UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Sobre computabilidad en campos de espacios métricos

Rafael Armando García Gómez

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia

2018

Sobre computabilidad en campos de espacios métricos

Rafael Armando García Gómez

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Doctor en Ciencias Matemáticas

Director:
Ph.D. Januario Varela Borda

Línea de Investigación:
Topología y Ciencias de la Computación

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2018

BUNTSI. (B)eautiful, (U)seful, (N)ew, (T)rue, (S)erious, and (I)nteresting.

Agradecimientos

Agradezco el apoyo y la guía al Doctor Januario Varela Borda, su aporte en el orden académico, científico, e incluso logístico, fueron importantes, pero la influencia personal ha sido vital. Es un verdadero honor recibir la dedicación y aprecio de parte de alguien con sus calidades personales y científicas. Más aún teniendo presente que fue el Doctor Varela quien, en 1986, formuló el primer proyecto de Doctorado en Matemáticas en la Universidad Nacional de Colombia.

A Sandra Margarita Garciaherreros Sánchez agradezco la esperanza, la fuerza, la sed, y la Fe. Sin su persistencia este trabajo no sería más que un intento y se habría perdido en alguna de las muchas bifurcaciones que se presentaron en nuestro camino.

Agradezco la confianza a los Doctores Oswaldo Lezama y Agustín Moreno quines creyeron y apoyaron este proyecto aún sin conocerlo. A los Doctores Xizhong Zheng[1] y Vasco Brattka por los comentarios, el acceso a sus artículos, y el interés en el desarrollo del proyecto.

A Amelia Gómez, la luz, la causa primera, y la Vida...

...y Todo a Dios.

[1] Gracias por enviarme su libro [62].

Resumen

En este trabajo se estudia el contenido de efectividad presente en la Categoría de los Campos de Espacios Métricos a la luz de la *Teoría de Efectividad Tipo-2* (TTE[2]). Más precisamente, el objetivo es importar, desarrollar y estudiar una noción de computabilidad en la Categoría de los Campos de Espacios Métricos sobre un espacio topológico T. A tal efecto, se establece una primera relación entre las teorías demostrando que todo espacio topológico computable induce la existencia de un campo de espacios métricos; se presentan los efectos de imponer condiciones de computabilidad sobre las fibras de un campo de espacios métricos sobre un espacio topológico T; se estudian los efectos de imponer condiciones de computabilidad sobre el espacio base T; y se presentan las condiciones necesarias para obtener una estructura computable en un campo de espacios métricos sobre un espacio topológico T. Finalmente se presentan aplicaciones de los campos de espacios métricos computables planteando versiones dinámicas de problemas clásicos en la Teoría de Grafos y proponiendo sus respectivas soluciones.

Palabras clave: Campos de espacios métricos, computabilidad, representaciones, grafos dinámicos.

Abstract

This work studies the effective content in the category of metric bundles in the framework of the *Type-2 Theory of Effectivity (TTE)*. More precisely, the goal is to import, to develop and to study a notion of computability in the category of metric bundles over a topological space T. In order to achieve this, a first relationship between the theories is established, demonstrating that any computable topological space induces the existence of a metric bundle; the effects of imposing computability conditions on the fibers of the metric bundles are presented; the effects of imposing computability conditions on the base space are studied; and presents the necessary conditions to obtain a computable structure in a metric bundle. Finally some applications are presented with the formulation and solution of dynamic versions for clasical problems in graph theory.

Keywords: Metric bundles, computability, representations, dynamic graphs.

[2]TTE, del inglés, Type-2 Theory of Effectivity

Índice general

1 Introducción

El Análisis Computable conecta la computabilidad con el análisis, combinando adecuadamente los conceptos relacionados con computación y con aproximación.

Son muchas las propuestas para hacer realidad esta idea general, presentando varios modelos -no equivalentes- de computación sobre números reales. Entre estas propuestas se encuentran la Computabilidad de Banach/Mazur [36] o computabilidad secuencial, que introduce un tipo débil de computabilidad para las funciones sobre el conjunto $\mathbb{R}_c$ de los números reales computables; la Computabilidad de Grzegorczyk [27] que fortalece la noción de Computabilidad de Banach/Mazur al definir y adicionar a las condiciones de computabilidad el concepto de módulo de continuidad computable. La aproximación de Pour-El/Richards [41] desarrolla, en el marco de la Computabilidad de Grzegorczyk, la computabilidad sobre números reales, secuencias de números reales, funciones continuas, integración, etc. y presenta axiomáticamente el conjunto de secuencias computables en un espacio de Banach. Por otra parte la aproximación de Ko [31] utiliza máquinas de Turing que transforman secuencias infinitas en secuencias infinitas usando oráculos (máquinas de Turing clásicas que además pueden invocar una función con dominio en $\mathbb{N}$ arbitrariamente), para el cálculo y representación de números mediantes funciones de Cauchy. La escuela Rusa también se ha preocupado por este tópico proponiendo la Computabilidad de Markov donde solo se consideran números reales computables y las funciones se calculan mediante la transformación de sucesiones de Cauchy que convergen rápidamente.

El modelo más aceptado, dada su flexibilidad y expresividad, es una materialización de la propuesta de computación sobre los números reales vía representaciones, la *Teoría de Efectividad Tipo-2* (TTE[1]). TTE es una teoría que combina la teoría de aproximaciones, la computación y la complejidad computacional de tal manera que le es posible ofrecer los fundamentos para el análisis computable. Los orígenes de TTE se remontan a las definiciones de *números reales computables* y de *funciones computables* dadas por Grzegorczyk [27, 28] y Lacombe a mediados de la década de los 50's: *Una función real es computable si y solamente si puede ser representada mediante un operador computable sobre una codificación de los números reales* [54]. Desde entonces el estudio de la computabilidad sobre conjuntos de puntos y de funciones se ha desarrollado desde los números reales a los espacios Euclidianos y los espacios métricos [65, 9, 61, 55, 66, 8, 67]; y no ha dejado de tocar espacios más gene-

[1] TTE, del inglés, Type-2 Theory of Effectivity

rales: espacios Hausdorff localmente compactos [12], espacios no metrizables [64] y espacios T_0 segundo contables [45].

Según [12], las computaciones en TTE son ejecutadas por máquinas de Turing, en el sentido clásico, que cuentan con *cintas de entrada*, *cintas de salida* y *cintas auxiliares*. La diferencia con las computaciones clásicamente estudiadas es que en TTE las cintas de entrada solo pueden ser leídas secuencialmente (sin retroceso), y las cintas de salida solo pueden ser escritas secuencialmente (sin retroceso). Por otra parte, mientras que las entradas y salidas utilizadas en la teoría de computabilidad clásica son palabras finitas sobre un alfabeto dado (elementos de Σ^*), en TTE las máquinas permiten operar sobre sucesiones o secuencias infinitas de símbolos del alfabeto (elementos de Σ^ω). Esto permite que se representen objetos propios del análisis y la topología, extendiendo la teoría de computabilidad ordinaria a computabilidad sobre conjuntos con, a lo más, la cardinalidad del continuo. TTE proporciona entonces una serie de versiones computables de resultados importantes en análisis y topología, es decir, resultados en análisis computable, como por ejemplo, *solo las funciones continuas son computables en una representación estándar*.

Según [55], las principales ventajas de TTE como materialización del Análisis Computable se pueden resumir de la siguiente manera:

- El modelo de computación en TTE es realista.
- Los conceptos de computación vía sistemas de nombres y realizaciones son concretos.
- Permite la definición de funciones computables sobre todo el conjunto de números reales $\mathbb{R}$.
- Combina adecuadamente los conceptos de computación y aproximación (topología) en una teoría.
- Permite extender y estudiar varios conceptos de computabilidad sobre los números reales y sobre otros espacios.
- Permite estudiar los conceptos de computabilidad sobre otras muchas estructuras.
- Provee, de manera natural, una teoría de complejidad.
- Permite el estudio de funciones multivaluadas.

En el tercer capítulo de este trabajo se presenta una introducción a TTE, unificando definiciones y notaciones disponibles en la literatura, y supone que el lector está familiarizado con la teoría de efectividad clásica. Las principal fuente para profundizar en TTE es [55] y las publicaciones que aparecen en la bibliografía.

Por otra parte, los conceptos básicos del *método de localización topológica* fueron presentados por Dauns y Hofmann en [14, 30] a finales de la década de los 60's.

Desde aquella propuesta inicial son muchos los trabajos que se encaminaron a clarificar los procedimientos: en [50], se presentan condiciones suficientes para la existencia de campos de espacios uniformes a partir de una familia de pseudométricas y una colección de secciones; en [17] se expone una *versión métrica* del método de localización; en [15] se logra establecer una versión del proceso de localización para campos de espacios uniformes; entre otros trabajos se encuentran [2, 37, 39, 24].

Según [24], la Categoría de los Campos de Espacios Métricos sobre un espacio topológico T es una generalización de la Categoría de los Espacios Métricos. La existencia de los campos de espacios métricos se discute ampliamente en [17] y requiere de la semicontinuidad superior de la función $\Phi : T \longrightarrow [0, +\infty]$ definida por $\Phi(t) = d(\alpha(t), \beta(t))$. Después de [43, 22], en [24], García, Reyes y Varela presentan la construcción analítica del Campo de Espacios Métricos de las Funciones Semicontinuas Superiormente y demuestran que, en la Categoría de los Campos de Espacios Métricos sobre un espacio topológico T, este campo juega el rol análogo al objeto *números reales* en la Categoría de los Espacios Métricos, y que contiene, como sección, a la función distancia entre dos secciones arbitrarias de un Campo de Espacios Métricos sobre T.

En el segundo capítulo se presenta el concepto de Campo de Espacios Métricos, algunos ejemplos clásicos y la construcción analítica de un campo de espacios métricos para representar como secciones a las funciones semicontinuas superiormente definidas sobre un espacio topológico dado T.

La construcción presentada en [24], junto con los artículos de Ge y Nerode [25] donde exploran el contenido de efectividad presente en el concepto de semicontinuidad, y [60, 59, 63], donde Zheng, Brattka y Weihrauch proponen las nociones de semicomputabilidad superior e inferior como una efectivización de los conceptos de semicontinuidad, son motivacionales para el presente trabajo puesto que la semicontinuidad y la semicomputabilidad pueden ser entendidas como un eventual puente entre TTE y el método de localización topológica.

En este trabajo se estudia el contenido de efectividad presente en la Categoría de los Campos de Espacios Métricos. Más precisamente, el objetivo es importar, desarrollar y estudiar una noción de computabilidad en la Categoría de los Campos de Espacios Métricos sobre un espacio topológico T. A tal efecto se establece una primera relación entre las teorías demostrando que todo espacio topológico computable induce de manera natural la existencia de un campo de espacios métricos (espacios topológicos computables como campos de espacios métricos); se presentan los efectos de imponer condiciones de computabilidad sobre las fibras de un campo de espacios métricos sobre un espacio topológico T (campos de espacios métricos computables); se estudian los efectos de imponer condiciones de computabilidad sobre el espacio base T (campos de espacios métricos con base computable); y se presentan las condiciones necesarias para obtener una estructura computable en el campo de espacios métricos sobre un espacio topológico T (campos computables de espacios métricos). Todos los resultados a este respecto son presentados por primera vez en el cuarto capítulo de este documento y, además de establecer los fundamentos de la relación entre las dos teorías, proveen una nueva fuente de temas de investigación.

Finalmente, el quinto capítulo está dedicado a exhibir una aplicación de los campos de espacios métricos computables planteando versiones dinámicas de algunos problemas clásicos en Teoría de Grafos y proponiendo sus respectivas soluciones.

2 Campos de Espacios Métricos

En este capítulo se presenta el concepto de Campo de Espacios Métricos, algunos ejemplos clásicos y la construcción analítica de un campo de espacios métricos para representar como secciones a las funciones semicontinuas superiormente definidas sobre un espacio topológico dado T.

En la primera sección se presentan las nociones básicas: selección (local y global), sección (selección continua), métrica para una función sobreyectiva y ϵ-tubo en torno a una selección. La segunda sección expone una versión de un resultado de J. Varela sobre la existencia de Campos de Espacios Uniformes [50, 51] que garantiza la existencia de Campos de Espacios Métricos [16]. La tercera presenta algunos ejemplos clásicos e ilustra tanto la utilización directa del Teorema de Existencia de Campos de Espacios Métricos, como el tipo de construcción que se utiliza en la cuarta sección.

La cuarta y última sección presenta la construcción analítica de un campo de espacios métricos para representar como secciones a las funciones semicontinuas superiormente definidas sobre un espacio topológico T [22]. El campo construido juega el rol de *objeto números reales* en la Categoría de los Campos de Espacios Métricos [24]. Más precisamente, la definición de campo de espacios métricos sobre un espacio topológico T requiere la semicontinuidad superior de las funciones $\Phi_{\alpha\beta} : T \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ definidas por $\Phi_{\alpha\beta}(t) = d\left(\alpha(t), \beta(t)\right)$, donde α y β son secciones locales para p, y d es una métrica para p. El campo de espacios métricos de las funciones semicontinuas superiormente sobre el espacio T juega el rol de *objeto números reales* en la Categoría de los Campos de Espacios Métricos sobre T y contiene, como sección, a la función distancia entre todo par de secciones de un campo de espacios métricos sobre T. Adicionalmente, si T es un espacio completamente regular entonces las fibras del Campo de Espacios Métricos de las Funciones Semicontinuas Superiormente son espacios métricos completos.

La construcción presentada en esta sección, junto con los artículos de Ge y Nerode [25] donde exploran el contenido de efectividad presente en el concepto de semicontinuidad, y [60, 59, 63], donde Zheng, Brattka y Weihrauch proponen las nociones de semicomputabilidad superior e inferior como una efectivización de los conceptos de semicontinuidad, son motivacionales para este trabajo.

2.1. Conceptos Básicos

Definición 1. (Selecciones y secciones). Si $p : G \longrightarrow T$ es una función sobreyectiva y $\alpha : Q \longrightarrow G$, con $Q \subseteq T$, es tal que $p \circ \alpha$ es la función identidad en Q, se dice que α es una *selección* para p.

Si $Q = T$, α es una *selección global* para p.

Si T es un espacio topológico y Q es abierto en T, α es una *selección local* para p.

Y si tanto G como T son espacios topológicos, y α es continua, se dice que α es una *sección* para p.

Una familia Σ de secciones para p es *plena* si para todo $u \in G$ existe $\alpha \in \Sigma$ con $\alpha(p(u)) = u$.

Definición 2. (Métrica para una función sobreyectiva). Si $p : G \longrightarrow T$ es una función sobreyectiva, $d : G \times G \longrightarrow [0, +\infty]$ es una *métrica para* p si y sólamente si para todo u, v, $w \in G$ se cumplen las siguientes condiciones:

(Mp1) $d(u, v) = +\infty$ si y sólo si $p(u) \neq p(v)$.

(Mp2) $d(u, v) = 0$ si y sólo si $u = v$.

(Mp3) $d(u, v) = d(v, u)$.

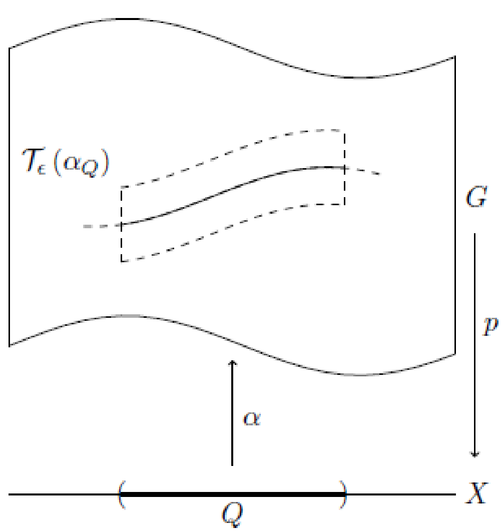
(Mp4) $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$.

Nótese que, para todo $t \in T$, d es una métrica sobre $p^{-1}(t)$. Es decir, $\left(p^{-1}(t), d\restriction_{p^{-1}(t)\times p^{-1}(t)}\right)$ es un espacio métrico.

Definición 3. (ϵ-tubo en torno a una selección). Si $p : G \longrightarrow T$ es una función sobreyectiva, d es una métrica para p, α es una selección para p, y $\epsilon > 0$, se dice que

$$\mathcal{T}_\epsilon(\alpha) = \{u \in G \mid p(u) \in dom(\alpha) \wedge d(u, \alpha(p(u))) < \epsilon\} \tag{2-1}$$

es el *ϵ-tubo alrededor de α.*



Nótese que, para todo $t \in dom(\alpha)$,

$$\left\{u \in p^{-1}(t) \mid d(u, \alpha(t)) < \epsilon\right\} \subseteq \mathcal{T}_\epsilon(\alpha) \tag{2-2}$$

y

$$\mathcal{T}_\epsilon(\alpha) = \bigcup_{t \in dom(\alpha)} \left\{u \in p^{-1}(t) \mid d(u, \alpha(t)) < \epsilon\right\}. \tag{2-3}$$

Definición 4. (Campo de espacios métricos). Si G y T son espacios topológicos, $p : G \longrightarrow T$ es una función sobreyectiva y continua, y d es una métrica para p, se dice que la tripleta (G, p, T) es un *Campo de Espacios Métricos* si

(CEM1) Dados $u \in G$ y $\epsilon > 0$ existe una sección local α para p de manera que $u \in \mathcal{T}_\epsilon(\alpha)$.

(CEM2) La familia $\{\mathcal{T}_\epsilon(\alpha)\}$, con $\epsilon > 0$ y α sección local para p, es una base para la topología de G.

La siguiente proposición es efecto directo de la definición.

Proposición 1. (Sistema fundamental de vecindades [24]). *Sean (G, p, T) un campo de espacios métricos y $\Gamma(p)$ el conjunto de todas las secciones globales para p. Si $u \in G$, $\beta \in \Gamma(p)$ y $t \in T$ son tales que $\beta(t) = u$, y $\mathcal{V}(t)$ es un sistema fundamental de vecindades para t, entonces la familia*

$$\{\mathcal{T}_\epsilon(\beta \restriction_W) \mid \epsilon > 0 \wedge W \in \mathcal{V}(t)\} \tag{2-4}$$

es un sistema fundamental de vecindades para $u = \beta(t)$.

2.2. Existencia de Campos de Espacios Métricos

El siguiente teorema se encuentra en [16], es una versión de un resultado de J. Varela [50, 51] sobre la existencia de Campos de Espacios Uniformes, y permite construir Campos de Espacios Métricos partiendo de un espacio topológico T, un conjunto arbitrario G y una familia de selecciones locales para una función sobreyectiva $p : G \longrightarrow T$.

Teorema 1. (Existencia de Campos de Espacios Métricos [16, 50, 51]). *Sean T un espacio topológico, G un conjunto, $p : G \longrightarrow T$ una función sobreyectiva, d una métrica para p y Σ una colección de selecciones locales para p.*

Supónganse las dos condiciones siguientes:

(a) *Dados $u \in G$ y $\epsilon > 0$ existe una selección local $\alpha \in \Sigma$ de manera que $u \in \mathcal{T}_\epsilon(\alpha)$.*

(b) *Para todo par de selecciones* $\alpha, \beta \in \Sigma$ *la función* $\Phi_{\alpha\beta} : dom(\alpha) \cap dom(\beta) \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $\Phi_{\alpha\beta}(t) = d(\alpha(t), \beta(t))$ *es semicontinua superiormente.*

Entonces G *puede ser dotado de una topología* $\mathfrak{T}$ *de manera que*

(1) *La familia* $\mathcal{B} = \{\mathcal{T}_\epsilon(\alpha_Q) \mid \epsilon > 0 \wedge \alpha \in \Sigma \wedge Q \subseteq dom(\alpha)\}$, *con* $\alpha_Q = \alpha \restriction_Q$, *es una base para* $\mathfrak{T}$.

(2) *Si* $\alpha \in \Sigma$ *entonces* α *es sección.*

(3) (G, p, T) *es un campo de espacios métricos.*

Demostración. (1) Veremos que $\mathcal{B}$ es base para alguna topología en G. Sean $\mathcal{T}_{\epsilon_1}(\alpha_Q)$ y $\mathcal{T}_{\epsilon_2}(\beta_R)$ dos elementos de $\mathcal{B}$ y $u \in \mathcal{T}_{\epsilon_1}(\alpha_Q) \cap \mathcal{T}_{\epsilon_2}(\beta_R)$, se debe encontrar ϵ, γ y un abierto S de manera que $u \in \mathcal{T}_\epsilon(\gamma_S) \subset \mathcal{T}_{\epsilon_1}(\alpha_Q) \cap \mathcal{T}_{\epsilon_2}(\beta_R)$.

Como $u \in \mathcal{T}_{\epsilon_1}(\alpha_Q)$ y $u \in \mathcal{T}_{\epsilon_2}(\beta_R)$ entonces $d(u, \alpha(p(u))) < \epsilon_1$ y $d(u, \beta(p(u))) < \epsilon_2$.

Si $\epsilon = \dfrac{1}{4} \min\{\epsilon_1 - d(u, \alpha(p(u))), \epsilon_2 - d(u, \beta(p(u)))\}$ y γ es una selección local para p tal que $\gamma \in \Sigma$ y $u \in \mathcal{T}_\epsilon(\gamma)$, entonces $d(u, \gamma(p(u))) < \epsilon$.

Además,

$$\begin{aligned} d(u, \alpha(p(u))) &= \frac{3}{4} d(u, \alpha(p(u))) + \frac{1}{4} d(u, \alpha(p(u))) \\ &\leq \frac{3}{4} d(u, \alpha(p(u))) + \frac{1}{4}\epsilon_1, \end{aligned} \tag{2-5}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} d(\gamma(p(u)), \alpha(p(u))) &\leq d(\gamma(p(u)), u) + d(u, \alpha(p(u))) \\ &< \epsilon + d(u, \alpha(p(u))) \\ &< \frac{1}{4}(\epsilon_1 - d(u, \alpha(p(u)))) + \frac{3}{4} d(u, \alpha(p(u))) + \frac{1}{4}\epsilon_1 \\ &= \frac{1}{2}(\epsilon_1 + d(u, \alpha(p(u)))). \end{aligned} \tag{2-6}$$

Sean $\delta_1 = \dfrac{1}{2}(\epsilon_1 + d(u, \alpha(p(u))))$ y $A = \{s \in T \mid d(\gamma(s), \alpha(s)) < \delta_1\}$, entonces $p(u) \in A$ y A es abierto en T puesto que $\Phi_{\gamma\alpha}$ es semicontinua superiormente.

Si análogamente se toma $\delta_2 = \dfrac{1}{2}(d(u, \beta(p(u))) + \epsilon_2)$ y $B = \{s \in T \mid d(\gamma(s), \beta(s)) < \delta_2\}$, entonces $p(u) \in B$ y B es abierto en T. Por lo tanto $S = Q \cap R \cap A \cap B$ es un abierto en T con $p(u) \in S$.

Solo falta verificar que $u \in \mathcal{T}_\epsilon(\gamma_S) \subset \mathcal{T}_{\epsilon_1}(\alpha_Q)$. En efecto, como $p(u) \in S$ y $d(u, \gamma(p(u))) < \epsilon$, entonces $u \in \mathcal{T}_\epsilon(\gamma_S)$. Además si $v \in \mathcal{T}_\epsilon(\gamma_S)$ entonces

$$d(v, \gamma(p(v))) < \epsilon < \frac{1}{2}(\epsilon_1 - d(u, \alpha(p(u)))), \tag{2-7}$$

y, como $p(v) \in S$, entonces $d(\gamma(p(v)), \alpha(p(v))) < \delta_1$. Luego

$$\begin{aligned} d(v, \alpha(p(v))) &\leq d(v, \gamma(p(v))) + d(\gamma(p(v)), \alpha(p(v))) \\ &< \frac{1}{2}(\epsilon_1 - d(u, \alpha(p(u)))) + \delta_1 \\ &= \epsilon_1. \end{aligned} \tag{2-8}$$

Es decir, $\mathcal{T}_\epsilon(\gamma_S) \subset \mathcal{T}_{\epsilon_1}(\alpha_Q)$. Análogamente se tiene que $\mathcal{T}_\epsilon(\gamma_S) \subset \mathcal{T}_{\epsilon_2}(\beta_R)$.

(2) Sean $\alpha \in \Sigma$ y $t \in dom\,(\alpha)$. Sea $\mathcal{T}_\epsilon(\beta_R)$ un abierto básico en G tal que $\alpha(t) \in \mathcal{T}_\epsilon(\beta_R)$ y $t \in \alpha^{-1}(\mathcal{T}_\epsilon(\beta_R))$.

Así $d(\alpha(t), \beta(p(\alpha(t)))) = d(\alpha(t), \beta(t)) < \epsilon$ y, como $\Phi_{\alpha\beta}$ es semicontinua superiormente, existe una vecindad V de t tal que $d(\alpha(s), \beta(s)) < \epsilon$ para todo $s \in V$, es decir que $t \in V \subset \alpha^{-1}(\mathcal{T}_\epsilon(\beta_R))$ y $\alpha^{-1}(\mathcal{T}_\epsilon(\beta_R))$ es abierto en T.

(3) Para verificar que (G, p, T) es un campo de espacios métricos se debe ver que los $\epsilon-$tubos $\mathcal{T}_\epsilon(\sigma)$, donde $\epsilon > 0$ y σ es una selección local arbitraria para p, no necesariamente en Σ, son abiertos. Es decir, si $u \in \mathcal{T}_\epsilon(\sigma)$ entonces existen $\delta > 0$, $\alpha \in \Sigma$ y Q abierto en T, de tal manera que $u \in \mathcal{T}_\delta(\alpha_Q) \subset \mathcal{T}_\epsilon(\sigma)$.

Como $u \in \mathcal{T}_\epsilon(\sigma)$, $d(u, \sigma(p(u))) < \epsilon$ y, por lo tanto,

$$d(u, \sigma(p(u))) < \frac{3}{4} d(u, \sigma(p(u))) + \frac{1}{4}\epsilon. \tag{2-9}$$

Sean $\delta = \frac{1}{4}(\epsilon - d(u, \sigma(p(u))))$ y $\alpha \in \Sigma$ tal que $u \in \mathcal{T}_\delta(\alpha)$, entonces

$$d(u, \alpha(p(u))) < \delta = \frac{1}{4}(\epsilon - d(u, \sigma(p(u)))), \tag{2-10}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} d(\alpha(p(u)), \sigma(p(u))) &\leq d(\alpha(p(u)), u) + d(u, \sigma(p(u))) \\ &< \frac{1}{4}(\epsilon - d(u, \sigma(p(u)))) + \frac{3}{4} d(u, \sigma(p(u))) + \frac{1}{4}\epsilon \\ &= \frac{1}{2}(\epsilon + d(u, \sigma(p(u))). \end{aligned} \tag{2-11}$$

Luego $p(u) \in \sigma^{-1}(\mathcal{T}_\rho(\alpha))$ con $\rho = \frac{1}{2}(d(u, \sigma(p(u))) + \epsilon)$ y $\sigma^{-1}(\mathcal{T}_\rho(\alpha)) = Q$ es abierto en T dada la continuidad de σ.

Para concluir que $u \in \mathcal{T}_\delta(\alpha_Q) \subset \mathcal{T}_\epsilon(\sigma)$ es necesario notar primero que, como $p(u) \in Q$ y $d(u, \alpha(p(u))) < \delta$, entonces $u \in \mathcal{T}_\delta(\alpha_Q)$.

Ahora, si $v \in \mathcal{T}_\delta(\alpha_Q)$ entonces $p(v) \in Q$, $d(v, \alpha(p(v))) < \delta$ y $d(\alpha(p(v)), \sigma(p(v))) < \frac{1}{2}(d(u, \sigma(p(u))) + \epsilon)$. Así que $d(v, \sigma(p(v))) < \epsilon - \delta < \epsilon$ y $v \in \mathcal{T}_\epsilon(\sigma)$.

Solo hace falta verificar que la función $p : G \longrightarrow T$ es continua. En efecto, si U es un abierto en G y $u \in p^{-1}(U)$ entonces dado $\epsilon > 0$ existe α, una selección local para p, tal que $u \in \mathcal{T}_\epsilon(\alpha)$, y como $p(u) \in U$ entonces $u \in \mathcal{T}_\epsilon(\alpha_U) \subset p^{-1}(U)$, es decir que $p^{-1}(U)$ es abierto en G. $\square$

Una versión de este teorema, que será útil más adelante puede ser formulada de la siguiente manera:

Teorema 2. *Sean T un espacio topológico, $\mathcal{B}_T$ una base para la topología de T, G un conjunto, $p : G \longrightarrow T$ una función sobreyectiva, d una métrica para p y Σ una colección de selecciones locales para p.*

Supónganse las dos condiciones siguientes:

(a) *Dados $u \in G$ y $n \in \mathbb{N}^+$ existe una selección local $\alpha \in \Sigma$ de manera que $u \in \mathcal{T}_{2^{-n}}(\alpha)$.*

(b) *Para todo par de selecciones $\alpha, \beta \in \Sigma$ la función $\Phi_{\alpha\beta} : dom(\alpha) \cap dom(\beta) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\Phi_{\alpha\beta}(t) = d(\alpha(t), \beta(t))$ es semicontinua superiormente.*

Entonces G puede ser dotado de una topología $\mathfrak{T}$ de manera que

(1) *La familia $\mathcal{B} = \{\mathcal{T}_{2^{-n}}(\alpha_Q) \mid n \in \mathbb{N}^+ \wedge \alpha \in \Sigma \wedge Q \in \mathcal{B}_T \wedge Q \subseteq dom(\alpha)\}$, con $\alpha_Q = \alpha \restriction_Q$, es una base para $\mathfrak{T}$.*

(2) *Si $\alpha \in \Sigma$ entonces α es sección.*

(3) *(G, p, T) es un campo de espacios métricos.*

2.3. Ejemplos de Campos de Espacios Métricos

Ejemplo 1. (Campo de espacios métricos de las funciones numéricas continuas sobre $[0, 1]$: $([0, 1] \times \mathbb{R}, \pi_1, [0, 1])$). Sean T el intervalo $[0, 1]$ con la topología usual, $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales con la topología usual, y $G = [0, 1] \times \mathbb{R}$ provisto de la topología producto. Sean $p = \pi_1 : G \longrightarrow T$ la proyección sobre el primer factor, y d la métrica para p dada por

$$d((t, y), (t', y')) = \begin{cases} \infty, & \text{cuando } t \neq t', \\ \|y - y'\|, & \text{cuando } t = t'. \end{cases} \tag{2-12}$$

Nótese que en cada fibra, la métrica d es la métrica usual sobre $\mathbb{R}$.

