frac{\partial C}{\partial S} \right) r = \frac{\partial C}{\partial t} + \mu\, S_t \, \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\sigma^2}{2} \, S_t^2 \, \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \,.$$

Cancelando términos obtenemos la ecuación de Black–Scholes para el precio de una opción:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + r\, S_t \, \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\sigma^2}{2} \, S_t^2 \, \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = r\, C \,. \tag{9}$$

3.2 Segunda forma: el precio del riesgo en el mercado

Al aplicar el lema de Itô a la función de precios de la opción Call en (8) y al dividir a ambos lados por $C_t \equiv C(S_t, t)$, podemos escribir el proceso del siguiente modo:

$$\frac{dC_t}{C_t} = A\left(S_t, t\right) dt + B\left(S_t, t\right) dW_t\,,$$

donde

$$\begin{aligned} A\left(S_t, t\right) &:= \frac{1}{C}\left(\frac{\partial C}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial C}{\partial S} + S_t^2 \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right) \\ B\left(S_t, t\right) &:= \sigma \frac{S_t}{C}\frac{\partial C}{\partial S}\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Combinando esta expresión con el proceso de precios de S_t:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t\,,$$

podemos eliminar el riesgo del siguiente modo:

$$\frac{dC_t}{B\left(S_t, t\right) C_t} - \frac{dS_t}{\sigma S_t} = \left(\frac{A\left(S_t, t\right)}{B\left(S_t, t\right)} - \frac{\mu}{\sigma}\right) dt\,.$$

Nótese que hemos construido la cartera sin riesgo:

$$\begin{aligned} V_t &= x_t\, C_t - y_t\, S_t\,, \\ x_t &:= \frac{1}{B\left(S_t, t\right) C_t}\,, \\ y_t &:= \frac{1}{\sigma S_t}\,, \end{aligned}$$

para el intervalo infinitesimal $[t, t + dt]$ (esta vez podemos llegar al final del intervalo pues no estamos imponiendo que la cartera sea autofinanciada).

Ahora razonamos del siguiente modo: toda cartera que se comporte de manera determinista (es decir, sin una componente estocástica) en el intervalo $[t, t + dt]$, debe crecer como una cuenta bancaria:

$$dV_t = V_t\, r\, dt \Rightarrow \frac{A\left(S_t, t\right)}{B\left(S_t, t\right)} - \frac{\mu}{\sigma} = \left(\frac{1}{B\left(S_t, t\right)} - \frac{1}{\sigma}\right) r\,.$$

Si no fuera así, el mercado permitiría ganar dinero sin riesgo (lo que hemos llamado una *oportunidad de arbitraje*). Reagrupando los términos, tenemos la identidad:

$$\frac{A\,(S_t, t) - r}{B\,(S_t, t)} = \frac{\mu - r}{\sigma} =: \lambda\,. \tag{11}$$

Esta constante se llama *precio del riesgo en el mercado* (aunque no es el precio de un activo) y representa el exceso de rentabilidad esperada por sobre la tasa libre de riesgo r, por unidad de volatilidad asumida. La información más importante que nos da esta relación es que la rentabilidad esperada de la opción *no es independiente de su volatilidad*, es decir:

$$A\,(S_t, t) = r + \lambda B\,(S_t, t)\ .$$

Dicho de otro modo, la rentabilidad esperada menos la tasa bancaria es una cantidad proporcional al riesgo que se asume, y esta constante de proporcionalidad está determinada por el precio del riesgo en el mercado. Reemplazando ahora los valores de A y B de (10) tenemos que:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mu\, S_t\, \frac{\partial C}{\partial S} + S_t^2\, \frac{\sigma^2}{2}\, \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = r\, C + \lambda\, \sigma\, S_t\, \frac{\partial C}{\partial S}\,.$$

Al reagrupar los términos obtenemos la ecuación de Black–Scholes:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\mu - \lambda\, \sigma)\ S_t\, \frac{\partial C}{\partial S} + S_t^2\, \frac{\sigma^2}{2}\, \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = r\, C\,. \tag{12}$$

Nótese que por definición de λ en (11), esta ecuación es idéntica a (9), pues $\mu - \lambda\sigma = r$.

