UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Estrategia didáctica para estudiar las propiedades de la multiplicación de números reales con estudiantes de grado octavo, haciendo uso de homotecias

FERNANDO FERNÁNDEZ SÁNCHEZ

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Bogotá, Colombia
2018

Estrategia didáctica para estudiar las propiedades de la multiplicación de números reales con estudiantes de grado octavo, haciendo uso de homotecias

FERNANDO FERNÁNDEZ SÁNCHEZ

Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Directora:
Dra. Ibeth Marcela Rubio Perilla

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales
Bogotá, Colombia
2018

A Dios por brindarme la fuerza para poder culminar con este objetivo, a mis padres por su ejemplo, apoyo y consejos para superar las dificultades y a mis hijos por ser mi motivación e inspiración cada día.

Agradecimientos

A Dios por brindarme la oportunidad de iniciar, trabajar y culminar este objetivo, a mis padres por su apoyo incondicional, a mi esposa e hijos por su paciencia al entender que parte del tiempo que dediqué al trabajo, les correspondía.

A mi asesora, Dra. Ibeth Marcela Rubio Perilla por su acompañamiento y generosidad al brindarme parte de su conocimiento y experiencia en el desarrollo del trabajo.

A mis estudiantes de grado octavo por su disposición a colaborar y aprender durante el desarrollo del trabajo.

Resumen

Se presenta una propuesta didáctica para evidenciar las propiedades de la multiplicación de números reales mediante el uso de las homotecias como herramienta geométrica. Esta propuesta está dirigida a un grupo de 28 estudiantes de grado octavo de la Institución Educativa Departamental Domingo Savio, que se ubica en la zona urbana del Municipio de Guasca Cundinamarca, de carácter oficial, público y mixto.
La enseñanza de las propiedades de la multiplicación de números reales se limita a un método tradicional en el cual se suelen dar muchos ejemplos donde dichas propiedades se cumplen, pero no se justifican, generando que a muchos estudiantes se les dificulte entender y diferenciar estas propiedades.
Para el diseño e implemantación de esta unidad didáctica se asume el aprendizaje significativo de Ausubel como referente didáctico y además, la presentación de las homotecias dada en [Papy, 1970] como herramienta geométrica, se estudian las propiedades de la composición de homotecias, se hace uso de la biyección entre los puntos de una recta y el conjunto de números reales (la recta real) y con esto se define la multiplicación de números reales mediante la composición de ciertas homotecias, para dar paso a la evidencia geométrica de las propiedades de la multiplicación. Por otra parte, se hace una revisión histórica, epistemológica y teórica de los conceptos, definiciones, axiomas y teoremas involucrados en el propósito del trabajo, para el diseño de las actividades a desarrollar con los estudiantes.

Palabras clave: Propiedad asociativa, propiedad conmutativa, elemento neutro, elemento inverso, grupo, transformación, homotecia, números reales.

Abstract

A didactic proposal is presented to show the properties of real numbers multiplication through the use of homotheties as a geometric tool. This proposal is designed for a group of 28 eighth-grade students of the Institución Educativa Departamental Domingo Savio, which is located in the urban area of the municipality of Guasca Cundinamarca; it is an official, public and mixed school.
The teaching of the properties of real numbers multiplication is limited to a traditional method in which is usual to give examples where the properties are satisfied but they are not justified, so for many students is difficult to understand and to differentiate these properties.
For the design and implementation of this didactic unit it is assumed the significant learning by Ausubel as a didactic reference and besides, it is considered the presentation

of the homotheties given in [Papy, 1970] as a geometric tool. We study the properties of the composition of homotheties; the bijective application between the points of the line and the real numbers is used to define the multiplication of real numbers through the composition of certain homotheties, to obtain a geometric evidence of the properties of multiplication. On the other hand, it is presented a historical, epistemological and theoretical review of the concepts, definitions, axioms and theories involved in the purpose of the work, for the design of the activities to develop with the students.

Keywords: Associative property, commutative property, neutral element, inverse element, group, transformation, homothety, real numbers.

Lista de Figuras

1-1. Teorema de Tales 7
1-2. Hexágono 9
1-3. Teorema de Pappus 9
1-4. Hexágono con dos pares de lados opuestos paralelos y las rectas $\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{l}$ paralelas 10
1-5. Hexágono con dos pares de lados opuestos paralelos y las rectas $\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{l}$ no paralelas 10
1-6. Teorema de Desargues 11
1-7. Teorema 1.5. Rectas AD, BE y CF paralelas 12
1-8. Teorema 1.5. Rectas AD, BE y CF concurrentes en $\boldsymbol{O}$ 12
1-9. Transformación $f : \Pi \to \Pi$. A, B, C, D y E son puntos fijos de f. 23
1-10. Transformación 1_Π. 23
1-11. Transformación g tal que $g(X) = C$. 24
1-12. Definición homotecia h de centro C. 24
1-13. Imagen $h(X)$ por la homotecia h. 25
1-14. Imagen $h(X)$ por la homotecia h. 25
1-15. Imagen $h(X)$ por la homotecia h. 26
1-16. Imagen de una recta por una homotecia. 26
1-17. Flechas de una misma homotecia. 27
1-18. Homotecia h de centro C. 28
1-19. Homotecia h con $h(P) = P$. 28
1-20. Imágenes de varios puntos por la homotecia h, con $h(P) = P$. 29
1-21. Homotecia g con $g(P) = C$. 29
1-22. Imágenes de varios puntos por la homotecia g, con $g(P) = C$. 30
1-23. Imagen del pentágono por la homotecia g tal que $g(P) = C$. 30
1-24. Homotecia h no constante. 31
1-25. $f \circ h$ con h constante. 32
1-26. $f \circ h$ con f constante. 32
1-27. $f \circ h$ con f y h no constantes. 33
1-28. $f \circ h$ con f y h no constantes. 33
1-29. $f \circ h$ con f y h no constantes. 33

1-30. $j \circ k$. 34
1-31. Conmutatividad de la composición: $f \circ h = h \circ f$. 35
1-32. Elemento neutro de la composición de homotecias de centro C. 36
1-33. Homotecias no constantes h y k. 36
1-34. Imágenes de varios puntos por las homotecias h y k. 37
1-35. Homotecias inversas. 38
1-36. Imagen de un triángulo por la homotecia h. 38
1-37. Recta graduada. 39
1-38. Razón de h. 39
1-39. Razón de g. 40
1-40. $r(k) = 3$. 41
1-41. $r(j) = -\frac{3}{2}$. 41
1-42. $r(f \circ h)$. 42
1-43. $r(j \circ n)$. 42
1-44. $r(g \circ k)$. 43
1-45. $r(f \circ h)$. 43

3-1. Rectas que pasan por un punto. 56
3-2. Rectas que pasan por un punto. 56
3-3. Rectas que pasan por dos puntos. 57
3-4. Rectas que pasan por dos puntos. 57
3-5. Construcción rectas paralelas. 59
3-6. Construcción rectas paralelas. 60
3-7. Construcción rectas paralelas. 61
3-8. Teorema de Tales. 61
3-9. Relación entre segmentos de un triángulo. 62
3-10. Razones entre segmentos de un triángulo. 63
3-11. Transformación del plano Π. 64
3-12. Homotecia de centro C. 64
3-13. Homotecia de centro D. 65
3-14. Imagen de un punto X por la homotecia h. 65
3-15. Imagen de un punto A por la homotecia h, según cada caso. 66
3-16. Error al hallar la imagen de A por h. 67
3-17. Imagen de A por h. 68
3-18. Imagen de A por h. 68
3-19. Imagen por h del punto A. 69
3-20. Imagen de D por la homotecia h. Caso I. 71
3-21. Imagen de D por la homotecia h. Casos (II-VI). 72

3-22. Error de la imagen de un punto por la homotecia f. 73
3-23. Diferentes homotecias. 74
3-24. Imagen de un triángulo por la homotecia h. 75
3-25. Imagen del pentágono por la homotecia dada. 76
3-26. Imagen de un triángulo por la homotecia dada. 77
3-27. $f \circ h$. 80
3-28. $(f \circ h)(Y)$ y $(f \circ h)(Z)$. 81
3-29. $(h \circ f)(X)$, $(h \circ f)(Y)$ y $(h \circ f)(Z)$. 81
3-30. $(f \circ h)$ y $(h \circ f)$, según cada caso. 82
3-31. Proposiciones falsas o verdaderas. 83
3-32. $r(h) = a(Q) = 3$. 84
3-33. Relación entre la razón de una homotecia y las abscisas. 85
3-34. Relación entre la razones de dos homotecias y su composición. 88
3-35. Caso I. k en rojo, l en verde y $k \circ l$ en azul. 89
3-36. Caso II. f en rojo, g en verde y $f \circ g$ en azul. 90
3-37. Caso III. h en rojo, j en verde y $h \circ j$ en azul. 90
3-38. Información de los Casos I, II y III. 91
3-39. Información de la homotecia m. 92
3-40. Información de las homotecias f y g. 93
3-41. Relación entre $r(f)$ y $r(g)$. 93
3-42. $h(P) = Q$ y $k(P) = R$. 95
3-43. $h(U) = P$ y $k(U) = Q$. 96
3-44. Ejercicios 3 y 4 -Actividad 9. 97
3-45. Primer ejercicio. 99
3-46. Signo de la razón de una homotecia. 100
3-47. Leyes de signos. 100
3-48. Razones de f, g, h, $f \circ g$ y $(f \circ g) \circ h$. 102
3-49. Propiedad asociativa. 102
3-50. Razones de g, h, f, $g \circ h$ y $f \circ (g \circ h)$. 102
3-51. Ejercicio 2-Actividad 11. 103
3-52. Propiedad asociativa. 105
3-53. Propiedad conmutativa. 106
3-54. Elemento neutro. 106
3-55. Inversos multiplicativos. 107
3-56. $(+)(+) = (+)$. 107
3-57. $(+)(-) = (-)$. 108
3-58. $(-)(+) = (-)$. 108

3-59. $(-)(-) = (+)$ 108

Lista de Tablas

2-1. Estándares clasificados dentro de los pensamientos numérico y espacial para sexto-séptimo. 49
2-2. Estándares clasificados dentro de los pensamientos métrico, aleatorio y variacional para sexto-séptimo. 50
2-3. Estándares clasificados dentro de los pensamientos numérico, espacial, y métrico para octavo-noveno. 51
2-4. Estándares clasificados dentro de los pensamientos aleatorio y variacional para octavo-noveno. 52
2-5. Estándares relacionados directamente con la propuesta. 53
2-6. Estándares que no se desarrollan en la propuesta, pero que en un futuro se pueden reforzar. 53

3-1. Respuestas actividad 1. 58
3-2. Porcentaje de respuestas correctas - Actividad 12. 110

Contenido

Agradecimientos vii

Resumen ix

Lista de figuras xi

Lista de tablas xv

Introducción 2

1. Referente histórico, epistemológico y teórico 5

1.1. Origen de la geometría 5
1.2. Tales de Mileto 6
1.3. Euclides de Alejandría 7
1.4. Pappus de Alejandría 8
1.5. Girard Desargues 11
1.6. Números reales 12
1.6.1. Axiomas de cuerpo 14
1.6.2. Axiomas de orden 14
1.6.3. Axioma del extremo superior 15
1.7. Grupo 15
1.8. Homotecias 23
1.8.1. Homotecias particulares 28
1.8.2. Homotecias no constantes 31
1.8.3. Composición de homotecias de igual centro 31
1.9. Homotecias y producto de números reales 39

2. Aspectos metodológicos, didácticos y pedagógicos 45

2.1. Investigación acción 45
2.2. Transposición didáctica 46
2.3. Enfoque pedagógico 46
2.4. Estructura curricular 47
2.5. Estándares 48

2.6. Población 53

3. Descripción y análisis 55

3.1. Actividad 1. Conceptos básicos. 55
3.2. Actividad 2. Rectas paralelas - Proporción. 59
3.3. Actividad 3. Homotecia 1. 63
3.4. Actividad 4. Homotecia 2. 71
3.5. Actividad 5. Homotecia-Figuras. 75
3.6. Actividad 6. Composición de homotecias. 79
3.7. Actividad 7. Recta real y homotecias. 83
3.8. Actividad 8. Multiplicación. 87
3.9. Actividad 9. Propiedad conmutativa. 95
3.10. Actividad 10. Razón de una homotecia y leyes de signos. 98
3.11. Actividad 11. Propiedad asociativa. 101
3.12. Actividad 12. Evaluación. 104

4. Conclusiones 111

A. Anexo 1: Actividad de aula 1. Conceptos básicos 113

B. Anexo 2: Actividad de aula 2. Rectas paralelas-Proporción 115

C. Anexo 3: Actividad de aula 3. Homotecia 1 118

D. Anexo 4: Actividad de aula 4. Homotecia 2 123

E. Anexo 5: Actividad de aula 5. Homotecia-Figuras 130

F. Anexo 6: Actividad de aula 6. Composición de Homotecias 133

G. Anexo 7: Actividad de aula 7. Recta real y homotecias 140

H. Anexo 8: Actividad de aula 8. Multiplicación 144

I. Anexo 9: Actividad de aula 9. Propiedad conmutativa 150

J. Anexo 10: Actividad de aula 10. Razones y leyes de signos 153

K. Anexo 11: Actividad de aula 11. Propiedad asociativa 157

L. Anexo 12: Actividad de aula 12. Evaluación 159

M. Anexo 13: Fotografías de aplicación de la propuesta 160

Bibliografía 163

Introducción

El estudio de los números y sus operaciones ha aportado en los avances de la sociedad a lo largo de la historia. En la etapa escolar se inicia este estudio con la exploración del conteo de objetos, lo que lleva a la construcción del conjunto de números naturales, allí se realizan algunas operaciones: adición, multiplicación, sustracción y división. Las dos últimas operaciones ponen de manifiesto la necesidad de construir nuevos conjuntos numéricos donde estas operaciones estén bien definidas y se introducen entonces los números enteros y los racionales. Posteriormente, desde la solución de ecuaciones cuadráticas en estos conjuntos numéricos, se plantea la necesidad de introducir los números irracionales y los reales.

En la matemática escolar se desarrolla además, desde los primeros grados, el pensamiento espacial, se estudian las figuras, sus relaciones y propiedades geométricas y métricas, que están ligadas con el uso y manejo de los números. Un ejemplo de estas relaciones entre figuras es la semejanza, relación que conserva forma, e involucra razones y proporciones numéricas.

Es usual en el aula, que en la enseñanza de las propiedades de la multiplicación se utilicen ejemplos de que estas propiedades se cumplen en los diferentes conjuntos numéricos, pero no se explican ni justifican. La gran mayoría de docentes se limitan a dar lectura a determinados libros en donde se enuncian las propiedades y se ilustra con una serie de ejemplos, pero a muchos estudiantes se les dificulta entender dichas propiedades.

"El estudio de la variación como una base fundamental para acceder a los procesos de generalización propios de cada uno de los pensamientos. En este sentido, el estudio de las propiedades de los números y sus operaciones y de la manera como varían sus resultados con el cambio de los argumentos u operandos, o de los objetos de la geometría y sus características y de la manera como cambian las medidas de las cantidades asociadas con las transformaciones de esos objetos, se proponen como procesos de abstracción y generalización a partir del análisis de lo que es invariante en medio de los aspectos variables de un conjunto de situaciones. Muchos de los conceptos de la aritmética y la geometría se suelen presentar en forma estática, pero ganarían mucho en flexibilidad y generalidad y atraerían más el interés de los estudiantes si se presentan en forma dinámica y variacional.” [MEN, 2006]

Basándose en lo anterior, es de gran ayuda para los estudiantes ilustrar las propiedades de la multiplicación mediante el uso de relaciones geométricas que permitan evidenciarlas y a la vez entenderlas. En este trabajo se hace una propuesta, donde una forma de evidenciar las propiedades de la multiplicación de números reales con los estudiantes de grado octavo, es utilizar el concepto de homotecia, el cual es abordado en grado séptimo cuando se trabajan las transformaciones en el plano. Además, es importante resaltar que desde la básica primaria se introducen los conceptos de semejanza, razón, proporcionalidad y las propiedades de las operaciones en diferentes conjuntos numéricos. Así, a través de esta propuesta se enriquecen tópicos y procesos de los diferentes pensamientos, como se plantea en la siguiente cita del Ministerio de Educación Nacional.

“Cada conjunto de recursos, puestos en escena a través de una situación de aprendizaje significativo y comprensivo, permite recrear ciertos elementos estructurales de los conceptos y de los procedimientos que se proponen para que los estudiantes los aprendan y ejerciten y, así, esa situación ayuda a profundizar y consolidar los distintos procesos generales y los distintos tipos de pensamiento matemático. En este sentido, a través de las situaciones, los recursos se hacen mediadores eficaces en la apropiación de conceptos y procedimientos básicos de las matemáticas y en el avance hacia niveles de competencia cada vez más altos.” [MEN, 2006]

Esta propuesta se encuentra en el mismo espíritu de trabajos como: “Ilustración de algunas relaciones existentes entre las propiedades geométricas del plano y las propiedades y operaciones de los números reales” [Rivera, 2011] y “Definición geométrica de la multiplicación de reales utilizando homotecias” [Peña, 2011], los cuales presentan una definición geométrica de la multiplicación de números reales que permite poner en evidencia sus propiedades, pero no presentan ideas concretas que orienten el trabajo pedagógico y didáctico que se realizó con estas propuestas en el aula.

Con lo expuesto anteriormente surge la pregunta:

¿Cuál puede ser una estrategia didáctica que permita a los estudiantes de grado octavo de la Institución Educativa Departamental Domingo Savio reconocer y comprender las propiedades de la multiplicación de números

reales, utilizando el concepto de homotecia?

Para dar solución a esta pregunta se plantea:

Objetivo general

Desarrollar una unidad didáctica para los estudiantes de grado octavo, que les permita evidenciar las propiedades de la multiplicación de números reales mediante el uso del concepto de homotecia, utilizando estrategias de aprendizaje significativo.

Objetivos específicos

1. Identificar los conocimientos previos de los estudiantes respecto a los conceptos básicos de geometría.
2. Determinar aspectos disciplinares y didácticos pertinentes a la unidad didáctica.
3. Diseñar las actividades de la unidad que permitan evidenciar las propiedades de la multiplicación con números reales utilizando homotecias.
4. Aplicar la unidad didáctica con los estudiantes de grado octavo de la Institución Domingo Savio.
5. Validar la unidad.

