

**FUNDAMENTOS DE LA TEORIA DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE  
COMPLEJA, IIV**

JAIRO A. CHARRIS

**CAPITULO X**

**CONVERGENCIA COMPACTA EN  $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$  Y  $\mathcal{O}(\Omega)$**

1. *Convergencia compacta en  $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ .* En este número  $\Omega$  será un espacio topológico localmente compacto. Por  $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$  entenderemos el  $\mathbb{R}$ -espacio de las funciones continuas  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_n$ . Si  $K$  es un subconjunto compacto de  $\Omega$  definimos :

$$\|f\|_K = \sup_{x \in K} \|f(x)\|, \quad x \in C(\Omega, \mathbb{R}_n).$$

Es inmediato que si  $f(x) = 0$  para todo  $x$ ,  $\|f\|_K = 0$ . Además

$$\|f + g\|_K \leq \|f\|_K + \|g\|_K$$

$$\|\lambda f\|_K = |\lambda| \|f\|_K, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Sin embargo  $\|f\|_K = 0$  no implica  $f = 0$ . Por esta razón  $\|\cdot\|_K$  no es una norma sobre  $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ . Diremos que  $\|\cdot\|_K$  es una *semi-norma*.

Cuando  $K$  recorre la clase de todos los conjuntos compactos de  $\Omega$ , las seminormas  $\| \cdot \|_K$  permiten definir una topología  $\tau_C$  sobre  $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ : la topología de la *convergencia compacta*. Para definir tal topología procederemos de la manera siguiente :

Primero : Si  $f \in C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ ,  $\varepsilon > 0$  y  $K$  es un compacto de  $\Omega$ , definimos :

$$U_{K, \varepsilon}(f) = \{ g \in C(\Omega, \mathbb{R}_n) \mid \| f - g \|_K < \varepsilon \}.$$

El conjunto  $U_{K, \varepsilon}(f)$  se denominará la *pseudo-bola abierta de base  $K$ , radio  $\varepsilon$ , y centro  $f$* . Luego diremos que un subconjunto  $V$  de  $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$  es una vecindad de  $f$ , si  $V$  contiene alguna pseudo-bola de centro en  $f$ . Es decir, si existen un compacto  $K \subseteq \Omega$ , y  $\varepsilon > 0$ , tales que :

$$V \supseteq U_{K, \varepsilon}(f).$$

Notaremos  $\mathcal{B}(f)$  al conjunto de todas las vecindades de  $f$  anteriormente definidas. El conjunto  $\mathcal{B}(f)$  tiene las siguientes propiedades, cuya demostración es inmediata :

(VI) Si  $U \in \mathcal{B}(f)$  y  $V \supseteq U$  entonces  $V \in \mathcal{B}(f)$ .

(VII)  $f \in V$  para todo  $V \in \mathcal{B}(f)$ .

(VIII) Si  $U, V \in \mathcal{B}(f)$ , también  $U \cap V \in \mathcal{B}(f)$ .

(IX) Si  $U \in \mathcal{B}(f)$ , existe  $W \in \mathcal{B}(f)$  tal que si  $g \in W$ ,  $U \in \mathcal{B}(g)$ .

(Basta, en (IX), tomar  $W = U_{K, \varepsilon}(f)$  la cual esté contenida en  $U$ , y comprobar que si  $g \in U_{K, \varepsilon}(f)$  y  $\delta = \varepsilon - \| f - g \|_K$ , entonces  $U_{K, \delta}(g) \subseteq U_{K, \varepsilon}(f)$ ).

Definimos ahora la topología  $\tau_C$  como la clase de todos los subconjuntos  $U \subseteq C(\Omega, \mathbb{R}_n)$  tales que  $U \in \mathcal{B}(f)$  para toda  $f \in U$ .

**Teorema 1.1.** El conjunto  $\tau_C$  tiene las siguientes propiedades :

- (1) Toda unión de elementos de  $\tau_C$  está de nuevo en  $\tau_C$ .
- (2) Toda intersección finita de elementos de  $\tau_C$  es un elemento de  $\tau_C$ .
- (3)  $\emptyset$  y  $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$  pertenecen a  $\tau_C$ .
- (4) Si  $K$  es un compacto de  $\Omega$ ,  $\varepsilon > 0$ , y  $f \in C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ ,  
 $U_{K, \varepsilon}(f) \in \tau_C$ .
- (5) Para que  $U$  esté en  $\mathcal{B}(f)$  es necesario y suficiente que exista  
 $V \in \tau_C$  tal que  $f \in V$  y  $V \in U$ .

**Demostración.** Inmediata.

Del teorema anterior se deduce inmediatamente que  $\tau_C$  es, en efecto, una topología sobre  $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ , y que  $\mathcal{B}(f)$  es el conjunto de las vecindades de  $f$  para tal topología.

**Definición 1.1.** Una sucesión  $\{K_n\}$  de compactos de  $\Omega$  se dice exhaustiva si :

- (a)  $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega$ .
- (b)  $K_n \subseteq \overset{\circ}{K}_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Un espacio topológico localmente compacto se dice *enumerable al infinito* si admite una sucesión exhaustiva de compactos. El siguiente resultado elemental es bien conocido :

**Teorema 1.2.** Todo abierto de  $\mathbb{R}_m$  es enumerable al infinito.

Tenemos ahora :

**Teorema 1.3.** Sea  $\Omega$  localmente compacto, enumerable al infinito. Si  $\{K_n\}$  es una sucesión exhaustiva de compactos de  $\Omega$ , y si  $\tau'$  es la topología so-

bre  $C(\Omega)$  definida como antes, pero usando sólo las seminormas

$$\|f\|_{K_n} = \sup_{x \in K_n} \|f(x)\|,$$

entonces  $\tau' = \tau_C$ .

**Demostración:** Claramente es suficiente demostrar que si  $\mathcal{B}'(f)$  es el conjunto de todos los  $U \subseteq C(\Omega, \mathbb{R}_n)$  tales que  $U \supseteq U_{K_n, \varepsilon}(f)$  para algún  $n$  y algún  $\varepsilon > 0$ , entonces  $\mathcal{B}'(f) = \mathcal{B}(f)$ . Ahora, es claro que  $\mathcal{B}'(f) \subseteq \mathcal{B}(f)$ . Para demostrar la inclusión recíproca, basta demostrar que si  $K$  es un compacto de  $\Omega$  y  $\varepsilon > 0$ , existen  $n$  y  $\delta > 0$  tales que  $U_{K, \varepsilon}(f) \supseteq U_{K_n, \delta}(f)$ . Pero si  $K$  es compacto, existe obviamente  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $K \subseteq K_n$ . De ésto,  $\sup_{x \in K} \|f(x)\| \leq \sup_{x \in K_n} \|f(x)\|$ , y basta tomar  $\varepsilon = \delta$  para tener la afirmación. Esto demuestra el teorema.

