

ELEMENTOS PARA OBTENER EL MÓDULO DE REACCIÓN DE SUBRASANTE

ELEMENTS TO ESTIMATE SUBGRADE REACTION COEFFICIENTS

IVÁN FERNANDO OTÁLVARO

Ingeniero Civil, M.I, en Geotecnia, Pontificia Universidad Javeriana Cali, otalvaro.calle@gmail.com

FRANCISCO JAVIER NANCLARES

Ingeniero Civil, MSc, en Geotecnia, Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín, fjancla@unalmed.edu.co

Recibido para revisar marzo 10 de 2008, aceptado octubre 10 de 2008, versión final octubre 31 de 2008

RESUMEN: En la actualidad el análisis tensión deformación del conjunto estructura-geomaterial se suele abordar a partir de modelos discretos, en algunas ocasiones mediante métodos numéricos tales como los elementos finitos. Sin embargo, sigue siendo bastante común representar los geomateriales a partir de la hipótesis de Winkler, ya que ofrece una mayor simplicidad para efectos de cálculo y es posible modelar simultáneamente el suelo y la estructura de cimentación. En este documento se describen los métodos más comunes empleados para determinar o estimar el coeficiente de reacción de la subrasante, o coeficiente de balasto, conocido también como k_S de Winkler. Adicionalmente se muestra el efecto en el k_S de algunos factores composicionales y ambientales que afectan el comportamiento del suelo, incluyendo algunos ejemplos en suelos residuales tropicales.

PALABRAS CLAVE: coeficiente de reacción de subrasante, Winkler, interacción suelo-estructura, suelos residuales tropicales.

ABSTRACT: Current trend in the stress strain analysis of the structure-geomaterial interaction is to use discrete element models, frequently using finite element techniques. However, it is still common practice to use the Winkler hypothesis where simplicity of the calculation wants to be kept, since it allows for soil structure interaction analysis. This paper describes the most common methods to determine the coefficient of subgrade reaction, known as k_S of Winkler as well. The effect of compositional and environmental factors on k_S is illustrated, including examples of tropical residual soils.

KEYWORDS: subgrade reaction, Winkler, soil-structure interaction, tropical residual soils.

1. INTRODUCCIÓN

En la actualidad muchos de los problemas diarios en la ingeniería geotécnica requieren para el diseño de la solución, de una u otra manera, hacer uso de métodos de análisis tensión deformación. El problema en términos de esfuerzo-deformación se puede resolver utilizando métodos analíticos como el análisis límite que asume un comportamiento rígido-

plástico perfecto, o las líneas de fluencia, que soluciona de manera rigurosa el problema elasto-plástico de cuerpos deformables.

Por otro lado es posible obtener soluciones aproximadas en términos de esfuerzo-deformación mediante métodos numéricos, los cuales ofrecen una solución en algunos puntos del dominio, teniendo como requisito la discretización del cuerpo objeto de análisis. Los métodos numéricos de mayor utilización en ingeniería por orden cronológico son [7]:

- Método de diferencias finitas (FDM).
- Método de elementos finitos (FEM).
- Método de elementos de contorno (BEM).

No obstante, el incremento del uso de los métodos mencionados por la mayor disponibilidad de herramientas computacionales avanzadas no ha desplazado la utilización de otros esquemas de discretización tales como los basados en la hipótesis de Winkler. En estos el suelo se representa como un conjunto de resortes, con la notable ventaja de poder analizar el suelo y la estructura de manera simultánea.

2. RESORTES CON RESPUESTA LINEAL (MODELO DE WINKLER)

El modelo de Winkler [16] representa el suelo como un sistema de resortes lineales, bajo la suposición de que las presiones de contacto son proporcionales a las deformaciones. El modelo presenta la ventaja adicional de ser utilizado para condiciones de carga tanto verticales como horizontales. Esta condición es bastante frecuente, por ejemplo es el caso del diseño de pantallas de pilas en voladizo.

2.1 Condición de carga vertical

En esta condición los asentamientos son proporcionales a la presión de contacto, es decir:

$$q = k_s \cdot w \quad (1)$$

Donde; q es la presión transmitida [F/L²]; k_s es el coeficiente de reacción de la subrasante [F/L³]; y w son los asentamientos producidos en el suelo [L].