3.3 Replicando el precio “forward”

Vamos a considerar ahora una cartera formada por x unidades del activo y y unidades invertidas en un *bono cupón cero* de vencimiento T. Éste es un instrumento financiero que paga una unidad monetaria a tiempo T y cuyo precio inicial se denota por $P\,(0, T)$. Como nuestra cuenta bancaria tiene un tipo de interés constante, el precio de este bono viene dado, para cada instante t, por:

$$P\,(t,T) = B_t B_T^{-1} = e^{-r(T-t)}\,.$$

Esta identidad se obtiene razonando del siguiente modo: consideremos un depósito realizado en la cuenta bancaria a tiempo $t < T$, tal que en el instante T nos pague una unidad monetaria:

$$x_t\,B_{T-t} = 1\,.$$

Si $P\,(t,T) < x_t$ podemos pedir prestado al banco la cantidad $P\,(t,T)$ para comprarnos el bono cupón cero. Al final del intervalo devolvemos el préstamo, que será menor que una unidad monetaria (pues $P\,(t,T)\,B_{T-t} < x_t B_{T-t} = 1$), cobrando el bono cupón cero, que nos paga 1. Como la deuda es estrictamente menor que la unidad, podríamos ganar dinero en cantidades arbitrarias sin correr ningún riesgo. Concluimos que esto es imposible pues es una clara oportunidad de arbitraje. En el caso opuesto, es decir cuando $x_t < P\,(t,T)$, tenemos una oportunidad de arbitraje similar, pero con posiciones opuestas. Para evitar estas situaciones debemos tener que:

$$P\,(t,T) = x_t = B_{T-t}^{-1}\,. \tag{13}$$

Integrando la ecuación (1), obtenemos:

$$B_t = e^{rt}\,.$$

Para un depósito unidad realizado a tiempo t, que evoluciona hasta T, solamente debemos tener en cuenta que:

$$B_t B_{T-t} = B_T \Rightarrow B_{T-t} = B_T B_t^{-1} = e^{r(T-t)}\,.$$

Construimos una cartera formada por x_t unidades del activo S_t y por y_t unidades del bono cupón cero $P\,(t,T)$:

$$V_t = x_t S_t + y_t P\,(t,T)\ .$$

Veamos ahora el precio de V_{t+dt}. Al ser la cartera *autofinanciada* debemos tener que:

$$V_{t+dt} = x_t S_{t+dt} + y_t P\left(t+dt, T\right) \, .$$

Es decir, cambiamos los pesos sin alterar el valor de la cartera. Escribamos ahora esta relación de la siguiente manera:

$$\frac{V_{t+dt}}{P\left(t+dt, T\right)} = x_t \frac{S_{t+dt}}{P\left(t+dt, T\right)} + y_t \, . \tag{14}$$

Las cantidades que aparecen divididas por el precio del bono corresponden a lo que se llama el *precio forward* del activo considerado. Definamos entonces:

$$\begin{aligned} U_t &:= \frac{V_t}{P\left(t, T\right)} \, , \\ F_t &:= \frac{S_t}{P\left(t, T\right)} \, . \end{aligned}$$

Esto nos permite escribir las relaciones simplificadas:

$$\begin{aligned} U_t &= x_t F_t + y_t \, , \\ U_{t+dt} &= x_t F_{t+dt} + y_t \, . \end{aligned}$$

de modo que:

$$dU_t = x_t dF_t \, . \tag{15}$$

Es decir, en este caso eliminamos el dinero invertido en el bono cupón cero pero cambiamos la variable, pasando del precio del subyacente a su precio forward. Si queremos replicar el contrato para todo instante t, debemos tener:

$$dU_t = d\tilde{C}\left(F_t, t\right) \, , \tag{16}$$

donde $\tilde{C}$ es el precio forward del contrato en función del precio forward del subyacente:

$$\tilde{C}\,(F_t, t) := \frac{C\,(P\,(t,T)\,F_t, t)}{P\,(t,T)}\,.$$

Aplicando la condición de replicación tenemos entonces, según (15) y (16):

$$d\tilde{C}\,(F_t, t) = x_t dF_t\,. \tag{17}$$

Por otra parte, teniendo en cuenta el modelo para S (3) y el precio del bono cupón cero (13), tenemos que:

$$\begin{aligned} dF_t &= d\left(e^{r(T-t)}\,S_t\right) \\ &= -r\,F_t\,dt + e^{r(T-t)}\,dS_t \\ &= F_t\,\left((\mu - r)\,dt + \sigma\,dW_t\right)\,. \end{aligned} \tag{18}$$

Es decir, el precio forward del activo sigue el mismo proceso browniano geométrico que S_t, pero con deriva $\mu - r$. Aplicando el lema de Itô a $\tilde{C}$ obtenemos entonces (compárese con (8)):

$$\begin{aligned} d\tilde{C}\,(F_t,\,t) \quad &= \quad \left(\frac{\partial \tilde{C}}{\partial t} + (\mu - r)\,F_t\,\frac{\partial \tilde{C}}{\partial F} + F_t^2\,\frac{\sigma^2}{2}\,\frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial F^2}\right)\,dt \\ &\quad + \sigma\,F_t\,\frac{\partial \tilde{C}}{\partial F}\,dW_t\,. \end{aligned} \tag{19}$$

