

**Caracterización de Señales ECG con Fibrilación  
Ventricular Mediante Técnicas de Dinámicas no Lineales**

Edilson Delgado Trejos



**Universidad Nacional de Colombia**  
**Sede Manizales**  
**Facultad de Ingeniería y Arquitectura**  
**Departamento de Electricidad, Electrónica y Computación**  
**Manizales, Colombia**  
**2003**

**Caracterización de Señales ECG con Fibrilación  
Ventricular Mediante Técnicas de Dinámicas no Lineales**

Edilson Delgado Trejos

Tesis para optar al título de  
Magister en Automatización Industrial

Director

Prof. Germán Castellanos Domínguez

**Universidad Nacional de Colombia**

**Sede Manizales**

**Facultad de Ingeniería y Arquitectura**

**Departamento de Electricidad, Electrónica y Computación**

**Manizales, Colombia**

**2003**

**Feature Extraction of Ventricular Fibrillation using  
Non-Linear Analysis of Heart Dynamics**

by

Edilson Delgado Trejos

A thesis submitted to the Posgraduate Program “Industrial Automation”  
in partial fulfillment of the requirements for the Master Degree

Thesis Director

German Castellanos

**Universidad Nacional de Colombia**

**Sede Manizales**

**Manizales, Colombia**

**2003**

*A Jesús por ser la luz  
que ilumina mi camino.  
A mis padres y hermanas  
por su apoyo incondicional.*

# Índice General

---

<b>Índice General</b>	<b>i</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>v</b>
<b>Índice de Tablas</b>	<b>vii</b>
<b>Resumen</b>	<b>x</b>
<b>Abstract</b>	<b>xi</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>xiii</b>
<b>Introducción</b>	<b>xv</b>
<b>1 Preliminares Fisiológicos y Clínicos</b>	<b>1</b>
1.1 Variaciones en el registro de ECG . . . . .	2
1.1.1 Patologías . . . . .	2
1.1.2 Arritmia . . . . .	4
1.1.3 Variabilidad de la frecuencia cardíaca . . . . .	6
1.2 Fibrilación Ventricular . . . . .	7
1.2.1 Fisiología y antecedentes clínicos . . . . .	7
1.2.2 Registro ECG para FV . . . . .	11
1.2.3 Caracterización automática de FV . . . . .	12
<b>2 Análisis de Señales ECG</b>	<b>15</b>

2.1	Técnicas lineales . . . . .	15
2.1.1	Procesos aleatorios independientes . . . . .	15
2.1.2	Procesos aleatorios cíclicos . . . . .	22
2.2	Técnicas de dinámica no lineal . . . . .	23
2.2.1	Teoría del Caos . . . . .	24
2.2.2	Espacio de Fase . . . . .	28
2.2.3	Dimensiones . . . . .	33
2.2.4	Exponente de Hurst . . . . .	41
2.2.5	Exponentes de Lyapunov . . . . .	43
2.2.6	El Método de los datos sustitutos . . . . .	45
2.2.7	Complejidad relativa de Lempel y Ziv . . . . .	45
2.3	Características de representación . . . . .	46
2.3.1	Coefficientes de amplitud . . . . .	46
2.3.2	Segmentación de traza . . . . .	46
2.3.3	Aproximación poligonal . . . . .	47
2.3.4	Coefficientes Wavelet . . . . .	47
2.3.5	Dinámica no lineal . . . . .	48
<b>3</b>	<b>Marco Experimental y Resultados</b>	<b>49</b>
3.1	Recolección y registro de señales ECG . . . . .	50
3.1.1	Conjunto de análisis . . . . .	50
3.1.2	Base de datos . . . . .	51
3.2	Preprocesamiento de las señales de ECG . . . . .	52
3.2.1	Interferencias y artefactos . . . . .	52
3.2.2	Filtración de perturbaciones . . . . .	54
3.3	Estimación de características ECG usando técnicas no lineales . . . . .	56
3.3.1	Información mutua promedio ( $\xi_1$ ) . . . . .	56
3.3.2	Dimensión de correlación ( $\xi_2$ ) . . . . .	57
3.3.3	Características basadas en vectores de energía ( $\xi_3, \xi_4$ ) . . . . .	59
3.3.4	Estimación de los exponentes de Lyapunov ( $\xi_5$ ) . . . . .	62

3.3.5	Morfología del atractor 3D . . . . .	65
3.4	Análisis discriminante . . . . .	65
3.4.1	Análisis de correlación por rangos . . . . .	66
3.4.2	Análisis de componentes principales . . . . .	68
3.4.3	Prueba y validación . . . . .	70
<b>4</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>73</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>74</b>
<b>A</b>	<b>Fundamentos de electrocardiografía</b>	<b>A-1</b>
A.1	Origen fisiológico . . . . .	A-1
A.2	Componentes de la señal ECG . . . . .	A-3
A.3	Derivaciones . . . . .	A-6
<b>B</b>	<b>Uso de la base de datos</b>	<b>B-1</b>
B.1	Lectura de los registros . . . . .	B-1
B.2	Lista de anotaciones . . . . .	B-2
B.3	Origen de archivos utilizados . . . . .	B-4
B.3.1	Señales normales . . . . .	B-4
B.3.2	Fibrilación ventricular . . . . .	B-5
B.3.3	Otras arritmias ventriculares . . . . .	B-6
<b>C</b>	<b>Resultados del Análisis Estadístico</b>	<b>C-1</b>
C.1	Información mutua promedio . . . . .	C-1
C.1.1	Señales normales . . . . .	C-1
C.1.2	Fibrilación Ventricular . . . . .	C-4
C.1.3	Otras arritmias ventriculares . . . . .	C-6
C.2	Dimensión de correlación . . . . .	C-8
C.2.1	Señales normales . . . . .	C-8
C.2.2	Fibrilación ventricular . . . . .	C-8
C.2.3	Arritmias ventriculares . . . . .	C-9

C.3	Número de autovalores retenidos . . . . .	C-9
C.3.1	Señales normales . . . . .	C-9
C.3.2	Fibrilación ventricular . . . . .	C-10
C.3.3	Arritmias ventriculares . . . . .	C-10
C.4	Dinámica de los Máximos Autovalores . . . . .	C-11
C.4.1	Señales normales . . . . .	C-11
C.4.2	Fibrilación ventricular . . . . .	C-11
C.4.3	Otras arritmias ventriculares . . . . .	C-12
C.5	Exponentes de Lyapunov . . . . .	C-12
C.5.1	Señales normales . . . . .	C-12
C.5.2	Fibrilación ventricular . . . . .	C-13
C.5.3	Otras arritmias . . . . .	C-13
C.6	Reconstrucción de atractores 3D . . . . .	C-14
C.6.1	Señales normales . . . . .	C-14
C.6.2	Fibrilación ventricular . . . . .	C-15
C.6.3	Otras arritmias ventriculares . . . . .	C-16

**D Máquinas de soporte vectorial**



# Índice de Figuras

---

1.1	Arritmia en la que se presentan complejos ventriculares prematuros con R en T . . . . .	3
1.2	Taquicardia Ventricular polimorfa . . . . .	10
1.3	Taquicardia helicoidal . . . . .	11
2.1	Ecuación logística $X_0 = 0,25$ con $c = 1,5$ y $c = 2,0$ . . . . .	25
2.2	Ecuación logística $X_0 = 0,25$ con $c = 3,25$ y $c = 3,54$ . . . . .	25
2.3	Ecuación logística $X_0 = 0,25$ con $c = 3,59$ y $c = 3,99$ . . . . .	26
2.4	Mapas de retorno para $c = 1,5$ y $c = 2,0$ . . . . .	26
2.5	Mapas de retorno para $c = 3,25$ y $c = 3,54$ . . . . .	27
2.6	Mapas de retorno para $c = 3,59$ y $c = 3,99$ . . . . .	27
2.7	Comportamiento para condiciones iniciales muy parecidas . . . . .	28
2.8	Mapas de retorno de orden 1 y 2 para $c = 3,99$ . . . . .	28
2.9	Mapas de retorno de orden 3 y 4 para $c = 3,99$ . . . . .	29
2.10	Efecto del ruido sobre los mapas de retorno . . . . .	29
2.11	Mapas de retorno para un $SNR = 20dB$ y $3dB$ . . . . .	30
2.12	Atractor Puntual . . . . .	31
2.13	Atractor de ciclo límite . . . . .	32
2.14	Atractor toroidal . . . . .	32
2.15	Atractor extraño . . . . .	33
2.16	Dimensión Topológica . . . . .	35
2.17	Dimensión Topológica 0 . . . . .	35
2.18	Dimensión Topológica 1 . . . . .	35

2.19	Línea recta de dimensión fractal 1 . . . . .	39
2.20	Línea de Koch con dimensión fractal 1,26 . . . . .	39
2.21	Obtención de la dimensión de correlación . . . . .	41
2.22	Ejemplos de series temporales con diferentes exponentes de Hurst . . . . .	42
3.1	Diagrama de bloques reconocimiento de patrones . . . . .	49
3.2	Espectro de la señal ECG . . . . .	53
3.3	Respuesta de frecuencia del Kernel pasaaltos ( $\eta = 250$ y $\tau = 10$ ) . . . . .	55
3.4	Comportamiento de la $D_C$ a lo largo de los registros de las diferentes clases . . . . .	58
3.5	Correlación entre las características . . . . .	67
3.6	Representación de la varianza máxima por PCA . . . . .	68
3.7	Análisis de los componentes principales . . . . .	70
A.1	Anatomía del sistema de conducción del corazón . . . . .	A-2
A.2	Señal de electrocardiografía . . . . .	A-3
A.3	Esquema de los complejos, intervalos y segmentos de la señal ECG . . . . .	A-4
A.4	Derivaciones Bipolares y el triángulo de Einthoven . . . . .	A-7
A.5	Derivaciones monopolares de las extremidades . . . . .	A-8
A.6	Derivaciones monopolares precordiales y sus registros . . . . .	A-9
D.1	Hiperplano que separa los datos . . . . .	D-2

# Índice de Tablas

---

2.1	Significado de los valores del máximo exponente de Lyapunov . . . . .	45
3.1	Filtración de la Señal ECG . . . . .	56
3.2	Información mutua promedio . . . . .	57
3.3	Estadística de los valores obtenidos en la serie de estimaciones AMI . . . . .	58
3.4	Estadística de los valores obtenidos en la estimación de la dimensión de correlación . . . . .	58
3.5	Estadística del número de los autovalores retenidos . . . . .	61
3.6	Estadística de los máximos autovalores estimados . . . . .	61
3.7	Estadística de los exponentes de Lyapunov estimados . . . . .	64
3.8	Atractores reconstruidos de señales ECG para las diferentes clases . . . . .	65
3.9	Análisis de Correlación . . . . .	67
A.1	Duración del intervalo $QT$ . . . . .	A-6
A.2	Descripción de las 12 derivaciones del ECG . . . . .	A-10
A.3	Derivaciones electrocardiográficas y polaridad de las ondas . . . . .	A-11
C.1	Información mutua promedio de las señales ECG normales . . . . .	C-3
C.2	Información mutua promedio de las señales ECG con fibrilación ventricular . . . . .	C-5
C.3	Información mutua promedio de las señales ECG con arritmias ventriculares . . . . .	C-7
C.4	Dimensión de correlación para señales ECG normales . . . . .	C-8
C.5	Dimensión de correlación para señales ECG con FV . . . . .	C-8
C.6	Dimensión de correlación para señales ECG con arritmias ventriculares . . . . .	C-9
C.7	Promedio del número de autovalores retenidos para señales normales . . . . .	C-9

C.8	Promedio del número de autovalores retenidos para señales con FV . . . . .	C-10
C.9	Promedio del número de autovalores retenidos para señales con arritmias ventriculares . .	C-10
C.10	Máximos autovalores encontrados para señales normales . . . . .	C-11
C.11	Máximos autovalores encontrados para señales con FV . . . . .	C-11
C.12	Máximos autovalores encontrados para señales con arritmias ventriculares . . . . .	C-12
C.13	Máximo exponente de Lyapunov para señales ECG normales . . . . .	C-12
C.14	Máximo exponente de Lyapunov para señales ECG con FV . . . . .	C-13
C.15	Máximo exponente de Lyapunov para señales ECG con arritmias ventriculares . . . . .	C-13
C.16	Atractores reconstruidos de señales ECG normales . . . . .	C-14
C.17	Atractores reconstruidos de señales ECG con fibrilación ventricular . . . . .	C-16
C.18	Atractores reconstruidos de señales ECG con arritmias ventriculares . . . . .	C-17

# Resumen

---

Se presenta el desarrollo de un sistema de extracción de características discriminantes para señales electrocardiográficas basado en técnicas de dinámica no lineal, orientado a la clasificación de los grupos: 1) normal, 2) con patología fibrilación ventricular y 3) con otras arritmias ventriculares como son la taquicardia y el aleteo ventricular. Para la selección de características, se plantean criterios de mínima independencia estadística y máxima información; este análisis estadístico incluye el análisis de correlación por rangos y componentes principales. Con el objetivo de evaluar el desempeño discriminante de las características calculadas, se utilizó como técnica de clasificación: *máquinas de soporte vectorial*. Se obtuvo que cinco características basadas en técnicas de dinámica no lineal representan suficiente separabilidad entre las clases.

# Abstract

---

This document presents the development of a discriminant-feature-extraction system for ECG signals based on non linear dynamics techniques, aimed to the classification of the following sets: 1) normal, 2) ventricular fibrillation pathology and 3) other ventricular arrhythmias like ventricular tachycardia vent. feature extraction criteria were established based on statistical independence and maximum information viewpoint. This statistical study also includes range correlation analysis and principal components analysis. with the objective of assessing the discriminant capability of the calculated feature a support vector machine was employed as a classifier. It was found that five feature based on nonlinear dynamic technique are sufficient to assure the separability of the classes.

# Agradecimientos

---

Quiero agradecer al director de esta tesis Germán Castellanos por su orientación, sugerencias y colaboración durante este trabajo. Del mismo modo al Profesor Rafael Gutiérrez y Profesor Nicolás Toro por su colaboración y recomendaciones. A los integrantes del *Grupo de Control y Procesamiento Digital de Señales*.

Este trabajo se realiza en el marco del proyecto *Análisis Automatizado de Señales Cardíacas* financiado por el DIMA-Manizales, Acta 38, Resolución CFIA-199 de 2002. Proyecto de investigación: 20201002545.



# Introducción

---

En los sistemas biológicos existe un variado número de ritmos (latido del corazón, los del sueño, etc.). Variadas investigaciones se han hecho respecto a las señales de electrocardiografía (ECG), las cuales describen el comportamiento eléctrico del corazón, que como otros ritmos biológicos, son el resultado de sistemas dinámicos no lineales y complejos. Se ha encontrado que la actividad eléctrica cardíaca presenta secuencias de doblamiento de periodos hasta llegar a un régimen caótico, comportamiento similar al de otros sistemas que desarrollan caos.

Existe una gran variedad de patologías cardíacas que afectan morfológicamente las señales ECG. Especial importancia tiene la señal de ECG que no está dentro de los rangos morfológicos que se ajustan al ritmo normal (*arritmia cardíaca*); dentro de este tipo de patologías cardíacas, se tiene la Fibrilación Ventricular (FV), que causa miles de muertes súbitas al año [45]. Este tipo de arritmia, en muchas ocasiones, es de carácter irreversible en condiciones naturales [85], lo que ha provocado un notable aumento de dispositivos desfibriladores/cardioversores automáticos en las últimas dos décadas. Las investigaciones indican que cuando se presenta la FV, el corazón entra en un régimen caótico diferente, y al someterlo a un *shock* eléctrico, sus parámetros se modifican al punto de hacer que éste regrese a un régimen en que los patrones de comportamiento estén dentro de los márgenes clínicos aceptables [10]; de ahí la necesidad de realizar un reconocimiento automático de esta arritmia y distinguirla de otras parecidas como son la taquicardia y aleteo ventricular. De otra parte, En los últimos años el descenso progresivo en el costo del procesamiento digital de alto rendimiento ha impulsado la introducción de técnicas de análisis automático de señales ECG.

Este trabajo está orientado al uso de técnicas de dinámicas no lineales en la caracterización de señales ECG en estado de FV y hace parte de un proyecto de investigación aprobado por el DIMA-Manizales llamado “*Análisis Automatizado de Señales Cardíacas*” y consta de 6 capítulos, los cuales se mencionan a continuación:

El capítulo 1, expone los conceptos preliminares tanto de ECG como de la patología de estudio del tipo Fibrilación Ventricular. El capítulo 2, es el que detalla las técnicas de análisis de las señales en general, haciendo hincapié en las técnicas no lineales, que a la postre son las que se requieren para llevar a cabo los objetivos de este estudio. El capítulo 3, presenta el marco experimental del trabajo, junto con la descripción de los algoritmos que se utilizaron exponiendo los resultados obtenidos. Finalmente, en el capítulo 4 se presentan las conclusiones de la tesis.

# Objetivos

---

## Objetivo General

Caracterizar señales ECG orientado a la clasificación de las clases normal y con patología fibrilación ventricular empleando técnicas de dinámica no lineal.

## Objetivos Específicos

- Estimar las características de señales ECG empleando técnicas de dinámica no lineal.
- Analizar el poder discriminante para las características propuestas en la clasificación de las señales del tipo normal y con patología fibrilación ventricular.

# Preliminares Fisiológicos y Clínicos

---

El corazón es un órgano en el que se dan varios tipos de ritmos, que se han investigado en forma aislada y han sido caracterizados debido a la posibilidad de distinguirlos en los electrocardiogramas. Las irregularidades de las señales de electrocardiografía (ECG) han sido reconocidas como signos de identificación de alguna enfermedad. Varias décadas de investigación han hecho de (ECG) una disciplina básica para el diagnóstico de desórdenes cardíacos. Debido a su simplicidad, bajo costo y el ser una técnica no invasiva, permite que siga siendo ampliamente utilizada respecto a otras técnicas modernas [4].

La fibrilación ventricular (FV) es un tipo de arritmia cardíaca en que la actividad eléctrica del corazón es totalmente irregular, de forma que no hay ningún latido efectivo. Esta situación lleva sistemáticamente a un estado de paro cardíaco grave que, si no se consigue detener con los procedimientos de reanimación, es irreversible y provoca la muerte. Este tipo de arritmia se presenta en su mayor parte en pacientes que tienen alguna enfermedad cardíaca y especialmente afectación de las arterias coronarias, pudiendo ser la arritmia su primera manifestación. Esta arritmia se presenta en muchas condiciones cardiológicas agudas (infarto de miocardio), y en casos de taquicardias ventriculares que degeneran en ésta última. Las posibilidades de sobrevivir son muy pocas si no se puede dar reanimación cardiopulmonar avanzada rápidamente. De hecho, la posibilidad de superar un paro cardio-respiratorio, aún en las mejores condiciones (dentro de un hospital con cuidados intensivos coronarios y todos los recursos tecnológicos y de personal) son entre el 20 y 25% [53].

## 1.1 Variaciones en el registro de ECG

El término *variante normal* de ECG indica una señal obtenida en una persona normal con algunas variaciones en la morfología *P-QRS-T*. Sin embargo, el registro de señal ECG anormal en un individuo sano y asintomático no se considera necesariamente como cardiópata. Puesto que algunos patrones anormales de ECG que se presentan en individuos normales pueden simular varias formas de cardiopatía, para hacer una interpretación correcta del ECG, se debe realizar una correlación clínica precisa.

### 1.1.1 Patologías

Estas son algunas de las patologías de actividad cardíaca más comunes, así como sus manifestaciones en el ECG [34, 47, 54].

- *Agrandamiento auricular*. En el registro ECG de un corazón con funcionamiento normal, las ondas *P* son pequeñas. Si existe sobrecarga o hipertrofia de la aurícula derecha, esta onda se hace mayor, pero permanece estrecha. Por el contrario, si la aurícula izquierda está agrandada, la onda *P* se ensancha.
- *Hipertrofia ventricular*. Se incrementa la masa muscular debido a un incremento de carga u otros motivos. En este caso, las variaciones en el ECG corresponden al aumento del complejo *QRS* en amplitud y duración.
- *Defectos de conducción ventricular*. Consiste en una anormal iniciación de la activación de los ventrículos. Se manifiesta en una mayor duración del complejo *QRS*.
- *Preexcitación*. Se da cuando la conducción del impulso eléctrico de la aurícula al ventrículo se realiza por canales distintos a la unión auriculo-ventricular. Se manifiesta en un anormal patrón del complejo *QRS*.
- *Infarto*. Cuando el músculo cardíaco se queda sin suficiente aporte sanguíneo (*isquemia*), el potencial transmembrana de las células dañadas se hace menor, resultando un segmento *ST* elevado en la región dañada. Conforme van muriendo las células, se va

perdiendo la onda *R* y se forman ondas *Q*. El cambio final es la inversión y ensanchamiento de las ondas *T*.

- *Patologías asociadas con el entorno cardíaco.* Son alteraciones en el registro ECG debido no al corazón, sino al volumen conductor que lo rodea, como el caso de la pericarditis. En este caso la superficie externa del corazón se inflama. Se produce una elevación en el segmento *ST*.
- *Taquicardia.* Corresponde a un ritmo cardíaco anormalmente alto. Puede ser supraventricular o auricular, y ventricular. Su aparición es debida a la formación de un circuito que permite el inicio de un ciclo continuo automantenido. La taquicardia por *reentrada* sí es debida a la formación de este circuito automantenido, pero existe otro posible mecanismo, la taquicardia por *automatismo*, en el que existe un foco de células que se despolarizan automáticamente por su cuenta, transmitiendo el impulso al resto. En la figura 1.1 se muestra un ejemplo de arritmia.

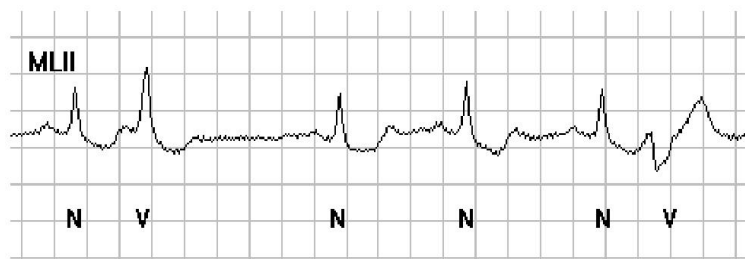


Figura 1.1: Arritmia en la que se presentan complejos ventriculares prematuros con R en T

- *Fibrilación.* Corresponde a un ritmo irregular, asociado con un funcionamiento no útil de las cámaras asociadas. Puede darse en la aurícula o en el ventrículo, siendo este último la causa de muerte en pacientes cardíacos.
- *Bloqueo AV.* Cuando el tejido no transmite el impulso de aurícula a ventrículo, el corazón puede parar completamente. Frecuentemente, ocurre cuando el músculo ventricular responde con un ritmo muy bajo, de unos 30lpm o incluso menor. Estos latidos son de *escape*, pues al no llegarle impulso, el ventrículo termina por despolarizarse automáticamente, aunque sólo puede hacerlo muy lentamente.

## 1.1.2 Arritmia

Una arritmia es el cambio en el ritmo normal del corazón. La arritmia se identifica por el lugar del corazón donde se originan (aurículas o ventrículos) y por lo que le sucede al ritmo del corazón cuando ellas ocurren. Un estudio detallado de los diferentes tipos de arritmia puede consultarse en [57]. Entre los principales tipos de arritmia están:

### Originadas en las aurículas

- *Arritmia sinusal*: Cambios cíclicos en el ritmo sinusal (normal) del corazón durante la respiración, con aumento y disminución alternantes en la frecuencia de los latidos. Es común en niños y frecuente en adultos.
- *Taquicardia sinusal*: Genera estímulos en el seno auricular con una frecuencia mayor a 100 lpm. Esta es una reacción fisiológica normal al esfuerzo, la emoción, la digestión, algunos estimulantes del tipo de la adrenalina, la cafeína y algunos tóxicos. En el registro ECG simplemente se aprecia el aumento en la frecuencia cardíaca, aunque los valores de *P*, *QRS* y *T* puedan ser normales, dependiendo de la causa que provoca la taquicardia.
- *Bradycardia sinusal*: Resulta de la iniciación de estímulos por el seno a una frecuencia menor a 60lpm. Puede tratarse de una reacción fisiológica al reposo, debido a la acción de ciertas drogas o al aumento de la presión intracraneana. El registro ECG muestra complejos *P*, *QRS* y *T* esencialmente normales y la disminución en la frecuencia antes mencionada.
- *Síndrome del seno enfermo*: El nodo del seno no dispara su señal adecuadamente, de tal forma que el ritmo del corazón disminuye. A veces el ritmo cambia arriba y abajo, entre un ritmo rápido (taquicardia) y uno lento (bradicardia).
- *Contracción supraventricular o contracción auricular prematura (PAC)*: Un latido ocurre anticipadamente en la aurícula, originando que el corazón se contraiga antes del siguiente latido regular.

- *Taquicardia supraventricular (SVT)*: taquicardia auricular parasistólica (PAT): Una serie de latidos anticipados en la aurícula aceleran el ritmo del corazón. En la PAT, periodos repetidos de latidos muy rápidos inician y terminan repentinamente.
- *Aleteo auricular*: Señales disparadas rápidamente hacen que los músculos en la aurícula se contraigan velozmente, llevando a un ritmo cardíaco muy rápido y estable.
- *Fibrilación auricular*: En las aurículas se disparan señales eléctricas en forma muy rápida y descontrolada. A los ventrículos les llegan señales eléctricas de un modo completamente irregular, de tal forma que los latidos del corazón son completamente irregulares.
- *Síndrome de Wolff-Parkinson-White*: Trayectorias anormales entre las aurículas y los ventrículos hacen que lleguen señales eléctricas a los ventrículos en forma adelantada y entonces se transmiten de nuevo hacia las aurículas. Como consecuencia, se pueden desarrollar ritmos cardíacos muy rápidos durante los rebotes entre las aurículas y los ventrículos.

### **Originadas en los ventrículos**

- *Complejos ventriculares prematuros (PVC)*: Una señal eléctrica de los ventrículos origina un latido anticipado. El corazón, entonces, parece tener una pausa hasta que ocurre el siguiente latido del ventrículo en forma normal.
- *Taquicardia ventricular*: El corazón late rápido debido a señales eléctricas que llegan de los ventrículos (en vez de llegar de las aurículas).
- *Fibrilación ventricular*: En los ventrículos se disparan señales eléctricas de una forma muy rápida y descontrolada, haciendo que el corazón se estremezca en vez de latir y bombear sangre.



### 1.1.3 Variabilidad de la frecuencia cardíaca

Una de las características de la señal ECG más importante es la denominada *Variabilidad de la Frecuencia Cardíaca (VFC)*, la cual se obtiene estimando el tiempo transcurrido entre dos ondas *R* consecutivas, con lo cual se obtienen los puntos que conforman la señal VFC. El análisis de la VFC, tanto en el dominio temporal como en el frecuencial, se emplea como elemento importante en el diagnóstico y tratamiento de diversos casos clínicos. Una ventaja del análisis de la VFC es que se trata de una herramienta de diagnóstico no invasivo que puede detectar patologías cardíacas sutiles que de otra forma, solo podrían ser detectadas con pruebas extensivas [1]. En el complejo sistema de regulación de la frecuencia cardíaca intervienen varios factores, destacando fundamentalmente, el nodo sinuauricular el cual recibe señales del sistema nervioso autónomo [46]. En [40], se propone que el análisis de VFC como un proceso con dinámica no lineal, de naturaleza fractal, cuyo comportamiento complejo podría ser explicado a partir de modelos caóticos. El control del ritmo cardíaco es perturbado por alteraciones en la función del sistema nervioso autónomo en un número importante de síndromes clínicos que incluyen la muerte súbita cardíaca, la falla congestiva, la intoxicación con cocaína, el sufrimiento fetal, el envejecimiento fisiológico y otras más. Estas condiciones están asociadas con una pérdida de la complejidad de la dinámica del latido cardíaco. Tales cambios, que no son detectables usando la estadística convencional, pueden ser cuantificados usando los nuevos métodos derivados del análisis no lineal como es la *dimensión de correlación*. Por tanto, una variedad de enfermedades que alteran la función autonómica llevarán a una pérdida de la complejidad fisiológica y por tanto, a una mayor regularidad. La dinámica del ritmo sinuauricular es típicamente menos compleja en este tipo de pacientes que en individuos sanos. En [38] se enfatiza que cuando se cuantifican pérdidas de este tipo de complejidad no lineal, no necesariamente van acompañadas por una disminución de la varianza calculada por los métodos estadísticos tradicionales.

## 1.2 Fibrilación Ventricular

### 1.2.1 Fisiología y antecedentes clínicos

La fibrilación ventricular es un proceso patológico del tipo arritmia ventricular, incluida en el conjunto general de arritmias cardíacas. Las arritmias ventriculares se observan frecuentemente, pero no todas son malignas, ya que por ejemplo, pueden aparecer extrasístoles benignas. En cambio, también pueden producir muerte súbita debido a taquicardias ventriculares y fibrilación. Por ello, la rápida detección de estas últimas se convierte en un factor relevante ya que la vida del paciente puede encontrarse en peligro. Dicha arritmia normalmente está asociada con complicaciones en problemas de las arterias coronarias. Mediante estudios realizados en autopsias se ha comprobado que en la mayor parte de casos de muerte súbita no existían lesiones debido a una patología crónica, por lo que se constata que una arritmia de este tipo puede desencadenar un proceso de degeneración irreversible de fatídicas consecuencias.

La muerte súbita en personas que no han mostrado signos de ninguna patología anterior sigue siendo una causa de muerte bastante común, sin que todavía se tenga suficientemente claras las causas iniciales que las provocan. Excluyendo aquellas muertes debidas a accidentes o crímenes, análisis forenses han demostrado que el tejido miocárdico sufre graves alteraciones en la mayoría de los casos con lo que, junto con otras exclusiones realizadas, se llega a la conclusión de que la causa de la muerte en estos casos es de origen cardíaco.

#### **Mecanismos celulares de generación de arritmia**

A nivel celular, los mecanismos electrofisiológicos de generación de arritmia cardíaca se pueden dividir en tres grupos principales: automatismo aumentado (o automaticidad elevada), actividad desencadenada (o disparada) y reentrada.

- *Automatismo aumentado.* Este efecto se produce cuando se acelera el proceso automático de despolarización diastólica lenta en la fase 4 del potencial de acción [57].

La activación de células adyacentes se produce cuando el potencial de reposo llega a su umbral de acción y se activa. En condiciones patológicas, el potencial de reposo es menos negativo (-60mV) que en estado normal (-90mV), por lo que el ritmo se acelera ya que la activación es más rápida, correspondiendo este bajo potencial a una despolarización parcial y produciendo que el canal de sodio se desactive. Uno de los factores que puede producir este tipo de arritmia es la isquemia, ya que ésta incrementa la concentración extracelular de potasio.

- *Activación desencadenada.* Con este término se especifica el proceso mediante el cual una arritmia no se transmite ni manifiesta en una célula en reposo, pero una vez que se ha producido su estimulación eléctrica ésta se incorpora al conjunto de células en actividad arrítmica. Se distinguen dos tipos principales. En el primer tipo, se produce como resultado de post-despolarización precoz en la fase 3 del potencial de acción correspondiente a la onda T en un ECG de superficie. La segunda clase es debida a la post-despolarización tardía en el final de la fase 3 o inicio de la fase 4 del potencial de acción que ocurre en el final de la onda T o la parte restante del periodo de diástole.
- *Reentrada.* Existen tres requisitos esenciales para que se inicie un fenómeno de reentrada. En primer lugar deben existir dos caminos separados de conducción con diferentes propiedades funcionales electrofisiológicas, el segundo factor es que debe haber un bloqueo unidireccional normalmente inducido por el pulso precedente y localizado en la unión entre el miocardio sano y el afectado; y finalmente, un retardo en la conducción, impidiendo que el frente de activación encuentre miocardio excitable más allá del lugar del bloqueo. Dependiendo de si los circuitos de reentrada ocurren entre las fibras del haz de Purkinje y el miocardio sano (micro reentrada) o dichos circuitos comprenden incluso las ramas externas del haz y una gran extensión de miocardio (macro reentrada), el tratamiento clínico es diferente. A menudo, la reentrada puede confundirse con una actividad disparada y su finalización. Las características dependientes del tiempo apoyan la explicación del mecanismo de inicio de la taquicardia ventricular, es decir, al existir extraestímulos precoces el tiem-

po de conducción se incrementa y se hace anormalmente lento en fibras conductoras, permitiendo de esta forma a los potenciales más retardados transmitir la activación al miocardio adyacente de igual forma que la estimulación de las fibras en una zona de conducción retardada habilita la reactivación del miocardio adyacente. El conocimiento de estos mecanismos es importante ya que la taquicardia ventricular puede iniciarse y finalizarse mediante estímulos programados, o una alta descarga rápida. Resulta difícil diferenciar entre fenómenos de reentrada.

### **Taquicardia Ventricular**

Este tipo de taquicardia es originada por debajo de la bifurcación del haz de His y consiste en al menos tres complejos con una frecuencia entre 100 y 250 complejos por minuto. Normalmente el diagnóstico de esta patología no suele presentar problemas durante el análisis visual directo del registro ECG, aunque es complejo su distinción de la taquicardia supraventricular con aberraciones o que involucre situaciones más complejas como la actuación de las fibras de Mahaim. Su aparición se refleja en una modificación de la actividad auricular y ventricular.

Las características típicas de la taquicardia ventricular (TV) uniforme o monomorfa son:

- Taquicardia regular con un ritmo entre 100 y 200 complejos por minuto.
- Complejos ventriculares monomórficos deformados en anchura ( $QRS > 0.12$  s).
- Disociación auriculo-ventricular anterógrada.