**Teorema 1.4.** Sea  $\Omega$  localmente compacto, enumerable al infinito. La topología  $\tau_C$  es metrizable. En otros términos, existe una métrica  $d$  sobre  $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ , tal que si  $\tau_d$  es su topología correspondiente,

$$\tau_d = \tau_C.$$

**Demostración.** Sea  $d$  definida sobre  $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$  por:

$$d(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\|f-g\|_{K_k}}{1 + \|f-g\|_{K_k}},$$

donde  $\{K_n\}$  es cualquier sucesión exhaustiva de compactos de  $\Omega$ . Es obvio que  $d$  es una métrica sobre  $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ . Escribamos  $\|f-g\|_n$  en lugar de  $\|f-g\|_{K_n}$ , y  $B_\varepsilon(f)$  para denotar a la bola abierta de radio  $\varepsilon > 0$  y centro  $f \in B_\varepsilon(f)$  para la topología  $\tau_d$ . Para demostrar la coincidencia de  $\tau_C$  y  $\tau_d$  es obviamente suficiente demostrar, para  $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$ , que:

(a) Si  $\varepsilon > 0$ , existen un compacto  $K$  de  $\Omega$  y  $\delta > 0$  tales que :

$$U_{K, \delta}(f) \subseteq B_{\varepsilon}(f).$$

(b) Si  $K$  es un compacto de  $\Omega$  y  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que :

$$B_{\delta}(f) \subseteq U_{K, \varepsilon}(f).$$

Demostremos primero (b). Sean  $0 < \varepsilon < 1$  y  $n$  lo suficientemente grande para que  $K \subseteq K_n$ . Sea  $g \in C(\Omega, \mathbb{R}_m)$  tal que  $\|f-g\|_n < \varepsilon$ . Entonces

$$\frac{1}{2} \|f-g\|_n < \frac{\|f-g\|_n}{1 + \|f-g\|_n} \leq 2^n d(f, g).$$

Si tomamos  $\delta = \varepsilon / 2^{n+1}$  se tiene inmediatamente que  $B_{\delta}(f) \subseteq U_{K, \varepsilon}(f)$ . Esto demuestra (b).

Demostremos (a): Sea  $\varepsilon > 0$ . Evidentemente existe  $n$  tal que :

$$\sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{\|f-g\|_m}{1 + \|f-g\|_m} < \varepsilon/2$$

para toda  $g \in C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ . Esto por ser  $\|f-g\|_{m/1} + \|f-g\|_m < 1$ . Por otra parte, por ser  $\frac{\|f-g\|_m}{1 + \|f-g\|_m} < \|f-g\|_m$ , se tiene

$$\sum_{m=1}^n \frac{1}{2^m} \frac{\|f-g\|_m}{1 + \|f-g\|_m} < \sum_{m=1}^n \frac{1}{2^m} \|f-g\|_m < \left( \sum_{m=1}^n \frac{1}{2^m} \right) \|f-g\|_n \leq \|f-g\|_n.$$

Se deduce que :

$$d(f, g) < \|f-g\|_n + \varepsilon/2$$

y de ésto que :

$$U_{K, \varepsilon/2}(f) \subseteq B_{\varepsilon}(f).$$

Esto demuestra (a) y completa la demostración del teorema.

**Corolario.** Para que un subconjunto  $\mathcal{F}$  de  $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$  sea cerrado para  $\tau_C$ , es necesario y suficiente que se cumpla la condición siguiente: si  $\{f_n\}$  es una sucesión de funciones en  $\mathcal{F}$ , y si  $f_n \rightarrow f$  para  $\tau_C$ , entonces  $f \in \mathcal{F}$ .

**Demostración.** En efecto, esta es la condición necesaria y suficiente para que un conjunto sea cerrado en un espacio métrico.

**Nota.** Evidentemente, decir que una sucesión  $\{f_n\}$  de funciones en  $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$  converge hacia  $f \in C(\Omega, \mathbb{R}_n)$  para  $\tau_C$  es equivalente a decir que  $f_n \rightarrow f$  uniformemente en compactos de  $\Omega$ ; o lo que es lo mismo, que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_K = 0$$

para todo  $K \subseteq \Omega$ ,  $K$  compacto.

**Definición 1.2.** Sea  $\Omega$  localmente compacto, enumerable al infinito. Una sucesión de funciones  $\{f_n\}$  en  $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$  se dice una sucesión de Cauchy para  $\tau_C$ , si para todo compacto  $K$  de  $\Omega$

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|f_n - f_m\|_K = 0.$$

**Nota.** En verdad no es costumbre hablar de sucesiones de Cauchy para una topología. El teorema siguiente justifica, sin embargo, esta terminología.

**Teorema 1.5.** Para que una sucesión  $\{f_n\}$  de  $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$  sea de Cauchy para  $\tau_C$ , es necesario y suficiente que para toda  $\{K_n\}$ , sucesión exhaustiva de compactos de  $\Omega$ ,  $\{f_n\}$  sea una sucesión de Cauchy para la métrica

$$d(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\|f - g\|_{K_n}}{1 + \|f - g\|_{K_n}}$$

**Demostración.** Sea  $\varepsilon > 0$  y sea  $n$  lo suficientemente grande para que  $\sum_{m=n}^{\infty} \left( \frac{1}{2^m} \cdot \frac{\|f-g\|_m}{1 + \|f-g\|_m} \right) < \varepsilon$ . Entonces  $d(f, g) < \|f-g\|_n + \varepsilon$ .

Si  $\{f_p\}$  es una sucesión de Cauchy para  $\tau_C$ ,  $\lim_{p, q \rightarrow \infty} d(f_p, f_q) \leq \varepsilon + \lim_{p, q \rightarrow \infty} \|f_p - f_q\|_n = \varepsilon$ . Como  $\varepsilon$  es arbitrario,  $\lim_{p, q \rightarrow \infty} d(f_p, f_q) = 0$ , y  $\{f_p\}$  es una sucesión de Cauchy para  $d$ . Recíprocamente

$$\frac{\|f_p - f_q\|_n}{1 + \|f_p - f_q\|_n} < 2^n d(f_p, f_q).$$

Por lo tanto, si  $\{f_p\}$  es de Cauchy para  $d$ ,

$$\lim_{p, q \rightarrow \infty} \frac{\|f_p - f_q\|_n}{1 + \|f_p - f_q\|_n} = 0.$$

Esto implica que  $\lim_{p, q \rightarrow \infty} \|f_p - f_q\|_n = 0$  y completa la demostración.