Usando (17) e igualando las expresiones para (18) y (19) se debe cumplir la igualdad:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial \tilde{C}}{\partial t} + (\mu - r)\,F_t\,\frac{\partial \tilde{C}}{\partial F} + F_t^2\,\frac{\sigma^2}{2}\,\frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial F^2}\right)\,dt + \sigma\,F_t\,\frac{\partial \tilde{C}}{\partial F}\,dW_t \\ &\qquad\qquad = x_t\,F_t\,\left((\mu - r)\,dt + \sigma\,dW_t\right)\,. \end{aligned}$$

La parte estocástica es idéntica cuando imponemos que

$$x_t = \frac{\partial \tilde{C}}{\partial F}$$

y al igualar las partes deterministas obtenemos la identidad:

$$\frac{\partial \tilde{C}}{\partial t} + (\mu - r) F_t \frac{\partial \tilde{C}}{\partial F} + F_t^2 \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial F^2} = (\mu - r)\, F_t \frac{\partial \tilde{C}}{\partial F}\,.$$

Cancelando términos llegamos por una tercera vía a la ecuación de Black–Scholes, cuya expresión es más simple pues la variable es el precio forward:

$$\frac{\partial \tilde{C}}{\partial t} + F_t^2 \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial F^2} = 0\,, \tag{20}$$

con la condición final:

$$\tilde{C}\,(F_T, T) = \frac{\tilde{C}\left(\frac{S_T}{P(T,T)}, T\right)}{P\,(T,T)} \equiv C\,(S_T, T) = C\,(F_T, T)\ ,$$

pues a tiempo T el precio S_T y su precio forward F_T coinciden, al ser $P\,(T,T) = 1$.

4 ¿Por qué es necesaria la ecuación de Black–Scholes?

En [5] se propone un procedimiento "ingenuo" para replicar una opción de compra, que es independiente del modelo del activo subyacente. Si esta replicación *dinámica* funcionara, no sería necesario plantear una ecuación diferencial y el precio se obtendría con métodos elementales, observando sólo los datos del mercado del día de hoy. Describiremos brevemente el procedimiento de replicación, explicaremos por qué no es correcto y mostraremos que sólo puede funcionar cuando los precios se mueven de modo suave, es decir, predecible.

Consideremos una discretización del intervalo $[0, T]$, en N intervalos de tamaño $k := T/N$. Sea $t_n = n\,k$. La opción Call nos paga $S_T - K$ cuando $S_T > K$ y cero en los otros casos. Vamos a construir una cartera que en principio nos replicará de manera aproximada este valor a tiempo T. El valor a día de hoy de un contrato que paga $S_T - K$ es simplemente el precio del activo a día de hoy menos el *valor descontado* de la cantidad K:

$$S_0 - P\,(0, T)\,K\,.$$

Realizamos entonces la estrategia siguiente: si a tiempo inicial $S_0 > P\,(0, T)\,K$, entonces compramos S_0 y pedimos prestado $P\,(0, T)\,K$. A partir de ese instante la cartera es aproximadamente autofinanciada, de modo que el precio inicial del contrato (si logramos replicarlo) será en este caso $S_0 - P\,(0, T)\,K$. A continuación, en cada instante t_n observamos el comportamiento de $S_n \equiv S_{t_n}$. Si en algún instante posterior S_n es menor que $P\,(t_n, T)\,K$, entonces vendemos S_n y cerramos la posición negativa del bono (cancelamos la deuda). Obsérvese que si S_n es estrictamente menor que $P\,(t_n, T)\,K$, el dinero no va a alcanzar para cubrir exactamente la deuda, y por eso decimos que la estrategia es *aproximadamente* autofinanciada. Si en un instante posterior t_m tenemos que S_m vuelve a subir por encima de $P\,(t_m, T)\,K$, entonces nos endeudamos nuevamente y compramos S_m. Nótese que el dinero que tenemos que pedir será levemente superior a $P\,(t_m, T)\,K$. Si despreciamos estas pequeñas cantidades de dinero perdidas (tanto al subir como al bajar el precio atravesando la barrera $P\,(t, T)\,K$), al final del intervalo llegaremos a tener una cartera con valor $S_T - K$ si $S_T > K$ y 0 si $S_T \leq K$. Es decir, replicaramos exactamente los valores del contrato.

En el caso de que en el instante inicial S_0 sea menor o igual a $P\,(0, T)\,K$, no compraremos nada ni nos endeudaremos (cartera nula) y esperaremos al primer instante en el que S_n sea mayor que $P\,(t_n, T)\,K$ para iniciar el procedimiento del párrafo anterior. Como en ese caso, si despreciáramos la pequeña diferencia de precios que se produce cada vez que S_n pasa la "barrera" $P\,(t_n, T)\,K$, finalmente llegaríamos a replicar el contrato.