Para este fin, el trabajo se divide en 4 capítulos. En el primer capítulo se presenta el marco teórico, en el cual se mencionan diferentes axiomas, teoremas, definiciones y conceptos involucrados en el propósito del trabajo, desde una perspectiva histórica y epistemológica. Con lo anterior y además de la definición de homotecia presentada en [Papy, 1970], se estudian las propiedades de la composición de homotecias, se hace uso de la biyección entre el conjunto de los puntos de una recta y el conjunto de números reales (la recta real) y con esto se define la multiplicación de números reales mediante la composición de ciertas homotecias, para dar paso a la evidencia geométrica de las propiedades de la multiplicación. En el segundo capítulo se presentan aspectos metodológicos, didácticos y pedagógicos, tales como la investigación-acción, la transposición didáctica, el enfoque pedagógico, la estructura curricular, los estándares y la población objetivo, los cuales son elementos pertinentes para el diseño de la unidad didáctica . En el tercer capítulo se presenta el planteamiento, desarrollo y resultados de cada una de las actividades implementadas en la unidad didáctica. Finalmente, en el cuarto capítulo se presentan las conclusiones generales.

1. Referente histórico, epistemológico y teórico

Es importante considerar y resaltar la influencia de los aportes históricos, epistemológicos y teóricos para la construcción y el aprendizaje de un concepto, pues a través del tiempo y con los diferentes métodos empleados, se pueden evidenciar las dificultades, los avances y los personajes que contribuyen en el desarrollo de una teoría. Por tal motivo, en esta sección se menciona brevemente un contexto epistemológico e histórico relacionado con los temas del trabajo y de manera paralela se presenta una base teórica y de notación para el desarrollo del mismo.

1.1. Origen de la geometría

Las afirmaciones que se hacen sobre el origen de la matemática, ya sea de la aritmética o de la geometría, son necesariamente arriesgadas ya que, en cualquier caso, los orígenes de esta materia son más antiguos que el arte de la escritura. Heródoto y Aristóteles no situaron el origen de la geometría en una época anterior a la de la civilización egipcia. Heródoto aseguraba que la geometría se había originado en Egipto debido a la necesidad práctica de volver a trazar las lindes de las tierras después de la inundación anual del valle del río Nilo. Aristóteles en cambio, aseguraba que el desarrollo de la geometría en Egipto había sido impulsada por el ocio y los rituales de una amplia clase sacerdotal.

Como Egipto, la India tuvo también sus geómetras, o como se les solía llamar: "tensadores de la cuerda", y los conocimientos geométricos primitivos se fueron dando de la planificación de templos y de la medición y construcción de altares, adoptando la forma de un cuerpo de conocimiento conocido como los Sulvasutras o "reglas de la cuerda". Sulva es una palabra que se refiere a las cuerdas utilizadas para efectuar mediciones y sutra significa un libro de reglas o aforismos relativos a un cierto ritual, o a una ciencia. Tanto la geometría de Egipto como la de la India pudieron derivarse de una fuente común. No hay documentos disponibles de la época prehistórica, por lo tanto se dificulta seguir el proceso de evolución de la matemática, es decir, el presunto origen de un concepto puede ser una reaparición de una idea mucho más antigua, que había permanecido en estado latente. (Adaptado de [Boyer, 1986])

1.2. Tales de Mileto

Tales, filósofo, astrónomo y matemático griego, nació en la ciudad de Mileto aproximadamente entre 624-548 A.C, fue considerado un hombre excepcionalmente inteligente, el primer filósofo y el primero de los Siete Sabios griegos. Estableció una proposición que enuncia: que un ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto, de la cual se le atribuye algún tipo de demostración. A este teorema se le añaden otros, los que fueron demostrados por Tales. Por este motivo, muchos consideran a Tales como el primer matemático auténtico, es decir, como el padre de la organización deductiva de la geometría. (Adaptado de [Boyer, 1986])

Tales se había dedicado a asuntos de la vida práctica y uno de ellos era medir las alturas de las pirámides de Egipto, observando las longitudes de sus sombras en el momento en que la sombra proyectada por un palo vertical era exactamente igual a su altura. Quizás Tales fue el primero en utilizar la proporcionalidad de los lados de triángulos semejantes.

Entre los resultados más conocidos de Tales se encuentra el teorema que lleva su nombre, relativo a la proporcionalidad de segmentos determinados en dos rectas cortadas por un sistema de paralelas. [Díaz, 2002]

Teorema 1.1. (Teorema de Tales) Si dos rectas $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{s}$ se cortan por varias rectas paralelas, los segmentos determinados por los puntos de intersección sobre una de ellas son proporcionales a los segmentos determinados por los puntos correspondientes en la otra.

La Figura 1-1 ilustra el teorema de Tales, en donde $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ son los puntos de intersección de las rectas paralelas con la recta $\boldsymbol{r}$, además $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{F}$ son los puntos de intersección correspondientes en la recta $\boldsymbol{s}$.

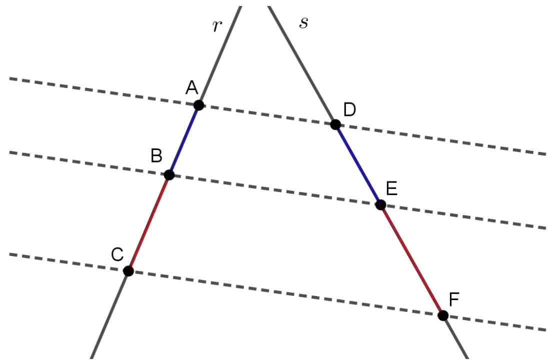


Figura 1-1.: Teorema de Tales

Por lo tanto $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF}$

1.3. Euclides de Alejandría

Euclides de Alejandría (300 A.C), es conocido así por haber sido llamado a enseñar matemáticas en la escuela de Alejandría, autor de aproximadamente una docena de tratados que cubrían diversos estudios en óptica, astronomía, música, mecánica y hasta un libro sobre las secciones cónicas. Las obras de Euclides son los tratados de matemática griega más antiguos. Aunque se han perdido más de la mitad de los escritos hay cinco obras que han logrado sobrevivir: los Elementos, los Datos, la División de Figuras, los Fenómenos y la Óptica.
Los Elementos, considerada la obra más importante de Euclides, no solamente comprendía todos los conocimientos geométricos, sino que además era un texto introductorio que cubría toda la matemática elemental; la aritmética, la geometría sintética y el álgebra. Los elementos están divididos en trece libros o capítulos, los seis primeros tratan de geometría plana elemental, los libros VII, VIII y IX sobre teoría de números, el libro X sobre los inconmensurables y los tres últimos, principalmente sobre geometría de sólidos. (Adaptado de [Boyer, 1986])

Euclides introduce que un punto es lo que no tiene parte, que una línea es longitud sin anchura, o una línea recta es una línea que está situada de la misma manera con respecto a todos sus puntos. Además, presenta cinco postulados: el primero establece que dos puntos se pueden unir con una recta, el segundo: toda recta se puede prolongar indefinidamente, el tercero: se puede trazar un círculo con cualquier centro y cualquier radio, el cuarto: todos los ángulos rectos son iguales y el quinto establece que si una línea recta corta a otras dos líneas rectas formando con ellas ángulos interiores del mismo lado menores que dos ángulos rectos, las dos líneas rectas, prolongadas indefinidamente, se cortan del lado por el cual los ángulos son menores que dos ángulos rectos.

Consideraremos el espacio como el conjunto de todos los puntos, el plano como un conjunto de puntos que representa una superficie plana que no tiene dimensión de volumen y que se extiende infinitamente en todas las direcciones, el cual se denotará como Π y los elementos del plano, es decir los puntos, se nombrarán con letras mayúsculas, las rectas como subconjuntos de dicho plano, se denotarán con letras minúsculas.

Asumiremos los siguientes axiomas de la geometría euclidiana. [Hilbert, 1996]

Axioma 1.1. Dados dos puntos distintos cualesquiera, hay exactamente una recta que los contiene.

Dados dos puntos distintos A y B, la recta que pasa por estos se denotará $\overleftrightarrow{AB}$.

Axioma 1.2. Todo plano contiene al menos tres puntos que no están alineados.

Definición 1.1. Dos rectas que están en un mismo plano, son paralelas si son iguales o no tienen puntos en común.

Si dos rectas k y l son paralelas, se denotará $k \parallel l$.

Axioma 1.3. Dado un punto y una recta, existe una única recta paralela a la recta dada que pasa por el punto dado.

Axioma 1.4. Correspondencia entre los puntos de una recta y los números reales de manera que: a cada punto de la recta corresponde exactamente un número real y a cada número real corresponde exactamente un punto de la recta. [Moise, 1966]

1.4. Pappus de Alejandría

Matemático griego (300 D.C), fue seguidor de los trabajos de Euclides, Arquímedes y Apolonio. Realizó otras demostraciones a teoremas conocidos, hacia los años 320 escribió una obra que consta de 8 libros y que tituló la “Colección Matemática”, la cual tiene un gran valor histórico debido a que en esta obra se dan a conocer resultados nuevos, pero también se presenta un compendio de gran parte de la matemática griega, pues muchos trabajos originales se perdieron. (Adaptado de [Boyer, 1986])

Pappus expone una diferencia entre los tipos de problemas:
- Problemas planos, que se solucionan solamente con rectas y circunferencias.

- Problemas sólidos, que se solucionan usando secciones cónicas.
- Problemas lineales, que utilizan curvas diferentes a las rectas, circunferencias y a las secciones cónicas.

Además, establece que el problema de la trisección de un ángulo es un problema sólido, y realiza una construcción de las medias aritmética, geométrica y armónica. [Ortiz, 2005]

Un teorema, de varios que se le atribuyen a Pappus, y que se utilizará para determinar algunos aspectos importantes, es el teorema del hexágono.

Definición 1.2. Hexágono. Figura formada por 6 puntos distintos A,B,C,D,E y F del plano Π, que son los vértices del hexágono, los cuales determinan 6 rectas AB, BC, CD, DE, EF y FA, que son los lados del hexágono y 3 pares de lados opuestos: AB y DE, BC y EF, CD y FA; como se muestra en la Figura 1-2. [Mosquera, 2008]

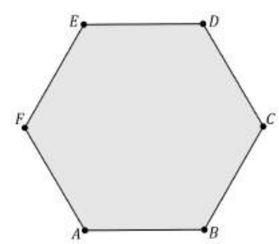


Figura 1-2.: Hexágono

El Teorema de Pappus que mencionaremos, se establece a partir de una disposición especial de los vértices de un hexágono.

Teorema 1.2. (Teorema de Pappus) Si los vértices de un hexágono $\boldsymbol{ABCDEF}$ se encuentran alternadamente sobre las rectas $\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{l}$, entonces los puntos de intersección de los pares de lados opuestos son colineales. (Ver Figura 1-3)

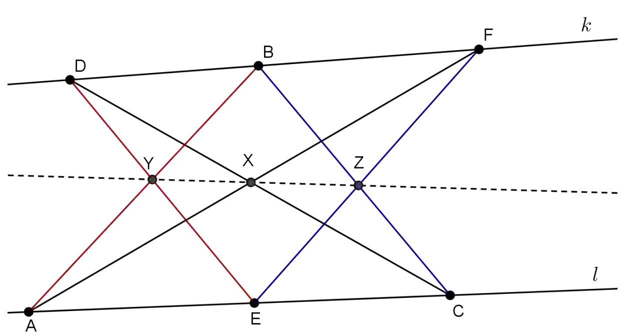


Figura 1-3.: Teorema de Pappus

Del teorema de Pappus, visto en geometría euclidiana, surge un caso particular, el cual tiene que ver con los lados opuestos.
Caso particular: Hexágono como en el Teorema 1.2, con dos pares de lados opuestos paralelos. De este caso se plantean dos posibilidades:
I. $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DE}$, $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ y $k \parallel l$. (Ver Figura 1-4)

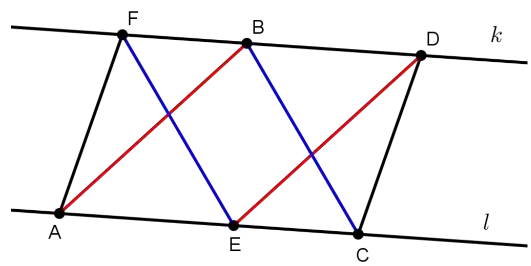


Figura 1-4.: Hexágono con dos pares de lados opuestos paralelos y las rectas $\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{l}$ paralelas

II. $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DE}$, $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ y $k \nparallel l$. (Ver Figura 1-5)

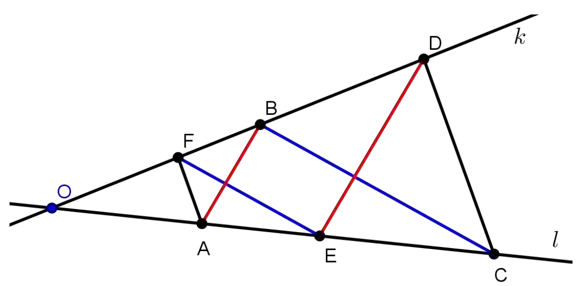


Figura 1-5.: Hexágono con dos pares de lados opuestos paralelos y las rectas $\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{l}$ no paralelas

Al precisar este caso particular y sus dos posibilidades, el teorema de Pappus expone una de las propiedades de un hexágono, según las condiciones dadas.

Teorema 1.3. Si los vértices de un hexágono están alternadamente sobre dos rectas $\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{l}$ y dos pares de lados opuestos son paralelos entonces los lados del tercer par también son paralelos. [Mosquera, 2008]

1.5. Girard Desargues

Arquitecto e ingeniero militar en Lyon (1591-1661), escribió un libro el cual tituló *Brouillon projet d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cône avec un plan (París, 1639)*, el cual trata de los resultados de los encuentros de un cono con un plano. Desargues inicia el estudio de lo que se conoce hoy como geometría proyectiva, no obstante se da el origen de esta en el siglo XIX, debido a que su obra no tuvo mayor trascendencia en su época. (Adaptado de [Boyer, 1986])
Desargues es más conocido por una proposición, la cual publicó en 1648 un gran amigo y seguidor: Abraham Bosse. Dicha proposición se conoce como el famoso teorema de Desargues, el cual dice:

Teorema 1.4. Si dos triángulos están situados de manera que las rectas que unen pares de vértices correspondientes son concurrentes en un punto, entonces los puntos de intersección de los pares de lados correspondientes son colineales, y recíprocamente. [Boyer, 1986]

Sean $\boldsymbol{ABC}$ y $\boldsymbol{DEF}$ dos triángulos, $\boldsymbol{O}$ el punto en donde concurren las rectas que pasan por los pares de vértices correspondientes y $\boldsymbol{P}$,$\boldsymbol{Q}$ y $\boldsymbol{R}$ los puntos de intersección de los pares de lados correspondientes, entonces $\boldsymbol{P}$,$\boldsymbol{Q}$ y $\boldsymbol{R}$ están sobre la misma recta. (Ver Figura 1-6)

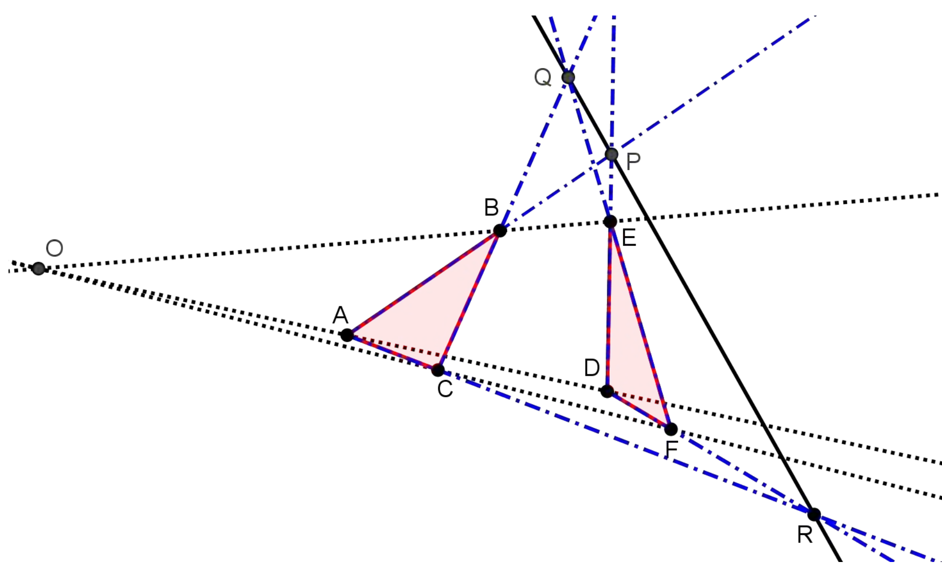


Figura 1-6.: Teorema de Desargues

Una versión, de varias que se producen del teorema de Desargues, y que se presenta en [Rivera, 2011] para geometría euclidiana es:

Teorema 1.5. Sean $\boldsymbol{ABC}$ y $\boldsymbol{DEF}$ dos triángulos tales que $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BE}$ y $\overleftrightarrow{CF}$ sean paralelas o concurrentes en un punto $\boldsymbol{O}$, si $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DE}$ y $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{DF}$ entonces $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{EF}$. (Ver Figuras 1-7 y 1-8)