**Teorema 1.6.** Sea  $\Omega$  localmente compacto, enumerable al infinito. Entonces el espacio  $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$  es completo para la topología de la convergencia compacta. Es decir, si  $\{f_n\}$  es una sucesión de Cauchy para  $\tau_C$ , existe  $f$  en  $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$  tal que  $f_n \rightarrow f$  en compactos.

La demostración resultara inmediatamente de los dos lemas siguientes :

**Lema 1.1.** Si  $\{f_n\}$  es una sucesión en  $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$  y  $f_n \rightarrow f$  en compactos, entonces  $f \in C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ .

**Demostración.** Sea  $K$  una vecindad compacta de  $a \in \Omega$ . Para  $x \in K$ ,

$$\|f(a) - f(x)\| \leq \|f(a) - f_k(a)\| + \|f_k(x) - f(a)\| + \|f_k(a) - f_k(x)\| \\ \|f_k(a) - f_k(x)\|.$$

Si  $\varepsilon > 0$ , para  $k \geq k_0$ ,  $k_0$  lo suficientemente grande,

$$\|f - f_k\|_K < \varepsilon/2$$

de lo cual,

$$\|f(a) - f(x)\| < \varepsilon + \|f_k(a) - f_k(x)\|.$$

Como  $f_k$  es continua,

$$\lim_{x \rightarrow a} \|f(a) - f(x)\| \leq \varepsilon + \lim_{x \rightarrow a} \|f_k(a) - f_k(x)\| = \varepsilon.$$

Se deduce que

$$\lim_{x \rightarrow a} \|f(a) - f(x)\| = 0$$

y de ésto la afirmación.

**Lema 1.2.** Sea  $f_n$  una sucesión de Cauchy en  $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$  para  $r_C$ . Entonces para todo  $x \in \Omega$ ,  $\{f_n(x)\}$  es una sucesión de Cauchy en  $\mathbb{R}_n$ ; y si  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_n$  está definida por  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ ,  $f_n \rightarrow f$  en compactos.

**Demostración.** Como

$$\|f_n(x) - f_m(x)\| = \|f_n - f_m\|_{\{x\}}$$

y  $\{x\}$  es compacto, se deduce que

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|f_n(x) - f_m(x)\| = 0$$

y  $\{f_n(x)\}$  es entonces una sucesión de Cauchy en  $\mathbb{R}_n$ . Sean  $K$  un compacto de  $\Omega$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $N, M > 0$  tales que  $\|f_n - f_m\|_K < \varepsilon$  si  $n \geq N$  y  $m \geq M$ . Si  $x \in K$ ,

$$\|f_n(x) - f(x)\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|f_n(x) - f_m(x)\|$$

Por lo tanto, si  $n \geq N$ ,

$$\|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$$

por ser

$$\|f_n(x) - f_m(x)\| < \|f_n - f_m\|_K < \varepsilon$$

cuando  $m \geq M$ . Como  $x \in K$  es arbitrario,

$$\|f_n - f\|_K = \sup_{x \in K} \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$$

para  $n \geq N$ , y la afirmación resulta de esto.

## 2. Convergencia compacta en $\mathcal{O}(\Omega)$ .

**Teorema 2.1.**  $\mathcal{O}(\Omega)$  es un  $C$ -subespacio cerrado de  $C(\Omega, C)$  para  $r_C$ .

**Demostración.** Nótese en primer lugar que una función  $f \in C(\Omega, C)$  es holomorfa en  $\Omega$  si y sólo si la restricción de  $f$  a todo subconjunto abierto convexo  $\Omega' \subseteq \Omega$  es holomorfa en  $\Omega'$ . Sea entonces  $\{f_n\}$  una sucesión en  $\mathcal{O}(\Omega)$  y supóngase que  $f_n \rightarrow f$  en compactos de  $\Omega$ . Sea  $\Omega'$  un abierto convexo de  $\Omega$ . Para demostrar que  $f$  es holomorfa en  $\Omega'$  basta demostrar que si  $\rho \in S_1(\Omega')$  es cerrada,

$$\int_{\rho} f dz = 0.$$

Pero si  $K = \text{Im } \rho$ ,  $K$  es compacto, y

$$\left| \int_{\rho} f dz - \int_{\rho} f_n dz \right| \leq \sup_{x \in K} |f(x) - f_n(x)| \int_0^1 |\rho'(t)| dt,$$

de lo cual,

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\rho} f_n dz = \int_{\rho} f dz.$$

Esto demuestra el teorema.

Denotemos por  $\tau'_C$  a la restricción a  $\mathcal{O}(\Omega)$  de la topología  $\tau_C$  de  $C(\Omega, \mathbb{C})$ .  $\tau'_C$  se denomina la *topología de la convergencia compacta sobre  $\mathcal{O}(\Omega)$* , y esta definida por las seminormas

$$\|f\|_K = \sup_{z \in K} \|f(z)\|,$$

donde  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$  y  $K$  es un subconjunto compacto de  $\Omega$ .

*Nota.* Claramente  $\tau'_C$  es la restricción a  $\mathcal{O}(\Omega)$  de  $\tau_d$ , donde  $d$  es la métrica asociada a una sucesión exhaustiva de compactos de  $\Omega$ .

**Teorema 2.2.**  $\mathcal{O}(\Omega)$  es un espacio métrico completo. Es decir, toda sucesión de Cauchy en  $\mathcal{O}(\Omega)$  para  $\tau_C$  es convergente para dicha topología.

*Demostración.* Como  $\{f_n\}$  es una sucesión de Cauchy en  $C(\Omega, \mathbb{C})$  para  $\tau'_C$ ,  $f_n \rightarrow f \in C(\Omega, \mathbb{C})$  para  $\tau_C$ . Como  $\mathcal{O}(\Omega)$  es cerrado,  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$  y  $f_n \rightarrow f$  para  $\tau'_C$ . El teorema está demostrado.

El siguiente teorema jugará un papel importante en el próximo capítulo. Como veremos también, más adelante, implica una interesantísima coincidencia de topologías sobre  $\mathcal{O}(\Omega)$ . Recordamos primero el siguiente lema, demostrado en el capítulo VI.