Además, si α es una sección global para p, α determina una única función continua $f_\alpha : T \longrightarrow \mathbb{R}$, la función $f_\alpha = \pi_2 \circ \alpha$. En efecto, si $\alpha(t) = ((\pi_1 \circ \alpha)(t), (\pi_2 \circ \alpha)(t))$ es una sección, entonces $\pi_1 \circ \alpha = p \circ \alpha$ es la identidad en T y $f_\alpha = \pi_2 \circ \alpha$ es continua.

Recíprocamente, si f es una función continua de T en $\mathbb{R}$, la función $\alpha_f : T \longrightarrow T \times \mathbb{R}$ dada por $\alpha_f(t) = (t, f(t))$ es una sección.

Estas relaciones establecen una biyección entre el conjunto de las funciones continuas de T en $\mathbb{R}$ y el conjunto de las secciones globales para p.

De la misma manera se tiene que las secciones locales están determinadas por las funciones numéricas continuas definidas en sobre los abiertos U de T.

Ahora bien, si $u = (t_0, y_0) \in G$ y $\epsilon > 0$, basta tomar la función constante $f(t) = y_0$ para tener que $u \in \mathcal{T}_\epsilon(\alpha_f)$, dado que $\alpha_f(p(u)) = u$.

Adicionalmente, si α y β son selecciones locales para p, existen funciones continuas f y g que las determinan en forma única, y por lo tanto la función

$$\Phi_{\alpha\beta}(t) = d(\alpha(t), \beta(t)) = |f(t) - g(t)| \tag{2-13}$$

es continua y semicontinua superiormente.

En consecuencia (G, p, T) es un Campo de Espacios Métricos. $\square$

Ejemplo 2. (Campo de espacios métricos de las funciones continuas de un espacio topológico T en un espacio métrico (E, d): $(T \times E, \pi_1, T)$). Sean T un espacio topológico cualquiera, (E, d) un espacio métrico, $G = T \times E$ dotado de la topología producto, y $p : G \longrightarrow T$ la proyección sobre el primer factor.

Note que la función $\delta : G \times G \longrightarrow [0, \infty]$ definida por

$$\delta((t, y), (t', y')) = \begin{cases} \infty, & \text{cuando } t \neq t', \\ d(y, y'), & \text{cuando } t = t'. \end{cases} \tag{2-14}$$

es una métrica para p.

Esta es una generalización natural del ejemplo anterior y todas las demostraciones son similares.

En particular, dado un abierto $U \subseteq T$ y una función continua $f : U \longrightarrow E$, el ϵ-tubo $\mathcal{T}_\epsilon(f) = \{(x, y) \mid x \in U \wedge d(y, f(x)) < \epsilon\}$ es un abierto de E. $\Box$

Para ilustrar el tipo de construcción utilizada en la próxima sección, se incluye el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3. (Haz de gérmenes de funciones). Sean T es un espacio topológico y (X, d) un conjunto de funciones de T en $\mathbb{R}$ dotado con la métrica del supremo

$$d(x, y) = \sup_{t \in T} d(x(t), y(t)), \tag{2-15}$$

donde d es la métrica discreta sobre $\mathbb{R}$

$$d(x(t), y(t)) = \begin{cases} 0, & \text{si } x(t) = y(t), \\ 1, & \text{si } x(t) \neq y(t). \end{cases} \tag{2-16}$$

Si $t \in T$ y $x, y \in X$ se dice que *"x está relacionada con y en t"* (xS_ty o $x \sim_t y$) si la envolvente superior de $d(x, y)$ es cero en t:

$$x \sim_t y \Leftrightarrow \limsup_{s \to t} d(x(s), y(s)) = 0. \tag{2-17}$$

Es decir, $x \sim_t y$ si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe una vecindad $V \in \mathcal{V}(t)$ tal que $d(x(s), y(s)) < \epsilon$ para todo $s \in V$.

Note que, tomando $\epsilon \leq 1$, $x \sim_t y$ si y sólo si existe una vecindad $V \in \mathcal{V}(t)$ tal que $x(s) = y(s)$ para todo $s \in V$.

Se utiliza $[x]_t$ para notar la clase de equivalencia de x según $\sim_t$ y G_t para denotar a $X/ \sim_t$ (la fibra encima de t).

Evidentemente (G_t, d_t) es un espacio métrico con la métrica dada por

$$d_t\left([x]_t, [y]_t\right) = \limsup_{s \to t} d(x(s), y(s)), \tag{2-18}$$

puesto que d_t no es otra que la métrica discreta sobre G_t.

Además, si $t \in T$ y $x, y \in X$, la función $\widehat{d} : T \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\widehat{d}(t) = d_t\left([x]_t, [y]_t\right)$ es semicontinua superiormente.

Sea G la unión disjunta de los G_t cuando t recorre T, $p : G \longrightarrow T$ la función dada por $p(u) = t$ si y sólo si $u \in G_t$, y $\Sigma = \{\widehat{x} : T \longrightarrow G \mid \widehat{x}(t) = [x]_t \wedge x \in X\}$. Así, Σ es un conjunto de selecciones para p.

Sea también $d^* : G \times G \longrightarrow [0, +\infty]$ la función

$$d^*(u,v) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } p(u) \neq p(v), \\ d_t(u,v), & \text{si } p(u) = p(v) = t, \end{cases} \tag{2-19}$$

entonces d^* es una métrica para p.

Ahora bien, si $u \in G$ entonces $u \in G_t$ para algún $t \in T$ y $u = [x]_t$ para algún $x \in X$. Por lo tanto si $\epsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que $u \in \mathcal{T}_\epsilon(\widehat{x})$.

Queda entonces probado que (G, p, T) es un campo de espacios métricos y que los ϵ-tubos son de la forma

$$\mathcal{T}_\epsilon(\widehat{x}) = \begin{cases} \widehat{x}(T), & \text{si } 0 < \epsilon \leq 1, \\ G, & \text{si } \epsilon > 1. \end{cases} \tag{2-20}$$

$\widehat{x}(t)$ se conoce como el *gérmen de x en t* y (G, p, T) como el *haz de gérmenes de funciones de X*. $\square$

2.4. Campo de Espacios Métricos de las Funciones Semicontinuas Superiormente

En esta sección se presenta la construcción analítica de un campo de espacios métricos para representar como secciones a las funciones semicontinuas superiormente definidas sobre un espacio topológico T.

Dado $t \in T$, la fibra encima de t se define como el cociente del espacio X_t de todas las funciones $x : T \longrightarrow \mathbb{R}$ semicontinuas superiormente en el punto t módulo una relación de equivalencia sobre X_t. Esta relación de equivalencia definida en el espacio X de las funciones semicontinuas superiormente en todo T, fue presentada y expresada en [43] mediante funciones de Urysohn asociadas al filtro $\mathcal{V}(t)$ de vecindades de t, redefinida en términos de la envolvente superior de la función distancia en X [22, 24], y puede ser expresada mediante operaciones elementales que permiten utilizar las propiedades algebráicas de las funciones semicontinuas superiormente cuando se reemplaza el espacio X por el espacio X_t.

Esta construcción nos permitire responder preguntas asociadas con propiedades topológicas básicas como la completez de las fibras del campo construido a partir de las funciones semicontinuas superiormente. Salvo para el *Teorema de Representación* y el *Teorema de*

Completez de las Fibras, las demostraciones se omiten sistemáticamente y pueden ser consultadas en la bibliografía sobre el tema [22, 24].

2.4.1. Preliminares

En lo que resta de la sección T será un espacio topológico, X el espacio métrico de todas las funciones acotadas y semicontinuas superiormente de T en $\mathbb{R}$ con la métrica del supremo, y, dado $t \in T$ fijo, X_t será el conjunto de todas las funciones de T en $\mathbb{R}$ acotadas y semicontinuas superiormente en t con la métrica del supremo.

Definición 5. (Relación puntual entre funciones (xR_ty o $x \equiv_t y$)). Si $t \in T$ y $x, y \in X_t$ se dice que "*x está relacionada con y en t*" (xR_ty o $x \equiv_t y$) si la envolvente superior[1] de $|x-y|$ es cero en t:

$$x \equiv_t y \Leftrightarrow \limsup_{s\to t} |x(s) - y(s)| = 0 \Leftrightarrow \overline{|x-y|}(t) = 0. \tag{2-21}$$

Es decir, $x \equiv_t y$ si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe una vecindad $V \in \mathcal{V}(t)$ tal que $|x(s) - y(s)| < \epsilon$ para todo $s \in V$.

En [43] y [22] se demuestra que R_t es una relación de equivalencia y que puede ser formulada en términos de la continuidad de $x - y$ en el punto t. Esta reformulación de R_t permite además demostrar directamente su compatibilidad con las operaciones en X_t [22].

Proposición 2. (R_t y continuidad). *Dado $t \in T$ y $x,\ y \in X_t$, $x \equiv_t y$ si y sólo si la función $x - y$ es continua en el punto t y $x(t) = y(t)$.*

Proposición 3. (R_t es relación de equivalencia ($\equiv_t$)). *La relación $\equiv_t$ es una relación de equivalencia sobre X_t para todo $t \in T$.*

El siguiente resultado muestra que la relación de equivalencia definida respeta las operaciones en X_t.

Proposición 4. (Compatibilidad de R_t con las operaciones en X_t). *La relación $\equiv_t$ es compatible con las operaciones en X_t en el siguiente sentido:*

1. *Si $x,\ y,\ u,\ v \in X_t$ son tales que $x \equiv_t u$ y $y \equiv_t v$, entonces $x + y \equiv_t u + v$.*

[1] En general $\overline{x}$ denota la envolvente superior de la función x, que definida como $\overline{x}(t) = \limsup_{s\to t} x(s) = \inf_{V\in\mathcal{V}(t)} \sup_{s\in V} x(s)$, resulta ser la menor función semicontinua superiormente que supera o iguala a la función x.

2. *Si $x, u \in X_t$ son tales que $x \equiv_t u$ y f es una función continua no-negativa, entonces $fx \equiv_t fu$.*

Definición 6. (E_t: La fibra encima de t). Para todo $t \in T$ y para todo $x \in X_t$ se define $[x]_t$ como la clase de equivalencia de x módulo $\equiv_t$ y $E_t = X_t/\equiv_t$ el espacio cociente X_t módulo $\equiv_t$ (la fibra encima de t).

Definición 7. (Operaciones en E_t). Dados $x, y \in X_t$, $\alpha \geq 0$ y f una función continua no negativa se define:

1. $[x]_t + [y]_t = [x + y]_t$.

2. $\alpha[x]_t = [\alpha x]_t$.

3. $f[x]_t = [fx]_t$.

Estas operaciones están bien definidas gracias a la proposición anterior.

Proposición 5. *Si $t \in T$, $[x]_t \in E_t$ y f es una función continua no negativa, entonces $[fx]_t = [f(t)x]_t = f(t)[x]_t$.*

Nota 1. *(E_t, d_t) es un espacio métrico con*

$$d_t\left([x]_t, [y]_t\right) = \overline{|x - y|}(t). \tag{2-22}$$

Note también que siempre que $t \in T$ y $x,\ y \in X_t$, la función $\widetilde{d} : T \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\widetilde{d}(t) = d_t\left([x]_t, [y]_t\right) = \overline{|x - y|}(t)$ es semicontinua superiormente.

2.4.2. Construcción

Definición 8. En lo que resta de la sección se escribirá

(a) $E = \dot{\bigcup}_{t \in T} E_t$ para denotar la unión disjunta de los E_t cuando t recorre T.

(b) $p : E \longrightarrow T$ como la función dada por $p(u) = t$ si y solo si $u \in E_t$.

(c) $\Sigma = \{\widehat{x} \mid x \in X\}$ donde $\widehat{x} : T \longrightarrow E$ está definida por $\widehat{x}(t) = [x]_t$.

(d) $d^* : E \times E \longrightarrow [0, +\infty]$ la función

$$d^*(u, v) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } p(u) \neq p(v), \\ d_t(u, v), & \text{si } p(u) = p(v) = t. \end{cases} \tag{2-23}$$

Teorema 3. (Teorema de Representación [22, 24]). *(E, p, T) es un Campo de Espacios Métricos, Σ es un conjunto pleno de secciones globales para p, y una base para la topología de E está constituida por los tubos de la forma $\mathcal{T}_\epsilon(\widehat{x}\restriction_V)$ tales que $\widehat{x} \in \Sigma$, $\epsilon > 0$ y V es un abierto no vacío en T. Adicionalmente el morfismo de Gelfand $\widehat{\ }: X \longrightarrow \Gamma(p)$, $x \longmapsto \widehat{x}$, es una isometría del espacio X de todas las funciones acotadas semicontinuas superiormente en el conjunto de todas las secciones globales de (E, p, T), con las correspondientes métricas del supremo.*

Demostración. Dado que $p(u) \neq p(v)$ si y sólo si $d^*(u, v) = +\infty$ y $d_t = d^* \restriction_{E_t \times E_t}$, se sigue que d^* es una métrica para p. Además, como para todo $x \in X$ se tiene que $p(\widehat{x}(t)) = p([x]_t) = t$, entonces Σ es una familia de selecciones para p.

Por otra parte, si $u \in E$ y $t \in T$ son tales que $u \in E_t$, entonces existe $x \in X$ tal que $u = [x]_t$. Por lo tanto, $u \in \mathcal{T}_\epsilon(\widehat{x})$ para todo $\epsilon > 0$.

Sean $\widehat{x}, \widehat{y} \in \Sigma$ y $\Delta : T \longrightarrow [0, +\infty]$ definida por $\Delta(t) = d^*(\widehat{x}(t), \widehat{y}(t))$. Puesto que $p(\widehat{x}(t)) = p(\widehat{y}(t))$ para todo $t \in T$, resulta que $\Delta(t) \neq +\infty$. Además $\Delta(t) = d^*(\widehat{x}(t), \widehat{y}(t)) = d_t(\widehat{x}(t), \widehat{y}(t)) = d_t([x]_t, [y]_t) = \overline{|x-y|}(t)$, y Δ es una función semicontinua superiormente.

Así las cosas, el Teorema de Existencia garantiza que E puede ser dotado con una topología $\mathfrak{T}$ tal que

(a) La familia de subconjuntos de E de la forma $\mathcal{T}_\epsilon(\widehat{x}_Q)$ es una base para $\mathfrak{T}$, donde $\epsilon > 0$, Q es abierto no vacío en T, $\widehat{x} \in \Sigma$ y $\widehat{x}_Q$ es la restricción de x a Q.

(b) Todo elemento $\widehat{x}$ de Σ es una sección.

(c) (E, p, T) es un campo de espacios métricos.

Ahora bien, si $x, y \in X$, entonces $|x(t) - y(t)| \leq d(x, y)$ para todo $t \in T$ y por lo tanto $\sup_{s \in V} |x(s) - y(s)| \leq d(x, y)$ para toda vecindad V de t. Así las cosas, $d_t(\widehat{x}(t), \widehat{y}(t)) = \overline{|x-y|}(t) = \inf_{V \in \mathcal{V}(t)} \sup_{s \in V} |x(s) - y(s)| \leq d(x, y)$. Luego

$$\sup_{t \in T} d_t(\widehat{x}(t), \widehat{y}(t)) \leq d(x, y). \tag{2-24}$$

La otra desigualdad es inmediata puesto que

$$|x(t) - y(t)| \leq \overline{|x-y|}(t) = d_t(\widehat{x}(t), \widehat{y}(t)), \tag{2-25}$$

para todo $t \in T$. $\square$

Definición 9. (Campo de Espacios Métricos de las Funciones Semicontinuas Superiormente [22, 24]). El campo de espacios métricos (E, p, T) construido en el teorema anterior se conoce como *Campo de Espacios Métricos de las Funciones Semicontinuas Superiormente*.

2.4.3. Algunas Propiedades de (E, p, T)

Es posible demostrar que la imagen $\widehat{X}$, del espacio X de las funciones semicontinuas superiormente bajo el morfismo de Gelfand, $x \longmapsto \widehat{x}$, es cerrada para la adición y para la multiplicación por funciones no negativas, y que esta última propiedad puede ser extendida a cualquier sección global de (E, p, T). Además, si T es compacto y completamente regular, toda sección global es la imagen por el morfismo de Gelfand de alguna función semicontinua superiormente, acotada y definida sobre T [22].

Por otra parte, las fibras E_t del Campo de Espacios Métricos de las Funciones Semicontinuas Superiormente (E, p, T) son espacios completos y arco conexos, y en general no son espacios localmente compactos.

La imagen $\widehat{X}$, del espacio X de las funciones semicontinuas superiormente bajo el morfismo de Gelfand, es cerrada para la adición y la multiplicación por funciones no negativas tal como se enuncia en la siguiente proposición. La demostración se sigue de la definición [22, 24].

Proposición 6. (Compatibilidad [22, 24]) *Si $t \in T$, x, $y \in X$, $\alpha \geq 0$ y f continua no-negativa, entonces:*

1. $(\widehat{x} + \widehat{y})(t) = (x + y)\hat{}(t)$.
2. $\alpha\widehat{x}(t) = (\alpha x)\hat{}(t)$.
3. $(f\widehat{x})(t) = (fx)\hat{}(t)$.

El tercer numeral de esta proposición se extiende a secciones arbitrarias en $\Gamma(p)$, en la siguiente proposición.

Proposición 7. (Multiplicación en $\Gamma(p)$ [22, 24]) *Si f es una función continua no-negativa y $\sigma \in \Gamma(p)$ es una sección global para p, entonces $f\sigma \in \Gamma(p)$ con $(f\sigma)(t) = f(t)\sigma(t)$.*

Teorema 4. (Σ vs. $\Gamma(p)$ [22, 24]). *Si T es compacto y completamente regular (no necesariamente Hausdorff), entonces $\Sigma = \Gamma(p)$. Es decir, toda sección global del Campo de Espacios Métricos de las Funciones Semicontinuas Superiormente (E, p, T), es la imagen por el morfismo de Gelfand de una función acotada y semicontinua superiormente definida sobre todo T.*

La siguiente proposición, demostrada en [22, 24], juega un papel muy importante al momento de establecer la completez de las fibras del Campo de Espacios Métricos de las Funciones Semicontinuas Superiormente.

Proposición 8. [22, 24] *Si T es completamente regular, $\epsilon > 0$, $[x]_t$, $[y]_t \in E_t$ son tales que $d_t([x]_t, [y]_t) < \epsilon$, entonces existe $v \in X$, representante de $[y]_t$, tal que $d(x, v) < \epsilon$.*

El siguiente teorema candidatiza a (E, p, T) para jugar el rol de *objeto números reales* en la categoría de los campos de espacios métricos:

Teorema 5. (Completez de las fibras [22, 24]). *Si T es completamente regular y $t \in T$, entonces (E_t, d_t) es un espacio métrico completo.*

Demostración. Sea $([x_n]_t)$ una sucesión de Cauchy en E_t. Entonces existe una subsucesión $([y_n]_t)$ de $([x_n]_t)$ tal que

$$d_t\left([y_n]_t, [y_{n+1}]_t\right) < \frac{1}{2^n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $d_t\left([y_1]_t, [y_2]_t\right) < \frac{1}{2}$, la proposición anterior garantiza que existen representantes, $z_1, z_2 \in X_t$, de $[y_1]_t$ y $[y_2]_t$ respectivamente, tales que $d(z_1, z_2) < \frac{1}{2}$.

Como $d_t\left([y_2]_t, [y_3]_t\right) < \frac{1}{2^2}$, entonces existen representantes, $z_2', \breve{z}_3 \in X_t$, de $[y_2]_t$ y $[y_3]_t$ respectivamente, tales que $d(z_2', \breve{z}_3) < \frac{1}{2^2}$. Como $z_2 \equiv_t z_2'$ entonces $z_2' = z_2 + w_2$ para alguna función w_2 continua en t y con $w_2(t) = 0$. Así las cosas, $d(z_2, \breve{z}_3 - w_2) = d(z_2 + w_2, \breve{z}_3) = d(z_2', \breve{z}_3) < \frac{1}{2^2}$. Tómese $z_3 = \breve{z}_3 - w_2$ y nótese que $z_3 \in [y_3]_t$.

Continuando con el procedimiento, supongamos que se tienen $z_1, z_2, ..., z_n \in X_t$, representantes de $[y_1]_t, [y_2]_t, ..., [y_n]_t$ respectivamente, tales que $d(z_k, z_{k+1}) < \frac{1}{2^k}$ para $k = 1, 2, .., n-1$. Existen entonces $z_n' \in [y_n]_t$ y $\breve{z}_{n+1} \in [y_{n+1}]_t$ tales que $d(z_n', \breve{z}_{n+1}) < \frac{1}{2^n}$. Como $z_n \equiv_t z_n'$ entonces $z_n' = z_n + w_n$ para alguna función w_n continua en t y con $w_n(t) = 0$. Así, $d(z_n, \breve{z}_{n+1} - w_n) = d(z_n + w_n, \breve{z}_{n+1}) = d(z_n', \breve{z}_{n+1}) < \frac{1}{2^n}$. Tómese $z_{n+1} = \breve{z}_{n+1} - w_n$ y nótese que $z_{n+1} \in [y_{n+1}]_t$.

Así se tiene que si $m > n$ entonces

$$d(z_n, z_m) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(z_k, z_{k+1}) \leq \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Como X_t es completo, existe $z \in X_t$ tal que $z_n \to z$ cuando $n \to +\infty$, luego $d(z_n, z) \to 0$ cuando $n \to +\infty$.

Como $d_t\left([y_n]_t, [z]_t\right) \leq d\left(z_n, z\right)$, entonces $[y_n]_t \to [z]_t$ cuando $n \to +\infty$.

Luego (E_t, d_t) es un espacio métrico completo. □

En lo que sigue se relacionan algunas propiedades del campo construido, todas presentadas en [22] y [24].

Nota 2. Sea $K_t = \{[a]_t \mid a \in \mathbb{R}\} \subseteq E_t$, es el subconjunto de las clases de equivalencia de las funciones constantes. Note que si $x : T \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en t, entonces $[x]_t = [x(t)]_t$ y por lo tanto $[x]_t \in K_t$, es decir, K_t coincide con el subconjunto de las clases de equivalencia de las funciones continuas en t. Y, como la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow K_t \subseteq E_t$ definida por $f(a) = [a]_t$ es una isometría, entonces K_t es un subespacio conexo de E_t.

Proposición 9. (Conexidad de las fibras [22, 24]) *Si el espacio base T del campo (E, p, T) de las funciones semicontinuas superiormente es un espacio métrico, entonces la fibra E_t sobre el punto t es conexo para todo t en T.*

Nota 3. En general la fibra E_t en el campo (E, p, T) no es un espacio localmente compacto. Para ilustrar la situación con un contraejemplo, tómese $T = [0, 1]$ y $t = 0$.

Es claro que si $m \in \mathbb{N}$ entonces la sucesión $(a_{mn})_{n\in\mathbb{N}}$, dada por

$$a_{mn} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2^m}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2^m n} + \frac{2^m - 1}{2^m(n+1)}, \tag{2-26}$$

es una sucesión que tiende a cero cuando n tiende a infinito.

Para cada valor natural de m tómese $A_m = \{a_{mn} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ y χ_{A_m} la función característica de A_m.

Sean $\epsilon > 0$ y $V_\epsilon = \{[x]_0 \in E_0 \mid d_0([0]_0, [x]_0) \leq \epsilon\}$ un cerrado básico centrado en $[0]_0$ en la fibra E_0 sobre el punto 0. Evidentemente $\left[\frac{\epsilon}{2}\chi_{A_m}\right]_0 \in V_\epsilon$ para cada $m \in \mathbb{N}$.

Note que si $n \neq m$ entonces $A_n \cap A_m = \{0\}$. Lo que implica que si $n \neq m$ entonces $d_0\left(\left[\frac{\epsilon}{2}\chi_{A_n}\right]_0, \left[\frac{\epsilon}{2}\chi_{A_m}\right]_0\right) = \frac{\epsilon}{2}$. Es decir, $\left(\left[\frac{\epsilon}{2}\chi_{A_n}\right]_0\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en V_ϵ que no posee una subsucesión convergente, V_ϵ no es compacto para ningún valor de ϵ y la fibra E_0 sobre el punto 0 no es un espacio localmente compacto.

Por otra parte, es posible dotar a E_t de una estructura de orden parcial.

Definición 10. Sean $[x]_t$, $[y]_t \in E_t$. Si para todo $\epsilon > 0$ existe una vecindad $V_\epsilon \in \mathcal{V}(t)$ ta que $x(s) \leq y(s) + \epsilon$ para todo $s \in V_\epsilon$ se dice que *"$[x]_t$ es menor o igual que $[y]_t$"* y se escribe $[x]_t \leq [y]_t$.

Proposición 10. [24] *$(E_t, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.*

Esta relación de orden, en general, no es un orden total [24], y la topología del orden sobre E_t es estrictamente más fina que la topología como espacio métrico [24].

3 Teoría de Efectividad Tipo 2

El Análisis Computable conecta el análisis con la computabilidad combinando adecuadamente los conceptos de aproximación y computación. Varios modelos no equivalentes de computación sobre números reales han sido formulados para obtener una aproximación realista al análisis computable [36, 41, 31, 1, 4, 55]. El más aceptado, gracias a su flexibilidad y expresividad, es la aproximación por representaciones: Teoría de Efectividad Tipo-2 (TTE[1]). La idea central de TTE está inspirada en la definición de operadores reales computables sobre ω^ω formulada por Grzegorczyk en [27, 28]: *una función real es computable si y solo si puede ser representada como un operador computable sobre una codificación de los números reales.*

Este capítulo presenta una introducción a TTE, unificando definiciones y notaciones disponibles en la literatura. La referencia recomendada para una completa introducción en este tópico es [55]. Las demostraciones se omiten sistemáticamente pero para cada una se incluye la referencia de fácil acceso donde puede ser consultada.

TTE aborda el estudio de la computabilidad sobre conjuntos no enumerables y su recorrido va desde el estudio del sistema de los números reales a los espacios Euclidianos y los espacios métricos [65, 9, 61, 55, 66, 8, 67]. Espacios más generales también han sido estudiados bajo esta perspectiva: espacios Hausdorff localmente compactos [12], espacios no metrizables [64], y espacios T_0 segundo contables [45].

Según [12], las computaciones en TTE son adelantadas por máquinas de Turing con *cintas de entrada* que solo pueden ser leidas secuencialmente y sin retroceso, *cintas de salida* que solo pueden ser escritas secuencialmente y sin retroceso, y *cintas auxiliares* que se utilizan para realizar cálculos.

A diferencia de la teoría clásica de computabilidad, en donde las cadenas de entrada y salida son elementos de Σ^* (*palabras finitas*), las entradas y salidas de las máquinas en TTE son elementos de Σ^ω (*palabras infinitas*). Esta construcción permite la representación de objetos propios del análisis real y la topología, extendiendo la teoría de computabilidad clásica de manera que sea posible trabajar con conjuntos cuya cardinalidad no supere la del continuo.

[1] TTE, del inglés, Type-2 Theory of Effectivity.

Este capítulo supone que el lector está familiarizado con la teoría de efectividad clásica. Algunas fuentes recomendadas para profundizar en este tema son, entre otras, [10, 40, 13, 44, 49, 53].

3.1. Preliminares

Según [6] la idea central de la aproximación por representaciones al análisis computable es asociar a los objetos de un conjunto infinito no enumerable (números reales, funciones o subconjutos de números reales) una secuencia infinita de símbolos tomados de un alfabeto Σ tal que $\{0,1\} \subseteq \Sigma$.

Dado un alfabeto finito Σ, Σ^* es el conjunto de todas las secuencias finitas[2] sobre Σ, y $\Sigma^\omega = \{p \mid p : \mathbb{N} \longrightarrow \Sigma\}$ es el conjunto de todas las secuencias infinitas sobre Σ (palabras infinitas sobre Σ). En general, Σ^α denota $\prod_{i=1}^{n} \Sigma^{a_i}$ para $\alpha = a_1 a_2 \ldots a_n \in \{*, \omega\}^n$, por ejemplo $\Sigma^{**} = \Sigma^* \times \Sigma^*$ y $\Sigma^{**\omega} = \Sigma^* \times \Sigma^* \times \Sigma^\omega$. Dados $a \in \{*, \omega\}$ y $x \in \Sigma^a$, tanto $x(i)$ como x_i denotan el i-ésimo símbolo de x, y tanto $x \restriction i$ como $x^{<i}$ denotan el segmento inicial de x de longitud i, es decir, $x \restriction i = x^{<i} = x_0 x_1 \ldots x_{i-1}$. De la misma manera, $x^{>i}$ representa el sufijo $x_{i+1} \ldots$ de x, y por lo tanto $x = x^{<i} x_i x^{>i}$.

Si $x = uvw \in \Sigma^*$ y $q = uvp \in \Sigma^\omega$, entonces se dice que u es un prefijo de x y q, y se escribe $u \prec x$ y $u \prec q$ respectivamente; se dice que v es una subsecuencia de x y de q y se escribe $v \lhd x$ y $v \lhd q$ respectivamente, y se dice que w es un sufijo de x y se escribe $x \succ w$. Si $A \subseteq \Sigma^*$ es un subconjunto de Σ^* tal que

$$(x \in A \wedge y \in A \wedge x \neq y) \Longrightarrow \neg(x \prec y), \tag{3-1}$$

entonces se dice que A es libre de prefijos.

Con alguna frecuencia se utilizan las funciones $\iota : \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ y $\langle\cdot\rangle : Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_k \longrightarrow Y_0$, donde $Y_0, \ldots, Y_k \in \{\Sigma^*, \Sigma^\omega\}$, definidas por[3]

$$\iota(a_1 a_2 \ldots a_n) = 110 a_1 0 a_2 0 \ldots 0 a_n 011 \tag{3-2}$$

[2] $\Sigma^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Sigma^k$ donde $\Sigma^0 = \{\lambda\}$, $\Sigma^{n+1} = \Sigma\Sigma^n = \{xp \mid x \in \Sigma \wedge p \in \Sigma^n\}$ y λ denota la palabra vacía.