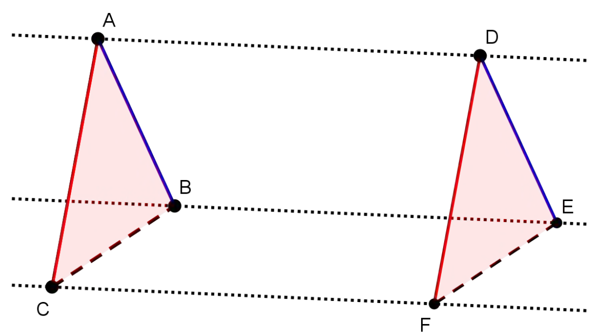


Figura 1-7.: Teorema 1.5. Rectas AD, BE y CF paralelas

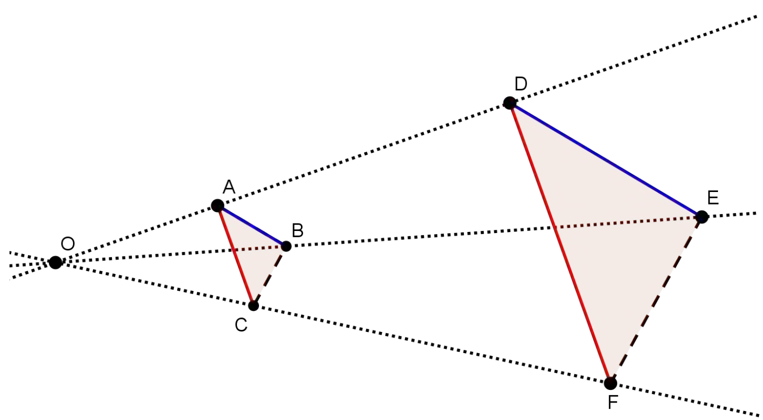


Figura 1-8.: Teorema 1.5. Rectas AD, BE y CF concurrentes en $\boldsymbol{O}$

1.6. Números reales

El concepto de número se ha venido desarrollando a lo largo de la historia. En Mesopotamia, alrededor del año 4000 a.C. aparecen los primeros vestigios de números grabados sobre pequeños tableros de arcilla, más tarde este conocimiento inicial sobre los números naturales fue adoptado en la antigua Grecia y la antigua Roma, pero usando símbolos diferentes. Los egipcios utilizaron por primera vez las fracciones comunes alrededor del año 1000 a.C.; luego alrededor de 500 a.C. un grupo denominado la hermandad pitagórica y liderado por Pitágoras, se dio cuenta de la necesidad de los números irracionales. Los números negativos, introducidos por matemáticos indios cerca del 600, fueron posiblemente reinventados en China poco después, pero no se utilizaron en Europa hasta el siglo XVII. Aún a finales del siglo XVIII, Leonhard Euler descartó las soluciones negativas de las ecuaciones porque las consideraba irreales. En el siglo XVII, en el trabajo con el cálculo diferencial e integral se utilizaba el conjunto de los números reales sin una definición precisa. La primera definición rigurosa fue planteada por Georg Cantor en 1871. En realidad, el estudio riguroso de la construcción formal de los números reales exige tener amplios fundamentos de la teoría de conjuntos y la lógica matemática. La construcción y sistematización de los números reales fue lograda en el siglo XIX por dos grandes matemáticos europeos utilizando vías distintas: la teoría de conjuntos de Georg Cantor (encajamientos sucesivos, cardinales finitos e infinitos), por un lado, y el análisis matemático de Richard Dedekind (vecindades, entornos y cortaduras de Dedekind), por el otro. Ambos matemáticos lograron la sistematización de los números reales en la historia, utilizando todos los avances previos en la materia, desde la antigua Grecia y pasando por matemáticos como Descartes, Newton, Leibniz, Euler, Lagrange, Gauss, Riemann, Cauchy y Weierstrass. (Adaptado de [Rivera, 2011])

Por otra parte, el conjunto de los números reales es la unión del conjunto de los números racionales con el conjunto de los números irracionales, sin embargo, es conveniente mencionar otras propiedades de los números reales, y se introducirán de forma axiomática, como se presenta en [Apostol, 1984].

Sea un conjunto no vacío $\mathbb{R}$, llamado conjunto de los números reales, que satisface una serie de axiomas agrupados en tres categorías: axiomas de cuerpo, axiomas de orden y axioma del extremo superior, llamado también axioma de completitud.

Consideremos dos operaciones internas en $\mathbb{R}$:
(1) Adición: Para cada par de elementos a, b de $\mathbb{R}$, $a + b$ es un elemento $\mathbb{R}$.

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (a, b) \mapsto a + b$$

(2) Multiplicación: Para cada par de elementos a, b de $\mathbb{R}$, $a \cdot b$ es un elemento $\mathbb{R}$.

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (a, b) \mapsto a \cdot b$$

que satisfacen los siguientes axiomas:

1.6.1. Axiomas de cuerpo

Axioma 1.5. $+, \cdot$ son conmutativas en $\mathbb{R}$. Para cada $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$a + b = b + a$$
$$a \cdot b = b \cdot a$$

Axioma 1.6. $+, \cdot$ son asociativas en $\mathbb{R}$. Para cada $a, b, c \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Axioma 1.7. Existencia de elementos neutros. Existen dos números reales distintos 0 y 1, tales que para cada número real a se cumple:

$$0 + a = a + 0 = a$$
$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$$

Axioma 1.8. Existencia de elemento opuesto. Para cada número real a, existe un número real $a^{'}$ tal que:

$$a + a^{'} = a^{'} + a = 0$$

Axioma 1.9. Existencia de elemento inverso. Para cada número real $a \neq 0$, existe un número real a^{-1} tal que:

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$$

Axioma 1.10. $\cdot$ es distributiva con respecto a $+$ en $\mathbb{R}$. Para cada $a, b, c \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

1.6.2. Axiomas de orden

$\mathbb{R}$ es un conjunto totalmente ordenado $(\mathbb{R}, \leq)$ y el orden es totalmente compatible con las operaciones del cuerpo.

Axioma 1.11. La relación de orden es total:

$$\forall a,\ b \in \mathbb{R},\ a \leq b \text{ ó } b \leq a$$

Axioma 1.12. La relación de orden es compatible con la adición:

$$\forall a,\ b,\ c \in \mathbb{R},\ a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$$

Axioma 1.13. La relación de orden es compatible con la multiplicación:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a \leq b, c > 0 \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$$
$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a \leq b, c < 0 \Rightarrow a \cdot c \geq b \cdot c$$

1.6.3. Axioma del extremo superior

El conjunto $\mathbb{R}$ es completo, es decir cumple el axioma del supremo:

Axioma 1.14. Todo conjunto de números reales no vacío y acotado superiormente tiene supremo.

Del cuerpo de los números reales, el trabajo se centrará en el producto y sus propiedades.

1.7. Grupo

En álgebra, el concepto de grupo como una estructura básica, desempeñó un enlace importante debido a la gran variedad de tipos de álgebras inventadas a lo largo del siglo XIX, además que fue uno de los factores esenciales que fomentó el surgimiento de los conceptos abstractos. Ningún matemático en particular puede considerarse responsable del origen de la idea de grupo, pero Évariste Galois (1811-1832), quien nació en el pequeño pueblo de Bourg-la-Reine en las cercanías de París, dio su nombre a este concepto.

Un propósito de las investigaciones de Galois fue el de determinar cuándo son resolubles por radicales las ecuaciones polinómicas, lo que se conoce hoy como teoría de Galois. Este propósito fue inspirado en las investigaciones sobre permutaciones de las raíces de una ecuación polinómica, realizadas por Lagrange, y por la demostración de Abel en 1824, de la insolubilidad por radicales de la ecuación quíntica general.(Adaptado de [Boyer, 1986])

Para esta sección se toma como referencia lo que presenta [Fraleigh, 1988] sobre grupos.

Definición 1.3. Decimos que $(G, \oplus)$ es un grupo, si G es un conjunto y $\oplus$ es una operación binaria, tal que:

(1) el conjunto es cerrado bajo dicha operación, es decir, para cada par a, b de elementos de G, $a \oplus b$ es un elemento de G,

(2) la operación es asociativa, es decir, para cada a, b, c elementos de G, se tiene:

$$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c),$$

(3) el conjunto contiene un elemento identidad para la operación, es decir, existe un elemento $e \in G$, tal que para todo $a \in G$ se tiene:

$$e \oplus a = a = a \oplus e$$

y
(4) para todo elemento de G hay un elemento inverso con respecto a la operación, es decir, para cada elemento a de G, existe $a^* \in G$, tal que:

$$a \oplus a^* = e = a^* \oplus a.$$

Nótese que de lo mencionado anteriormente para $\mathbb{R}$, se tiene que $(\mathbb{R}, +)$ y $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ son grupos.

Ejemplo 1. $(\mathbb{Z}, +)$ es un grupo, donde $\mathbb{Z}$ es el conjunto de los números enteros y $+$ la operación binaria de la adición.

I. $\mathbb{Z}$ es cerrado bajo $+$, es decir, para cada a, b elementos de $\mathbb{Z}$, $a+b$ es un elemento de $\mathbb{Z}$

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : (a, b) \mapsto a + b$$

Algunos ejemplos:

Si $a = 2$ y $b = -3$ entonces

$$(2, -3) \mapsto 2 + (-3) = -1 \text{ y } -1 \in \mathbb{Z}.$$

Si $a = -5$ y $b = -8$ entonces

$$(-5, -8) \mapsto -5 + (-8) = -13 \text{ y } -13 \in \mathbb{Z}.$$

II. $+$ es asociativa en $\mathbb{Z}$, es decir, para cada $a, b, c \in \mathbb{Z}$ se tiene:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Algunos ejemplos:

Si $a = 2$, $b = -3$ y $c = 7$ entonces

$$\begin{aligned} (2 + (-3)) + 7 &= 2 + ((-3) + 7) \\ -1 + 7 &= 2 + 4 \\ 6 &= 6 \end{aligned}$$

Si $a = -2$, $b = -8$ y $c = 5$ entonces

$$
\begin{aligned}
(-2 + (-8)) + 5 &= -2 + ((-8) + 5) \\
-10 + 5 &= -2 + (-3) \\
-5 &= -5
\end{aligned}
$$

III. $\mathbb{Z}$ tiene un elemento identidad o neutro con respecto a $+$, es decir, existe un elemento $e \in \mathbb{Z}$ tal que para todo $a \in \mathbb{Z}$ se tiene:

$$e + a = a = a + e$$

Existe el elemento $0 \in \mathbb{Z}$ tal que $e = 0$ de modo que para todo $a \in \mathbb{Z}$:

$$0 + a = a = a + 0$$

Algunos ejemplos:

Si $a = -4$ entonces

$$0 + (-4) = -4 = -4 + 0$$

Si $a = 25$ entonces

$$0 + 25 = 25 = 25 + 0$$

IV. Cada elemento de $\mathbb{Z}$ tiene un elemento inverso con respecto a $+$, es decir, para todo $a \in \mathbb{Z}$, existe un elemento $a^* \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$a + a^* = 0 = a^* + a$$

En $(\mathbb{Z}, +)$ el elemento inverso de a se nota $-a$, $(a^* = -a)$.

$$a + (-a) = 0 = -a + a$$

Algunos ejemplos:

Si $a = 6$ entonces $-a = -6$

$$6 + (-6) = 0 = -6 + 6$$

Si $a = -7$ entonces $-a = 7$

$$-7 + 7 = 0 = 7 + (-7)$$

Ejemplo 2. Determinar si $(\mathbb{N}, \cdot)$ es un grupo, donde $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales y $\cdot$ es la operación binaria de la multiplicación.

I. $\mathbb{N}$ es cerrado bajo $\cdot$, es decir, para cada a, b elementos de $\mathbb{N}$, $a \cdot b$ es un elemento de $\mathbb{N}$

$$\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} : (a, b) \mapsto a \cdot b$$

Por ejemplo:

Si $a = 2$ y $b = 3$ entonces

$$(2, 3) \mapsto 2 \cdot 3 = 6 \text{ y } 6 \in \mathbb{N}$$

II. $\cdot$ es asociativa en $\mathbb{N}$, es decir, para cada $a, b, c \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Por ejemplo:

Si $a = 2$, $b = 3$ y $c = 7$ entonces

$$\begin{aligned} (2 \cdot 3) \cdot 7 &= 2 \cdot (3 \cdot 7) \\ 6 \cdot 7 &= 2 \cdot 21 \\ 42 &= 42 \end{aligned}$$

III. $\mathbb{N}$ tiene un elemento identidad o neutro para $\cdot$, es decir, existe un elemento $e \in \mathbb{N}$ tal que para cada $a \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$e \cdot a = a = a \cdot e$$

Existe el elemento $1 \in \mathbb{N}$ tal que $e = 1$, de modo que para cada natural a:

$$1 \cdot a = a = a \cdot 1$$

Por ejemplo:

Si $a = 41$ entonces

$$1 \cdot 41 = 41 = 41 \cdot 1$$

IV. No se cumple que cada elemento de $\mathbb{N}$ tenga un elemento inverso en $\mathbb{N}$ con respecto a $\cdot$, es decir, para algún $a \in \mathbb{N}$ no existe un elemento $a^* \in \mathbb{N}$ tal que:

$$a \cdot a^* = e = a^* \cdot a$$

Por ejemplo:

Si $a = 6$ entonces

$$6 \cdot \frac{1}{6} = 1 = \frac{1}{6} \cdot 6$$

pero $a^* = \dfrac{1}{6}$ y $\dfrac{1}{6} \notin \mathbb{N}$.

Como IV no se cumple, entonces $(\mathbb{N}, \cdot)$ no es un grupo.

Ejemplo 3. Determinar si $(\mathbb{T}, \triangle)$ es un grupo, donde $\mathbb{T} = \mathbb{R} - \{1\}$ y $a \triangle b = a + b - ab$.

I. $\mathbb{T}$ es cerrado bajo $\triangle$, es decir, para cada a, b elementos de $\mathbb{T}$, $a \triangle b$ es un elemento de $\mathbb{T}$:

$$\triangle : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \to \mathbb{T} : (a, b) \mapsto a \triangle b$$

Para que $a \triangle b = 1$ tiene que cumplirse $a + b - ab = 1$, luego

$$\begin{aligned} a + b - ab &= 1 \\ a - ab &= 1 - b \\ a(1 - b) &= 1 - b \\ a &= \frac{1 - b}{1 - b} \\ \text{como } b \neq 1 &\text{ se tiene } a = 1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} a + b - ab &= 1 \\ b - ab &= 1 - a \\ b(1 - a) &= 1 - a \\ b &= \frac{1 - a}{1 - a} \\ \text{como } a \neq 1 &\text{ se tiene } b = 1 \end{aligned}$$

así, como a y b son elementos de $\mathbb{T}$, entonces a y b son distintos de 1, por lo tanto $\mathbb{T}$ es cerrado bajo $\triangle$.

II. $\triangle$ es asociativa en $\mathbb{T}$, es decir, para cada $a, b, c \in \mathbb{T}$ se tiene:

$$(a \triangle b) \triangle c = a \triangle (b \triangle c)$$

$a \triangle (b \triangle c)$	
$= a \triangle (b + c - bc)$	Definición de $\triangle$.
$= a + b + c - bc - a(b + c - bc)$	Definición de $\triangle$.
$= a + b + c - bc - ab - ac + abc$	Propiedad distributiva de $\cdot$ con respecto $+$ en $\mathbb{R}$.
$= a + b - ab + c - ac - bc + abc$	Propiedad conmutativa de $+$ en $\mathbb{R}$.
$= a + b - ab + c - (a + b - ab)c$	Propiedad distributiva de $\cdot$ con respecto $+$ en $\mathbb{R}$.
$= (a + b - ab) + c - (a + b - ab)c$	Propiedad asociativa de $+$ en $\mathbb{R}$.
$= (a + b - ab) \triangle c$	Definición de $\triangle$.
$= (a \triangle b) \triangle c$	Definición de $\triangle$.

III. $\mathbb{T}$ tiene un elemento identidad o neutro con respecto a $\triangle$, es decir, existe un elemento $e \in \mathbb{T}$ tal que para cada $a \in \mathbb{T}$ se tiene:

$$e \bigtriangleup a = a = a \bigtriangleup e$$

$$\begin{aligned}
e \bigtriangleup a &= a & & \\
e + a - ea &= a & & \text{Definición de } \bigtriangleup. \\
e + a - ea - a &= a - a & & \text{Opuesto de } a \text{ en } \mathbb{R}. \\
e - ea &= 0 & & \text{Propiedad asociativa, conmutativa y neutro en } (\mathbb{R}, +). \\
e(1-a) &= 0 & & \text{Propiedad distributiva de } \cdot \text{ con respecto } + \text{ en } \mathbb{R}. \\
e &= 0 & & \text{Porque } a \neq 1.
\end{aligned}$$

Ahora:

$$\begin{aligned}
a \bigtriangleup e &= a & & \\
a + e - ae &= a & & \text{Definición de } \bigtriangleup. \\
a + e - ae - a &= a - a & & \text{Opuesto de } a \text{ en } \mathbb{R}. \\
e - ae &= 0 & & \text{Propiedad asociativa, conmutativa y neutro en } (\mathbb{R}, +). \\
e(1-a) &= 0 & & \text{Propiedad distributiva de } \cdot \text{ con respecto } + \text{ en } \mathbb{R}. \\
e &= 0 & & \text{Porque } a \neq 1.
\end{aligned}$$

Así, $e = 0 \in \mathbb{T}$.

IV. $\mathbb{T}$ Para cada número real $a \neq 1$ existe un elemento $a^* \in \mathbb{T}$ tal que:

$$a \bigtriangleup a^* = e = a^* \bigtriangleup a$$

$$\begin{aligned}
a \bigtriangleup a^* &= e & \qquad & & a^* \bigtriangleup a &= e \\
a + a^* - aa^* &= 0 & & & a^* + a - a^*a &= 0 \\
a^* - aa^* &= -a & & & a^* - a^*a &= -a \\
a^*(1-a) &= -a & & & a^*(1-a) &= -a \\
a^* &= \frac{-a}{1-a} & & & a^* &= \frac{-a}{1-a} \\
& & & \text{pues } \ a \neq 1 & & \\
a^* &= \frac{a}{a-1} & & & a^* &= \frac{a}{a-1}
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$a \bigtriangleup \frac{a}{a-1} = 0 = \frac{a}{a-1} \bigtriangleup a.$$

Por ejemplo:

$$\text{Si } a = 3 \text{ entonces } a^* = 3^* = \frac{3}{3-1} = \frac{3}{2}$$

$$3 \triangle \frac{3}{2} = 3 + \frac{3}{2} - 3 \cdot \frac{3}{2}.$$
$$3 \triangle \frac{3}{2} = \frac{6+3}{2} - \frac{9}{2}.$$
$$3 \triangle \frac{3}{2} = \frac{9}{2} - \frac{9}{2} = 0.$$

Como I, II, III y IV se cumplen entonces $(\mathbb{T}, \triangle)$ es un grupo.

Definición 1.4. Un grupo $(G, \oplus)$ es abeliano o conmutativo, si su operación $\oplus$ es conmutativa, es decir, para cada par de elementos a, b de G se tiene

$$a \oplus b = b \oplus a.$$

Ejemplo 4. Se sabe que $(\mathbb{T}, \triangle)$ es un grupo (ver Ejemplo 3). $\triangle$ es conmutativa en $\mathbb{T}$, es decir, para cada $a, b \in \mathbb{T}$ se tiene:

$$a \triangle b = b \triangle a$$

$b \triangle a$	
$b + a - ba$	Definición de $\triangle$.
$a + b - ab$	Propiedad conmutativa de $+$ y $\cdot$ en $\mathbb{R}$.
$a \triangle b$	Definición de $\triangle$.