**Lema 2.1.** Sea  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ . Si definimos inductivamente

$$\begin{aligned} f^{(0)} &= f \\ f^{(k)} &= (f^{(k-1)})', \end{aligned}$$

para  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f^{(k)}$  siempre existe y  $f^{(k)} \in \mathcal{O}(\Omega)$ . Además, si  $a \in \Omega$  y  $B_\varepsilon(a) \subseteq \Omega$ , entonces, para todo  $b \in B_\varepsilon(a)$ ,

$$f^{(k)}(b) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon(a)} \frac{f(z)}{(z-b)^{k+1}} dz.$$

Tenemos entonces :

**Teorema 2.3.** (Weierstrass). Sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones en  $\mathcal{O}(\Omega)$ , y supongamos que  $f_n \rightarrow f$  uniformemente en compactos de  $\Omega$ . Entonces, para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f_n^{(k)}$  converge uniformemente en compactos de  $\Omega$ .

**Demostración.** Demostremos primero que  $f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$  sobre toda bola cerrada  $B_r(a)$  tal que  $B_r(a) \subseteq \Omega$ . Una vez hecho esto la afirmación resultará para todo compacto  $K \subseteq \Omega$ , pues  $K$  puede ser recubierto por un número finito de tales bolas, y si  $B_1, \dots, B_p$  recubren a  $K$ ,

$$\|f_n^{(k)} - f^{(k)}\|_K \leq \sum_{k=1}^p \|f_n^{(k)} - f^{(k)}\|_{B_k}$$

de lo cual la afirmación. Sea entonces  $B_r(a) \subseteq \Omega$ , y sea  $s > r$  tal que  $B_s(a)$  esté aún contenida en  $\Omega$ . Como  $B_r(a) \subseteq B_s(a)$ , para todo  $b \in B_r(a)$

$$f_n^{(k)}(b) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{C_s(a)} \frac{f_n(z)}{(z-b)^{k+1}} dz.$$

Pero, para  $z \in \text{Im } C_s(a)$ ,  $|z-b| \geq |s-r| > 0$ .

Por lo tanto,

$$|f_n^{(k)}(b) - f^{(k)}(b)| \leq \frac{k!}{2\pi i} \frac{1}{|s-r|^{k+1}} \sup_{z \in B_s(a)} |f_n(z) - f(z)| \approx (2\pi s)^k,$$

O sea :

$$\sup_{b \in B_r(a)} |f_n^{(k)}(b) - f^{(k)}(b)| \leq \frac{sk!}{|s-r|^{k+1}} \|f_n - f\|_{B_r(a)}.$$

Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{B_S(a)} = 0,$$

también

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n^{(k)} - f^{(k)}\|_{B_r(a)} = 0,$$

y el teorema está demostrado.

**Definición 2.1.** Una serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  de funciones en  $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ ,  $\Omega$  abierto en  $\mathbb{R}_m$ , se dice convergente para  $\tau_C$ , si la sucesión

$$g_m = \sum_{m=1}^n f_n$$

es convergente para  $\tau_C$ . Claramente se tiene, entonces, el siguiente corolario del anterior teorema :

**Corolario.** Sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones en  $\mathcal{O}(\Omega)$ , y supóngase que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  converge uniformemente en compactos hacia  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ . Entonces, para todo  $k \in \mathbb{N}$ , la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$$

converge uniformemente, en compactos, hacia  $f^{(k)}$ .

También se tienen, evidentemente, los siguientes resultados :

**Teorema 2.4.** Para que una serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  de funciones en  $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$  sea convergente para  $\tau_C$  es necesario y suficiente que la sucesión

$$g_{mn} = \sum_{k=m}^{m+n} f_k$$

sea convergente a cero para  $\tau_C$  cuando  $(m, n) \rightarrow \infty$ .

**Teorema 2.5.** Sea  $\Omega$  abierto en  $C$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  una serie de funciones en  $\mathcal{O}(\Omega)$ . Entonces, si  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  converge en compactos de  $\Omega$ , la función

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

es holomorfa en  $\Omega$ .

**Teorema 2.6.** Sea  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  una serie de funciones en  $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ , la cual es convergente en compactos. Entonces, la sucesión  $\{f_n\}$  es convergente, en compactos, a 0.

**Teorema 2.7.** Sea  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  una serie de funciones en  $C(\Omega, \mathbb{R})$  convergente en compactos, y sea  $\rho \in S_1(\Omega)$ . Sea  $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ . Entonces

$$\int_{\rho} f dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\rho} f_n dz.$$

Si, por otra parte,  $\sigma \in S_2(\Omega)$ ,

$$\int_{\sigma} f dz \wedge d\bar{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\sigma} f_n dz \wedge d\bar{z}.$$

### 3. Convergencia simple y convergencia absoluta. Convergencia absoluta en compactos.

Sea  $\Omega$  un espacio topológico localmente compacto, enumerable al infinito.

**Definición 3.1.** Una sucesión de funciones  $f_n \in C(\Omega, \mathbb{R}_n)$  se dice *simplemente convergente* en  $\Omega$ , si existe una función  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_n$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x),$$

para todo  $x \in \Omega$ .

Una serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  se dice *simplemente convergente* en  $\Omega$  si la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  es convergente en  $\Omega$ .

**Teorema 3.1.** Si una sucesión o una serie de funciones es convergente en compactos, entonces es simplemente convergente.

*Demostración.* Inmediata.

**Definición 3.2.** Si para todo compacto  $K$  de  $\Omega$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_K$$

es convergente,  $\sum f_n$  se dice absolutamente convergente en compactos.

**Teorema 3.2.** Si una sucesión o una serie de funciones es absolutamente convergente en compactos, entonces es absolutamente convergente.

*Demostración.* Inmediata.

**Teorema 3.3.** Si una serie de funciones es absolutamente convergente entonces es simplemente convergente.

*Nota.* Nótese que si  $\{f_n\}$  es una sucesión de funciones en  $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x)| = f(x)$ , no es posible concluir que exista el límite simple de  $\{f_n\}$ .

**Teorema 3.4.** Si  $\sum f_n$  es absolutamente convergente en compactos entonces es uniformemente convergente en compactos.

*Demostración:* Clara.

#### 4. El Teorema de Liouville y el teorema fundamental del álgebra.

El lema 2.1 del N° 2 tiene una importante consecuencia.

**Teorema 4.1.** (Estimativas de Cauchy). Sean  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$  y  $a \in \Omega$ . Entonces, para todo  $r > 0$  tal que  $B_r(a) \subseteq \Omega$ ,

$$\frac{1}{n!} |f^{(n)}(a)| \leq \frac{M(r)}{r^n}$$

donde

$$M(r) = \sup_{|z-a|=r} |f(z)|.$$

**Demostración:** En efecto,

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz.$$

De esto,

$$\frac{1}{n!} |f^{(n)}(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \sup_{|z-a|=r} |f(z)| \cdot \frac{1}{r^n} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{M(r)}{r^n}.$$

Esto demuestra el teorema.