Además de la taquicardia ventricular monomorfa, existen varios tipos de taquicardia ventricular polimorfa como se puede ver en la figura 1.2.1 y los conocidos *Torsade des Point* en la figura 1.3 [30]. Ambos tipos de taquicardia son muy particulares, por cuanto son fácilmente confundibles con la fibrilación ventricular, pues se trata de señales altamente irregulares que suelen degenerar en fibrilación ventricular y se debe aplicar un tratamiento de electrochoque al igual que para la FV. Por otro lado, un ritmo de TV puede degenerar en *Flutter Ventricular*, que tiene las mismas características que TV, pero con una mayor frecuencia de

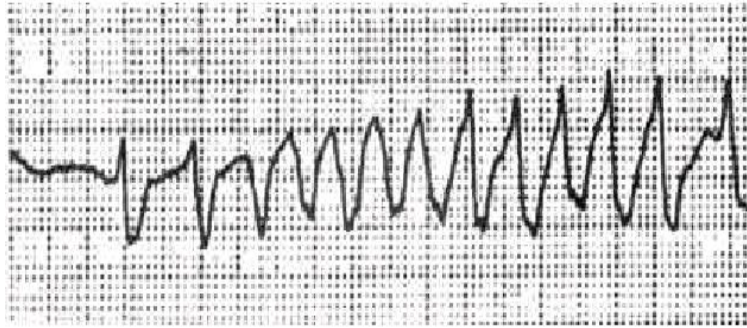


Figura 1.2: Taquicardia Ventricular polimorfa. (Tomada de [26])

latidos por minuto y con un aspecto en el ECG de señal prácticamente sinusoidal.

El ritmo depende del nodo sinusal y normalmente es más lento que el ritmo de la TV. Para confirmar la presencia de TV se deben identificar las ondas *P* capaces de producir captura o fusión, aunque esto puede resultar difícil con electrodos de superficie usuales. Estas fusiones indican que el foco ventricular ha sido modificado por una influencia externa (normalmente de origen supraventricular). A pesar de que esa es la norma general pueden existir excepciones ya que, por ejemplo la actividad auricular se puede interpretar como fibrilación auricular o taquicardia auricular isorrítmica.

El ritmo ventricular puede tener, en ocasiones, una de las siguientes características:

- Ritmo irregular en el caso de taquiarritmia ventricular, lo que supone una dificultad para diferenciarle de fibrilación auricular con un corto periodo refractario del haz de Kent (taquicardia pseudo ventricular).
- Ritmo menor de 100 lpm.
- Ritmo acelerado mayor de 200 lpm con una onda sinusoidal regular de amplitud grande que se denomina *Flutter Ventricular* (VFL).

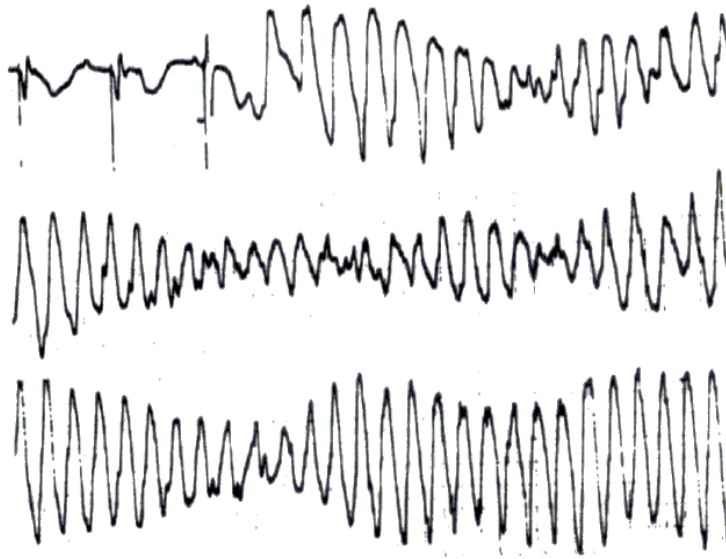


Figura 1.3: “Torsade des Points” o Taquicardia helicoidal. (Tomada de [26])

La forma de complejo *QRS* normalmente es más ancha de lo normal, y sólo excepcionalmente es de complejos *QRS* estrechos. Los complejos ventriculares pueden clasificarse dentro de dos grupos: en el primero los complejos cambian su forma y conllevan un cambio del ritmo, y en el segundo caso, la configuración cambia progresivamente de pulso en pulso de tal forma que existen todo tipo de formas entre TV y fibrilación ventricular (FV).

### 1.2.2 Registro ECG para FV

El ECG manifiesta un ritmo completamente irregular en anchura, amplitud y frecuencia.

- Los complejos *QRS* son reemplazados por deflexiones irregulares y rápidas.
- Ritmo muy rápido, extremadamente irregular y multiforme, con complejos de amplitud variable.
- Onda *P* o cualquier ritmo auricular no identificable.
- Imposible determinar frecuencia ventricular.

- No son identificables los componentes de una onda de registro ECG normal.

### **1.2.3 Caracterización automática de FV**

En la caracterización de estados de normalidad o de patología de señales de ECG han sido utilizadas diferentes tipos de técnicas, desde las más sencillas, pasando por técnicas de modelado matemático, reconocimiento de patrones y estadística (básicamente bayesiana), hasta el empleo de técnicas de inteligencia artificial [22]. Además de las redes neuronales, en los últimos tiempos se ha empleado frecuentemente para caracterizar las señales ECG la transformada Wavelet (WT) [24] y [18]. Diferentes trabajos han sido presentados en los últimos años con relación al tratamiento de las arritmias cardíacas y sistemas de diagnóstico automático [56]. Diferentes desarrollos en el campo de las arritmias están enfocados al análisis de los registros Holter [36]. Otros trabajos de sistemas automáticos de diagnóstico en cardiología están orientados a identificar un número muy reducido de patologías como taquicardias y latidos ectópicos [97]. ERASMUS es un prototipo diseñado e implementado de un sistema de consulta basado en conocimiento para la interpretación de arritmias complejas [104]. Fredric y Soowhan (1996) diseñaron un sistema basado en lógica difusa que permite clasificar arritmias cardíacas mediante el análisis de los complejos QRS del ECG [33]. En la actualidad, diferentes tipos de electrocardiógrafos presentan un cierto nivel de diagnóstico a partir de la señal ECG [36].

Dado que la detección de fibrilación ventricular (FV) es un asunto de gran importancia, se han realizado diversos estudios, entre los cuales, se han aplicado técnicas matemáticas en el dominio del tiempo y de la frecuencia, y recientemente se han comenzado a emplear nuevas técnicas como las de tiempo-frecuencia, análisis mediante Wavelets, redes neuronales y caos. El objetivo final de los algoritmos desarrollados consiste en obtener un diagnóstico preciso de la patología para su empleo en sistemas de ayuda médica mediante la implementación hardware del equipo y que a través de la emisión de un aviso de alerta permita la intervención del equipo médico e incluso pueda servir como fuente de activación de un sistema de desfibrilación automática que permita una actuación inmediata. Actualmente, existen en el mercado aparatos que incorporan ayuda a la decisión de desfibrilación.

Un análisis comparativo muy interesante en lo que a bondad de funcionamiento se refiere, es el estudio realizado por A. Murray en [65]; éste, realiza una comparativa entre 5 desfibriladores comerciales, brindando buenos resultados de funcionamiento que mejoran en algunos casos los de algoritmos publicados. Aunque adolecen de una mayor especificidad ante presencia de ruido. Los primeros algoritmos de detección aplicados a un desfibrilador automático fueron desarrollados por Dyack y Wellbron en 1970 [17]. Posteriormente, en los años 80 surgieron algoritmos que, además de los criterios de ritmo cardíaco incluían criterios de morfología de la señal [16]. Throne [92] presenta una solución computacionalmente eficiente para medir la autocorrelación normalizada. Los RSN presentan alta dependencia por su ritmicidad, mientras que la FV refleja baja dependencia por su falta de coordinación. La principal dificultad de este método está cuando se tienen episodios de Aleteo Ventricular (AV). Thakor et. al. [90] plantea un método que estima el número de ondas fundamentales, por unidad de tiempo (1 s), que se generan en la señal ECG; no obstante, a partir del estudio realizado, se comprobó que el algoritmo asociado tarda en detectar FV ó TV unos 7 s. Ropella et. al. [77] presentó la Magnitud de Coherencia Cuadrada (MCC). Posteriormente Sierra et. al. [83] propone calcular la MCC con electrodos superficiales. La dificultad de este método está en que el AV, al ser un ritmo organizado periódicamente, hace que la MCC sea alto. Otro problema que sucede en la variante de Sierra, es que la Fibrilación Auricular (FA) presenta MCC baja y puede mezclarse con la actividad ventricular en la señal ECG superficial produciendo interpretaciones erróneas. Estas dificultades son salvadas en posteriores trabajos de Sierra et. al., combinando la relación de bandas de potencia y la medición del potencial isoelectrico [12]. Se puede resumir que en estos métodos, las medidas cuantitativas que se establecen no caracterizan totalmente la FV de algunas arritmias, como la TV y la FA. Orozco R y Pascau A. son quienes dan a conocer un método, el cual estima cuantitativamente el potencial isoelectrico mediante ECG en forma normalizada [74]. Este método tiene la dificultad de que no siempre garantiza que se anule el potencial isoelectrico en los episodios de FV debido fundamentalmente a que, a lo largo de estos episodios, puede cambiar aleatoriamente la energía de las ondas de alta frecuencia y como consecuencia se generan pequeñas transiciones que provocan que se presente [46] y [85].



Muchos esfuerzos se han realizado en la búsqueda de métodos para la detección automática de FV mediante electrocardiografía (ECG), con el fin de obtener un modelo capaz de distinguir esta arritmia de otros estados rítmicos. Al ser la FV una arritmia de las más serias y peligrosas, merece un estudio muy cuidadoso con el fin de analizarla mediante técnicas no lineales por medio de las señales ECG.

# Análisis de Señales ECG

---

Se presentan para el análisis de señales ECG diversas técnicas, tanto lineales, como no lineales, todas ellas orientadas al reconocimiento del estado funcional cardíaco, el cual exige de las características seleccionadas de información suficiente poder discriminante. La extracción de características es una de las etapas de la cual depende en gran medida el buen desempeño del sistema de reconocimiento [67].

## 2.1 Técnicas lineales

### 2.1.1 Procesos aleatorios independientes

#### Representación estacionaria

El registro digital de ECG puede ser modelado como un proceso estocástico *estacionario*, esto es, con características de aleatoriedad invariantes en el tiempo. Asumiendo la ergodicidad del proceso estacionario cuando los valores promedios de tiempo y de ensamble son idénticos [71], la estimación de los momentos de una realización  $\xi(t)$  dada en el intervalo de tiempo  $(0, T)$ , en forma general puede ser descrita como

$$\widetilde{E}^n [\xi(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^n(t) dt, \quad n \in \mathbf{Z} \quad (2.1)$$

Las características de aleatoriedad que representan los procesos ergódicos, teniendo en cuenta la estimación (2.1), toman la forma:

1. Momentos simples

$$\begin{aligned}\widetilde{E}^n [\xi(t)] &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi^n(t) dt, n \in \mathbf{Z} \\ \widetilde{E}^n [\xi(t) - \overline{\xi(t)}] &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (\xi(t) - \overline{\xi(t)})^n dt, n \geq 2, n \in \mathbf{Z}\end{aligned}\quad (2.2)$$

2. Momentos compuestos ( Función de autocorrelación)

$$\widetilde{E}^n [\xi(t) \xi(t + \tau)] = R_\xi(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T (\xi(t) - \overline{\xi(t)}) (\xi^*(t + \tau) - \overline{\xi(t)}) dt \quad (2.3)$$

La descripción de una señal aleatoria en el dominio de la frecuencia se puede realizar por medio de la densidad espectral de potencia  $S_\xi(\omega)$ , recurriendo a la transformada de *Winner-Jinchin* [70], que se determina como:

$$S_\xi(\omega) = \widehat{R}_\xi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} [\xi(t) \xi(t + \tau)] e^{j\omega\tau} d\tau, \quad (2.4)$$

siendo  $\widehat{R}_\xi$  la transformada de Fourier de la respectiva función de correlación. En la representación del proceso estacionario  $\xi(t)$  dado en el intervalo de análisis  $t \in T$ , puede ser empleada la *Representación Generalizada de Fourier*, así:

$$\xi(t) = \sum_n \xi_n \phi_n(t), t \in T \quad (2.5)$$

donde

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \frac{1}{T} \int \left| f(t) - \sum_{n=0}^N f_n \phi_n(t) \right|^2 dt, \text{ donde } \overline{\varepsilon^2} \geq 0 \quad (2.6)$$

Sin embargo, los coeficientes  $\xi_n$  definidos en (2.6) se convierten en magnitudes aleatorias, con lo cual la convergencia de (2.5) al proceso aleatorio  $\xi(t)$ , frecuentemente se entiende en sentido del valor cuadrático medio. En el análisis de los procesos aleatorios, es también importante la selección del conjunto base  $\{\phi_k : k = \overline{0, N-1}\}$ , que en general se puede llevar a cabo de dos maneras: selección de bases que brinden el menor error de representación

para un número dado  $N$  de coordenadas, o bien, la menor cantidad de coordenadas  $N$  para un valor dado de error en la reconstrucción de las señales. Además, es preferible, que los coeficientes de la serie (2.5) sean no correlacionados, por cuanto en este caso la tarea de selección se resuelve relativamente fácil. Si el proceso aleatorio  $\xi(t)$  está centralizado y le corresponde la función continua de correlación  $R_\xi(\tau)$  se puede demostrar que para un valor determinado de  $N$ , la esperanza matemática del error cuadrático medio integral de la representación del proceso [82] por medio de la expansión (2.5)

$$E \left\{ \int_0^T \left[ \xi(t) - \sum_{k=0}^{N-1} \xi_k \phi_k(t) \right]^2 dt \right\} \quad (2.7)$$

será mínima, si el conjunto base  $\{\phi_k : k = \overline{0, N-1}\}$  cumple la ecuación homogénea de Fredholm de segundo tipo, así

$$\lambda_k \phi_k(t) = \frac{1}{T} \int_0^T R_\xi(t - \tau) \phi_k(t) dt, \forall k = \overline{0, N-1}, t \in T \quad (2.8)$$

La solución genera un conjunto de valores propios  $\lambda_k > \lambda_{k+1}, \forall k = \overline{0, N-1}$  y las correspondientes funciones propias  $\{\phi_k(t), \forall k = \overline{0, N-1}\}$  del núcleo  $R_\xi(t - \tau)$  de la ecuación, las cuales son ortogonales, y en forma general, pueden ser escogidas, de tal manera, que cumplan la condición de ortonormalidad. Los coeficientes en la expansión (2.5) del proceso aleatorio empleando el conjunto base ortonormal de (2.8) resultan ser no correlado, que para el caso de procesos aleatorios gaussianos, estos cumplen la condición de completa independencia estadística. Así mismo se podrá demostrar que

$$E \{ \xi_m \xi_n^* \} = \begin{cases} \lambda_m, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

$$E \{ \xi^2(t) \} = R_\xi(0) = \sigma_\xi^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$$

Para un sistema base  $\{\phi_k(t), \forall k = \overline{0, N-1}\}$ , que cumpla la ecuación (2.8), la esperanza matemática del error cuadrático medio (2.7), sobre el intervalo de descomposición  $T$ , está

dada por la expresión

$$\begin{aligned}
 \overline{\varepsilon^2} &= \frac{1}{T} E \left\{ \int_0^T \left[ \xi(t) - \sum_{k=0}^{N-1} \xi_k \phi_k(t) \right]^2 dt \right\} \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T E \{ \xi^2(t) \} dt - \frac{2}{T} \int_0^T \sum_{k=0}^{N-1} E \{ \xi_k \xi(t) \} \phi_k(t) dt + \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} E \{ \xi_m \xi_n \} \phi_m(t) \phi_n(t) dt \\
 &= \sigma_\xi^2 - \sum_{k=0}^{N-1} \sigma_{\xi_k}^2 \tag{2.9}
 \end{aligned}$$

La expresión (2.9) permite encontrar el número de términos de la expansión (2.5), que provea el valor dado de error de representación. La descomposición de un proceso aleatorio con función de correlación continua en la serie (2.5), en la cual las funciones base (2.8) se denomina serie de expansión de *Karhunen-Loeve* (K-L). La descomposición del ruido blanco gaussiano, al cual le corresponde la función de correlación  $R_\xi(\tau) = N_0\delta(\tau)/2$  se puede descomponer en el intervalo de tiempo  $(0, T)$  empleando cualquier sistema de funciones ortonormales. En este caso, los coeficientes de la expansión corresponden a valores aleatorios del tipo gaussiano e independientes estadísticamente, todos ellos con varianza igual a  $\sigma_\xi^2 = N_0/2$ . Aunque la expansión (K-L) asegura el mínimo de términos de  $N$  en (2.5) para un valor dado de error de representación  $\overline{\varepsilon^2}$ , sin embargo, su empleo práctico es bastante limitado [82], debido a las siguientes restricciones: la función de correlación del proceso aleatorio no siempre es conocida, el procedimiento de búsqueda de la solución de (2.8), en general, no es conocido, y por último, la realización técnica de las funciones base  $\{\phi_k\}$  (excluyendo el caso de funciones armónicas simples) es bastante compleja. Por esto, en la práctica en calidad de funciones base se emplean las ortogonales que que provean un valor suficientemente cercano al mínimo, pero que puedan tener implementación relativamente simple. Entre estas bases están las funciones de Fourier, los polinomios de chebyshev y Legendre, además de las funciones de Haar y Walsh.

La representación a partir del sistema base de Fourier dada por:

$$\xi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k \exp(jk\omega_0 t), \text{ donde } \xi_k = \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) \exp(-jk\omega_0 t) dt \quad (2.10)$$

resulta ser óptima en caso de procesos aleatorios periódicamente estacionarios, definidos como

$$E \{ \xi(t + kT) \} = E \{ \xi(t) \}, R_\xi(\tau + kT) = R_\xi(\tau), \forall k \in \mathbb{Z}$$

Donde los coeficientes  $\xi_k$  definidos en (2.10) son no correlados, con varianza igual al término  $k$  de la serie de Fourier de la función de correlación del proceso aleatorio, esto es:

$$\sigma_{\xi_k}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T R_\xi(\tau) \exp(-jk\omega_0 \tau) d\tau$$

Para los procesos estacionarios no periódicos la base exponencial no es la óptima, por tanto, los coeficientes de la descomposición serán correlacionados. Sin embargo, en los procesos ergódicos, tomando la condición  $T \rightarrow \infty$ , los coeficientes de Fourier resultan ser no correlados [71] y la transformada de Fourier se aproximan a la expansión (K-L). El valor del error cuadrático medio debido al truncamiento de la serie (2.10) en la representación del proceso ergódico  $\xi(t)$  con valor medio igual a cero, es igual a [70]:

$$\overline{\varepsilon^2} \approx 2\sigma_{\xi_k}^2 / \pi^2 N$$

### Representación no estacionaria

Dado que las señales de ECG son altamente no estacionarias, se requiere entonces del análisis no paramétrico durante la extracción de su información. La Transformada *Wavelet* (WT), toma ventaja al brindar la posibilidad de extraer, en forma de lista de coeficientes, las principales características o aproximación de una señal. La WT debe ser aplicada a cada latido en el dominio discreto, y los coeficientes obtenidos son incluidos en la secuencia de salida  $x'_i[m]$ . Este tipo de transformada permite la localización conjunta de eventos

en tiempo-frecuencia; este análisis incluye la técnica de ventaneo con regiones de tamaño variable. Se usan largos intervalos de tiempo donde se quiere información más precisa a baja frecuencia y regiones cortas donde se quiere información de alta frecuencia. El análisis *Wavelet* puede encontrar aspectos como tendencias, puntos de quiebre, discontinuidades en derivadas grandes, autosimilaridad, etc. [61]. Si se desea una buena localización de la distribución resultante en el tiempo se escoge una ventana estrecha en tiempo, que va dividiendo el plano tiempo-frecuencia en rectángulos alargados en el sentido de la frecuencia y estrechos a lo largo del tiempo. Si por el contrario, se desea una buena discriminación en la frecuencia de la distribución, las ventanas se rotan en su recubrimiento del plano  $90^\circ$ . La uniformidad del recubrimiento, una vez elegida la ventana, lleva a difíciles compromisos de resoluciones que no siempre encuentra fácil solución.

En la WT, la descomposición se realiza en diferentes componentes frecuenciales, pero de tal manera que cada una de las componentes tenga una resolución de acuerdo con su escala [62]. La noción de *escala* se relaciona directamente con su interpretación cartográfica. Una versión de una señal cualquiera  $f(t)$  aumentada en escala, será una señal similar pero muestreada a una tasa mayor ( $f(t) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}f(t/2)$ ). De forma similar, disminuir la escala de dicha señal lleva consigo la reducción de la velocidad de muestreo, manteniendo una forma de onda similar ( $f(t) \rightarrow \sqrt{2}f(2t)$ ). Partiendo de una señal conocida a una escala (de referencia), se puede llegar de muchas maneras a una nueva versión de dicha señal a otra escala predeterminada. La búsqueda de una única señal a la escala destino, define el concepto de *resolución*, la cual depende de la cantidad de información presente en una señal; a mayor información mayor resolución tendrá la señal. Es importante tener presente, que si la señal original tiene resolución 1, nunca se podrá aumentar dicha resolución sin añadir más información. La función  $\psi(t)$  de variable real  $t$  que se conoce como función *Wavelet madre* y que debe oscilar en el tiempo, además debe estar bien localizada en el dominio temporal. La localización temporal se expresa en la forma habitual de rápido decaimiento hacia cero cuando la variable independiente  $t$  tiende al infinito. La idea de

oscilación de la función se traduce en la siguiente formulación:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (2.11)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^{m-1} \psi(t) dt = 0 \quad (2.12)$$

siendo  $(m - 1)$  el valor del orden del momento de la función  $\psi(t)$ . A partir de la función madre, se generan el resto de funciones de la familia mediante cambios de escala y traslaciones  $\{\psi_{a,b}(t), a > 0, b \in \mathbb{R}\}$ . La función madre, tradicionalmente se ajusta a escala unidad. El *parámetro de escala*  $a$  queda asociado a un estiramiento o encogimiento de la función madre. Así, dada una función localizada en el tiempo  $s(t)$ , su versión escalada  $s_a(t)$  se define como

$$s_a(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} s\left(\frac{t}{a}\right), a \in \mathbb{R}, a > 1 \quad (2.13)$$

esta función mantiene la misma forma que  $s(t)$  pero sobre un intervalo de representación (soporte) más amplio. Si el parámetro de escala se hace menor que 1, pero manteniéndolo siempre positivo (para evitar una inversión de la función) se obtiene una compresión del soporte de la función. El *parámetro de traslación*  $b$ , permite la localización temporal de la distribución de energía. A partir de la función madre  $\psi(t)$ , se generan las funciones Wavelet  $\psi_{a,b}(t)$  mediante operaciones conjuntas de cambio de escala y traslación

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (2.14)$$

En [62], se demuestra que si la función madre  $\psi(t)$  es real, entonces la familia de funciones definidas por su traslación y escalamiento conforman una base completa del espacio, y por lo tanto, se puede representar cualquier función (señal de energía finita  $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ ) mediante una combinación lineal de las funciones  $\psi_{a,b}(t)$ , calculando los coeficientes de tal descomposición en la forma del producto escalar. La Transformada Wavelet Continua se describe por:

$$C(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{a,b}^*(t) dt \quad (2.15)$$

$$C(a, b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = \langle f(t), \psi_{a,b}(t) \rangle$$



donde tanto el parámetro  $a$  es denominado de *escala*, mientras  $b$  se denomina de *traslación*, ambos varían de forma continua por todo el eje real, esto es,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ . La función  $f(t)$ , puede ser reconstruida unívocamente [21] utilizando la expresión 2.16.

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle f(\tau), \psi_{a,b}(\tau) \rangle \psi_{a,b}(t) \frac{dad b}{a^2} \quad (2.16)$$

donde la constante  $C_\psi$ , denominada *condición de admisibilidad*, depende sólo de la función Wavelet madre  $\psi(t)$ , de acuerdo con

$$C_\psi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(\xi)|^2 |\xi|^{-1} d\xi < \infty \quad (2.17)$$

La condición de admisibilidad asegura que la función Wavelet madre no tenga contenido a frecuencia nula (o que éste resulte despreciable)(ver ecuación 2.11) y con ello, que las versiones dilatadas resultantes de la función madre estén todas centradas a frecuencias diferentes. A diferencia del caso de las expresiones de Fourier, la transformada  $f(t) \rightarrow C(a, b)$  representa con mucha redundancia una función de una variable en un espacio bidimensional y por lo tanto, estas funciones Wavelet no forman una base ortonormal real. Un muestreo apropiado de los parámetros de la función Wavelet permite eliminar la redundancia, obtener una base ortonormal de Wavelets de soporte compacto y definir la metodología para el cálculo eficiente de los coeficientes Wavelet.

### 2.1.2 Procesos aleatorios cíclicos

El registro digital de ECG, asumiendo su estacionariedad, puede ser analizado por medio de las *series de tiempo*, las cuales contienen movimientos o variaciones características (*componentes*) que pueden medirse y observarse por separado. El modelo básico de la serie de tiempo de cualquier proceso aleatorio tiene cuatro componentes mas el ruido de medición, lo cual se puede escribir así:

$$Y_t = T_t + C_t + S_t + u_t + \eta_t \quad (2.18)$$

donde [88]:

- *Componente de tendencia* ( $T_t$ ). Se refiere a la dirección general a la que una serie de tiempo parece dirigirse en un intervalo grande de tiempo. La tendencia representa el

comportamiento predominante de la serie. Esta puede ser definida meramente como el cambio de la media a lo largo de un periodo.

- *Componente cíclico* ( $C_t$ ). Es aquella parte de la serie que, conforme pasan los periodos mantiene una cierta regularidad en su comportamiento, esto se refiere a oscilaciones de larga duración alrededor de la curva de tendencia, las cuales pueden ser o no ser periódicas, es decir, pueden o no seguir caminos análogos en intervalos de tiempo iguales. Se caracterizan por tener lapsos de expansión y contracción.
- *Componente estacional* ( $S_t$ ). Representa un movimiento periódico en la serie de tiempo.
- *Componente aleatorio* ( $u_t$ ). Se refiere a movimientos esporádicos o de corto plazo de las series de tiempo, debido a sucesos que se producen de manera ocasional o imprevisible. Representan todos los tipos de movimientos de una serie de tiempo que no sea tendencia, variaciones estacionales y fluctuaciones cíclicas.
- *Ruido de medición* ( $\eta_t$ ). Se refiere a puntos de la serie que se escapan de lo normal. Es una observación de la serie que corresponde a un comportamiento anormal del fenómeno (sin incidencias futuras) o a simplemente valores anómalos de medición.

## 2.2 Técnicas de dinámica no lineal

Los sistemas no lineales son sistemas que no responden a los estímulos en proporción directa. En ciertas circunstancias, los sistemas determinísticos no lineales, entran en un estado llamado *caos*, que presentan una marcada sensibilidad a las condiciones iniciales, por lo que siendo sistemas determinísticos presentan comportamiento impredecible a largo plazo [72]. Se ha venido observando la existencia de nuevas propiedades que aparecen en estos sistemas como resultado de la interacción entre sus partes y que no pueden explicarse a partir de las propiedades de sus elementos componentes [87]. Las primeras observaciones de dinámica no lineal y conducta caótica en los sistemas fisiológicos se realizaron a finales de la década de los 70's y principios de los 80's por L. Glass y M.C Mackey [58], mientras

que A. Winfree aplicaba métodos geométricos de la dinámica no lineal a las oscilaciones biológicas, especialmente a los ritmos circadianos (24 h) y al ritmo cardíaco [99]. Diversos estudios realizados en los 80's evidenciaron la naturaleza no lineal de los procesos cardíacos [76,6].

### 2.2.1 Teoría del Caos

Se puede definir el caos como aquel comportamiento impredecible que aparece en un sistema dinámico determinístico debido a la sensibilidad a las condiciones iniciales [23]. Cuando el proceso es caótico, si se conoce con una precisión infinita la condición inicial del sistema, se puede predecir el estado en cualquier instante. Se va a suponer que el sistema no lineal a estudiar está caracterizado por la siguiente función generatriz (mapa) [42]:

$$X_{n+1} = f(X_n) \tag{2.19}$$

Conociendo la condición inicial  $X_0$  se obtiene la serie temporal por iteración de (2.19). Por lo tanto, el valor de  $X_n$  se obtiene componiendo la función  $f(X_n)$ ,  $n$  veces. Un ejemplo de sistema no lineal es la ecuación logística correspondiente a la aproximación de la población de una especie en un ecosistema y definida como:

$$X_{n+1} = c \cdot X_n \cdot (1 - X_n) \tag{2.20}$$

El valor de la constante  $c$  es el que fija el comportamiento del sistema. Por cierto, si  $X_0 = 0$  ó  $X_0 = 1$  se obtendrá que  $X_{n+1} = 0$  para  $n > 0$ . En las figuras 2.1, 2.2 y 2.3 se muestran los resultados para 6 elecciones diferentes del parámetro  $c$  para  $X_0 = 0.25$ . Así, para valores de  $c$  pequeños ( $> 3$ ), la serie converge hacia un punto fijo que depende del valor de  $c$  (período 1). Mientras, para  $3 < c < 3.45$  aparece una oscilación de período 2. A medida que aumenta el parámetro  $c$  van apareciendo oscilaciones de otros períodos (*proceso de bifurcación*). El análisis teórico [23] revela que a partir de  $c = 3,57$  se produce el caos. En la figura 2.4 se observa el punto fijo para  $c = 1,5$  y  $c = 2$ . En la figura 2.5 se observan oscilaciones de período 2 (primera bifurcación) que son generadas para  $c = 3,25$  y en el caso de  $c = 3,54$  se ha producido una segunda bifurcación. En la figura 2.6 se observa que para  $c = 3,59$  ya se tiene un proceso caótico en el cual aún

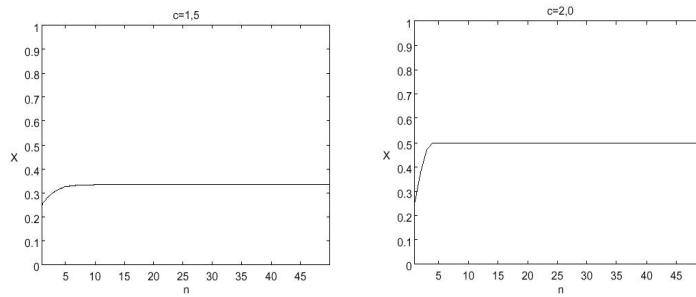


Figura 2.1: Simulaciones de la ecuación logística para  $X_0 = 0,25$  con valores de  $c = 1,5$  y  $c = 2,0$

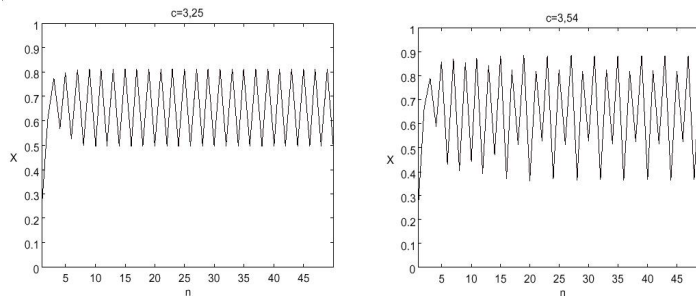


Figura 2.2: Simulaciones de la ecuación logística para  $X_0 = 0,25$  con valores de  $c = 3,25$  y  $c = 3,54$

puede observarse cierta regularidad (aunque no hay una periodicidad estricta) y en el caso de  $c = 3,99$  el proceso es claramente caótico. En la figura 2.7 se muestran dos series escogiendo  $c = 3,99$  y  $X_0 = 0,2500$  en un caso y  $X_0 = 0,2501$  en el otro. Sin embargo, aunque al principio ambas series se parecen, al cabo de poco tiempo el comportamiento es completamente diferente. Existen diferentes métodos para representar la característica de un sistema dinámico. La representación más extendida es el *diagrama en el plano de fase* cuando la señal analizada es continua o bien el *mapa de retorno* cuando la señal está muestreada [42]. Aunque en la literatura es usual encontrar que se utiliza el término *espacio de fase* para referirse al espacio en que se ubica el mapa de retorno de señales discretas. Se define el *mapa de retorno de primer orden* como la representación de la señal  $X_{n+1}$  respecto a la señal  $X_n$ . De forma similar se pueden representar los mapas de retorno de orden  $k$  como la representación de la señal  $X_{n+k}$  respecto a la señal  $X_n$  (es decir, la señal

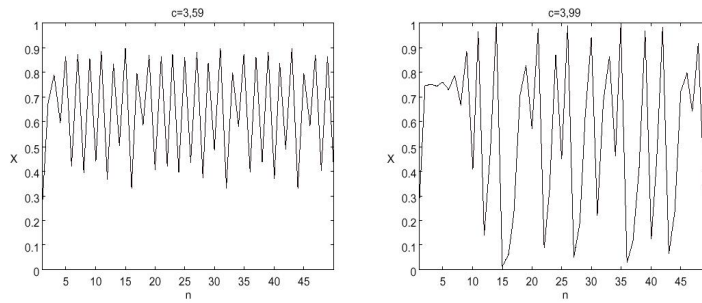


Figura 2.3: Simulaciones de la ecuación logística para  $X_0 = 0,25$  con valores de  $c = 3,59$  y  $c = 3,99$

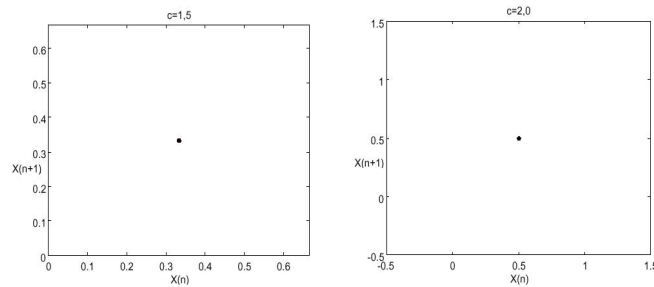


Figura 2.4: Mapas de retorno de primer orden para la ecuación logística con valores de  $c = 1,5$  y  $c = 2,0$

respecto a sí misma retardada un cierto número de muestras). En las figuras 2.4, 2.5 y 2.6 se presentan mapas de retorno de primer orden para las señales representadas en las figuras 2.1, 2.2 y 2.3 respectivamente. Para los dos primeros casos se tiene un punto fijo, para el tercer caso aparecen dos puntos asociados a la oscilación de período dos y en el cuarto caso tenemos cuatro puntos asociados a la doble bifurcación. Finalmente, el elevado número de puntos que aparecen en los dos últimos casos indica la presencia de caos. Sin embargo, estos puntos en el mapa de retorno están ordenados, mostrando, evidentemente, la forma del mapa que da origen al proceso (una parábola). En las figuras 2.8 y 2.9 se presentan mapas de retorno de diferentes órdenes para  $c = 3,99$ . La traza que aparece en los mapas de retorno es independiente de las condiciones iniciales. Se aprecia también que las trazas que aparecen son las sucesivas composiciones del mapa. El empleo de los mapas de retorno de orden superior a 1 pone de manifiesto la aparición de periodicidades.