Por lo tanto, el grupo $(\mathbb{T}, \triangle)$ es abeliano.

Ejemplo 5. $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ es un grupo abeliano.

"Félix Klein (1849-1925) en sus visitas a París, donde se habían desarrollado ya las sugerencias hechas por Lagrange sobre la teoría de grupos, quedó profundamente impresionado por las posibilidades unificadoras que encerraba el concepto de grupo y se dedicó a desarrollarlo. En 1872 presentó una disertación que se hizo famosa con el nombre de Programa Erlangen, relacionada con la aplicación del concepto de grupo como un medio para caracterizar las diversas geometrías que hasta el momento habían surgido. La famosa disertación, trataba una geometría como el estudio de aquellas propiedades de las figuras que permanecen invariantes bajo la acción de un grupo concreto de transformaciones." [Boyer, 1986]

Definición 1.5. Un isomorfismo entre un grupo $(G, \oplus)$ y un grupo $(G', \odot)$ es una función f uno a uno y sobre (biyección) de G en G', tal que para todos los x y y en G, $f(x \oplus y) = f(x) \odot f(y)$.

Ejemplo 6. Dados los grupos $(\mathbb{P}, \cdot)$ y $(\mathbb{R}, +)$, donde $\mathbb{P}$ es el conjunto de los reales mayores que cero, determinar si la función $f : \mathbb{P} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = lnx$ es un isomorfismo.

f es inyectiva	La función lnx es 1-1, es decir, a cada par de elementos distintos de $\mathbb{P}$ le corresponden dos elementos distintos de $\mathbb{R}$.
f es sobreyectiva	Todo elemento de $\mathbb{R}$ es el logaritmo natural de al menos un elemento de $\mathbb{P}$.
f es biyectiva	f es inyectiva y sobreyectiva.

Ahora, sean a, $b \in \mathbb{P}$,

entonces $f(a \cdot b) = ln(a \cdot b) = ln(a) + ln(b)$ (Propiedad logaritmos)

$f(a \cdot b) = f(a) + f(b)$

Verifiquemos la propiedad usada.

Sean $u = lna$ y $v = lnb$, es decir

$$e^u = a \text{ y } e^v = b$$
$$a \cdot b = e^u \cdot e^v$$
$$a \cdot b = e^{u+v}$$
$$ln(a \cdot b) = u + v$$

así, $ln(a \cdot b) = lna + lnb$

Por lo tanto, $f : \mathbb{P} \to \mathbb{R}$ es un isomorfismo.

Definición 1.6. $(G, \oplus, \otimes)$ es un cuerpo, donde G es un conjunto y $\oplus, \otimes$ son operaciones binarias definidas en G, si:

(1) $(G, \oplus)$ es un grupo abeliano, con elemento neutro e

(2) (G-$\{e\}$, $\otimes$) es un grupo abeliano, y

(3) $\otimes$ es distributiva con respecto a $\oplus$: $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$, $\forall\ a, b, c \in G$

Nótese que $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un cuerpo.

1.8. Homotecias

En esta sección se hace una breve presentación de las homotecias como transformaciones del plano y sus principales propiedades, tomando como referencia la exposición que Georges Papy hace de este tema en [Papy, 1970].

Definición 1.7. Una transformación del plano Π, es toda función $\boldsymbol{f}$ que hace corresponder a cada punto A de Π exactamente un punto A' de Π. $f : \Pi \rightarrow \Pi$.
Dado $X \in \Pi$, decimos que X es un punto fijo de f si y solo si $f(X) = X$. (Ver Figura 1-9)

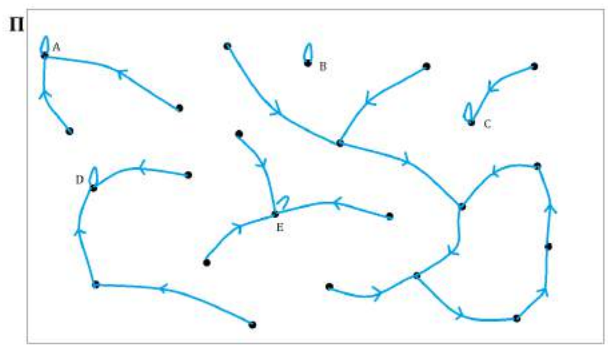


Figura 1-9.: Transformación $f : \Pi \rightarrow \Pi$. A, B, C, D y E son puntos fijos de f.

Definición 1.8. La transformación f tal que $f(X) = X$, para todo X de Π, recibe el nombre de transformación idéntica y se nota 1_{Π}. (Ver Figura 1-10)

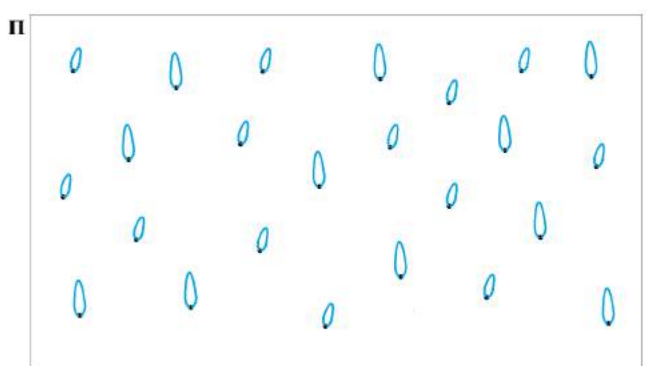


Figura 1-10.: Transformación 1_{Π}.

Definición 1.9. La transformación g tal que $g(X) = C$, para todo X de Π, recibe el nombre de transformación constante a C. (Ver Figura 1-11)

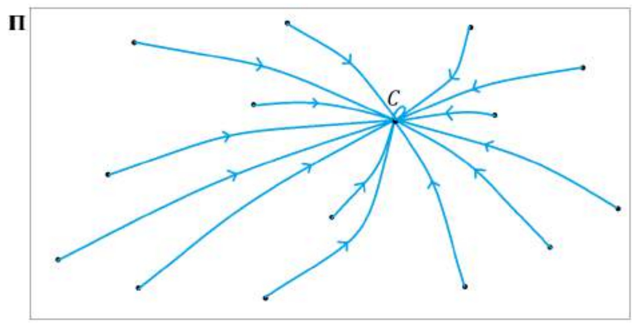


Figura 1-11.: Transformación g tal que $g(X) = C$.

Definición 1.10. Para cada punto C del plano Π, una homotecia de centro C, es una transformación h: $\Pi \to \Pi$ determinada por las flechas $(C, h(C) = C)$ que llamamos bucle y $(P, h(P))$, donde C, P y $h(P)$ son colineales (ver Figura 1-12). De modo que, para hallar la imagen $h(X)$ de un punto X de Π por la homotecia h se procede de la siguiente manera:

I. Si X no pertenece a la recta CP:

(1) se traza la recta CX,
(2) se traza la recta PX,
(3) se traza una recta m por $h(P)$ tal que $m \parallel PX$,
luego, la imagen $h(X)$ es el punto de intersección de las rectas m y CX. (Ver Figura 1-13)

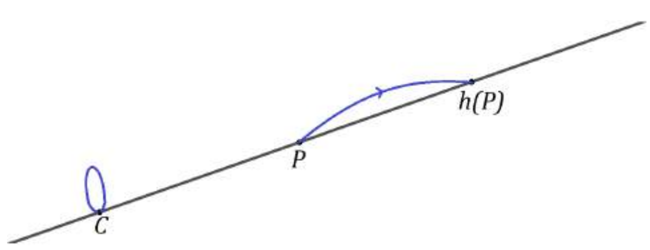


Figura 1-12.: Definición homotecia h de centro C.

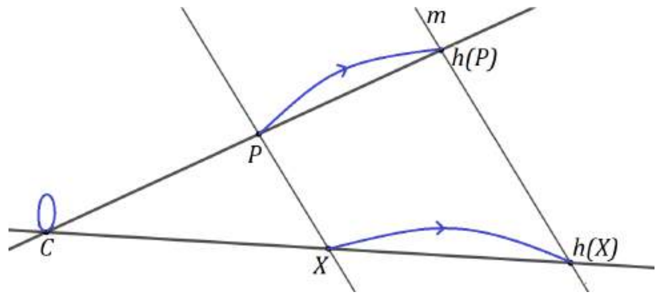


Figura 1-13.: Imagen $h(X)$ por la homotecia h.

II. Si X pertenece a la recta CP:

(1) se busca $h(E)$ para un punto arbitrario E que no pertenece a la recta CP, como se describió en I,
(2) con (C, C) y $(E, h(E))$ se busca la imagen de X, como se describió en I. (Ver Figura 1-14)

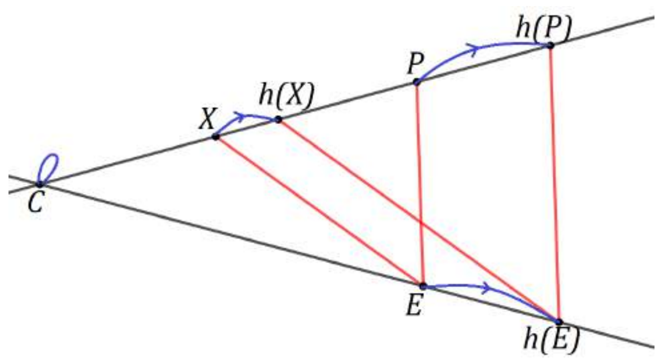


Figura 1-14.: Imagen $h(X)$ por la homotecia h.

Observación: Veamos que la construcción II, no depende del punto E escogido. (Ver Figura 1-15)

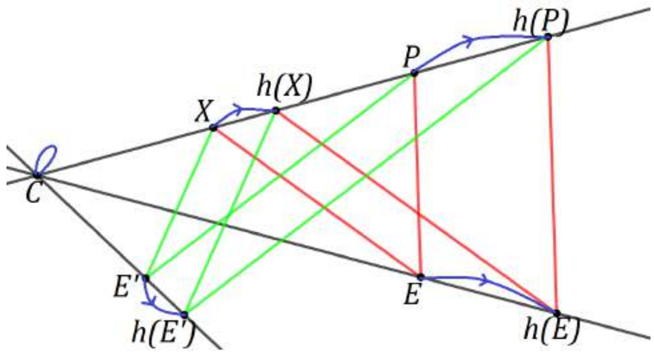


Figura 1-15.: Imagen $h(X)$ por la homotecia h.

Ejemplo 7. La imagen de una recta por una homotecia es una recta. Sean los puntos P, Q y R que pertenecen a la recta m y la homotecia h de centro C determinada por las flechas (C, C) y $(P, h(P) = P')$. (Ver Figura 1-16)

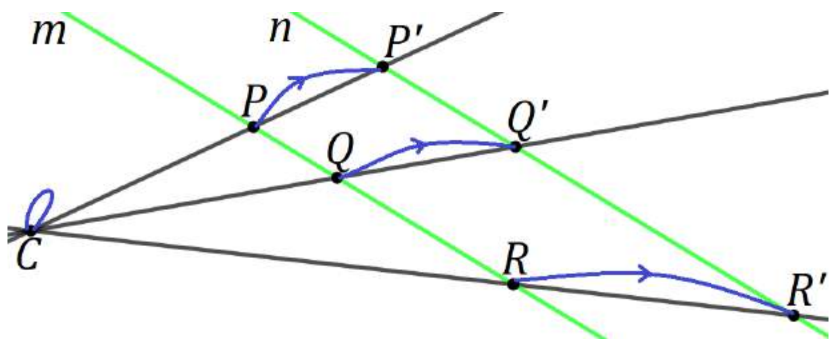


Figura 1-16.: Imagen de una recta por una homotecia.

En la Figura 1-16 se puede observar que las imágenes de los puntos P, Q, y R por la homotecia h son P', Q' y R' respectivamente. Además, P', Q' y R' son colineales, es decir, pertenecen a la recta n. Si se determinan las imágenes de todos los puntos que están en la recta m por la homotecia h, estas quedan en la recta n.

Se tiene la siguiente construcción:
Tres puntos del plano P, R y T no colineales y h una homotecia de centro C, tal que $h(P) = Q$.
Se determina la imagen de R por la homotecia h, $h(R) = S$. Luego, utilizando la flecha

(R, S) se halla la imagen de T, $h(T) = U$. (Ver Figura 1-17)

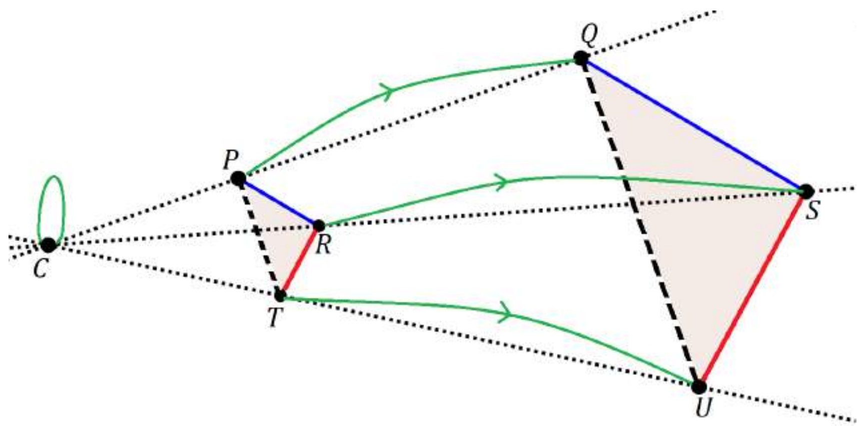


Figura 1-17.: Flechas de una misma homotecia.

En la Figura 1-17 se puede observar que:

-Las flechas (P, Q), (R, S) y (T, U) pertenecen a la homotecia h de centro C.
-Las rectas PQ, RS y TU son concurrentes en C.
-Los triángulos PRT y QSU son tales que $\overleftrightarrow{PR} \parallel \overleftrightarrow{QS}$ y $\overleftrightarrow{RT} \parallel \overleftrightarrow{SU}$.
Ahora:
- Por el Teorema 1.5 (teorema de Desargues) se tiene que $\overleftrightarrow{PT} \parallel \overleftrightarrow{QU}$.
-La imagen del triángulo PRT por la homotecia h es el triángulo QSU.

Ejemplo 8. Dada la homotecia h de centro C determinada por las flechas (C, C) y $(P, h(P))$, construye las imágenes de varios puntos del plano.

Se toman varios puntos del plano y se hacen proyecciones paralelas, como se explicó en la Definición 1.10, obteniéndose la Figura 1-18.

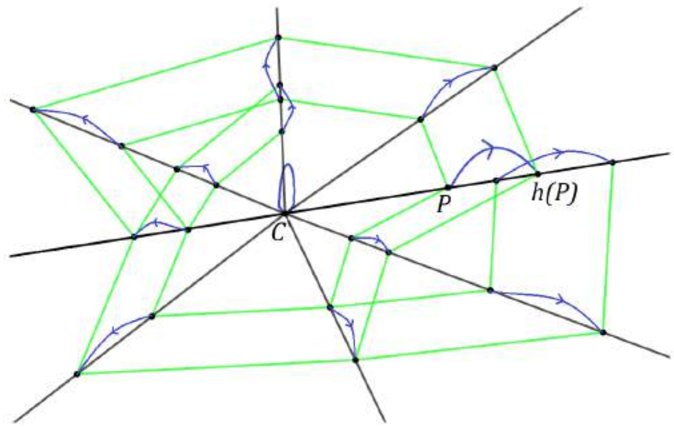


Figura 1-18.: Homotecia h de centro C.

Las Figuras 1-15, 1-16, 1-17 y 1-18 permiten evidenciar la siguiente proposición.

Proposición 1. Si los puntos C, P y Q son colineales tales que $C \neq P$, entonces existe una y solo una homotecia h de centro C tal que $h(P) = Q$.

1.8.1. Homotecias particulares

Se consideran dos casos de homotecias particulares:

Caso I.
Sea h una homotecia de centro C, determinada por las flechas (C, C) y (P, P), es decir, $h(P) = P$. (Ver Figura 1-19)

Figura 1-19.: Homotecia h con $h(P) = P$.

Ahora, se construyen las imágenes de varios puntos del plano por la homotecia h. (Ver Figura 1-20)

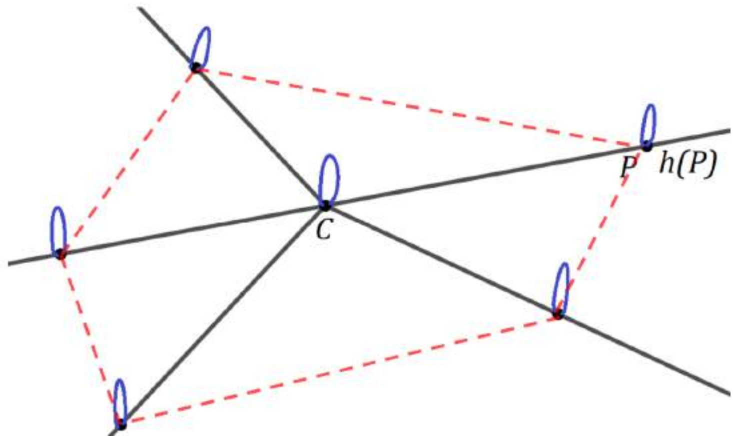


Figura 1-20.: Imágenes de varios puntos por la homotecia h, con $h(P) = P$.

Se puede observar que todas las flechas de la homotecia son bucles, todos los puntos de Π quedan fijos.
Esta homotecia es la **transformación identidad**, $h = 1_{\Pi}$. (Definición 1.8)

Caso II.
Sea g una homotecia de centro C, determinada por las flechas (C, C) y (P, C), es decir, $g(P) = C$. (Ver Figura 1-21)

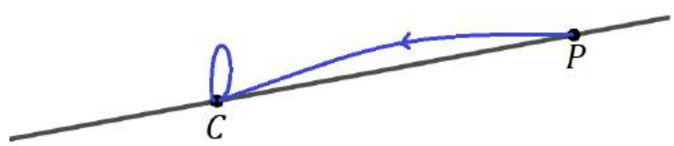


Figura 1-21.: Homotecia g con $g(P) = C$.