Es importante anotar que en la ecuación (1) se está suponiendo una cimentación rígida que transmite al suelo una presión q , y que el suelo se deforma una cantidad w , tal como lo haría en un líquido. Producto de esta definición y para que la expresión sea dimensionalmente correcta, k_s tendrá unidades de fuerza por volumen, razón por la cual se le suele llamar método del fluido denso.

Bajo las consideraciones anteriores es bastante fácil notar que k_s puede ser obtenido a partir de diferentes métodos, siendo los más comunes:

- Ensayo de placa.
- Seguimiento de los asentamientos de la cimentación real.
- Estimación, ya sea por tablas de valores típicos o a partir de correlaciones con otras propiedades geotécnicas.

2.2 Condición de carga vertical

En la referencia [14] de manera análoga al análisis anterior, para la condición de cargas y deflexiones laterales, propone una expresión para el coeficiente horizontal, k_h .

$$k_h = k_{sz} \cdot \frac{z}{D} \quad (2)$$

Donde; k_{sz} es el coeficiente de reacción de la subrasante para la condición de carga vertical evaluado en la profundidad z [F/L³]; k_h es el módulo de reacción de la subrasante para la condición de carga lateral [F/L³]; z es la profundidad a la cual se evalúa k_h [L]; y D es el ancho de la proyección del elemento estructural en la dirección de la aplicación de la carga lateral.

Un examen rápido de la ecuación (2) permite inferir que en la referencia [14] se asumió que el k_h varía linealmente con la profundidad, sin embargo, más adelante se demuestra que esta variación tiende a ser no lineal, ya que k_{sz} no es constante con la profundidad.

Desde el punto de vista de diseño estructural este coeficiente es ampliamente utilizado para el diseño de cimentaciones profundas sometidas a carga lateral, y estructuras de contención en medios granulares, como el caso de tablestacas. No obstante su popularidad, es importante tener en cuenta que se trata de un problema de compatibilidad de deformaciones, y por tanto, el desarrollo de las presiones transmitidas por el suelo será función de la deformación alcanzada. Por lo tanto y para no incurrir en diseños equivocados, se deben tener presentes las condiciones de trabajo,

como es el caso de pantallas de pilas preexcavadas en suelos residuales, la cual corresponde a una condición de empuje en reposo. En otras condiciones su utilización puede conducir a un diseño excesivamente conservador.

Debido a la complejidad de la interacción entre la estructura y el suelo en la evaluación de k_h , la discusión en el presente artículo se centrará en la influencia que tienen diferentes aspectos composicionales y ambientales en la estimación de k_s .

3. ENSAYO DE PLACA

El procedimiento general para este ensayo es:

- Preparar la superficie del terreno, de tal manera que se garantice una superficie continua de apoyo.
- Instalar la placa metálica con la cual se transmitirá la carga al suelo; ésta puede ser cuadrada o circular de 30 cm, 60 cm o 72.6 cm de lado o diámetro.
- Montar el gato hidráulico y extensómetros o elementos para medir las deformaciones del terreno. Se debe garantizar el contacto del gato con el elemento de reacción.
- Inicializar los instrumentos de lectura en cero, y aplicar la carga a velocidad constante. Existen varias opciones sobre el procedimiento de aplicación de carga, por ejemplo, es posible efectuar varios ciclos de carga antes de llevar el suelo a la falla, o si se hace en el sitio donde se fundirá la cimentación se lleva hasta 1.25 veces la carga de trabajo.
- Graficar los resultados y llevar a cabo los cálculos, tal como se indica en la Figura 1.

El k_s calculado de este ensayo normalmente lleva un subíndice relacionado con el tamaño de la placa, si se hace con una placa de 30 cm el módulo de reacción de la subrasante se denotará como k_{s30} .