[3] En inglés las funciones ι y $\langle\cdot\rangle$ se conocen como *wrapping function* y *tupling function* respectivamente.

para todo $n \in \mathbb{N}$ y $a_1 a_2 \ldots a_n \in \Sigma^n$, y

$$\begin{aligned}
&\langle x_1, \ldots, x_k \rangle = \iota(x_1) \ldots \iota(x_k) \in \Sigma^*, \\
&\langle x, p \rangle = \iota(x) p \in \Sigma^\omega, \\
&\langle p, x \rangle = \iota(x) p \in \Sigma^\omega, \\
&\langle p_0, \ldots, p_k \rangle = p_0(0) \ldots p_k(0) p_0(1) \ldots p_k(1) \cdots \in \Sigma^\omega, \\
&\langle x_0, x_1, \ldots \rangle = \iota(x_0)\iota(x_1) \cdots \in \Sigma^\omega, \\
&\langle p_0, p_1, \ldots \rangle \langle i, j \rangle = p_i(j),
\end{aligned} \tag{3-3}$$

donde $x, x_0, x_1, \dots \in \Sigma^*$, $p, p_0, p_1, \dots \in \Sigma^\omega$ e $i, j, k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 1$.

Una represetación de un conjunto X es una función sobreyectiva[4] $\delta :\subseteq \Sigma^\omega \longrightarrow X$. Si este es el caso, se dice que (X, δ) es un *espacio representado*. Si se cuenta con dos espacios representados es posible definir la noción de función computable.

Según [60], en TTE, la computabilidad de funciones $f :\subseteq Y_1 \times \cdots \times Y_n \longrightarrow Y_0$ con $Y_0, \ldots, Y_n \in \{\Sigma^*, \Sigma^\omega\}$ está definida mediante máquinas de Turing de Tipo-2, que son máquinas de Turing que cuentan con cintas de entrada y salida finitas o *de una sola vía*. Una vez definido el concepto de computabilidad, este puede ser transferido a conjuntos no enumerables mediante representaciones en que secuencias infinitas $p \in \Sigma^\omega$ son utilizadas como nombres.

Definición 11. (Función Computable [6]). Sean (X, δ) y (Y, δ') dos espacios representados. Una función $f :\subseteq X \longrightarrow Y$ es (δ, δ')-*computable*, si existe alguna función computable $F :\subseteq \Sigma^\omega \longrightarrow \Sigma^\omega$ tal que $\delta' F(p) = f\delta(p)$ para todo $p \in dom(f\delta)$.

Para completar esta defínción se dice que una función $F :\subseteq \Sigma^\omega \longrightarrow \Sigma^\omega$ es *computable* si existe una máquina de Turing que, computando infinitamente con la secuencia p escrita en su cinta de entrada, escribe la secuencia $F(p)$ en su cinta de salida.

Con el ánimo de estudiar la relaciones topológicas, en TTE las topologías estándar utilizadas sobre Σ^* y Σ^ω son $\tau_* = 2^{\Sigma^*}$, la topología discreta sobre Σ^*, y $\tau_C = \{A\Sigma^\omega \mid A \subseteq \Sigma^*\}$, la *topología de Cantor* sobre Σ^ω. Como bases canónicas para τ_* y τ_C se utilizan $\{\{w\} \mid w \in \Sigma^*\}$ y $\{w\Sigma^\omega \mid w \in \Sigma^*\}$ respectivamente. La propiedad fundamental que tiene la noción de continuidad expresada en términos de computabilidad inducida por τ_* y τ_C es que *toda función computable por una máquina de Turing de tipo-2 es continua*. Esta formulación no es más que la forma topológica de expresión *toda porción finita de la salida de una función depende únicamente de una porción finita de la entrada*.

[4]En general $F :\subseteq A \longrightarrow B$ denota una función parcial de A en B.

3.2. Sistemas de Nombres

En la versión clásica, dado un alfabeto finito Σ, la computabilidad se define para funciones parciales $f :\subseteq (\Sigma^*)^n \longrightarrow \Sigma^*$. Con el objetivo de introducir nociones de computabilidad para funciones sobre otros conjuntos enumerables, las secuencias finitas o elementos de Σ^* (palabras) son utilizadas como *nombres*. En este caso una máquina que computa una función, transforma nombres de la entrada en nombres de la salida: la interpretación de las palabras es proporcionada por el usuario y es responsabilidad de este. Ahora bien, dado que el alfabeto Σ es finito entonces el conjunto Σ^* de secuencias finitas es enumerable. Así las cosas, este método de asociar nombres finitos a los objetos no puede ser aplicado a funciones sobre los números reales o sobre cualquier otro conjunto no enumerable.

TTE se caracteriza por utilizar secuencias infinitas de símbolos como nombres de objetos, e introduce una noción de computabilidad en la que se transforman secuencias infinitas en secuencias infinitas. Basta notar que Σ^ω, el conjunto de todas las secuencias infinitas de símbolos, tiene la misma cardinalidad del continuo para inferir que Σ^ω puede ser utilizado como conjunto de nombres para los números reales (o para cualquier otro conjunto con la misma cardinalidad).

Definición 12. (Notaciones y representaciones [55]).

1. Una *notación* para un conjunto M es una función sobreyectiva $\nu :\subseteq \Sigma^* \longrightarrow M$. Nótese que M debe ser a lo sumo enumerable.
2. Una *representación* para un conjunto M es una función sobreyectiva $\delta :\subseteq \Sigma^\omega \longrightarrow M$. Nótese que M debe tener, a lo más, la cardinalidad del continuo.
3. Un *sistema de nombres* es una notación o una representación.

En general, se escribe ν_w para abreviar $\nu(w)$ y δ_p para $\delta(p)$. Además, si $\gamma :\subseteq Y \longrightarrow M$ es un sistema de nombres (con $Y \in \{\Sigma^*, \Sigma^\omega\}$, $x \in M$), $p \in Y$ y $\gamma(p) = x$, entonces se dice que *p es un γ-nombre de x*.

Ejemplo 4. Algunos ejemplos clásicos de notaciones y representaciones son:

1. *Notación binaria para* $\mathbb{N}$. Si $\Sigma = \{0,1\}$, $dom\,(\nu_\mathbb{N}) = \{0\} \cup 1\,\{0,1\}^*$ y $\nu_\mathbb{N}\,(a_k \ldots a_0) = \sum_{i=0}^{k} a_i 2^i$, donde $a_1, \ldots, a_k \in \{0,1\}$, entonces $\nu_\mathbb{N} :\subseteq \Sigma^* \longrightarrow \mathbb{N}$ es una notación para $\mathbb{N}$.
2. *Notación binaria para* $\mathbb{Z}$. Si $\Sigma = \{0,1,-\}$, $dom\,(\nu_\mathbb{Z}) = \{0\} \cup 1\,\{0,1\}^* \cup -1\,\{0,1\}^*$ y

$$\nu_\mathbb{Z}(w) = \begin{cases} \nu_\mathbb{N}(w), & \text{si } w_0 = 1, \\ -\nu_\mathbb{N}\left(w^{>0}\right), & \text{si } w_0 = -, \\ \nu_\mathbb{N}\left(0\right), & \text{si } w = 0, \end{cases} \tag{3-4}$$

entonces $\nu_{\mathbb{Z}} :\subseteq \Sigma^* \longrightarrow \mathbb{Z}$ es una notación para $\mathbb{Z}$.

3. *Notación binaria para* $\mathbb{Q}$. Si $\Sigma = \{0, 1, -, /\}$ y $\nu_{\mathbb{Q}} :\subseteq \Sigma^* \longrightarrow \mathbb{Q}$ está definida por

$$dom\,(\nu_{\mathbb{Q}}) = \{u/v \mid u \in dom\,(\nu_{\mathbb{Z}}) \wedge v \in dom\,(\nu_{\mathbb{N}}) \wedge \nu_{\mathbb{N}}(v) \neq 0\}\,,$$

y

$$\nu_{\mathbb{Q}}(u/v) = \frac{\nu_{\mathbb{Z}}(u)}{\nu_{\mathbb{N}}(v)},$$

entonces $\nu_{\mathbb{Q}}$ es una notación para $\mathbb{Q}$. En general esta notación es referida abreviando $\nu_{\mathbb{Q}}(w)$ por $\overline{w}$.

4. *Representación por enumeración*. Si $\Sigma = \{0, 1\}$ y $En : \Sigma^\omega \longrightarrow 2^{\mathbb{N}}$ está definida por

$$En(p) = \left\{n \in \mathbb{N} \mid 110^{n+1}11 \lhd p\right\},$$

entonces En es una representación para el conjunto de partes de $\mathbb{N}$, $2^{\mathbb{N}}$.

5. *Representación por función característica*. Si $\Sigma = \{0, 1\}$ y $Cf : \Sigma^\omega \longrightarrow 2^{\mathbb{N}}$ está definida por $Cf(p) = \{i \mid p(i) = 1\}$, entonces Cf es una representación para el conjunto de partes de $\mathbb{N}$, $2^{\mathbb{N}}$.

Para permitir la comparación de sistemas de nombres se introduce el concepto de reducción o traducción:

Definición 13. (Reducción y equivalencia [55]). Dadas funciones arbitrarias $\gamma :\subseteq Y \longrightarrow M$ y $\gamma' :\subseteq Y' \longrightarrow M$ con $Y, Y' \in \{\Sigma^*, \Sigma^\omega\}$ se define:

1. $f :\subseteq Y \longrightarrow Y'$ *traduce* o *reduce* γ a γ' si y solo si $\gamma(y) = \gamma' f(y)$ para todo $y \in dom(\gamma)$.

2. $\gamma \leq \gamma'$ si y solo si alguna función computable traduce γ a γ'. En este caso se dice que γ es *reducible a* γ'.

3. $\gamma \equiv \gamma'$ si y solo si $\gamma \leq \gamma'$ y $\gamma' \leq \gamma$. En este caso se dice que γ y γ' son *sistemas de nombres equivalentes*.

4. $\gamma \leq_t \gamma'$ si y solo si alguna función continua traduce γ a γ'. En este caso se dice que γ es *continuamente reducible a* γ'.

5. $\gamma \equiv_t \gamma'$ si y solo si $\gamma \leq_t \gamma'$ y $\gamma' \leq_t \gamma$. En este caso se dice que γ y γ' son *sistemas de nombres t-equivalentes*.

Definición 14. (Efectividad inducida por sistemas de nombres [55, 26]). Sean $\gamma :\subseteq Y \longrightarrow M$ y $\gamma_0 :\subseteq Y_0 \longrightarrow M_0$ sistemas de nombres. Si $x \in M$, $X \subseteq M$, $f :\subseteq M \longrightarrow M_0$ y $F :\subseteq M \rightrightarrows M_0$ [5]. Entonces:

[5] En general $F :\subseteq A \rightrightarrows B$ denota una función parcial multivaluada de A en B (una relación).

1. x es *γ-computable*, si y solo si $x = \gamma(y)$ para algún elemento y computable en Y.

2. X es *γ-abierto*, si y solo si $\gamma^{-1}(X)$ es abierto en $dom(\gamma)$. El conjunto τ_γ de los subconjuntos γ-abiertos de M es llamado la *topología final de γ sobre M*.

3. Una función $g :\subseteq Y \longrightarrow Y_0$ es una *(γ, γ_0)-realización* de la función f, si y solo si $f \circ \gamma(y) = \gamma_0 \circ g(y)$ para todo $y \in Y$ tal que $f \circ \gamma(y)$ existe.

4. La función f es *(γ, γ_0)-continua (-computable)*, si y solo si tiene una (γ, γ_0)-realización continua (computable).

5. Una función $g :\subseteq Y \longrightarrow Y_0$ es una *(γ, γ_0)-realización* de la función multivaluada F, si y solo si $\gamma_0 \circ g(y) \in F(\{\gamma(y)\})$ para todo $y \in Y$ tal que $\gamma(y) \in dom(F)$. La función multivaluada F es *(γ, γ_0)-continua (-computable)*, si y solo si tiene una (γ, γ_0)-realización continua (computable).

6. Una *función de elección* para una función multivaluada F es una función $h :\subseteq M \longrightarrow M_0$ tal que $h(y) \in F(\{y\})$ para todo $y \in dom(F)$.

7. Dadas representaciones $\delta :\subseteq \Sigma^\omega \longrightarrow M$ y $\delta' :\subseteq \Sigma^\omega \longrightarrow M_0$ se definen

$$[\delta, \delta'] \langle p, p' \rangle = (\delta(p), \delta'(p')),$$

$$\delta \wedge \delta' \langle p, p' \rangle = x \text{ si y solo si } \delta(p) = \delta'(p') = x, \text{ y}$$

$$[\delta]^\omega \langle p_0, p_1, p_2, \dots \rangle = \delta(p_0) \times \delta(p_1) \times \delta(p_2) \times \cdots = (\delta(p_0), \delta(p_1), \delta(p_2), \dots).$$

La topología final τ_γ para una representación γ es la topología más fina τ sobre M que hace de $\gamma :\subseteq \Sigma^\omega \longrightarrow M$ una función (τ_C, τ)-continua.

3.3. Espacios Topológicos Computables

En esta sección se definen los espacios T_0 computables y se presenta la representación estándar para puntos y para subconjuntos abiertos en un espacio topológico computable.

Definición 15. (Espacios topológicos efectivos y espacios topológicos computables [55]).

1. Un *espacio topológico efectivo* es una tripla $\mathfrak{X} = (X, \sigma, \nu)$ donde X es un conjunto no vacío, $\sigma \subseteq 2^X$ es una familia enumerable de subconjuntos de X tal que

$$\{A \in \sigma \mid x \in A\} = \{A \in \sigma \mid y \in A\} \Longrightarrow x = y, \tag{3-5}$$

y $\nu :\subseteq \Sigma^* \longrightarrow \sigma$ es una notación para σ. La topología sobre X es la generada por σ como subbase y se denota por $\tau_{\mathfrak{X}}$.

2. Un *espacio topológico computable* es un espacio topológico efectivo tal que el problema

$$\{(u, v) \mid u, v \in dom(\nu) \wedge \nu(u) = \nu(v)\} \tag{3-6}$$

es recursivamente enumerable.

3. Los elementos $A \in \sigma$ son llamados *propiedades atómicas*. Si $x \in X$, $A \in \sigma$ y $x \in A$, se dice que A *es una propiedad atómica de* x.

4. Nótese que $(X, \tau_{\mathfrak{X}})$ es un espacio T_0.

Como es natural, se requiere de una representación estándar asociada a cada espacio topológico:

Definición 16. (Representación estándar [55]). Sea $\mathfrak{X} = (X, \sigma, \nu)$ un espacio topológico efectivo. Se define *la representación estándar* $\delta_{\mathfrak{X}} :\subseteq \Sigma^\omega \longrightarrow X$ de $\mathfrak{X}$ por

$$(p \in dom\,(\delta_{\mathfrak{X}}) \wedge \iota(w) \lhd p) \Longrightarrow w \in dom(\nu) \tag{3-7}$$

y

$$\delta_{\mathfrak{X}}(p) = x \Longleftrightarrow \{A \in \sigma \mid x \in A\} = \{\nu(w) \mid \iota(w) \lhd p\} \tag{3-8}$$

para todo $w \in \Sigma^*$, $x \in X$ y $p \in \Sigma^\omega$.

Un $\delta_{\mathfrak{X}}$*-nombre para* $x \in X$ es una lista de los ν-nombres de todas las propiedades atómicas, $A \in \sigma$, de x. Es decir, p es un $\delta_{\mathfrak{X}}$-nombre de x, si p lista los ν-nombres de todos los conjuntos $A \in \sigma$ tales que $x \in A$.

Ejemplo 5. Los siguientes son ejemplos clásicos de espacios topológicos computables:

1. Si $\sigma = \{(a, b) \subseteq \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{Q} \wedge a < b\}$, ν es la notación para σ con dominio $dom(\nu) = \{\langle u, v\rangle \in \Sigma^* \mid u, v \in dom(\nu_{\mathbb{Q}}) \wedge \nu_{\mathbb{Q}}(u) < \nu_{\mathbb{Q}}(v)\}$ y $\nu(\langle u, v\rangle) = (\nu_{\mathbb{Q}}(u), \nu_{\mathbb{Q}}(v)) \subseteq \mathbb{R}$, entonces $\mathfrak{X} = (\mathbb{R}, \sigma, \nu)$ es un espacio topológico computable. La topología $\tau_{\mathfrak{X}}$ sobre $\mathbb{R}$ es la topología usual sobre $\mathbb{R}$.

2. $\mathfrak{X} = (\Sigma^\omega, \sigma, \nu)$ es un espacio topológico computable con $\nu(w) = w\Sigma^\omega$. En este caso la topología $\tau_\mathfrak{X}$ es la topología de Cantor τ_C sobre Σ^ω.

Sobre un espacio topológico efectivo $\mathfrak{X} = (X, \sigma, \nu)$, el conjunto σ de propiedades atómicas define un concepto de aproximación sobre el conjunto X: *un elemento $x \in X$ puede ser aproximado mediante una sucesión de sus propiedades atómicas*. La siguiente proposición, demostrada en [55], presenta algunas propiedades topológicas de $\delta_\mathfrak{X}$.

Proposición 11. (Propiedades de $\delta_\mathfrak{X}$ [55]). *Si $\mathfrak{X} = (X, \sigma, \nu)$ es un espacio topológico efectivo entonces:*

1. *$\delta_\mathfrak{X}$ es una representación $(\tau_C, \tau_\mathfrak{X})$-continua ($V \in \tau_\mathfrak{X} \Longrightarrow \delta_\mathfrak{X}^{-1}(V)$ es abierto en dom $(\delta_\mathfrak{X})$).*

2. *$\delta_\mathfrak{X}$ es una representación $(\tau_C, \tau_\mathfrak{X})$-abierta ($V \in \tau_C \Longrightarrow \delta_\mathfrak{X}(V) \in \tau_\mathfrak{X}$).*

3. *$\tau_\mathfrak{X}$ es la topología final de $\delta_\mathfrak{X}$.*

4. *Sean (X', τ') un espacio topológico y $H :\subseteq X \longrightarrow X'$ una función tal que $H \circ \delta_\mathfrak{X} :\subseteq \Sigma^\omega \longrightarrow X'$ es (τ_C, τ')-continua. Entonces H es $(\tau_\mathfrak{X}, \tau')$-continua.*

Definición 17. (Espacios T_0 efectivos y computables [26]).

1. Un *espacio T_0 efectivo* es una tupla $\mathfrak{X} = (X, \tau, \beta, \nu)$ tal que (X, τ) es un espacio topológico T_0 segundo contable y $\nu :\subseteq \Sigma^* \longrightarrow \beta$ es una notación para la base β de τ cuyo dominio es recursivo. Se supone que los abiertos básicos en β son no vacíos ($U \in \beta \Longrightarrow U \neq \emptyset$).

2. Un *espacio T_0 computable* es un espacio T_0 efectivo que tiene intersección computable. Es decir, un espacio T_0 efectivo $\mathfrak{X} = (X, \tau, \beta, \nu)$ es un *espacio T_0 computable* si existe una función computable $h :\subseteq \Sigma^* \times \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^\omega$ tal que, para todo $u, v \in dom(\nu)$

$$\nu(u) \cap \nu(v) = \bigcup \{\nu(w) \mid w \in dom(\nu) \wedge \iota(w) \lhd h(u,v)\}. \tag{3-9}$$

   En esta definición, la existencia de la función h puede ser reemplazada por la existencia de un conjunto recursivamente enumerable $B \subseteq (dom(\nu))^3$ tal que, para todo $u, v \in dom(\nu)$

$$\nu(u) \cap \nu(v) = \bigcup \{\nu(w) \mid (u, v, w) \in B\}. \tag{3-10}$$

3. Por motivos técnicos se define

$$D_\nu = \{q \in \Sigma^\omega \mid \iota(w) \lhd q \Longrightarrow w \in dom(\nu)\}. \tag{3-11}$$

En el contexto de este trabajo, la noción de espacio topológico T_0 computable es más útil que la de espacio topológico computable. Las dos principales diferencias entre las definiciones son:

- Mientras ν es una notación para una base β de la topología, ν' es una notación para una subbase σ. Evidentemente β es también una subbase. Además, a partir de ν' es posible obtener una notación canónica para las intersecciones finitas de elementos de la subbase, es decir, es posible obtener una notación canónica para una base. Vale anotar que en este caso las intersecciones vacías no pueden ser excluidas computacionalmente.
- En la definición de espacio T_0 efectivo se impone que $dom(\nu)$ debe ser recursivo. Entre tanto $dom\,(\nu')$ puede no ser recursivamente enumerable para un espacio topológico efectivo y debe serlo para un espacio topológico computable.

Sobre los espacios T_0 efectivos se define una representación estándar de la siguiente manera:

Definición 18. (Representación estándar para X [26]). La *representación estándar* $\delta_{\mathfrak{X}} :\subseteq \Sigma^\omega \longrightarrow X$ para $\mathfrak{X}$ está dada por: $dom\,(\delta_{\mathfrak{X}}) \subseteq D_\nu$ y

$$\delta_{\mathfrak{X}}(p) = x \Longleftrightarrow \{w \in dom(\nu) \mid x \in \nu(w)\} = \{w \mid \iota(w) \triangleleft p\}\,. \tag{3-12}$$

para todo $x \in X$ y $p \in D_\nu$.

Así, un $\delta_{\mathfrak{X}}$-nombre para $x \in X$ es una lista de todas las palabras w tales que $x \in \nu(w)$.

Es claro que la topología τ en espacio topológico (X, τ) puede ser generada por varias bases y que distintas notaciones asociadas a estas bases pueden inducir diferentes nociones de efectividad sobre el mismo espacio. Aí las cosas es necesario contar con una herramienta que permita comparar diversas nociones inducidas sobre (X, τ).

Definición 19. (Espacios recursivamente relacionados [26]). Dos espacios T_0 efectivos $\mathfrak{X}_1 = (X, \tau, \beta_1, \nu_1)$ y $\mathfrak{X}_2 = (X, \tau, \beta_2, \nu_2)$ están *recursivamente relacionados* si y solo si existen funciones computables $g, g' :\subseteq \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^\omega$ tales que

$$\nu_1(u) = \bigcup_{\iota(w) \triangleleft g(u)} \nu_2(w) \text{ y } \nu_2(u) = \bigcup_{\iota(w) \triangleleft g'(v)} \nu_1(w). \tag{3-13}$$

Equivalentemente, $\mathfrak{X}_1$ y $\mathfrak{X}_2$ están recursivamente relacionados si y solo si existen conjuntos recursivamente enumerables $C, C' \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ tales que

$$\nu_1(u) = \bigcup_{(u,w) \in C} \nu_2(w) \text{ y } \nu_2(v) = \bigcup_{(v,w) \in C'} \nu_1(w). \tag{3-14}$$

Si $\nu_1 \equiv \nu_2$ entonces $\mathfrak{X}_1$ y $\mathfrak{X}_2$ están recursivamente relacionados.

Dados dos espacios T_0 efectivos $\mathfrak{X}_1 = (X, \tau, \beta_1, \nu_1)$ y $\mathfrak{X}_2 = (X, \tau, \beta_2, \nu_2)$, una de las más importantes relaciones entre $\delta_{\mathfrak{X}_1}$ y $\delta_{\mathfrak{X}_1}$ se presenta en [26], y establece tanto la relación de equivalencia continua sin restricción alguna, como la de equivalencia si los espacios están recursivamente relacionados.

Proposición 12. **($\delta_{\mathfrak{X}}$ es robusta [26]).** *Si $\mathfrak{X}_1 = (X, \tau, \beta_1, \nu_1)$ y $\mathfrak{X}_2 = (X, \tau, \beta_2, \nu_2)$ son espacios T_0 efectivos, entonces*

1. $\delta_{\mathfrak{X}_1} \equiv_t \delta_{\mathfrak{X}_2}$ *y*

2. *Si $\mathfrak{X}_1$ y $\mathfrak{X}_2$ están recursivamente relacionados, entonces $\delta_{\mathfrak{X}_1} \equiv \delta_{\mathfrak{X}_2}$.*

Se introducen también las representaciones *interior* del conjunto τ y *exterior* de τ^c para los conjuntos abiertos y cerrados respectivamente:

Definición 20. (Representación de conjuntos abiertos y cerrados [26]).

1. La *representación interior*[6] $\theta^< :\subseteq \Sigma^\omega \longrightarrow \tau$ se define con *dom* $(\theta^<) = D_\nu$ y

$$\theta^<(p) = \bigcup_{\iota(w) \lhd p} \nu(w). \tag{3-15}$$

2. La *representación exterior*[7] $\psi^> :\subseteq \Sigma^\omega \longrightarrow \tau^c$ se define como

$$\psi^>(p) = X \setminus \theta^<(p). \tag{3-16}$$

La versión computable de "$\beta \subseteq \tau$" es $\nu \leq \theta^<$, puesto que la función $h(v) = \iota(v)000\dots$ traduce ν a $\theta^<$. Adicionalmente, espacios recursivamente relacionados inducen representaciones de conjuntos equivalentes:

Proposición 13. **($\theta^<$ y $\psi^>$ son robustas [26]).** *Si $\mathfrak{X}_1 = (X, \tau, \beta_1, \nu_1)$ y $\mathfrak{X}_2 = (X, \tau, \beta_2, \nu_2)$ son espacios T_0 efectivos entonces*

1. $\theta_1^< \equiv_t \theta_2^<$ *y* $\psi_1^< \equiv_t \psi_2^<$,

2. *Si $\mathfrak{X}_1$ y $\mathfrak{X}_2$ están recursivamente relacionados entonces $\theta_1^< \equiv \theta_2^<$ y $\psi_1^> \equiv \psi_2^>$.*

[6] En [55], para subconjuntos de espacios Euclidianos, $\theta^<$ se denota por $\theta^{\mathrm{en}}_<$.

[7] En [55], para subconjuntos de espacios Euclidianos, $\psi^>$ se denota por $\psi^{\mathrm{en}}_>$; y en [8, 9], para espacios métricos computables, $\psi^>$ se denota por δ_{union}.

La idea fundamental de estas representaciones es que dados un elemento x y un abierto O, sea posible verificar si $x \in O$ mediante una computación finita sobre los nombres de x y O. En otras palabras, se desea que la relación $\in$ sea recursivamente enumerable: "$x \in O$ *es verdadero si y solo si este hecho puede ser verificado mediante una computación finita*".

Adicionalmente, $\delta_{\mathfrak{X}}$ y $\theta^{<}$ son, salvo equivalencia, elementos maximales sobre las representaciones para las que la relación de pertenencia es abierta o recursivamente enumerable. Esta propiedad también se presenta en [26] y puede ser enunciada de la siguiente manera:

Proposición 14. (Propiedades de la relación $\in$ [26]). *Sea $\mathfrak{X} = (X, \tau, \beta, \nu)$ un espacio T_0 efectivo. Si se definen*

$$\text{“}x \in U\text{”} = \{(x, U) \in X \times \beta \mid x \in U\} \tag{3-17}$$

y

$$\text{“}x \in O\text{”} = \{(x, O) \in X \times \tau \mid x \in O\}, \tag{3-18}$$

entonces, para toda representación $\delta :\subseteq \Sigma^{\omega} \longrightarrow X$ y $\theta :\subseteq \Sigma^{\omega} \longrightarrow \tau$,

1. *$x \in U$ es (δ, ν)-abierto $\Longleftrightarrow$ $x \in O$ es $(\delta, \theta^{<})$-abierto $\Longleftrightarrow$ $\delta \leq_t \delta_{\mathfrak{X}}$.*
2. *$x \in U$ es (δ, ν)-r.e. $\Longleftrightarrow$ $x \in O$ es $(\delta, \theta^{<})$-r.e. $\Longleftrightarrow$ $\delta \leq \delta_{\mathfrak{X}}$.*
3. *$x \in O$ es $(\delta_{\mathfrak{X}}, \theta)$-abierto $\Longleftrightarrow$ $\theta \leq_t \theta^{<}$.*
4. *Para $\mathfrak{X}$ computable, $x \in O$ es $(\delta_{\mathfrak{X}}, \theta)$-r.e. $\Longleftrightarrow$ $\theta \leq \theta^{<}$.*

En las condiciones expuestas, la unión finita o enumerable y la intersección finita de abiertos son operaciones computables.

Proposición 15. (Uniones a lo más enumerables e intersecciones finitas de abiertos son computables [26]). *Si $\mathfrak{X} = (X, \tau, \beta, \nu)$ un espacio T_0 efectivo, entonces*

1. *La unión enumerable sobre τ es $([\theta^{<}]^{\omega}, \theta^{<})$-computable, y*
2. *Si $\mathfrak{X}$ es computable, entonces la intersección sobre τ es $(\theta^{<}, \theta^{<}, \theta^{<})$-computable.*

Así, en lugar de listar todos los abiertos básicos que contienen a un elemento x, para poder identificarlo basta con listar *suficientes* abiertos básicos.

3.4. Admisibilidad

Una importante fuente de preguntas asociadas a las representaciones de un espacio dado es la relacionada con las bondades que estas ofrecen en términos de la calidad de la computabilidad sobre el espacio representado. Para responder estas preguntas es necesario tener presente las propiedades de las representaciones entendiendo que algunas de estas propiedades son de tipo topológico y otras son de tipo computable. Por ejemplo, la multiplicación sobre los números reales no es computable con respecto a la representación decimal usual puesto que no existe una realización continua de la operación con respecto a esta representación.

Con respecto al párrafo anterior es necesario aclarar que una función $f :\subseteq X_1 \times \cdots \times X_k \longrightarrow X_{k+1}$ es continuamente realizable con respecto a las representaciones $\delta_1, \ldots, \delta_k, \delta_{k+1}$ si y solo si existe una función continua $F :\subseteq (\Sigma^\omega)^k \longrightarrow \Sigma^\omega$ tal que $\delta_{k+1}(F(p_1, \ldots, p_k)) = f(\delta_1(p_1), \ldots, \delta_k(p_k))$. Dado que toda función computable es continua con respecto a la topología de Cantor sobre Σ^ω, entonces la realización computable implica la realización continua y en este sentido una puede ser entendida como la generalización topológica de la otra.