Ahora, se construyen las imágenes de varios puntos del plano por la homotecia g. (Ver Figura 1-22)

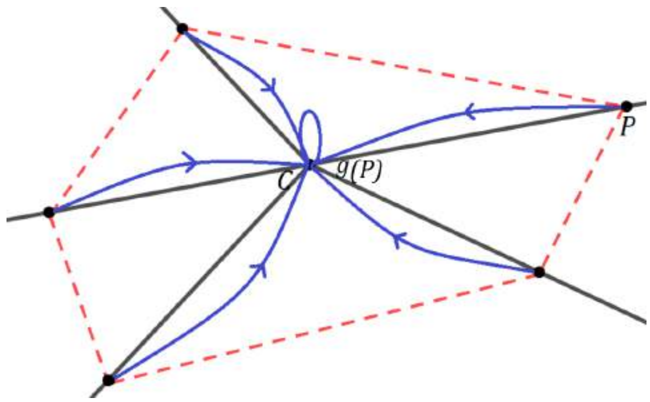


Figura 1-22.: Imágenes de varios puntos por la homotecia g, con $g(P) = C$.

Se puede observar que todas las flechas llegan al centro de la homotecia, g es la **homotecia constante a** C, ver Definición 1.9.

Ejemplo 9. Construye la imagen del pentágono dado, por la homotecia g de centro C tal que $g(P) = C$. (Ver Figura 1-23)

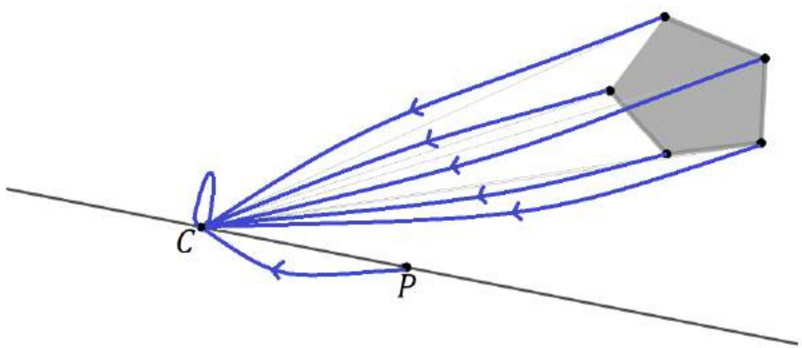


Figura 1-23.: Imagen del pentágono por la homotecia g tal que $g(P) = C$.

Se puede observar en la Figura 1-23 que la imagen del pentágono por la homotecia g es $\{C\}$.

Proposición 2. El centro de toda homotecia no idéntica es su único punto fijo.

1.8.2. Homotecias no constantes

Sea h una homotecia no constante de centro C, P un punto tal que $C \neq P$ y $h(P) = Q$. Como la homotecia h no es constante, entonces $C \neq Q$.
Si $Q = P$, entonces $h = 1_\Pi$, la homotecia identidad.
Si $Q \neq P$, entonces h es una homotecia no constante, que no es la identidad, por ejemplo la que se presenta en la Figura 1-24.

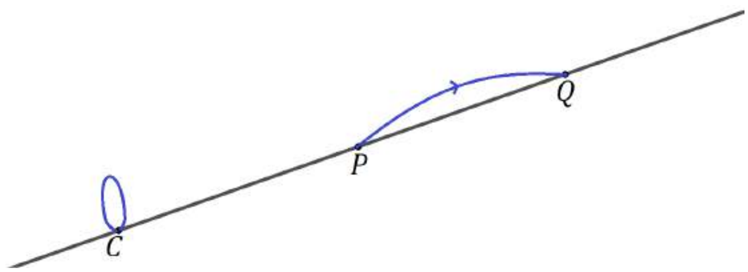


Figura 1-24.: Homotecia h no constante.

Aplicando la Proposición 1, se tiene que la homotecia h es la única homotecia de centro C, tal que $h(P) = Q$.

1.8.3. Composición de homotecias de igual centro

Definición 1.11. Si f y h son homotecias de centro C, llamamos composición de f y h a la transformación que se nota $\boldsymbol{f \circ h}$ y actúa sobre cada punto $\boldsymbol{X}$ de la siguiente manera:
$\boldsymbol{(f \circ h)(X) = f(h(X))}$, es decir, primero se busca la imagen de $\boldsymbol{X}$ por $\boldsymbol{h : h(X)}$ y luego se busca la imagen de $\boldsymbol{h(X)}$ por $\boldsymbol{f : f(h(X))}$.

Dadas dos homotecias f y h de centro C, para hallar $f \circ h$ surgen dos casos:

Caso I. Alguna de las homotecias es constante.

- Si h es constante, es decir, $h(P) = C$ para cada punto P del plano. (Ver Figura 1-25, f verde y h roja)

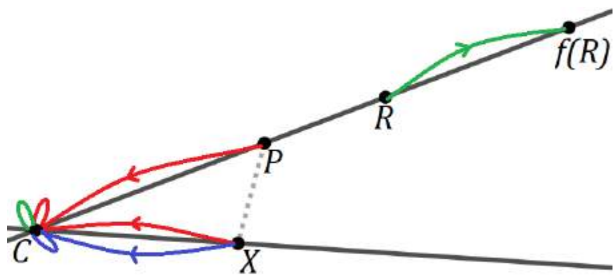


Figura 1-25.: $f \circ h$ con h constante.

En la Figura 1-25 se puede observar que al aplicar la Definición 1.11 se tiene:
$h(X) = C$, luego $f(h(X)) = f(C) = C$, es decir, $(f \circ h)(X) = C$ para cada punto X del plano, por lo tanto $f \circ h = h$.

- Si f es constante, es decir, $f(R) = C$ para cada punto R del plano. (Ver Figura 1-26, f verde y h roja)

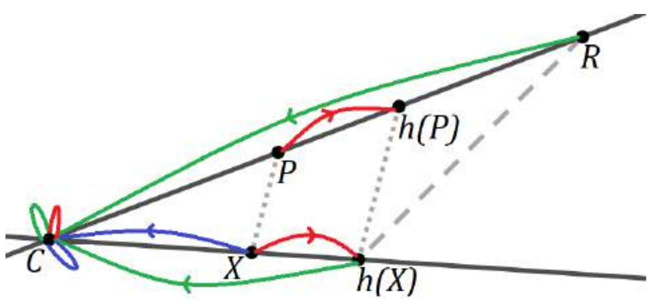


Figura 1-26.: $f \circ h$ con f constante.

En la Figura 1-26 se puede observar que al aplicar la Definición 1.11 se tiene:
La imagen de X por h es $h(X)$, luego $f(h(X)) = C$, es decir, $(f \circ h)(X) = C$ para cada punto X del plano, por lo tanto $f \circ h = f$.

Estas observaciones nos llevan a la siguiente proposición.

Proposición 3. Si f y h son homotecias de centro C y alguna de ellas es constante a C, entonces $f \circ h$ es la homotecia constante a C.

Caso II. f (en verde) y h (en rojo) son homotecias no constantes. (Ver Figuras 1-27, 1-28 y 1-29)

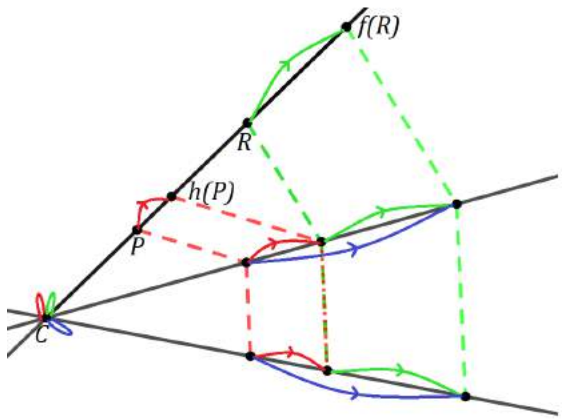


Figura 1-27.: $f \circ h$ con f y h no constantes.

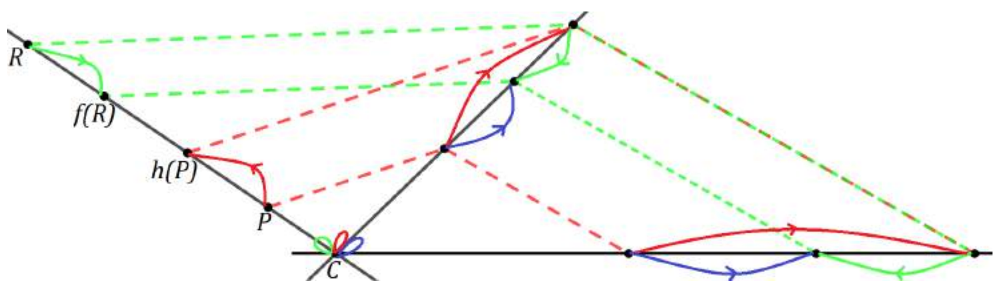


Figura 1-28.: $f \circ h$ con f y h no constantes.

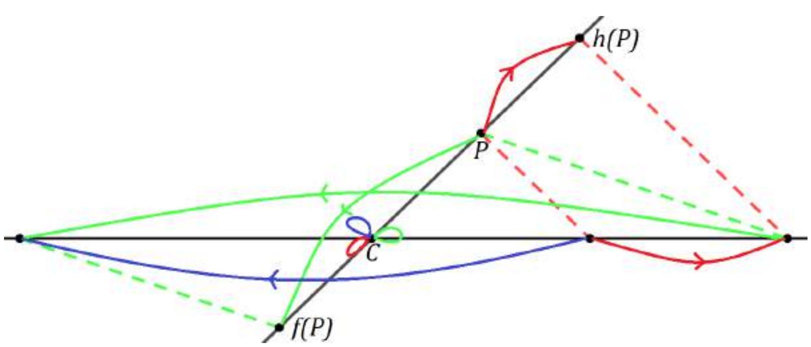


Figura 1-29.: $f \circ h$ con f y h no constantes.

Ejemplo 10. Determinar $j \circ k$, si $j(R) = S$ y $k(P) = Q$, donde j y k son homotecias de centro C, como se muestran en la Figura 1-30.
Aplicando la definición, se obtiene:
I. La imagen de un punto X aplicando k, donde $k(X) = T$.
II. La imagen de T aplicando j, donde $j(T) = W$.
III. La flecha (X, W) pertenece a $j \circ k$.
IV. Ahora, buscando la imagen de C: $j(k(C)) = j(C) = C$, así (C, C) también pertenece a $j \circ k$.

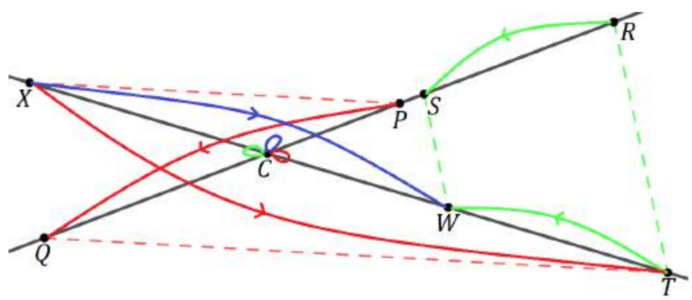


Figura 1-30.: $j \circ k$.

Las Figuras 1-25, 1-26, 1-27, 1-28, 1-29 y 1-30 justifican las siguientes proposiciones.

Proposición 4. Si f y h son homotecias de centro C, entonces $f \circ h$ es una homotecia de centro C.

Proposición 5. Si f y h son homotecias de centro C, entonces $f \circ h$ es constante si y solo si alguna de ellas es constante.

Proposición 6. La compuesta de dos homotecias no constantes de centro C es una homotecia no constante de centro C.

Proposición 7. La composición de homotecias de centro C es conmutativa. Si f y h son homotecias de centro C, entonces $f \circ h = h \circ f$.

Demostración. Consideremos dos casos:
Caso I. Alguna de las homotecias es constante. La Proposición 5 justifica que $f \circ h = h \circ f$.

Caso II. f y h son homotecias no constantes.
Sean las homotecias de centro C, f (en rojo) y h (en verde).

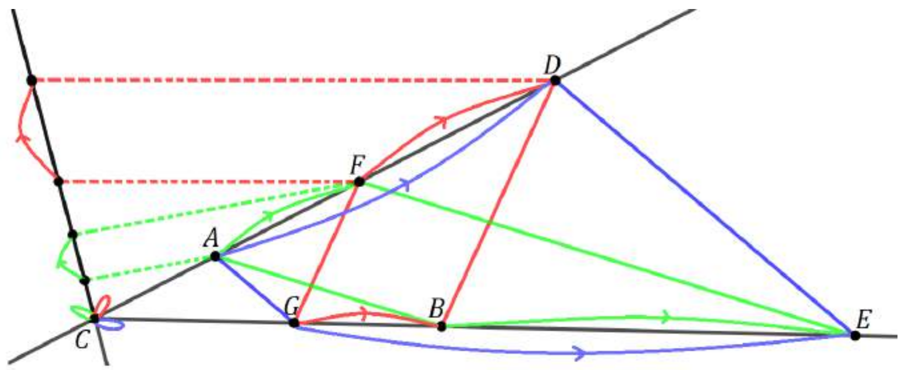


Figura 1-31.: Conmutatividad de la composición: $f \circ h = h \circ f$.

De la Figura 1-31 se tiene que:
- $(f \circ h)(A) = f(h(A)) = f(F) = D$, entonces $(f \circ h)(A) = D$.
- $(h \circ f)(G) = h(f(G)) = h(B) = E$, entonces $(h \circ f)(G) = E$.

Por el Teorema 1.3 (T. Pappus), como $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{FE}$ y $\overleftrightarrow{FG} \parallel \overleftrightarrow{DB}$, se tiene que $\overleftrightarrow{AG} \parallel \overleftrightarrow{DE}$ y por lo tanto, (A, D) y (G, E) son flechas de la misma homotecia y $f \circ h = h \circ f$ (Proposición 1). □

Proposición 8. La composición de homotecias de centro C es asociativa. Si f, g y h son homotecias de centro C, entonces $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Demostración. Sea X un punto en Π, luego

$$((f \circ g) \circ h)(X) = (f \circ g)(h(X)) = f(g(h(X)))$$

y

$$(f \circ (g \circ h))(X) = f((g \circ h)(X)) = f(g(h(X))).$$

Por lo tanto, $((f \circ g) \circ h)(X) = (f \circ (g \circ h))(X)$ para cada punto X en Π, es decir, $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$. □

Proposición 9. 1_Π es el elemento identidad en la composición de homotecias de centro C. Para toda homotecia h de centro C, se cumple que $1_\Pi \circ h = h = h \circ 1_\Pi$.

Demostración. Sean las homotecias h (en rojo), 1_Π (en verde) y X un punto en Π. Luego, $(1_\Pi \circ h)(X) = 1_\Pi(h(X)) = h(X)$ (en azul). (Ver Figura 1-32)

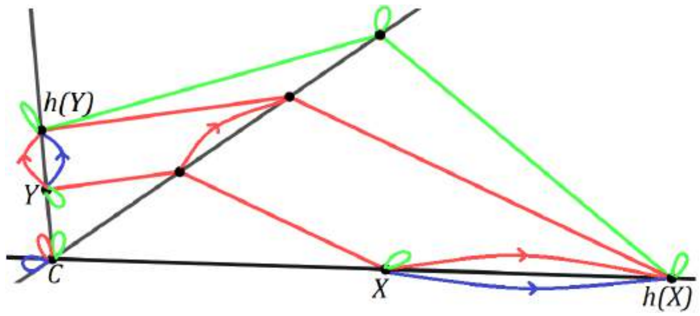


Figura 1-32.: Elemento neutro de la composición de homotecias de centro C.

Por la Proposición 7 se tiene que $(h \circ 1_\Pi)(X) = (1_\Pi \circ h)(X)$, por lo tanto $(1_\Pi \circ h)(X) = h(X) = (h \circ 1_\Pi)(X)$ para cada punto X en Π, es decir, $1_\Pi \circ h = h = h \circ 1_\Pi$. $\square$

Sea h una homotecia no constante de centro C, tal que $h(P) = Q$ y supongamos que $P \neq Q$. Aplicando la Proposición 1 se tiene que existe una y solo una homotecia k de centro C, tal que $k(Q) = P$. (Ver Figura 1-33)

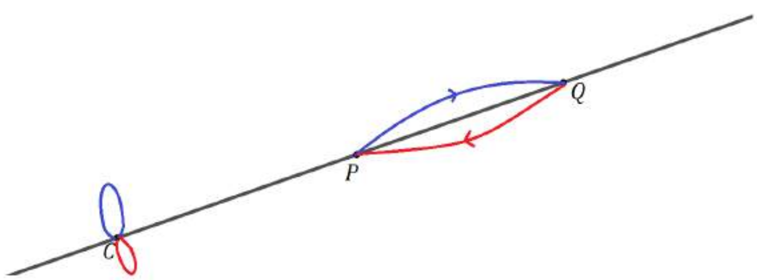


Figura 1-33.: Homotecias no constantes h y k.

Aplicando las homotecias h y k a varios puntos del plano se tiene la Figura 1-34:

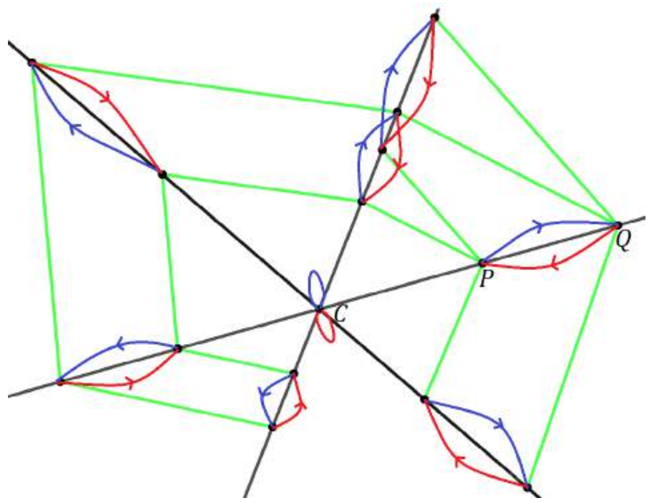


Figura 1-34.: Imágenes de varios puntos por las homotecias h y k.