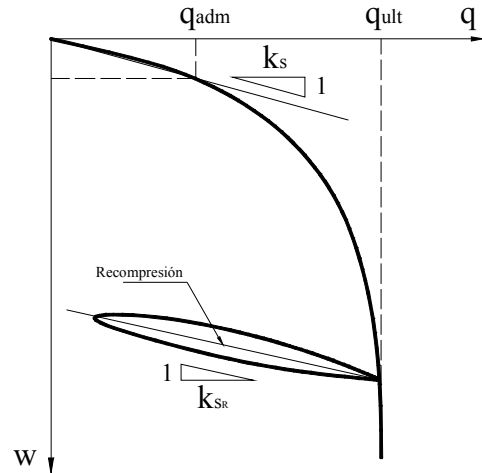


Figura 1. Curva tensión deformación del ensayo de placa, y cálculo de k_s

Figure 1. Load-settlement curve for plate-load test and calculation of k_s

De este ensayo resulta obvio que los resultados se ven afectados por el tamaño de la placa, puesto que si lo analizamos desde el punto de vista elástico el volumen de suelo involucrado o afectado en el ensayo depende del área de contacto, relación que se puede expresar numéricamente a través de la solución de Boussinesq [3], quien resolvió el efecto de para cargas externas en el suelo.

Para corregir esta situación se propone lo siguiente [14]:

- Calcular el k_{s30} obtenido del ensayo de placa.
- Calcular el k_s real de acuerdo con el tipo de suelo así:

Para cimentaciones cuadradas

Suelos granulares:

$$k_s = k_{s30} \left[\frac{b + 0.3}{2b} \right]^2 \tag{3}$$

Donde b es el ancho equivalente, en m, estimado como se indica mas adelante.

Suelos cohesivos:

$$k_s = k_{s30} \left[\frac{0.3}{b} \right] \quad (4)$$

Si no es posible clasificar el suelo en alguna de las situaciones anteriores, una aproximación es hacer un promedio ponderado.

Para cimentaciones rectangulares

Se puede emplear la siguiente expresión:

$$k_{S_{\text{Rectangular}}} = \frac{2}{3} k_{S_{\text{Cuadrada}}} \left[1 + \frac{B}{2L} \right] \quad (5)$$

Donde L y B son las dimensiones de la cimentación. Siendo L el lado mayor.

- iii. Estimar el ancho equivalente b, este depende de la rigidez de la estructura y de la cimentación. En el caso de losas se puede tomar la luz media entre columnas, ya que tomar el ancho total de la losa conduciría a valores demasiado bajos del coeficiente de reacción. En el caso de zapatas aisladas esta bien tomar el ancho de la zapata.

4. ESTIMACIÓN A PARTIR DE OTRAS PROPIEDADES DEL SUELO

Siempre que se piense en alguna propiedad con la cual se pretenda describir o estimar el comportamiento del suelo se tendrán que tener presente factores composicionales y ambientales de la masa de suelo con la cual se esta trabajando. Composicionales como la mineralogía, el tamaño y distribución de las partículas; y ambientales, como la historia de esfuerzos, el esfuerzo de confinamiento y la condición de saturación.

Para tal fin en el presente artículo se acudirá a analizar el problema desde el punto de vista de la teoría de la elasticidad. En ella, la deformación del suelo en la dirección vertical, expresada en coordenadas polares, se puede evaluar mediante la expresión:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E_s} (\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)) \quad (6)$$

Donde: ε_z , es la deformación unitaria vertical del suelo; E_s , es el módulo de elasticidad del suelo; σ_z es el esfuerzo en la dirección vertical, y, σ_r y σ_θ , son los esfuerzos normales en las direcciones ortogonales a la deformación vertical.

Por otro lado y retomando la solución de Boussinesq [3], los esfuerzos inducidos por la aplicación de una carga puntual en superficie pueden ser calculados utilizando las ecuaciones:

$$\sigma_z = \frac{3P}{2\pi \cdot z^2} \cos^5(\theta) \quad (7)$$

$$\sigma_\theta = -(1-2\nu) \frac{P}{2\pi \cdot z^2} \cdot \left[\cos^3(\theta) - \frac{\cos^2(\theta)}{1+\cos(\theta)} \right] \quad (8)$$

$$\sigma_r = \frac{P}{2\pi \cdot z^2} \left[3 \cdot \cos^3(\theta) \cdot \frac{\sin^2(\theta)}{1+\cos(\theta)} - \frac{\cos^2(\theta)}{1+\cos(\theta)} \right] \quad (9)$$