Tenemos entonces:

**Teorema 4.2.** (Liouville). Si  $f \in \mathcal{O}(C)$  y si existe  $M > 0$  tal que  $|f(z)| \leq M$  para todo  $z \in C$ , entonces  $f$  es constante en  $C$ .

**Demostración.** En efecto, para todo  $r > 0$  y todo  $a \in C$ ,

$$|f'(a)| \leq \frac{M(r)}{r} \leq \frac{M}{r}.$$

Por lo tanto,

$$|f'(a)| = \lim_{r \rightarrow \infty} |f'(a)| \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M}{r} = 0,$$

de lo cual  $f'(a) = 0$ . Esto demuestra el teorema.

Como consecuencia del teorema de Liouville es posible dar una demostración del teorema fundamental del álgebra. Recordamos que por un polinomio en  $C$  se entiende una aplicación  $f: C \rightarrow C$  de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^m a_n z^n, \quad a_k \in C, \quad m \in \mathbf{N}.$$

Es claro que  $C[z] \subseteq \mathcal{O}(C)$ , donde  $C[z] = \{f: C \rightarrow C \mid f \text{ es un polinomio}\}$

en  $C$ }, y que  $C[z]$  es un  $C$ -subespacio de  $\mathcal{O}(C)$ . Es además fácil de ver (Ejercicio 8) que si  $f \in C[z]$ , sólo hay dos alternativas para  $f$ : que  $f(z) = a_0$  para todo  $z \in C$ , o que

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |f(z)| = +\infty.$$

En el segundo caso se dice que  $f$  tiene grado  $\geq 1$ . Se tiene entonces:

**Teorema 4.3.** (Teorema fundamental del álgebra). Si  $f \in C[z]$  tiene grado  $\geq 1$ , existe entonces  $\alpha \in C$  tal que  $f(\alpha) = 0$ .

**Demostración.** Supongamos  $f(z) \neq 0$  para todo  $z \in C$ , y sea  $g(z) = 1/f(z)$ . Como  $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |f(z)| = +\infty$ , necesariamente  $g$  es acotada en  $C$ . Como además  $g \in \mathcal{O}(C)$ , entonces  $g$ , y por lo tanto  $f$ , son constantes. Este absurdo demuestra el teorema.

## 5. Equicontinuidad.

**Definición 5.1.** Un subconjunto  $\mathcal{F} \subseteq C(\Omega, \mathbb{R}_n)$  se dice equicontinuo en un punto  $a \in \Omega$  si, dado  $\varepsilon > 0$ , existe una vecindad  $V$  de  $a$ , tal que

$$\|f(a) - f(x)\| < \varepsilon$$

para toda  $f \in \mathcal{F}$  y todo  $x \in V$ .

En otras palabras,  $\mathcal{F}$  es equicontinua en  $a$  si, para todo  $\varepsilon > 0$ , es posible encontrar una vecindad  $V$  de  $a$  tal que

$$V \subseteq \bigcap_{f \in \mathcal{F}} f^{-1}(B_\varepsilon(f(a))),$$

o lo que es lo mismo, que, para todo  $\varepsilon > 0$ ,

$$\bigcap_{f \in \mathcal{F}} f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$$

es una vecindad de  $a$ .

**Definición 5.2.** Si  $\mathcal{F}$  es equicontinuo en todo punto  $a \in \Omega$ , diremos  $\mathcal{F}$  es equicontinuo en  $\Omega$ , o simplemente, que  $\mathcal{F}$  es equicontinuo.

Como  $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$  es, cuando  $\Omega$  es enumerable al infinito, un espacio métrico, para que un subconjunto  $\mathcal{F} \subseteq C(\Omega, \mathbb{R}_n)$  sea relativamente compacto, es necesario y suficiente que de toda sucesión  $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$  se pueda extraer una subsucesión  $\{f_{n_k}\}$  tal que  $f_{n_k} \rightarrow f \in C(\Omega, \mathbb{R}_n)$  para  $\tau_C$ . Sea  $\mathcal{F}$  un subconjunto relativamente compacto de  $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ . Entonces, para todo  $a \in \Omega$ ,  $\mathcal{F}(a) = \{f(a) \mid f \in \mathcal{F}\}$  es relativamente compacto en  $\mathbb{R}_n$ . En efecto, si  $a_n = f_{n_k}(a) \in \mathcal{F}(a)$  y si  $f_{n_k}$  es una subsucesión de  $f_n$  convergente en compactos hacia  $f$ ,  $a_{n_k}$  es una subsucesión de  $a_n$  convergente hacia  $a = f(a)$ . Por otra parte :

**Teorema 5.1.** Si  $\Omega$  es localmente compacto y  $\mathcal{F}$  es relativamente compacto,  $\mathcal{F}$  es equicontinuo.

**Demostración.** Sean  $a \in \Omega$ ,  $\varepsilon > 0$ . Sea  $\varepsilon' = \varepsilon/3$ . Sea  $K$  una vecindad compacta de  $a$ . Claramente existen  $f_1, \dots, f_n$  en  $\mathcal{F}$  tales que  $\{U_{K, \varepsilon'}(f_k) \mid k = 1, 2, \dots, n\}$  es un recubrimiento de  $\mathcal{F}$ . Como cada  $f_k$  es continua en  $a$ , existe una vecindad  $V_k$  de  $a$  tal que  $f_k(x) \in B_{\varepsilon'}(f_k(a))$  si  $x \in V_k$ . Sea  $V' = \bigcap_{k=1}^n V_k$ . Si  $x \in V'$ ,  $f_k(x) \in B_{\varepsilon'}(f_k(a))$  para todo  $k = 1, 2, \dots, n$ . Sea ahora  $f \in \mathcal{F}$  arbitrario. Entonces  $f \in U_{K, \varepsilon'}(f_k)$  para algún  $k$ . De esto,  $\|f(x) - f_k(x)\| < \varepsilon'$  para todo  $x \in K$ . Ahora,

$$\|f(x) - f(a)\| \leq \|f(x) - f_k(x)\| + \|f_k(x) - f_k(a)\| + \|f_k(a) - f(a)\|.$$

Por lo tanto,

$$\|f(x) - f(a)\| < 3\varepsilon = \varepsilon,$$

si  $x \in V = V' \cap K$ . Esto demuestra el teorema.