La Figura 1-34 evidencia que $h \circ k = 1_\Pi$ y $k \circ h = 1_\Pi$, siendo 1_Π el elemento neutro en la composición de homotecias. Así, la homotecia k es la recíproca de la homotecia h, es decir $k = h^{-1}$.

De esta manera podemos enunciar las siguientes proposiciones.

Proposición 10. Si h es una homotecia no constante de centro C, entonces h^{-1} es una homotecia no constante de centro C.

Proposición 11. Si h es un homotecia no constante de centro C, entonces $h^{-1} \circ h = 1_\Pi = h \circ h^{-1}$.

Demostración. Sean las homotecias h (en rojo) y h^{-1} (en verde), tales que $h(P) = Q$, $h^{-1}(Q) = P$ y X un punto en Π.
Luego, se obtiene $(h^{-1} \circ h)(X) = (h^{-1}(h(X))) = h^{-1}(Y) = X = 1_\Pi(X)$. Como esto ocurre para cada punto de Π, entonces $h^{-1} \circ h = 1_\Pi$. (Ver Figura 1-35)

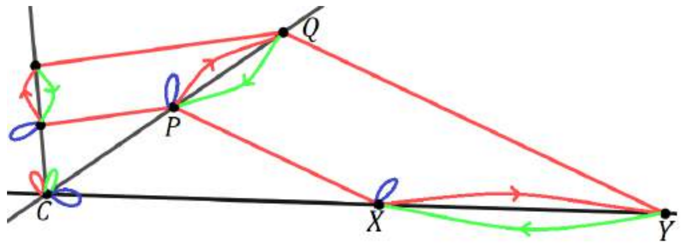


Figura 1-35.: Homotecias inversas.

Por la Proposición 7 se tiene que $h^{-1} \circ h = 1_{\Pi} = h \circ h^{-1}$. □

Ejemplo 11. Dada la homotecia h de centro C, tal que $h(P) = Q$, construye la imagen de $\triangle EFG$ por la homotecia h.
Aplicando la homotecia h se obtiene $h(E) = E'$, $h(F) = F'$ y $h(G) = G'$. (Ver Figura 1.36)

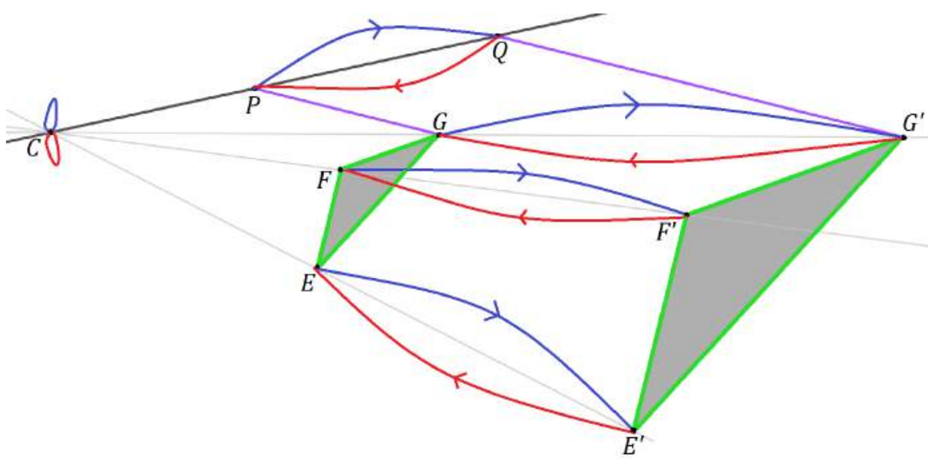


Figura 1-36.: Imagen de un triángulo por la homotecia h.

Si k es la homotecia de centro C tal que $k(Q) = P$, se puede observar en la Figura 1-36, que al aplicar la homotecia k a $\triangle E'F'G'$ se obtiene $\triangle EFG$, es decir, $k(E') = E$, $k(F') = F$ y $k(G') = G$.

Ahora, se define H_c como el conjunto de homotecias no constantes de centro C.
Las Proposiciones 6, 7, 8, 9, 10 y 11 permiten enunciar el siguiente corolario.

Corolario 1.6. El conjunto H_c, de las homotecias de centro C, es un grupo abeliano con la composición, es decir $(H_c, \circ)$ es un grupo abeliano.

1.9. Homotecias y producto de números reales

Sea $l \in \Pi$ la recta que pasa por los puntos C y U, tales que $C \neq U$. Utilizando el Axioma 1.4 (biyección entre los puntos de una recta y el conjunto de números reales) se tiene:

La biyección a: $l \to \mathbb{R}$, tal que $a(C) = 0$ y $a(U) = 1$, es decir, 0 es la abscisa de C y 1 es la abscisa de U. Así, a cada punto de l le corresponde un único elemento de $\mathbb{R}$ y viceversa. (Ver Figura 1-37)

Figura 1-37.: Recta graduada.

Definición 1.12. Para cada homotecia h de centro C, tal que $h(U) = A$, donde $a(C) = 0$ y $a(U) = 1$, diremos que la razón de h es la abscisa de A y lo notaremos: $r(h) = a(A)$.

Ejemplo 12. Determinar la razón de la homotecia h de centro C, tal que $h(U) = A$, como se observa en la Figura 1-38.

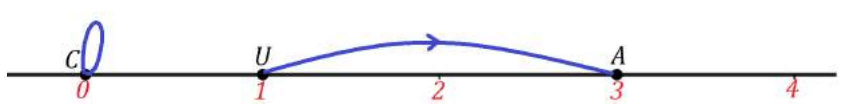


Figura 1-38.: Razón de h.

Como $a(A) = 3$, entonces $r(h) = 3$.

Ejemplo 13. Sea g una homotecia de centro C, tal que $g(P) = Q$. Determinar la razón de g. (Ver Figura 1-39)

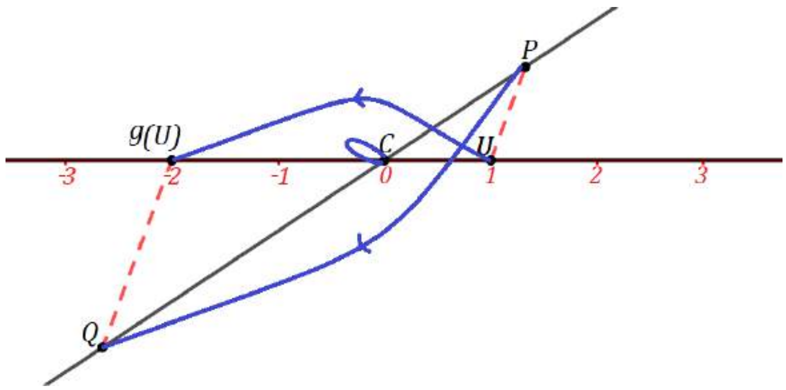


Figura 1-39.: Razón de g.

En la Figura 1-39 se puede observar que al construir la imagen de U por la homotecia g se obtiene $a(g(U)) = -2$, por lo tanto $r(g) = -2$.

De la graduación de la recta, la Definición 1.12 y la Proposición 1 se tiene que la función

$$r : H_c \to \mathbb{R} - \{0\} : h \longmapsto r(h) \tag{1}$$

es biyectiva.

A continuación se presenta la relación que tiene la razón de una homotecia con respecto a las abscisas de los puntos.

Ejemplo 14. Sea k una homotecia de centro C tal que $r(k) = 3$, como se presenta en la Figura 1-40.

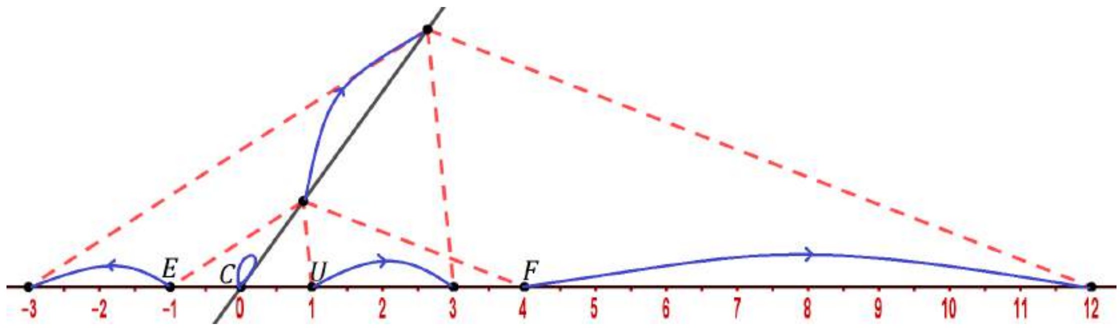


Figura 1-40.: $r(k) = 3$.

En la Figura 1-40 se observa que $a(E) = -1$ y $a(F) = 4$ luego, al determinar las imágenes de los puntos E y F por la homotecia k se obtiene que $a(k(E)) = -3$ y $a(k(F)) = 12$.

Ejemplo 15. Sea j una homotecia de centro C, tal que $r(j) = -\dfrac{3}{2}$ como se presenta en la Figura 1-41.

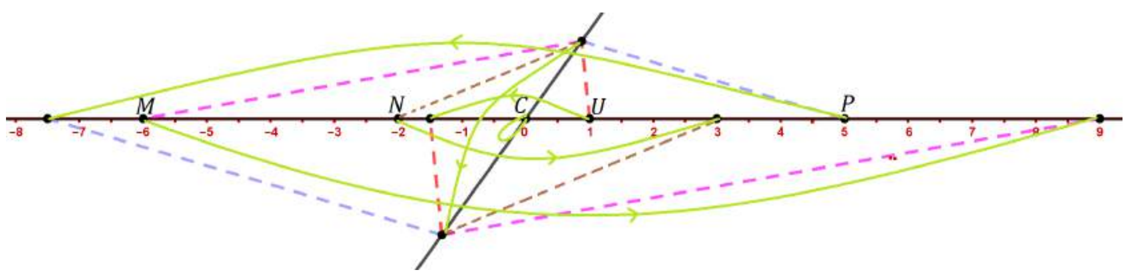


Figura 1-41.: $r(j) = -\dfrac{3}{2}$.

En la Figura 1-41 se observa que $a(M) = -6$, $a(N) = -2$ y $a(P) = 5$, luego al determinar las imágenes de los puntos M, N y P por la homotecia j se obtiene que $a(j(M)) = 9$, $a(j(N)) = 3$ y $a(j(P)) = -\dfrac{15}{2}$.

De los Ejemplos 14 y 15 se puede observar que la razón de una homotecia multiplica las abscisas de los puntos, es decir:
Si h es una homotecia de centro C con razón r y X un punto de la recta l (recta

graduada), entonces se tiene

$$a(h(X)) = r \cdot a(X)$$

En los ejemplos que presentamos a continuación se estudia la relación que hay entre las razones de dos homotecias y la de su compuesta.

Ejemplo 16. Si f y h son homotecias de centro C, con $r(f) = 2$ y $r(h) = 4$, construye $r(f \circ h)$. (Ver Figura 1-42)

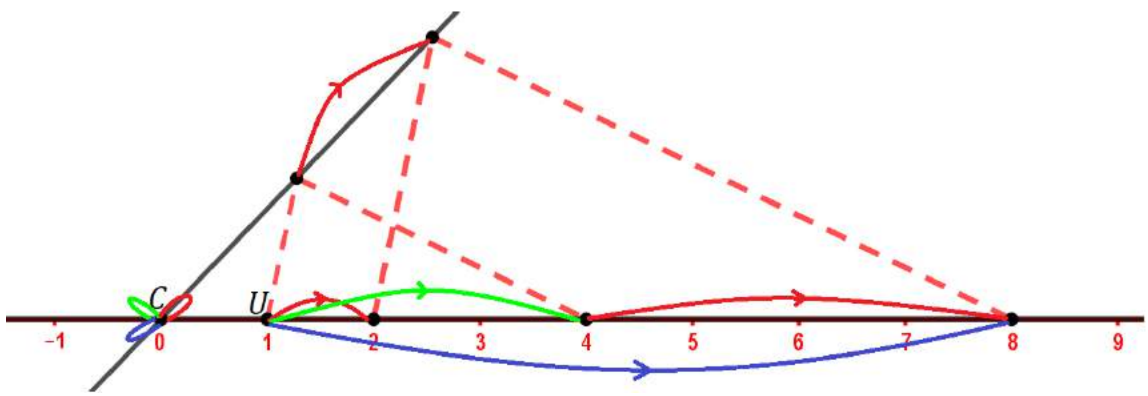


Figura 1-42.: $r(f \circ h)$.

En la Figura 1-42 se puede observar que $r(f \circ h) = 8 = 2 \cdot 4 = r(f) \cdot r(h)$.

Ejemplo 17. Si j y n son homotecias de centro C, con $r(j) = -\dfrac{1}{2}$ y $r(n) = -10$, construye $r(j \circ n)$. (Ver Figura 1-43)

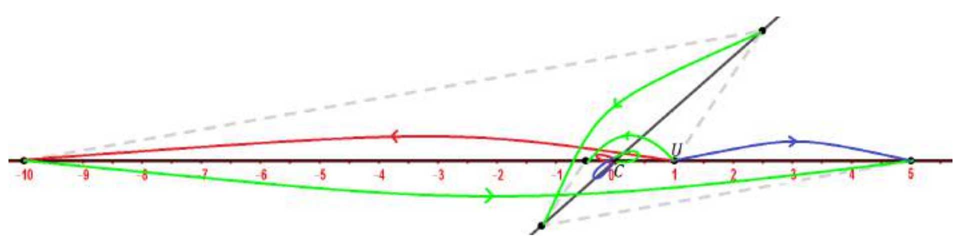


Figura 1-43.: $r(j \circ n)$.

En la Figura 1-43 se puede observar que $r(j \circ n) = 5 = -\dfrac{1}{2} \cdot (-10) = r(j) \cdot r(n)$.

Ejemplo 18. Si g y k son homotecias de centro C, con $r(g) = 3$ y $r(k) = -\dfrac{5}{2}$, construye $r(g \circ k)$. (Ver Figura 1-44)

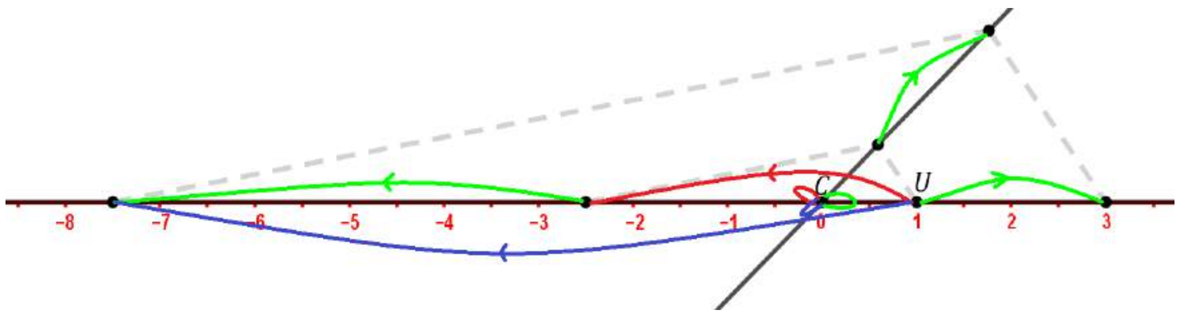


Figura 1-44.: $r(g \circ k)$.

En la Figura 1-44 se puede observar que $r(g \circ k) = -\dfrac{15}{2} = 3 \cdot (-\dfrac{5}{2}) = r(g) \cdot r(k)$.

Sean las homotecias de centro C, f (en rojo) y h (en verde), tales que $r(f) = s$ y $r(h) = t$, como se presenta en la Figura 1-45. De los ejemplos anteriores podemos observar que la razón de $f \circ h$ es $s \cdot t$, es decir, la razón de la compuesta de dos homotecias de igual centro es igual al producto de sus razones.

$$r(f \circ h) = s \cdot t = r(f) \cdot r(h). \tag{2}$$

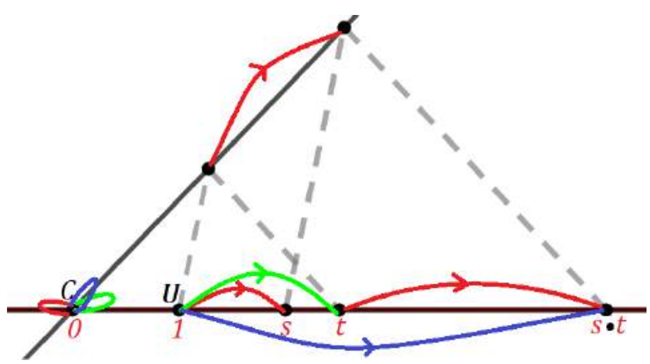


Figura 1-45.: $r(f \circ h)$.

Retomando el trabajo realizado se tiene que $(H_c, \circ)$ y $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ son grupos abelianos, además de (1) y (2) se obtuvo que la función r: $H_c \to \mathbb{R} - \{0\}$: $h \longmapsto r(h)$ es biyectiva y $r(f) \cdot r(h) = r(f \circ h)$, entonces podemos concluir que r es un isomorfismo de grupos abelianos.

Este isomorfismo r es el encargado de transferir las propiedades de $(H_c, \circ)$ al producto de números reales, en el trabajo con los estudiantes de grado octavo de la Institución Educativa Departamental Domingo Savio.

2. Aspectos metodológicos, didácticos y pedagógicos

A continuación se presentan una serie de elementos que se consideran pertinentes para la metodología del trabajo, el diseño de la unidad didáctica y ejecución de la misma.

2.1. Investigación acción

El trabajo presenta una propuesta basada en la investigación-acción, la cual "se puede considerar como un término genérico que hace referencia a una amplia gama de estrategias realizadas para mejorar el sistema educativo y social". [Latorre, 2003]
A continuacion se presentan elementos fundamentales de esta herramienta metodológica, tomando como referencia la exposición que Antonio Latorre hace de este tema en [Latorre, 2003].

"Kemmis (1989), apoyándose en el modelo de Lewin, elabora un modelo para aplicarlo a la enseñanza. El proceso lo organiza sobre dos ejes: uno estratégico, constituido por la acción y la reflexión; y otro organizativo, constituido por la planificación y la observación. Ambas dimensiones están en continua interacción, de manera que se establece una dinámica que contribuye a resolver los problemas y a comprender las prácticas que tienen lugar en la vida cotidiana de la escuela."