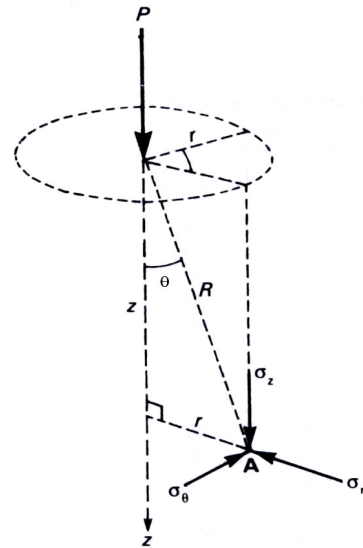


Figura 2. Definición de los términos de las ecuaciones de Boussinesq [3]

Figure 2. Definition of terms for Boussinesq equations [3]

Para una condición generada por los esfuerzos de un área uniformemente cargada la deformación puede ser estimada de la siguiente manera:

$$w = \int_{Z=0}^{\infty} \varepsilon_Z \cdot dz \quad (10)$$

Al resolver la integral de la ecuación (10) para diferentes posiciones por debajo de una cimentación rectangular se obtiene que las deformaciones puedan calcularse como se indica a continuación:

Para una esquina:

$$w_{Esquina} = \frac{qB}{2E_S} (1-\nu^2) \cdot I_{ce} \quad (11)$$

Donde: q, es la carga uniformemente distribuida; ν , es la relación de Poisson; e I_{ce} es un coeficiente de influencia.

$$I_{ce} = \frac{1}{\pi} \left[\begin{aligned} & \text{Ln} \left(\frac{\sqrt{1+(L/B)^2} + L/B}{\sqrt{1+(L/B)^2} - L/B} \right) + \\ & + (L/B) \cdot \text{Ln} \left(\frac{\sqrt{1+(L/B)^2} + L/B}{\sqrt{1+(L/B)^2} - L/B} \right) \end{aligned} \right] \quad (12)$$

Para el centro:

$$w_{Centro} = \frac{qB}{E_S} (1-\nu^2) \cdot I_{ce} \quad (13)$$

Al combinar la ecuación (10), con la ecuación (1) y de manera similar la ecuación (13) con la ecuación (1), se tiene que el módulo de reacción puede estimarse:

Para una esquina:

$$k_S = \frac{2E_S}{B \cdot (1-\nu^2) \cdot I_{ce}} \quad (14)$$

Para el centro:

$$k_S = \frac{E_S}{B \cdot (1-\nu^2) \cdot I_{ce}} \quad (15)$$

De las ecuaciones (14) y (15) se aprecia que el cálculo de k_S se puede efectuar a partir de los

parámetros elásticos del suelo y su expresión general será de la siguiente forma:

$$k_S = \frac{E_S}{(1-\nu^2)} I \quad (16)$$

Donde, I es un coeficiente de influencia que tiene en cuenta el tamaño y rigidez de la cimentación, y el punto de evaluación de las deformaciones, entre diferentes aspectos. La evaluación del parámetro I depende de las condiciones específicas de la estructura. Por ejemplo en la literatura se encuentran soluciones al problema tridimensional para una viga infinita con una carga concentrada obteniendo la siguiente expresión [2]:

$$k_S = \frac{0.65E_S}{(1-\nu^2)} \left[\frac{B^4 E_S}{(1-\nu^2)EI} \right]^{0.108} \quad (17)$$

Donde, EI es la rigidez de la viga.

En la referencia [15], se plantea una expresión similar.

$$k_S = \frac{0.65E_S}{(1-\nu^2)} \sqrt[12]{\frac{B^4 E_S}{EI}} \quad (18)$$

Por tanto la variación del coeficiente de reacción de la subrasante podrá estudiarse, por defecto, al definir los factores que influyen en el modulo de elasticidad del suelo.

En mecánica de suelos se suele utilizar el módulo inicial, indicado usualmente como E_0 , y el módulo secante al 50% de la resistencia a compresión, denominado E_{50} , los cuales son calculados tal como se ilustra en la Figura 3.

Diversos autores recomiendan utilizar E_0 cuando se tienen arcillas altamente sobre-consolidadas y rocas con un gran margen elástico lineal. Por otro lado se debe utilizar E_{50} cuando se tienen arenas y arcillas normalmente consolidadas.