De acuerdo con [46, 47], es razonable exigir que las representaciones utilizadas garanticen la realización continua de todas las funciones continuas. Esta propiedad se conoce como *admisibilidad de una representación* y es el objeto de esta sección.

La siguiente definición fue presentada en [55], estudiada a profundidad en muchos documentos posteriores, y materializa el requerimiento enunciado arriba en espacios T_0 con base enumerable.

Definición 21. (Admisibilidad [55]). Una representación δ de un conjunto X es *admisible* con respecto a una topología τ sobre X, si δ es continua con respecto a τ y $\delta' \leq_t \delta$ para toda representación δ' de X continua con respecto a τ.

Esta noción fue extendida en [46] de manera que se elimina la restricción T_0 y base enumerable para el espacio topológico X:

Definición 22. (Representaciones Admisibles [46]). Sea $\mathfrak{X} = (X, \tau_{\mathfrak{X}})$ un espacio topológico y $\delta :\subseteq \Sigma^\omega \longrightarrow X$ una representación para X.

1. δ es una *representación admisible* para X si y solo si δ es continua, y toda función continua $\phi :\subseteq \Sigma^\omega \longrightarrow X$ es continuamente reducible a δ. Evidentemente la continuidad de δ y ϕ está referida a las topologías τ_{Σ^ω} y $\tau_{\mathfrak{X}}$ respectivamente.

2. Si τ es una topología sobre X, entonces δ es τ-*admisible* o *admisible con respecto a* τ si y solo si δ es una representación admisible para el espacio topológico (X, τ).

La propiedad que tienen las representaciones admisibles de garantizar que toda función continua $\phi :\subseteq \Sigma^\omega \longrightarrow X$ es continuamente reducible a δ es conocida como *propiedad universal* de δ.

En [46] se establecen condiciones necesarias para que $\delta :\subseteq \Sigma^\omega \longrightarrow X$ sea una representación admisible para $\mathfrak{X}$.

Definición 23. (Pseudobases [46]). Sea $\mathfrak{X} = (X, \tau_{\mathfrak{X}})$ un espacio topológico y $\mathcal{B}$ una familia de subconjuntos de X. Se dice que $\mathcal{B}$ es una *pseudobase para* X si y solo si para todo abierto $U \in \tau_{\mathfrak{X}}$, todo $x \in U$ y toda sucesión $(y_n)_n$ que converge a x, existe un elemento $B \in \mathcal{B}$ y un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\{x\} \cup \{y_n \mid n \geq n_0\} \subseteq B \subseteq U. \tag{3-19}$$

Se dice que $\mathcal{B}$ es una *pseudosubbase para* X si y solo si la familia

$$\mathcal{B}^\cap = \{B_0 \cap \cdots \cap B_k \mid k \in \mathbb{N} \wedge \{B_0, \ldots, B_k\} \subseteq \mathcal{B}\} \tag{3-20}$$

de todas las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{B}$ es una pseudobase para X.

Proposición 16. (Admisibilidad implica pseudobase enumerable [46]). *Si* $\delta :\subseteq \Sigma^\omega \longrightarrow X$ *es una representación admisible para* $\mathfrak{X} = (X, \tau_{\mathfrak{X}})$, *entonces la familia*

$$\{\delta(w\Sigma^\omega) \mid w \in \Sigma^*\} \tag{3-21}$$

es una pseudobase enumerable para X.

3.5. Separación Computable

En esta sección se presentan versiones computables de los axiomas de separación T_0, T_1 y T_2. Otras nociones como la regularidad computable y la normalidad computable, también son presentadas. Las principales fuentes, que permiten profundizar en este aspecto, son [57, 58, 45, 26].

Definición 24. (Axiomas clásicos de separación). Un espacio topológico cumple con el axioma de separación T_i (con $i \in \{0, 1, 2\}$) y se dice que es un espacio T_i, si y solo si

T_0: Si $x, y \in X$ y $x \neq y$, entonces existe un abierto $W \in \tau$ tal que $x \in W \wedge y \notin W$ o $x \notin W \wedge y \in W$.

$$(\forall x, y \in X)\,(x \neq y \Longrightarrow ((\exists W \in \tau)\,((x \in W \wedge y \notin W) \vee (x \notin W \wedge y \in W)))).$$

T_1: Si $x, y \in X$ y $x \neq y$, entonces existe un abierto $W \in \tau$ tal que $x \in W \wedge y \notin W$.

$$(\forall x, y \in X)\,(x \neq y \Longrightarrow ((\exists W \in \tau)\,(x \in W \wedge y \notin W)))\,.$$

T_2: Si $x, y \in X$ y $x \neq y$, entonces existen abiertos disjuntos $U, V \in \tau$ tales que $x \in U$ y $y \in V$.

$$(\forall x, y \in X)\,(x \neq y \Longrightarrow ((\exists U, V \in \tau)\,(U \cap V = \emptyset \wedge x \in U \wedge y \in V)))\,.$$

Definición 25. (Axiomas de separación computable [57]). Se definen las condiciones de separación computable CT_i (con $i \in \{0, 1, 2\}$) de la siguiente manera

CT_0: Existe una multifunción t_0 que asigna a cada par de elementos $(x, y) \in X^2$, con $x \neq y$, algún abierto $U \in \beta$ tal que $x \in U \wedge y \notin U$ o $x \notin U \wedge y \in U$, y es (δ, δ, ν)-computable.

CT_1: Existe una multifunción t_1 que asigna a cada par de elementos $(x, y) \in X^2$, con $x \neq y$, algún abierto $U \in \beta$ tal que $x \in U \wedge y \notin U$, y es (δ, δ, ν)-computable.

CT_2: Existe una multifunción t_2 que asigna a cada par de elementos $(x, y) \in X^2$, con $x \neq y$, alguna pareja de abiertos $(U, V) \in \beta^2$ tal que $U \cap V = \emptyset$, $x \in U$ e $y \in V$, y que es $(\delta, \delta, [\nu, \nu])$-computable.

Es evidente que $CT_i \Longrightarrow T_i$ para $i \in \{0, 1, 2\}$.

Otras versiónes de separación computable pueden ser formuladas de las siguientes maneras:

Definición 26. (Otros axiomas de separación computable [57]). Se definen

WCT_0: Existe un conjunto recursivamente enumerable $H \subseteq dom(\nu) \times dom(\nu)$ tal que

$$(\forall x, y \in X)\,(x \neq y \Longrightarrow ((\exists (u, v) \in H)\,(x \in \nu(u) \wedge y \in \nu(v)))) \tag{3-22}$$

y

$$(\forall (u, v) \in H) \begin{cases} \nu(u) \cap \nu(v) = \emptyset \\ \vee\, (\exists x)\, \nu(u) = \{x\} \subseteq \nu(v) \\ \vee\, (\exists y)\, \nu(v) = \{y\} \subseteq \nu(u). \end{cases} \tag{3-23}$$

SCT_0: Existe una multifunción t_0^s que asigna a cada par de elementos $(x, y) \in X^2$, con $x \neq y$, alguna pareja $(k, U) \in \mathbb{N} \times \beta$ tal que

$$(k = 1 \wedge x \in U \wedge y \notin U) \vee (k = 2 \wedge x \notin U \wedge y \in U)\,. \tag{3-24}$$

CT_0': Existe un conjunto recursivamente enumerable $H \subseteq dom\,(\nu_{\mathbb{N}}) \times dom(\nu) \times dom(\nu)$ tal que

$$(\forall x, y \in X)\,(x \neq y \Longrightarrow ((\exists (w,u,v) \in H)\,(x \in \nu(u) \wedge y \in \nu(v)))) \tag{3-25}$$

y

$$(\forall (w,u,v) \in H) \begin{cases} \nu(u) \cap \nu(v) = \emptyset \\ \vee \nu_{\mathbb{N}}(w) = 1 \wedge (\exists x)\,\nu(u) = \{x\} \subseteq \nu(v) \\ \vee \nu_{\mathbb{N}}(w) = 2 \wedge (\exists y)\,\nu(v) = \{y\} \subseteq \nu(u). \end{cases} \tag{3-26}$$

CT_1': Existe un conjunto recursivamente enumerable $H \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ tal que

$$(\forall x, y \in X)\,(x \neq y \Longrightarrow ((\exists (u,v) \in H)\,(x \in \nu(u) \wedge y \in \nu(v)))) \tag{3-27}$$

y

$$(\forall (u,v) \in H) \begin{cases} \nu(u) \cap \nu(v) = \emptyset \\ \vee\,(\exists x)\,\nu(u) = \{x\} \subseteq \nu(v). \end{cases} \tag{3-28}$$

CT_2': Existe un conjunto recursivamente enumerable $H \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ tal que

$$(\forall x, y \in X)\,(x \neq y \Longrightarrow ((\exists (u,v) \in H)\,(x \in \nu(u) \wedge y \in \nu(v)))) \tag{3-29}$$

y

$$(\forall (u,v) \in H) \begin{cases} \nu(u) \cap \nu(v) = \emptyset \\ \vee\,(\exists x)\,\nu(u) = \{x\} = \nu(v). \end{cases} \tag{3-30}$$

SCT_2: Existe un conjunto recursivamente enumerable $H \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ tal que

$$(\forall x, y \in X)\,(x \neq y \Longrightarrow ((\exists (u,v) \in H)\,(x \in \nu(u) \wedge y \in \nu(v)))) \tag{3-31}$$

y

$$(\forall (u,v) \in H)\,(\nu(u) \cap \nu(v) = \emptyset)\,. \tag{3-32}$$

Muchas otras variantes pueden ser formuladas utilizando las diversas representaciones para los puntos, los abiertos y los cerrados de la topología τ.

Como único comentario a estas definiciones basta decir que, a diferencia del axioma CT_0, SCT_0 brinda información sobre la dirección de la separación de la misma manera que CT_0' (esta información adicional no es posible en WCT_0). CT_0', CT_1' y CT_2' son versiones de CT_0,

CT_1 y CT_2 referidas a los abiertos básicos más que a los puntos.

El siguiente teorema, demostrado en [57], establece algunas de las relaciones existentes entre los axiomas de separación computable. Vale anotar que las implicaciones son propias: los respectivos contraejemplos están disponibles en la misma fuente.

Teorema 6. (Relaciones entre los axiomas de separación computable [57]).

1. $SCT_2 \Longrightarrow CT_2 \Longrightarrow CT_0 \Longrightarrow WCT_0$.
2. $CT_2 \Longleftrightarrow CT_2' \Longleftrightarrow CT_1 \Longleftrightarrow CT_1'$.
3. $CT_0 \Longleftrightarrow SCT_0 \Longleftrightarrow CT_0'$.

Otros axiomas de separación también son formulados en versión computable:

Definición 27. (Espacios computablemente regulares [45, 26]). Sea $X = (X, \tau, \beta, \nu)$ un espacio T_0 computable. Se dice que X es *computablemente regular* si existe una función computable $T_3 :\subseteq \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^\omega$, tal que

$$v \in dom\,(\nu) \Longrightarrow \nu(v) = \bigcup_{(u,v)\in dom(T_3)} \nu(u) \tag{3-33}$$

y

$$(u, v) \in dom\,(T_3) \Longrightarrow \nu(u) \subseteq \psi^{>}\,(T_3(u, v)) \subseteq \nu(v). \tag{3-34}$$

Vale anotar que todo espacio computablemente regular es regular.

Definición 28. (Espacios computablemente normales [45, 26]). Un espacio *computablemente normal* es un espacio T_0 computable tal que la función multivaluada $T_4 :\subseteq \tau^c \times \tau^c \rightrightarrows \tau \times \tau$, definida por

$$\begin{aligned} &dom\,(T_4) = \{(A, B) \in \tau^c \times \tau^c \mid A \cap B = \emptyset\}\,, \\ &(O_A, O_B) \in T_4(A, B) \Longleftrightarrow A \subseteq O_A \wedge B \subseteq O_B \wedge O_A \cap O_B = \emptyset, \end{aligned} \tag{3-35}$$

es $(\psi^{>}, \psi^{>}, \theta^{<}, \theta^{<})$-computable.

Proposición 17. (Regularidad computable implica normalidad computable [26]). *Todo espacio computablemente regular es computablemente normal.*

3.6. Representaciones de los Números Reales

En la literatura las representaciones más utilizadas para el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ son:

1. Sucesiones de Cauchy de números racionales y convergencia rápida (*representación de Cauchy*).

2. Cortes de Dedekind.

3. Sucesiones de intervalos anidados con extremos racionales.

4. Expansiones decimales infinitas.

5. Expansiones binarias infinitas.

El conjunto de números computables, o con nombres computables, es el mismo para estas cinco representaciones, pero el conjunto de funciones computables solo coincide para la representación de Cauchy y la representación por intervalos anidados con extremos racionales. La efectividad inducida por la representación por intervalos anidados con extremos racionales se estudia detalladamente en [11].

Definición 29. (Notación estándar para cubos racionales [55]). Sea $n \geq 1$.

1. Para $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ se definen la norma

$$||(a_1, \ldots, a_n)|| = \max\{|a_1|, \ldots, |a_n|\}$$

   y la distancia

$$d(x, y) = ||x - y||.$$

2. Sea $Cb^{(n)} = \left\{B(a, r) \mid a \in \mathbb{Q}^{(n)} \wedge r \in \mathbb{Q} \wedge r > 0\right\}$ el conjunto de las bolas racionales abiertas donde $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, a) < r\}$.

3. Se define la notación $I^n :\subseteq \Sigma^* \longrightarrow Cb^{(n)}$ como

$$I^n(\iota(v_1) \ldots \iota(v_n)\iota(w)) = B((\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_n}), \overline{w}).$$

4. $\overline{I^n}(w)$ denota la clausura del cubo $I^n(w)$.

Según [55] las representaciones clásicas para los números reales que inducen los más importantes conceptos de computabilidad son ρ, $\rho_<$ y $\rho_>$.

Definición 30. (ρ, $\rho_<$ y $\rho_>$ [55]). Se definen

1. $S_= = (\mathbb{R}, Cb^{(1)}, I^1)$,
2. $S_< = (\mathbb{R}, \sigma_<, \nu_<)$ donde $\nu_<(w) = (\overline{w}, \infty)$,
3. $S_> = (\mathbb{R}, \sigma_>, \nu_>)$ donde $\nu_>(w) = (-\infty, \overline{w})$,

y sean $\rho = \delta_{S_=}$, $\rho_< = \delta_{S_<}$ y $\rho_> = \delta_{S_>}$.

Las respectivas topologías finales son [55]:

1. La topología final para ρ es la topología usual sobre $\mathbb{R}$, $\tau_{\mathbb{R}}$.
2. La topología final para $\rho_<$ es $\tau_{\rho_<}$, la topología generada por la base $\{(x, \infty) \mid x \in \mathbb{R}\}$.
3. La topología final para $\rho_>$ es $\tau_{\rho_>}$, la topología generada por la base $\{(-\infty, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

De igual forma se introducen representaciones para $\overline{\mathbb{R}}$:

Definición 31. (Representaciones de $\overline{\mathbb{R}}$ [55]). Sobre $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ se definen

1. $S_< = (\overline{\mathbb{R}}, \sigma_<, \nu_<)$ donde $\nu_<(w) = (\overline{w}, \infty]$.
2. $S_> = (\overline{\mathbb{R}}, \sigma_>, \nu_>)$ donde $\nu_>(w) = [-\infty, \overline{w})$.
3. $\overline{\rho_<} = \delta_{S_<}$.
4. $\overline{\rho_>} = \delta_{S_>}$.

3.7. Espacios Métricos Computables

Según [29], las diferentes aproximaciones a una teoría de computabilidad sobre espacios métricos pueden ser resumidas diciendo que se imponen condiciones de computabilidad sobre la métrica con respecto a una enumeración de un subconjunto denso del espacio métrico. Así las cosas, las nociones de computabilidad se pueden introducir únicamente para espacios métricos separables.

Las referencias donde se introducen los conceptos básicos de una versión computable de la teoría de espacios métricos son [55, 5, 8, 29, 56].

En general, (M, d, α) es un espacio métrico computable si y solo si (M, d) es un espacio métrico, $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow M$ es una función tal que $\alpha(\mathbb{N})$, el rango de α, es denso en M y $d \circ (\alpha \times \alpha) : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una sucesión doble y computable.

Definición 32. (Espacios métricos computables[8] [55]). La cuádrupla (X, d, Q, α) es un *espacio métrico computable* si y solo si

1. (X, d) es un espacio métrico.
2. $\alpha :\subseteq \Sigma^* \longrightarrow Q$ es una notación para algún conjunto $Q \subseteq X$ denso en X.
3. Los siguientes conjuntos son recursivamente enumerables:

$$D_> = \left\{(u, v, w) \in (\Sigma^*)^3 \mid \nu_{\mathbb{Q}}(w) > d(\alpha(u), \alpha(v))\right\} \text{ y}$$
$$D_< = \left\{(u, v, w) \in (\Sigma^*)^3 \mid \nu_{\mathbb{Q}}(w) < d(\alpha(u), \alpha(v))\right\}.$$

En otras palabras, se requiere que (X, d) sea un espacio métrico, y que $\alpha :\subseteq \Sigma^* \longrightarrow Q$ sea una notación de un subconjunto denso $Q \subseteq X$ tal que la distancia sobre Q es (α, α, ρ)-computable y con dominio recursivo.

La representación canónica de un espacio métrico computable es la *representación de Cauchy* definida por $\delta_X(p) = x$ si y solo si $p = \iota(u_0)\iota(u_1)\ldots$ es tal que $(\forall i)d(x, \alpha(u_i)) \leq 2^{-i}$. En particular, los elementos $q \in Q$ son llamados δ_X-computables.

Ejemplo 6. (Espacios métricos computables). Los ejemplos clásicos de espacios métricos computables son:

1. $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n}, \mathbb{Q}^n, \nu_{\mathbb{Q}^n})$ donde $d_{\mathbb{R}^n}(x, y) = \text{máx}_{i=1,\ldots,n} |x_i - y_i|$.
2. $(\mathbb{Q}, d_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}, \nu_{\mathbb{Q}})$ donde $d_{\mathbb{Q}}(x, y) = \text{máx}_{i=1,\ldots,n} |x_i - y_i|$ es la restricción de $d_{\mathbb{R}^n}$ a los racionales.
3. $(\Sigma^\omega, d_{\Sigma^\omega}, \Sigma^* 0^\omega, \nu_{\Sigma^*})$ donde

$$d_{\Sigma^\omega}(p, q) = \begin{cases} 2^{-\text{mín}\{k \in \mathbb{N} \mid p_k \neq q_k\}}, & \text{cuando } p \neq q, \\ 0, & \text{cuando } p = q. \end{cases} \tag{3-36}$$

4. $(C[0,1], d_{\sup}, \mathbb{Q}_{\text{PG}}, \nu_{Q_{\text{PG}}})$ donde $\mathbb{Q}_{\text{PG}}$ es el conjunto de los polígonos racionales y $\nu_{\mathbb{Q}_{\text{PG}}}$ es la notación correspondiente.

En [45], para un espacio topológico computablemente regular, se construye una métrica computable, pero esto no es suficiente para tener un espacio métrico computable puesto que no se fabrican explícitamente los puntos computables, es decir, no se fabrican un subconjunto denso enumerable y su correspondiende notación. En [26] se presentan las condiciones para que un espacio métrico (X, d) pueda ser isométricamente embebido en un espacio métrico computable, es decir, estas son las referencias obligadas para discutir ampliamente el problema de la metrización computable.

[8] En algunos documentos los espacios métricos computables son llamados *espacios métricos recursivos*.

3.8. Espacios Semi-recursivos Cuasi-métricos

Grosso modo, los espacios cuasi-métricos son espacios métricos sin simetría. En [7] se desarrolla una versión recursiva de este tipo de estructura permitiendo examinar computabilidad en el espacio de las funciones semicontinuas.

Definición 33. (Espacios Cuasi-métricos [48]). (X, d) es un *espacio cuasi-métrico* si y solo si $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función no negativa tal que

1. $d(x, x) = 0$,
2. $d(x, y) = d(y, x) = 0 \Longrightarrow x = y$, y
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

para todo $x, y, z \in X$.

Para cada espacio cuasi-métrico (X, d) es posible asociar los espacios *conjugado* $\left(X, \bar{d}\right)$ y *métrico* $(X, d_\star)$ mediante las funciones $\bar{d} : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ y $d_\star : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ que están definidas por $\bar{d}(x, y) = d(y, x)$ y $d_\star(x, y) = \max\left\{d(x, y), \bar{d}(x, y)\right\}$. [7]

Las topologías inducidas sobre X son respectivamente:

1. La *Topología inferior* $\tau_<$ con abiertos básicos de la forma

$$B_< (x, \epsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\} .$$

   Se escribe $X_<$ para denotar el espacio X dotado de la topología $\tau_<$.

2. La *Topología superior* $\tau_>$ con abiertos básicos de la forma

$$B_> (x, \epsilon) = \{y \in X \mid d(y, x) < \epsilon\} .$$

   Se escribe $X_>$ para denotar el espacio X dotado de la topología $\tau_>$.

En general, $B (x, \epsilon) = \{y \in X \mid d_\star (x, y) < \epsilon\}$ denota la bola abierta, centrada en x y de radio ϵ, con respecto a la métrica $d_\star$. La relación entre las tres topologías se exhibe por las ecuaciones

$$B_< (x, \epsilon) = \bigcup_{y \in B_< (x,\epsilon)} B (y, \epsilon - d(x, y)) , \tag{3-37}$$

y

$$B_> (x, \epsilon) = \bigcup_{y \in B_> (x,\epsilon)} B (y, \epsilon - d(y, x)) . \tag{3-38}$$

Cada espacio cuasi-métrico tiene asociado un orden parcial $\sqsubseteq$ definido por

$$x \sqsubseteq y \Longleftrightarrow d(x,y) = 0.$$

En esta situación ínf y sup denotan el ínfimo y el supremo del orden parcial $(X, \sqsubseteq)$ respectivamente.

Definición 34. (Espacios Cuasi-métricos Generados [7]). (X, Y, d) es un *Espacio Cuasi-métrico Generado Superiormente* si (X, d) es un espacio cuasi-métrico, $Y \subseteq X$, y cada elemento $x \in X$ es el ínfimo de una sucesión de elementos de Y. Es decir, (X, Y, d) es un espacio cuasi-métrico generado si y solo si (X, d) es un espacio cuasi-métrico, $Y \subseteq X$ y

$$Inf :\subseteq Y^{\mathbb{N}} \longrightarrow X,\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n$$

es una función sobreyectiva.

Definición 35. (Representación de Dedekind [7]). Sea (X, Y, d) un espacio cuasi-métrico generado superiormente tal que $(Y, d_\star, \alpha)$ es un espacio métrico separable con representación de Cauchy δ_Y. La *Representación Superior de Dedekind* se define como $\delta_{X_>} = Inf \circ \delta_Y^\infty$. Análogamente se define la *Representación Inferior de Dedekind* como $\delta_{X_<} = Sup \circ \delta_Y^\infty$.

Ejemplo 7. El espacio $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, d)$ con $d(x,y) = x \dot{-} y$ es un espacio cuasi-métrico generado tanto superior como inferiormente. El orden inducido por d es el orden usual $\leq$, y la métrica $d_\star$ es la distancia euclidiana usual. Además las representaciones $\delta_{\mathbb{R}_<}$ y $\delta_{\mathbb{R}_>}$ son representaciones admisibles para $\mathbb{R}_<$ y $\mathbb{R}_>$ respectivamente y coinciden con las representaciones $\rho_<$ y $\rho_>$.

Definición 36. (Espacios Recursivos y Semi-recursivos Cuasi-métricos [7]). Se dice que (X, Y, d, α) es un *espacio semi-recursivo cuasi-métrico* si

1. (X, Y, d) es un espacio cuasi-métrico generado superiormente con representación superior de Dedekind $\delta_{X_>}$.
2. $\left(Y, d_{\star\restriction_{Y\times Y}}, \alpha\right)$ es un espacio métrico computable con representación de Cauchy δ_Y.
3. $d_{\restriction_{X\times Y}} : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}_>$ es $([\delta_{X_>}, \delta_Y], \delta_{\mathbb{R}_>})$-computable.
4. $\delta \leq \delta_{X_>}$ para cada representación δ de X tal que $d_{\restriction_{X\times Y}}$ es $([\delta, \delta_Y], \delta_{\mathbb{R}_>})$-computable.

Se dice que (X, Y, d, α) es un *espacio recursivo cuasi-métrico* si (X, Y, d, α) y $\left(X, Y, \bar{d}, \alpha\right)$ son espacios semi-recursivos cuasi-métricos.

4 Computabilidad sobre Campos de Espacios Métricos

En este capítulo se formulan nociones de computabilidad sobre Campos de Espacios Métricos. Más específicamente, en la primera sección se demuestra que todo espacio topológico computable $\mathfrak{X} = (X, \sigma, \nu)$ induce de manera natural la existencia de un campo de espacios métricos que fibra el dominio de la representación $\delta_{\mathfrak{X}}$; en la segunda sección se presentan los *Campos de Espacios Métricos Computables*, esto es, campos de espacios métricos donde las fibras son espacios métricos computables. En la tercera sección se estudian los efectos de imponer condiciones de computabilidad en el espacio base de un campo de espacios métricos; y en la cuarta y última sección se establecen condiciones suficientes para que el espacio fibrado G en el campo de espacios métricos (G, p, X) tenga estructura de espacio topológico computable.

La siguiente es una modificación menor al *Teorema de Existencia de Campos de Espacios Métricos* demostrado en [16] y que establece condiciones para la existencia de campos de espacios métricos. La versión presentada permite su utilización para inducir nociones de computabilidad en el fibrado puesto que se refiere a una base β_T para la topología en T y utiliza únicamente ϵ-tubos con radios de la forma 2^{-n}.

Teorema 7. (Existencia de Campos de Espacios Métricos). *Sean T un espacio topológico, β_T una base para la topología en T, G un conjunto, $p : G \longrightarrow T$ una función sobreyectiva, d una métrica para p, y Γ una colección de selecciones locales para p. Supóngase que*

1. *Dados $u \in G$ y $\epsilon > 0$ existen una selección local $\gamma \in \Gamma$ y un número natural n de manera que $2^{-n} < \epsilon$ y $u \in \mathcal{T}_{2^{-n}}(\gamma)$.*

2. *Para todo par de selecciones $\gamma, \zeta \in \Gamma$ la función $\Phi_{\gamma\zeta} :\ dom\,(\gamma) \cap dom\,(\zeta) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\Phi_{\gamma\zeta}(t) = d\,(\gamma(t), \zeta(t))$ es semicontinua superiormente.*

Entonces G puede ser dotado de una topología $\mathfrak{T}$ de manera que

1. *La familia $\mathcal{B} = \{\mathcal{T}_{2^{-n}}(\gamma_Q) \mid n \in \mathbb{N} \wedge \gamma \in \Gamma \wedge Q \subseteq dom\,(\gamma) \wedge Q \in \beta_T\}$ es una base para $\mathfrak{T}$. γ_Q denota la restricción de γ al abierto Q, $\gamma \restriction_Q$.*

2. *Si* $\gamma \in \Gamma$ *entonces* γ *es una sección.*

3. (G, p, T) *es un campo de espacios métricos.*

Demostración.

1. Sean $\mathcal{T}_{2^{-n_1}}(\gamma_Q)$ y $\mathcal{T}_{2^{-n_2}}(\zeta_R)$ dos elementos de $\mathcal{B}$ y $u \in \mathcal{T}_{2^{-n_1}}(\gamma_Q) \cap \mathcal{T}_{2^{-n_2}}(\zeta_R)$. Como $u \in \mathcal{T}_{2^{-n_1}}(\gamma_Q)$ y $u \in \mathcal{T}_{2^{-n_2}}(\zeta_R)$ entonces $d(u, \gamma(p(u))) < 2^{-n_1}$ y $d(u, \zeta(p(u))) < 2^{-n_2}$.

   Sean $\epsilon = \frac{1}{4} \min\{2^{-n_1} - d(u, \gamma(p(u))), 2^{-n_2} - d(u, \zeta(p(u)))\}$, $\xi \in \Gamma$ y $n \in \mathbb{N}$ son tales que $2^{-n} < \epsilon$ y $u \in \mathcal{T}_{2^{-n}}(\xi)$. Se tiene entonces que $d(u, \xi(p(u))) < \epsilon$.

   Además,
$$\begin{array}{rcl} d(u, \gamma(p(u))) & = & \frac{3}{4} d(u, \gamma(p(u))) + \frac{1}{4} d(u, \gamma(p(u))) \\ & \leq & \frac{3}{4} d(u, \gamma(p(u))) + \frac{1}{4} 2^{-n_1}. \end{array}$$
   y por lo tanto
$$\begin{array}{rcl} d(\xi(p(u)), \gamma(p(u))) & \leq & d(\xi(p(u)), u) + d(u, \gamma(p(u))) \\ & < & \epsilon + d(u, \gamma(p(u))) \\ & < & \frac{1}{4}(2^{-n_1} - d(u, \gamma(p(u)))) + \frac{3}{4} d(u, \gamma(p(u))) + \frac{1}{4} 2^{-n_1} \\ & = & \frac{1}{2}(2^{-n_1} + d(u, \gamma(p(u)))). \end{array}$$
   Sean
$$\delta_1 = \frac{1}{2}\left(2^{-n_1} + d(u, \gamma(p(u)))\right),$$
$$A = \{s \in T \mid d(\xi(s), \gamma(s)) < \delta_1\},$$
$$\delta_2 = \frac{1}{2}\left(2^{-n_2} + d(u, \zeta(p(u)))\right)$$
   y
$$B = \{s \in T \mid d(\xi(s), \zeta(s)) < \delta_2\}.$$
   Entonces $p(u) \in A \cap B$, y, dado que $\Phi_{\xi\gamma}$ y $\Phi_{\xi\zeta}$ son semicontinuas superiormente, A y B son abiertos en T. Así las cosas, $S = Q \cap R \cap A \cap B$ es un abierto en T con $p(u) \in S$.