El proceso está integrado por cuatro fases o momentos:

1. Planificación: Identificar el problema, diagnosticarlo y plantear la hipótesis acción o acción estratégica.
2. Acción: Llevar a cabo dentro de la práctica docente la hipótesis establecida en la planificación.
3. Observación: La observación implica la recogida y análisis de datos relacionados con algún aspecto de la práctica profesional.
4. Reflexión: Constituye la fase que cierra el ciclo y da paso a la elaboración del informe, consiste en interpretar los datos recogidos en la observación.

2.2. Transposición didáctica

En este trabajo de enseñanza aprendizaje se presenta una serie de objetos que se estudian en el primer capítulo y que con ayuda de las nociones o ideas de anclaje que poseen los estudiantes, se organizan de manera que les permitan adquirir o reconstruir conocimientos. Chevallard propone la transposición didáctica como "el proceso a través del cual un contenido que ha sido designado como saber para enseñar, sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza. El trabajo que transforma de un objeto de saber a enseñar en un objeto de enseñanza, es denominado la transposición didáctica." [Chevallard, 1991].

2.3. Enfoque pedagógico

Teniendo en cuenta el enfoque pedagógico de la institución en donde se va a realizar la práctica y que el aprendizaje es un proceso activo de construcción más que de adquisición de conocimiento, se asumirá el aprendizaje significativo de Ausubel como referente para diseñar e implementar la unidad didáctica.

"Para Ausubel (1983) y Moreira (1997) el aprendizaje significativo es el proceso según el cual se relaciona un nuevo conocimiento o información, con la estructura cognitiva del que aprende de forma no arbitraria y sustantiva, o no literal. Esa interacción con la estructura cognitiva no se produce considerándola como un todo, sino con aspectos relevantes presentes en la misma, que reciben el nombre de subsumidores, o ideas de anclaje. Moreira afirma que la presencia de ideas, conceptos o proposiciones inclusivas, claras y disponibles en la mente del aprendiz es lo que dota de significado a ese nuevo contenido en interacción con el mismo." (Tomado de [Rodríguez, 2004])

La teoría del aprendizaje significativo de Ausubel, plantea que el aprendizaje del estudiante depende de la estructura cognitiva previa que se relaciona con la nueva información, es decir, el conjunto de conceptos e ideas que el estudiante posee en un determinado campo del conocimiento, así como su organización.

Ausubel define tres requisitos para generar aprendizaje significativo. (Adaptado de [Rodríguez, 2004])

1. Disposición del estudiante para relacionar el nuevo conocimiento con su estructura cognitiva.

2. El material debe ser presentado de acuerdo con la estructura cognitiva del estudiante.
3. Que existan ideas de anclaje o subsumidores adecuados en la estructura lógica del material.

2.4. Estructura curricular

En Colombia el trabajo realizado por el Grupo de Investigación Pedagógica del Ministerio de Educación Nacional (MEN) permitió establecer los Lineamientos Curriculares (1998) y Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2003), los cuales son la base para ser empleados en toda institución educativa en el país.

El MEN define competencia como "conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socioafectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores." [MEN, 2006] En este sentido se toma el aprendizaje por competencias como un aprendizaje significativo y comprensivo.

Los lineamientos Curriculares de Matemáticas tomados de [MEN, 1998] y [MEN, 2006] establecen:

- Cinco procesos generales de aprendizaje relacionados con la actividad matemática: formular y resolver problemas, modelar procesos y fenómenos de la realidad, comunicar, razonar, y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos.

- Cinco tipos de pensamiento matemático que se relacionan con ser matemáticamente competente: numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional. Sus respectivos sistemas conceptuales y simbólicos, con cuyo dominio se ejercita y refina el tipo de pensamiento: sistemas numéricos, sistemas geométricos, sistemas métricos o de medidas, sistemas de datos y sistemas algebraicos y analíticos.

- Tres contextos en el aprendizaje de las matemáticas, desde los cuales se construyen el sentido y significado de las actividades y los contenidos matemáticos: inmediato, institucional y sociocultural. Estos establecen conexiones con la vida cotidiana, con las demás actividades de la institución educativa, con las demás ciencias y con otros ámbitos de las matemáticas mismas.

El MEN vincula los procesos generales de la actividad matemática, los tipos de pensamiento matemático y los contextos en el aprendizaje de las matemáticas en un conjunto de Estándares Básicos de competencias en Matemática. Este debe entenderse en términos de procesos de desarrollo de competencias que se desarrollan gradual e integradamente, con el fin de ir superando niveles de complejidad creciente en el desarrollo de las competencias matemáticas a lo largo del proceso educativo.

El MEN distribuye los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas en cinco conjuntos de grados o "ciclos" y dentro de estos se clasifican en cinco columnas que corresponden a cada uno de los tipos de pensamiento y a los sistemas conceptuales y simbólicos asociados a él:

- Primero a tercero.
- Cuarto a quinto.
- Sexto a séptimo.
- Octavo a noveno.
- Décimo a undécimo.

El proceso de desarrollo de las competencias es gradual e integral y los estándares no son metas que se puedan delimitar en un tiempo fijo determinado, sino que estos identifican niveles de avance en procesos graduales que incluso no son terminales en el conjunto de grados para el que se proponen; por esto el presente trabajo, el cual permite evidenciar las propiedades de la multiplicación de números reales mediante el uso de las homotecias, se encuentra en el ciclo cuatro (octavo a noveno) de los estándares, pero también está relacionado con el ciclo tres (sexto a séptimo).

2.5. Estándares

A continuación se presentan los estándares básicos de competencias en matemáticas según cada pensamiento, para los grados sexto-séptimo y octavo-noveno. (Ver Tablas: **2-1**, **2-2**, **2-3** y **2-4**) (Tomado de [MEN, 2006])

Tabla 2-1.: Estándares clasificados dentro de los pensamientos numérico y espacial para sexto-séptimo.

Estándares básicos de competencias en matemáticas	
Sexto a séptimo	
Pensamiento numérico y sistemas numéricos	Pensamiento espacial y sistemas geométricos
Resuelvo y formulo problemas en contextos de medidas relativas y de variaciones en las medidas. Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida. Justifico la extensión de la representación polinomial decimal usual de los números naturales a la representación decimal usual de los números racionales, utilizando las propiedades del sistema de numeración decimal. Reconozco y generalizo propiedades de las relaciones entre números racionales (simétrica, transitiva, etc.) y de las operaciones entre ellos (conmutativa, asociativa, etc.) en diferentes contextos. Resuelvo y formulo problemas utilizando propiedades básicas de la teoría de números, como las de la igualdad, las de las distintas formas de la desigualdad y las de la adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación. Justifico procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones. Formulo y resuelvo problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, en diferentes contextos y dominios numéricos. Justifico el uso de representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa. Resuelvo y formulo problemas cuya solución requiere de la potenciación o radicación. Justifico la pertinencia de un cálculo exacto o aproximado en la solución de un problema y lo razonable o no de las respuestas obtenidas. Establezco conjeturas sobre propiedades y relaciones de los números, utilizando calculadoras o computadores. Justifico la elección de métodos e instrumentos de cálculo en la resolución de problemas. Reconozco argumentos combinatorios como herramienta para interpretación de situaciones diversas de conteo.	Represento objetos tridimensionales desde diferentes posiciones y vistas. Identifico y describo figuras y cuerpos generados por cortes rectos y transversales de objetos tridimensionales. Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte. Identifico características de localización de objetos en sistemas de representación cartesiana y geográfica. Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales. Resuelvo y formulo problemas usando modelos geométricos. Clasifico polígonos en relación con sus propiedades.

Tabla 2-2.: Estándares clasificados dentro de los pensamientos métrico, aleatorio y variacional para sexto-séptimo.

Estándares básicos de competencias en matemáticas		
Sexto a séptimo		
Pensamiento métrico y sistemas de medidas	Pensamiento aleatorio y sistemas de datos	Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos
Utilizo técnicas y herramientas para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas dadas. Resuelvo y formulo problemas que involucren factores escalares (diseño de maquetas, mapas). Calculo áreas y volúmenes a través de composición y descomposición de figuras y cuerpos. Identifico relaciones entre distintas unidades utilizadas para medir cantidades de la misma magnitud. Resuelvo y formulo problemas que requieren técnicas de estimación.	Comparo e interpreto datos provenientes de diversas fuentes (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas). Resuelvo y formulo problemas a partir de un conjunto de datos presentados en tablas, diagramas de barras, diagramas circulares. Interpreto, produzco y comparo representaciones gráficas adecuadas para presentar diversos tipos de datos. (diagramas de barras, diagramas circulares.) Uso medidas de tendencia central (media, mediana, moda) para interpretar comportamiento de un conjunto de datos. Conjeturo acerca del resultado de un experimento aleatorio usando proporcionalidad y nociones básicas de probabilidad. Uso modelos (diagramas de árbol, por ejemplo) para discutir y predecir posibilidad de ocurrencia de un evento. Reconozco la relación entre un conjunto de datos y su representación.	Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas). Reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación). Analizo las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables, de variación lineal o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos aritméticos y geométricos. Utilizo métodos informales (ensayo y error, complementación) en la solución de ecuaciones. Identifico las características de las diversas gráficas cartesianas (de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.) en relación con la situación que representan.

Tabla 2-3.: Estándares clasificados dentro de los pensamientos numérico, espacial, y métrico para octavo-noveno.

Estándares básicos de competencias en matemáticas		
Octavo a noveno		
Pensamiento numérico y sistemas numéricos	Pensamiento espacial y sistemas geométricos	Pensamiento métrico y sistemas de medidas
Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos. Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos. Utilizo la notación científica para representar medidas de cantidades de diferentes magnitudes. Identifico y utilizo la potenciación, la radicación y la logaritmación para representar situaciones matemáticas y no matemáticas y para resolver problemas.	Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas. Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales). Aplico y justifico criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas. Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.	Generalizo procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos. Selecciono y uso técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados. Justifico la pertinencia de utilizar unidades de medida estandarizadas en situaciones tomadas de distintas ciencias.

Tabla 2-4.: Estándares clasificados dentro de los pensamientos aleatorio y variacional para octavo-noveno.

Estándares básicos de competencias en matemáticas	
Octavo a noveno	
Pensamiento aleatorio y sistemas de datos	Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos
Reconozco cómo diferentes maneras de presentación de información pueden originar distintas interpretaciones. Interpreto analítica y críticamente información estadística proveniente de diversas fuentes (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas. Interpreto y utilizo conceptos de media, mediana y moda y explicito sus diferencias en distribuciones de distinta dispersión y asimetría. Selecciono y uso algunos métodos estadísticos adecuados al tipo de problema, de información y al nivel de la escala en la que esta se representa (nominal, ordinal, de intervalo o de razón). Comparo resultados de experimentos aleatorios con los resultados previstos por un modelo matemático probabilístico. Resuelvo y formulo problemas seleccionando información relevante en conjuntos de datos provenientes de fuentes diversas. (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas). Reconozco tendencias que se presentan en conjuntos de variables relacionadas. Calculo probabilidad de eventos simples usando métodos diversos (listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo). Uso conceptos básicos de probabilidad (espacio muestral, evento, independencia, etc.)	Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas. Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada. Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas. Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas. Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales. Analizo los procesos infinitos que subyacen en las notaciones decimales. Identifico y utilizo diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación. Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan. Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.

El desarrollo de la presente propuesta se relaciona directamente con los pensamientos numérico y espacial, con los sistemas numéricos y geométricos. La Tabla **2-5** presenta los estándares que se relacionan directamente con la propuesta.

Tabla 2-5.: Estándares relacionados directamente con la propuesta.

Estándares básicos de competencias en matemáticas	
Pensamiento numérico y sistemas numéricos	Pensamiento espacial y sistemas geométricos
Reconozco y generalizo propiedades de las relaciones entre números racionales (simétrica, transitiva, etc.) y de las operaciones entre ellos (conmutativa, asociativa, etc.) en diferentes contextos. Justifico procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones. Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.	Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte. Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales). Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.

La Tabla **2-6** presenta estándares que si bien no se desarrollan en la propuesta, pueden ser abordados a partir de ella.

Tabla 2-6.: Estándares que no se desarrollan en la propuesta, pero que en un futuro se pueden reforzar.

Estándares básicos de competencias en matemáticas
Resuelvo y formulo problemas usando modelos geométricos.
Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales.
Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.
Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.
Resuelvo y formulo problemas que involucren factores escalares (diseño de maquetas, mapas).

2.6. Población

La institución Educativa Departamental Domingo Savio se encuentra ubicada en la zona urbana del Municipio de Guasca Cundinamarca. Es un establecimiento educativo de carácter oficial, público y mixto, ofrece la educación formal en jornada única en los niveles de Preescolar, Básica Primaria, Básica Secundaria y Media, y la educación no formal SAT (Sistema de Aprendizaje Tutorial) en el calendario A. Aprovechando su posición geográfica, su historia, paisajes y lugares turísticos, ofrece en el nivel de educación media la formación de Técnico en Turismo.

La Institución Educativa cuenta aproximadamente con mil estudiantes, cuyo estrato socio económico oscila entre uno y tres, sus familias se dedican la mayor parte a los trabajos del campo como la ganadería y los cultivos de fresa, arándanos, flores, papa, zanahoria, entre otros.

La propuesta está dirigida a un grupo de 28 estudiantes, quienes conforman uno de los tres octavos con los que cuenta la institución en el año 2018 y sus edades oscilan entre los 13 y 17 años.

3. Descripción y análisis

En esta sección se presentan los objetivos, el desarrollo y los resultados de cada una de las actividades implementadas en la unidad didáctica. En la mayoría de las actividades se encuentra un resumen, el cual sirve de guía para los estudiantes, no obstante se explica el resumen antes de ser entregada cada actividad. Esta propuesta fue dirigida a 28 estudiantes de grado octavo de la Institución Educativa Departamental Domingo Savio, ubicado en Guasca Cundinamarca.

3.1. Actividad 1. Conceptos básicos.

Nombre: Conceptos básicos. (Anexo 1)
Objetivo: Indagar sobre los conceptos básicos en geometría, necesarios para el desarrollo de la propuesta.

Para el desarrollo de esta actividad se dispuso un tiempo de 2 horas. En los primeros 40 minutos los estudiantes contestaban las preguntas indicadas en la actividad en su respectiva hoja. En los siguientes 80 minutos se socializaba pregunta por pregunta, de manera que los estudiantes justificaran sus resultados, para luego llegar a los resultados esperados.

En esta actividad se buscaba hacer un diagnóstico de algunos conceptos básicos de geometría y que a la vez los estudiantes evidenciaran y aclararan dichos conceptos. Estos son:

1. Por un punto del plano pasan infinitas rectas.
Entre las respuestas de los estudiantes se encontraron: 2 rectas, 4 rectas, varias, muchas e infinitas. (Ver Figura 3-1)

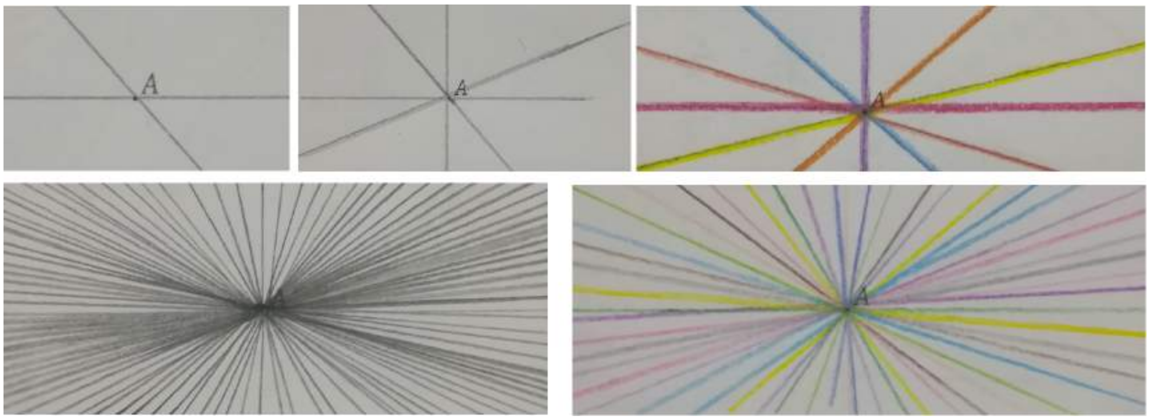


Figura 3-1.: Rectas que pasan por un punto.

Dos estudiantes presentaron el plano pintado. (ver Figura 3-2)

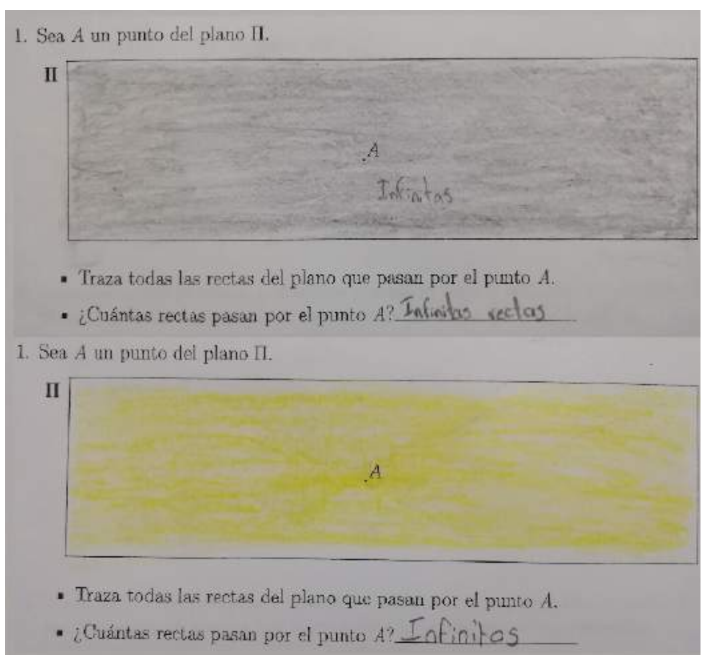


Figura 3-2.: Rectas que pasan por un punto.