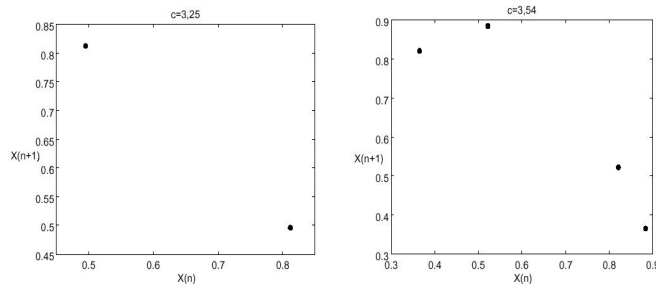


Figura 2.5: Mapas de retorno de primer orden para la ecuación logística con valores de  $c = 3,25$  y  $c = 3,54$

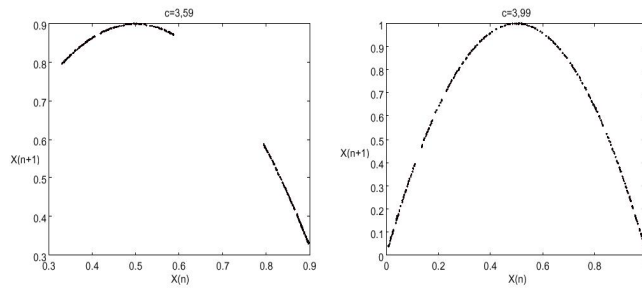


Figura 2.6: Mapas de retorno de primer orden para la ecuación logística con valores de  $c = 3,59$  y  $c = 3,99$

Por ejemplo, en el caso de una bifurcación de período 2, su mapa de retorno de orden 2 se reduce a un único punto fijo. En la práctica se emplean estos mapas para detectar la presencia de *atractores* o figuras que se generan en el *espacio de fase* [39], cuya presencia es evidente cuando se utiliza un retardo  $\tau$  (orden del mapa de retorno) idóneo. De otra parte, el efecto del ruido sobre la serie de tiempo a analizar puede afectar a la interpretación de los mapas de retorno. En las figuras 2.10 y 2.11 se muestran los mapas de retorno de primer orden para la ecuación logística con las siguientes especificaciones  $X_0 = 0,25$  y  $c = 3,99$ . A la cual se ha añadido ruido gaussiano con diferentes niveles de amplitud. Los sistemas caóticos exhiben a menudo estructuras fractales, definidos como un conjunto de puntos que no se parece a un objeto euclídeo (punto, recta, plano) independientemente de la escala a la que se le analice. Un fractal es una curva o superficie que es independiente de la escala [59]. Por lo cual presenta propiedades de autosemejanza (al observarse la señal a diferentes escalas tiene el mismo aspecto).

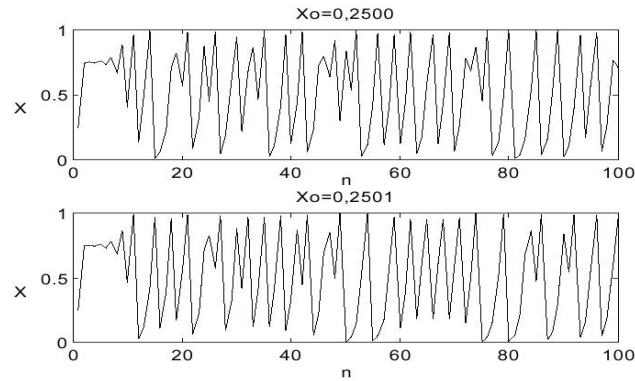


Figura 2.7: Comportamiento de la ecuación logística para  $c = 3,99$  y dos condiciones iniciales muy parecidas

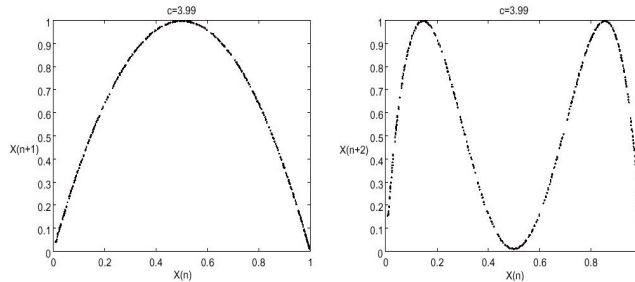


Figura 2.8: Mapas de retorno de orden 1 y 2 para  $c = 3,99$  en el caso de la ecuación logística

## 2.2.2 Espacio de Fase

Cuando el objeto de estudio es el registro de una señal muestreada de un sistema, no sólo se pierde la información entre los instantes de muestreo, sino que además no se tiene información de las demás variables del sistema. Lo anterior implica la necesidad de inferir información acerca de los demás estados o variables del sistema a partir de la información muestreada que se tiene. En [73] se propone que en un sistema dinámico cuyos estados generan un atractor, la información correspondiente al atractor entero puede ser reconstruida a partir de la medición muestreada de una sola variable. Sea la representación del registro de la señal original muestreada, dada por el vector:

$$y = \left[ y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad \dots \quad y_N \right] \quad (2.21)$$

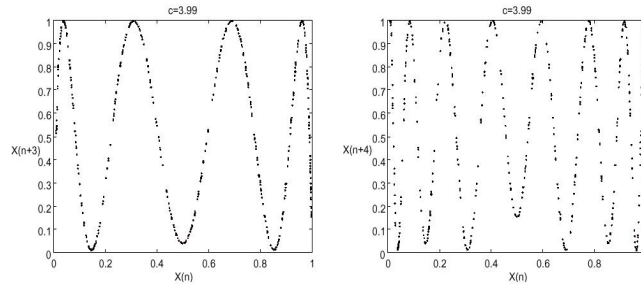


Figura 2.9: Mapas de retorno de orden 3 y 4 para  $c = 3,99$  en el caso de la ecuación logística

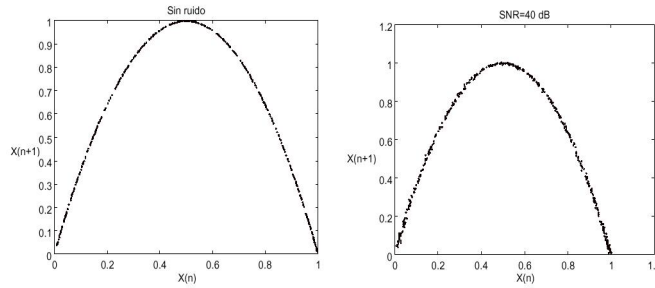


Figura 2.10: Efecto del ruido sobre los mapas de retorno

a partir del cual, la trayectoria reconstruida se expresa por la matriz  $X$ , donde cada fila  $x_i$  corresponde a un vector que representa un punto en el espacio de fase. Esto es:

$$X = \left[ \begin{array}{cccc} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \vec{x}_3 & \dots & \vec{x}_M \end{array} \right]^T \quad (2.22)$$

cada fila  $\vec{x}_i$  se define para una serie de tiempo con longitud  $N$  como:

$$\vec{x}_i = (y_i, y_{i+\tau}, y_{i+2\tau}, \dots, y_{i+(m-1)\tau}) \quad (2.23)$$

siendo  $\tau$  el *retardo de reconstrucción* u orden del mapa de retorno y  $m$  la *dimensión de inmersión o de embebimiento*, de acuerdo al *Teorema de Takens* [89]. De esta manera,  $X$  es una matriz de dimensión  $M \times m$ , mientras las constantes de dimensionalidad se relacionan por la ecuación:

$$M = N - (m - 1)\tau \quad (2.24)$$

donde  $M$  es el número de puntos  $m$ -dimensionales en el espacio de fase. En cuanto a la selección del valor de retardo  $\tau$ , este sigue siendo un problema abierto, ya que existen



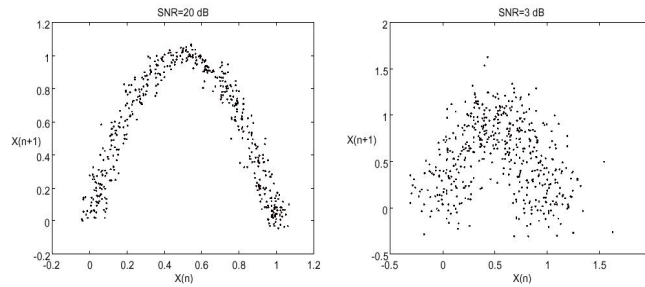


Figura 2.11: Mapas de retorno para un  $SNR = 20dB$  y  $3dB$

métodos alternativos para determinar el tiempo de retardo o tiempo de demora  $\tau$ . Si el tiempo de retardo reconstruido es muy pequeño, cada coordenada es casi la misma y el atractor reconstruido se concentraría a lo largo de la línea identidad o *diagonal* del espacio de fase. Por otra parte, si el tiempo de retardo es relativamente grande, sucesivas coordenadas de demora aparecerán como causalmente no relacionadas y el atractor reconstruido no representará la verdadera dinámica. Estos problemas reciben el nombre de redundancia e irrelevancia, respectivamente. Un valor que ofrece buenos resultados es el que utiliza el denominado mutua información promedio (*average mutual information- AMI*), propuesto en [32], quien sugiere que un buen estimador del tiempo de retardo  $\tau$  es el tiempo en el que aparece el primer mínimo en la serie AMI. Otro criterio para hallar el tiempo de retardo es haciéndolo igual al retardo en el cual la función de autocorrelación de la señal cae por debajo de la cuota  $1 - 1/e$  de su valor inicial. En general, con la correcta elección de  $m$  y  $\tau$ , la secuencia de puntos  $m$ -dimensionales contenidos en  $X$ , forma una copia difeomórfica del atractor original, esto es, las propiedades cualitativas del atractor generado son iguales a las del original. Utilizando esta propiedad se puede calcular las propiedades espaciales a partir de muestras de una sola variable.

### Puntos y trayectorias en el espacio de fase

Un punto en el espacio de fase representa unívocamente un estado dinámico del sistema. La sucesión de dichos puntos consecutivos en el tiempo es lo que se conoce como trayectoria u órbita. Una trayectoria que empieza en el primer punto en el tiempo de un atractor reconstruido partir de una serie de datos y contiene los puntos que lo suceden ordenados

temporalmente es llamada *trayectoria fiducial*. En la teoría de caos determinístico dos puntos en el espacio de fase con las mismas coordenadas representan un mismo estado dinámico y siempre tendrán una evolución en el tiempo idéntica.

### Atractores

Es la región limitado en el espacio de fase a la cual las trayectorias suficientemente cercanas convergen asintóticamente, rasgo característico de todos los sistemas dinámicos disipativos. Dependiendo de su topología se pueden distinguir varios tipos:

- *Atractor de punto fijo*. En este tipo de atractor todas las trayectorias tienden a un solo estado estable que, en el espacio de fase, corresponde a un punto. El ejemplo típico es el péndulo amortiguado que llega al reposo después de cierto tiempo. Un ejemplo se puede apreciar en la figura 2.12.

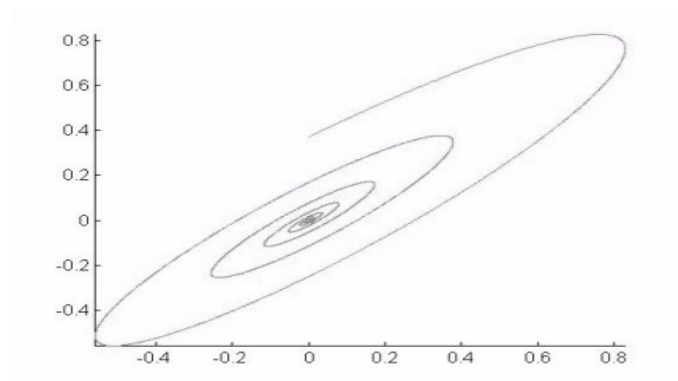


Figura 2.12: Atractor puntual. Representa un péndulo que va disminuyendo su movimiento con el tiempo debido al efecto de la gravedad

- *Atractor de ciclo límite*. Este tipo de atractor se observa cuando se estudian sistemas con comportamiento cíclico completamente regular. Se confina a un subespacio del espacio de fase, pero las trayectorias que describen las variables son siempre iguales, siendo predecible su comportamiento en el tiempo. Un ejemplo se puede apreciar en la figura 2.13.

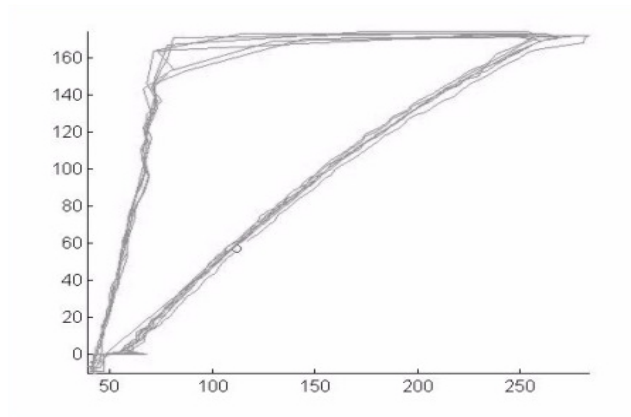


Figura 2.13: Atractor de ciclo límite. Representación del comportamiento del pulmón en ventilación mecánica. Presión (eje X), contra el Volumen (eje Y).

- *Atractor Toroidal*. Cuando el sistema es cuasiperiódico genera un atractor similar al de ciclo límite, pero las trayectorias no siempre pasan por los mismos puntos, apreciándose así, el comportamiento no uniforme. Un ejemplo se puede apreciar en la figura 2.14.

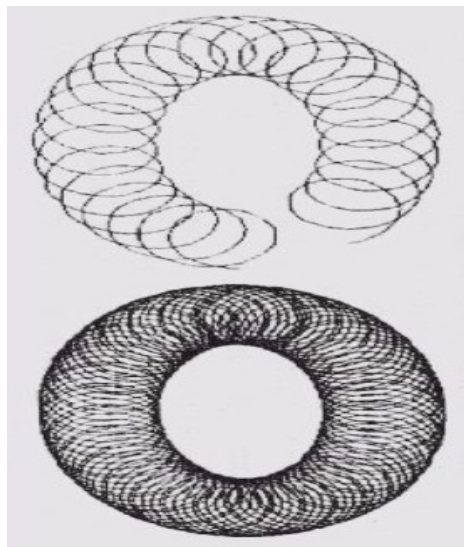


Figura 2.14: Atractor toroidal. Esquematiza el comportamiento de un sistema cuasiperiódico determinístico.

- *Atractor extraño*. La principal propiedad de estos atractores es su considerable de-

pendencia de las condiciones iniciales. Puntos inicialmente cercanos en el espacio de fase se separan exponencialmente al cabo de un tiempo. Todos los atractores extraños conocidos tienen una dimensionalidad no entera y provienen de sistemas caóticos [9]. Un ejemplo de atractor extraño se muestra en la figura 2.15.

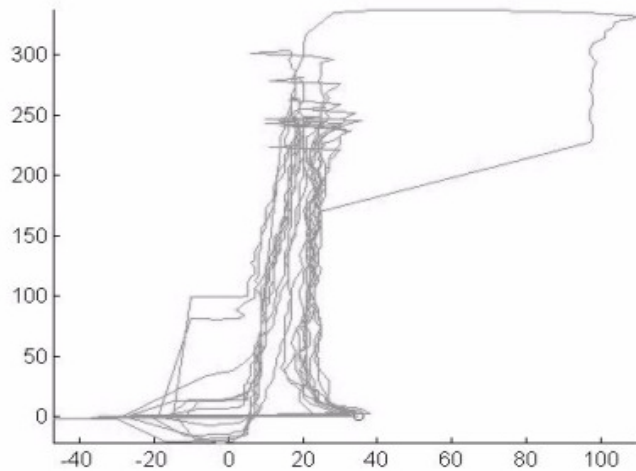


Figura 2.15: Atractor extraño. Este atractor corresponde al mismo sistema del pulmón pero sin el control ejercido por el ventilador mecánico.

### 2.2.3 Dimensiones

Al momento de analizar el comportamiento caótico de sistemas de dinámica no lineal, es muy importante realizar el análisis dimensional, ya que permite estimar los grados de libertad, es decir, el número de variables independientes que serían necesarias para describir toda la dinámica del sistema. Se han encontrado casos en los que este análisis ofrece información valiosa al momento de caracterizar.

#### Dimensión Euclídea o Euclidiana

El término *dimensión*, en geometría, se refiere generalmente a la dimensión euclidiana clásica en la que una dimensión es una línea, dos dimensiones conforman un plano y tres dimensiones un volumen. Si un cubo se parte en 2 por cada una de sus caras, aparecen

8 cubos. Si se dividiera en 3 partes en cada una de sus caras, aparecerían 27 cubitos. Se puede generalizar éste fenómeno con una ley potencial dada por  $N = F^D$ , donde  $N$  es el número de piezas que aparecen,  $F$  es el factor de escala y  $D$  es la dimensión del objeto. Para el caso del cubo,  $8 = 2^3$  y  $27 = 3^3$ . Desde este punto de vista, el cubo tiene una dimensión euclidiana igual a 3. Sin embargo, la geometría clásica tiene limitaciones cuando se pretenden medir estructuras naturales.

### **Dimensión Topológica**

Hermann Weyl utiliza la siguiente expresión para ilustrar el concepto de dimensión: “*Se dice que el espacio es tridimensional porque los muros de una prisión son bidimensionales*”. Gerald A. Edgar en [29] completa la imagen de Weyl en los siguientes términos:

Si se tiene un punto en el espacio tridimensional, se puede usar un pequeño cubo como prisión. El cubo está constituido por 6 caras planas. Cada una de estas caras es bidimensional. Un punto que vive en una de estas caras puede ser sometido a prisión haciendo uso de una pequeña circunferencia. Así, decir que las caras del cubo son bidimensionales, requiere saber que una circunferencia es unidimensional. Un punto que vive en una de las circunferencias, puede ser aprisionado haciendo uso de dos puntos como muros de la prisión. Es necesario saber que un conjunto reducido a dos puntos es de dimensión cero. Finalmente, un punto que vive en el conjunto de dos puntos es ya incapaz de moverse. No se necesitan muros para aprisionarlo. Se está, por definición, ante un conjunto de dimensión cero. La construcción de la dimensión topológica ( $D_T$ ) se puede basar en la idea de generalizar el concepto de que la dimensión de una bola es tres mientras que la dimensión de la esfera que la limita es dos; es decir, la dimensión de un conjunto  $X$  se obtiene a partir de la dimensión de su frontera  $\delta X$ . Por otra parte, la *dimensión topológica* basada en la *dimensión de recubrimiento*, es un concepto que juega un papel importante en la definición de *dimensión fractal*.

### Dimensión de Recubrimiento

Sea un subconjunto  $S$  de  $R^n$ . Un recubrimiento abierto de  $S$  es cualquier colección de conjuntos abiertos  $\alpha$  cuya reunión contiene al conjunto  $S$ , como se observa en la figura 2.16. Un refinamiento abierto  $\alpha'$  del recubrimiento abierto es otro recubrimiento tal que

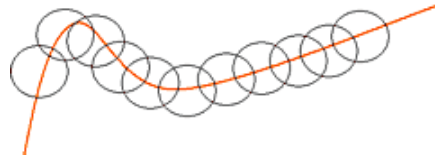


Figura 2.16: Dimensión Topológica

cada abierto  $A' \in \alpha'$  está incluido en algún abierto  $A \in \alpha$ . En algún sentido como se observa en la figura 2.17, un refinamiento abierto  $\alpha'$  de  $S$ , proporciona un recubrimiento *más detallado* de  $S$  que  $\alpha$ . Se dice que  $\alpha$  es un recubrimiento abierto de orden  $k$  del conjunto

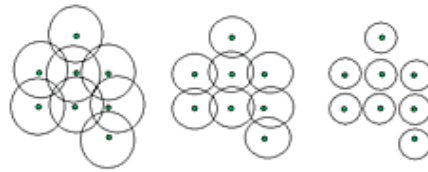


Figura 2.17: Dimensión Topológica 0

$S$ , si, cualquiera que sea  $x \in S$ ,  $x$  pertenece a un máximo de  $k$  abiertos del recubrimiento  $\alpha$ . En la figura 2.18 se presenta la curva de Koch, para la cual se determina una dimensión topológica igual a 1. *Definición:* El conjunto  $S$  tiene dimensión de recubrimiento

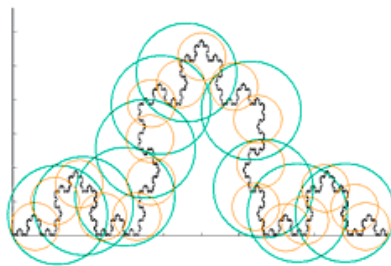


Figura 2.18: Dimensión Topológica 1

(dimensión topológica)  $n$ , si cualquier recubrimiento abierto  $\alpha$  de  $S$  admite un refinamiento abierto de orden  $n + 1$ , pero no de orden  $n$ . Esta definición de dimensión topológica se asemeja mucho a la dada por Henri Poincaré, la cual se resume a continuación:

- El conjunto vacío tiene dimensión -1.
- Si los bordes de los entornos pequeños de todos los puntos del ente son espacios  $(n - 1)$ -dimensionales, decimos que el espacio que consideramos es  $n$ -dimensional.

Así, según lo anterior, se tiene lo siguiente:

- El conjunto vacío tiene dimensión topológica:  $D_T = -1$ .
- El punto tiene dimensión topológica:  $D_T = 0$ .
- El segmento tiene dimensión topológica:  $D_T = 1$ .
- el cuadrado tiene dimensión topológica:  $D_T = 2$ .
- El cubo tiene dimensión topológica:  $D_T = 3$ .

### **Dimensión Fractal o Fraccional**

La dimensión fractal o fraccional es una propiedad de los objetos la cual indica qué tanto ocupa el espacio que los contiene. Normalmente es considerada la dimensión euclidiana donde los modelos son descritos en términos de puntos, líneas, rectas, círculos, parábolas y otras curvas simples. Quien quiera medir la superficie de una piedra, trataría de aproximarla a una esfera o a un cubo; de igual manera, si se desea saber cuál es la superficie de absorción del intestino, la medida cambiará según la resolución que utilice para hacerlo, debido a que el intestino presenta pliegues desde el nivel macroscópico hasta el microscópico. Una línea irregular que tiende a llenar un espacio bidimensional tiene una dimensión fraccional entre 1 y 2, así como un plano que se pliega, tiende a llenar un espacio tridimensional, teniendo una dimensión fractal entre 2 y 3. Muchas cosas en la naturaleza (como las estructuras porosas, interfases o límites entre estructuras, superficies rugosas, objetos que se ramifican, etc.) tienen características fractales [51]. De esta manera, la dimensión fractal

es un índice que permite cuantificar mejor las características geométricas de los objetos que tienen geometría fractal [43]. Los fenómenos con comportamiento fractal se pueden representar por medio de gráficos de tendencia; a estos gráficos se les puede medir la dimensión fractal, logrando así cuantificar la complejidad de su dinámica [27]. La definición de dimensión fractal, la sugirió Felix Hausdorff en 1919, readaptada posteriormente por Besicovich (*dimensión de Hausdorff-Besicovich* o *de autosemejanza*). Por teoría de la medida, la unión de  $N$  figuras  $A_1, A_2, \dots, A_N$ , es la suma algebraica de sus medidas:

$$m(\text{union}) = \sum_{k=1}^N m(A_k)$$

Si una figura  $A$  es semejante a otra figura  $A'$ , con razón de semejanza  $r$ , la medida de  $A$  es proporcional a la medida de  $A'$ , siendo la constante de proporcionalidad una potencia de la razón de semejanza:

$$m(A) = \left(\frac{1}{r}\right)^{\hat{D}} \cdot m(A')$$

La definición de Hausdorff-Besicovich se hace mediante la medición de un segmento  $AB$  del que se obtienen  $N$  subsegmentos iguales, cuya razón de semejanza con  $AB$  es  $r$ , despreciando el resto del segmento. La media total del segmento  $AB$  es la suma de la medida de todos los subsegmentos iguales:

$$m(AB) = \sum_{k=1}^N m(s_k) = N \cdot m(s_1)$$

por otra parte:

$$m(AB) = \left(\frac{1}{r}\right)^{\hat{D}} \cdot m(s_1)$$

de donde se puede identificar:

$$N = \left(\frac{1}{r}\right)^{\hat{D}} \Rightarrow r^{\hat{D}} \cdot N = 1$$

el exponente  $\hat{D}$  es denominado dimensión de autosemejanza o dimensión fractal. En general, si al obtener desde un ente  $H$ ,  $N$  entes iguales, semejantes al original, con razón



de semejanza  $r$ , entonces la dimensión de autosemejanza de  $H$  es el número real  $\hat{D}$  que verifica,  $N \cdot r^{\hat{D}} = 1$ , por lo que,  $\text{Ln}N + \hat{D}\text{Ln}r = 0$ . Por tanto al tomar  $\hat{D} = D_F$ , se tiene que:

$$D_F = \frac{\text{Ln}N}{\text{Ln}\left(\frac{1}{r}\right)} \quad (2.25)$$

la razón de semejanza  $r$  se puede considerar como,  $r = p/P$ , donde  $p$  es el tamaño de cada ente  $N$  y  $P$  es el tamaño del ente  $H$ . En [59] se presenta un ejemplo muy utilizado para ilustrar este concepto. Supóngase que se quiere medir la costa de la Gran Bretaña. Para ello, basta con tomar una regla y deslizarla a lo largo de ella para obtener la longitud. La longitud estimada será el producto del número de veces que hemos deslizado la regla y la longitud de la regla. No obstante, qué ocurre si disminuimos la longitud de la regla?. La longitud estimada aumentará porque se estará teniendo en cuenta detalles de la costa que antes se obviaban (debido a que la regla es recta e indeformable). Si la longitud de la regla tiende a cero, la longitud estimada tenderá a infinito. La definición geométrica de la dimensión fractal es mostrada en la ecuación (2.26).

$$D_F = \frac{\log\left(\frac{l_2}{l_1}\right)}{\log\left(\frac{s_1}{s_2}\right)} \quad (2.26)$$

donde  $l_2$  y  $l_1$  son las longitudes estimadas con las reglas 2 y 1 mientras que  $s_2$  y  $s_1$  son las longitudes de las reglas. La dimensión fractal es un número situado entre la dimensión topológica y la dimensión topológica más uno de lo que se mide. La dimensión fractal puede coincidir con la dimensión euclidiana cuando el objeto de estudio es por ejemplo una línea o un plano perfectamente continuo, sin rugosidades, sin picos, ni huecos. En la figura 2.19 se observa una línea recta a la cual se le realiza el cálculo de la dimensión fractal y se corrobora la coincidencia entre la dimensión fractal y la dimensión euclidiana. Utilizando la ecuación (2.25), se tiene que:

$$D_F = \frac{\text{Ln}N}{\text{Ln}\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{\text{Ln}(9)}{\text{Ln}\left(\frac{1}{1/9}\right)} = 1$$

en efecto, la dimensión fractal es igual a la dimensión euclidiana. En la figura 2.20 se muestra la curva de Koch y utilizando la ecuación (2.25) se hace el cálculo de dimensión fractal.



Figura 2.19: Línea recta de dimensión fractal 1

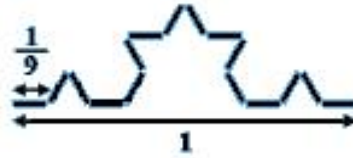


Figura 2.20: Línea de Koch con dimensión fractal 1,26

$$D_F = \frac{\text{Ln}N}{\text{Ln}\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{\text{Ln}(16)}{\text{Ln}\left(\frac{1}{1/9}\right)} \cong 1,26$$

La dimensión fraccionaria mide el grado de *escabrosidad* y/o discontinuidad de un objeto presentando un grado de irregularidad constante a diferentes escalas. Este tipo de dimensión tiene una grande aplicación en el análisis de señales caóticas, debido a que permite cuantificar la complejidad de estas señales.

### Dimensión de Inmersión

Un requisito básico en el análisis numérico de sistemas dinámicos es la selección de la *Dimensión de Inmersión* ( $m$ ) o también conocida como *Dimensión de Embebimiento*. En el caso típico de una serie de tiempo  $y$ , dicha selección, según el teorema de Takens, implica determinar el número de puntos previos necesarios que deben ser utilizados para la estimación del punto siguiente. Es decir, para cualquier sistema dinámico de dimensión finita, un punto determinado puede ser expresado en función de los  $n$  puntos anteriores, siendo  $n$  la dimensión del atractor reconstruido, también llamada *dimensión de correlación* ( $D_c$ ). En [89] se presente un criterio para estimar un valor aceptable de  $m$ , es hallar la dimensión de correlación y mediante la expresión (2.27) se puede obtener un valor aproximado de la

dimensión de inmersión.

$$m \geq 2D_c + 1 \quad (2.27)$$

### Dimensión de Correlación

Estima la dimensión fractal del atractor que se forma en el espacio de fases. Es un tipo de dimensión probabilística, la cual depende del cubrimiento con un elemento de volumen (esfera, cubo, etc.) de diámetro  $\varepsilon$ , sobre la trayectoria de la señal o curva característica que describe el comportamiento de un sistema [72]. En el espacio de fases, la Integral de Correlación  $C(\varepsilon)$  mide el número de puntos  $\vec{x}_j$  que están correlacionados con cada uno de los puntos restantes, en una esfera de radio  $\varepsilon$ , alrededor de los puntos  $\vec{x}_i$  y está definida en la ecuación (2.28):

$$C(\varepsilon) := \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M^2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \Theta \left( \varepsilon - \left\| \vec{x}_i - \vec{x}_j \right\| \right) \quad (2.28)$$

donde  $M$  es el número de puntos de la serie generada en el espacio  $m$ -dimensional,  $\Theta(z)$  es la función Heaviside (escalón unitario),  $\left\| \vec{x}_i - \vec{x}_j \right\|$  es la distancia euclídea entre un par de puntos dentro del atractor. Grassberger y Procaccia [44] han demostrado que la dimensión de correlación ( $D_c$ ) puede ser obtenida por medio de la ecuación (2.29):

$$D_c := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln C(\varepsilon)}{\ln \varepsilon} \quad (2.29)$$

Uno de los algoritmos más utilizados para calcular  $D_c$  está descrito en [44]. Esta expresión se puede calcular para diferentes radios  $\varepsilon$ , teniendo en cuenta que el mínimo  $\varepsilon$  vendrá fijado por los pasos de cuantificación; y además es posible estimar la dimensión de correlación para diferentes dimensiones de inmersión ( $m$ ), utilizando los valores encontrados para  $C(\varepsilon)$ .

Para sistemas no lineales la dimensión de correlación no necesariamente es un valor entero. Con series de tiempo la dimensión de correlación se calcula como la pendiente de la región mas lineal encontrada al graficar  $\ln C(\varepsilon)$  vs  $\ln(\varepsilon)$ , por cuanto se tiene una cantidad finita de datos se distorsiona el cálculo de  $D_c$  para valores extremos de  $\varepsilon$  [95]. Para una correcta estimación de la  $D_c$ , la dimensión de inmersión debe ser al menos el doble más uno de la

$D_c$ , esto es,  $m = 2D_c + 1$  [2]. En señales caóticas la dimensión de correlación tiende a saturarse a un valor determinado cuando la dimensión de inmersión aumenta, este valor es el valor asintótico de la dimensión de correlación, que se denotará por  $D_c^*$ . Es importante anotar que para señales aleatorias nunca se presenta tal saturación. Para obtener la  $D_c^*$ , se

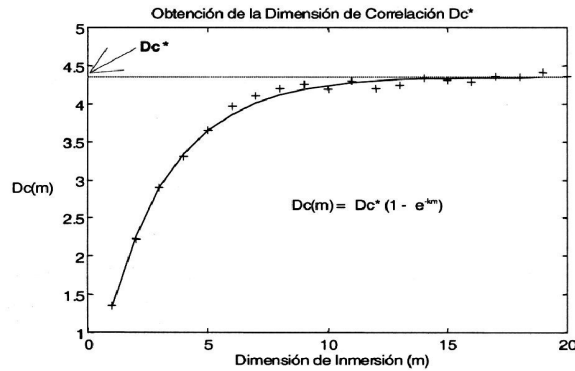


Figura 2.21: Obtención de la dimensión de correlación

ha propuesto ajustar una función exponencial de la forma expresada en la ecuación (2.30):

$$D_c(m) = D_c^* (1 - e^{-km}) \quad (2.30)$$

donde la  $D_c^*$  corresponde al valor de saturación y la  $k$  es la constante de la exponencial [13]. Los valores de  $D_c^*$  y  $k$  se pueden ser estimados usando el método de Levenberg y Marquardt [64].

Un concepto ligado a este es el de índice ( $D_{CK}$ ), el cual corresponde al producto de la  $D_c^*$  por la  $k$ , obtenidas con el método anterior corresponde al valor de la derivada en el tramo inicial de la curva ajustada, es decir cuando  $m \rightarrow 0$ .