   Es claro que, como $p(u) \in S$ y $d(u, \xi(p(u))) < 2^{-n} < \epsilon$, entonces $u \in \mathcal{T}_{2^{-n}}(\xi_S)$. Ahora, si $v \in \mathcal{T}_{2^{-n}}(\xi_S)$ entonces
$$d(v, \xi(p(v))) < 2^{-n} < \epsilon < \frac{1}{2}\left(2^{-n_1} - d(u, \gamma(p(u)))\right),$$
   y como $p(v) \in S$ entonces $d(\xi(p(v)), \gamma(p(v))) < \delta_1$. Luego
$$\begin{array}{rcl} d(v, \gamma(p(v))) & \leq & d(v, \xi(p(v))) + d(\xi(p(v)), \gamma(p(v))) \\ & < & \frac{1}{2}(2^{-n_1} - d(u, \gamma(p(u)))) + \delta_1 \\ & = & 2^{-n_1}. \end{array}$$

Es decir, $\mathcal{T}_{2^{-n}}(\xi_S) \subseteq \mathcal{T}_{2^{-n_1}}(\gamma_Q)$. Análogamente se tiene que $\mathcal{T}_{2^{-n}}(\xi_S) \subseteq \mathcal{T}_{2^{-n_2}}(\zeta_R)$.

Ahora, como $p(u) \in S$ existe $S' \in \beta_T$ tal que $p(u) \in S' \subseteq S$. Luego

$$u \in \mathcal{T}_{2^{-n}}(\xi_{S'}) \subseteq \mathcal{T}_{2^{-n_1}}(\gamma_Q) \cap \mathcal{T}_{2^{-n_2}}(\zeta_R).$$

2. Sea $\gamma \in \Gamma$. La primera hipótesis permite tomar una abierto básico en G, $\mathcal{T}_\epsilon(\zeta_R)$, tal que $\gamma(t) \in \mathcal{T}_\epsilon(\zeta_R)$ y $t \in \gamma^{-1}(\mathcal{T}_\epsilon(\zeta_R))$.

   Entonces $d(\gamma(t), \zeta(p(\gamma(t)))) = d(\gamma(t), \zeta(t)) < \epsilon$, y, como $\Phi_{\gamma\zeta}$ es semicontinua superiormente, entonces existe una vecindad V de t tal que $d(\gamma(s), \zeta(s)) < \epsilon$ para todo $s \in V$, es decir $t \in V \subseteq \gamma^{-1}(\mathcal{T}_\epsilon(\zeta_R))$ y $\gamma^{-1}(\mathcal{T}_\epsilon(\zeta_R))$ es abierto en T.

3. Para tener que (G, p, T) es un campo de espacios métricos se debe demostrar que los ϵ-tubos $\mathcal{T}_\epsilon(\sigma)$, donde $\epsilon > 0$ y σ es una sección local arbitraria para p (no necesariamente en Γ) son abiertos. Es decir, si $u \in \mathcal{T}_\epsilon(\sigma)$ entonces existen $\delta > 0$, $\alpha \in \Gamma$ y Q abierto en T tales que $u \in \mathcal{T}_\delta(\alpha_Q) \subseteq \mathcal{T}_\epsilon(\sigma)$.

   Como $u \in \mathcal{T}_\epsilon(\sigma)$, $d(u, \sigma(p(u))) < \epsilon$ y por lo tanto

$$d(u, \sigma(p(u))) < \frac{3}{4} d(u, \sigma(p(u))) + \frac{1}{4}\epsilon.$$

   Sean $\delta = \frac{1}{4}(\epsilon - d(u, \sigma(p(u))))$ y $\alpha \in \Gamma$ tal que $u \in \mathcal{T}_\delta(\alpha)$ entonces

$$d(u, \alpha(p(u))) < \delta = \frac{1}{4}(\epsilon - d(u, \sigma(p(u))))$$

   y por lo tanto

$$\begin{aligned} d(\alpha(p(u)), \sigma(p(u))) &\leq d(\alpha(p(u)), u) + d(u, \sigma(p(u))) \\ &< \frac{1}{4}(\epsilon - d(u, \sigma(p(u)))) + \frac{3}{4} d(u, \sigma(p(u))) + \frac{1}{4}\epsilon \\ &\frac{1}{2}(\epsilon + d(u, \sigma(p(u)))). \end{aligned}$$

   Luego $p(u) \in \sigma^{-1}(\mathcal{T}_\rho(\alpha))$ con $\rho = \frac{1}{2}(d(u, \sigma(p(u))) + \epsilon)$ y $\sigma^{-1}(\mathcal{T}_\rho(\alpha)) = Q$ es abierto en T dada la continuidad de σ.

Para concluir que $u \in \mathcal{T}_\delta(\alpha_Q) \subseteq \mathcal{T}_\epsilon(\sigma)$, nótese primero que, como $d(u, \alpha(p(u))) < \delta$, $u \in \mathcal{T}_\delta(\alpha_Q)$. Si $v \in \mathcal{T}_\delta(\alpha_Q)$ entonces $p(v) \in Q$, $d(v, \alpha(p(v))) < \delta$, y por lo tanto

$$d(\alpha(p(v)), \sigma(p(v))) < \frac{1}{2}(d(u, \sigma(p(u))) + \epsilon),$$

así que $d(v, \sigma(p(v))) < 2\delta + \frac{1}{2}(d(u, \sigma(p(u))) + \epsilon) - \delta = \epsilon - \delta < \epsilon$ y $v \in \mathcal{T}_\epsilon(\sigma)$.

Ahora bien, la función $p : G \longrightarrow T$ es continua. En efecto, si U es un abierto en G y $u \in p^{-1}(U)$ entonces, dado que $\epsilon > 0$, existe una selección local α para p, tal que $u \in \mathcal{T}_\epsilon(\alpha)$, y como $p(u) \in U$ entonces $u \in \mathcal{T}_\epsilon(\alpha_U) \subseteq p^{-1}(U)$, es decir que $p^{-1}(U)$ es un abierto en G.

□

4.1. Espacios Topológicos Computables como Campos de Espacios Métricos

En esta sección se demuestra que todo espacio topológico computable induce de manera natural la existencia de un campo de espacios métricos. Más específicamente, se demuestra que si $\mathfrak{X} = (X, \sigma, \nu)$ es un espacio topológico computable, entonces $(dom(\delta_{\mathfrak{X}}), \delta_{\mathfrak{X}}, X)$ es un campo de espacios métricos.

Se supone entonces que $\mathfrak{X} = (X, \sigma, \nu)$ es un espacio topológico computable y que $\delta_{\mathfrak{X}} :\subseteq \mathbb{N}^\omega \longrightarrow X$ es la representación estándar definida sobre $\mathfrak{X}$ por[1]

$$\begin{aligned} &(p \in dom(\delta_{\mathfrak{X}}) \wedge w \in p) \Longrightarrow w \in dom(\nu), \text{ y} \\ &\delta_{\mathfrak{X}}(p) = x \Longleftrightarrow \{A \in \sigma \mid x \in A\} = \{\nu(w) \mid w \in p\} \end{aligned} \tag{4-1}$$

para todo $w \in \mathbb{N}$, $x \in X$ y $p \in \mathbb{N}^\omega$. Es decir, p es un $\delta_{\mathfrak{X}}$-nombre para un elemento $x \in X$, si p es una lista de los ν-nombres de todas las propiedades atómicas, $A \in \sigma$, de x. Esto es, de todos los $A \in \sigma$ tales que $x \in A$.

Para todo $t \in X$, se define la *fibra encima de* t como el conjunto $\delta_{\mathfrak{X}}^{-1}(t) \subseteq \mathbb{N}^\omega$, esto es, $\delta_{\mathfrak{X}}^{-1}(t)$ es el conjunto de todos los $\delta_{\mathfrak{X}}$-nombres para t. Note que $\delta_{\mathfrak{X}}^{-1}(t) \neq \emptyset$, que si $t \neq x$ entonces $\delta_{\mathfrak{X}}^{-1}(t) \cap \delta_{\mathfrak{X}}^{-1}(x) = \emptyset$, y que, en general, $\delta_{\mathfrak{X}}^{-1}(t)$ es un conjunto infinito.

[1] Si $w \in \mathbb{N}$ y $p \in \mathbb{N}^\omega$, se escribirá $w \in p$ para denotar que w ocurre en p. Es decir, $w \in p \Longleftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N})(p_k = w)$.

Por otra parte, sea $d_{\mathbb{N}^\omega}$ la métrica sobre $\mathbb{N}^\omega$ definida por

$$d_{\mathbb{N}^\omega}(p,q) = \begin{cases} 0, & \text{cuando } p = q, \\ 2^{-n}, & \text{cuando } p \neq q \text{ y } n = \min\{k \in \mathbb{N} \mid p_k \neq q_k\}. \end{cases} \tag{4-2}$$

Nótese que para todo par de secuencias $p, q \in \mathbb{N}^\omega$, $0 \leq d_{\mathbb{N}^\omega}(p,q) \leq 1$.

Definición 37. Sea

$$\mathcal{F} = \bigcup_{x \in X} \delta_{\mathfrak{X}}^{-1}(x) \tag{4-3}$$

la unión de las fibras $\delta_{\mathfrak{X}}^{-1}(x)$. Es decir $\mathcal{F} = \delta_{\mathfrak{X}}^{-1}[X]$.

Sea $d : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \longrightarrow [0, +\infty]$ la función definida por

$$d(p,q) = \begin{cases} +\infty, & \text{cuando } \delta_{\mathfrak{X}}(p) \neq \delta_{\mathfrak{X}}(q), \\ d_{\mathbb{N}^\omega}(p,q), & \text{cuando } \delta_{\mathfrak{X}}(p) = \delta_{\mathfrak{X}}(q). \end{cases} \tag{4-4}$$

Claramente, para todo $x \in X$, d es una métrica para $\delta_{\mathfrak{X}}$ y $\left(\delta_{\mathfrak{X}}^{-1}(x), d_x\right)$ es un espacio métrico donde $d_x = d \restriction_{\delta_{\mathfrak{X}}^{-1}(x) \times \delta_{\mathfrak{X}}^{-1}(x)}$ es la restricción de d a la fibra encima de x.

En la actualidad, uno de los objetos de estudio en teoría de la información está relacionado con la similitud entre elementos de un conjunto dado. Una de las aproximaciones más aceptadas a este respecto es la conocida como *distancia de la información* [3], una métrica que acota inferiormente toda métrica efectiva: distancia de Hamming, distancia Euclidiana, distancia de edición, distancia de Lempel-Ziv, etc. Esta *métrica universal* [35, 3, 33, 52] se define como *la longitud del programa binario más corto que se requiere para transformar un objeto en otro*. Según [34] esta distancia puede ser interpretada como proporcional a la mínima cantidad de energía para hacer la transformación (ganancia o pérdida de genes en una especie dada, por ejemplo).

Así las cosas, tiene sentido estudiar la posibilidad de obtener un $\delta_{\mathfrak{X}}$-nombre para un elemento $y \in X$ a partir de un $\delta_{\mathfrak{X}}$-nombre para un elemento $x \in X$. Esta posibilidad es capturada por la siguiente familia de funciones que además resulta tener propiedades suficientes para estructurar a $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{N}^\omega$.

Definición 38. Sean $x \in X$ y $p \in dom(\delta_{\mathfrak{X}})$ tales que $\delta_{\mathfrak{X}}(p) = x$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define la función $\gamma_{pn} :\subseteq X \longrightarrow \mathcal{F}$ por

$$\begin{gathered} dom(\gamma_{pn}) = \textstyle\bigcap_{i=0}^{n} \nu(p_i), \text{ y} \\ \gamma_{pn}(y) = v \Longleftrightarrow v = \min\left\{u \mid u^{\leq n} = p^{\leq n} \wedge \delta_{\mathfrak{X}}(u) = y\right\}. \end{gathered} \tag{4-5}$$

En esta definición se entiende que $\mathbb{N}^\omega$ está ordenado lexicográficamente, es decir que

$$p <_{lex} q :\Longleftrightarrow (p \neq q \wedge m = \text{mín}\{k \mid p_k \neq q_k\} \wedge p_m < q_m).$$

Además la definición de $\gamma_{pn}(y)$ implica que $(\gamma_{pn}(y))^{\leq n} = p^{\leq n}$ y $\gamma_{pn}(y)(i) < \gamma_{pn}(y)(i+1)$ para todo número natural $i > n$. Es decir, $(\gamma_{pn}(y))^{>n}$ es creciente.

Nota 4. Dado que si $\gamma_{pn}(y) = v$ entonces $\delta_{\mathfrak{X}}(v) = y$, se tiene que $\delta_{\mathfrak{X}}(\gamma_{pn}(y)) = y$ para todo $y \in dom(\gamma_{pn})$ y por lo tanto todas las funciones de la forma γ_{pn} son selecciones locales para $\delta_{\mathfrak{X}}$.

Adicionalmente, si $v \in dom(\delta_{\mathfrak{X}})$ entonces existe $y \in X$ tal que $\delta_{\mathfrak{X}}(v) = y$. Por lo tanto, para todo $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $v \in \mathcal{T}_\epsilon(\gamma_{vn})$.

Definición 39. Si $x, y \in X$ y $p, q \in dom(\delta_{\mathfrak{X}})$ son tales que $\delta_{\mathfrak{X}}(p) = x$ y $\delta_{\mathfrak{X}}(q) = y$, y $n, m \in \mathbb{N}$, se define la función $\Phi_{pn,qm} :\subseteq X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ por

$$\begin{aligned} &dom(\Phi_{pn,qm}) = dom(\gamma_{pn}) \cap dom(\gamma_{qm}), \text{ y} \\ &\Phi_{pn,qm}(t) = d(\gamma_{pn}(t), \gamma_{qm}(t)). \end{aligned} \tag{4-6}$$

Teorema 8. *Si $x, y \in X$, y $p, q \in dom(\delta_{\mathfrak{X}})$ son tales que $\delta_{\mathfrak{X}}(p) = x$ y $\delta_{\mathfrak{X}}(q) = y$, y $n, m \in \mathbb{N}$, entonces la función $\Phi_{pn,qm}$ es semicontinua superiormente.*

Demostración. Sea $a \in \mathbb{R}$. Se demostrará que $\Phi^{-1}_{pn,qm}([-\infty, a))$ es abierto en X.

La afirmación es trivialmente válida en los casos en que $a \leq 0$ y $1 \leq a$. Más precisamente, si $a \leq 0$ entonces $\Phi^{-1}_{pn,qm}([-\infty, a)) = \{t \mid d_t(\gamma_{pn}(t), \gamma_{qm}(t)) < a\} = \emptyset$, y si $1 \leq a$ entonces $\Phi^{-1}_{pn,qm}([-\infty, a)) = \{t \mid d_t(\gamma_{pn}(t), \gamma_{qm}(t)) < a\} = dom(\Phi_{pn,qm})$.

Supóngase que $0 < a < 1$. Sea $r \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-r} \leq a < 2^{-r+1}$, es decir $r = -\lfloor \log_2 a \rfloor$. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} &\Phi^{-1}_{pn,qm}([-\infty, a)) \\ = &\Phi^{-1}_{pn,qm}([-\infty, 2^{-r}]) \\ = &\{t \mid d_t(\gamma_{pn}(t), \gamma_{qm}(t)) \leq 2^{-r}\} \\ = &\left\{t \mid (\gamma_{pn}(t))^{<r} = (\gamma_{qm}(t))^{<r}\right\}. \end{aligned} \tag{4-7}$$

Se estudiarán, de manera independiente, los casos $p = q$ y $p \neq q$.

Ahora bien, en general, para todo $i, j \in \mathbb{N}$ y $s \in \mathbb{N}^\omega$, se denotará por $A(s, i, j)$ al conjunto de las secuencias infinitas en $\mathbb{N}^\omega$ que coinciden con s en su prefijo de longitud i y que son crecientes del j-ésimo elemento en adelante. Esto es

$$A(s,i,j) = \left\{ b \mid b \in \mathbb{N}^\omega \wedge b^{<i} = s^{<i} \wedge b^{\geq j} \text{ es creciente} \right\}. \tag{4-8}$$

1. Caso $p = q$.

   Si $p = q$ entonces $\Phi^{-1}_{pn,qm}([-\infty, 2^{-r}]) = \left\{ t \mid (\gamma_{pn}(t))^{<r} = (\gamma_{pm}(t))^{<r} \right\}$. Para ver que $\Phi^{-1}_{pn,qm}([-\infty, 2^{-r}])$ es abierto se procederá mediante un análisis exhaustivo de los casos según la relación de orden entre r, n y m. No se pierde generalidad al suponer que $n < m$ puesto que los roles son simétricos y si $n = m$ entonces $\Phi^{-1}_{pn,qm}([-\infty, 2^{-r}]) = dom(\Phi_{pn,qm})$ puesto que $\Phi_{pn,qm} = 0$.

   a) Caso $r \leq n + 1$.

   En este caso $(\gamma_{pn}(t))^{<r} = p_0 \dots p_{r-1} = (\gamma_{pm}(t))^{<r}$ para todo $t \in dom(\Phi_{pn,qm})$. Es decir, $\Phi^{-1}_{pn,qm}([-\infty, 2^{-r}]) = dom(\Phi_{pn,qm})$.

   b) Caso $n + 1 < r \leq m + 1$.

   En estas condiciones

   $$(\gamma_{pn}(t))^{<r} = p_0 \dots p_n s_{n+1} \dots s_{r-1},$$

   donde los valores $s_{n+1}, \dots, s_{r-1}$ dependen de t, mientras que

   $$(\gamma_{qm}(t))^{<r} = p_0 \dots p_{r-1}.$$

   Por lo tanto, $(\gamma_{pn}(t))^{<r} = (\gamma_{pm}(t))^{<r}$ implica que $p_{n+1} \dots p_{r-1} = s_{n+1} \dots s_{r-1}$. Así las cosas, si $p_{n+1} \dots p_{r-1}$ es creciente entonces

   $$\Phi^{-1}_{pn,qm}\left(\left[-\infty, 2^{-r}\right]\right) = dom(\Phi_{pn,qm}) \cap \bigcup_{b \in A(p,m+1,r)} \left(\bigcap_{i=n+1}^{r-1} \nu(b_i) \right),$$

   y si $p_{n+1} \dots p_{r-1}$ no es creciente entonces $\Phi^{-1}_{pn,qm}([-\infty, 2^{-r}]) = \emptyset$.

   c) Caso $m + 1 < r$.

   En estas condiciones $(\gamma_{pn}(t))^{<r}$ y $(\gamma_{qm}(t))^{<r}$ tienen respectivamente las formas

   $$(\gamma_{pn}(t))^{<r} = p_0 \dots p_n s_{n+1} \dots s_m \dots s_{r-1},$$

donde los valores $s_{n+1}, \ldots, s_m, \ldots, s_{r-1}$ dependen de t, y

$$(\gamma_{qm}(t))^{<r} = p_0 \ldots p_n p_{n+1} \ldots p_m s'_{m+1} \ldots s'_{r-1},$$

donde los valores $s'_{m+1}, \ldots, s'_{r-1}$ dependen de t y, en general, son diferentes a los valores $s_{m+1}, \ldots, s_{r-1}$. Por lo tanto, $(\gamma_{pn}(t))^{<r} = (\gamma_{pm}(t))^{<r}$ implica que $s_{n+1} \ldots s_m \ldots s_{r-1} = p_{n+1} \ldots p_m s'_{m+1} \ldots s'_{r-1}$. Así las cosas, si $p_{n+1} \ldots p_m$ es creciente entonces

$$\Phi^{-1}_{pn,qm}\left(\left[-\infty, 2^{-r}\right]\right) = dom\left(\Phi_{pn,qm}\right) \cap \bigcup_{b \in A(p,m+1,n)} \left(\bigcap_{i=n+1}^{r-1} \nu\left(b_i\right)\right),$$

y en caso contrario $\Phi^{-1}_{pn,qm}\left([-\infty, 2^{-r}]\right) = \emptyset$.

2. Caso $p \neq q$.

   Sea $k = \text{mín}\{i \mid p_i \neq q_i\}$, es decir, k es tal que $d_{\mathbb{N}^\omega}(p,q) = 2^{-k}$, o dicho de otra manera $k = -\log_2 d_{\mathbb{N}^\omega}(p,q)$.

   Para ver que $\Phi^{-1}_{pn,qm}\left([-\infty, 2^{-r}]\right)$ es abierto se procederá mediante un análisis exhaustivo de los casos según la relación de orden entre k, r, n y m.

   a) Si $n = m$:

   Si $k < n+1$ y $r > k$ entonces, para todo $t \in dom\left(\Phi_{pn,qm}\right)$

   $$(\gamma_{pn}(t))^{<r}(k) = p_k \neq q_k = (\gamma_{qm}(t))^{<r}(k)$$

   y por lo tanto $\Phi^{-1}_{pn,qm}\left([-\infty, 2^{-r}]\right) = \emptyset$.

   Si $r \leq k < n+1$ entonces,

   $$(\gamma_{pn}(t))^{<r} = p^{<r} = q^{<r} = (\gamma_{qm}(t))^{<r}$$

   para todo $t \in dom\left(\Phi_{pn,qm}\right)$ y por lo tanto $\Phi^{-1}_{pn,qm}\left([-\infty, 2^{-r}]\right) = dom\left(\Phi_{pn,qm}\right)$.

   Si $n+1 \leq k$ entonces, $\Phi^{-1}_{pn,qm}\left([-\infty, 2^{-r}]\right) = dom\left(\Phi_{pn,qm}\right)$ puesto que $\gamma_{pn}(t) = \gamma_{qm}(t)$ para todo $t \in dom\left(\Phi_{pn,qm}\right)$.

   b) Si $n \neq m$, sin pérdida de generalidad, se supondrá que $n < m$:

   1) Si $k < n+1$:

      Si $r \leq k$ entonces $(\gamma_{pn}(t))^{<r} = p^{<r} = q^{<r} = (\gamma_{qm}(t))^{<r}$ para todo $t \in dom\left(\Phi_{pn,qm}\right)$ y por lo tanto $\Phi^{-1}_{pn,qm}\left([-\infty, 2^{-r}]\right) = dom\left(\Phi_{pn,qm}\right)$.

      Si $r > k$ entonces $(\gamma_{pn}(t))^{<r}(k) = p_k \neq q_k = (\gamma_{qm}(t))^{<r}(k)$ para todo $t \in dom\left(\Phi_{pn,qm}\right)$ y por lo tanto $\Phi^{-1}_{pn,qm}\left([-\infty, 2^{-r}]\right) = \emptyset$.

2) Si $k = n + 1$:

Si $r \leq k = n + 1$ entonces $(\gamma_{pn}(t))^{<r} = p^{<r} = q^{<r} = (\gamma_{qm}(t))^{<r}$ para todo $t \in dom(\Phi_{pn,qm})$ y por lo tanto $\Phi^{-1}_{pn,qm}([-\infty, 2^{-r}]) = dom(\Phi_{pn,qm})$.

Si $n + 1 = k < r \leq m + 1$, entonces $(\gamma_{pn}(t))^{<r} = p_0 \dots p_n s_k \dots s_{r-1}$ y $(\gamma_{qm}(t))^{<r} = p_0 \dots p_n q_k \dots q_{r-1}$. Por lo tanto, si $q_k \dots q_{r-1}$ es creciente entonces

$$\Phi^{-1}_{pn,qm}\left(\left[-\infty, 2^{-r}\right]\right) = dom(\Phi_{pn,qm}) \cap \bigcup_{b \in A(p,r,k)} \left(\bigcap_{i=k}^{r-1} \nu(b_i)\right),$$

y si $q_k \dots q_{r-1}$ no es creciente entonces $\Phi^{-1}_{pn,qm}([-\infty, 2^{-r}]) = \emptyset$.

Si $n + 1 = k < m + 1 < r$, entonces

$$(\gamma_{pn}(t))^{<r} = p_0 \dots p_n s_k \dots s_m s_{m+1} \dots s_{r-1}$$

y

$$(\gamma_{qm}(t))^{<r} = p_0 \dots p_n q_k \dots q_m s'_{m+1} \dots s'_{r-1}.$$

De esta manera, si $q_k \dots q_m$ es creciente entonces

$$\Phi^{-1}_{pn,qm}\left(\left[-\infty, 2^{-r}\right]\right) = dom(\Phi_{pn,qm}) \cap \bigcup_{b \in A(q,m+1,k)} \left(\bigcap_{i=k}^{r-1} \nu(b_i)\right),$$

y $\Phi^{-1}_{pn,qm}([-\infty, 2^{-r}]) = \emptyset$ en caso contrario.

3) Si $k > n + 1$:

Si $r \leq n + 1 < k$ entonces $(\gamma_{pn}(t))^{<r} = p^{<r} = q^{<r} = (\gamma_{qm}(t))^{<r}$ para todo $t \in dom(\Phi_{pn,qm})$ y por lo tanto $\Phi^{-1}_{pn,qm}([-\infty, 2^{-r}]) = dom(\Phi_{pn,qm})$.

Si $n + 1 < r \leq k \leq m + 1$ o $n + 1 < r \leq m + 1 \leq k$ entonces $(\gamma_{pn}(t))^{<r} = p_0 \dots p_n s_{n+1} \dots s_{r-1}$ y $(\gamma_{qm}(t))^{<r} = q^{<r} = p^{<r}$. Así,

$$\Phi^{-1}_{pn,qm}\left(\left[-\infty, 2^{-r}\right]\right) = dom(\Phi_{pn,qm}) \cap \bigcup_{b \in A(q,r,n+1)} \left(\bigcap_{i=n+1}^{r-1} \nu(b_i)\right)$$

si $p_{n+1} \dots p_{r-1}$ es creciente, y $\Phi^{-1}_{pn,qm}([-\infty, 2^{-r}]) = \emptyset$ en caso contrario.

Si $n + 1 < k < r \leq m + 1$ entonces $(\gamma_{pn}(t))^{<r} = p_0 \dots p_n s_{n+1} \dots s_{r-1}$ y $(\gamma_{qm}(t))^{<r} = q_0 \dots q_n q_{n+1} \dots q_{r-1} = q^{<r}$. Así, si $q_{n+1} \dots q_{r-1}$ es creciente entonces

$$\Phi^{-1}_{pn,qm}\left(\left[-\infty, 2^{-r}\right]\right) = dom(\Phi_{pn,qm}) \cap \bigcup_{b \in A(q,r,n+1)} \left(\bigcap_{i=n+1}^{r-1} \nu(b_i)\right),$$

y $\Phi_{pn,qm}^{-1}([-\infty, 2^{-r}]) = \emptyset$ en caso contrario.

Si $m+1 < r$, entonces

$$(\gamma_{pn}(t))^{<r} = p_0 \dots p_n s_{n+1} \dots s_{r-1}$$

y

$$(\gamma_{qm}(t))^{<r} = q_0 \dots q_m s'_{m+1} \dots s'_{r-1}.$$

En todos los posibles casos, si $q_{n+1} \dots q_m$ es creciente entonces

$$\Phi_{pn,qm}^{-1}\left(\left[-\infty, 2^{-r}\right]\right) = dom\left(\Phi_{pn,qm}\right) \cap \bigcup_{b \in A(q,m-1,n+1)} \left(\bigcap_{i=k}^{r-1} \nu\left(b_i\right)\right),$$

y $\Phi_{pn,qm}^{-1}([-\infty, 2^{-r}]) = \emptyset$ si $q_{n+1} \dots q_m$ no es creciente.

En resumen, en todos los posibles casos, $\Phi_{pn,qm}^{-1}([-\infty, a))$ es un abierto en X y por lo tanto $\Phi_{pn,qm}$ es semicontinua superiormente.

□

A la luz de este resultado, una aplicación directa del Teorema de Existencia de Campos de Espacios Métricos permite la demostración del siguiente

Teorema 9. *Sean $\mathfrak{X} = (X, \sigma, \nu)$ es un espacio topológico computable, $\delta_{\mathfrak{X}} :\subseteq \Sigma^\omega \longrightarrow X$ la representación estándar para X, $\mathcal{F} = \delta_{\mathfrak{X}}^{-1}[X] = dom(\delta_{\mathfrak{X}})$, $\Gamma = \{\gamma_{pn} \mid p \in \mathcal{F} \wedge n \in \mathbb{N}\}$, $d : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \longrightarrow [0, +\infty]$ la función definida por $d(p,q) = +\infty$ si $\delta_{\mathfrak{X}}(p) \neq \delta_{\mathfrak{X}}(q)$ y $d(p,q) = d_{\mathbb{N}^\omega}(p,q)$ si $\delta_{\mathfrak{X}}(p) = \delta_{\mathfrak{X}}(q)$. Entonces $dom(\delta_{\mathfrak{X}})$ puede ser dotado de una topología $\mathfrak{T}_{\mathfrak{X}}$ tal que*

1. *$(dom(\delta_{\mathfrak{X}}), \delta_{\mathfrak{X}}, X)$ es un campo de espacios métricos.*
2. *Γ es una familia plena de secciones para $\delta_{\mathfrak{X}}$.*
3. *La familia de ϵ-tubos de la forma $\mathcal{T}_\epsilon(\gamma_{pn})$ es una base para la topología $\mathfrak{T}_{\mathfrak{X}}$ sobre $\mathcal{F}$. Esto es, $\mathcal{B} = \{\mathcal{T}_\epsilon(\gamma_{pn}) \mid \epsilon > 0 \wedge p \in dom(\delta_{\mathfrak{X}}) \wedge n \in \mathbb{N}\}$ es una base para la topología $\mathfrak{T}_{\mathfrak{X}}$.*

Proposición 18. *En el contexto del teorema previo, $\mathfrak{T}_{\mathfrak{X}}$ es una topología más fina que $\tau_{\mathbb{N}^\omega}$.*

Demostración. Sean $n \in \mathbb{N}$, $p \in dom(\delta_{\mathfrak{X}})$ y $V = \cap_{i=0}^n \nu(p_i)$. Si $k \leq n$ y $q = \mathcal{T}_{2^{-k}}(\gamma_{pn}\restriction_V)$ entonces $q^{<k} = p^{<k}$ y $q \in p^{<k}\mathbb{N}^\omega$. Por lo tanto $\mathcal{T}_{2^{-k}}(\gamma_{pn}\restriction_V) \subseteq p^{<k}\mathbb{N}^\omega$.

□

4.2. Campos de Espacios Métricos Computables

En esta sección se introduce el concepto de Campo de Espacios Métricos Computables. El término se utilizará para referir los Campos de Espacios Métricos cuyas fibras son espacios métricos computables. Vale anotar que no se imponen condiciones de computabilidad sobre el espacio base o sobre el espacio fibrado.