Recíprocamente (véanse antes los ejercicios 25 y 26):

**Teorema 5.2.** (Ascoli - Arzelá). Si  $\Omega$  es un espacio localmente compacto, y si  $\mathcal{F}$  es un subconjunto de  $C(\Omega, \mathbb{R}_m)$  tal que

- 1)  $\mathcal{F}$  es equicontinuo.
- 2) Para todo  $a \in \Omega$ ,  $\mathcal{F}(a)$  es relativamente compacto en  $\mathbb{R}_m$  (es decir, acotado en  $\mathbb{R}_m$ ), entonces  $\mathcal{F}$  es relativamente compacto en  $C(\Omega, \mathbb{R}_m)$  para  $\tau_C$ .

**Demostración.** Como, para todo  $x \in \Omega$ ,  $\mathcal{F}(x)$  es relativamente compacto en  $\mathbb{R}_m$ ,  $\prod_{x \in \Omega} \overline{\mathcal{F}(x)}$  es por lo tanto compacto en  $\prod_{x \in \Omega} \mathbb{R}_m = \mathbb{R}_m^\Omega$  (Teorema de Tychonoff). Sea entonces

$$\phi : \overline{\mathcal{F}} \rightarrow \prod_{x \in \Omega} \overline{\mathcal{F}(x)}$$

definida por  $\phi(f) = (f(x))_{x \in \Omega}$ . Evidentemente  $\phi$  es biyectiva. Recordamos ahora que para cada punto  $(f(x))_{x \in \Omega}$  los conjuntos

$$V(f, a_1, \dots, a_n, \varepsilon) = \{ (g(x))_{x \in \Omega} \mid \|f(a_k) - g(a_k)\| < \varepsilon \text{ para } k=1, 2, \dots, n\}$$

forman un sistema fundamental de vecindades de  $(f(x))_{x \in \Omega}$ . Veamos que  $\phi$  es continua cuando se da a  $\overline{\mathcal{F}}$  la topología inducida por  $\tau_C$ . Escribamos

$$U_{K, \varepsilon}^*(f) = U_{K, \varepsilon}(f) \cap \overline{\mathcal{F}}$$

Sea:  $K = \{a_1, \dots, a_n\}$ . Evidentemente  $K$  es compacto y

$$U_{K, \varepsilon}^*(f) \subseteq \phi^{-1}(V(f, a_1, \dots, a_n, \varepsilon)).$$

De ésto, la afirmación. Veamos ahora que  $\phi$  es abierta, de lo cual, un homeomorfismo. Sean  $K$  un compacto de  $\Omega$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $f \in \overline{\mathcal{F}}$ . Como  $\overline{\mathcal{F}}$  es equicontinuo, para cada  $a \in K$  existe una vecindad  $V(a)$  de  $a$  tal que si  $x \in V(a)$ ,  $\|f(a) - f(x)\| < \varepsilon/3$  para toda  $f \in \overline{\mathcal{F}}$ . Sean  $a_1, \dots, a_n \in K$  tales que  $K \subseteq V(a_1) \cup V(a_2) \cup \dots \cup V(a_n)$ . Veamos que

$$\phi(U'_{K, \varepsilon}(f)) \supseteq V(f, a_1, \dots, a_n, \varepsilon/3) = V.$$

En efecto, si  $(g(x))_{x \in \Omega} \in V$ ,  $\|g(a_i) - f(a_i)\| < \varepsilon/3$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Sea ahora  $x \in K$ . Se tiene que  $x \in V(a_i)$  para algún  $1 \leq i \leq n$ . Por lo tanto,  $\|f(x) - g(x)\| \leq \|f(x) - f(a_i)\| + \|f(a_i) - g(a_i)\| + \|g(a_i) - g(x)\| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$ . Esto demuestra que

$$\|f - g\| = \sup_{x \in K} \|f(x) - g(x)\| < \varepsilon,$$

lo cual completa la demostración.

**Nota.** Los teoremas 5.1 y 5.2, así como sus demostraciones, no requieren ninguna hipótesis adicional sobre  $\Omega$ , salvo la de ser un espacio topológico localmente compacto. Lo mismo es cierto del siguiente corolario. Nótese primero que si  $\mathcal{F}$  es compacto en  $C(\Omega, \mathbb{R}_m)$ ,  $\mathcal{F}(a)$  es compacto en  $\mathbb{R}_m$ . Se tiene entonces el siguiente corolario del teorema de Ascoli:

**Corolario 1.** Sea  $\mathcal{F} \subseteq C(\Omega, \mathbb{R}_m)$ . Las proposiciones siguientes son equivalentes:

- 1)  $\mathcal{F}$  es relativamente compacto (resp.: compacto) en  $C(\Omega, \mathbb{R}_m)$
- 2)  $\mathcal{F}$  es equicontinuo y  $\mathcal{F}(a)$  es relativamente compacto (resp.: compacto) para todo  $a \in \Omega$ .

En caso de ser  $\Omega$  enumerable al infinito, se tiene

**Corolario 2.** Si  $\Omega$  es localmente compacto, enumerable al infinito, y  $\mathcal{F} \subseteq C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ , las proposiciones siguientes son equivalentes:

- 1)  $\mathcal{F}$  es equicontinuo, y para todo  $a \in \Omega$ ,  $\mathcal{F}(a)$  es relativamente compacto en  $\mathbb{R}_n$ .
- 2) De toda sucesión  $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$  puede extraerse una subsucesión  $\{f_{n_k}\}$  convergente en compactos hacia  $f \in C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ .

**Nota.** Si en el corolario anterior  $\mathcal{F}$  es cerrado,  $f \in \mathcal{F}$ . Esto es así, por ejemplo, si  $\mathcal{F}(a)$  es siempre compacto.

### Ejercicios

1. Sea  $\Omega$  un espacio localmente compacto el cual es reunión de un número enumerable de conjuntos compactos. Demuestre que  $\Omega$  es enumerable al infinito.
2. Sea  $\Omega$  un espacio métrico localmente compacto el cual tiene un subconjunto enumerable  $A$ , denso en  $\Omega$ . Demuestre que  $\Omega$  es enumerable al infinito. Concluya que todo abierto de  $\mathbb{R}_n$  es enumerable al infinito.
3. Sea  $\Omega$  un espacio métrico. Demuestre que para todo conjunto relativamente compacto  $K \subseteq \Omega$  y todo  $\varepsilon > 0$  existen  $a_1, \dots, a_n \in K$  tales que  $K \subseteq \bigcup_{k=1}^n B_\varepsilon(a_k)$ .
4. Sea  $\Omega$  un espacio métrico,  $K \subseteq \Omega$  un conjunto compacto. Use el ejercicio anterior para demostrar que existe un subconjunto  $K' \subseteq K$ ,  $K'$  enumerable y denso en  $K$  (Ind. Para todo  $r > 0$ , racional, existe un subconjunto  $S_r$  de  $K$ , finito, y tal que

$$K \subseteq \bigcup_{a \in S_r} B_r(a).$$

Sea  $K' = \bigcup_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ r > 0}} S_r$ ).