## 2.2.4 Exponente de Hurst

Ligada al concepto de dimensión fractal está la definición del exponente de Hurst. La mayoría de algoritmos estiman dicho exponente, ya que si la dinámica de un sistema es descrita en una serie de tiempo, este relaciona el comportamiento de la serie que se va analizar a distintas escalas, y luego se calcula la dimensión fractal aplicando la expresión

(2.31):

$$D_F = D_T - H \quad (2.31)$$

donde  $D_F$  es la dimensión fractal,  $D_T$  es la dimensión topológica (igual a 2 para series temporales) y  $H$  es el exponente de Hurst. El exponente de Hurst cuantifica la dinámica de la serie de tiempo y permite ponderar hasta qué punto los datos pueden ser representados por un movimiento de tipo browniano. Para  $H = 0,5$  la serie se comporta como un movimiento browniano. Para  $0,5 < H < 1$  la serie tiene una dinámica suave, lo que indica que las tendencias del pasado persisten en el futuro, mientras que para  $0,5 < H < 1$  la serie se caracteriza por tener un mayor contenido de alta frecuencia y esto refleja que las tendencias del pasado tienden a ser inversas en el futuro. En la figura 2.22 se muestran 5 ejemplos para diferentes exponentes de Hurst. Las señales han sido generadas con el algoritmo descrito en [8] y basado en la síntesis espectral. Es importante hacer énfasis en que

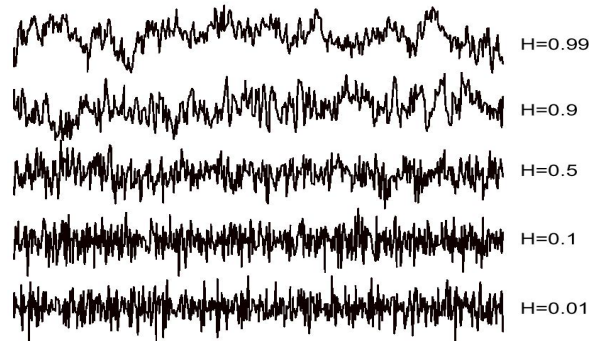


Figura 2.22: Ejemplos de series temporales con diferentes exponentes de Hurst

el exponente de Hurst cuantifica la dinámica caótica del sistema en análisis. No obstante, la complejidad del sistema puede caracterizarse a partir de otro índice llamado dimensión de correlación [13] mientras que la impredecibilidad del sistema se puede cuantificar por medio de otros indicadores llamados exponentes de Lyapunov [84]. El exponente de Hurst ( $H$ ) se obtiene de la relación empírica expresada en (2.32):

$$\frac{R}{s} = \left(\frac{\tau}{2}\right)^H \quad (2.32)$$

donde  $R$  es el rango (diferencia entre el valor máximo y el mínimo de la serie dada por  $X$ ),  $s$  es la desviación estándar y  $\tau$  es el retardo.  $H$  se estima como la pendiente de la representación logarítmica de la ecuación (2.33) [31]:

$$\frac{R}{s} = \left(\frac{\tau}{2}\right)^H \quad (2.33)$$

Los algoritmos para caracterizar señales a nivel de dinámica no lineal son lentos computacionalmente. No obstante, han aparecido recientemente algoritmos rápidos para la estimación del exponente de Hurst. Estos algoritmos son el método de análisis dispersional [8] y el análisis de reescalado [7]. El primero da buenos resultados para exponentes de Hurst pequeños mientras que el segundo da buenos resultados para exponentes de Hurst elevados. Además tienen la ventaja de realizar estimaciones lo suficientemente correctas con segmentos cortos de señal (ya funcionan bien a partir de 256 muestras) y no requieren ni el cálculo del retardo ni una dimensión de análisis predefinida ya que se basan en cálculos estadísticos y espectrales de la señal (se emplea el concepto de autosemejanza). Al momento de analizar el comportamiento caótico de sistemas de dinámica no lineal, es muy importante realizar el análisis dimensional, ya que permite estimar los grados de libertad, es decir, el número de variables independientes que serían necesarias para describir toda la dinámica del sistema.

### 2.2.5 Exponentes de Lyapunov

La impredecibilidad de una señal se puede cuantificar con los exponentes de Lyapunov. Estos indican la sensibilidad o dependencia de los estados futuros de un sistema bajo ciertas condiciones iniciales. Una perturbación infinitesimal inicial por lo general crecerá exponencialmente y a la razón de crecimiento que tenga se le llama el exponente de Lyapunov. Las trayectorias caóticas presentan al menos un exponente de Lyapunov positivo. Para trayectorias periódicas, todos los exponentes de Lyapunov son negativos. En general, existen tantos exponentes de Lyapunov como ecuaciones dinámicas. Mediante el conjunto de los exponentes de Lyapunov es posible estimar la tasa a la cual convergen o divergen las trayectorias dentro de un atractor. Cualquier sistema que contenga por lo menos un exponente de Lyapunov positivo se define como caótico [100].

### Espectro completo de exponentes de Lyapunov

Existe todo un espectro de exponentes de Lyapunov definido en términos de la forma en que se deforma el atractor (una esfera inicial de eje  $p_i(0)$ ) a medida que evoluciona en el tiempo. Así, el  $i$ -ésimo exponente de Lyapunov, se define en términos de la tasa de crecimiento del  $i$ -ésimo eje,  $p_i$ , como:

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \log_2 \frac{\rho_t(t)}{\rho_i(0)}$$

En este espectro de exponentes, los  $\lambda_i$  están ordenados de mayor a menor y pueden utilizarse para caracterizar el tipo de atractor. Si todos los  $\lambda_i$  son negativos, el atractor es un punto. Si  $\lambda_1 = 0$ , y los demás son negativos, el atractor es un ciclo limite estable. Si  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , y los demás son negativos, el atractor es un toro bi-dimensional en el espacio de fases. Si al menos un exponente de Lyapunov es positivo, el atractor es extraño, indicando una divergencia exponencial de las trayectorias en el atractor, lo cual genera una extrema sensibilidad a las condiciones iniciales.

### El Máximo Exponente de Lyapunov

El exponente de Lyapunov es un valor promedio que indica la razón a la cual se separan las trayectorias cercanas en el espacio embebido y nos permite cuantificar la magnitud del caos. Se puede definir de la siguiente manera: Sean  $\beta_{n1}$  y  $\beta_{n2}$  dos puntos en el espacio de estados separados por una distancia  $\|\beta_{n1} - \beta_{n2}\| = \delta_0 \ll 1$ . Se denota por  $\delta_{\varphi n}$  la distancia al tiempo  $n$  entre las dos trayectorias que emergen de estos puntos,  $\delta_{\varphi n} = \|\beta_{n1+\varphi n} - \beta_{n2+\varphi n}\|$ . Por lo cual  $\lambda$  está determinado por:

$$\delta_{\varphi n} \simeq \delta_0 e^{\lambda n}, \delta_{\varphi n} \ll 1, \Delta n \gg 1.$$

En la tabla 2.1 se muestra el significado físico de los posibles valores de  $\lambda$ . Es por tanto, que el máximo exponente de Lyapunov es una medida del valor, en el cual las trayectorias pasan cerca una de la otra en el espacio de fase en el cual divergen. Es importante recalcar que órbitas caóticas tienen al menos un exponente de Lyapunov positivo.

Tipo de movimiento	Máximo Exponente de Lyapunov
Punto fijo estable	$\lambda < 0$
Ciclo límite estable	$\lambda = 0$
Caos	$0 < \lambda < \infty$
Ruido	$\lambda = \infty$

Tabla 2.1: Significado de los valores del máximo exponente de Lyapunov

### 2.2.6 El Método de los datos sustitutos

También conocida como los surrogate data. Este método permite detectar una estructura no lineal determinista en una serie temporal. Fue propuesto por Theiler [91], y es uno de los métodos más aceptados y utilizados actualmente. Para ello es necesario generar varias series de surrogate data de la siguiente forma:

1. Se obtiene la transformada de Fourier de la serie de tiempo.
2. Se aleatoriza la fase de ésta entre 0 y  $2\pi$
3. Se realiza la transformada inversa de Fourier.

Esto produce una serie de surrogate data que mantienen el mismo espectro de Fourier y función de autocorrelación que la serie original. Se generan varias series de surrogate data y posteriormente se elige un índice de complejidad (por ejemplo la dimensión de correlación) que se calcula tanto para la serie original como para las series de surrogate data. Finalmente se aplica una prueba estadística para comparar la serie original con las generadas de surrogate data. Si las diferencias son significativas se concluye que existe una estructura no lineal determinista en la serie original.

### 2.2.7 Complejidad relativa de Lempel y Ziv

Es una medida de la complejidad algorítmica de la serie temporal. La complejidad de Lempel y Ziv o  $C(n)$  refleja el orden que se retiene en un patrón temporal unidimensional o en una cadena de  $n$  símbolos [49]. Por simplicidad se puede considerar sólo cadena



con ceros y unos (por ejemplo 01000110101). Para ello se convierten las series de tiempo originales en secuencias de 0 cuando la diferencia entre dos elementos sucesivos de la serie de tiempo es negativa y 1 cuando la diferencia entre los dos elementos sucesivos es positiva o nula. El algoritmo para estimar  $C(n)$  se basa en la reconstrucción de la cadena original  $S$  mediante operaciones de copia e inserción de símbolos en una nueva cadena. La  $C(n)$  aumenta conforme se necesiten nuevos símbolos o secuencias de símbolos (0, 1, 01, 010, etc.) para reproducir la cadena  $S$ . La complejidad máxima tiene valor 1 y una perfecta predictibilidad tiene valor 0. En éste sentido el ruido blanco tiene la máxima complejidad posible. Un algoritmo muy utilizado es el de Kaspar y Schuster [49].

## 2.3 Características de representación

### 2.3.1 Coeficientes de amplitud

El método de coeficientes de amplitud consiste en la adquisición y digitalización de la señal, donde los coeficientes de representación corresponde a los valores obtenidos directamente de la secuencia digitalizada.

### 2.3.2 Segmentación de traza

Es una técnica usada en reconocimiento de patrones para reducir la complejidad computacional y los requerimientos de memoria sobre todo cuando la base de conocimiento es relativamente grande. El proceso es similar al procedimiento de muestreo no uniforme, donde cada muestra corresponde a puntos de gran variación en la secuencia de entrada original [20]. Inicialmente, para cada latido  $x_i$ , se calcula su derivada acumulada y asociada a partir de la muestra  $j$ , así

$$\Delta[j] = \sum_{k=1}^{j+1} |x_i[k] - x_i[k-1]| \quad (2.34)$$

donde  $j + 1 \leq n_i - 1$ .

La secuencia de salida tiene una tasa de muestreo menor que el de la secuencia de entrada debido a que necesita  $q + 1$  valores para calcular  $q$  diferencias consecutivas a lo largo

de la misma. Es de particular interés la derivada acumulada obtenida,  $\Delta[n_i - 2]$ , la cual es la referencia tomada para calcular los puntos de muestreo. Así, este valor  $\Delta[n_i - 2]$  es dividido por el número de muestras deseado  $n'_i$  para la secuencia final  $x'_i$  en orden a calcular la longitud de intervalo  $L$ . Luego se toman los puntos donde  $\Delta$  excede múltiplos de  $L$  y se obtienen los puntos donde  $x_i$  debe ser muestreado. Así,

$$x'_i[m] = x_i[r] \mid r = \arg\left(\max_{0 \leq m \leq n'_i - 1} \right)_j (\Delta[j] \leq (m + 1)L) \quad (2.35)$$

### 2.3.3 Aproximación poligonal

Es este caso se calcula una lista de vértices que ajustan una curva plana de acuerdo con ciertas condiciones de umbral de error. La curva plana a aproximar es la secuencia discreta de entrada que representa el latido, y la lista de vértices formará la señal de salida [20]. El método comienza con una aproximación simple consistente en una línea desde  $(0, x_i[0])$  hasta  $(n_i - 1, x_i[n_i - 1])$ . Son examinados todos los puntos entre los extremos con el propósito de encontrar el más lejano de la línea. Si el umbral es excedido en este punto, se toma como un nuevo vértice y el algoritmo procede iterativamente con cada nueva línea resultante. La iteración final es alcanzada cuando todas las líneas involucradas en la aproximación poligonal cumplen con la restricción del umbral. Por consiguiente, la nueva secuencia de salida es:

$$x'_i[m] = \{(j_0, x_i[j_0]), \dots, (j_{n'_i-1}, x_i[j_{n'_i-1}])\} \quad (2.36)$$

Si las señales que se quieren analizar son *no estacionarias* a lo largo del tiempo y de la frecuencia, entonces no se pueden analizar con estas transformaciones, sino que se requiere tener de forma conjunta información de la evolución temporal y frecuencial de las señales.

### 2.3.4 Coeficientes Wavelet

Está basado en la transformada *Wavelet* (WT). Toma las ventajas de las posibilidades de esta herramienta matemática para extraer, en forma de lista de coeficientes, las principales características o aproximaciones de una señal.

### **2.3.5 Dinámica no lineal**

Durante los últimos años ha aumentado el número de estudios de las señales electrocardiográficas con el enfoque no lineal y se han contrastado los resultados así obtenidos con los provenientes de los métodos lineales, observándose que ambos análisis proporcionan información distinta [37, 96, 95, 55]. Se han propuesto diversas medidas no lineales para estimar la complejidad de una serie de tiempo [2]. Algunas de ellas han sido aplicadas a las señales ECG, como también a la variabilidad de la frecuencia cardíaca (VFC), como son: la dimensión del atractor [13], la entropía [102], los índices de información [95], el exponente mayor de Lyapunov [84], los mapas de Poincaré [103], los índices de complejidad [15] y la dinámica simbólica [52]. De estos métodos no lineales, la dimensión del atractor ha sido particularmente útil en el análisis de señales VFC para caracterizar diversas patologías cardíacas y su grado de avance [14, 69].

# Marco Experimental y Resultados

---

El reconocimiento de patrones de bioseñales (ECG, voz, etc.) se puede dividir en dos procesos fundamentales como se aprecia en la figura 3.1: *el entrenamiento*, que comprende la extracción y selección del conjunto de características o parámetros que representen cada clase de estado funcional; y *la toma de decisiones* que realiza la clasificación de las señales por algún principio discriminante. A su vez, el entrenamiento comprende las siguientes

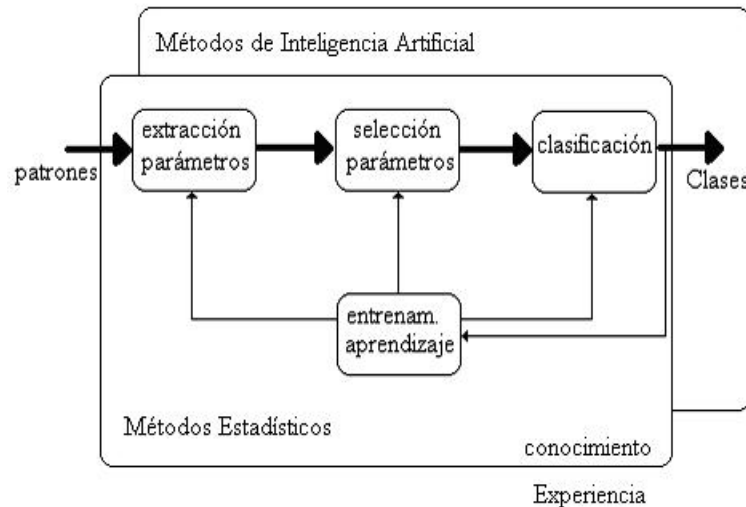


Figura 3.1: Diagrama de bloques reconocimiento de patrones

etapas: recolección y registro de señales ECG, y preprocesamiento de la señal. Dicho preprocesamiento tiene como objetivo adecuar los datos de tal forma, que exista un mínimo efecto de las perturbaciones, conservando el suficiente poder discriminante. Seguidamente se realiza la estimación de características de ECG para cada una de las clases involucradas

en el estudio, que para este caso corresponde a la fibrilación ventricular, junto con otros tipos de arritmia ventriculares. Finalmente, se efectúa el análisis del poder discriminante de las características de ECG con el objetivo de mejorar el desempeño del clasificador.

## 3.1 Recolección y registro de señales ECG

### 3.1.1 Conjunto de análisis

En general, el conjunto de señales de ECG empleado en el entrenamiento debe cumplir con las siguientes condiciones [5]:

1. Presencia de señales representativas. Sin embargo, se debe incluir señales raramente observadas pero clínicamente significativas.
2. Estandarización de los registros ECG, es decir, señales utilizadas por un amplio sector de la comunidad científica.
3. Etiquetamiento clínico de Registros. Normalmente, cada complejo *QRS*, ha sido manualmente etiquetado por dos o más cardiólogos, trabajando de forma independiente. Estas anotaciones sirven de referencia para comparar los resultados producidos por cierto método automático de procesamiento, y los producidos según el estándar de los cardiólogos.
4. Digitalización de los registros electrónicos de ECG. El formato debe incluir la información de los parámetros de registro, entre ellos, la frecuencia de muestreo, la ganancia (amplitud), etc.

En el desarrollo de sistemas automáticos de clasificación de ECG, es preferible el empleo de bases de datos, por cuanto estas permiten la evaluación de los métodos de análisis y procesamiento desarrollados de una forma reproducible, automática, cuantitativa, y estándar.

### 3.1.2 Base de datos

La base de datos (BD) empleada es la del MIT-BIH (*The Massachusetts Institute of Technology-Beth Israel Hospital*), por ser una de las principales fuentes reconocidas de registros de ECG. En esta BD se han incluido señales representativas de un conjunto amplio de patologías, con larga duración (hasta 24h [5]), además incluye campos de etiquetas realizados por expertos con el fin de servir de patrón para evaluar los diferentes algoritmos de procesamiento de señales ECG. A través de la BD MIT-BIH (acceso vía Physionet) se pueden obtener registros de otras bases de datos, con lo cual todas las señales a utilizar proceden de una misma fuente. La BD MIT-BIH contiene la siguiente clasificación de registros ECG:

- *Base de datos de arritmias*. Contiene 48 fragmentos de 30 minutos correspondientes a registros ambulatorios de dos canales (frecuencia de muestreo - 360Hz, resolución - 11bits, y rango de 10mV).
- *Creighton University Ventricular Tachyarrhythmia Database*. Contiene 35 registros del tipo fibrilación ventricular (duración aprox. 8.5 minutos, frecuencia de muestreo - 250Hz).
- *MIT-BIH Noise Stress Test Database*. Contiene 15 registros de 30 minutos.
- *MIT-BIH ST Change Database*. Contiene 28 registros de duración entre 13 y 67 minutos.
- *MIT-BIH Malignant Ventricular Arrhythmia Database*. Se encuentran disponibles 22 registros de 30 minutos.
- *MIT-BIH Atrial Fibrillation/Flutter Database*. Contiene 25 registros de 10 horas.
- *MIT-BIH ECG Compression Test Database*.
- *MIT-BIH Supraventricular Arrhythmia Database*. Esta base de datos incluye 78 registros de 30 minutos.
- *MIT-BIH Long-Term Database*. Corresponde a 7 registros de larga duración, entre 10 y 22 horas, extraídos de registros Holter reales.

- *MIT-BIH Normal Sinus Rhythm Database.*

## 3.2 Preprocesamiento de las señales de ECG

El preprocesamiento se realiza con el objetivo de reducir alteraciones en gran parte debidas al ruido generado durante la adquisición y el registro de la señal ECG.

### 3.2.1 Interferencias y artefactos

Estas perturbaciones se clasifican en interferencias y artefactos, los cuales contaminan el contenido de la información y disminuyen la efectividad del proceso automatizado. En el caso de las interferencias se hace referencia a las perturbaciones de origen electromagnético, mientras que en los artefactos se tienen en cuenta las perturbaciones generadas por movimientos o posturas incorrectas del paciente. Los procedimientos más empleados para la reducción de ruido en señales ECG son los basados en: filtrado clásico, filtrado de media móvil, promedio de latidos, aproximación mediante funciones y la transformada *Wavelet* [19]. Desde el punto de vista del procesamiento de señales, se debe tener en cuenta el contenido en frecuencia del ECG. El ancho de banda del ECG es aproximadamente de unos 125 Hz, con la distribución mostrada en la figura 3.2. En la literatura se encuentra que los componentes por encima de los 35 Hz no son muy significativos [19].

Los registros de señales ECG pueden ser contaminados por varias clases de perturbaciones, entre las cuales están [98]:

- *Interferencia de línea de potencia.* Corresponde a la señal de 60 Hz y sus armónicos. Las características que pueden ser necesarias para variar un modelo de ruido de línea de potencia incluyen la amplitud y la frecuencia contenidas en la señal.
- *Ruido por contacto de electrodos.* Es el ruido transitorio causado por la pérdida de contacto entre el electrodo y la piel, la cual efectivamente desconecta el sistema de medición del sujeto [98].
- *Artefactos de movimiento.* Son cambios transitorios (pero no escalones) en la línea

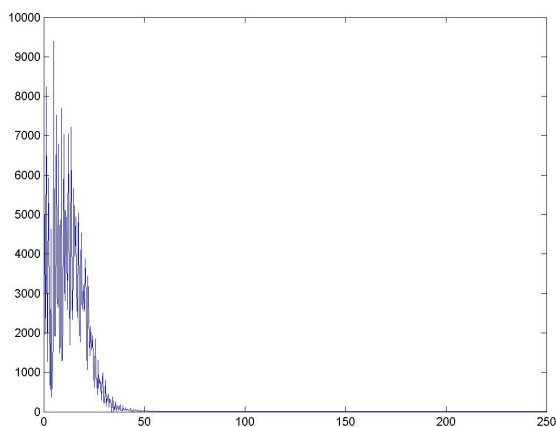


Figura 3.2: Espectro de la señal ECG

base causados por cambios en la impedancia electrodo-piel debido al movimiento del electrodo.

- *Contracción muscular (Electromiográfico, EMG)*. Las contracciones musculares causan potenciales de niveles de mV. La línea base del EMG está usualmente en el rango de los  $\mu\text{V}$  y por lo tanto es usualmente insignificante.
- *Desplazamiento de línea base y modulación de amplitud de ECG con respiración*. El desplazamiento de línea base por respiración puede ser representado como una componente sinusoidal en la frecuencia de respiración adherida a la señal de ECG. Es de especial cuidado el tratamiento de este tipo de ruido, debido a que se encuentra ubicado en la banda de componentes importantes del ECG, por lo que su filtrado puede eliminar componentes importantes en él.
- *Ruido electroquirúrgico*. Este destruye completamente el ECG y puede ser representado con una gran cantidad de sinusoides con frecuencias aproximadamente entre 100 Hz y 900 Hz [68].
- *Ruido de instrumentación* generado por dispositivos electrónicos utilizados en procesamiento de señales.



### 3.2.2 Filtración de perturbaciones

#### Filtros FIR

El método más común para la reducción de ruido, asumiendo que los espectros de la perturbación no se traslapen con las de la señal ECG, es el que se realiza mediante filtros pasabajos [66]. La expresión general del filtro lineal e invariante en tiempo discreto es la siguiente:

$$y[n] = \sum_{i=0}^N a_i x[n-i] - \sum_{j=1}^M b_j y[n-j] \quad (3.1)$$

donde  $a$  y  $b$  son los coeficientes del filtro.

#### Molificación

Una caso especial, es el ruido de la respiración que debido a sus características no presenta resultados satisfactorios con un filtro FIR pasa-altos. Es preferible el empleo técnicas de filtración basadas en convolución con kernels [86]. Entre los kernels empleados están los basados en el método de regularización llamado *Molificación Discreta*. Este método permite recuperar de manera estable una señal en el tiempo, conocida de manera aproximada en una malla dentro de su dominio.

Una forma directa de implementar un filtro digital corresponde a la convolución de la señal de entrada con la respuesta impulso del filtro digital. Cuando la respuesta impulso es utilizada de esta manera, se dice de un *filtro por kernel* [86]. De este modo, la  $\delta$ -molificación de una función integrable  $f$  está basada en la convolución con el Kernel [3]:

$$\rho_{\delta,p}(x) = \begin{cases} A_p \delta^{-1} \exp\left(\frac{-x^2}{\delta^2}\right), & -p\delta \leq x \leq p\delta \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3.2)$$

Dicho Kernel es no negativo, de clase  $C^\infty \{(-p\delta, p\delta)\}$ , además,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{\delta,p}(x) dx &= \int_{-p\delta}^{p\delta} \rho_{\delta,p}(x) dx \\ &= A_p \int_{-p\delta}^{p\delta} \delta^{-1} \exp\left(\frac{-x^2}{\delta^2}\right) dx \\ &= A_p \int_{-p}^p \exp(-u^2) du = 1 \end{aligned}$$

lo que demuestra que no existen pérdidas de energía al aplicar el kernel.

El diseño del kernel pasaaltos se puede realizar mediante el método de *muestreo en frecuencia* [60], que exige el conocimiento del vector de magnitud  $A$ , el vector de fase  $F$  y el número de puntos  $N$ . En el caso particular,  $A$  se generó con una función exponencial, obteniéndose la respuesta espectral deseada descrita por:

$$A(\omega) = 1 - e^{-\omega/\tau} \quad (3.3)$$

donde  $\tau$  es el parámetro a modificar para obtener la respuesta deseada. Para  $F$  se considera un vector lineal de  $N$  puntos igualmente distribuidos con valores desde 0 hasta 1, en orden a obtener una fase lineal.  $N$  es el número de puntos para los dos vectores y para el kernel que se desea obtener. La respuesta en frecuencia obtenida para el kernel descrito se puede

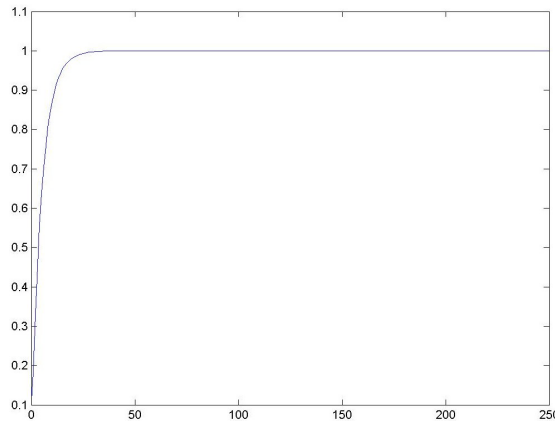


Figura 3.3: Respuesta de frecuencia del Kernel pasaaltos ( $\eta = 250$  y  $\tau = 10$ )

observar en Fig 3.3, así como la respectiva realización de una señal ECG filtrada se expone

en la tabla de figuras 3.1. Los procedimientos particulares de esta técnica aplicada a la filtración de señales ECG se desarrolla en [75].

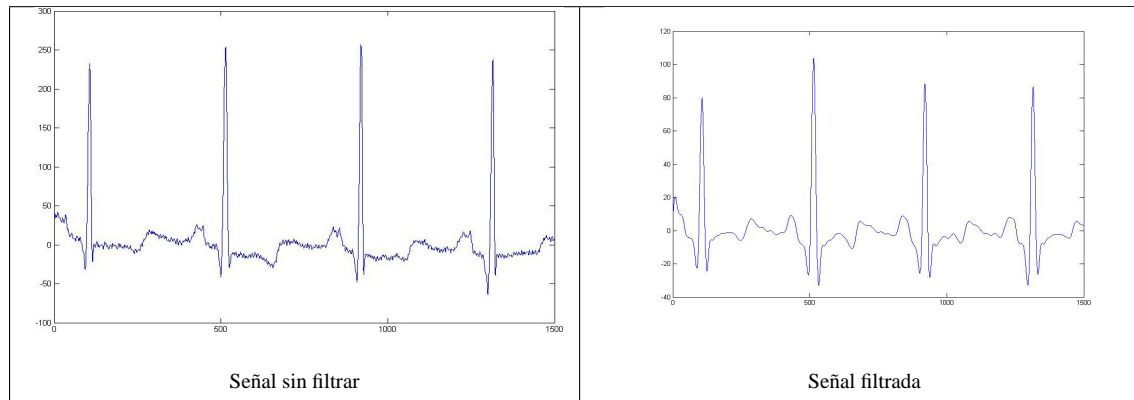


Tabla 3.1: Filtración de la Señal ECG

### 3.3 Estimación de características ECG usando técnicas no lineales

Las tres clases de estado funcional a clasificar de acuerdo a la actividad presentada en los registros de ECG son: normal ( $k = 1$ ), fibrilación ventricular ( $k = 2$ ) y otros tipos de arritmia ( $k = 3$ ). Se considera que las tres clases a analizar muestran evidencias relevantes de dinámica no lineal, por tanto, se emplean técnicas de caracterización no lineal consistentes en obtener los índices de complejidad, impredecibilidad y caoticidad de los registros respectivos de ECG. Cada registro va a ser notado de la forma  $\varphi_{i,j}$ , donde  $i$  es el número de la clase y  $j$  es el número del registro. Los siguientes son los parámetros de complejidad que se consideran inicialmente en la caracterización de señales ECG:

#### 3.3.1 Información mutua promedio ( $\xi_1$ )

Por cuanto, algunos de los parámetros de complejidad emplean indirectamente la información mutua promedio, este fue la primera característica de ECG analizada. La información mutua promedio (*Average Mutual Information - AMI*) brinda la relación cuantitativa de

información que hay entre los datos medidos de las señales. Además, puede servir de indicativo del retardo  $\tau$  que se requiere para reconstruir el atractor en el espacio de fase [32]. El valor de retardo está determinado por el punto en que se presenta el primer mínimo en la serie de estimaciones del valor AMI, a lo largo de un registro ECG. La información mutua promedio está definida como:

$$I(\tau) = \sum_{i, i+\tau} P(X(i), X(i+\tau)) \log_2 \left[ \frac{P(X(i), X(i+\tau))}{P(X(i)) P(X(i+\tau))} \right] \quad (3.4)$$

donde  $X(i)$  es el vector correspondiente al segmento de registro de ECG,  $P(X(i))$  y  $P(X(i+\tau))$  son las probabilidades individuales para las mediciones  $X(i)$  y  $X(i+\tau)$ , siendo  $P(X(i), X(i+\tau))$  la respectiva probabilidad conjunta. El valor de  $\tau$  corresponde al número de muestras en el que se presenta el primer mínimo en los valores estimados. En la tabla de gráficas 3.2, para las tres clases de estudio, se presentan los valores obtenidos de AMI (cantidad de información por el eje  $y$ , contra el número de muestras en el eje  $x$ ). Mientras, en la tabla 3.3 se da el promedio y la varianza de los valores para los cuales se presentaba el mínimo de la serie de estimaciones del valor AMI para todos los registros de cada una de las clases. Todos los valores obtenidos, se exponen detalladamente en el anexo C.1.

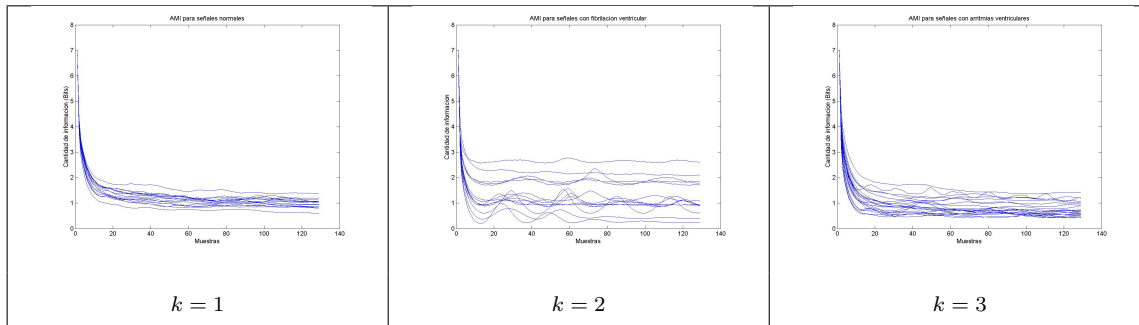


Tabla 3.2: Información mutua promedio

### 3.3.2 Dimensión de correlación ( $\xi_2$ )

En la estimación, se utilizó el algoritmo de *Takens* [89] descrito en el apartado 2.2.2, para el cual se sugiere un valor de dimensión de inmersión igual a 20. La reconstrucción del

$AMI$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
$\overline{\xi_1}$	96	14	94
$\sigma_{\xi_1}^2$	211.94	6.095	829.46

Tabla 3.3: Estadística de los valores obtenidos en la serie de estimaciones AMI

atractor se hizo teniendo en cuenta el retardo  $\tau$  que se obtuvo por medio de las series AMI. En la estimación de la dimensión de correlación a lo largo de los registros, se empleó un valor de apertura de ventanas de análisis correspondientes a 15000 muestras. En la tabla 3.4, para las tres clases de estudio, se presentan la media y la varianza de los valores obtenidos en la estimación de  $\xi_2$ . En la figura 3.4 se analiza el comportamiento de la estimación por intervalos para cada una de las clases de análisis. Todos los valores calculados se encuentran en el anexo C.2.