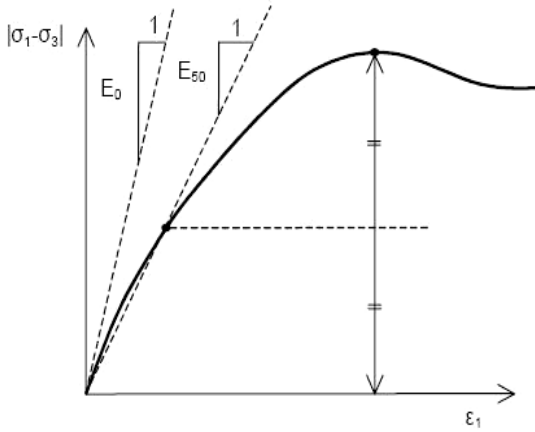


Figura 3. Definición de E_0 y E_{50}
Figure 3. Definition of E_0 and E_{50}

4.1 Influencia de la presión de confinamiento en k_s

En la referencia [12], a partir de compresiones triaxiales CU y CD, sugiere la siguiente relación entre la presión de confinamiento y el modulo elasticidad E_s :

$$E_s = \alpha \cdot pa \left[\frac{\sigma'_c}{pa} \right]^n \quad (19)$$

Donde: α y n , son parámetros de ajuste que dependen del tipo de suelo; pa , es la presión atmosférica en las mismas unidades de σ'_c ; y σ'_c , es la presión de confinamiento.

En la Figura 4 se muestra la variación de k_s con la presión de confinamiento para suelos residuales del gabro de San Diego, la dunita de Medellín y depósitos de vertiente de dunita, en el sector del Poblado. Los valores de k_s fueron calculados a partir de módulos de deformación obtenidos de compresiones triaxiales CU [4]. En la gráfica el ajuste efectuado a partir de la combinación de las ecuaciones (16) y (19), representa el valor medio de las estimaciones, denotada por la línea continua para depósitos y punteada para suelos in situ.

En la Figura 4 resaltan varios aspectos. Las anomalías observadas para la muestra G-4, para una presión de confinamiento de 30 kPa, pueden estar relacionadas con efectos de cementación entre partículas, cementación que rigidiza el suelo, esto bajo la consideración de que en las muestras G-4, G 11 y G-14, tienen porcentajes de minerales

alterados de 92%, 59% y 23% respectivamente. Y en los suelos derivados del gabro, mientras mayor sea la alteración mayor es la posibilidad que el suelo desarrolle enlaces entre partículas o “bonding”.

Por otra parte al examinar detalladamente los resultados para los suelos de dunita, es posible notar que el confinamiento actúa de manera diferente conforme el proceso de formación, “in situ” o transportado, teniendo mayor efecto en el suelo transportado. Esta misma observación es valida si se considera el valor de índice plástico mostrado en la Figura 4, a mayor índice plástico, mayor efecto del confinamiento. Comportamientos similares han sido reportados para el comportamiento dinámico del suelo, a mayor plasticidad la degradación de la rigidez comienza en un nivel de deformación mayor, es decir el suelo es más rígido [6].

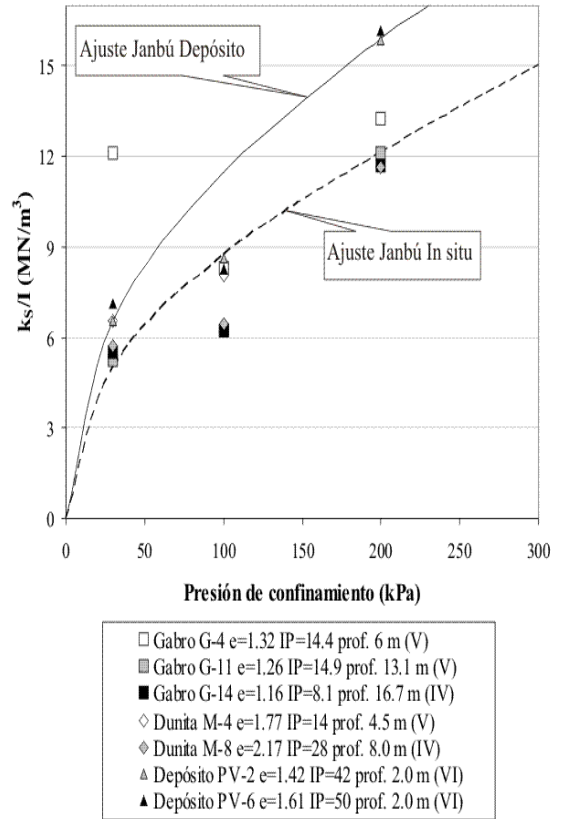


Figura 4. Variación de k_s con la presión de confinamiento
Figure 4. k_s variation with confinement pressure

4.2 Influencia de la relación de vacíos

En la referencia [9] se propone la siguiente expresión, obtenida a partir del modelo de Hardin y Richard [8]:

$$E_s = A \left[\frac{(b-e)^2}{1+e} \right] \cdot \sigma'_c{}^n \quad (20)$$

Donde: e, es la relación de vacíos; y A y b son constantes de ajuste de acuerdo con el tipo de suelo.