5. Sea  $\Omega$  un espacio métrico localmente compacto, enumerable al infinito. Demuestre que existe  $A \subseteq \Omega$ , enumerable y denso en  $\Omega$ . En otras palabras, un espacio métrico localmente compacto es enumerable al infinito y sólo si es separable (es decir, tiene un subconjunto enumerable denso). Demuestre que un espacio métrico es separable si y sólo si su topología tiene una base enumerable.
6. Complete los detalles de las demostraciones de los teoremas 1.1, 3.1, 3.2, 3.3, 3.4.
7. De ejemplos de :
  - a) Una serie de funciones en  $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ , simplemente convergente y no absolutamente convergente.
  - b) Una serie de funciones convergente en compactos y no absolutamente convergente.
  - c) Una serie de funciones convergente en compactos y no absolutamente convergente en compactos.
8. Sea  $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 \in C[z]$ . Diremos que  $f$  tiene grado  $n$  si y sólo si  $a_n \neq 0$ . Un polinomio de grado 0 es constante y diferente de 0. El polinomio  $f(z) = 0$  no tiene grado. Demuestre que las proposiciones siguientes son equivalentes para  $f \in C[z]$  :
  - 1)  $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |f(z)| = +\infty$
  - 2)  $f$  no es constante
  - 3)  $f$  tiene grado  $\geq 1$ .

9. Sea  $f \in C[z]$ . Demuestre que si

$$f(z) = a_n z^n + \dots + a_0 = b_m z^m + \dots + b_0$$

entonces  $m = n$  y  $a_k = b_k$  para  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ . Concluya que el grado de un polinomio  $\neq 0$  es un número  $\geq 0$  perfectamente determinado (el cual se denota por  $\deg(f)$ ). Demuestre que  $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$ , si  $f \neq 0 \neq g$ . Concluya que  $C[z]$  es un dominio de integridad.

10. Demuestre que  $\{z^n \mid n \geq 0, n \in \mathbf{N}\}$  es una base sobre  $C$  de  $C[z]$ .

11. Sean  $f, g \in C[z]$ ,  $f \neq 0 \neq g$ . Demuestre que existen polinomios  $q, r \in C[z]$ , con  $r = 0$  o  $\deg(r) < \deg(g)$ , tales que

$$f = gq + r \quad (\text{Algoritmo de Euclides})$$

12. Sea  $f \in C[z]$ . Demuestre que si  $f \neq 0$  y  $f(\alpha) = 0$ , existen  $g \in C[z]$  y un único número  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq 1$ , tales que

$$f(z) = (z - \alpha)^n g(z).$$

13. Sea  $f \in C[z]$ ,  $f \neq 0$ . Demuestre que si  $Z(f) = \{\alpha \in C \mid f(\alpha) = 0\}$  entonces  $Z(f)$  tiene  $p$  elementos, donde  $p \leq \deg(f)$ .

14. Sean  $f \in C[z]$ ,  $f \neq 0$ ,  $Z(f) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$ . Demuestre que

$$f(z) = (z_1 - \alpha_1)^{n_1} (z_2 - \alpha_2)^{n_2} \dots (z_p - \alpha_p)^{n_p}$$

donde  $n_1 + n_2 + \dots + n_p = \deg(f)$ .

15. Sea  $K = \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ . Denotaremos por  $K[z]$  al subdominio de  $C[z]$  de los polinomios  $f(z) = a_n z^n + \dots + a_0$  con  $a_k \in K$  para  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ . Un polinomio  $f \in K[z]$ ,  $\deg(f) > 0$ , se dice irreducible sobre  $K$  si

no existen dos polinomios  $g, b$ ,  $0 < \deg(g) \leq \deg(b) < \deg(f)$ , tales que  $f = g \cdot b$ . Demuestre que los únicos polinomios en  $C[z]$ , irreducibles sobre  $C$ , son los de grado  $= 1$ . Si  $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ , los únicos elementos de  $K[z]$ , invertibles, son los polinomios de grado  $0$ . (Es costumbre identificar a  $f(z) = a_0$  con  $a_0$ . Entonces  $K \subseteq K[z]$  y  $K - \{0\}$  es el conjunto de los elementos invertibles de  $K[z]$ ). Cuáles son los elementos invertibles de  $K[z]$

16. Sea  $f \in \mathbb{R}[z]$ . Demuestre que si  $\alpha \in \mathbb{C}$  es tal que  $f(\alpha) = 0$ , también  $f(\bar{\alpha}) = 0$ . Concluya que si  $f \in \mathbb{R}[z]$  es de grado impar, existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $f(\alpha) = 0$ .

17. Sea  $f(z) = az^2 + bz + c \in C[z]$ ,  $a \neq 0$ . Demuestre que si  $b^2 - 4ac \geq 0$ ,

$$Z(f) = \left\{ \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\}$$

y que si  $b^2 - 4ac < 0$ ,

$$Z(f) = \left\{ \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}, \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \right\}.$$

Demuestre que, en general,

$$Z(f) = \left\{ \frac{-b + w_1}{2a}, \frac{-b + w_2}{2a} \right\}$$

donde  $w_1, w_2$  son las dos raíces de  $b^2 - 4ac$ .

18. Sea  $f(z) = az^2 + bz + c \in \mathbb{R}[z]$ . Demuestre que las proposiciones siguientes son equivalentes:

- $f$  es irreducible sobre  $\mathbb{R}$ .
- Existe  $\alpha \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$  tal que  $f(\alpha) = 0$ .

c)  $b^2 - 4ac < 0$ .

19. Demuestre que los únicos polinomios en  $\mathbb{R}[z]$ , irreducibles sobre  $\mathbb{R}$ , son los de grado 1 y los de la forma  $f(z) = az^2 + bz + c$  con  $b^2 - 4ac < 0$ .