$D_C$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
$\overline{\xi_2}$	4.6443	9.7637	6.03
$\sigma_{\xi_2}^2$	4.36	37.68	15.42

Tabla 3.4: Estadística de los valores obtenidos en la estimación de la dimensión de correlación

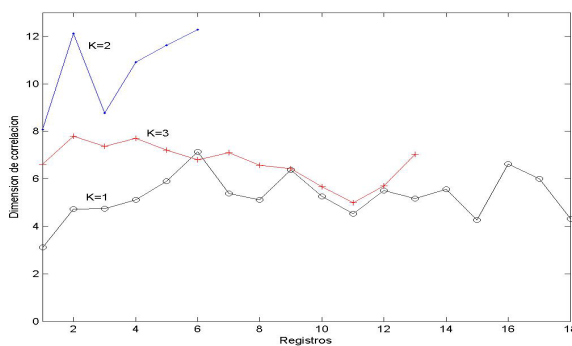


Figura 3.4: Comportamiento de la  $D_C$  a lo largo de los registros de las diferentes clases

### 3.3.3 Características basadas en vectores de energía ( $\xi_3, \xi_4$ )

En general, para relaciones señal/ruido bajas es difícil la estimación de la dimensión de correlación y otros parámetros importantes. Una forma de reducir la influencia del ruido de una señal es utilizando el método de descomposición en valores singulares, el cual forma una matriz a partir de los vectores embebidos en el espacio de fase y luego, tras calcular los autovectores y autovalores, se realiza la reconstrucción de la señal rotando la matriz a una base reducida compuesta por los autovectores que tengan un valor significativo. Debido a que los autovectores con autovalores relativamente pequeños son supuestamente dominados por el ruido, esta reducción del espacio de fase es una forma de contrarrestar la influencia del ruido presente en los registros ECG. La transformada de Karhunen-Loeve [63] es el procedimiento usualmente empleado en la descomposición de valores singulares por medio de la cual se puede reducir la dimensionalidad del sistema y obtener los ejes sobre los cuales se distribuye la mejor concentración de energía del sistema. Analizando la evolución en el tiempo de los ejes donde se concentra la mayor cantidad de energía se pueden hallar características dinámicas propias de las transiciones de estado del sistema a ser analizado.

Sea la representación del registro de la señal ECG original discretizada, dada por el vector:

$$y(n) = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_N \end{bmatrix}$$

Utilizando el valor del primer cruce por cero de la función de autocorrelación de  $y(n)$ , se escoge el parámetro  $L$ , con el cual se genera el siguiente arreglo:

$$v_1 = [y(1), y(2), \dots, y(L)]^T$$

Si  $N$  es el número de muestras de la serie de tiempo, entonces se pueden generar  $K$  intervalos de  $L$  muestras, de donde  $K = M/L$ ; así, para cada intervalo  $K_i$ , se conforman  $L$  vectores columna de dimensión  $L$ , cada uno desplazado una muestra con respecto al

anterior, de forma que los vectores queden altamente correlacionados.

$$\begin{aligned}
 v_1 &= [y(1), y(2), \dots, y(L)]^T \\
 v_2 &= [y(2), y(3), \dots, y(L+1)]^T \\
 v_3 &= [y(3), y(4), \dots, y(L+2)]^T \\
 &\vdots \\
 v_L &= [y(L), y(L+1), \dots, y(2L)]^T
 \end{aligned}$$

Con estos vectores se forma la *matriz trayectoria* de la señal  $A(t) = [v_1, v_2, \dots, v_L]$ , siendo  $v_1, v_2, \dots, v_L$  vectores columna. A partir de ésta se obtiene la matriz de autocorrelación  $Q^{(K_n)}$  del intervalo  $K_n$ , que corresponde a:

$$Q^{(K_n)} = E [v_i v_i^T] \quad (3.5)$$

donde,  $v_i$  corresponde a los vectores muestra de la señal. El elemento  $(i, j)$  de la matriz de autocorrelación corresponde a:

$$Q_{i,j}^{(K_n)} = \frac{1}{L} \sum_{m=1}^L y_{m,i}^K y_{m,j}^K \quad (3.6)$$

Para cada segmento  $K_i$  se tienen  $L$  vectores (altamente correlacionados) de los cuales se quiere encontrar la representación estadística. Se puede suponer que estos vectores *residen* en un espacio  $P$ -dimensional. Para generar dicho espacio se aplica la técnica de Karhunen-Loeve, con lo cual, partiendo de la matriz de autocorrelación de los vectores  $L$  se logra obtener un conjunto ortogonal de  $P$  vectores de dimensión  $L$  que generen el subespacio vectorial en el que los vectores residen. Lo que se obtiene con esta transformación es que se puedan representar los vectores  $L$  con un número menor de vectores que expanden el espacio vectorial de los datos. Esto es, se consigue la disminución de la dimensionalidad del problema de  $L$  vectores a  $P$  vectores. Este número  $P$  es el que en definitiva se utiliza como indicador de la distribución de energía del sistema. Seguidamente se realiza el mismo procedimiento para el siguiente intervalo  $K_{i+1}$ , que comienza en la muestra  $L$  y va hasta  $2L$ , y así sucesivamente, hasta que el total de las muestras del registro sean analizadas.

Una vez calculado el parámetro  $P$  para todos los intervalos del registro, se puede obtener la representación gráfica de éstos, la cual ofrecería información a cerca del comportamiento

de  $P$  conforme la señal evoluciona en el tiempo. Otro indicador se obtiene multiplicando un porcentaje de retención de valores<sup>1</sup> por el máximo valor propio obtenido en un intervalo; el número de valores propios que esté por encima de dicha multiplicación se guarda y se hace consecutivamente igual en los demás intervalos. Al final se representan gráficamente los valores obtenidos y se obtiene una forma de medida de complejidad de la señal conforme evoluciona en el tiempo. Siguiendo el mismo procedimiento, se puede almacenar el mayor autovalor para cada matriz de autocorrelación y se tiene la opción de analizar gráficamente la evolución en el tiempo de dichos autovalores, lo cual da idea del comportamiento de la energía de la señal.

En la tabla 3.5, para las tres clases de estudio, se presentan los valores obtenidos en la estimación de la media y la varianza del número de autovalores retenidos (NAR)  $\xi_3$ . La tabla 3.6 muestra el valor de la media y la varianza de los máximos autovalores (MA)  $\xi_4$  encontrados en los registros. En todos los casos se trabajó con un  $L=300$ ; este valor se obtuvo por tanteo y error debido a que se requería que el número de muestras fuera el suficiente para contener latidos completos. Todos los valores obtenidos se muestran en los anexos C.3 y C.4.

<i>NAR</i>	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
$\bar{\xi}_3$	32	35	42
$\sigma_{\xi_3}^2$	17.4	6.1	31.49

Tabla 3.5: Estadística del número de los autovalores retenidos

<i>MA</i>	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
$\bar{\xi}_4$	96	14	94
$\sigma_{\xi_4}^2$	211.94	6.095	829.46

Tabla 3.6: Estadística de los máximos autovalores estimados

---

<sup>1</sup>*Porcentaje de retención de valores*– es un valor que se obtiene por ensayo y error, buscando retener los suficientes valores propios para lograr una gráfica significativa.



### 3.3.4 Estimación de los exponentes de Lyapunov ( $\xi_5$ )

En primera instancia se analiza la estimación de los *exponentes de Lyapunov*, en señales ECG clasificadas previamente en normal y con el tipo de patología *Fibrilación Ventricular*. Inicialmente, el marcador más inmediato y ampliamente utilizado para un gran número de medidas sobre el ECG es el ritmo cardíaco a través de la detección del complejo *QRS*, pero debido a la dificultad de su detección en casos de fibrilación, este parámetro no resulta aconsejable como único marcador, aunque algunos algoritmos se apoyan en él para emitir algún diagnóstico [78].

#### Algoritmo de Wolf et al.

El algoritmo estima el mayor exponente de Lyapunov a partir de una serie de tiempo [100]. Primero se hace la reconstrucción del espacio de fase y se busca el punto del conjunto de vecinos más cercano  $X_{tn}$  (vector del atractor con la mínima distancia euclidiana al punto en cuestión) para el primer vector embebido  $X_{t0}$ . Se debe tener en cuenta una restricción en la búsqueda del vecino, pues éste debe estar lo suficientemente separado en tiempo, tal que no se computen como vecinos más cercanos los vectores consecutivos de la misma trayectoria. Sin tener en cuenta esta corrección, los exponentes de Lyapunov pueden estar adulterados debido a la correlación temporal de los vecinos. Una vez se determinan el vecino  $X_{tn}$  y la distancia inicial  $L(0)$  se hace evolucionar el sistema un tiempo fijo  $\Delta t$  (tiempo de evolución) y se calcula la nueva distancia  $L(\Delta t)$ . Luego se busca un vector de reemplazo tan cerca como sea posible del punto de la trayectoria fiducial<sup>2</sup> evolucionado  $X_{t0+\Delta t}$  y que conserve aproximadamente la misma orientación angular del vector trazado entre  $X_{t0+\Delta t}$  y  $X_{tn+\Delta t}$ ; este proceso se repite sucesivamente hasta alcanzar el número total de vectores embebidos  $M$ . Finalmente el exponente de Lyapunov se puede estimar usando la fórmula 3.7:

$$\lambda = \frac{1}{M \cdot \Delta t} \sum_{i=1}^M \log_2 \frac{|L_{i,j}(\Delta t)|}{|L_{i,j}(0)|} \quad (3.7)$$

---

<sup>2</sup>La *trayectoria fiducial* es aquella que comienza en el primer punto en el tiempo de un atractor reconstruido a partir de una serie de datos y contiene los puntos que lo suceden ordenados temporalmente.

donde:

$$L_{i,j}(0) = X_{t_i} - X_{t_j}$$

$$L_{i,j}(\Delta t) = X_{t_i+\Delta t} - X_{t_j+\Delta t}$$

y  $j$  corresponde al índice del vecino más cercano (o vector de reemplazo) del vector  $X_{t_i}$ .

### **Algoritmo de Rosenstein et al. [79]**

Este algoritmo es similar al de Wolf et al., permite la estimación de los exponentes de Liapunov partir de una serie de tiempo corta y ruidosa. El primer paso consiste en la reconstrucción del espacio de fase. Luego se halla el vecino más cercano para cada vector embebido. después de eso se hace evolucionar el sistema un tiempo fijo preestablecido, y el máximo exponente de Lyapunov se puede estimar como la tasa de separación promedio entre vecinos.

Asumiendo que la separación se determina a partir del máximo exponente de Lyapunov ( $\lambda$ ), entonces en un tiempo  $t$  la distancia será  $d(t) \sim Ce^{\lambda t}$ , donde  $C$  es la separación inicial. Tomando el logaritmo natural a ambos lados de la expresión se obtiene:

$$\text{Ln}(d(t)) \sim \text{Ln}(C) + \lambda t$$

Esto proporciona un conjunto de líneas paralelas para las diferentes dimensiones de embebimiento y el máximo exponente de Lyapunov se puede calcular como la pendiente promedio de todos los vectores embebidos.

Los exponentes de Lyapunov son altamente sensibles con respecto al parámetro de separación en tiempo  $\tau$  (necesario para la reconstrucción del atractor), a la dimensión de embebimiento o de inmersión y especialmente al tiempo de evolución del sistema. De otra parte, la condición de Eckmann-Ruelle [28] da la estimación del tamaño mínimo de apertura necesario para el cálculo de la dimensión del atractor y el exponente de Lyapunov. Este requerimiento indica que los vecinos calculados para un punto de referencia dado deben

estar dentro de un radio  $r$ , donde  $r$  es pequeña con respecto al diámetro  $d$  del atractor reconstruido, por ende:

$$\frac{r}{d} = \rho \ll 1$$

el valor de  $\rho$  suele ser escogido igual a 0.1, además el número de candidatos para vecinos,  $\Gamma(r)$ , debe ser mucho mayor que uno ( $\Gamma(r) \gg 1$ ). Por otro lado,  $\Gamma(r) \approx K \cdot r^D$  y  $\Gamma(d) \approx N$ , donde  $K$  es una constante,  $D$  es la dimensión del atractor y  $N$  es el número de datos. Por lo tanto se obtiene:

$$\Gamma(r) \approx N \left(\frac{r}{d}\right)^D \gg 1 \quad (3.8)$$

Finalmente se obtiene la condición de Eckmann-Ruelle para el número mínimo de datos para el cálculo de los exponentes de Lyapunov:

$$\text{Log}(N) \gg D \cdot \text{Log}\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad (3.9)$$

Si se toma  $\rho = 0.1$ , se obtiene un  $N$ , tal que

$$N > 10^D \quad (3.10)$$

En la tabla ??, para las tres clases de estudio, se presentan la media y la varianza de los valores obtenidos en la estimación de  $\xi_3$ . Los máximos exponentes de Lyapunov ( $MEL$ ) fueron calculados utilizando el algoritmo de Wolf et al. para los segmentos de señales descritos. Todos los valores calculados se encuentran en el anexo C.5.

$MEL$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
$\bar{\xi}_5$	7.885	5.493	6.694
$\sigma_{\xi_5}^2$	0.439	0.631	0.774

Tabla 3.7: Estadística de los exponentes de Lyapunov estimados

### 3.3.5 Morfología del atractor 3D

Después de analizar los resultados descritos en los puntos anteriores, se procedió a reconstruir los atractores con una dimensión de inmersión igual a 3 y con el mismo retardo ( $\tau$ ) utilizado en las pruebas anteriores. Esto se hace con el objetivo de visualizar la morfología de los atractores para las diferentes clases en un espacio de inmersión tridimensional. En la tabla de figuras 3.8 se presenta un atractor típico de cada una de las clases. Todos los atractores 3D reconstruidos se exponen en el anexo C.6.

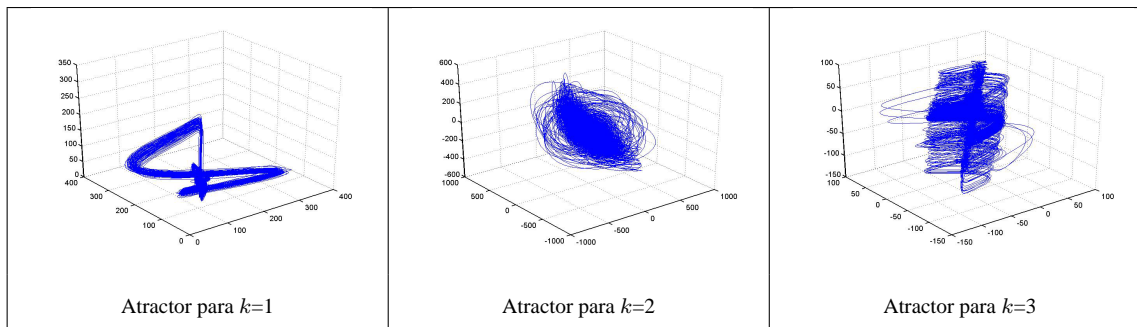


Tabla 3.8: Atractores reconstruidos de señales ECG para las diferentes clases

## 3.4 Análisis discriminante

Un problema frecuente en las tareas de clasificación es el referido a la dimensionalidad, entendida como la cantidad de características a considerar, que puede ser enorme, comparable con la cantidad de realizaciones de entrenamiento del sistema, generando consigo alta variabilidad en el modelo discriminante. Esto típicamente conlleva a la degradación en el rendimiento del clasificador. La selección de parámetros, consiste en la reducción de la dimensionalidad de las características iniciales de ECG que alimentan el clasificador, manteniendo un nivel de discriminación, tal que permita el reconocimiento de las diferentes clases de estado funcional cardíaco. En este sentido, las técnicas de análisis multivariado permiten analizar la confiabilidad de las características propuestas del sistema por diversos criterios, entre ellos, la dependencia estadística y la redundancia informativa.

El objetivo básico del análisis discriminante es la identificación de las posibles relaciones que existan entre las observaciones originadas de las diferentes clases, para de esta manera ubicar los elementos no clasificados en alguna de las categorías predefinidas.

Con el propósito de elegir, dentro del espacio total de características ECG, aquellas que discriminen adecuadamente las clases de estado funcional cardíaco definidas, se presenta la siguiente metodología propuesta en [94]:

- Prueba de hipótesis estadística para la comparación del promedio de las clases.
- Análisis de correlación por rangos (matriz de Spearman), que estima el grado de dependencia estadística entre los pares de características ECG.
- Análisis de componentes principales, destinado a la reducción de la dimensionalidad del espacio de características ECG.

### 3.4.1 Análisis de correlación por rangos

Como medida de asociación entre las características de ECG, el análisis de correlación por rangos es utilizado para observar su mutua dependencia. Una de estas medidas de asociación es el coeficiente de rango de Spearman [25]. Los valores de los coeficientes de correlación por rangos están entre -1 y 1. Un valor cercano a cero indica que no existe una asociación entre las variables. El coeficiente de correlación de Spearman  $r_s$  es definido como el coeficiente de correlación lineal entre los rangos de cada  $\mathbf{x}_i \in \mathbf{x} \subseteq \mathcal{F}$ , así:

$$r_s = \frac{\sum_{i=1}^{N_s} (R_i - \bar{R})(S_i - \bar{S})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N_s} (R_i - \bar{R})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{N_s} (S_i - \bar{S})^2}} \quad (3.11)$$

Aunque se pierde alguna información al reemplazar los datos originales por sus rangos, el coeficiente de Spearman es más robusto a la presencia de anomalías en los datos que la correlación lineal, debido a que pequeñas variaciones no influyen el rango de los datos. La transformación del espacio original al espacio de rangos genera una linealización entre

las características [25]. En la tabla 3.9 se presenta el resultado del análisis de correlación por rangos para las 5 características de ECG ( $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_5$ ) por cada una de las 3 clases presentes ( $k = 1, k = 2, k = 3$ ). Este resultado puede observarse gráficamente en la figura 3.5.

1.000	-0.389	0.221	-0.283	0.588
-0.389	1.000	-0.002	0.040	-0.372
0.221	-0.002	1.000	-0.602	-0.131
-0.283	0.040	-0.602	1.000	-0.005
0.588	-0.372	-0.131	-0.005	1.000

Tabla 3.9: Análisis de Correlación

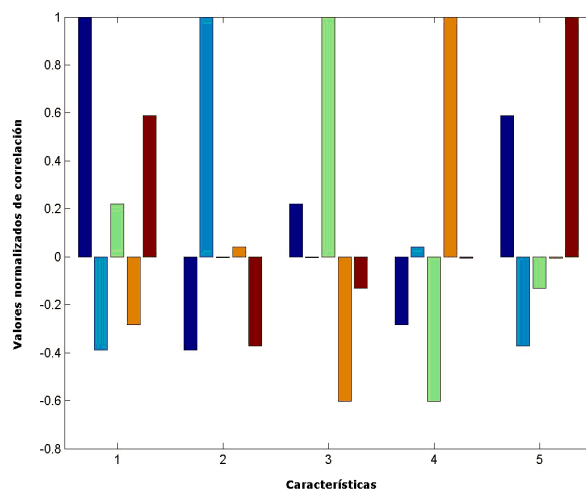


Figura 3.5: Correlación entre las características

En la figura 3.5 se observa que al tomar un valor razonable de independencia estadística (en este caso, se tomó 0.4), el análisis de correlación indica que la cantidad de pares de características ECG que pueden ser consideradas como independientes es significativo. Otro punto es que  $\xi_3$  procede de un cálculo que involucra  $\xi_4$ , es por esto que se puede apreciar una dependencia estadística considerable entre estas dos características; esto indica que hay una posible redundancia en la información. Un ensamble efectivo podría prescindir de

una de las dos características, utilizando un criterio de selección que consistiría en escoger el que presente menos coeficiente de correlación con los demás.

### 3.4.2 Análisis de componentes principales

Es tal vez uno de los métodos de reducción de dimensión más utilizado, en gran parte debido a su simplicidad conceptual y a la eficiencia computacional de sus algoritmos. También conocido como la transformación de *Karhunen-Loève*. [63]. Inicialmente su campo de acción se centra en las transformaciones lineales de los datos originales, y busca maximizar la varianza direccional de una manera no correlacionada, así el problema de reducción de dimensionalidad tiene un solución analítica exacta.

Geoméricamente, el hiperplano generado por los primeros  $L$  *componentes principales* es el hiperplano de regresión que minimiza las distancias ortogonales a los datos. Por esta razón PCA es un método de regresión simétrica, contrario a la regresión lineal estándar. Sin embargo, este análisis sólo está en capacidad de encontrar un subespacio lineal, lo que

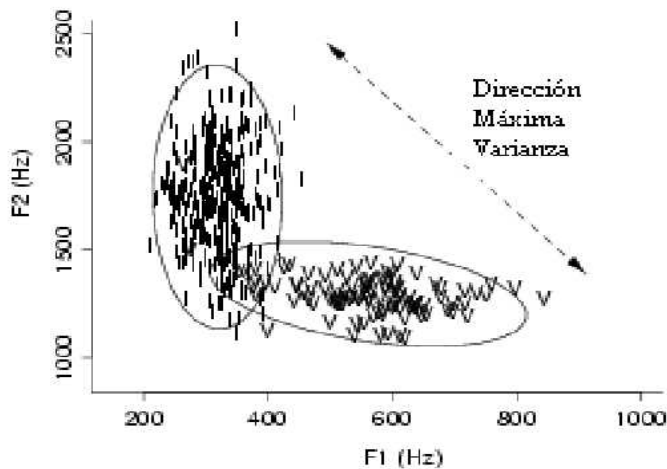


Figura 3.6: Representación de la varianza máxima por PCA

indica que no puede manejar datos con una relación no lineal. No se conoce cuántos componentes principales deben tomarse en cuenta; aunque existen algunas reglas empíricas para decidir, i.e, eliminar aquellos componentes cuyos autovalores sean menores a cierta

fracción del mayor de los autovalores, o tener en cuenta los necesarios para representar cierto porcentaje de la varianza total [63].

El objetivo es encontrar los autovectores de la matriz de covarianza. Dichos autovectores describen la dirección de los componentes principales de los datos originales, y su interpretación estadística está dada por el autovalor correspondiente. Este método puede estructurarse de la siguiente manera [63]:

1. Conformación de la matriz inicial de datos  $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^M$ , a partir de vectores de características  $\mathbf{x}$ .
2. Centralización del primer momento, calcular  $\bar{x}$  y restarlo de cada  $x_i \in \mathbf{x} \subseteq \mathcal{F}$ .
3. Cálculo de la matriz de covarianza (o de correlación)  $\Sigma$ .
4. Determinación de los autovectores y autovalores para la matriz  $\Sigma$ .

$$\Sigma \nu = \lambda \nu \tag{3.12}$$

en donde  $\lambda$  es un autovalor y  $\nu$  un autovector.

5. Organización de los autovalores de tal manera que:

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n \tag{3.13}$$

6. Selección de los primeros  $d \leq n$  autovectores y generar el nuevo set de datos en la nueva representación estableciendo un criterio sobre la varianza porcentual acumulada.

El resultado que se obtuvo al realizar un análisis de los componentes principales sobre las características ECG estudiadas se muestra en la figura 3.7. En términos de reducción, los resultados presentados en la figura 3.7 indican que la dimensionalidad del vector original de características puede ser llevado a 4 componentes para un criterio de varianza acumulada del 95%; aunque por el costo que representa el análisis de los componentes principales para reducir tan sólo una característica, es más viable trabajar con el conjunto completo de características; además, los resultados que en estas condiciones arroja el clasificador, es del 99.98%.



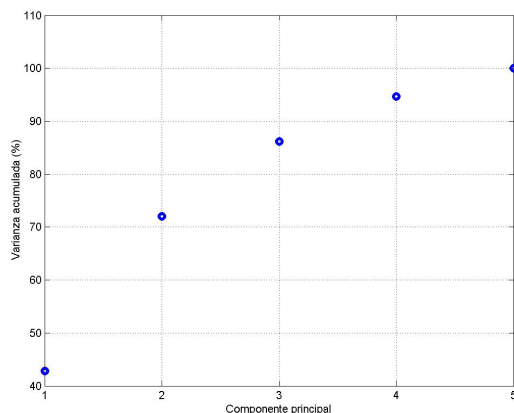


Figura 3.7: Análisis de los componentes principales

### 3.4.3 Prueba y validación

Las siguientes son las condiciones de prueba de clasificación:

- *Espacio analizado de Características ECG.* En concordancia con los resultados obtenidos del análisis multivariado se toma el conjunto completo de características propuestas  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5)$ .
- *Clasificadores de prueba.* La consistencia de las características en el reconocimiento de las señales ECG, se probó en el clasificador del tipo Máquina de Soporte Vectorial [48]. Una breve descripción de este tipo de clasificadores se encuentra en el anexo D.
- *Estrategia de validación.* Se realizó la validación cruzada con el objetivo de observar la variación en los parámetros del clasificador y su capacidad de generalización, para esto se utilizaron 2 particiones de la muestra.
- *Medida de desempeño.* La medida *Precisión* indica el porcentaje de acierto promedio obtenido en las dos validaciones; mientras *Desviación* define la desviación porcentual del error de clasificación.

### Características del clasificador SVM utilizado

La arquitectura utilizada para la máquina de soporte vectorial corresponde a C-SVM multiclase con esquema “uno contra los demás” (*one against the rest*) para 3 clases y 5 características. Es importante determinar la siguiente notación:

*cv*: Validación cruzada.

*acc*: Precisión.

*k*: Es el kernel, lo cual es el mapeo de un espacio de entrada en otro que tiende a ser infinito-dimensional.

*c*: Es el parámetro de regularización inversa de la máquina de soporte vectorial.

*d*: Grado del polinomio.

$\gamma$ : Es equivalente a  $1/(2\sigma^2)$  para una función de gauss.

Los kernels empleados en el presente trabajo corresponden a los siguientes con sus respectivas características:

- *Lineal*. Con  $c=1$ .
- *Polinomial*. Con  $c=1$  y  $d=3$ .
- *RBF-Radial Basis Function*. Con  $c=10$  y  $\gamma=0.2$ .

Los siguientes fueron los resultados del clasificador:

- *SVM*:  $cv = 2 - 10$  y  $acc = 98.2456$ .
- *Kernel polinomial*:  $cv = 2 - 10$  y  $acc = 98.2456$ .
- *kernel RBF (Radial Basis Function)*:  $cv = 2 - 10$  y  $acc=99.9$ .

Todos los resultados son para  $cv = 2-10$  y  $std = 0$ , lo cual implica que para todas las validaciones cruzadas de 2 hasta 10 se obtuvieron los mismos resultados.

### Observaciones

- Para radial basis SVM se tuvo que normalizar los datos entre uno y menos uno, sino el  $acc$  no sube de 35%. Esto se debe a que son números grandes y todos positivos.

- Que la validación cruzada arroje el mismo resultado para todas las particiones, significa que las características tienen buena capacidad de discriminación.
- Con los datos escalados, linear SVM baja el rendimiento un poco más que polinomial, esto es debido a que en el espacio normalizado ya no son tan separables.
- El mejor kernel es el RBF, ya que el mapeo del kernel es mucho más estable ante variaciones del conjunto de datos o con nuevas muestras. Además, los kernels lineal y polinomial tienen una respuesta lenta, aún en conjuntos pequeños como el utilizado en el análisis.

# Conclusiones

---

- Se analiza y desarrolla la caracterización de los estados funcionales normales de la actividad cardíaca, como también los patológicos de los tipos fibrilación ventricular, taquicardia ventricular y fluttering; empleando las siguientes técnicas de dinámica no lineal: Dimensión de correlación, mínimo valor de AMI, número de autovalores retenidos, dinámica de los máximos autovalores y exponentes de Lyapunov.
- Se analiza la sensibilidad de la estimación de cada una de las características mediante el estudio de los diferentes algoritmos propuestos para el cálculo. Como resultado se obtiene que la estimación de las propuestas, presentan suficiente consistencia para la clasificación de las señales. Este análisis también mostró que debido a los altos costos computacionales de los algoritmos propuestos para el cálculo de las características, la clasificación debe realizarse en condiciones fuera de línea.
- Se analiza y desarrolla una metodología orientada al estudio del poder discriminante de las características en la clasificación de estados funcionales cardíacos propuestos. El análisis discriminante está basado en el criterio de dependencia estadística y demostró que básicamente el conjunto de características propuesto representan suficiente separabilidad entre las clases.
- La consistencia de las características propuestas para el reconocimiento de estados cardíacos funcionales, se probó en máquinas de soporte vectorial. Como resultado se obtuvo prácticamente la completa discriminabilidad de las clases.

# Bibliografía

---

- [1] Heart rate variability - standards of measurement, physiological interpretation and clinical use. Task Force of the European Society of Cardiology and the North American Society of Pacing and Electrophysiology, vol.93. *Circulation*.
- [2] H. D. I. Abarbanel. *Analysis of Observed Chaotic Data*. Springer, N.Y., 1996.
- [3] C. D. Acosta. La molificación discreta como estimador lineal, 2000.
- [4] P. Aguirre, J. Cardelino, and N. Loeff. *Sistema de detección, clasificación e identificación en línea de complejos QRS*. PhD thesis, Instituto de Ingeniería Eléctrica Facultad de Ingeniería Universidad de la República, Montevideo, Uruguay, 2002.
- [5] L. Amaral, A. Goldberger, L. Glass, J. Hausdorff, P. Ivanov, R. Mark, J. Mietus, G. Moody, C. Peng, and H. Stanley. Physiobank, physiotoolkit, and physionet: Components of a new research resource for complex physiologic signals. *Circulation*, 101(23):e215–e220, 2000.
- [6] A. Babloyantz and A. Destexhe. Is the normal heart a periodic oscillator. *Biological Cybernetics*, 58:203–211, 1988.
- [7] J. Bassingthwaighte and G. Raymond. Evaluating rescaled range analysis for time series. *Annals of Biomedical Engineering*, 22(4):432–444, 1994.
- [8] J. Bassingthwaighte and G. Raymond. Evaluation of the dispersional analysis method for fractal time series. *Annals of Biomedical Engineering*, 23(4):491–505, 1995.

- [9] J. J. Bonilla and A. M. Manotas. *Análisis de la Actividad Eléctrica Cerebral en Pacientes Epilépticos*. Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá Colombia, 2003.
- [10] E. Braun. *Caos, Fractales y Cosas Raras*. Fondo de Cultura Económica, México, 1996.
- [11] C. Burges. A tutorial on support vector machines for pattern recognition. *Knowledge Discovery and Data Mining*, 2:22, 1998.
- [12] A. Cabrera, G. Sierra, A. Martínez-Rubio, L. Reinhardt, T. Fetsch, S. Yli-Myry, K. Balkenhoff, and G. Breithardt. A combined method for the detection of ventricular fibrillation. In *17th Annual International Conference of the IEEE Eng. In Med. And Biol. Soc.*, 1995.
- [13] R. Carvajal, M. Vallverdú, R. Baranowski, P. Caminal, and J. Zebrowski. Clasificación de pacientes con cardiomiopatía hipertrófica utilizando la dimensión de correlación de la variabilidad del ritmo cardíaco. In *Memorias del XV Congreso de la SEIB*, pages 226–229, 1997.
- [14] R. Carvajal, M. Vallverdú, R. Baranowski, P. Caminal, and J. Zebrowski. Correlation dimension of hrv to stratify hcm-patients. *Elektrofizjologia i stimulacja serca*, 4:72, 1997.
- [15] R. Carvajal, M. Vallverdú, R. Baranowski, L. Chojnowska, W. Rydlewska-Sadowska, R. Jané, and P. Caminal. Non linear analysis of heart rate variability in patients with hipertrophic cardiomyopathy. page 278, 1996.
- [16] F. Charbonnier. Algorithms for arrhythmia analysis in aed's. 1993.
- [17] F. Charbonnier. External defibrillators and emergency external pacemakers. In *Proceedings of the IEEE*, volume 84, March 1996.
- [18] P. D. Chazal and R. Reilly. A comparison of the ecg classification performance of diferent feature sets. *IEEE Computers in Cardiology*, 227:327–330, 2000.

- [19] D. Cuesta. *Estudio de métodos para procesamiento y agrupación de señales electrocardiográficas*. PhD thesis, Valencia, 2001.
- [20] D. Cuesta, J. C. Pérez, G. Andreu, and D.Ñóvak. Feature extraction methods applied to the clustering of electrocardiographic signals: A comparative study. URL: <http://dcuesta.alc.upv.es/Investigacio/ICPR2002-2.pdf>, 2002.
- [21] I. Daubechies. Ten lectures on wavelets. conference board of the mathematical society, national science foundation (CBMS-NSF). *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 1992.
- [22] A. Delgado. *Inteligencia artificial y minirobots*. Ecoe ediciones, Santa Fe de Bogotá, 1998.
- [23] G. Denton, R. Diamond, S. Helfant, Khan, and H. Karagueuzian. Fascinating rhythm: A primer on chaos theory and its application to cardiology. *American Heart*, pages 1419–1440, December 1990.
- [24] Z. Dokur, T. Ölmez, and E. Yazgan. Ecg waveform classification using the neural network and wavelet transform. In *Proceedings-21th Annual International Conference - IEEE/EMBS*, Atlanta, 1999.
- [25] I. Doltsinis, F. Rau, and M. Werner. *Stochastic Analysis of Multivariate Systems in Computational Mechanics and Engineering*, chapter Analysis of Random Systems, pages 9–159. International Center for Numerical Methods in Engineering, first edition, September 1999.
- [26] D. Dugdale and M. Eisenberg. *Diagnóstico médico*, volume 1. Interamericana McGraw-Hill, México, 1994.
- [27] R. Eberhart. Chaos theory for the biomedical engineer. *IEEE Engineering in Medicine and Biology Magazine*, pages 41–45, September 1969.
- [28] J. Eckmann and D. Ruelle. Fundamental limitations for estimating dimensions and lyapunov exponents in dynamical systems. *Physica D*, 56:185–187, 1992.

- [29] G. Edgar. *Measure, Topology and Fractal Geometry*. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [30] P. Farreras and C. Rozman. *Medicina Interna*, volume I. Ediciones Doyma, España, 12 edition, 1992.
- [31] J. Feder. *Fractals*. Plenum Press, N.Y., 1989.
- [32] A. Fraser and H. Swinney. Independent coordinates for strange attractors from mutual information. *Phys. Rev. A*, 33(2):1134, 1986.
- [33] M. H. Fredric and H. Soowhan. Classification of cardiac arrhythmias using fuzzy artmap. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 43(4), April 1996.
- [34] J. Gallardo. *ECG Tutorial-The Basic Principles of the ECG*. URL: <http://home.wish.net/gallardo/ecgtutorial>, 2000.
- [35] L. A. Geddes. *Cardiovascular devices and their applications*. John Wiley and Sons, New York, 1984.
- [36] B. Giraldo. *Contribución al diagnóstico automático de arritmias cardíacas basado en el código Minnesota*. España, 1996.
- [37] L. Glass and D. Kaplan. Time series analysis of complex dynamics in physiology and medicine. *Med. Progress through Technol.*, 19:115–128, 1993.
- [38] A. L. Goldberger. Fractal mechanisms in the electrophysiology of the heart. *Transactions of the IEEE on Engineering in Medicine and Biology*, pages 47–52, 1992.
- [39] A. L. Goldberger. Non-linear dynamics for clinicians. chaos theory, fractals and complexity at the bedside. *Lancet*, 347:1312–1314, 1996.
- [40] A. L. Goldberger, D. R. Rigney, and B. J. West. Chaos and fractals in human physiology. *Scientific American*, 262:42–49, 1990.
- [41] N. Goldschlager and M. J. Goldman. *Principios de Electrocardiografía Clínica, El Manual Moderno*. S. A. de C. V., 1991.