En lo que resta de este capítulo, y a menos que se especifique lo contrario, Σ es un alfabeto finito que contiene los símbolos 0 y 1.

Definición 40. (Campos de Espacios Métricos Computables). Si G y T son espacios topológicos, $p : G \longrightarrow T$ es una función sobreyectiva y continua, y d es una métrica para p, se dice que la tripleta (G, p, T) es un *Campo de Espacios Métricos Computables* si

(CEMC1) Dados $u \in G$ y $\epsilon > 0$ existe una selección local α para p de manera que $u \in \mathcal{T}_\epsilon(\alpha)$.

(CEMC2) La familia $\{\mathcal{T}_\epsilon(\alpha)\}$, con $\epsilon > 0$ y α selección local para p, es una base para la topología de G.

(CEMC3) Para todo $t \in T$, existen Q_t y ν_t tales que $\mathfrak{G}_t = (G_t, d\restriction_{G_t \times G_t}, Q_t, \nu_t)$, donde $G_t = p^{-1}(t)$ y $d_t = d\restriction_{G_t \times G_t}$, es un espacio métrico computable. Es decir, para todo $t \in T$, existen un subconjunto denso enumerable Q_t de G_t, y una notación $\nu_t :\subseteq \Sigma^* \longrightarrow Q_t$, tales que la distancia d_t sobre Q_t es (ν_t, ν_t, ρ)-computable y ν_t tiene dominio recursivo.

Las dos primeras condiciones de la definición anterior hacen de (G, p, T) un campo de espacios métricos, y la tercera condición obliga a todas las fibras a ser espacios métricos computables. Así las cosas, para verificar las condiciones CEMC1 y CEMC2 es posible utilizar el Teorema de Existencia de Campos de Espacios Métricos en cualquiera de sus versiones.

Ejemplo 8. (Campo de espacios métricos computables de las funciones continuas de un espacio topológico T en un espacio métrico computable $\mathfrak{E} = (E, d, Q, \nu)$). Sean T un espacio topológico (no necesariamente computable), $\mathfrak{E} = (E, d, Q, \nu)$ un espacio métrico computable[2], $G = T \times E$ dotado de la topología producto, y, $p : G \longrightarrow T$ la proyección sobre el primer factor $p(t, y) = \pi_1(t, y) = t$. Sea $\delta : G \times G \longrightarrow [0, \infty]$, la métrica para p, definida por

$$\delta((t, y), (t', y')) = \begin{cases} \infty, & \text{cuando } t \neq t', \\ d(y, y'), & \text{cuando } t = t'. \end{cases} \tag{4-9}$$

[2]Esto es, (E, d) es un espacio métrico, Q es un subconjunto enumerable y denso en E, $\nu :\subseteq \Sigma^* \longrightarrow Q$ es una notación para Q con dominio recursivo y d es computable sobre Q.

Nótese que, para cada $t \in T$, la segunda proyección $\pi_2 : G \longrightarrow E$, restringida a $G_t = p^{-1}(t) = \{t\} \times E$ es una isometría. Esto es,

$$\delta\left((t,y),(t,y')\right) = d\left(y,y'\right) = d\left(\pi_2\left(t,y\right),\pi_2\left(t,y'\right)\right).$$

Por otra parte, es posible establecer una biyección entre el conjunto de las funciones continuas de T en E y el conjunto de las secciones globales para p. En efecto, si α es una sección global para p, entonces $f_\alpha = \pi_2 \circ \alpha : T \longrightarrow E$ es una función continua determinada de manera única. Recíprocamente, si f es una función continua de T en E, la función $\alpha_f : T \longrightarrow G = T \times E$, definida por $\alpha_f(t) = (t, f(t))$, es una sección para p. Evidentemente el resultado puede ser extendido a secciones locales: las secciones locales están determinadas por las funciones, con valores en E, definidas sobre subconjuntos abiertos de T.

Es claro que si $u = (t_0, y_0) \in G$ y $\epsilon > 0$, basta tomar la función constante $f(t) = y_0$, para tener que la selección α_f es tal que $u \in \mathcal{T}_\epsilon\left(\alpha_f\right)$ puesto que $u = \alpha_f\left(p(u)\right)$.

Además, si α y β son selecciones locales para p, entonces existen funciones continuas f y g que las determinan de forma única. Esto implica que la función

$$\Phi_{\alpha\beta}(t) = \delta\left(\alpha(t), \beta(t)\right) = d\left(f(t), g(t)\right) \tag{4-10}$$

es continua y por lo tanto semicontinua superiormente.

Las dos últimas afirmaciones garantizan que (G, p, T) es un campo de espacios métricos.

Ahora bien, sean $t \in T$, $G_t = p^{-1}(t) = \{t\} \times E$ y $d_t = \delta \restriction_{G_t \times G_t}$. Basta tomar $Q_t = \{t\} \times Q \subseteq G_t$ y $\nu_t :\subseteq \Sigma^* \longrightarrow Q_t$ definida por

$$\nu_t(w) = (t, y) \Longleftrightarrow \nu(w) = y \tag{4-11}$$

y notar que d_t es (ν_t, ν_t, ρ)-computable puesto que $\mathfrak{E}$ es un espacio métrico computable, para tener que $\mathfrak{G}_t = (G_t, d_t, Q_t, \nu_t)$ es un espacio métrico computable.

Así las cosas (G, p, T) es un campo de espacios métricos computables, el *Campo de espacios métricos computables de las funciones continuas del espacio topológico T en el espacio métrico computable $\mathfrak{E}$*.

Ejemplo 9. (Haz de gérmenes de los polígonos racionales sobre un intervalo recursivo). Sean $T = [c, d]$ un intervalo recursivo. $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$ es un *polígono racional f sobre T*, si f es una función continua en T tal que existen números racionales $a_0, b_0, \ldots, a_k, b_k$ con $a_0, \ldots, a_k \in T$, $a_0 < a_1 < \ldots < a_k$, $a_0 \leq c$, $d \leq a_k$ y

$$f(x) = b_{i-1} + (x - a_{i-1})\,\frac{(b_i - b_{i-1})}{(a_i - a_{i-1})} \tag{4-12}$$

para todo $x \in [a_{i-1}, a_i]$. Sean $\mathbb{Q}_{PG(T)}$ el conjunto de todos los polígonos racionales sobre T, y $\nu_{\mathbb{Q}_{PG(T)}}$ una notación estándar para $\mathbb{Q}_{PG(T)}$. Sean d la métrica discreta sobre $\mathbb{R}$ y $\breve{d} : \mathbb{Q}_{PG(T)} \times \mathbb{Q}_{PG(T)} \longrightarrow \mathbb{R}$ la métrica del supremo definida por $\breve{d}(f,g) = \sup_{t \in T} d\,(f(t), g(t))$.

Para cada $t \in T$, se define la relación $\sim_t$ sobre $\mathbb{Q}_{PG(T)}$ como

$$f \sim_t g \Longleftrightarrow \limsup_{s \to t} d\,(f(s), g(s)) = 0. \tag{4-13}$$

Es decir, $f \sim_t g$ si y sólo si existe una vecindad $V \in \mathcal{V}(t)$ tal que $f(s) = g(s)$ para todo $s \in V$. Nótese que la relación así definida es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{Q}_{PG(T)}$, y que $\sim_t$ es decidible efectivamente.

Más específicamente, si $t \in T$ y si f y g son polígonos racionales que tienen asociados los números racionales $a_0, b_0, \ldots, a_k, b_k$ y $a'_0, b'_0, \ldots, a'_r, b'_r$ repectivamente, para decidir efectivamente si $f \sim_t q$ basta con determinar $0 \leq i \leq k$ y $0 \leq j \leq r$ tales que $t \in [a_{i-1}, a_i]$ y $t \in \left[a'_{j-1}, a'_j\right]$. Se presentan entonces, sin pérdida de generalidad, solo tres casos y todos son decidibles efectivamente:

1. Si $a_{i-1} < a'_{j-1} < a'_j < a_i$ entonces

$$f \sim_t g \Longleftrightarrow f\left(a'_{j-1}\right) = g\left(a'_{j-1}\right) = b'_{j-1} \wedge f\left(a'_j\right) = g\left(a'_j\right) = b'_j. \tag{4-14}$$

2. Si $a_{i-1} < a'_{j-1} < a_i < a'_j$ entonces

$$f \sim_t g \Longleftrightarrow f\left(a'_{j-1}\right) = g\left(a'_{j-1}\right) = b'_{j-1} \wedge b_i = f\left(a_i\right) = g\left(a_i\right). \tag{4-15}$$

3. Si $a_{i-1} < a_i = a'_{j-1} < a'_j$ entonces
   a) Si $j \neq 1$,

$$f \sim_t g \Longleftrightarrow f\left(a'_{j-2}\right) = g\left(a'_{j-2}\right) = b'_{j-2} \wedge b_{i+1} = f\left(a_{i+1}\right) = g\left(a_{i+1}\right). \tag{4-16}$$

   b) Si $j = 1$, entonces $\neg\,(f \sim_t g)$.

En lo que resta de este ejemplo G_t denota el cociente $\mathbb{Q}_{PG(T)}/\sim_t$ y, para cada $f \in \mathbb{Q}_{PG(T)}$, $[f]_t$ denota la clase de equivalencia de f módulo $\sim_t$.

Sean $\nu_t :\subseteq \Sigma^* \longrightarrow G_t$ la notación definida por

$$\nu_{\mathbb{Q}_{PG(T)}}(w) = f \Longrightarrow \nu_t(w) = [f]_t\,,$$

y d_t la métrica discreta sobre G_t:

$$d_t\left([f]_t\,, [g]_t\right) = \limsup_{s \to t} d\,(f(s), g(s))\,.$$

Así las cosas, para cada $t \in T$, como la relación $\sim_t$ puede ser decidida efectivamente entonces d_t es computable sobre G_t y $\mathfrak{G}_t = (G_t, d_t, G_t, \nu_t)$ es un espacio métrico computable.

Sean $G = \dot{\bigcup}_{t \in T} G_t$, la unión disjunta de los G_t cuando t recorre a T, $p : G \longrightarrow T$ la función definida por $p(u) = t$ si y sólo si $u \in G_t$, y $\Gamma = \left\{ \hat{f} \mid f \in \mathbb{Q}_{PG(T)} \right\}$ donde $\hat{f} : T \longrightarrow G$ y $\hat{f}(t) = [f]_t$.

En este marco de referencia la función $d^* : G \times G \longrightarrow [0, +\infty]$, definida por

$$d^*(u,v) = \begin{cases} \infty, & \text{si } p(u) \neq p(v), \\ d_t(u,v), & \text{si } p(u) = p(v) = t, \end{cases}$$

es una métrica para p.

Además, si $u \in G$, entonces existen $t \in T$ y $f \in \mathbb{Q}_{PG(T)}$ tales que $u = [f]_t$, y por lo tanto, para todo $\epsilon > 0$, $u \in \mathcal{T}_\epsilon \left(\hat{f} \right)$.

El Teorema de Existencia de Campos de Espacios Métricos garantiza que (G, p, T) es un campo de espacios métricos, puesto que si $(f, g) \in \mathbb{Q}_{PG(T)} \times \mathbb{Q}_{PG(T)}$ entonces la función $\Phi_{fg} : T \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\Phi_{fg}(t) = d_t \left([f]_t , [g]_t \right)$ es semicontinua superiormente.

En resumen, (G, p, T) es un campo de espacios métricos computable. Este campo de espacios métricos computables se conoce como el *haz de gérmenes de los polígonos racionales sobre un intervalo recursivo* T.

Para tener presente la importancia del ejemplo anterior basta recordar que en [60] se propone una representación para el espacio de las funciones semicontinuas superiormente inspirada en los teoremas de Weierstrass y Baire, en donde p es un nombre para una función semicontinua superiormente f, si p codifica una sucesión decreciente de polígonos racionales que converge puntualmente a f. Más formalmente, si $\mathcal{USC}(T)$ es el conjunto de todas las funciones semicontinuas superiormente definidas sobre el intervalo T, una representación natural para $\mathcal{USC}(T)$ está dada por

$$\delta_{>}(p) = f \Longleftrightarrow p = \iota\left(p_1\right) \iota\left(p_2\right) \ldots \tag{4-17}$$

donde $\left\{ \nu_{\mathbb{Q}_{PG(T)}} \left(p_i\right) \right\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de polígonos racionales que converge puntualmente a f, en otras palabras, tal que $\inf_{i \in \mathbb{N}} \nu_{\mathbb{Q}_{PG(T)}} \left(p_i\right)(x) = f(x)$ para todo $x \in T$.

4.3. Campos de Espacios Métricos con Base Computable

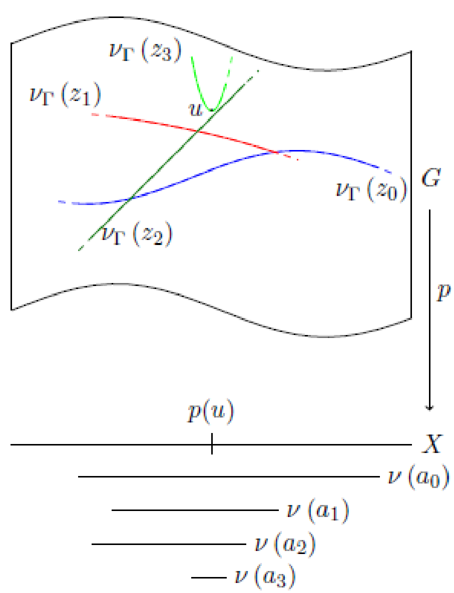
En esta sección se exploran algunos efectos de imponer condiciones de computabilidad sobre el espacio base X de un campo de espacios métricos (G, p, X).

En adelante se supondrá, a menos que se indique lo contrario, que $\mathfrak{X} = (X, \tau, \beta, \nu)$ es un espacio T_0 computable.

Definición 41. (Representación de Cauchy para G según Γ). Si $\mathfrak{X} = (X, \tau, \beta, \nu)$ es un espacio T_0 computable, G tiene cardinalidad no superior a la del continuo, $p : G \longrightarrow X$ es una función sobreyectiva, d es una métrica para p, Γ es una familia enumerable de selecciones locales para p tal que dados $u \in G$ y $n \in \mathbb{N}$ existe $\alpha \in \Gamma$ con $u \in \mathcal{T}_{2^{-n}}(\alpha)$, y $\nu_\Gamma :\subseteq \Sigma^* \longrightarrow \Gamma$ es una notación para Γ, entonces se define $\delta_{\Gamma C}$, la *representación de Cauchy para G según Γ*, como $\delta_{\Gamma C}(q) = u$ si y solo si existen $a \in dom\,(\delta_{\mathfrak{X}})$ y $z_0, z_1, \dots \in dom\,(\nu_\Gamma)$, tales que

- $q = \langle a, \iota(z_0)\,\iota(z_1)\dots\rangle$,
- $\delta_{\mathfrak{X}}(a) = p(u)$, y
- $d\left(u, \nu_\Gamma(z_n)(p(u))\right) < 2^{-n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Es decir, q es un $\delta_{\Gamma C}$-nombre para u si $q = \langle a, b\rangle$, donde a indica la fibra $G_{\delta_{\mathfrak{X}}(a)}$ en que se encuentra u (a es un $\delta_{\mathfrak{X}}$-nombre para $p(u)$), y b es una lista ordenada de ν_Γ-nombres para selecciones ζ_n ($\zeta_n := \nu_\Gamma(z_n)$) en Γ tales que la sucesión $\{\zeta_n(p(u))\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge *rápidamente* a u en $G_{p(u)} = G_{\delta_{\mathfrak{X}}(a)}$.



Definición 42. (Representación Fuerte de Cauchy para G según Γ). Si $\mathfrak{X} = (X, \tau, \beta, \nu)$ es un espacio T_0 computable, G tiene cardinalidad no superior a la del continuo, $p : G \longrightarrow X$ es una función sobreyectiva, d es una métrica para p, Γ es una familia enumerable de selecciones locales para p tal que dados $u \in G$ y $n \in \mathbb{N}$ existe $\alpha \in \Gamma$ con $u \in \mathcal{T}_{2^{-n}}(\alpha)$, y $\nu_\Gamma :\subseteq \Sigma^* \longrightarrow \Gamma$ es una notación para Γ, entonces se define $\delta^s_{\Gamma C}$, la *representación fuerte de Cauchy para G según Γ* como $\delta^s_{\Gamma C}(q) = u$ si y solo si existen $a \in dom\,(\delta_{\mathfrak{X}})$ y $z_0, z_1, \dots \in dom\,(\nu_\Gamma)$, tales que

- $q = \langle a, \iota(z_0)\,\iota(z_1)\dots\rangle$,
- $a = \iota(a_0)\,\iota(a_1)\dots$ y $\delta_{\mathfrak{X}}(a) = p(u)$,
- si $k \in \mathbb{N}$ es par, entonces $\nu(a_k) \subseteq dom\,(\nu_\Gamma(z_k))$ y $\nu(a_{k+2}) \subseteq \nu(a_k)$,
- si $k < i$ entonces $d\,(\nu_\Gamma(z_k)(p(u)), \nu_\Gamma(z_i)(p(u))) \leq 2^{-k}$, y
- $u = \lim_{k\to\infty} \nu_\Gamma(z_k)(p(u))$.

Nótese que, en las condiciones expuestas, p es una función $(\delta_{\Gamma C}, \delta_{\mathfrak{X}})$-computable puesto que $p = \pi_1 \circ \delta_{\Gamma C}$.

En lo que sigue se supondrá que G, p, d, Γ y ν_Γ satisfacen las condiciones impuestas en la definición de $\delta_{\Gamma C}$.

El siguiente teorema establece que, si d es una métrica $(\delta_{\Gamma C}, \delta_{\Gamma C}, \rho)$-computable para p, entonces todas las fibras del campo de espacios métricos (G, p, X) son espacios métricos computables.

Teorema 10. *Sean $x \in X$ y $G_x = p^{-1}(x)$. Si d es $(\delta_{\Gamma C}, \delta_{\Gamma C}, \rho)$-computable, entonces existen d_x, Q_x y ν_x tales que $\mathfrak{G}_x = (G_x, d_x, Q_x, \nu_x)$ es un espacio métrico computable.*

Demostración. Sean $Q_x = \{\gamma(x) \mid x \in dom(\gamma) \wedge \gamma \in \Gamma\}$ y $d_x = d\restriction_{G_x \times G_x}$ la restricción de d a $Q_x \times Q_x$. Evidentemente (G_x, d_x) es un espacio métrico puesto que d es una métrica para p.

Adicionalmente Q_x es enumerable dado que Γ es enumerable.

Para verificar que Q_x es denso en G_x basta demostrar que si $u \in G_x$, $n \in \mathbb{N}$, y $B_x\left(\frac{1}{2^n}, u\right) = \left\{v \mid v \in G_x \wedge d_x(u, v) < \frac{1}{2^n}\right\}$ es el disco abierto de radio $\frac{1}{2^n}$ y centro en u, entonces $Q_x \cap B_x\left(\frac{1}{2^n}, u\right) \neq \emptyset$. En efecto, sea $\zeta \in \Gamma$ tal que $d\,(u, \zeta(p(u))) < \frac{1}{2^n}$. Como $d_x(u, \zeta(x)) = d\,(u, \zeta(x)) = d\,(u, \zeta(p(u))) < \frac{1}{2^n}$, entonces $\zeta(x) \in Q_x \cap B_x\left(\frac{1}{2^n}, u\right)$. De donde Q_x es denso en G_x.

Ahora, sea $\nu_x :\subseteq \Sigma^* \longrightarrow G_x$ la función definida por

$$\nu_x(q) = u :\Longleftrightarrow \nu_\Gamma(q)(x) = u.$$

ν_x es una notación para Q_x puesto que ν_Γ es una notación para Γ y un ν_Γ-nombre para γ es un ν_x-nombre para $\gamma(x)$.

Para verificar que d_x es (ν_x, ν_x, ρ)-computable sobre Q_x supóngase que q es una $\delta_{\mathfrak{X}}$-nombre para x y que M_d es la máquina de Turing de tipo 2 que computa la función d sobre G (esta máquina existe porque d es $(\delta_{\Gamma C}, \delta_{\Gamma C}, \rho)$-computable). Dados $q_1, q_2 \in dom\,(\nu_x)$. sean

$$\widetilde{q_1} = \langle q, \iota\,(q_1)\,\iota\,(q_1)\ldots\rangle$$

y

$$\widetilde{q_2} = \langle q, \iota\,(q_2)\,\iota\,(q_2)\ldots\rangle\,.$$

Claramente $\nu_x\,(q_1) = \delta\,(\widetilde{q_1})$ y $\nu_x\,(q_2) = \delta\,(\widetilde{q_2})$, y por lo tanto $d_x\,(q_1, q_2) = d\,(\widetilde{q_1}, \widetilde{q_2})$. Así las cosas, como $\widetilde{q_1}$ y $\widetilde{q_2}$ se pueden obtener efectivamente a partir de q_1 y q_2 pues la función de emparejamiento $\langle\cdot\rangle$ es computable, entonces d es (ν_x, ν_x, ρ)-computable.

Por lo tanto, $\mathfrak{G}_x = (G_x, d_x, Q_x, \nu_x)$ es un espacio métrico computable.
□

El teorema anterior puede ser parafraseado de la siguiente manera:

Teorema 11. *Si d es $(\delta_{\Gamma C}, \delta_{\Gamma C}, \rho)$-computable entonces (G, p, X) es un campo de espacios métricos computables.*

Ahora bien, bajo los supuestos de esta sección, la primera condición de la definición de campos de espacios métricos computables es computable. Esta afirmación se refleja en el siguiente teorema.

Teorema 12. *Si $\nu_\mathbb{N}$ es una notación estándar para $\mathbb{N}$, entonces existe una función $(\delta_{\Gamma C}, \nu_\mathbb{N}, \nu_\Gamma)$-computable que, dados $u \in G$ y $n \in \mathbb{N}$, encuentra una selección $\gamma \in \Gamma$ tal que $u \in \mathcal{T}_{2^{-n}}(\gamma)$.*

Demostración. Sea $SEL :\subseteq \Sigma^\omega \times \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ definida por

$$\begin{aligned} &dom(SEL) = dom\,(\delta_{\Gamma C}) \times dom\,(\nu_\mathbb{N})\,, \text{ y} \\ &\qquad \delta_{\Gamma C}(q) \in \mathcal{T}_{2^{-\nu_\mathbb{N}(r)}}(SEL(q, r)). \end{aligned} \tag{4-18}$$

La función SEL es $(\delta_{\Gamma C}, \nu_\mathbb{N}, \nu_\Gamma)$-computable puesto que tanto $\langle\cdot\rangle$ como sus proyecciones son computables, y $SEL(q, r)$ es la $\nu_\mathbb{N}(r)$-ésima proyección calculada en la segunda proyección de q. Más específicamente, si $\delta_{\Gamma C}(q) = u$, entonces $q = \langle a, b\rangle$ con $\delta_{\mathfrak{X}}(a) = p(u)$ y

$b = \iota(z_0)\iota(z_1)\ldots\iota(z_n)\ldots$, y $SEL(q,r) = z_{\nu_{\mathbb{N}}(r)} = z_n$.

Es claro que $SEL(q,r) = z_n$ cumple las condiciones requeridas

$$\begin{aligned} d\left(\delta_{\Gamma C}(q), \nu_\Gamma(SEL(q,r))\left(p\left(\delta_{\Gamma C}(q)\right)\right)\right) &= d\left(\delta_{\Gamma C}(q), \nu_\Gamma(SEL(q,r))\left(\delta_{\mathfrak{X}}\left(\pi_1(q)\right)\right)\right) \\ &= d\left(\delta_{\Gamma C}(q), \nu_\Gamma(SEL(q,r))\left(\delta_{\mathfrak{X}}(a)\right)\right) \\ &= d\left(\delta_{\Gamma C}(q), \nu_\Gamma\left(\pi_{\nu_{\mathbb{N}}(r)}\left(\pi_2(q)\right)\right)\left(\delta_{\mathfrak{X}}(a)\right)\right) \\ &= d\left(\delta_{\Gamma C}(q), \nu_\Gamma\left(\pi_{\nu_{\mathbb{N}}(r)}(b)\right)\left(\delta_{\mathfrak{X}}(a)\right)\right) \\ &= d\left(\delta_{\Gamma C}(q), \nu_\Gamma\left(z_n\right)\left(\delta_{\mathfrak{X}}(a)\right)\right) \\ &= d\left(u, \nu_\Gamma\left(z_n\right)(p(u))\right) \\ &< 2^{-n}. \end{aligned} \tag{4-19}$$

□

El siguiente teorema establece condiciones bastante generales bajo las cuales G, en el campo de espacios métricos (G,p,X), es un espacio T_0 efectivo. Puede ser entendido como una versión del Teorema de Existencia de Campos de Espacios Métricos.

Teorema 13. (Teorema de Existencia de Campos T_0 Efectivos de Espacios Métricos). *Si $\mathfrak{X} = (X,\tau,\beta,\nu)$ es un espacio T_0 efectivo, G un conjunto no vacío, $p : G \longrightarrow X$ una función sobreyectiva, d una métrica para p, Γ una colección enumerable de selecciones locales para p, $\nu_\Gamma :\subseteq \Sigma^* \longrightarrow \Gamma$ una notación para Γ con dominio recursivamente enumerable, tales que*

1. *Dados $u \in G$ y $n \in \mathbb{N}$, existe una selección local $\gamma \in \Gamma$ tal que $u \in \mathcal{T}_{2^{-n}}(\gamma)$.*
2. *Para todo par de selecciones $\gamma, \zeta \in \Gamma$ la función $\Phi_{\gamma\zeta} : dom(\gamma) \cap dom(\zeta) \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $\Phi_{\gamma\zeta}(t) = d(\gamma(t), \zeta(t))$, es semicontinua superiormente.*

Entonces G puede ser dotado de una topología τ_G de manera que

1. *La familia $\beta_G = \{\mathcal{T}_{2^{-n}}(\gamma_Q)\}$ donde n recorre los números naturales, γ recorre Γ y Q recorre los abiertos básicos que están contenidos en $dom(\gamma)$, es una base para τ_G. $\gamma_Q = \gamma \restriction_Q$ denota la restricción de γ al abierto Q.*
2. *Si $\gamma \in \Gamma$ entonces γ es sección.*
3. *(G,p,X) es un campo de espacios métricos.*
4. *Existe una notación $\nu_G :\subseteq \Sigma^* \longrightarrow \beta_G$ con dominio recursivamente enumerable de manera que $\mathfrak{G} = (G,\tau_G,\beta_G,\nu_G)$ es un espacio T_0 efectivo.*
5. *La proyección p es $(\delta_G,\delta_{\mathfrak{X}})$-computable.*

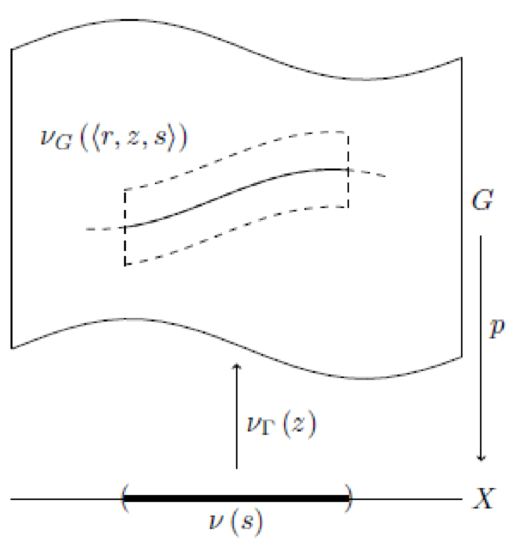
Demostración. El teorema de existencia de campos de espacios métricos garantiza que G puede ser dotado de una topología τ_G tal que β_G es una base para la topología, que los elementos de Γ son secciones para p, y que (G, p, X) es un campo de espacios métricos.

Ahora bien, sea $\nu_{\mathbb{N}} :\subseteq \Sigma^* \longrightarrow \mathbb{N}$ una notación estándar para $\mathbb{N}$ y sea ν_G la función definida de la siguiente manera:

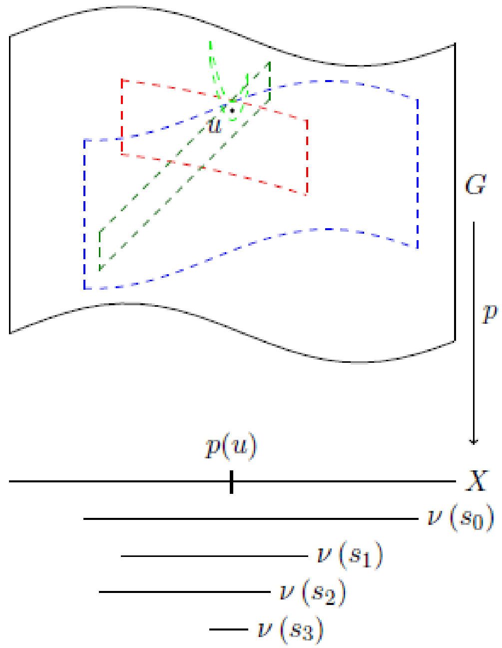
$$p \in dom\,(\nu_G) :\Longleftrightarrow (\exists r, z, s)\,((r, z, s) \in dom\,(\nu_{\mathbb{N}}) \times dom\,(\nu_\Gamma) \times dom(\nu) \wedge p = \langle r, z, s\rangle)$$

y

$$\nu_G(p) = \mathcal{T}_{2^{-n}}\,(\gamma_Q) :\Longleftrightarrow p = \langle r, z, s\rangle \wedge \nu_{\mathbb{N}}(r) = n \wedge \nu_\Gamma(z) = \gamma \wedge \nu(s) = Q.$$



Solo falta verificar que la proyección p es $(\delta_G, \delta_{\mathfrak{X}})$-computable. En efecto, sean $q \in dom\,(\delta_G)$ y $u \in G$ tales que $\delta_G(q) = u$. En tales condiciones q es una lista de todos los tubos en torno a secciones en Γ, que contienen a u y cuyo radio es de la forma $\frac{1}{2^m}$.