En la Figura 5 se presenta el efecto de la relación de vacíos sobre k_s para presiones de confinamiento superiores a 30 kPa. Los resultados indican que esta influencia es apenas notoria.

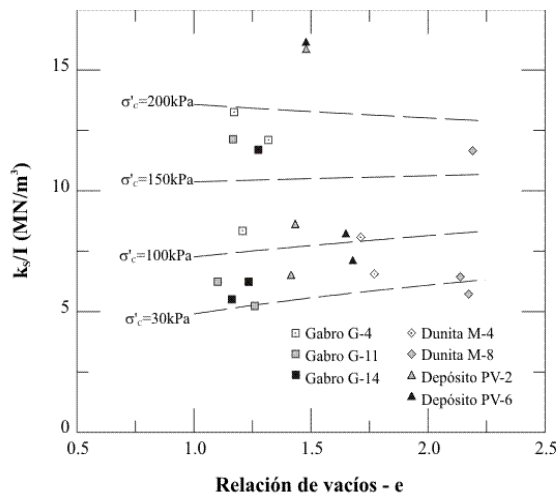


Figura 5. Efecto de relación de vacíos y la presión de confinamiento en k_s

Figure 5. Void ratio and confinement pressure effect on k_s

4.3 Influencia de la velocidad de aplicación de las cargas

Por otra parte, algunos autores [11], clasifican las condiciones de carga en tres categorías; lenta o estática, rápida, y repetitiva o cíclica (ver Figura 6).

La carga estática es aquella que se aplica motónicamente y el tiempo de falla puede tardar desde algunos minutos hasta horas, y para algunos ensayos “in situ” hasta días. Si por el contrario el tiempo de falla es corto, en el laboratorio puede ser del orden de 0.001 s, la carga será llamada rápida [11].

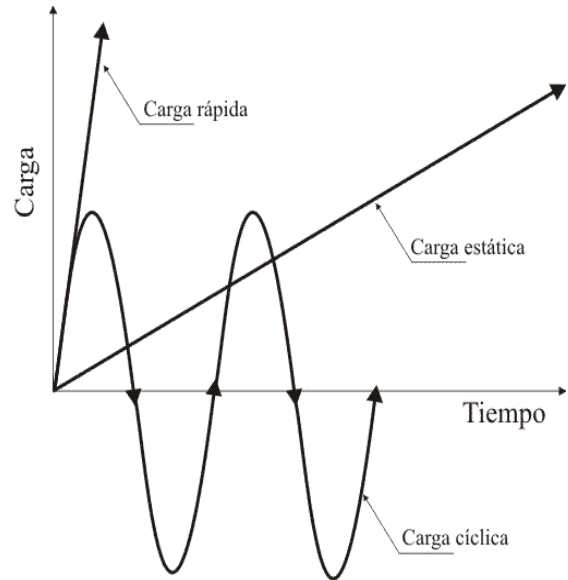


Figura 6. Tipos de cargas en función del tiempo

Figure 6. Types of loading on time condition

En la Figura 7 se ilustra la dependencia del módulo de elasticidad y la velocidad de aplicación de la carga, en muestras remoldeadas de caolinita [5]. Al igual que el módulo de elasticidad, k_s se ve afectado por la velocidad de aplicación de la carga.