Si el procedimiento fuera correcto, el precio inicial de la opción de compra sería $(S_0 - P\,(0, T)\,K)_+$ y no necesitaríamos modelo alguno para la evolución del activo subyacente. ¿Por qué no funciona?

Cuando el activo sigue un proceso como el movimiento browniano geométrico, el orden de los términos que estamos despreciando en cada paso es de $\sqrt{T/N}$. En N pasos, este error es de orden $\sqrt{N}$ y puede ser arbitrariamente grande (dependiendo del camino aleatorio que siga el precio).

Sin embargo, si las gráficas de los precios fueran curvas suaves, eliminando la parte estocástica, es decir:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu\,(S_t, t)\,dt\,,$$

podríamos predecir exactamente el momento en el precio cruzará la curva $P\,(t, T)\,K$ y replicar así el contrato de manera exacta. Más aun, por lo que hemos visto en la sección anterior, μ no puede ser cualquier función si σ está dado. Recordemos que el precio del riesgo en el mercado implica una interdependencia entre σ y μ. En el caso de que σ sea cero, debemos tener que $\mu\,(S_t, t) \equiv r$ pues:

$$\mu\,(S_t, t) - r = \lambda\sigma\,.$$

El precio de nuestro S determinista evoluciona entonces trivialmente como una cuenta bancaria:

$$S_t = B_t S_0\,,$$

de modo que la estrategia propuesta cruzará la curva cuando

$$S_t = P\,(t, T)\,K \Rightarrow B_t S_0 = \frac{B_t}{B_T} K\,.$$

Las curvas serán idénticas cuando el precio S_0 del activo coincida con K/B_T, o lo que es lo mismo cuando el precio forward del activo a tiempo cero $F_0 = S_0/P(0, T)$, coincida con K. Las curvas no se tocarán nunca cuando estos valores no coincidan. Esto implica que la estrategia de replicación puede hacerse perfectamente, y en este caso es estática (decidimos desde el principio la cartera replicadora y no la modificamos en todo el intervalo). En definitiva, en un mundo de precios sin riesgo y bajo la hipótesis de ausencia de oportunidades de arbitraje, no sería necesario utilizar la ecuación de Black–Scholes.

5 Conclusiones

En este artículo hemos abordado tres maneras distintas de deducir la famosa ecuación de Black–Scholes, incluyendo un breve análisis de por qué resulta necesaria en un contexto estocástico. Hemos visto que una estrategia de replicación ingenua no es aplicable si el precio del subyacente sigue un movimiento browniano geométrico. Además, en el caso de precios suaves, la relación entre la rentabilidad y volatilidad instantánea restringe el movimiento de los precios, a tal punto que todo activo sin riesgo debe comportarse como una cuenta bancaria. En ese caso la replicación del contrato puede fijarse desde el inicio y su precio puede determinarse por los valores actuales del mercado.

La ecuación de Black–Scholes es un ejemplo notable de la profunda interacción entre la teoría matemática y la práctica financiera. En palabras de Robert Merton [3]: "Las matemáticas del modelo a tiempo continuo contienen algunas de las más bellas aplicaciones de las probablidades y de la teoría de optimización. Por supuesto, no todo lo bello en la ciencia es necesariamente práctico. Y con seguridad no todo lo práctico es bello. Aquí tenemos ambas cualidades".

Desde otro punto de vista, las aplicaciones financieras nos proveen también de una herramienta excelente para aprender conceptos matemáticos complejos, cuyo estudio sería, de otro modo, difícil de motivar.

Referencias

[1] P. Amster, *La matemática de las finanzas*, Bol. Mat. **17**(1), 59 (2010).

[2] L. Bachelier, *Théorie de la spéculation*, Ann. Sci. de l'É.N.S. **17**, 21 (1900).

[3] P. Bernstein, *Capital Ideas: The Improbable Origins of Modern Wall Street* (John Wiley & Sons, 2005).

[4] F. Black and M. Scholes, *The pricing of Options and Corporate Liabilities*, J. Polit. Econ. **81**, 637 (1973).

[5] C. Ekstrand, *Financial Derivatives Modeling* (Springer, 2011).

[6] K. Itô, *On a formula concerning stochastic differentials*, Nogoya Math. J. **3**, 55 ().

[7] D. G. Luenberger, *Investment Science* (Oxford University Press, 2009).

[8] H. Markowitz, *Portfolio selection*, J. Finance **2**(1), 77 (1952).

[9] P. Samuelson, *Mathematics of speculative price*, SIAM Reviews **15**(1), 1 (1973).