Se debe construir efectivamente un $\delta_{\mathfrak{X}}$-nombre para $p(u)$, es decir, una lista con todos los abiertos básicos en β_X que contienen a $p(u)$.

Nótese que si $q_k \in dom\,(\nu_G)$ y $\iota(q_k) \lhd q$, entonces $q_k = \langle r_k, z_k, s_k \rangle$, $s_k \in dom(\nu)$ y $\nu(s_k)$ es un abierto básico en X que contiene a $p(u)$. Es decir, una máquina que consume q mientras toma la tercera proyección s_k, en cada una de las subcadenas q_k tales que $\iota\,(q_k) \lhd q$, y escribe en la salida $\iota\,(s_k)$, es una máquina que calcula un $\delta_{\mathfrak{X}}$-nombre para $p(u)$ a partir de un δ_G-nombre para u.

$\square$

En adelante se supondrá que valen las hipótesis del teorema anterior: $\mathfrak{X} = (X, \tau, \beta, \nu)$ es un espacio T_0 efectivo, G un conjunto no vacío, $p : G \longrightarrow X$ una función sobreyectiva, d una métrica para p, Γ una colección enumerable de selecciones locales para p, $\nu_\Gamma :\subseteq \Sigma^* \longrightarrow \Gamma$ una notación para Γ con dominio recursivamente enumerable, tales que

1. Dados $u \in G$ y $n \in \mathbb{N}$, existe una selección local $\gamma \in \Gamma$ tal que $u \in \mathcal{T}_{2^{-n}}(\gamma)$.

2. Para todo par de selecciones $\gamma, \zeta \in \Gamma$ la función $\Phi_{\gamma\zeta} : dom\,(\gamma) \cap dom\,(\zeta) \longrightarrow \mathbb{R}$. definida por $\Phi_{\gamma\zeta}(t) = d\,(\gamma(t), \zeta(t))$, es semicontinua superiormente.

Teorema 14. $\delta_G \leq \delta_{\Gamma C}$.

Demostración. Sean $q \in dom\,(\delta_G)$ y $u \in G$ tales que $\delta_G(q) = u$. Como p es $(\delta_G, \delta_{\mathfrak{X}})$-computable, solo hace falta construir efectivamente una sucesión $\{\zeta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos en Γ tales $d_{p(u)}\,(u, \zeta_n(p(u))) < \frac{1}{2^n}$. Nótese que, si d es $(\delta_{\Gamma C}, \delta_{\Gamma C}, \rho)$-computable y $x = p(u)$, entonces la sucesión requerida constituye un δ_{G_x}-nombre para u como elemento del espacio métrico computable $\mathfrak{G}_x = (G_x, d_x, Q_x, \nu_x)$.

Para cada número $n \in \mathbb{N}$ basta hacer un recorrido sobre los $q_k = \langle r_k, z_k, s_k \rangle$ tales que $\iota(q_k) \lhd q$. El recorrido será interrumpido cuando se encuentre que $\nu_{\mathbb{N}}(r_k) = n$, en tal caso $\iota(z_k)$ se escribe en la salida.

El $\delta_{\Gamma C}$-nombre para u es $\langle a, b \rangle$, donde a es el $\delta_{\mathfrak{X}}$-nombre para $p(u)$ fabricado por la máquina del teorema anterior (la proyección p es $(\delta_G, \delta_{\mathfrak{X}})$-computable), y $b = \iota(z_0)\,\iota(z_1)\ldots$ codifica, mediante el cálculo descrito, una sucesión $\{\zeta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $\zeta_n = \nu_\Gamma(z_n)$. En el caso en que d es $(\delta_{\Gamma C}, \delta_{\Gamma C}, \rho)$-computable y $x = p(u)$, b es un δ_{G_x}-nombre para u.

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^\omega \arrow[r, "\delta_G"] \arrow[d, "F"'] & G \\
\Sigma^\omega \arrow[ur, "\delta_{\Gamma C}"'] &
\end{tikzcd}$$

La función traductora F es computable puesto que los cálculos de a, b y $\langle a, b \rangle$ pueden ser adelantados en paralelo.

□

Teorema 15. $\delta_{\Gamma C}$ es admisible.

Demostración. Se debe verificar que $\delta_{\Gamma C}$ no es ambigua (está bien definida), que es sobreyectiva, continua y universal[3].

1. $\delta_{\Gamma C}$ *no es ambigua.* A tal efecto, sean $u, v \in G$ y $q = \langle a, b \rangle \in \Sigma^\omega$ tales que $u \neq v$ y $\delta_{\Gamma C}(q) = u$. En estas condiciones se presentan dos casos:

   Si $p(u) \neq p(v)$ entonces existe $s \in dom(\nu)$ tal que $\nu(s)$ contiene a $p(u)$ o a $p(v)$ pero no a los dos. Se supondrá, sin pérdida de generalidad, que $p(u) \in \nu(s)$. Como $\iota(s) \lhd a$

[3]Una representación δ es universal o tiene la propiedad universal si toda función $\phi :\subseteq \Sigma^\omega \longrightarrow G$ es continuamente reducible a δ.

y $a = \pi_1(q)$, entonces a no es un $\delta_{\mathfrak{X}}$-nombre para $p(v)$ y por lo tanto q no puede ser un $\delta_{\Gamma C}$-nombre para v.

Si $p(u) = p(v)$ entonces $0 < d(u,v) < \infty$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-n} < \frac{1}{2} d(u,v)$. Como $\delta_{\Gamma C}(q) = u$ y $b = \iota(z_0)\,\iota(z1)\ldots$ son tales que $d(u, \nu_\Gamma(z_n)(p(u))) < 2^{-n}$, entonces $d(v, \nu_\Gamma(z_n)(p(v))) > 2^{-n}$ y por lo tanto q no puede ser un $\delta_{\Gamma C}$-nombre para v.

2. $\delta_{\Gamma C}$ *es sobreyectiva.* En efecto, si $u \in G$ existe $a \in dom(\delta_{\mathfrak{X}})$ tal que $\delta_{\mathfrak{X}}(a) = p(u)$. Además, si $n \in \mathbb{N}$ entonces existe $\zeta_n \in \Gamma$ tal que $d(u, \zeta_n(p(u))) < 2^{-n}$. Basta tomar $b = \iota(z_0)\,\iota(z_1)\ldots$ de manera que $z_n \in dom(\nu_\Gamma)$ y $\nu_\Gamma(z_n) = \zeta_n$, para tener que $q = \langle a, b\rangle$ es un $\delta_{\Gamma C}$-nombre para u.

3. $\delta_{\Gamma C}$ *es continua.* Sea A un abierto básico en G. Esto es $A = \mathcal{T}_{2^{-n}}(\zeta\restriction_V)$ para algún $n \in \mathbb{N}$, $\zeta \in \Gamma$ y $V \in \beta$. Así las cosas, existe $(r,z,s) \in dom(\nu_\mathbb{N}) \times dom(\nu_\Gamma) \times dom(\nu)$ tal que $A = \nu_G(\langle r,z,s\rangle) = \mathcal{T}_{2^{-\nu_\mathbb{N}(r)}}\left(\nu_\Gamma(z)\restriction_{\nu(s)}\right)$, es decir, tal que $\nu_\mathbb{N}(r) = n$, $\nu_\Gamma(z) = \zeta$, y $\nu(s) = V$.

Se demostrará que $\delta_{\Gamma C}^{-1}(A)$ es abierto en Σ^ω.

Sea $q = \langle a,b\rangle \in \delta_{\Gamma C}^{-1}(A)$ con $a = \iota(a_0)\,\iota(a_1)\ldots$ y $b = \iota(z_0)\,\iota(z_1)\ldots$.

Sean $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k_0 > \nu_\mathbb{N}(r)$ y

$$\frac{1}{2^{k_0}} < \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^n} - d(\delta_{\Gamma C}(q), \zeta(\delta_{\mathfrak{X}}(a)))\right),$$

$k_1 \geq k_0$ tal que $\nu(a_{k_1}) \cap dom(\zeta) \cap V \neq \emptyset$, y $k_2 \geq k_1$ tal que

$$\nu(a_{k_2}) \subseteq \left\{x \in X \mid d(\zeta(x), \nu_\Gamma(z_{k_0})(x)) < \frac{1}{2^{n+1}}\right\}.$$

Nótese que k_1 existe porque $\delta_{\mathfrak{X}}(a) \in dom(\zeta)$, y k_2 existe porque $\Phi_{\nu_\Gamma(z),\nu_\Gamma\left(z_{k_0}\right)}$ es semicontinua superiormente.

Sea $B = \langle \iota(a_0)\ldots\iota(a_{k_2}), \iota(z_0)\ldots\iota(z_{k_2})\rangle\,\Sigma^\omega \cap dom(\delta_{\Gamma C})$. Se debe verificar que $B \subseteq \delta_{\Gamma C}^{-1}(A)$ para tener que $\delta_{\Gamma C}^{-1}(A)$ contiene una vecindad de q.

Sea $q' = \langle a',b'\rangle \in B$ con $a' = \iota(a'_0)\,\iota(a'_1)\ldots$ y $b' = \iota(z'_0)\,\iota(z'_1)\ldots$.

Si $\delta_{\mathfrak{X}}(a) = \delta_{\mathfrak{X}}(a')$ entonces $\delta_{\Gamma C}(q') \in A$ pues

$$\begin{aligned} d\left(\delta_{\Gamma C}(q'), \zeta\left(\delta_{\mathfrak{X}}(a')\right)\right) &\leq d\left(\delta_{\Gamma C}(q'), \nu_{\Gamma}\left(z_{k_2}\right)(a)\right) + d\left(\nu_{\Gamma}\left(z_{k_2}\right)(a), \zeta\left(\delta_{\mathfrak{X}}(a)\right)\right) \\ &\leq d\left(\delta_{\Gamma C}(q'), \nu_{\Gamma}\left(z_{k_2}\right)(a)\right) + d\left(\nu_{\Gamma}\left(z_{k_2}\right)(a), \delta_{\Gamma C}(q)\right) \\ &\qquad + d\left(\delta_{\Gamma C}(q), \zeta\left(\delta_{\mathfrak{X}}(a)\right)\right) \\ &< \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2^n} - d\left(\delta_{\Gamma C}(q), \zeta\left(\delta_{\mathfrak{X}}(a)\right)\right)\right) + d\left(\delta_{\Gamma C}(q), \zeta\left(\delta_{\mathfrak{X}}(a)\right)\right) \\ &< 2^{-n}. \end{aligned} \tag{4-20}$$

Si $\delta_{\mathfrak{X}}(a) \neq \delta_{\mathfrak{X}}(a')$ entonces $\delta_{\Gamma C}(q') \in A$ pues $\delta_{\mathfrak{X}}(a') \in \nu(a_{k_2}) \cap dom(\zeta) \cap V$ y por lo tanto $d\left(\delta_{\Gamma C}(q'), \zeta\left(\delta_{\mathfrak{X}}(a')\right)\right) < \frac{1}{2^n}$.

Así $B \subseteq \delta_{\Gamma C}^{-1}(A)$, $\delta_{\Gamma C}^{-1}(A)$ es abierto, y $\delta_{\Gamma C}$ es continua.

4. $\delta_{\Gamma C}$ *es universal.* Supóngase que $\phi :\subseteq \Sigma^{\omega} \longrightarrow G$ es una función continua, que $\eta_G : \mathbb{N} \longrightarrow \beta_G$ es una enumeración de la base β_G, y que $\eta_X : \mathbb{N} \longrightarrow \beta$ es una enumeración de la base β. Se debe encontrar H continua tal que $\phi = \delta_{\Gamma C} \circ H$.

$$\begin{tikzcd} \Sigma^{\omega} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "H"'] & G \\ \Sigma^{\omega} \arrow[ur, "\delta_{\Gamma C}"'] & \end{tikzcd}$$

Sean $q \in dom(\phi)$, $u = \phi(q)$, y V un abierto en G que contiene a u.

Nótese que la continuidad de ϕ y de p implican que

$$\lim_{m\to\infty} \phi\left(q^{<m}\Sigma^{\omega}\right) = \{\phi(q)\}$$

y

$$\lim_{m\to\infty} p\left(\phi\left(q^{<m}\Sigma^{\omega}\right)\right) = \{p(\phi(q))\}.$$

Por lo tanto, para todo $k \in \mathbb{N}$, existen $n_k, j_k \in \mathbb{N}$ y $(r_{j_k}, z_{j_k}, s_{j_k}) \in dom\,(\nu_{\mathbb{N}}) \times dom\,(\nu_\Gamma) \times dom\,(\nu)$, tales que

$$\phi(q) \in \phi\left(q^{<n_k}\Sigma^\omega\right) \subseteq \eta_G\left(j_k\right) \subseteq V$$

con $\eta_G\left(j_k\right) = \nu_G\left(\langle r_{j_k}, z_{j_k}, s_{j_k}\rangle\right)$ y $\nu_{\mathbb{N}}\left(j_k\right) > k$.

Nótese que $d\left(u, \nu_\Gamma\left(z_{j_k}\right)(p(u))\right) < 2^{-k}$.

De la misma forma, para todo $k \in \mathbb{N}$, existen $m_k, i_k \in \mathbb{N}$ y $a_{i_k} \in dom(\nu)$ tales que

$$p(\phi(q)) \in p\left(\phi\left(q^{<m_k}\Sigma^\omega\right)\right) \subseteq \eta_X\left(i_k\right) \subseteq p(V).$$

Sean $H_a :\subseteq \Sigma^\omega \longrightarrow \Sigma^\omega$ y $H_b :\subseteq \Sigma^\omega \longrightarrow \Sigma^\omega$, con $dom\,(H_a) = dom\,(H_b) = dom(\phi)$, definidas por

$$H_a(q) = \iota\left(a_{i_0}\right)\iota\left(a_{i_1}\right)\ldots$$

y

$$H_b(q) = \iota\left(z_{j_0}\right)\iota\left(z_{j_1}\right)\ldots.$$

Sea $K \in \mathbb{N}$. Sean $M_K = \max\{m_0, \ldots, m_K\}$ y $N_K = \max\{n_0, \ldots, n_K\}$. Claramente el prefijo $\iota\left(a_{i_0}\right)\iota\left(a_{i_1}\right)\ldots\iota\left(a_{i_K}\right)$ de $H_a(q)$ depende únicamente del prefijo $q^{<M_K}$ de q, y el prefijo $\iota\left(z_{j_0}\right)\iota\left(z_{j_1}\right)\ldots\iota\left(z_{j_K}\right)$ de $H_b(q)$ depende únicamente del prefijo $q^{<N_K}$ de q. Luego H_a y H_b son continuas.

Sea $H :\subseteq \Sigma^\omega \longrightarrow \Sigma^\omega$ definida por $dom(H) = dom(\phi)$, y $H(q) = \langle H_a(q), H_b(q)\rangle$. $H(q)$ es un $\delta_{\Gamma C}$-nombre para $\phi(q)$, $\phi(q) = \delta_{\Gamma C}(H(q))$, y H es continua pues el prefijo $\langle \iota\left(a_{i_0}\right)\iota\left(a_{i_1}\right)\ldots\iota\left(a_{i_K}\right), \iota\left(z_{j_0}\right)\iota\left(z_{j_1}\right)\ldots\iota\left(z_{j_K}\right)\rangle$ de $H(q)$ solo depende del prefijo $q^{<\max\{M_K, N_K\}}$ de q.

Por lo tanto $\delta_{\Gamma C}$ es admisible.
□

4.4. Campos Computables de Espacios Métricos

En esta sección se entenderá que un campo de espacios métricos (G, p, X) es un campo computable de espacios métricos si el espacio fibrado G es un espacio topológico computable. A tal efecto se estudian las condiciones suficientes para que el espacio fibrado tenga estructura de espacio topológico computable.

En [37] y [38] se demuestra que si (G, p, X) es un campo de espcios métricos, entonces X es un espacio T_0 si y solo si G es un espacio T_0. Al adaptar uno de los resultados presentados en [46] donde se establece que es posible construir una representación admisible para un espacio T_0 con pseudobase enumerable, restringir la base enunciada en el teorema de existencia de campos de espacios métricos a la formada por los tubos de radio 2^{-n} con $n \in \mathbb{N}$, y suponer que la familia de selecciones locales es enumerable, se demuestra directamente el siguiente teorema de existencia de campos computables de espacios métricos.

Teorema 16. (Teorema de Existencia de Campos Computables de Espacios Métricos). *Sean $\mathfrak{X} = (X, \tau_{\mathfrak{X}})$ un espacio topológico T_0 y $\mathcal{B}_X$ una base enumerable para $\tau_{\mathfrak{X}}$, G un conjunto con cardinalidad no mayor a la del continuo, $p : G \longrightarrow T$ una función sobreyectiva, d una métrica para p y Γ una colección enumerable de selecciones locales para p.*

Supónganse las dos condiciones siguientes:

(a) *Dados $u \in G$ y $n \in \mathbb{N}$, existe una selección local $\alpha \in \Gamma$ de manera que $u \in \mathcal{T}_{2^{-n}}(\alpha)$.*

(b) *Para todo par de selecciones $\alpha, \beta \in \Gamma$ la función $\Phi_{\alpha\beta} : dom(\alpha) \cap dom(\beta) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\Phi_{\alpha\beta}(t) = d(\alpha(t), \beta(t))$ es semicontinua superiormente.*

Entonces G puede ser dotado de una topología $\tau_{\mathfrak{G}}$ de manera que

(1) *La familia $\mathcal{B}_G = \{\mathcal{T}_{2^{-n}}(\alpha_Q) \mid n \in \mathbb{N} \wedge \alpha \in \Gamma \wedge Q \in \mathcal{B}_X \wedge Q \subseteq dom(\alpha)\}$, con $\alpha_Q = \alpha \restriction_Q$, es una base enumerable para $\tau_{\mathfrak{G}}$.*

(2) *Si $\alpha \in \Gamma$ entonces α es sección.*

(3) *(G, p, X) es un campo de espacios métricos.*

(4) *Existe una representación $\tau_{\mathfrak{G}}$-admisible para G.*

Demostración. El teorema de existencia de campos de espacios métricos establece que (G, p, X) es un campo de espacios métricos, que si $\alpha \in \Sigma$ entonces α es sección, y que la familia $\mathcal{B}_G = \{\mathcal{T}_{2^{-n}}(\alpha_Q) \mid n \in \mathbb{N} \wedge \alpha \in \Sigma \wedge Q \in \mathcal{B}_X \wedge Q \subseteq dom(\alpha)\}$, con $\alpha_Q = \alpha \restriction_Q$, es una base enumerable para $\tau_{\mathfrak{G}}$.

Ahora bien, primero se demostrará que $\mathfrak{G} = (G, \tau_{\mathfrak{G}})$ es un espacio topológico T_0. En efecto, si $u, v \in G$ son tales que $u \neq v$, se presentan dos casos dependiendo de si $p(u) = p(v)$ o no.

Si $p(u) \neq p(v)$, como $\mathfrak{X}$ es T_0, sin pérdida de generalidad se supondrá que existe $Q \in \mathcal{B}_G$ tal que $p(u) \in Q$ y $p(v) \notin Q$. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \Gamma$ tal que $u \in \mathcal{T}_{2^{-n}}(\alpha \restriction_Q)$. Evidentemente $v \notin \mathcal{T}_{2^{-n}}(\alpha \restriction_Q)$.

Si $p(u) = p(v)$ basta suponer que $n \in \mathbb{N}$ es tal que $2^{-n} < \dfrac{1}{2} d(u, v)$. Nuevamente, basta tomar $Q \in \mathcal{B}_G$ tal que $p(u) \in Q$ y $u \in \mathcal{T}_{2^{-n}}(\alpha \restriction_Q)$ para tener que $v \notin \mathcal{T}_{2^{-n}}(\alpha \restriction_Q)$.

Por lo tanto $\mathfrak{G}$ es un espacio topológico T_0 con una base enumerable.

Ahora bien, supóngase que $\beta : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{B}_G$ es una enumeración para $\mathcal{B}_G$.

Sea $\delta :\subseteq \mathbb{Z}^\omega \longrightarrow G$ definida por $\delta(q) = u$ si y solo si[4]

$$(rang(q) \cap \mathbb{N} \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid u \in \beta(n)\}) \wedge ((A \in \tau_{\mathfrak{G}} \wedge u \in A) \Rightarrow (\exists n \in rang(q) \mid \beta(n) \subseteq A)). \tag{4-21}$$

En otras palabras, q es un δ-nombre para u si todos los números naturales que aparecen en q representan abiertos básicos (2^{-n}-tubos) que contienen a u y, además, para cada abierto A que contiene a u existe un abierto listado en q y contenido en A.

Se demostará ahora que δ es $\tau_{\mathfrak{G}}$-admisible.

En efecto, δ está bien definida puesto que si $u, v \in G$ son tales que $u \neq v$, entonces existe $A \in \tau_{\mathfrak{G}}$ que contiene a u o a v pero no a los dos. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $u \in A$ y $v \notin A$. Si $q \in \mathbb{Z}^\omega$ es tal que $\delta(q) = u$ entonces existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $u \in \beta(q_j) \subseteq A$. Como $v \notin A$, entonces q no puede ser un δ-nombre para v.

Por otra parte, nótese que δ es sobreyectiva puesto que todo elemento $q \in \mathbb{Z}^\omega$ tal que $rang(q) = \{n \in \mathbb{N} \mid u \in \beta(n)\}$ es un δ-nombre para u dado que $\mathcal{B}_G$ es una base para la topología $\tau_{\mathfrak{G}}$.

Ahora bien, δ es continua puesto que si $A \in \tau_{\mathfrak{G}}$ y $q \in \delta^{-1}(A)$ entonces existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $\beta(q_j) \subseteq A$ y, por lo tanto, δ es continua dado que $\delta(q^{<j+1}\mathbb{Z}^\omega) \subseteq \beta(q_j) \subseteq A$.

Solo falta verificar la universalidad de δ.

Sea $\phi :\subseteq \mathbb{Z}^\omega \longrightarrow G$ una función continua, y sean $q \in dom(\phi)$, $u = \phi(p)$ y $A \in \tau_{\mathfrak{G}}$ tal que $u \in A$.

Primero se demostrará que existen $i, n \in \mathbb{N}$ tales que $\phi(q^{<n}\mathbb{Z}^\omega) \subseteq \beta(i) \subseteq A$. Si no existieran tales números naturales, entonces para cada $m \in \mathbb{N}$ existiría $y_m \in \phi(q^{<m}\mathbb{Z}^\omega)$ tal que $y_m \notin \beta\left(m - \lfloor\sqrt{m}\rfloor^2\right)$ aunque $\beta\left(m - \lfloor\sqrt{m}\rfloor^2\right) \subseteq A$.

[4] Aquí $rang(q) = \{k \mid (\exists n \in \mathbb{N})(q_n = k)\}$.

Como ϕ es continua, la sucesión $(y_m)_m$ converge a u. Entonces existen números naturales j y m_0 tales que $\{u\} \cup \{y_m \mid m \geq m_0\} \subseteq \beta(j) \subseteq A$, dado que $\mathcal{B}_G$ es una base para $\tau_{\mathfrak{G}}$. Esto genera una contradicción al tomar $m = (m_0 + j)^2 + j$ puesto que $y_m \notin \beta(j)$.

Ahora bien, sea $F : \mathbb{Z}^\omega \longrightarrow \mathbb{Z}^\omega$ definida, para todo $q \in \mathbb{Z}$ y para todo $m \in \mathbb{N}$, como

$$F(q)(m) = \begin{cases} m - \lfloor \sqrt{m} \rfloor^2, & \text{si } \phi\left(q^{<m}\mathbb{Z}\right) \subseteq \beta\left(m - \lfloor \sqrt{m} \rfloor^2\right), \\ -1, & \text{en caso contrario.} \end{cases} \tag{4-22}$$

Entonces F es continua puesto que para cada $m \in \mathbb{N}$ el m-ésimo símbolo de $F(q)$ depende únicamente del prefijo $q^{<m}$.

Por otra parte, para todo $q \in dom\,(\phi)$ se tiene que

$$\begin{aligned} rang\,(F(p)) \cap \mathbb{N} &= \{i \in \mathbb{N} \mid (\exists n \in \mathbb{N})\, \phi\left(q^{<n}\mathbb{Z}^\omega\right) \subseteq \beta(i)\} \\ &\subseteq \{i \in \mathbb{N} \mid \phi(q) \in \beta(i)\}. \end{aligned} \tag{4-23}$$

Lo que permite concluir que $\delta(F(q)) = \phi(q)$ para todo $q \in dom(\phi)$. Luego δ tiene la propiedad universal y es admisible.

□


CALLE

5 Algoritmos sobre Grafos Dinámicos

La teoría de grafos ofrece modelos matemáticos con implementaciones computacionales para un amplio espectro de problemas de origen cotidiano. La versión clásica plantea modelos estáticos y soluciona los problemas considerados centrales en teoría de grafos, como el problema de ruta más corta (SPP[1]), el problema de árbol recubridor minimal (MST[2]), el problema de flujo máximo (MFP[3]), entre otros. Las soluciones propuestas son, por ejemplo, el Algoritmo de Dijkstra para encontrar la ruta más corta entre dos nodos de un grafo con costos no negativos [19]; el Algoritmo de Ford-Fulkerson para encontrar el flujo máximo entre dos nodos en un grafo con capacidades limitadas en sus arcos [21]; el Algoritmo de Kruskal [32] o el de Prim [42] para encontrar el árbol recubridor minimal en un grafo conexo; etc.

Evidentemente, una de las complicaciones que la realidad ofrece a estos problemas está relacionada con que la información real cambia constantemente. Por ejemplo, la longitud de las vías en una ciudad no constituye un conjunto de información suficiente para decidir la ruta que consumirá menos tiempo para ir de la residencia al lugar de trabajo en la mañana; y la ruta que resulta ser la más eficiente a una hora determinada suele no serlo en otro horario.

En general, los grafos en que parte de la información cambia con respecto a una variable se conocen como grafos dinámicos. Este capítulo está circunscrito a grafos dinámicos en que los costos en los arcos cambian con respecto a una variable continua, por ejemplo, el tiempo: grafos costeados dinámicamente.

El capítulo presenta los resultados publicados en [23] y está estructurado de la siguiente manera: la primera sección está dedicada a presentar rápidamente los conceptos básicos de teoría de grafos que serán utilizados; en la segunda sección se introduce el concepto de grafos costeados dinámicamente y se construye el campo de espacios métricos asociado a un grafo de esta naturaleza; en la tercera seccion se presenta el problema de ruta más corta en un grafo costeado dinámicamente y se proponen soluciones al mismo; y en la cuartá y última sección presenta lo propio con respecto al problema de flujo máximo.

[1] Por su nombre en inglés: Shortest Path Problem.
[2] Por su nombre en inglés: Minimum Spanning Tree.
[3] Por su nombre en inglés: Maximum Flow Problem.

5.1. Conceptos Básicos

En esta sección se presentan los conceptos básicos de la teoría de grafos que serán utilizados en el resto del capítulo. [18] es una de las muchas referencias naturales para profundizar en este tema.

Definición 43. (Grafos). Un *grafo* es una pareja de la forma $G = \langle V_G, E_G \rangle$ tal que V_G es un conjunto y $E_G \subseteq V_G \times V_G$. Los elementos de V_G son los *vértices (o nodos)* de G y los de E_G son los *arcos* de G. Si además se cuenta con una función $c_G : E_G \longrightarrow \mathbb{R}$ entonces $G = \langle V_G, E_G, c_G \rangle$ es un *grafo costeado* y c_G es la *función de costos de* G. Si c_G solo toma valores positivos se dice que G es un *grafo costeado positivamente.*

En este capítulo se supondrá que G es un grafo finito a menos que se especifique lo contrario, es decir, que V_G es un conjunto finito.

Definición 44. (Isomorfismo de grafos). Un isomorfismo entre dos grafos $G = \langle V_G, E_G \rangle$ y $H = \langle V_H, E_H \rangle$ es una función ψ tal que

1. $\psi : V_G \longrightarrow V_H$ es una función biyectiva, y
2. Para todo $(v_1, v_2) \in V_G \times V_G$, $e = (v_1, v_2) \in E_G \Longleftrightarrow e' = (\psi(v_1), \psi(v_2)) \in E_H$.

En estas condiciones se dice que los grafos G y H son *isomorfos* y se escribe $G \sim H$.

Nótese que un isomorfismo ψ induce una función biyectiva $\psi_E : E_G \longrightarrow E_H$ definida por $\psi_E((u, v)) = (\psi(u), \psi(v))$.

Definición 45. (Camino entre dos vértices). Sea $G = \langle V_G, E_G \rangle$ un grafo. Si v_1 y v_2 son vértices en V_G y $\beta = \langle w_1 \ldots w_n \rangle$ es una lista de vértices en V_G, se dice que β es un *camino de* v_1 *a* v_2 si y solo si

1. $w_1 = v_1$,
2. $w_n = v_2$, y
3. $(w_i, w_{i+1}) \in E_G$ para $i = 1, \ldots, n-1$.

Si, además, todos los vértices en β son diferentes, se dice que β es un *camino simple de* v_1 *a* v_2. Si $v_1 = v_2$ se dice que β es un *circuito* o *camino cerrado*.

En adelante se escribirá $\beta = \langle w_k \rangle_{k=i}^{j}$ para denotar el camino $\beta = \langle w_i \ldots w_j \rangle$.

Si G es un grafo costeado, entonces c_G puede ser extendida a todos los caminos en G de manera natural: Si $\beta = \langle w_1 \dots w_n \rangle$ es un camino entre w_1 y w_2, entonces

$$c_G(\beta) = \sum_{i=1}^{n-1} c_G(w_i, w_{i+1}). \tag{5-1}$$

Definición 46. (Conjunto de adyacencia). Sea $G = \langle V_G, E_G \rangle$ un grafo, y $v \in V_G$ un vértice de G. El conjunto de adyacencia de v es el conjunto de todos los vértices de G que pueden ser alcanzados en un solo paso desde v, esto es

$$adj(v) = \{w | (v, w) \in E_G\}. \tag{5-2}$$

5.2. Grafos costeados dinámicamente

En general, un grafo dinámico es un grafo en el que parte de la información cambia con respecto a una variable. Este capítulo está circunscrito a grafos dinámicos en el que los costos en los arcos cambian con respecto a una variable y el resto de la información permanece constante. Más formalmente, en adelante supondremos que $G = \langle V_G, E_G \rangle$ es un grafo, T es un espacio topológico, y, para cada $t \in T$, $c_t : E_G \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de costos para los arcos de G de manera que $G_t = \langle V_G, E_G, c_t \rangle$ es un grafo costeado.