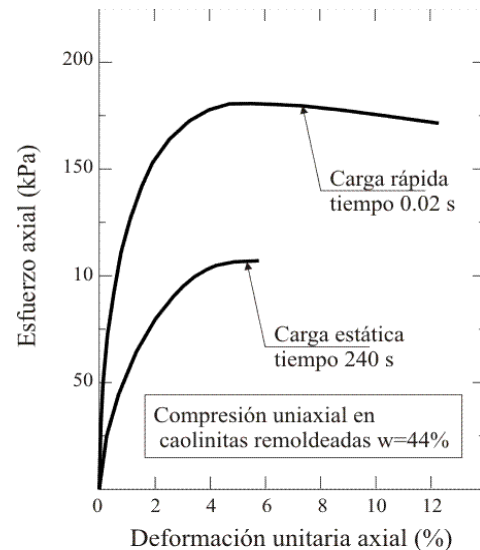


Figura 7. Curva tensión deformación de pruebas con cargas lentas y rápidas

Figure 7. Stress-strain curves for slow and rapid loading static tests

En la Figura 8 se presentan los resultados del cálculo de k_S para diferentes tiempos de carga a partir de los ensayos de compresión triaxial sobre muestras de arcilla compactadas [13]. k_S fue obtenido del módulo de elasticidad para una deformación del 1% y normalizado con respecto al k_S obtenido para una carga con una duración de 1 minuto (60 s). Se puede observar como entre la velocidad de aplicación de la carga de 0.006 s y 60 s se presentan una diferencia cercana al 70% para el valor del k_S .

Si se aplican cargas cíclicas lentamente en materiales finos se puede rigidizar el suelo por el efecto de consolidación, o el efecto opuesto que es producir deformaciones excesivas o “creep”. En el caso de cargas cíclicas rápidas, como las inducidas por sacudidas sísmicas, el suelo tiende a perder rigidez. En la Figura 9 es ilustrada la pérdida de rigidez, graficando el k_{SN} para cada ciclo en función del k_S para el primer ciclo, calculados a partir de los resultados obtenidos en el triaxial cíclico [1], para muestras inalteradas de saprolitos de la facie félsica del Stock de Altavista en la vertiente occidental de la ciudad de Medellín (Colombia).

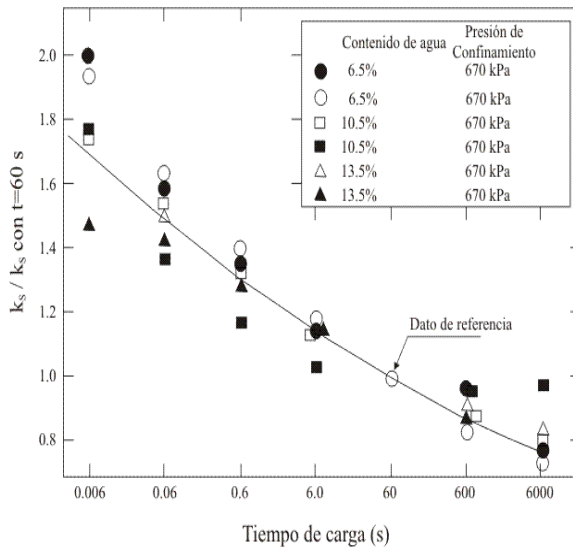


Figura 8. Efecto del tiempo de aplicación de la carga en k_S para un nivel de deformación de 1%, modificado de la referencia [13]

Figure 8. Effects of time loading on k_S for cohesive soils at 1% strain, modified of ref. [13]

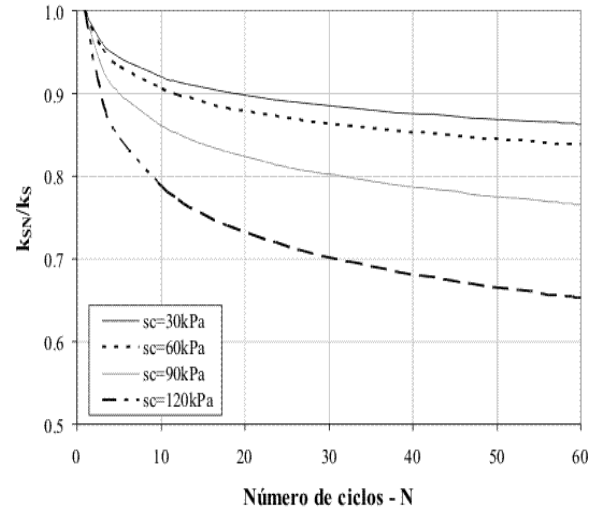


Figura 9. Efecto del número de ciclos de carga sobre el valor de k_S

Figure 9. Effect of the number of load cycles on k_S

La relación k_{SN}/k_S , mostrada en la Figura 9, es análoga al índice de degradación, δ_D , propuesto por otros autores [10].