- [42] M. A. G. González. *Estudio de la Variabilidad del Ritmo Cardíaco Mediante Técnicas Estadísticas, Espectrales y no Lineales*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Cataluña, 1998.
- [43] P. Grassberger and I. Procaccia. Characterization of strange attractors. *Phys. Rev. Lett.*, 50:346–349, 1983.
- [44] P. Grassberger and I. Procaccia. Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica D*, 9:189–208, 1983.
- [45] R. A. Gray, J. Jalifé, A. V. Panfilov, W. T. Baxter, C. Cabo, J. M. Davidenko, and A. M. Pertsov. Mechanisms of cardiac fibrillation. *Sci.*, 270:1222–1225, 1995.
- [46] A. C. Guyton. *Textbook of Medical Physiology*. WB Saunders, Philadelphia, 1986.
- [47] H. Harold. *Diagnóstico Electrocardiográfico y Vectocardiográfico*. Salvat, 1990.
- [48] R. Henao, F. Ojeda, and G. Castellanos. Máquinas de soporte vectorial en el reconocimiento de señales biomédicas. *SIMPOSIO DE ESTADÍSTICA 2003: ESTADÍSTICA EN CIENCIAS DE LA SALUD*, Agosto 2003.
- [49] F. Kaspar and H. G. Schuster. Easily calculable measure for the complexity of spatiotemporal patterns. *Phys. Rev. A.*, 36:842–848, 1987.
- [50] D. Kilpatrick and P. Johnston. Origin of the electrocardiogram. *IEEE Engineering in Medicine and Biology*, pages 479–486, August/September 1994.
- [51] H. P. Koch. The concept of fractals and the pharmaceutical sciences. *Pharmazie*, 48:643–655, 1993.
- [52] J. Kurths, A. Voss, A. Witt, P. Saparin, H. Kleiner, and N. Wessel. Quantitative analysis of heart rate variability. *Chaos*, 5:88–94, 1995.
- [53] E. A. Lafuente. *Taquicardia y Fibrilación Ventricular*. México D.F., México, 2000.
- [54] P. Laguna. *Nuevas Técnicas de Procesado de Señales Electrocardiográficas: Aplicación a Registros de Larga Duración*. PhD thesis, October 1990.

- [55] F. Lombardi, G. Sandrone, A. Mortara, D. Torzillo, M. L. Rovere, M. Signorini, S. Cerutti, and A. Malliani. Linear and nonlinear dynamics of heart rate variability after acute myocardial infarction with normal and reduced left ventricular ejection fraction. *Am. J. Cardiol.*, 77:1283–1288, 1996.
- [56] W. J. Long, S.Ñaimi, and M. Criscitiello. Development of a knowledge base for diagnostic reasoning in cardiology. *Computers and Biomedical Research*, 25, 1992.
- [57] P. Macfarlane and T. Veitch, editors. *Comprehensive Electrocardiology. Theory and practice in health and disease*. Pergamon Press, U.K., 1989.
- [58] M. C. Mackey and L. Glass. Oscillation and chaos in physiological system. *Science*, 197:287–289, 1977.
- [59] B. Mandelbrot. *The Fractal Geometry of Nature*. New York, 1983.
- [60] MathWorks. *Signal Processing Toolbox: User's Guide - Version 5. For Use with MATLAB*. The MathWorks, Inc., Natick, MA, 2000.
- [61] MathWorks. *Wavelet Toolbox: User's Guide - Version 2. For Use with MATLAB*. The MathWorks, Inc., Natick, MA, 2000.
- [62] Y. Meyer. *Wavelets: Algorithms and applications*. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 1993.
- [63] Miguel A. Carreira-Perpinan. A Review of Dimension Reduction Techniques. Technical Report CS–96–09, Dept. of Computer Science, University of Sheffield, January 1997.
- [64] J. J. Moré. The levenberg - marquardt algorithm: Implementation and theory. *Lecture Notes in Mathematics*, 630:105–116, 1977.
- [65] A. Murray, R. Clayton, and R. Campbell. Comparative assesment of the ventricular fibrillation detection algorithms in five semi-automatic or advisory defibrillators. *Resuscitation*, 26 (2):163–172, 1993.

- [66] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer. *Discrete-Time Signal Processing*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, second edition, 1989.
- [67] M. Orozco. *Clasificación de Arritmias Cardíacas usando Transformada Wavelet y Técnicas de Reconocimiento de Patrones*. Universidad Nacional de Colombia, Manizales, 2003.
- [68] R. Orozco, M. Pérez, J. V. Lorenzo, R. Grau, and R. Ramos. Evaluation of qrs morphological classifiers in the presence of noise. *Computers and Biomedical Research*, 30:200–210, 1997.
- [69] M. Osaka, H. Saitoh, H. Atarashi, and H. Hayakawa. Correlation dimension of heart rate variability: A new index of human autonomic function. *Front. Med. Biol. Eng.*, 5:289–300, 1993.
- [70] A. Papoulis. *The Fourier Integral and Its Applications*. McGraw-Hill, 2<sup>a</sup> edition, 1987.
- [71] A. Papoulis. *Probability, Random Variables and Stochastic Processes, 3rd edition*. McGraw-Hill, New York, 1991.
- [72] T. S. Parker and L. O. Chua. Chaos: A tutorial for engineers. In *IEEE Proceedings*, volume 75, pages 982–1008, 1987.
- [73] T. S. Parker and L. O. Chua. *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*. Springer-Verlag, New York, 1989.
- [74] S. Pascau and R. Orozco. Estimación del potencial isoeléctrico en el ecg: Distinción entre fibrilación ventricular y otras arritmias, 1998.
- [75] J. D. Pulgarín. *Regularización mediante Molificación Discreta de Señales ECG Perturbadas*. Universidad Nacional de Colombia, Manizales, 2003.
- [76] A. L. Ritzenberg, D. R. Adam, and R. J. Cohen. Period multiplying evidence for nonlinear behavior of the canine heart. *Nature*, 114:321–327, 1984.

- [77] K. M. Ropella, A. V. Sahakian, J. M. Baerman, and S. Swiryn. The coherence spectrum: a quantitative discriminator of fibrillatory and nonfibrillatory cardiac rhythms. *Circulation*, 80:112–119, 1989.
- [78] A. Rosado. *Desarrollo de técnicas de detección de Fibrilación Ventricular Basadas en Algoritmos Tiempo-Frecuencia*. PhD thesis, Valencia, 2000.
- [79] M. T. Rosenstein, J. J. Collins, and C. J. de Lucía. *A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets*. Boston, 1992.
- [80] B. Schölkopf and A. Smola. *Learning with Kernels Support Vector Machines, Regularization, Optimization and Beyond*. MIT Press, Cambridge, 2002.
- [81] B. Schölkopf, K. Sung, C. Burges, F. Girosi, P. Niyogi, T. Poggio, and V. Vapnik. Comparing support vector machines with gaussian kernels to radial basis function classifiers. URL: <http://citeseer.nj.nec.com/63569.html>, 1996.
- [82] A. M. Shanmugan. *Random Signals: Detection, Estimation and Data Analysis*. New York, 1988.
- [83] G. Sierra, A. Cabrera, A. Martínez-Rubio, T. Fetsch, L. Reinhardt, H. Shenasa, and G. Breithardt. The coherence spectrum in an experimental model of ventricular fibrillation. In *17th Annual International Conference of the IEEE Eng. In Med. And Biol. Soc.*, 1995.
- [84] M. Signorini and S. Cerutti. Lyapunov exponents calculated from heart rate variability time series. *IEEE-EMBS*, pages 119–120, 1994.
- [85] S. C. Smeltzer and B. G. Bare. Assessment of cardio-vascular function. *Medical Surgical Nursing*, 1992.
- [86] S. W. Smith. *The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing*. California Technical Publishing, San Diego, California. URL: <http://www.dspguide.com>, second edition, 1999.

- [87] R. V. Solé, J. Bascompte, J. Delgado, B. Luque, and S. C. Manrubia. Complejidad en la frontera del caos. *Investigación y Ciencia*, (236):14–21, 1996.
- [88] M. Spiegel. *Estadística*. Mc Graw Hill, 1970.
- [89] F. Takens. Detecting strange attractors in turbulence. In *Dynamical systems and turbulence, Lecture Notes in Mathematics*, volume 898, pages 366–381, 1981.
- [90] N. V. Thakor, Y.-S. Shu, and K.-Y. Pan. Ventricular tachycardia and fibrillation detection by a sequential hypothesis testing algorithm. *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, 37(9), 1990.
- [91] J. Theiler, S. Eubank, A. Longtin, B. Galdrikian, and D. Farmer. Testing for nonlinearity in time series: The method of surrogate data. *Physica D*, 58:77–94, 1992.
- [92] R. D. Throne. Detecting ventricular fibrillation using efficient techniques for computing a normalized autocorrelation. *Comput. Biol. Med.*, 23(317), 1993.
- [93] V. Vapnik. *The Nature of Statistical Learning Theory*. Springer, NY, 1995.
- [94] F. Vargas, F. Ojeda, J. F. Suárez, and G. Castellanos. Análisis multivariado en la selección de características para la identificación de patologías de voz. *SIMPOSIO DE ESTADÍSTICA 2003: ESTADÍSTICA EN CIENCIAS DE LA SALUD*, Agosto 2003.
- [95] A. Voss, J. Kurths, H. Kleiner, and N. Wessel. Improved analysis of heart rate variability by methods of nonlinear dynamics. *J. Electrocardiol Suppl*, 28:81–88, 1995.
- [96] A. Voss, J. Kurths, H. Kleiner, A. Witt, P. Saporin, R. Dietz, H. Fiehring, and N. Wessel. Nonlinear dynamics versus traditional methods of heart rate variability analysis. *Computers in Cardiology*, pages 125–128, 1994.
- [97] H. Warner and S. Georgeson. Expert system of wide complex tachycardia. *IEEE Computers in Cardiology*, 1992.

- [98] J. Webster. *Medical Instrumentation. Application and Design*. Houghton Mifflin Company, Boston, 1992.
- [99] A. T. Winfree. *The Geometry of Biological Time*. Springer, N.Y., 1980.
- [100] A. Wolf, B. Swift, H. Swinney, and J. Vastano. Determining lyapunov exponents from time series. *Physica D*, 16:285–317, 1985.
- [101] P. Wolfe. The simplex method for quadratic programming. *Econometrica*, 27:382–398, 1959.
- [102] J. Zebrowski, T. Buchner, R. Baranowski, and W. Poplawska. Nonlinear analysis of heart dynamics. *Med. Biol. Eng. Comput.*, 34:379–380, 1996.
- [103] J. Zebrowski, T. Buchner, R. Baranowski, and W. Poplawska. Nonlinear analysis, theory, methods and applications. In *2nd World Congress of Nonlinear Analysts*, volume 30, pages 1007–1017, 1997.
- [104] C. Zeelenberg and A. Braaksma. Erasmus: Consultation system for the interpretation of complex arrhythmias. *IEEE Computers in Cardiology*, 1988.

# Fundamentos de electrocardiografía

---

## A.1 Origen fisiológico

El corazón es una bomba muscular dividida en cuatro cámaras: Dos cámaras receptoras o *aurículas*, localizadas en la parte superior y dos centros de bombeo o *ventrículos* en la parte inferior, cuya misión es el bombeo de sangre desoxigenada a los pulmones y de sangre oxigenada a todas las partes del cuerpo. La contracción y distensión de dichas cámaras se realiza de manera síncrona de tal forma que se optimiza el gasto cardíaco [35].

El corazón está compuesto por células excitables que se contraen al ser estimuladas por sus vecinas y esa contracción se da únicamente, si el músculo cardíaco cambia la conductividad de su pared celular, permitiendo un flujo de iones de Calcio [98]. En la figura A.1 se muestra el sistema de conducción de impulsos del corazón, el cual está compuesto por: 1) El nodo sinoauricular; 2) el nodo aurículo-ventricular; 3) el haz de His; 4) las ramas derecha e izquierda del haz de His; y 5) el sistema de Purkinje. En general, la contracción es disparada por el nodo sinusal cuando se excede un determinado potencial de umbral. En reposo las células tienen un potencial transmembrana de 90mV, el cual es cíclico, con un periodo entre 400 y 1200ms. Este nodo sinusal, situado en la posición cefálica de la aurícula derecha, está compuesto por un grupo de células que se despolarizan automáticamente cada 800ms. Esta despolarización se transmite a las células auriculares adyacentes, propagando asimismo el llamado potencial de acción y describiendo un flujo de cationes  $Na^+$  y  $Ca^{++}$ , que irrumpen desde el medio extracelular hacia el interior cuando la membrana se hace permeable. La conducción se realiza a través de todo el músculo y a través de los llamados

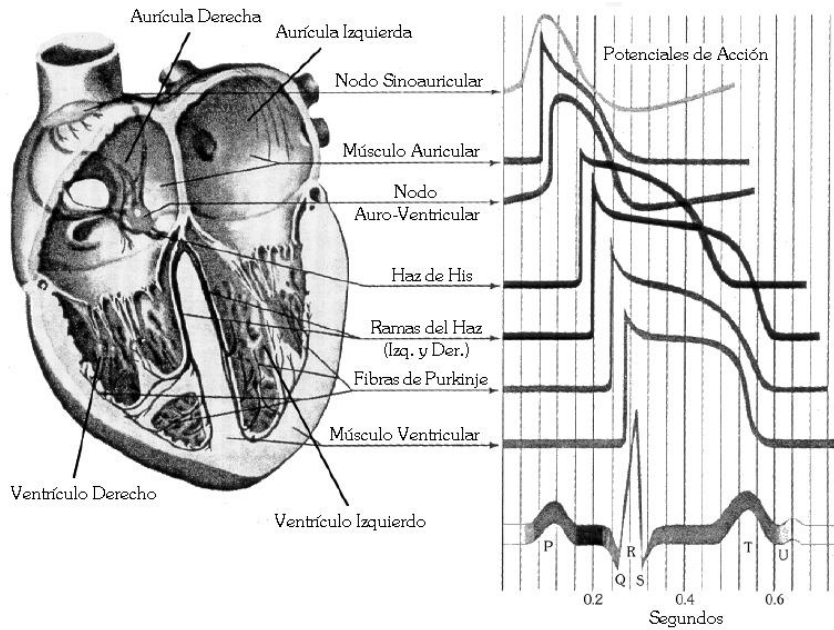


Figura A.1: Anatomía del sistema de conducción del corazón

camino preferenciales, que transmiten el impulso de excitación de forma rápida. De esta forma, el estímulo se transmite a las dos aurículas que se contraen y llega hasta el nodo aurículo-ventricular. Este conjunto de células se caracterizan por tener una conducción muy lenta. Por otro lado, la separación entre aurículas y ventrículos no es conductora salvo por un punto. Por lo tanto, la excitación queda retenida en el nodo aurículo-ventricular durante el tiempo suficiente para que las aurículas hayan bombeado la sangre a los ventrículos. Pasado este tiempo, la excitación sigue su camino hacia los ventrículos a través del haz de His de forma rápida. A partir de este punto, la velocidad de la excitación se acelera hasta alcanzar las fibras de Purkinje donde se transmite a todos los puntos de ambos ventrículos causando la contracción de éstos y, por consiguiente, la expulsión de la sangre venosa hacia los pulmones y de la sangre arterial hacia el resto del cuerpo. La fase de recuperación se conoce como repolarización, y durante este periodo las concentraciones de iones vuelven al nivel normal. Existe una conexión especial, el nodo auriculoventricular (AV), que avanza de aurícula a ventrículo, evitando frecuencias cardíacas superiores a 200lpm (latidos por minuto) [50]. La despolarización del músculo produce un nivel positivo que precede a la onda de avance. Esto significa que en la superficie del músculo los electrodos recogen un



nivel positivo. La amplitud de la deflexión es proporcional a la masa de músculo, lo cual permite detectar, por ejemplo, pacientes con los ventrículos derecho o izquierdo agrandados (Hipertrofia ventricular).

La suma de todos los potenciales eléctricos desarrollados durante todo este proceso hace el que la señal ECG pueda ser detectada por medio del electrocardiógrafo, colocando electrodos en lugares determinados de la superficie del cuerpo. Normalmente la señal ECG se registra en papel milimétrico, en el cual 5mm en el eje horizontal representan 0.2s y 1cm en el eje vertical representa 1mV de amplitud como se muestra en la figura A.2.

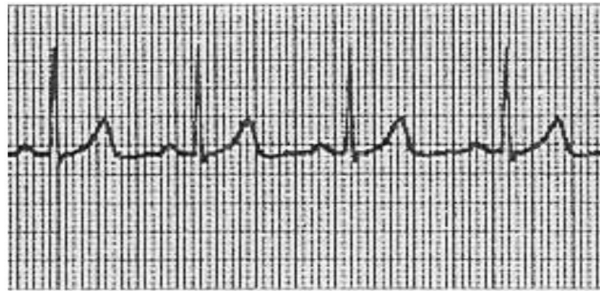


Figura A.2: Señal de electrocardiografía

## A.2 Componentes de la señal ECG

Cada onda del ECG está relacionada con una acción específica del sistema cardíaco que genera diferentes potenciales. Un periodo de ciclicidad de la señal ECG perteneciente a un individuo sano, consiste en una onda *P*, el complejo *QRS*, la onda *T* y la onda *U* [34], tal como se muestra en la figura A.3. Las porciones del electrocardiograma entre las deflexiones se denominan *segmentos* y las distancias entre ondas se denominan *intervalos*. La señal ECG puede ser dividida en los siguientes intervalos y segmentos [47]:

- *Onda P*. Representa la despolarización de la aurícula. Su duración normal es de 0.1s y tiene una amplitud menor a 0.25 mV. La forma depende de la localización de los electrodos o *derivación*. Un aumento del voltaje o de la duración de esta onda indica

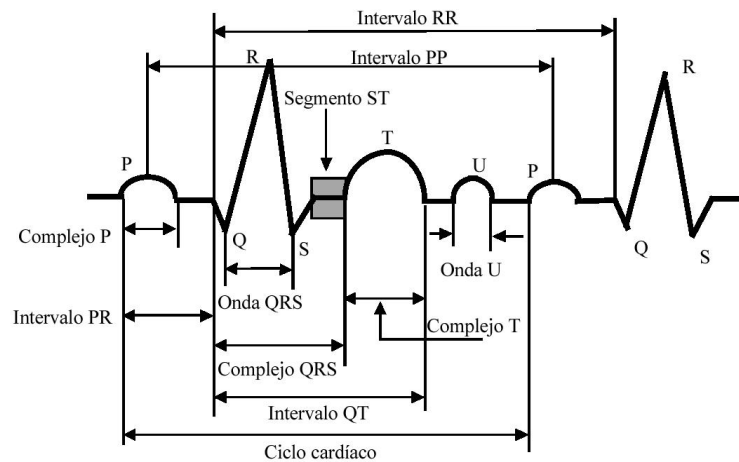


Figura A.3: Esquema de los complejos, intervalos y segmentos de la señal ECG

una anomalía auricular. La ausencia de esta onda ocurre en una parada del nodo sinusal, y en el bloqueo sinoauricular (situación en la que sí se despolariza el nodo sinusal, pero no se transmite el impulso a las células de la aurícula contiguas).

- *Complejo QRS*. Representa la despolarización de los ventrículos. Está formado por las ondas *Q*, *R* y *S*. Su duración es de aproximadamente 100ms y su amplitud se encuentra entre 1 mV y 3 mV. Durante este evento tiene lugar la repolarización auricular, llamada onda  $T_a$ , la cual queda enmascarada por el complejo *QRS* y, por lo tanto, esta deflexión no suele observarse en la señal ECG de 12 derivaciones. La onda  $T_a$  tiene dirección opuesta a la onda *P*.
- *Onda T*. Representa la repolarización de los ventrículos. La onda *T* normal es asimétrica en sus ramas y está redondeada en su vértice. La pendiente de la rama inicial es más suave que la de la rama terminal. Las anomalías de esta onda pueden indicar enfermedades cardíacas primarias, aunque hay casos de personas sanas con las mismas anomalías. También puede traducir trastornos del equilibrio hidroelectrolítico.
- *Onda U*. Tiene origen fisiológico poco claro, pero se cree que resulta de la repolarización lenta del sistema de conducción intraventricular (Purkinje). Es anormal en trastornos del Potasio.

- *Segmento PR*. Corresponde a la línea isoelectrica entre el comienzo de la onda *P* y la deflexión inicial del complejo *QRS*. Mide el tiempo de conducción AV e incluye el tiempo necesario para la despolarización auricular, el retardo normal de la conducción en el nodo AV (cerca de 0.07s), además del el paso del impulso a través del haz de His y sus dos ramas, hasta el comienzo de la despolarización ventricular. Normalmente varía entre 0.12 y 0.21s.
- *Segmento ST*. Es el intervalo entre el final del complejo *QRS* (llamado punto *J*) y el inicio de la onda *T*. Representa el tiempo durante el cual, los ventrículos permanecen en estado activado y puede iniciarse la repolarización ventricular. Normalmente el segmento *ST* es isoelectrico, aunque puede estar también ligeramente desviado. Una desviación elevada a menudo representa un infarto de miocardio, una pericarditis aguda o una miocarditis.
- *Intervalo PP*. Corresponde al intervalo de tiempo entre el comienzo de la onda *P* y el comienzo de la siguiente onda *P*. Con ritmo sinusal regular, el intervalo *PP* es igual al intervalo *RR*. Sin embargo, con ritmo ventricular irregular, o cuando las frecuencias auricular y ventricular son regulares pero diferentes entre sí, el intervalo *PP* debe medirse desde el mismo punto en dos ondas *P* sucesivas y calcular la frecuencia auricular por minuto, en la misma forma que se calcula la frecuencia ventricular por minuto.
- *Intervalo RR*. Corresponde al intervalo de tiempo entre dos ondas *R* de dos complejos *QRS* consecutivos. Corresponde al intervalo de tiempo entre el comienzo de la onda *Q* y el final de la onda *S*, perteneciente a un mismo complejo *QRS*. Este intervalo es un indicador del tiempo de conducción intraventricular.
- *Intervalo QT*. Corresponde al intervalo de tiempo entre el comienzo del complejo *QRS* y el final de la onda *T*, representando la duración de la sístole eléctrica. Varía con la frecuencia cardíaca y por efecto del sistema nervioso autónomo. A veces el final de la onda *T* no está bien definido, o puede haber una onda *U* superpuesta a la *T*. En estos casos no es posible medir el intervalo *QT* correctamente. La relación entre

el ritmo cardíaco y la duración de este intervalo viene dado en la tabla A.1.

Ritmo Cardíaco [lpm]	Duración del $QT$ [s]
60	0.33-0.43
70	0.31-0.41
80	0.29-0.38
90	0.28-0.36
100	0.27-0.35
120	0.25-0.32

Tabla A.1: Duración del intervalo  $QT$

### A.3 Derivaciones

Por cuanto el corazón es un órgano tridimensional, y dado que no se puede registrar en una superficie plana (papel de registro o pantalla de monitor) una imagen tridimensional, es necesario proyectar las fuerzas eléctricas cardíacas sobre dos planos: frontal y horizontal, con el fin de conocer si dichas fuerzas se dirigen de arriba-abajo, derecha-izquierda, delante-atrás. Para ello es suficiente que se registren a través de las distintas derivaciones las fuerzas eléctricas cardíacas proyectadas sobre el plano frontal (arriba-abajo), y sobre el plano horizontal (derecha-izquierda). Según donde se sitúen los electrodos de registro se detecta una parte concreta del flujo de corriente despolarizante y repolarizante de la estructura tridimensional que es el miocardio. Por ello, para obtener una imagen completa y correcta de cómo se transmite la excitación en el corazón, se requiere información de electrodos situados en distintas posiciones. La disposición específica que guardan los electrodos recibe el nombre de *derivación*. Los registros obtenidos en cada derivación varían al cambiar el ángulo desde donde se observe la actividad cardíaca, aunque debe quedar claro que siempre se analiza la misma actividad cardíaca. Se conocen más de 40 derivaciones distintas, pero habitualmente sólo 12 son las más utilizadas. Entre las derivaciones del plano frontal se encuentran, tanto las bipolares, como las aumentadas; y del plano vertical, están las precordiales. Cabe anotar que en cada derivación se obtiene un registro que

representa la misma actividad eléctrica del corazón.

- *Bipolares*. Las derivaciones estándar bipolares (I, II y III) son las derivaciones elegidas originalmente por Einthoven para registrar los potenciales eléctricos en el plano frontal del cuerpo [41]. Como se observa en la figura A.4, se colocan electrodos

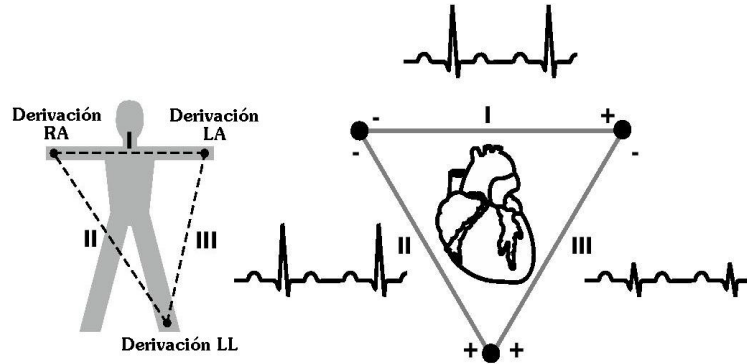


Figura A.4: Derivaciones Bipolares y el triángulo de Einthoven

en el brazo izquierdo (LA), brazo derecho (RA) y pierna izquierda (LL). La pierna derecha funciona como tierra y no realiza ninguna función en la producción del trazo de ECG. Las derivaciones bipolares muestran diferencias de potencial entre dos electrodos seleccionados: 1) Derivación I es la diferencia de potencial entre el brazo izquierdo y el brazo derecho (LA-RA); 2) Derivación II, es la diferencia de potencial entre la pierna izquierda y el brazo derecho (LL-RA); y 3) Derivación III, es la diferencia de potencial entre la pierna izquierda y el brazo izquierdo. La relación entre las derivaciones se expresa algebraicamente por la ecuación de Einthoven: derivación II = derivación I + derivación III.

- *Aumentadas*. Las derivaciones bipolares de las extremidades tienen el inconveniente de que registran sólo diferencias de potencial eléctrico y no el potencial real neto en un punto de la superficie del cuerpo. Para separar las derivaciones bipolares en sus dos componentes, se emplean las derivaciones unipolares (VR, VL y VF). Las derivaciones unipolares guardan una relación matemática bien definida con las bipolares estándar y registran las diferencias de potencial, entre un electrodo positivo situado en un miembro y otro negativo, cuyo potencial es el combinado de los electrodos de

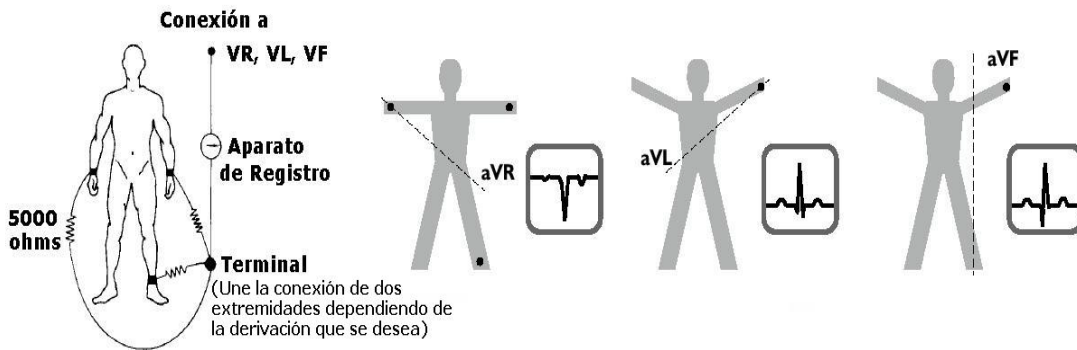


Figura A.5: Derivaciones monopolares de las extremidades

los otros dos miembros; esto se consigue conectándolos en el electrocardiógrafo a la denominada central terminal de *Goldberger* (CTg), que los une mediante resistencias de  $5000 \Omega$ , de forma que su potencial combinado se puede considerar 0, por lo cual el electrodo negativo es insensible a las variaciones de potencial del músculo cardíaco. En estas condiciones el electrodo explorador funciona como monopolar, conectándose al brazo derecho (R), al brazo izquierdo (L) o a la pierna izquierda (F), registrando respectivamente las derivaciones VR, VL y VF, como se observa en la figura A.5. 1) VR: registra las diferencias de potencial detectadas entre el brazo derecho (+) y brazo izquierdo, pierna izquierda. 2) VL: registra las diferencias de potencial detectadas entre el brazo izquierdo (+) y brazo derecho, pierna izquierda. 3) VF: registra las diferencias de potencial detectadas entre la pierna izquierda (+) y brazo derecho, brazo izquierdo. La mayoría de los electrocardiógrafos están contruidos de manera que los voltajes obtenidos por medio de las derivaciones monopolares experimentan una ampliación automática de  $3/2$ . En estos casos los registros de ECG van precedidos del prefijo *a* (amplificada), por lo cual las derivaciones son llamadas unipolares aumentadas y se designan como aVR, aVL y aVF.

- *Precordiales*. Representan la actividad eléctrica del corazón analizada en un plano horizontal, pues para complementar la información que da el plano frontal, las derivaciones precordiales brindan conocimiento de la situación anterior o posterior de las fuerzas eléctricas del corazón. Dichas derivaciones son particularmente útiles para

los casos en los cuales los vectores cardíacos son perpendiculares al plano frontal, pues la proyección de un vector sobre el plano que le es perpendicular es igual a cero y, por tanto, las derivaciones del plano frontal no la ponen de manifiesto, mientras que, al ser el vector, más o menos paralelo al plano horizontal, su proyección sobre éste es evidente. Estas derivaciones registran las diferencias de potencial existentes entre distintos puntos de la pared torácica (electrodos positivos) y el electrodo referencial (-), cuyo potencial es el potencial combinado de los tres electrodos de los miembros. El registro se consigue conectando los electrodos a la central terminal de *Wilson* (CTw), que los une mediante resistencias, de forma que su potencial combinado se puede considerar cero, por lo que el electrodo negativo es insensible a las variaciones del potencial del músculo cardíaco, registrándose las diferencias de potencial entre el positivo y el corazón. Estas derivaciones siguen el mismo principio de registro que las unipolares de los miembros. Las derivaciones del plano horizontal que se utilizan en electrocardiografía clínica normalmente son seis; de V1 a V6, cuya disposición se muestra en la figura A.6. Las derivaciones precordiales se proyectan

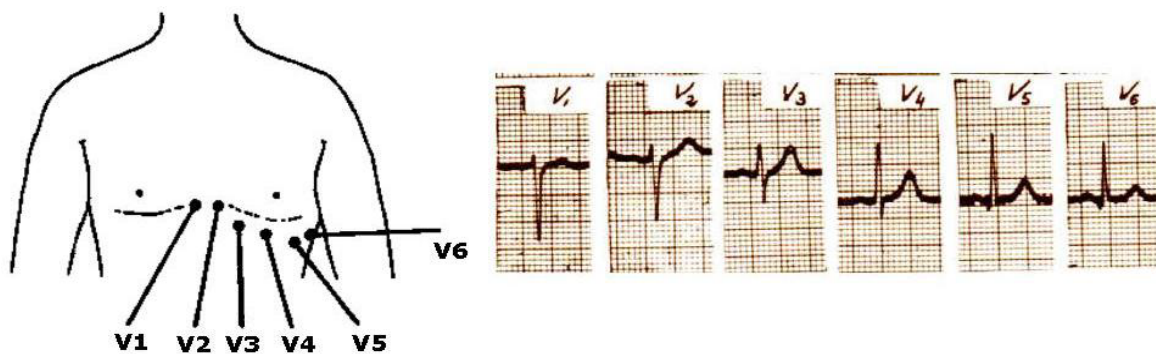


Figura A.6: Derivaciones monopolares precordiales y sus registros

desde el electrodo positivo a través del nodo AV, hacia la espalda del paciente (en un plano horizontal). Luego si se piensa en estas derivaciones como rayos de una rueda, el centro de la misma es el nodo AV, siendo la derivación V2, una línea recta entre el pecho y la espalda del paciente. En cada derivación se obtiene un registro que representa la misma actividad eléctrica del corazón analizada desde distintos ejes del plano horizontal (Ver la figura A.6).

Derivación	Posición electrodos	Nomenclatura
Bipolar	RL,LL,RA,LA	I=LA-RA II=LL-RA III=LL-LA
Aumentadas	RL,LL,RA,LA	aVR=RA-0.5(LA+LL) aVL=LA-0.5(LL+RA) aVF=LL-0.5(LA+RA)
Precordiales	v1,v2,v3,v4,v5,v6	$V_1 = v_1 - \frac{(LA+RA+LL)}{3}$ $V_2 = v_2 - \frac{(LA+RA+LL)}{3}$ $V_3 = v_3 - \frac{(LA+RA+LL)}{3}$ $V_4 = v_4 - \frac{(LA+RA+LL)}{3}$ $V_5 = v_5 - \frac{(LA+RA+LL)}{3}$ $V_6 = v_6 - \frac{(LA+RA+LL)}{3}$

Tabla A.2: Descripción de las 12 derivaciones del ECG

Existen otras derivaciones menos conocidas, pero a veces importantes, que son variantes de las unipolares, las cuales corresponden a V7,V8,V9, que enfrentan la parte posterior del corazón, además de las RV1 y RV2, que enfrentan el ventrículo derecho.