Definición 47. (Grafos costeados dinámicamente). Sean $G = \langle V, E \rangle$ un grafo y T un espacio topológico. Sea C una familia, indizada por T, de funciones de costos para los arcos de G. Es decir, para cada $t \in T$, existe una única función $c_t : E \longrightarrow \mathbb{R}$ en C tal que $G_t = \langle V_G, E_G, c_t \rangle$ es un grafo costeado. Si, para cada arco $e \in E$, la función $k_e : T \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $k_e(t) = c_t(e)$ es continua, entonces se dice que $\mathfrak{G} = (G, C, T)$ es un *Grafo costeado dinámicamente* o *Grafo con costos dinámicos.*

Si todos los elementos de C toman valores no negativos, se dice que $\mathfrak{G} = (G, C, T)$ es un *Grafo costeado positiva y dinámicamente.*

En general, y a menos que se diga lo contrario, se supone que todos los elementos de C toman valores no negativos, es decir, que $\mathfrak{G} = (G, C, T)$ es un *Grafo costeado positiva y dinámicamente.*

Definición 48. (Caminos costeados dinámicamente). Si $\mathfrak{G} = (G, C, T)$ es un grafo costeado dinámicamente, $t_0 \in T$, $s : T \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow T$, y $\beta = \langle w_k \rangle_{k=0}^{q}$ es un camino en G, entonces el t_0-costo de β en $\mathfrak{G}$ relativo a s se define como

$$c^s_{t_0,\mathfrak{G}}(\beta) = \sum_{k=0}^{q-1} c_{t_k}(w_k, w_{k+1}) \tag{5-3}$$

donde $t_k = s\left(t_{k-1}, c_{t_{k-1}}\left(w_{k-1}, w_k\right)\right)$ para $k = 1, \ldots, q-1$.

Es importante notar que, siempre que la familia de funciones en C y s sean computables, entonces $c^s_{t_0,\mathfrak{G}}\left(\langle w_k\rangle_{k=0}^q\right)$ puede ser calculado mediante cualquiera de las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
c^s_{t_0,\mathfrak{G}}\left(\langle w_k\rangle_{k=0}^q\right) &= c_{t_0}\left(w_0, w_1\right) + c^s_{t_1,\mathfrak{G}}\left(\langle w_k\rangle_{k=1}^q\right) \\
&= c^s_{t_0,\mathfrak{G}}\left(\langle w_k\rangle_{k=0}^2\right) + c^s_{t_2,\mathfrak{G}}\left(\langle w_k\rangle_{k=2}^q\right) \\
&\vdots \\
&= c^s_{t_0,\mathfrak{G}}\left(\langle w_k\rangle_{k=0}^i\right) + c^s_{t_i,\mathfrak{G}}\left(\langle w_k\rangle_{k=i}^q\right) \\
&\vdots \\
&= c^s_{t_0,\mathfrak{G}}\left(\langle w_k\rangle_{k=0}^{q-1}\right) + c_{t_{q-1}}\left(w_{q-1}, w_q\right).
\end{aligned} \tag{5-4}$$

Si $\leq_T$ es una relación de orden sobre T y s es compatible con $\leq_T$ en el sentido en que $t \leq_T s(t, c)$ para todo $t \in T$ y para todo $c \in \mathbb{R}^+$, se genera un caso de particular interés puesto que incluye, por ejemplo, el caso en que $T = \mathbb{R}$ y $s(t, c) = t + c$ que permite modelar los cambios con respecto al tiempo.

5.2.1. Grafos costeados dinámicamente como campos de espacios métricos

En adelante se entenderá que $\mathfrak{G} = (G, C, T)$ es un grafo costeado dinámicamente tal que $G = \langle V_G, E_G\rangle$ es conexo.

Proposición 19. *Sea $\mathfrak{G} = (G, C, T)$ un grafo costeado dinámicamente tal que $G = \langle V_G, E_G\rangle$ es conexo. Para todo $t \in T$, sea $d_t : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}^+$ la función definida de manera que $d_t(v_1, v_2)$ es la longitud de la ruta más corta entre los vértices v_1 y v_2 en G según la función de costos c_t. En estas condiciones, para todo $t \in T$, $\mathfrak{V} = (V_G, d_t)$ es un espacio métrico que puede ser dotado de estructura de espacio métrico computable.*

Demostración. En primer lugar vale anotar que la función d_t puede ser calculada, por ejemplo, mediante el Algoritmo de Dijkstra [19] o el Algoritmo de Floyd-Warshall y por lo tanto es una función computable.

Claramente $d_t(v_1, v_2) = 0 \Leftrightarrow v_1 = v_2$ y $d_t(v_1, v_2) = d_t(v_2, v_1)$. La desigualdad triangular para d_t se obtiene al notar que, en todo grafo conexo,

$$Dijkstra(v1, v2) \leq Dijkstra(v1, v3) + Dijkstra(v3, v2). \tag{5-5}$$

Ahora bien, basta tomar $\nu_G : \mathbb{Z}_{|V_G|} \longrightarrow V_G$ una notación para V_G, y notar que d_t es computable sobre V_G, para tener que $\mathfrak{V} = (V_G, d_t, V_G, \nu_G)$ es un espacio métrico computable. $\square$

El siguiente teorema es una aplicación de los teoremas de existencia de campos de espacios métricos:

Teorema 17. *Sean $E = V_G \times T$, $\Sigma = \{\alpha_v : v \in V_G\}$ con $\alpha_v : T \longrightarrow E$ definida por $\alpha_v(t) = (v,t)$ para todo $t \in T$, y $d : E \times E \longrightarrow [0,+\infty]$ la función definida por $d\left((v_1,t_1),(v_2,t_2)\right) = +\infty$, si $t_1 \neq t_2$ y $d\left((v_1,t_1),(v_2,t_2)\right) = d_t(v_1,v_2)$ si $t_1 = t_2 = t$. Entonces (E,π_2,T) es un campo de espacios métricos, Σ es un conjunto pleno de secciones globales para π_2 y la familia de ϵ-tubos en torno a $\alpha_v \restriction_U$, donde $\epsilon > 0$, α_v recorre Σ y U recorre la colección de abiertos no vacíos de T, es una base para la topología de E.*

Demostración. Es claro que d es una métrica para π_2. Además, como para cada $v \in V$, $\pi_2\left(\alpha_v(t)\right) = \pi_2(v,t) = t$, entonces Σ es una familia de selecciones para π_2. Por otra parte, si $(v,t) \in E$, entonces $(v,t) = \alpha_v(t)$ y por lo tanto $(v,t) \in \mathcal{T}_\epsilon(\alpha_v)$ para todo $\epsilon > 0$.

Si $v_1, v_2 \in V$ y $\Phi_{v_1v_2} : T \longrightarrow [0,+\infty]$ se define por

$$\Phi_{v_1v_2}(t) = d\left(\alpha_{v_1}(t), \alpha_{v_2}(t)\right). \tag{5-6}$$

Como $\pi_2\left(\alpha_{v_1}(t)\right) = \pi_2\left(\alpha_{v_2}(t)\right)$, entonces $\Phi_{v_1v_2}(t) = d\left(\alpha_{v_1}(t), \alpha_{v_2}(t)\right) \neq +\infty$, y $\Phi_{v_1v_2}(t) = d\left(\alpha_{v_1}(t), \alpha_{v_2}(t)\right) = d_t(v_1,v_2)$.

Para cada camino simple, $\beta = \langle w_1 \dots w_q \rangle$, de v_1 a v_2 y para cada $t \in T$, sea $c_t(\beta) = \sum_{i=1}^{q-1} c_t\left((w_i, w_{i+1})\right)$ el costo del camino β en el grafo $\pi_2^{-1}(t)$, es decir, el costo del camino β con respecto a c_t.

En estas condiciones, dado que $k_{(w_i,w_{i+1})}$ es continua, es decir,

$$\lim_{u \to t} c_u\left((w_i, w_{i+1})\right) = c_t\left((w_i, w_{i+1})\right), \tag{5-7}$$

se tiene que

$$\lim_{u \to t} c_u(\beta) = \lim_{u \to t} \sum_{i=1}^{q-1} c_t\left((w_i, w_{i+1})\right) = c_t(\beta). \tag{5-8}$$

Por lo tanto, si $\beta_1, \dots, \beta_m$ son caminos de v_1 a v_2, la función

$$F_t(\beta_1, \dots, \beta_m) = \min_{i=1,\dots,m} \{c_t(\beta_i)\} \tag{5-9}$$

es continua en t.

Para completar las hipótesis del teorema de existencia de campos de espacios métricos, basta notar que, si $P(v_1,v_2)$ es el conjunto finito cuyos elementos son todos los caminos de v_1 a v_2 en G, entonces

$$\Phi_{v_1v_2}(t) = \min_{\beta \in P(v_1,v_2)} \{c_t(\beta)\}$$

es continua.

Esto permite concluir que $\mathbb{G} = (V_G \times T, \pi_2, T)$ es un campo de espacios métricos, Σ es un conjunto pleno de secciones globales para π_2 y la familia de ϵ-tubos en torno a $\alpha_v \upharpoonright_U$, donde $\epsilon > 0$, α_v recorre Σ y U recorre la colección de abiertos no vacíos de T, es una base para la topología de E. $\square$

Definición 49. (Campo de espacios métricos de un grafo costeado dinámicamente). El campo de espacios métricos $\mathbb{G}$ construido en el teorema anterior es el *Campo de Espacios Métricos del Grafo Costeado Dinámicamente* $\mathfrak{G}$ o el *Campo de Espacios Métricos de* $\mathfrak{G}$.

Proposición 20. *Sean $t_1, t_2 \in T$ y sean $\pi_2^{-1}(t_1)$ y $\pi_2^{-1}(t_2)$ las fibras correspondientes en $\mathbb{G}$. En este caso $G_{t_1} = \left\langle \pi_2^{-1}(t_1), E_G, c_{t_1} \right\rangle$ y $G_{t_2} = \left\langle \pi_2^{-1}(t_2), E_G, c_{t_2} \right\rangle$ son grafos isomorfos.*

Demostración. Basta notar que los dos grafos G_{t_1} y G_{t_2} tienen como conjunto de vértices y de arcos respectivamente a $\pi_2^{-1}(t_1) = \pi_2^{-1}(t_2) = V_G$ y E_G, para tener que $\Psi = id$ (la función identidad en V_G) establece un isomorfismo entre ellos. $\square$

5.3. El problema de ruta más corta sobre grafos costeados dinámicamente

La versión clásica del problema de la ruta más corta entre dos vértices de un grafo costeado puede ser formulada de la siguiente manera:

- **Instancia:** Un grafo conexo[4] y costeado positivamente[5] $G = \langle V_G, E_G, c_G \rangle$, y dos vértices $v_1, v_2 \in V_G$.
- **Respuesta:** Un camino $\beta = \langle w_k \rangle_{k=0}^{q_\beta}$, de v_1 a v_2, tal que $c_G(\beta) \leq c_G(\gamma)$, para todo camino $\gamma = \langle u_k \rangle_{k=0}^{q_\gamma}$, de v_1 a v_2.

Múltiples algoritmos pueden ser utilizados para solucionar este problema. Por ejemplo el Algortimo de Dijkstra [19].

Una situación completamente diferente se presenta al plantear y solucionar el problema en grafos costeados dinámicamente. En este caso el problema puede ser formulado de la siguiente manera:

[4]Un grafo $G = \langle V_G, E_G, c_G \rangle$ es *conexo* si para todo par de vértices $u_1, u_2 \in V_G$ existe un camino de u_1 a u_2.

[5]Es decir, tal que $c_G : E_G \longrightarrow \mathbb{R}^+$.

- **Instancia:** Un grafo costeado positiva y dinámicamente $\mathfrak{G} = (G, C, T)$ con base ordenada[6] y fibras conexas[7], dos vértices $v_1, v_2 \in V_G$, un elemento $t_0 \in T$, y una función $s : T \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow T$ compatible con el orden en T.

- **Respuesta:** Un camino $\beta = \langle w_k \rangle_{k=0}^{q_\beta}$ de v_1 a v_2, tal que $c^s_{t_0,\mathfrak{G}}(\beta) \leq c^s_{t_0,\mathfrak{G}}(\gamma)$, para todo camino $\gamma = \langle u_k \rangle_{k=0}^{q_\gamma}$ de v_1 a v_2.

Una solución tipo Programación Dinámica al problema se obtiene al proponer el cálculo de $D_{t_0}(v_1, v_2)$ mediante el cómputo de la función recursiva

$$D_t(u, w) = \min_{r \in adj(u)} \left\{ c_t(u, r) + D_{s(t, c_t(u,r))}(r, w) \right\}, \tag{5-10}$$

con $D_t(w, w) = 0$. Con la modificación natural en el paso de relajación, el cálculo de $D_{t_0}(v_1, v_2)$ tendrá como efecto de borde la construcción de un camino $\beta = \langle w_k \rangle_{k=0}^{q_\beta}$ que solucione el problema y tal que $D_{t_0}(v_1, v_2) = c^s_{t_0,\mathfrak{G}}(\beta)$.

Ejemplo 10. (Distribución de tráfico vehicular sin sobrepaso). Para modelar un problema de tráfico vehicular, en donde el costo real asociado a un arco del grafo G se entiende como el tiempo que toma recorrer dicho arco, basta tomar $T = \mathbb{R}^+$, $s(t, c) = t + c$ y definir $c_t(e)$ como el costo temporal de abordar el recorrido del arco e en el tiempo t, o, dicho de otra manera, el tiempo que consume el recorrido del arco e cuando este recorrido se inicia en el instante t.

Si, por ejemplo, se cuenta con una función que mide la longitud de las vías modeladas por cada uno de los arcos del grafo, y con una función que denota la velocidad promedio en cada una de las vías, esto es:

1. Para cada $e \in E_G$, $l(e)$ denota la longitud de la vía modelada mediante el arco e ($l : E_G \longrightarrow \mathbb{R}^+$), y

2. Para cada $e \in E_G$, v_e denota la velocidad promedio de un vehículo que se encuentra en la vía modelada por el arco e ($v_e : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$),

entonces, para cada $t \in \mathbb{R}^+$, la función c_t está completamente determinada por la expresión

$$\int_t^{c_t(e)} v(x)dx = l(e). \tag{5-11}$$

En este caso, el tiempo (costo temporal) asociado al camino $\beta = \langle w_1 \dots w_n \rangle$, cuando este es abordado en el tiempo $t = t_1$, está dado por

$$c_t(\beta) = \sum_{i=1}^{n-1} c_{t_i}((w_i, w_{i+1})) \tag{5-12}$$

[6] Esto es, tal que $(T, \leq_T)$ es un conjunto parcialmente ordenado.
[7] Esto es, tal que $G = \langle V_G, E_G, c_G \rangle$ es un grafo conexo.

donde $t_i = c_{t_{i-1}}(w_{i-1}, w_i)$ para $i = 2, \ldots, n-1$.

Nótese que el problema planteado de esta manera implica condiciones de no-sobrepaso, es decir, ningún vehículo que ingrese a una vía después que otro puede terminar el recorrido de la misma antes que el primer vehículo. Más formalmente, para todo arco $e \in E_G$ y para todo par de tiempos $t, t' \in \mathbb{R}^+$ con $t < t'$, se tiene que $c_t(e) + t \leq c_{t'}(e) + t'$.

Ahora bien, en términos de $\mathbb{G}$, el campo de espacios métricos de $\mathfrak{G}$, $c_t(u, w) = \tau$ se interpreta como la posibilidad de alcanzar, en un paso, el punto $(w, t+\tau)$ desde el punto (u, t). De esta manera $\mathbb{G}$ tiene asociado un grafo infinito $\mathcal{G} = \langle V_{\mathcal{G}}, E_{\mathcal{G}} \rangle$ donde

1. $V_{\mathcal{G}} = V_G \times \mathbb{R}^+$, y
2. $((u, t), (w, t')) \in E_{\mathcal{G}} \Longleftrightarrow (u, w) \in E_G \wedge t' = t + c_t((u, w))$.

Una caracterización de los arcos de $\mathcal{G}$, que resulta ser de utilidad en la solución del problema, en términos del conjunto de adyacencia de un vértice en $V_{\mathcal{G}} = V_G \times \mathbb{R}^+$, es

$$adj((u, t)) = \{(w, t') \mid t' = t + c_t((u, w))\}. \tag{5-13}$$

Así las cosas, encontrar el costo temporal de la ruta de costo temporal mínimo de u a w en $\mathfrak{G}$, para ser abordada en el instante t, es equivalente a encontrar el mínimo valor de τ tal que existe un camino de (u, t) a $(w, t+\tau)$ en $\mathcal{G}$.

Nótese que la función c_t se encarga de determinar las fibras que pueden ser alcanzadas desde un vértice y una fibra particular, es decir, se encarga de establecer las conexiones posibles entre puntos del fibrado.

Esta aproximación al problema sugiere, además de la solución tipo programación dinámica propuesta, una mediante la utilización de un algoritmo clásico de búsqueda en anchura en $\mathcal{G}$ a partir del nodo (u, t).

5.4. El problema de flujo máximo sobre grafos costeados dinámicamente

Cuando se tratan problemas relacionados con transporte usando grafos, el concepto de flujo aparece de manera natural como la cantidad de un material específico (partículas, fluido, vehículos, etc.) que puede ser movida de un vértice *origen* a un vértice *destino* respetando restricciones de capacidad.

Más formalmente, sean G un grafo conexo con vértices $V_G = \{v_1, \ldots, v_n\}$, y $v_1, v_n \in V_G$ dos vértices marcados respectivamente como *origen* y *destino*. Sea $w : E_G \longrightarrow \mathbb{R}^+$ una función de capacidades, es decir, w es tal que asocia a cada arco $(i,j) \in E_G$ el valor w_{ij} que será interpretado como la capacidad del arco (i,j). Se requiere determinar la colección de valores x_{ij} tales que

1. Para cada arco $(i,j) \in E_G$, $0 \leq x_{ij} \leq w_{ij}$.
2. Para cada vértice v_i con $1 < i < n$, $\sum_{k=1}^{n-1} x_{ki} = \sum_{k=2}^{n} x_{ik}$.
3. El valor $F = \sum_{k=2}^{n} x_{1k} = \sum_{k=1}^{n-1} x_{kn}$ es el más grande posible que respeta las dos restricciones anteriores.

Adicionalmente a la solución vía programación lineal, este problema ha sido estudiado en la teoría de grafos donde se proponen soluciones como el Algoritmo de Ford-Fulkerson [21] o el Algoritmo de Edmonds-Karp [20].

Una versión dinámica del problema de flujo máximo intenta determinar la máxima cantidad de material que puede ser enviada mediante una red (o grafo) G, desde el origen al destino, durante un periodo de tiempo $[t_0, t_1]$, asumiendo que la capacidad de los arcos cambia continuamente según una familia de funciones $w_{ij} : E_G \longrightarrow \mathbb{R}^+$.

La solución al problema de flujo máximo sobre grafos dinámicos puede ser aproximada definiendo la función $F : [t_o, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que, para todo $t \in [t_0, t_1]$, $F(t)$ es el valor del flujo máximo sobre el grafo G_t. Nótese que el valor de $F(t)$ puede ser determinado mediante el Algoritmo de Ford-Fulkerson [21] sobre el grafo G_t. En estas condiciones, la solución al problema original puede ser calculada mediante la expresión

$$MaxFlow_G\,(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} F(t)dt. \tag{5-14}$$

Para producir un algoritmo que compute efectivamente la solución al problema basta encontrar una partición $\{u_i\}_{i=0}^{n}$ del intervalo $[t_0, t_1]$, $t_0 = u_0 < u_1 < \ldots < u_n - 1 < u_n$, calcular los valores de $F_i = F\,(u_i)$ mediante un algoritmo clásico ([21]) sobre los grafos G_{u_i}, y aproximar la solución al problema mediante, por ejemplo, la Regla de Simpson:

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t)dt = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \left(F_i + F_{i+1}\right)\left(u_{i+1} - u_i\right). \tag{5-15}$$

Bibliografía

[1] S. Abramsky and A. Jung. Domain theory. *Handbook of Logic in Computer Science*, 3:1–168, 1985.

[2] Serafín Bautista and Januario Varela. Localización en campos de espacios uniformes separados. *Revista Colombiana de Matemáticas*, 35(1):29–49, 2001.

[3] Charles H. Bennett, Péter Gács, Ming Li, Paul M.B. Vitányi, and Wojciech H. Zurek. Information distance. *IEEE Transactions on Information Theory*, 44(4):1407–1423, 1998.

[4] Leonor Blum, Felipe Cucker, Michael Shub, and Steve Smale. *Complexity and Real Computation*. Springer-Verlag, 1997.

[5] Vasco Brattka. Computable invariance. *Theoretical Computer Science*, 210(1):3–20, 1999.

[6] Vasco Brattka. Plottable real number functions and the computable graph theorem. Informatik Berichte 300, FernUniversität in Hagen, Fachbereich Informatik, Hagen, July 2003.

[7] Vasco Brattka. Recursive quasi-metric spaces. *Theoretical Computer Science*, 305(1-3), 2003.

[8] Vasco Brattka and Gero Presser. Computability on subsets of metric spaces. *Theoretical Computer Science*, 305(1-3):43–76, 2003.

[9] Vasco Brattka and Klaus Weihrauch. Computability on subsets of Euclidean space I: Closed and compact subsets. *Theoretical Computer Science*, 219:65–93, 1999.

[10] Douglas S. Bridges. *Computability, A Mathematical Sketchbook*. Springer-Verlag New York, Inc., 1994.

[11] Francisco Cháves. *Utilisation et certification de l'arithmétique d'intervalles dans un assistant de preuves*. PhD thesis, École Normale Supérieure de Lyon, France, 2007.

[12] Pieter Collins. Continuity and computability of reachable sets. *Theoretical Computer Science*, 341(Issues 1–3):162–195, 2005.

[13] Nigel J. Cutland. *Computability, An Introduction to Recursive Function Theory.* Cambridge University Press, 1980.

[14] John Dauns and Karl Heinrich Hofmann. Representations of rings by sections. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 83:1–180, 1968.

[15] Rodrigo de Castro and Januario Varela. Localization in bundles of uniform spaces. *Revista Colombiana de Matemáticas*, XXIV(3-4):103–113, 1990.

[16] Gilma de Villamarín. Campos de espacios métricos. Master's thesis, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 1983.

[17] Gilma de Villamarín and Januario Varela. Localization in bundles of metric spaces. *Revista Colombiana de Matemáticas*, XVIII:99–108, 1984.

[18] Reinhard Diestel. *Graph Theory.* Springer Verlag Heidelberg, New York, 2005.

[19] Edsger W. Dijkstra. A note on two problemas in conexion with graphs. *Numerische Mathematik*, 1:269–271, 1959.

[20] Jack Edmonds and Richard M. Karp. Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems. *Journal of the ACM*, 19(2):248–264, 1972.

[21] Lester R. Ford and Delbert R. Fulkerson. Maximal flow through a network. *Canadian Journal of Mathematics*, 8:399–404, 1956.

[22] Rafael García. Campos de espacios métricos de funciones. Master's thesis, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia, 1998.

[23] Rafael García. Algorithms over dynamic graphs. *INFOCOMP Journal of Computer Science*, 10(1):01–07, 2011.

[24] Rafael García, Edilberto Reyes, and Januario Varela. A semicontinuous continuum. *Boletín de Matemáticas, Nueva Serie*, XII(1):1–18, 2005.

[25] Xiaolin Ge and Anil Nerode. Effective content of the calculus of variations I: Semicontinuity and the chattering lemma. *Annals of Pure and Applied Logic*, 78(1–3):127–146, 1996.

[26] Tanja Grubba and Klaus Weihrauch. On computable metrization. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 167(24 January 2007):345–364, 2006.

[27] Andrzej Grzegorczyk. Computable functionals. *Fundamenta Mathematicae*, 42:168–202, 1955.

[28] Andrzej Grzegorczyk. On the definitions of computable real continuous functions. *Fundamenta Mathematicae*, 44:61–71, 1957.

[29] Peter Hertling. Computable real functions: Type 1 computability versus type 2 computability. In *CCA*, 1996.

[30] Karl Heinrich Hofmann. Representations of algebras by continuous sections. *Bulletin AMS*, 78(3):291–373, 1972.

[31] Ker-I Ko. *Complexity Theory of Real Functions*. Progress in Theoretical Computer Science. Birkhauser Boston Inc., Cambridge, MA, 1991.

[32] Joseph B. Kruskal. On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 7(1):48–50, Feb. 1956.

[33] Ming Li, Jonathan H. Badger, Xin Chen, Sam Kwong, Paul E. Keaney, and Haoyong Zhang. An information-based sequence distance and its applications to whole mitochondrial genome phylogeny. *Bioinformatics*, 17 2:149–154, 2001.

[34] Ming Li, Xin Chen, Xin Li, Bin Ma, and Paul M.B. Vitányi. The similarity metric. *IEEE Transactions on Information Theory*, 50:3250–3264, 2004.

[35] Ming Li and Paul M.B. Vitányi. Reversibility and adiabatic computation: Trading time and space for energy. *Proc. Royal Society of London*, Series A(452):769–784, 1996.

[36] S. Mazur. *Computable Analysis*, volume 33. Razprawy Matematyczne, Warsaw, 1963.

[37] Clara Neira. *Sobre campos de espacios uniformes*. PhD thesis, Universidad Nacional de Colombia, Colombia, 2000.

[38] Clara Neira and Januario Varela. On separation axioms of uniform bundles and sheaves. *Applied General Topology*, 5(2):155–171, 2004.

[39] Clara Neira and Januario Varela. Localization with change of the base space in uniform bundles and sheaves. *Revista Colombiana de Matemáticas*, pages 1–8, 2007.

[40] Piergiorgio Odifreddi. *Classical Recursion Theory, Volume I*. North-Holland, 1990.

[41] Marian B. Pour-El and J. Ian Richards. *Computability in Analysis and Physics*. Perspectives in Mathematical Logic. Springer, Berlin, 1989.

[42] Robert C. Prim. Shortest connection networks and some generalisations. *Bell System Technical Journal*, pages 1389–1401, 1957.

[43] Edilberto Reyes. Representación por secciones de funciones semicontinuas. Master's thesis, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia, 1993.

[44] Hartley Jr. Rogers. *Theory of Recursive Functions and Effective Computability.* McGraw-Hill, 1967.

[45] Matthias Schröder. Effective metrization of regular spaces. In Ker-I Ko, Anil Nerode, Marian B. Pour-El, Klaus Weihrauch, and Jiri Wiedermann, editors, *Informatik Berichte*, volume 235, 1998.

[46] Matthias Schröder. Extended admissibility. *Theoretical Computer Science*, 284:519–538, 2002.

[47] Matthias Schröder. Admissible representacions in computable analysis. In A. Beckmann et al., editor, *CiE 2006, LNCS 3988*, pages 471–480. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.

[48] M. Smyth. Topology. In S. Abramsky, D. Gabbay, and T. Maibaum, editors, *Handbook of Logic in Computer Science*, volume 1, pages 641–761, Oxford, 1992. Clarendon Press.

[49] George J. Tourlakis. *Computability.* Reston Publishing Company, Inc., 1984.

[50] Januario Varela. Existence of uniform bundles. *Revista Colombiana de Matemáticas*, XVIII:1–8, 1984.

[51] Januario Varela. On the existence of uniform bundles. *Revista Colombiana de Matemáticas*, XXIX:95–101, 1995.

[52] Nikolai K. Vereshchagin and Michael V. Vyugin. Independent minimum length programs to translate between given strings. *Theoretical Computer Science*, 271:131–143, 2002.

[53] Klaus Weihrauch. *Computability.* Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[54] Klaus Weihrauch. *A Simple Introduction to Computable Analysis.* 1995.

[55] Klaus Weihrauch. *Computable Analysis: An Introduction.* Springer-Verlag New York, Inc., 2000.

[56] Klaus Weihrauch. Computational complexity on computable metric spaces. *Mathematical Logic Quarterly*, 49(1):3–21, 2003.

[57] Klaus Weihrauch. Computational separation in topology, from t_0 to t_2. *Journal of Universal Computer Science*, 16(18):2733–2753, 2010.

[58] Klaus Weihrauch and Tanja Grubba. Elementary computable topology. *Journal of Universal Computer Science*, 15(6):1381–1422, 2009.

[59] Klaus Weihrauch and Xizhong Zheng. Computability on continuous, lower semi-continuous and upper semi-continuous real functions. In Norbert Th. Müller Ker-I Ko and Klaus Weihrauch, editors, *CCA*, Trier, Germany, 1996.

[60] Klaus Weihrauch and Xizhong Zheng. Computability on continuous, lower semi-continuous and upper semi-continuous real functions. *Theoretical Computer Science*, 234(1-2):109–133, 2000.

[61] Mariko Yasugi, Takakazu Mori, and Yoshiki Tsujii. Effective properties of sets and functions in metric spaces with computability structure. *Theoretical Computer Science*, 219(Issue 1–2 (May 1999) Special issue on computability and complexity in analysis):467–486, 1999.

[62] Xizhong Zheng. *Effective Hierarchy of Real Numbers*. Shaker Verlag, Aachen, 2007.

[63] Xizhong Zheng, Vasco Brattka, and Klaus Weihrauch. Approaches to effective semi-continuity of real functions. *Mathematical Logic Quarterly*, 45:481–496, 1999.

[64] Ning Zhong and Klaus Weihrauch. Computability theory of generalized functions. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 50(4):469–505, 2003.

[65] Qing Zhou. Computable real-valued functions on recursive open and closed subsets of euclidean space. *Mathematical Logic Quarterly*, 42:379–409, 1996.

[66] Martin Ziegler. Computability on regular subsets of euclidean space. *Mathematical Logic Quarterly*, 48:157–181, 2002.

[67] Martin Ziegler. Computable operators on regular sets. *Mathematical Logic Quarterly*, 50:392–404, 2004.

Índice alfabético