5. CONCLUSIONES

La selección del valor del módulo de subrasante, k_S , siempre debe tener en cuenta la estructura, por tanto, para propósitos prácticos el ingeniero geotecnista debería estimar los valores en función de la geometría y propiedades estructurales del elemento de cimentación.

La variación del k_S con la profundidad no debe asumirse lineal, ya que si bien es posible demostrar que el incremento de los esfuerzos octaédricos en un suelo con superficie horizontal es aproximadamente lineal, el efecto que este tiene sobre la rigidez del suelo, en este caso el k_S , es no lineal, tal como se ilustra en la Figura 4 y las ecuaciones propuestas por otros autores [9] [12].

No es conveniente el uso de recomendaciones sobre valores del módulo de subrasante generadas para sedimentos recientes -depósitos de suelo transportado-, en la estimación del mismo parámetro en suelos residuales, pues esto puede provocar un desempeño no satisfactorio de la estructura.

En la práctica geotécnica el valor de k_S es un parámetro más de los reportes. Sin embargo, la selección de su valor conlleva una responsabilidad alta, y puede incluso ser más influyente que la capacidad de soporte estimada para el suelo, puesto que los ingenieros de estructuras lo involucran directamente en sus análisis. La relación k_{SN}/k_S , mostrada en la Figura 9, es análoga al índice de degradación, δ_D , propuesto en la referencia [10].

REFERENCIAS

- [1] BETANCUR G. Caracterización dinámica de suelos residuales en el Stock de Altavista. Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia: Medellín, 2006.
- [2] BIOT M.A. Bending of an infinite beam on an foundation. *Journal Appl. Mech.* 59, A1-A7, 1937.
- [3] BOUSSINESQ J. Application des potentiels à l'Étude de l'Équilibre et du mouvement des solides élastiques. Gauthier-Villars: París, 1885.
- [4] CANO C., OTÁLVARO I., HINCAPIÉ J. E., Y OSORIO R. Perfiles sismogeotécnicos en suelos gabraicos y duníticos. Dirección de Investigación, Universidad EAFIT: Medellín, 2002.
- [5] CASAGRANDE A. and WILSON S.D. Effect of rate of loading on the strength of clay and shales at constant water content. *Geotechnique* 2: 251-263, 1951.
- [6] DOBRY R. and VUCETIC M. Effect of Soil Plasticity on Cyclic Response. *Journal of Geotechnical Engineering, ASCE*, Vol. 117(1), 1991.
- [7] HACHICH W., FALCONI F., SAES J.L., FROTA R., CARVALHO C. & NIYAMA S. *Fundações: Teoria e prática*. 2da ed.: Sao Paulo, 1998.
- [8] HARDIN B. O. and RICHART F. B. Elastic wave velocities in granular soils. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE*, Vol. 89; No. 1 pp. 33-65, 1963.
- [9] HICHER P.-Y. *Journal of Geotechnical Engineering, ASCE*, Vol. 122; No. 8 pp. 641-648, 1996.
- [10] IDRIS I.M., DOBRY R., and SHINGH R.M. Nonlinear behaviour of soft clays during cyclic loading. *Journal of Geotechnical Engineering, ASCE*, Vol. 104; GT12 pp. 1427-1447, 1978.
- [11] ISIHARA K. *Soil behaviour in earthquake geotechnics*. The Oxford University Press; The Oxford Engineering Science Series, 350 pp, New York, 1996.
- [12] JANBU N. Soil Compressibility as Determined by Oedometer and Triaxial Tests. *European Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, 1: 19-25. Wissbaden, Germany, 1963.
- [13] OLSON R.E. and PAROLA J.F. Dynamic shearing properties of compacted clay. *Proceedings of the International Symposium on Wave Propagation and Dynamic Properties of Earth Materials*, University of New México, pp. 173-181, 1967.
- [14] TERZAGHI K.V. Evaluation of coefficients of subgrade reaction. *Geotechnique* 4: 297-326, 1955.
- [15] VESIC A.B. Bending of beams resting on isotropic elastic solid. *Journal Engrg. Mech. ASCE* 87: 35-53, 1961.
- [16] WINKLER E. *Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit*, H. Dominicus, Prague, 1867.