Las tablas A.2 y A.3 muestran las principales derivaciones, con la posición de los electrodos, la nomenclatura utilizada, y la polaridad de las ondas, respectivamente.



Derivación	Onda <i>P</i>	Complejo <i>QRS</i>	Onda <i>T</i>
I	+	+	+
II	+	+	+
III	+/-	+/-	+/-
aVR	-	-	-
aVL	+/-	+/-	+
aVF	+	+	+
V1	+/-	-	-
V2	+/-	+/-	+/-
V3	+	+	+
V4	+	+	+
V5	+	+	+
V6	+	+	+

Tabla A.3: Derivaciones electrocardiográficas y polaridad de las ondas

# Uso de la base de datos

---

## B.1 Lectura de los registros

Los registros ECG en la base de datos del MIT-BIH están representados por un archivo de cabecera (archivo.he), un archivo de señal (archivo.dat) y un archivo de anotaciones (archivo.atr). El archivo de anotaciones clínicas no siempre está presente en todos los registros de la base de datos; sin embargo, todos los registros de las carpetas *mitdb* y *CUDB* tienen sus respectivas anotaciones, en las cuales se puede observar el tipo de patología presentado o la normalidad de cada latido o ciclo ECG; además también se incluyen otras anotaciones que describen el ritmo y la calidad de la señal, es decir, si se encuentra limpia o ruidosa. Los archivos de anotaciones varían en longitud de acuerdo a su contenido y a la duración del registro y se pueden examinar con el archivo *rdann*, que junto con toda la base de datos y los archivos para leer los registros, se encuentran disponibles y sin ningún costo en la página Web de *Physionet*. Para la extracción de los datos de las bases de datos se emplea el programa *rdsamp*, ejecutado bajo DOS y usa la siguiente estructura:

```
rdsamp -r cu01 -f 0 -t 4:28 > prueba.txt
```

En este caso, el programa convierte la señal de los primeros 4:28 minutos de un archivo llamado *cu01.dat* en un archivo del tipo (archivo.txt) llamado *prueba.txt*, declarando los siguientes parámetros:

-f: tiempo de inicio.

-t: tiempo de finalización.

-r: registro proveniente del archivo (archivo.dat).

## B.2 Lista de anotaciones

Esta es una lista de los diferentes tipos de anotaciones encontradas en las señales de la base de datos del MIT-BIH:

- N: Normal beat
- L: Left bundle branch block beat
- R: Right bundle branch block beat
- A: Atrial premature beat
- a: Aberrated atrial premature beat
- J: Nodal (junctional) premature beat
- S: Supraventricular premature beat (atrial or nodal)
- V: Premature ventricular contraction
- F: Fusion of ventricular and normal beat
- [: Start of ventricular flutter/fibrillation
- !: Ventricular flutter wave
- ]: End of ventricular flutter/fibrillation
- e: Atrial escape beat
- j: Nodal (junctional) escape beat
- E: Ventricular escape beat
- P: Paced beat

- f: Fusion of paced and normal beat
- p: Non-conducted P-wave (blocked APC)
- Q: Unclassifiable beat
- |: Isolated QRS-like artifact
- +: Rhythm change
- ~: Change in signal quality
- ": Comment annotation
- (AB: Atrial bigeminy
- (AFIB: Atrial fibrillation
- (AFL: Atrial flutter
- (B: Ventricular bigeminy
- (BII: 2th heart block
- (IVR: Idioventricular rhythm
- (N: Normal sinus rhythm
- (NOD: Nodal (A-V junctional) rhythm
- (P: Paced rhythm
- (PREX: Pre-excitation (WPW)
- (SBR: Sinus bradycardia
- (SVTA: Supraventricular tachyarrhythmia
- (T: Ventricular trigeminy
- (VFL: Ventricular flutter

- (VT: Ventricular tachycardia
- U: Extreme noise or signal loss in both signals: ECG is unreadable
- M (or MISSB): Missed beat
- P (or PSE): Pause
- T (or TS): Tape slippage
- qq: Signal quality change: the first character ('c' or 'n') indicates the quality of the upper signal (clean or noisy), and the second character indicates the quality of the lower signal

### **B.3 Origen de archivos utilizados**

Cada registro fue notado de la forma  $\varphi_{i,j}$ , donde  $i$  es el número de la clase (1= registros normales, 2= registros con fibrilación ventricular y 3= registros que presentan otro tipo de arritmias ventriculares) y  $j$  es el número del registro.

#### **B.3.1 Señales normales**

Las señales normales utilizadas para las pruebas que se hicieron, fueron extraídas de la carpeta MITDB de la base de datos utilizada para este trabajo. Se obtuvieron 17 segmentos en los cuales las anotaciones indicaban normalidad. Para las pruebas se probó que con tan solo 50000 puntos era suficiente para obtener los resultados que se requerían, es por esto que estos registros en mucha parte, sólo fueron tratados con una longitud de 50000 puntos.

Archivo	Archivo fuente	Intervalo de muestreo (min)
$\varphi_{1,1}$	100	0 - 10:01
$\varphi_{1,2}$	101	0 - 2:55
$\varphi_{1,3}$	101	2:58 - 5:18
$\varphi_{1,4}$	101	5:34 - 14:15
$\varphi_{1,5}$	101	15:17 - 30:04
$\varphi_{1,6}$	103	0 - 19:07
$\varphi_{1,7}$	105	0 - 10:25
$\varphi_{1,8}$	106	7:38 - 10:53
$\varphi_{1,9}$	112	0 - 10:01
$\varphi_{1,10}$	113	0 - 10:01
$\varphi_{1,11}$	115	0 - 10:01
$\varphi_{1,12}$	117	0 - 10:01
$\varphi_{1,13}$	121	0 - 27:30
$\varphi_{1,14}$	122	0 - 30:04
$\varphi_{1,15}$	123	0 - 30:04
$\varphi_{1,16}$	201	0 - 6:18
$\varphi_{1,17}$	202	0 - 13:35

### B.3.2 Fibrilación ventricular

Todas las señales electrocardiográficas con fibrilación ventricular fueron extraídas de la carpeta *CUDB* de la base de datos del MIT-BIH, de las cuales se obtuvieron un total de 18 segmentos de señal en que las anotaciones indicaban la presencia de esta patología entre todos los registros. A continuación se muestra una descripción detallada del origen de cada uno de estos segmentos de señal. Los archivos de datos obtenidos se etiquetaron de  $\varphi_{2,1}$  a  $\varphi_{2,17}$ .

Archivo	Archivo fuente	Intervalo de muestreo (min)
$\varphi_{2,1}$	cu01	0 - 8:28
$\varphi_{2,2}$	cu02	8:09 - 8:28
$\varphi_{2,3}$	cu08	7:07 - 8:06
$\varphi_{2,4}$	cu10	5:17 - 8:00
$\varphi_{2,5}$	cu11	6:11 - 7:11
$\varphi_{2,6}$	cu13	7:08 - 8:28
$\varphi_{2,7}$	cu15	6:46 - 8:28
$\varphi_{2,8}$	cu16	4:14 - 5:48
$\varphi_{2,9}$	cu17	6:22 - 7:00
$\varphi_{2,10}$	cu18	5:35 - 6:01
$\varphi_{2,11}$	cu19	6:51 - 7:18
$\varphi_{2,12}$	cu20	4:04 - 4:28
$\varphi_{2,13}$	cu22	6:10 - 7:25
$\varphi_{2,14}$	cu23	5:35 - 6:45
$\varphi_{2,15}$	cu24	5:57 - 7:03
$\varphi_{2,16}$	cu05	0 - 8:28
$\varphi_{2,17}$	cu02	3:05 - 5:08
$\varphi_{2,18}$	cu07	3:02 - 8:28

### B.3.3 Otras arritmias ventriculares

Todas las señales electrocardiográficas con anotaciones que indicaban presencia de arritmias ventriculares, entre las que se pueden destacar la taquicardia ventricular y el fluttering, fueron extraídas de la carpeta VFDB de la base de datos del MIT-BIH. Se encontraron un total de 22 archivos con segmentos de señal en que las anotaciones indicaban la presencia de estas patologías. Todos los archivos extraídos tenían una duración de 30 minutos, aunque para todas las pruebas, solo se trabajó con 50000 puntos que corresponden a 3 minutos y 20 segundos de señal, en los cuales hay suficiente información para el análisis no lineal. A continuación se especifica la fuente de cada archivo utilizado.

Archivo	Archivo fuente	Intervalo de muestreo (min)
$\varphi_{3,1}$	418	0:20 - 3:40
$\varphi_{3,2}$	419	0:20 - 3:40
$\varphi_{3,3}$	420	0:20 - 3:40
$\varphi_{3,4}$	421	0:20 - 3:40
$\varphi_{3,5}$	422	0:20 - 3:40
$\varphi_{3,6}$	423	0:20 - 3:40
$\varphi_{3,7}$	424	0:20 - 3:40
$\varphi_{3,8}$	425	0:20 - 3:40
$\varphi_{3,9}$	426	0:20 - 3:40
$\varphi_{3,10}$	427	0:20 - 3:40
$\varphi_{3,11}$	428	0:20 - 3:40
$\varphi_{3,12}$	429	0:20 - 3:40
$\varphi_{3,13}$	430	0:20 - 3:40
$\varphi_{3,14}$	602	0:20 - 3:40
$\varphi_{3,15}$	605	0:20 - 3:40
$\varphi_{3,16}$	607	0:20 - 3:40
$\varphi_{3,17}$	609	0:20 - 3:40
$\varphi_{3,18}$	610	0:20 - 3:40
$\varphi_{3,19}$	611	0:20 - 3:40
$\varphi_{3,20}$	612	0:20 - 3:40
$\varphi_{3,21}$	614	0:20 - 3:40
$\varphi_{3,22}$	615	0:20 - 3:40

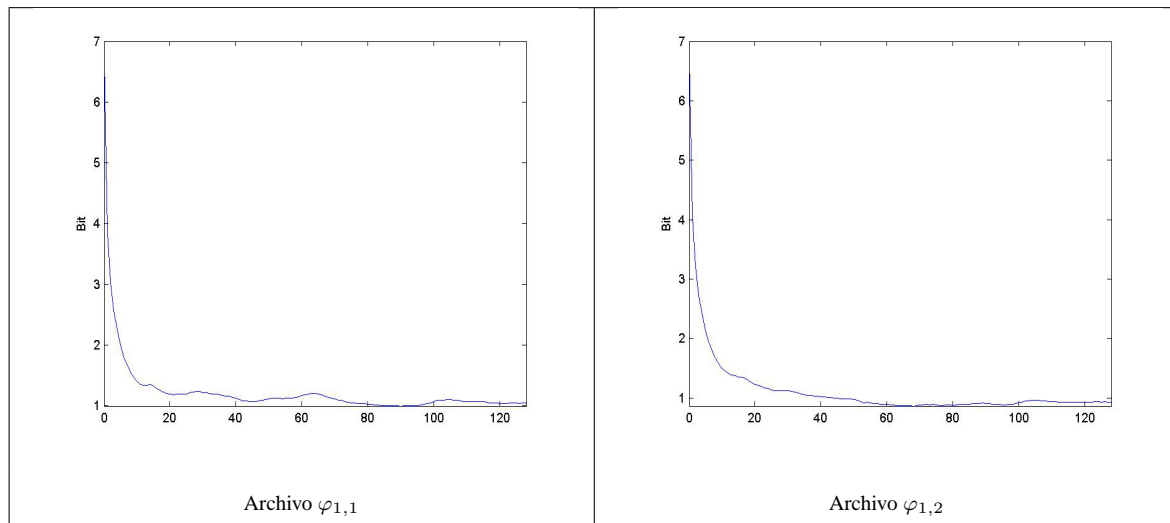


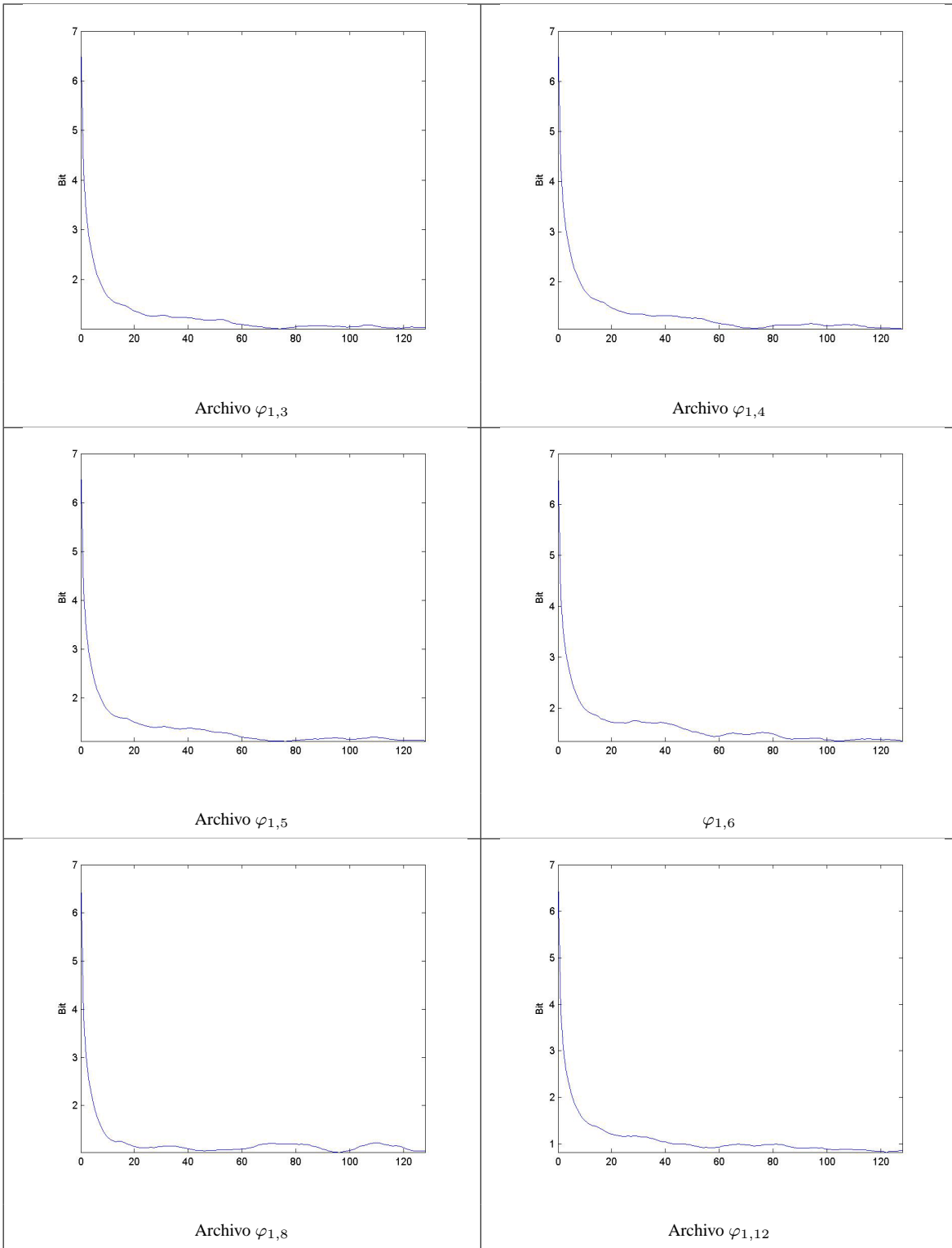
# Resultados del Análisis Estadístico

---

## C.1 Información mutua promedio

### C.1.1 Señales normales





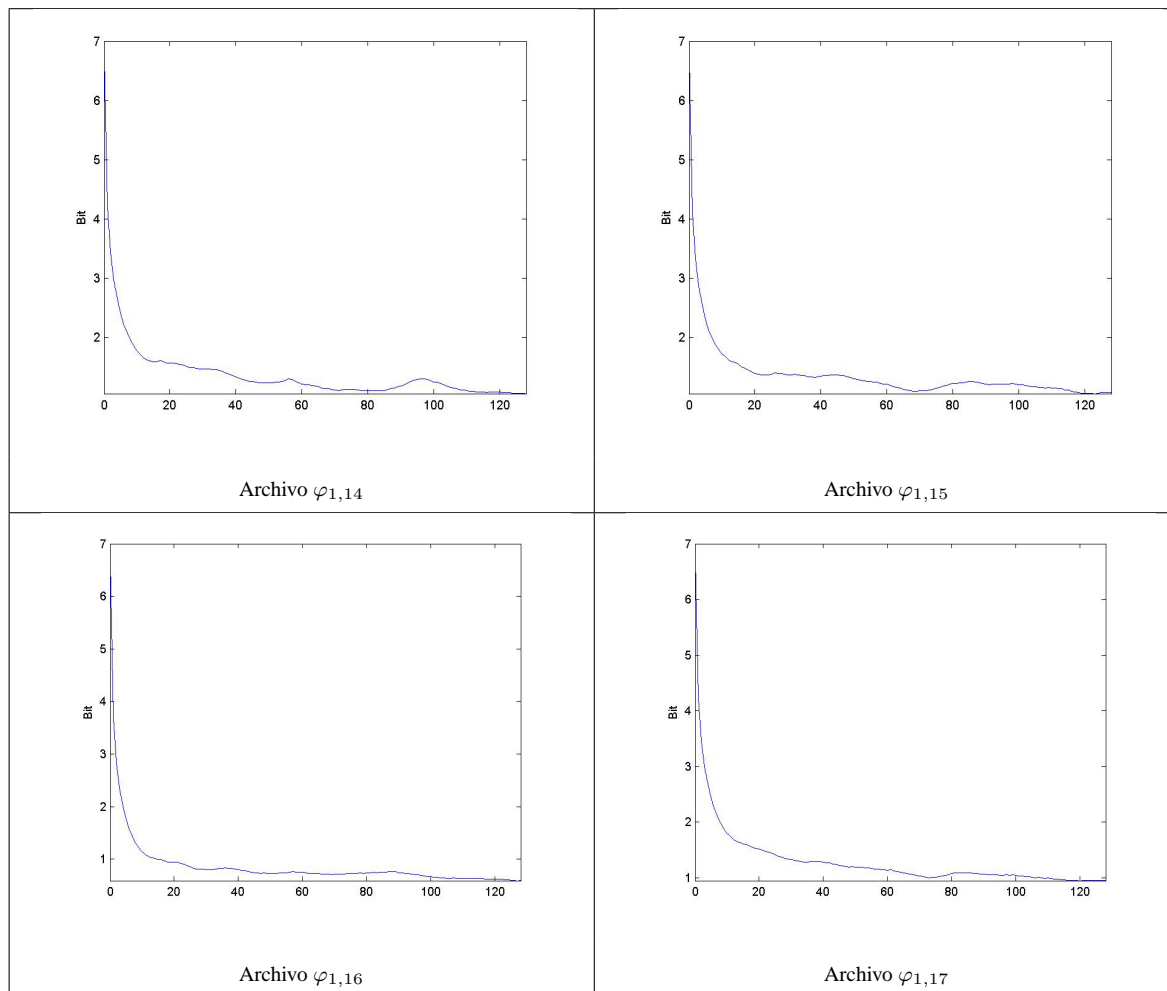
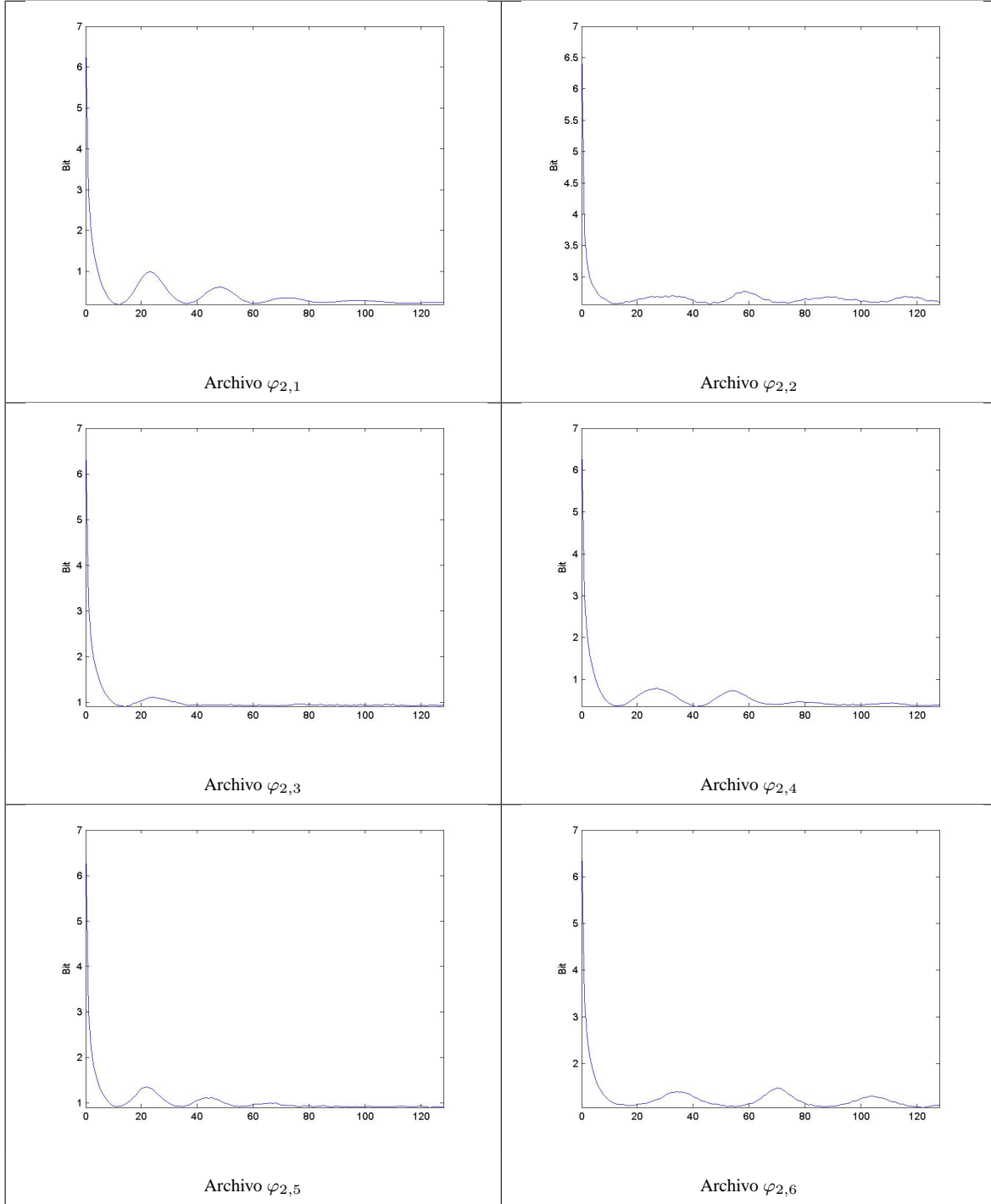


Tabla C.1: Información mutua promedio de las señales ECG normales

### C.1.2 Fibrilación Ventricular



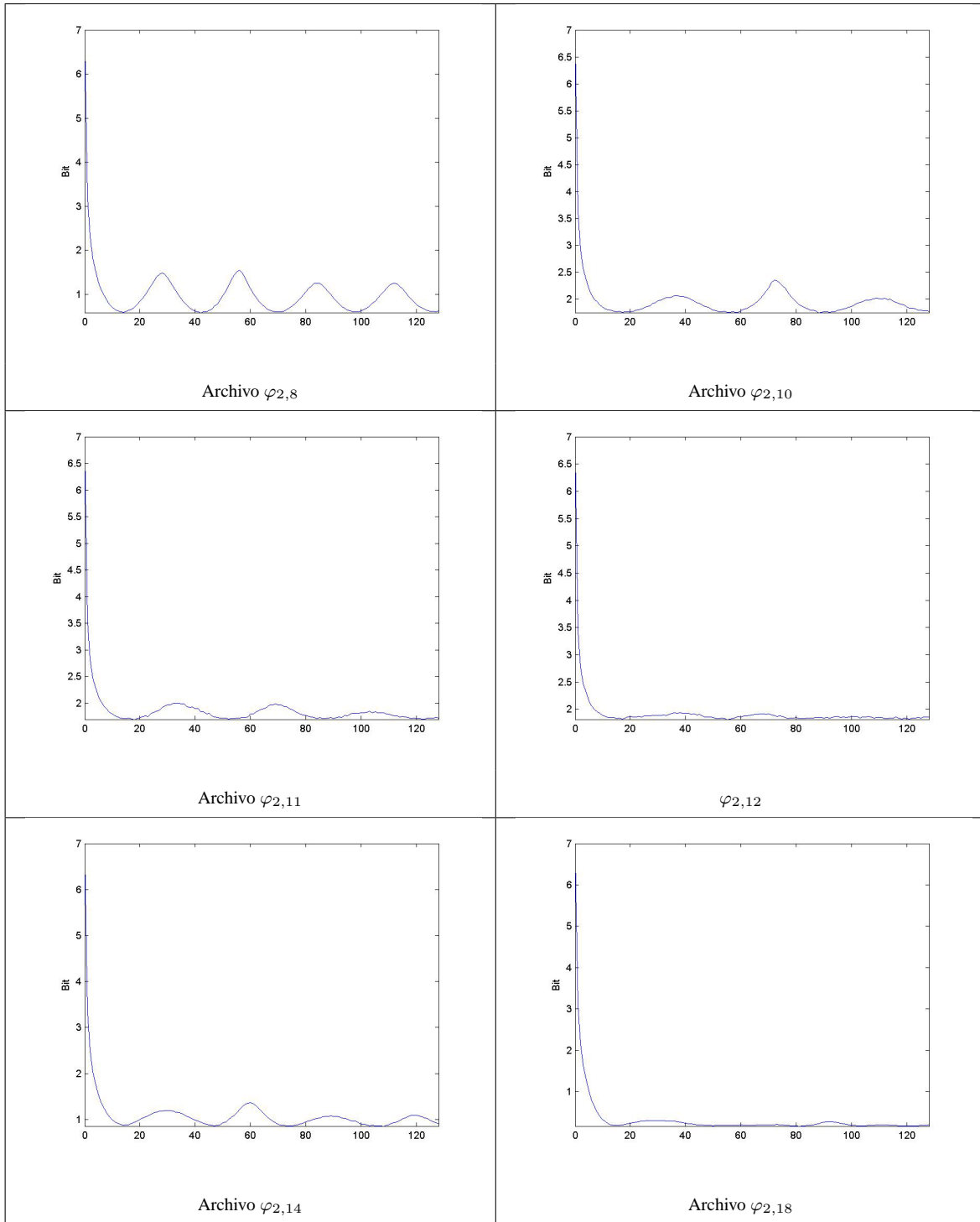
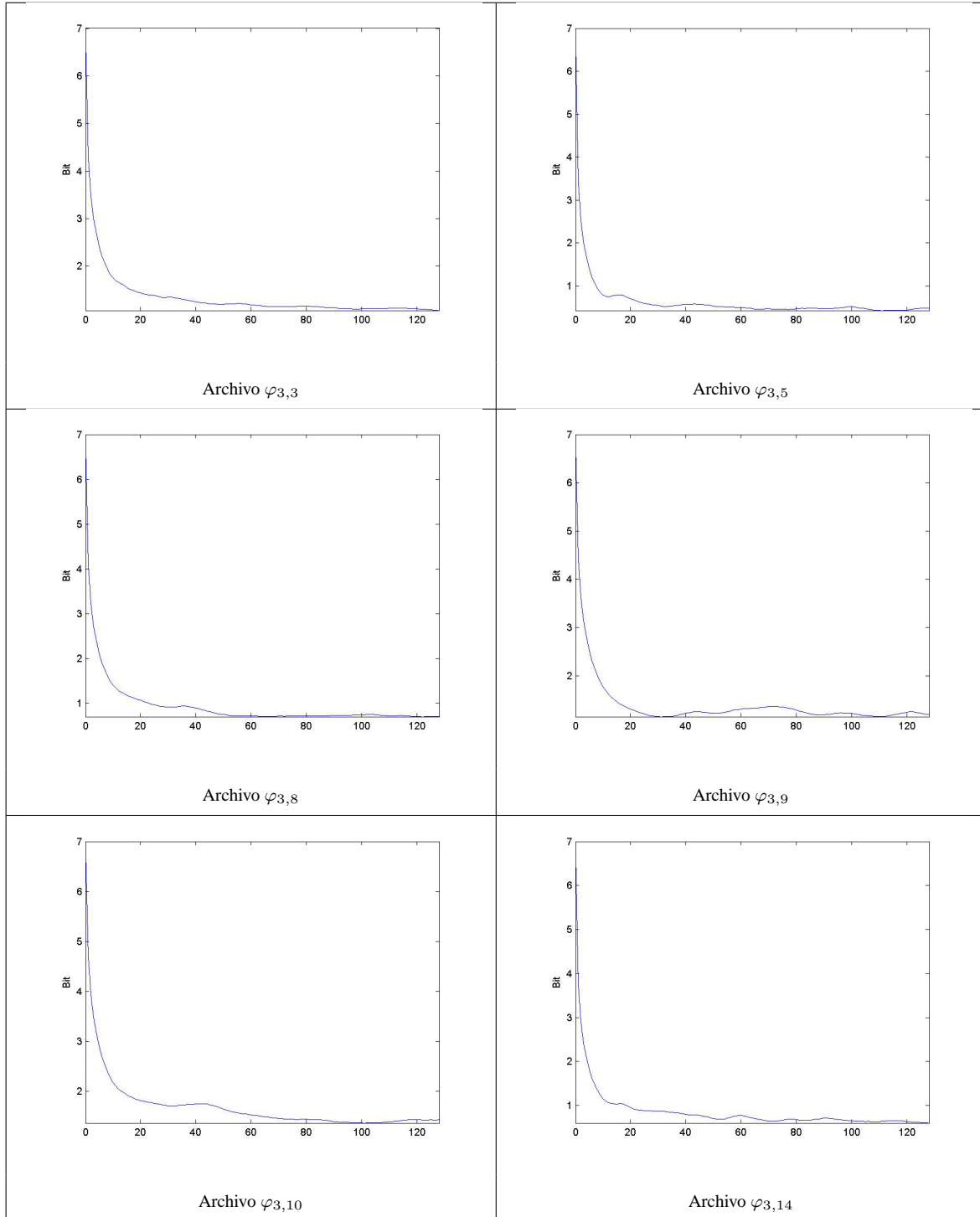


Tabla C.2: Información mutua promedio de las señales ECG con fibrilación ventricular

### C.1.3 Otras arritmias ventriculares



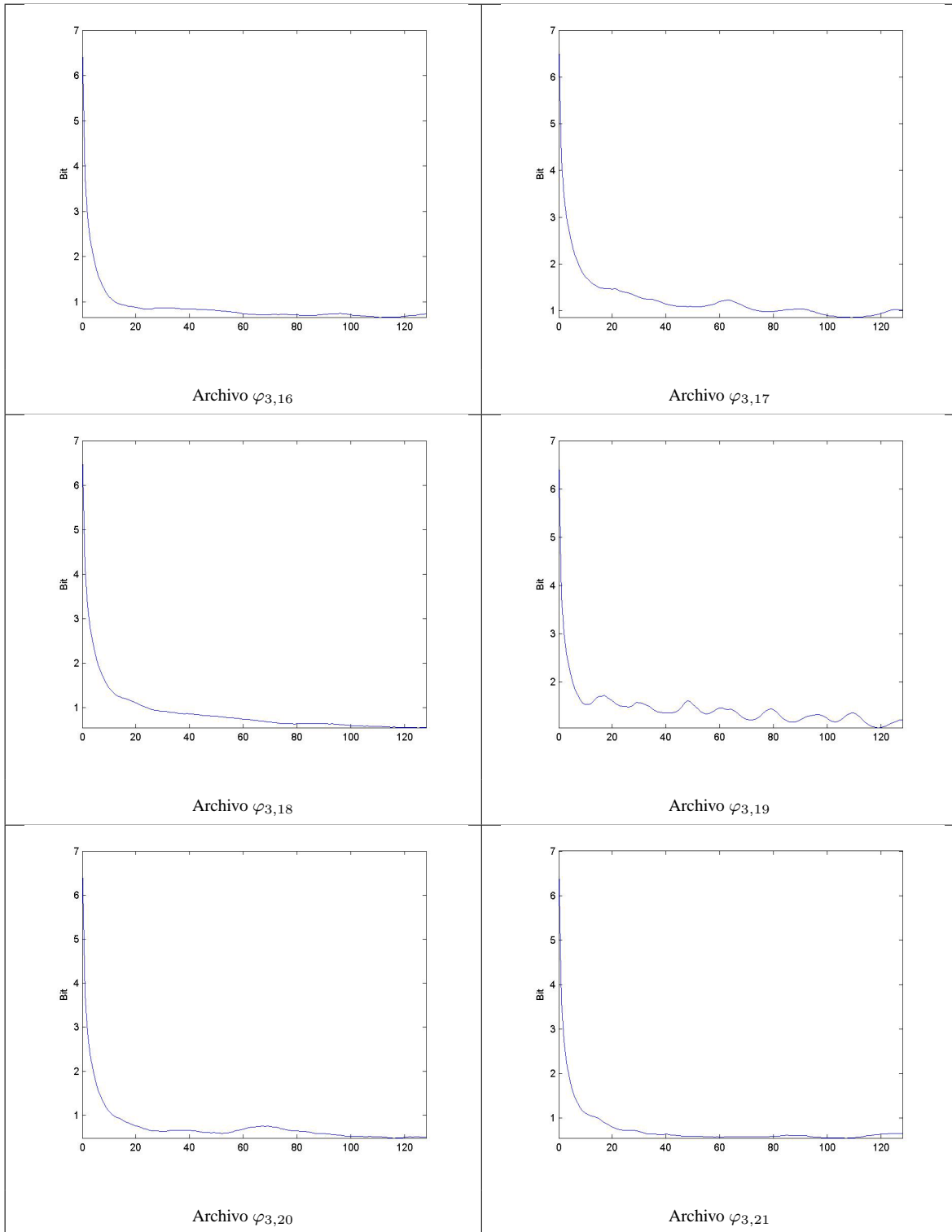


Tabla C.3: Información mutua promedio de las señales ECG con arritmias ventriculares