20. Sea  $P$  un conjunto de subconjuntos del espacio topológico  $\Omega$ . Para cada  $A \in P$  y  $f \in C(\Omega, \mathbb{R}_n)$  se define

$$\|f\|_A = \sup_{x \in A} \|f(x)\|$$

y luego

$$U_{A, \varepsilon}(f) = \{g \in C(\Omega, \mathbb{R}_n) \mid \|f-g\|_A < \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Un subconjunto  $U$  de  $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$  se dice entonces abierto si para toda  $f \in U$  existen  $A \in P$  y  $\varepsilon > 0$  tales que

$$U_{A, \varepsilon}(f) \subseteq U.$$

Demuestre que el conjunto  $\tau_P$  de todos los subconjuntos abiertos de  $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$  es una topología sobre  $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$  para la cual  $\{U_{A, \varepsilon}(f) \mid A \in P, \varepsilon > 0\}$  es un sistema fundamental de vecindades. Si  $P$  es el conjunto de los compactos de  $\Omega$ ,  $\tau_P = \tau_C$ . Si  $P$  es el conjunto de los subconjuntos finitos de  $\Omega$ ,  $\tau_P$  se denomina la topología de la convergencia simple y se denota por  $\tau_F$ .

a) Demuestre que si  $\{f_n\}$  es una sucesión en  $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ ,  $f_n \rightarrow f \in C(\Omega, \mathbb{R}_n)$  para  $\tau_F$  si y sólo si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

para todo  $x \in \Omega$ .

b) Demuestre que una serie de funciones en  $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$  converge a  $\tau_F$  si y sólo si converge simplemente .

c) Demuestre que si se da a  $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$  la topología de la convergencia simple, la aplicación

$$\begin{aligned} \psi : C(\Omega, \mathbb{R}_n) &\rightarrow \prod_{x \in \Omega} C_x \\ \psi(f) &= (f(x))_{x \in \Omega} \end{aligned}$$

donde  $C_x = \{ f(x) \mid f \in C(\Omega, \mathbb{R}_n) \}$  , es un homeomorfismo .

d) Sea  $\mathcal{F}$  un subconjunto equicontinuo de  $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$  . Demuestre que sobre  $\mathcal{F}$  las topologías inducidas por  $\tau_C$  y  $\tau_F$  coinciden .

e) De ejemplo de una sucesión de Cauchy en  $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$  para  $\tau_F$  la cual no sea convergente a ninguna  $f \in C(\Omega, \mathbb{R}_n)$  .

f) Demuestre que si  $\Omega$  es un espacio topológico separado, finito, entonces  $\tau_F = \tau_C$  .

g) Demuestre que si  $\Omega$  es un espacio discreto entonces  $\tau_F = \tau_C$  .

21. Sea  $\rho : C(\Omega, \mathbb{R}_n) \times C(\Omega, \mathbb{R}_n) \rightarrow C(\Omega, \mathbb{R}_n)$  definida por  $\rho(f, g) = f + g$  . Demuestre que  $\rho$  es continua para  $\tau_C$  . Lo mismo es cierto de las aplicaciones

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times C(\Omega, \mathbb{R}_n) &\rightarrow C(\Omega, \mathbb{R}_n) \\ (\lambda, f) &\rightarrow \lambda f \\ C(\Omega, \mathbb{R}_n) \times C(\Omega, \mathbb{R}_n) &\xrightarrow{\pi} C(\Omega, \mathbb{R}_n) \\ (f, g) &\rightarrow fg . \end{aligned}$$

22. Sea  $\Omega$  un espacio topológico compacto,  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones en  $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ . Sea  $P = \{\Omega\}$ . Demuestre

a)  $\tau_P = \tau_C$

b) Si  $a_n = \|f_n\|_{\Omega}$ , entonces  $f_n \rightarrow 0$  para  $\tau_C$  si y sólo si  $a_n \rightarrow 0$  en  $\mathbb{R}$ .

23. Sea  $\Omega$  un espacio topológico localmente compacto enumerable al infinito,  $\{K_n\}$  una sucesión exhaustiva de compactos de  $\Omega$ . Sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones en  $C(\Omega, \mathbb{R}_p)$ . Sea  $a_{mn} = \|f_m\|_{K_n}$ .

Demuestre que si  $\lim_{(m,n)} a_{mn} = 0$  entonces  $f_n \rightarrow 0$  para  $\tau_C$ . De un ejemplo que muestre que la recíproca es falsa.

24. Sea  $\{f_n\} \subseteq C(\Omega, \mathbb{R})$  tal que  $f_n \rightarrow f$  para  $\tau_C$ . Demuestre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_K f_n dx_1 \dots dx_p = \int_K f dx_1 \dots dx_p$$

para todo compacto  $K \subseteq \Omega$ . Concluya que si  $\rho \in S_1(\Omega)$  y  $p=2$ ,

$$\int_{\rho} w_n \rightarrow \int_{\rho} w$$

si  $w_n = f_n dx + g_n dy$ ,  $f_n \rightarrow f$ ,  $g_n \rightarrow g$  para  $\tau_C$  y  $w = f dx + g dy$ . Demuestre que

$$\int_{\rho} f_n dx \wedge dy \rightarrow \int_{\rho} f dx \wedge dy$$

si  $f_n \rightarrow f$  para  $\tau_C$  y  $\rho \in S_2(\Omega)$ .

25. Sea  $\Omega$  un espacio localmente compacto. Demuestre que un subconjunto  $\mathcal{F}$  de  $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$  es equicontinuo si y sólo si  $\overline{\mathcal{F}}$ , su clausura en  $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$  para  $\tau_C$  también lo es.

*Indicación:* Dados  $a \in \Omega$  y  $\varepsilon > 0$  existe una vecindad compacta  $K$  de  $a$  tal que  $\|g(x) - g(a)\| < \varepsilon/2$  para toda  $g \in \mathcal{F}$  y todo  $x \in K$ . Sea  $f \in \overline{\mathcal{F}}$  y tómesese  $g \in \mathcal{F} \cap U_{K, \varepsilon/2}(f)$  para concluir que entonces  $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$  para todo  $x \in K$ .

26. Sea  $\mathcal{F} \subseteq C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ . Demuestre que  $\overline{\mathcal{F}}(x) = \overline{\mathcal{F}(x)}$ .

### ERRATAS

En la demostración del Lema 4.1, Capítulo V hemos encontrado un error. El comienzo de la demostración debe cambiarse como sigue: Sea  $a \in \Omega$  fijo y sean  $\sigma, \rho \in S_1(\Omega)$  tales que  $\rho(0) = a, \rho(1) = z$ . Es claro que ..., suprimiendo la frase  $\sigma \rho^{-1} - 0$  por ser  $\Omega$  simplemente conexo. Por lo tanto....