## C.2 Dimensión de correlación

### C.2.1 Señales normales

<b>Archivo</b>	$\varphi_{1,1}$	$\varphi_{1,2}$	$\varphi_{1,3}$	$\varphi_{1,4}$	$\varphi_{1,5}$	$\varphi_{1,6}$	$\varphi_{1,7}$	$\varphi_{1,8}$
$D_C$	5.3595	5.0342	4.1002	3.3685	3.1861	3.2774	4.2354	3.2547
<b>Archivo</b>	$\varphi_{1,9}$	$\varphi_{1,10}$	$\varphi_{1,11}$	$\varphi_{1,12}$	$\varphi_{1,13}$	$\varphi_{1,14}$	$\varphi_{1,15}$	$\varphi_{1,16}$
$D_C$	7.3525	4.0355	4.7278	4.1026	4.3886	4.1086	3.665	11.6765
<b>Archivo</b>	$\varphi_{1,17}$							
$D_C$	3.0801							

Tabla C.4: Dimensión de correlación para señales ECG normales

### C.2.2 Fibrilación ventricular

<b>Archivo</b>	$\varphi_{2,1}$	$\varphi_{2,2}$	$\varphi_{2,3}$	$\varphi_{2,4}$	$\varphi_{2,5}$	$\varphi_{2,6}$	$\varphi_{2,7}$	$\varphi_{2,8}$
$D_C$	12.059	10.564	13.022	8.4234	8.5495	14.808	6.9847	2.2831
<b>Archivo</b>	$\varphi_{2,9}$	$\varphi_{2,10}$	$\varphi_{2,11}$	$\varphi_{2,12}$	$\varphi_{2,13}$	$\varphi_{2,14}$	$\varphi_{2,15}$	$\varphi_{2,16}$
$D_C$	3.9945	8.0523	6.8751	17.304	28.839	8.6042	7.5592	4.2444
<b>Archivo</b>	$\varphi_{2,17}$	$\varphi_{2,18}$						
$D_C$	6.7432	6.8375						

Tabla C.5: Dimensión de correlación para señales ECG con FV



### C.2.3 Arritmias ventriculares

<b>Archivo</b>	$\varphi_{3,1}$	$\varphi_{3,2}$	$\varphi_{3,3}$	$\varphi_{3,4}$	$\varphi_{3,5}$	$\varphi_{3,6}$	$\varphi_{3,7}$	$\varphi_{3,8}$
$D_C$	6.8641	6.2238	2.8451	5.6659	3.6562	6.7251	18.564	4.6151
<b>Archivo</b>	$\varphi_{3,9}$	$\varphi_{3,10}$	$\varphi_{3,11}$	$\varphi_{3,12}$	$\varphi_{3,13}$	$\varphi_{3,14}$	$\varphi_{3,15}$	$\varphi_{3,16}$
$D_C$	2.6264	5.2608	3.8426	5.9841	5.8783	4.3739	16.438	6.2252
<b>Archivo</b>	$\varphi_{3,17}$	$\varphi_{3,18}$	$\varphi_{3,19}$	$\varphi_{3,20}$	$\varphi_{3,21}$	$\varphi_{3,22}$		
$D_C$	6.284	3.4901	4.6331	3.6214	4.5432	4.278		

Tabla C.6: Dimensión de correlación para señales ECG con arritmias ventriculares

## C.3 Número de autovalores retenidos

### C.3.1 Señales normales

<b>Archivo</b>	$\varphi_{1,1}$	$\varphi_{1,2}$	$\varphi_{1,3}$	$\varphi_{1,4}$	$\varphi_{1,5}$	$\varphi_{1,6}$	$\varphi_{1,7}$	$\varphi_{1,8}$
$NAR$	35	34	34	32	33	39	28	35
<b>Archivo</b>	$\varphi_{1,9}$	$\varphi_{1,10}$	$\varphi_{1,11}$	$\varphi_{1,12}$	$\varphi_{1,13}$	$\varphi_{1,14}$	$\varphi_{1,15}$	$\varphi_{1,16}$
$NAR$	28	36	38	28	25	29	32	29
<b>Archivo</b>	$\varphi_{1,17}$							
$NAR$	26							

Tabla C.7: Promedio del número de autovalores retenidos para señales normales

### C.3.2 Fibrilación ventricular

<b>Archivo</b>	$\varphi_{2,1}$	$\varphi_{2,2}$	$\varphi_{2,3}$	$\varphi_{2,4}$	$\varphi_{2,5}$	$\varphi_{2,6}$	$\varphi_{2,7}$	$\varphi_{2,8}$
<i>NAR</i>	33	33	35	38	38	36	33	35
<b>Archivo</b>	$\varphi_{2,9}$	$\varphi_{2,10}$	$\varphi_{2,11}$	$\varphi_{2,12}$	$\varphi_{2,13}$	$\varphi_{2,14}$	$\varphi_{2,15}$	$\varphi_{2,16}$
<i>NAR</i>	35	32	33	39	34	34	33	33
<b>Archivo</b>	$\varphi_{2,17}$	$\varphi_{2,18}$						
<i>NAR</i>	40	38						

Tabla C.8: Promedio del número de autovalores retenidos para señales con FV

### C.3.3 Arritmias ventriculares

<b>Archivo</b>	$\varphi_{3,1}$	$\varphi_{3,2}$	$\varphi_{3,3}$	$\varphi_{3,4}$	$\varphi_{3,5}$	$\varphi_{3,6}$	$\varphi_{3,7}$	$\varphi_{3,8}$
<i>NAR</i>	32	33	44	49	50	47	47	41
<b>Archivo</b>	$\varphi_{3,9}$	$\varphi_{3,10}$	$\varphi_{3,11}$	$\varphi_{3,12}$	$\varphi_{3,13}$	$\varphi_{3,14}$	$\varphi_{3,15}$	$\varphi_{3,16}$
<i>NAR</i>	37	36	38	37	38	44	48	43
<b>Archivo</b>	$\varphi_{3,17}$	$\varphi_{3,18}$	$\varphi_{3,19}$	$\varphi_{3,20}$	$\varphi_{3,21}$	$\varphi_{3,22}$		
<i>NAR</i>	38	41	43	48	52	42		

Tabla C.9: Promedio del número de autovalores retenidos para señales con arritmias ventriculares

## C.4 Dinámica de los Máximos Autovalores

### C.4.1 Señales normales

<b>Archivo</b>	$\varphi_{1,1}$	$\varphi_{1,2}$	$\varphi_{1,3}$	$\varphi_{1,4}$	$\varphi_{1,5}$	$\varphi_{1,6}$	$\varphi_{1,7}$	$\varphi_{1,8}$
<i>MA</i>	29057	29576	29339	29225	29327	29715	29799	30222
<b>Archivo</b>	$\varphi_{1,9}$	$\varphi_{1,10}$	$\varphi_{1,11}$	$\varphi_{1,12}$	$\varphi_{1,13}$	$\varphi_{1,14}$	$\varphi_{1,15}$	$\varphi_{1,16}$
<i>MA</i>	25941	30178	27810	26087	26259	25687	26214	30023
<b>Archivo</b>	$\varphi_{1,17}$							
<i>MA</i>	29922							

Tabla C.10: Máximos autovalores encontrados para señales normales

### C.4.2 Fibrilación ventricular

<b>Archivo</b>	$\varphi_{2,1}$	$\varphi_{2,2}$	$\varphi_{2,3}$	$\varphi_{2,4}$	$\varphi_{2,5}$	$\varphi_{2,6}$	$\varphi_{2,7}$	$\varphi_{2,8}$
<i>MA</i>	23227	22678	14630	29343	29591	54921	34794	76897
<b>Archivo</b>	$\varphi_{2,9}$	$\varphi_{2,10}$	$\varphi_{2,11}$	$\varphi_{2,12}$	$\varphi_{2,13}$	$\varphi_{2,14}$	$\varphi_{2,15}$	$\varphi_{2,16}$
<i>MA</i>	31101	59883	70671	25279	31825	47664	40595	23478
<b>Archivo</b>	$\varphi_{2,17}$	$\varphi_{2,18}$						
<i>MA</i>	15248	15535						

Tabla C.11: Máximos autovalores encontrados para señales con FV

### C.4.3 Otras arritmias ventriculares

<b>Archivo</b>	$\varphi_{3,1}$	$\varphi_{3,2}$	$\varphi_{3,3}$	$\varphi_{3,4}$	$\varphi_{3,5}$	$\varphi_{3,6}$	$\varphi_{3,7}$	$\varphi_{3,8}$
<i>MA</i>	7821.1	9468.2	7041.6	8077	5500.2	1960.3	2159.5	4155.7
<b>Archivo</b>	$\varphi_{3,9}$	$\varphi_{3,10}$	$\varphi_{3,11}$	$\varphi_{3,12}$	$\varphi_{3,13}$	$\varphi_{3,14}$	$\varphi_{3,15}$	$\varphi_{3,16}$
<i>MA</i>	6367.4	7564.4	5194.9	3217.3	3993.3	9242.8	2013.8	5614.4
<b>Archivo</b>	$\varphi_{3,17}$	$\varphi_{3,18}$	$\varphi_{3,19}$	$\varphi_{3,20}$	$\varphi_{3,21}$	$\varphi_{3,22}$		
<i>MA</i>	11246	11274	15253	3024.7	6539.3	10214		

Tabla C.12: Máximos autovalores encontrados para señales con arritmias ventriculares

## C.5 Exponentes de Lyapunov

### C.5.1 Señales normales

<b>Archivo</b>	$\varphi_{1,1}$	$\varphi_{1,2}$	$\varphi_{1,3}$	$\varphi_{1,4}$	$\varphi_{1,5}$	$\varphi_{1,6}$	$\varphi_{1,7}$	$\varphi_{1,8}$
<i>MEL</i>	7.8343	7.1322	8.2948	8.6367	8.1545	9.2418	8.4101	7.7725
<b>Archivo</b>	$\varphi_{1,9}$	$\varphi_{1,10}$	$\varphi_{1,11}$	$\varphi_{1,12}$	$\varphi_{1,13}$	$\varphi_{1,14}$	$\varphi_{1,15}$	$\varphi_{1,16}$
<i>MEL</i>	6.8390	8.1681	7.9745	6.9608	6.7921	7.9626	7.8862	8.3478
<b>Archivo</b>	$\varphi_{1,17}$							
<i>MEL</i>	7.6361							

Tabla C.13: Máximo exponente de Lyapunov para señales ECG normales

### C.5.2 Fibrilación ventricular

<b>Archivo</b>	$\varphi_{2,1}$	$\varphi_{2,2}$	$\varphi_{2,3}$	$\varphi_{2,4}$	$\varphi_{2,5}$	$\varphi_{2,6}$	$\varphi_{2,7}$	$\varphi_{2,8}$
<i>MEL</i>	7.179	4.3525	6.2259	6.1119	6.3460	5.1263	5.3766	5.2438
<b>Archivo</b>	$\varphi_{2,9}$	$\varphi_{2,10}$	$\varphi_{2,11}$	$\varphi_{2,12}$	$\varphi_{2,13}$	$\varphi_{2,14}$	$\varphi_{2,15}$	$\varphi_{2,16}$
<i>MEL</i>	4.8641	3.8833	5.4247	5.0825	5.1031	5.4438	6.0513	5.3624
<b>Archivo</b>	$\varphi_{2,17}$	$\varphi_{2,18}$						
<i>MEL</i>	5.2038	6.4911						

Tabla C.14: Máximo exponente de Lyapunov para señales ECG con FV

### C.5.3 Otras arritmias

<b>Archivo</b>	$\varphi_{3,1}$	$\varphi_{3,2}$	$\varphi_{3,3}$	$\varphi_{3,4}$	$\varphi_{3,5}$	$\varphi_{3,6}$	$\varphi_{3,7}$	$\varphi_{3,8}$
<i>MEL</i>	6.8839	6.6876	6.2653	5.4306	6.7283	6.2406	5.8863	6.1313
<b>Archivo</b>	$\varphi_{3,9}$	$\varphi_{3,10}$	$\varphi_{3,11}$	$\varphi_{3,12}$	$\varphi_{3,13}$	$\varphi_{3,14}$	$\varphi_{3,15}$	$\varphi_{3,16}$
<i>MEL</i>	6.2947	6.2174	5.3655	6.0080	7.4252	7.0571	6.6984	6.6984
<b>Archivo</b>	$\varphi_{3,17}$	$\varphi_{3,18}$	$\varphi_{3,19}$	$\varphi_{3,20}$	$\varphi_{3,21}$	$\varphi_{3,22}$		
<i>MEL</i>	9.0136	7.5336	7.8833	5.7089	7.4269	7.6740		

Tabla C.15: Máximo exponente de Lyapunov para señales ECG con arritmias ventriculares

## C.6 Reconstrucción de atractores 3D

### C.6.1 Señales normales

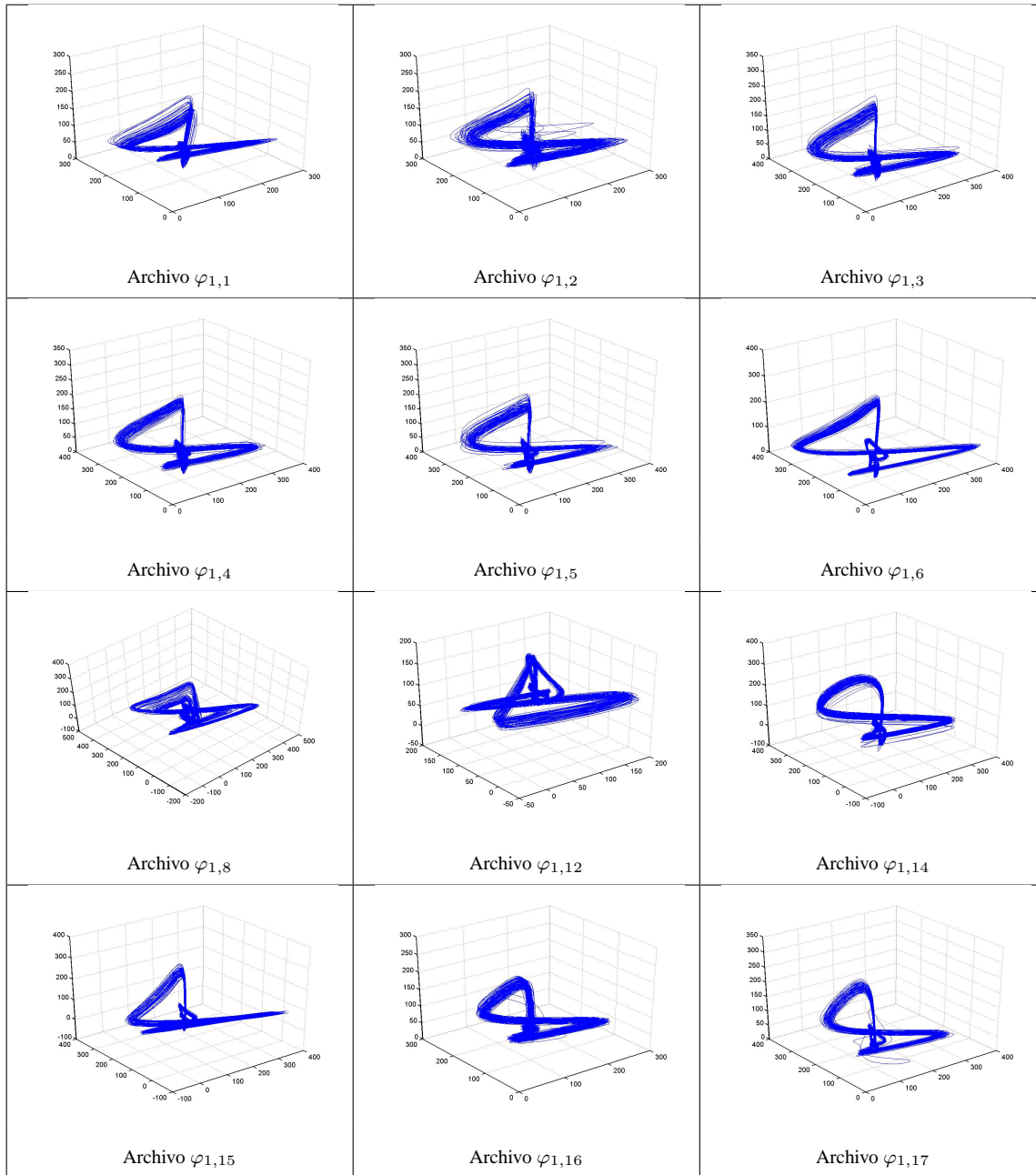
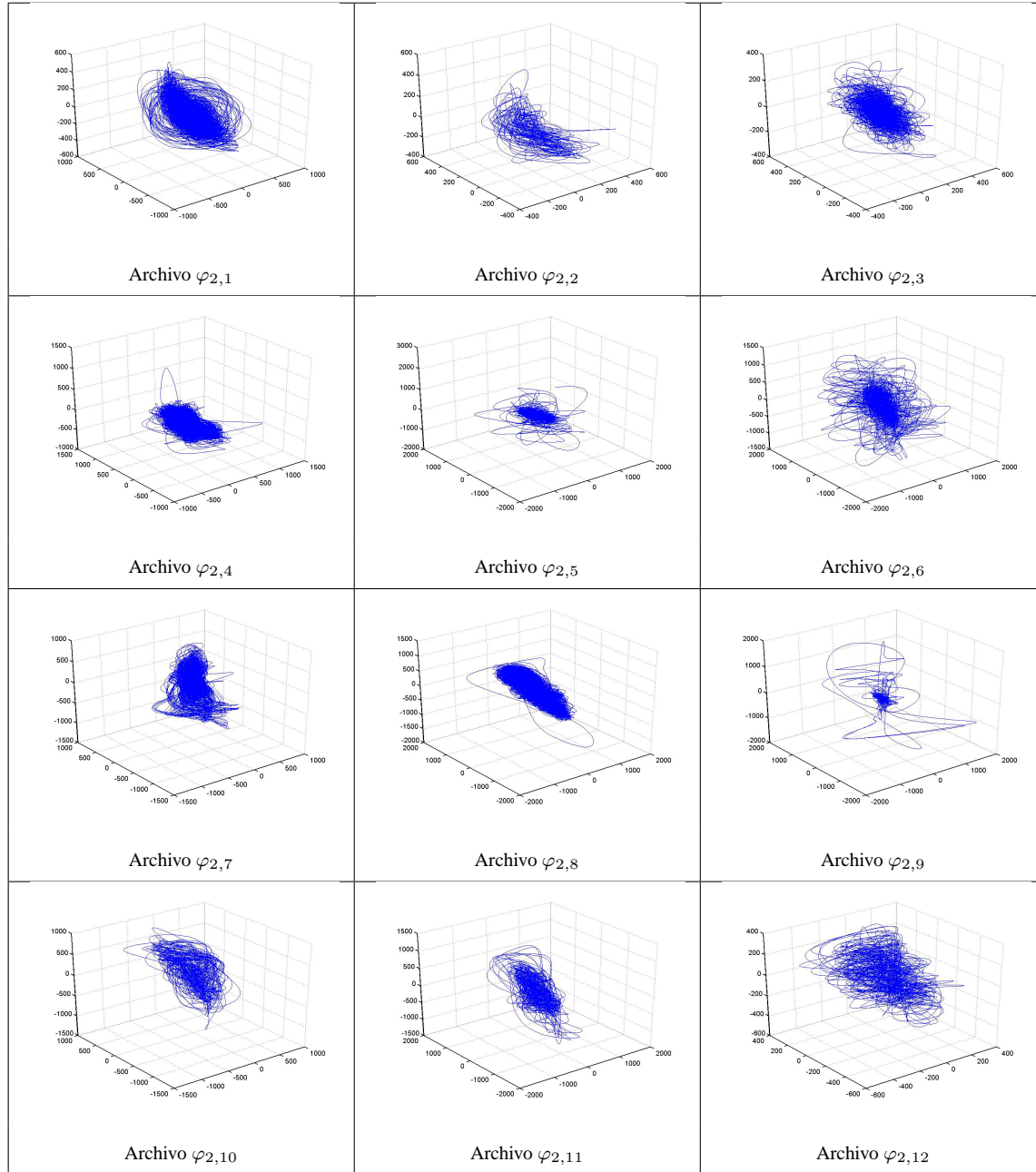


Tabla C.16: Atractores reconstruidos de señales ECG normales

### C.6.2 Fibrilación ventricular



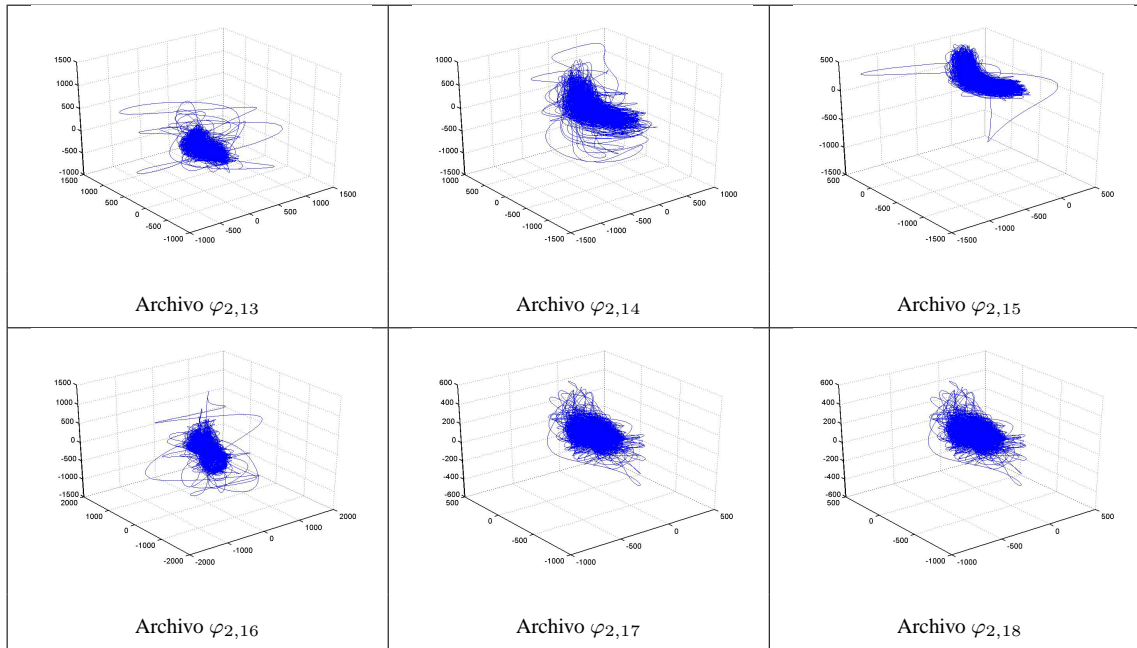
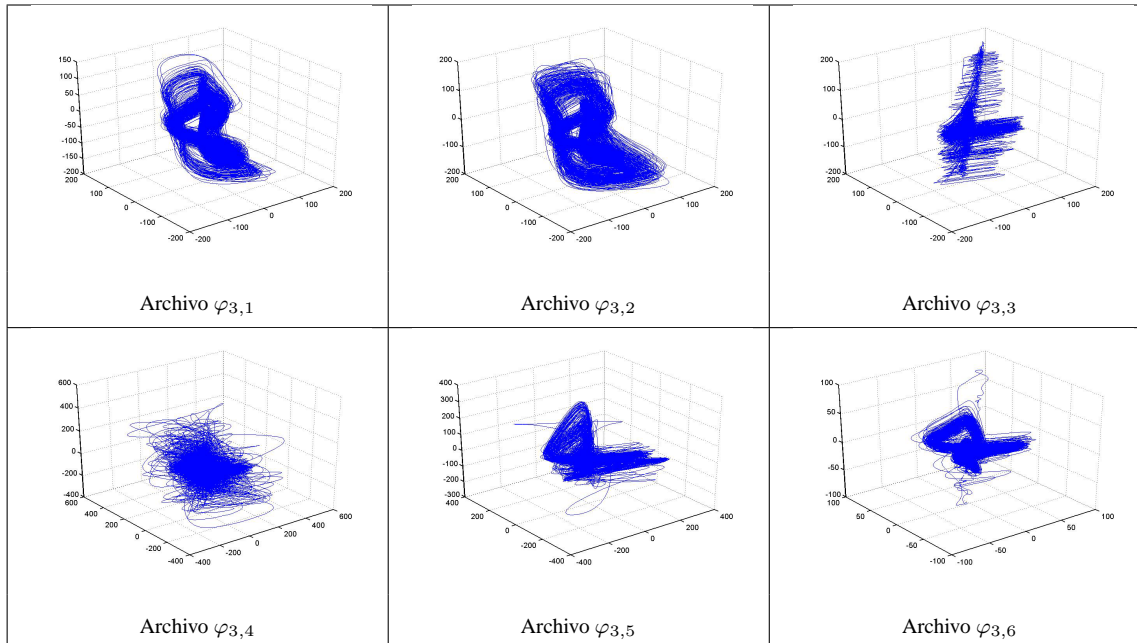


Tabla C.17: Atractores reconstruidos de señales ECG con fibrilación ventricular

### C.6.3 Otras arritmias ventriculares





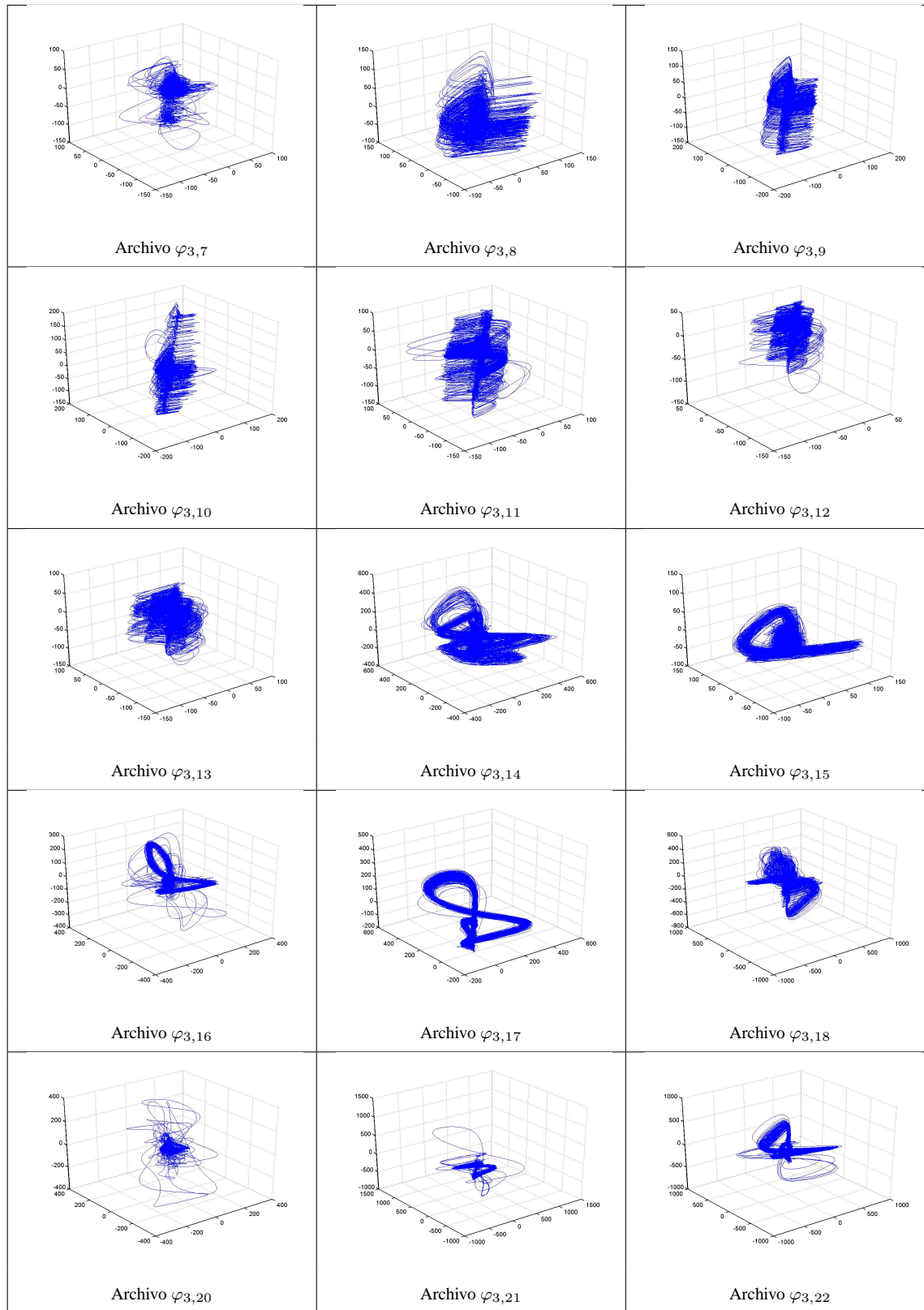


Tabla C.18: Atractores reconstruidos de señales ECG con arritmias ventriculares

# Máquinas de soporte vectorial

---

Las Máquinas de Soporte Vectorial (SVM) están sustentadas en el principio de minimización de riesgo estructural (SRM) propuesto en [93]. Un subconjunto de funciones encontradas en el proceso de optimización minimizan el riesgo actual del problema, de manera que entrenando una serie de máquinas para el objetivo dado, se minimizan el riesgo y la confiabilidad de la dimensión Vapnik-Chervonenkis (VC), la cual implica los requerimientos de almacenamiento de la técnica de aprendizaje y la calidad de sus respuestas para responder a un problema de clasificación.

En forma general, la función de riesgo actual  $R(\alpha)$  es expresada como una cota, para la definición de la cual se determina el riesgo empírico  $R_{emp}(\alpha)$  como el promedio de los errores de entrenamiento para un número finito y fijo de observaciones  $\{x_i, y_i\}$  ( $x_i$ : patrón,  $y_i$ : etiqueta del patrón  $i$ ):

$$R_{emp}(\alpha) = \frac{1}{2l} \sum |y_i - f(x_i, \alpha)| \quad (D.1)$$

La cantidad  $\frac{1}{2} |y_i - f(x_i, \alpha)| \in [0, 1]$  es llamada pérdida. Para un número  $\eta$  tal que  $0 < \eta < 1$ , que representa las pérdidas se tiene que [93]

$$R(\alpha) \leq R_{emp}(\alpha) + \sqrt{\left(\frac{h(\log(2l/h) + 1) - \log(\eta/4)}{l}\right)} \quad (D.2)$$

donde  $h$  es la dimensión Vapnik-Chervonenkis (VC) y .... corresponde a la confianza.

Sea un grupo de datos de entrenamiento  $\{x_i, y_i\}$  con  $i = 1, \dots, l$ ,  $y_i \in \{-1, 1\}$  y  $x_i \in \mathbb{R}^d$ .

Existe un hiperplano que separa los datos de etiquetas positivas y negativas [11].

$$\begin{aligned}
 x_i \cdot w + b &\geq 1 - \xi_i \text{ para } y_i = 1 \\
 x_i \cdot w + b &\leq -1 + \xi_i \text{ para } y_i = -1 \\
 \xi_i &\geq 0, \forall i
 \end{aligned}
 \tag{D.3}$$

donde  $w$  es la normal al hiperplano y  $\xi_i$  son las variables introducidas por errores de clasificación como violaciones del hiperplano, de manera que  $\sum \xi_i$  es la cota del error de clasificación (observar la figura D.1).

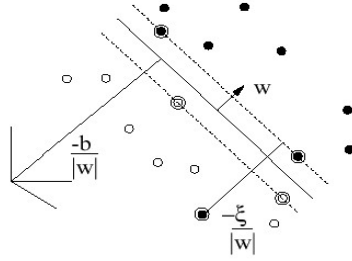


Figura D.1: Hiperplano que separa los datos

Una manera natural de añadir un costo a la función objetivo es minimizar  $\|w\|^2/2 + C \sum \xi_i$  [11], donde  $C$  es una constante elegida por el usuario correspondiente al inverso de la penalización de los errores. Así, la anterior función objetivo D.1 corresponde a un problema de optimización convexa entendido como un problema de programación cuadrática (QP), cuya forma dual Wolfe es [101]:

Maximizar:

$$L_D \equiv \sum_i \alpha_i - \frac{1}{2} \sum \alpha_i \alpha_j y_i y_j x_i x_j
 \tag{D.4}$$

Sujeto a:

$$0 < \alpha_i < C
 \tag{D.5}$$

$$\sum \alpha_i y_i = 0
 \tag{D.6}$$

con solución en forma de:

$$w = \sum^{N_s} \alpha_i y_i x_i \quad (\text{D.7})$$

donde  $N_s$  es el número de vectores de soporte.

Por cuanto, en la mayoría de los casos el espacio de entrada no es lineal, es necesario hacer la transformación de los datos basándose en el producto interno para mapearlos en el espacio euclidiano  $\mathcal{H}$ , de manera que [80]:

$$\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{H} \quad (\text{D.8})$$

Luego, el algoritmo de entrenamiento, solo depende de los datos a través de los productos punto de la forma  $\Phi(x_i) \cdot \Phi(x_j)$ . En este caso, se tiene una función  $K$  llamada kernel definida como

$$K(x_i, x_j) = \Phi(x_i) \cdot \Phi(x_j)$$

De manera que solo es necesario reemplazar el anterior kernel en el algoritmo de entrenamiento D.4.

Los kernels más utilizados para reconocimiento de patrones son los siguientes [81]:

- lineal:  $K(x, y) = (x'y)$
- polinomial:  $K(x, y) = (\gamma x'y + r)$  con  $\gamma > 0$
- RBF:  $K(x, y) = \exp(-\gamma \|x - y\|^2)$  con  $\gamma > 0$
- sigmoide:  $\tanh(\gamma x'y + r)$