Se les preguntó a los demás estudiantes ¿qué opinan de la respuesta de sus dos compañeros? a lo cual un estudiante respondió: "está mal, porque tocaba trazar todas las rectas que pasan por el punto A y no trazaron rectas, solo colorearon o pintaron el plano", entonces se les dio la palabra a los dos estudiantes que pintaron el plano, el primero manifestó “pinté el plano porque por un punto pasan infinitas rectas, lo cual hace que se llene el plano”; el segundo respondió “lo mismo que mi compañero, además nunca acabaría de hacer todas la rectas, entonces era más fácil pintarlo”. Con lo anterior, se aclaró a los demás estudiantes la respuesta de sus dos compañeros, de tal manera que compararan los dibujos y notaran que si trazáramos una recta por A, luego otra y así sucesivamente, se completaría el plano. (Ver Figura 3-1)

2. Por dos puntos distintos del plano pasa una y solo una recta.
Entre las respuestas de los estudiantes: 1 recta, 2 rectas y 3 rectas. (Ver Figura 3-3)

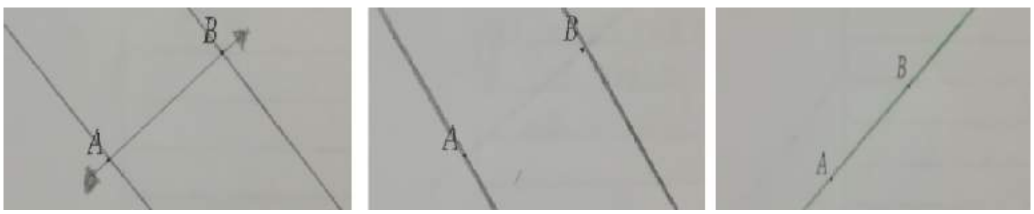


Figura 3-3.: Rectas que pasan por dos puntos.

Se evidencia una errónea interpretación de la pregunta, para lo cual se les pide volver a leer la pregunta.
¿Cuántas rectas pasan a la vez por los puntos A y B?
Algunos estudiantes cambian de respuesta afirmando que solo una recta, otros manifiestan no entender. Se les pregunta ¿qué entienden por “a la vez”? Un estudiante contesta “no tuve en cuenta esta parte de la pregunta, se me pasó”, otro estudiante contestó “que se refiere a que al mismo tiempo la recta pase por los dos puntos”.
En la pregunta: Si dos rectas m y l pasan por los puntos A y B, ¿qué se puede concluir con respecto a las dos rectas?, la mayoría de los estudiantes contestaron que las rectas son la misma. Luego, para aclarar dudas se realizó la construcción. (Ver Figura 3-4)

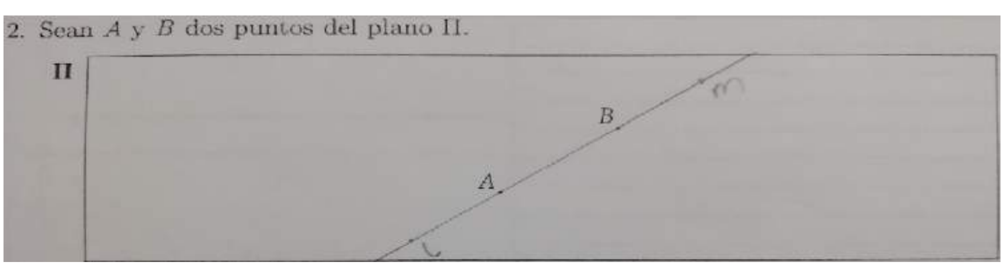


Figura 3-4.: Rectas que pasan por dos puntos.

3. Puntos colineales.
La mayoría de los estudiantes no tenían claro, o no recordaban, el concepto de colinealidad.
4. Rectas secantes y paralelas.
La mayoría de los estudiantes identifican las rectas secantes y paralelas.
5. Semejanza de triángulos.
Muy pocos estudiantes usaron la proporcionalidad existente entre las longitudes de los lados correspondientes de los triángulos, o las propiedades del teorema de Tales.
6. Uso de regla y escuadra para construir rectas paralelas.
La mayoría de los estudiantes no tenían idea de cómo trazar rectas paralelas, dada una recta y un punto cualquiera, usando la regla y la escuadra.

Respuestas Actividad 1. (Ver Tabla: **3-1**)

Tabla 3-1.: Respuestas actividad 1.

Pregunta	Correctas %	Incorrectas %	No resueltas %	Total de estudiantes
1	64, 29	35, 71	0	28
2(a)	85,71	14,29	0	28
2(b)	92,86	7,14	0	28
3(a)	82,14	17,86	0	28
3(b)	75	25	0	28
3(c)	42,86	57,14	0	28
3(d)	50	50	0	28
4	28,57	50	21,43	28
5	7,14	28,57	64,29	28

Evaluación: Los estudiantes argumentaban sus respuestas, muchas veces con los dibujos realizados, cuando escuchaban a los compañeros cambiaban de respuesta, algunos analizaban lo que sus compañeros decían y refutaban o complementaban. En algunos estudiantes se evidenciaba una errónea interpretación de las preguntas, lo cual llevó a repetir la lectura de algunas preguntas. La actividad evidenció mayores falencias en los conceptos básicos 3, 5 y 6 nombrados anteriormente, lo que permitió tener ideas claras de qué reforzar.

3.2. Actividad 2. Rectas paralelas - Proporción.

Nombre: Rectas paralelas - Proporción. (Anexo 2)
Objetivos:
- Construir rectas paralelas con el uso de regla y escuadra.
- Reconocer propiedades y relaciones geométricas mediante el teorema de Tales.

Para desarrollar la actividad 2 se tuvieron en cuenta tres momentos:

I. Se realizó un repaso sobre rectas paralelas y puntos colineales, seguido de una explicación paso a paso de la construcción de rectas paralelas con regla y escuadra. Para que los estudiantes se familiarizaran con los pasos a seguir para construir rectas paralelas, se les pidió marcar en una hoja blanca tres puntos A, B y C distintos y no colineales, trazar la recta AB, luego una recta paralela a la recta AB que pasara por C. Se hizo la respectiva construcción para revisar los errores y aciertos en cada construcción de los estudiantes. (Ver Figura 3-5)

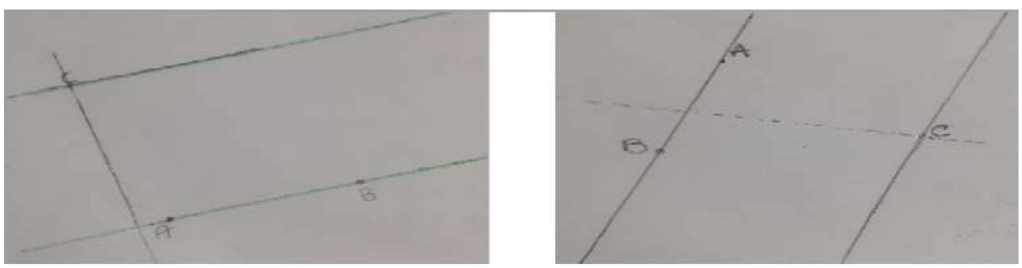


Figura 3-5.: Construcción rectas paralelas.

II. Se procede a explicar razón y proporción para dar paso al teorema de Tales.

III. Se entrega el taller correspondiente a la actividad 2, en el cual se encuentra un breve resumen de los dos primeros momentos (guía para los estudiantes) y una serie de ejercicios en los que intervienen construcciones con rectas paralelas y triángulos, con el fin de evidenciar el teorema de Tales y algunas propiedades geométricas (puntos medios de los lados de un triángulo, razones y semejanza).
En el desarrollo del primer ejercicio los estudiantes presentaron dificultades en el uso de regla y escuadra, los cuales se fueron corrigiendo a medida que se realizaban más ejercicios. En vista de las dificultades, se propuso un ejercicio adicional:
Dibujar tres puntos P, Q y R distintos y no colineales, trazar la recta PQ en color

verde, trazar una recta por el punto R que fuera paralela a la recta PQ en color verde, luego trazar la recta QR en color azul y finalmente trazar una recta por el punto P, que fuera paralela a la recta QR, en color azul. (Ver Figura 3-6)

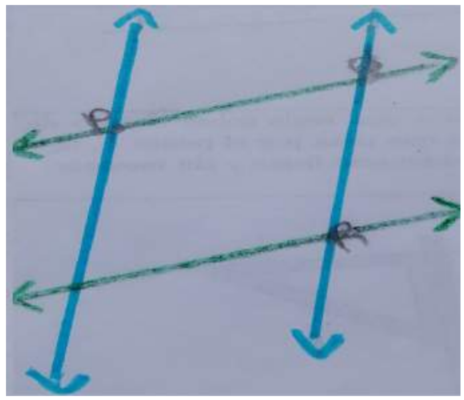


Figura 3-6.: Construcción rectas paralelas.

Una vez terminada la construcción se les preguntó a los estudiantes:
- ¿Qué figura se formó?
Los estudiantes contestaron: "un cuadrilátero", "un rectángulo", "un cuadrado".

- ¿Por qué a todos no les dio la misma figura?
Varios estudiantes contestaron que les había quedado mal la construcción.

- ¿Cómo sabemos cuál es la figura correcta?, a lo que un estudiante contestó "revisando que cada paso de la construcción esté bien", se les dijo que lo hicieran, luego un estudiante comentó "profe, ya sé por qué la figura nos da diferente, todos colocamos los puntos en el plano en diferentes lugares, lo que hace que la figura cambie y por eso a algunos compañeros les da un cuadrilátero, un rectángulo o un cuadrado, en fin, a todos nos debe dar un cuadrilátero".

- ¿Qué características tiene el cuadrilátero construido?
Un estudiante contestó "los lados de la figura que tienen el mismo color son paralelos".
Otro estudiante contestó "los lados contrarios son iguales".
Se les pidió a los estudiantes comprobar lo que sus compañeros afirmaban. Algunos estudiantes apoyaban lo que sus compañeros contestaron, otros manifestaban que midieron los lados opuestos de la figura y que no les daba igual. (Ver Figura 3-7)

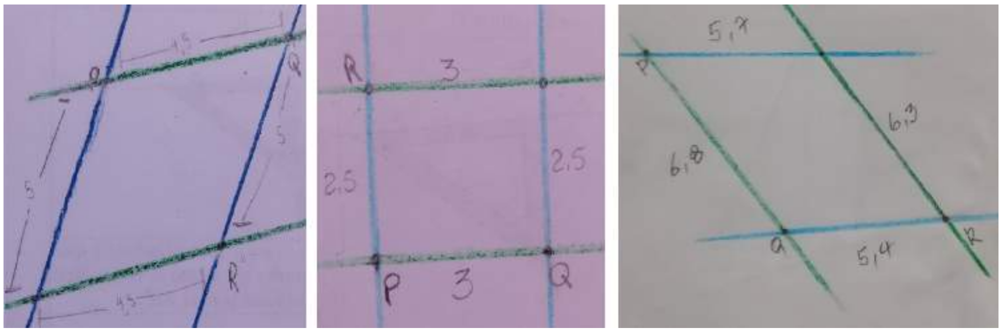


Figura 3-7.: Construcción rectas paralelas.

- ¿Por qué algunos cuadriláteros no cumplen estas características?
Algunos estudiantes admitieron que les faltó precisión, o que tuvieron errores en la construcción de las rectas paralelas.
Para terminar el ejercicio, se recordó a los estudiantes que los cuadriláteros construidos reciben el nombre de paralelogramos, puesto que sus lados opuestos son paralelos y que una propiedad de estos, es que sus lados opuestos son congruentes. Por tal razón, cuando algunos estudiantes midieron los lados de los cuadriláteros, notaron que los lados opuestos no medían lo mismo; esto se debía a que un par o dos pares de los lados opuestos no eran paralelos, por lo tanto las construcciones tenían algunos errores.

En el segundo ejercicio la mayoría de estudiantes logró relacionar los valores indicados con la ilustración del teorema de Tales y encontrar los valores desconocidos de z y k. (Ver-Figura 3-8)

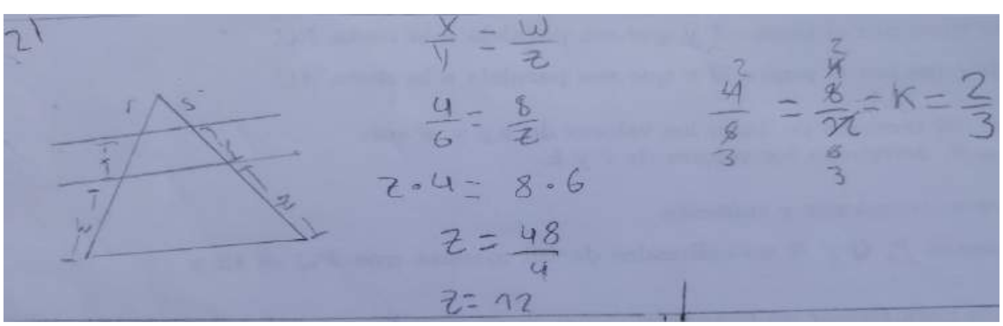


Figura 3-8.: Teorema de Tales.

En los ejercicios 3, 4 y 5 algunos estudiantes tuvieron problemas para realizar la construcción, debido a la falta de comprensión de los enunciados. Se les explicó cada paso haciendo énfasis en cada frase, de tal manera que fueran entendiendo. Algunos estudiantes evidenciaron dificultades para medir con la regla, ejemplo de esto, era que para medir 8 unidades ubicaban la regla desde el número 1 y marcaban donde estaba el número 8, no se percataban que en verdad había 7 unidades. Se corrigió el error dando varios ejemplos, uno de ellos fue que dieran 3 pasos, 4 pasos... en línea recta y que se percataran desde donde iniciaron y donde terminaron, luego que observaran a sus compañeros y a sí mismos, que cuando daban un paso no quedaban en el mismo lugar donde iniciaban y que si relacionan un paso con una unidad, entonces el no moverse indica no dar pasos, es decir 0 unidades, de esta manera se logró que algunos estudiantes entendieran que para medir con la regla, se debe iniciar desde el número 0.

Con la construcción realizada por los estudiantes se logró relacionar segmentos proporcionales, comprender el teorema de Tales y evidenciar algunas propiedades geométricas, como es el caso de la Figura 3-9, tomada de la construcción de un estudiante, donde $PQ = 12$ y $QR = 8$, S punto medio del lado PQ, las rectas n y m que contienen a S, paralelas a los lados PR y QR respectivamente, además las rectas n y m se intersecan con los lados QR y PR en U y T respectivamente. Luego, con la ayuda de la regla se midieron los segmentos ST, TU, US, PR, PT y RU para completar los datos de la Figura 3-10.

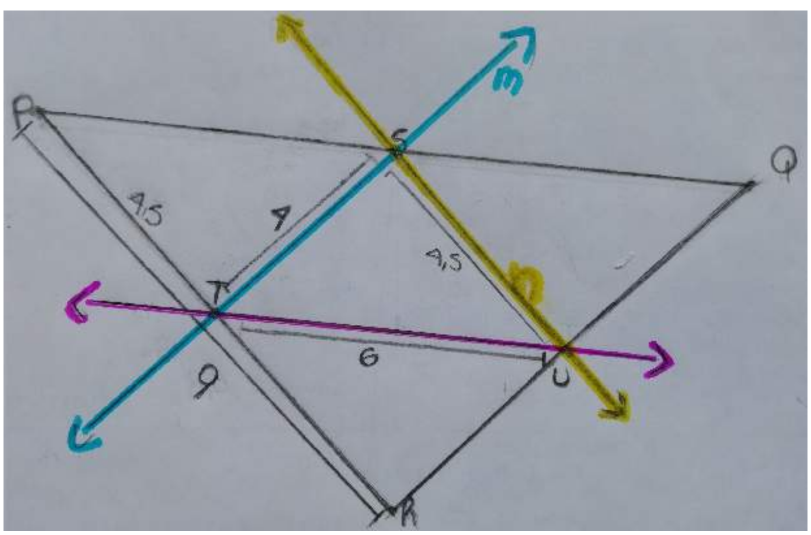


Figura 3-9.: Relación entre segmentos de un triángulo.

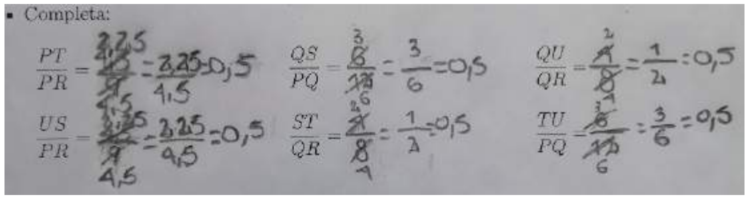


Figura 3-10.: Razones entre segmentos de un triángulo.

Evaluación: Con el presente taller se logró evidenciar:

* Dificultades en:
- El uso de escuadra y regla para construir rectas paralelas. Se asignaron otros ejercicios como refuerzo, los cuales se desarrollaron inmediatamente.
- Uso de la regla para medir segmentos. A partir de ejemplos se fueron corrigiendo los errores.
- La comprensión e interpretación de los enunciados, por lo tanto unos estudiantes avanzaban y sacaban conclusiones más rápido que otros. Se trabajó haciendo énfasis en cada paso de las construcciones.

* Propiedades y relaciones geométricas como:
- Por un punto exterior a una recta dada, pasa una única recta paralela a esta.
- Semejanza entre triángulos, al comparar longitudes entre los lados correspondientes de dos triángulos.
- El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y es la mitad de la longitud de este.
- Teorema de Tales.

3.3. Actividad 3. Homotecia 1.

Nombre: Homotecia 1. (Anexo 3)
Objetivo: Reconocer e identificar las características de una homotecia.

Antes de explicar lo que es una homotecia, se hablará de las transformaciones del plano y se darán algunos ejemplos. Una transformación del plano es una función que hace corresponder a cada punto A de Π exactamente un punto A' de Π. (Ver Figura 3-11)

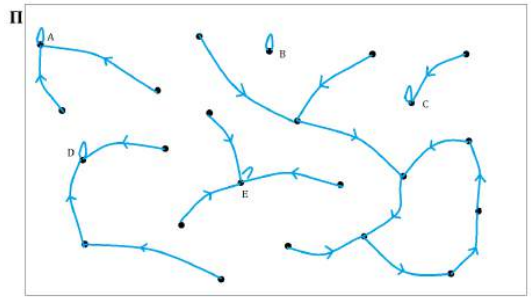


Figura 3-11.: Transformación del plano Π.

Luego, se menciona que dado un punto cualquiera del plano Π, al que podemos llamar C, una homotecia h de centro C es una transformación que va del plano Π al plano Π, determinada por las flechas (C, C) y (P, Q), como se muestra en la Figura 3-12. Luego se explica cómo a partir de estas dos flechas se obtienen las demás flechas de h.

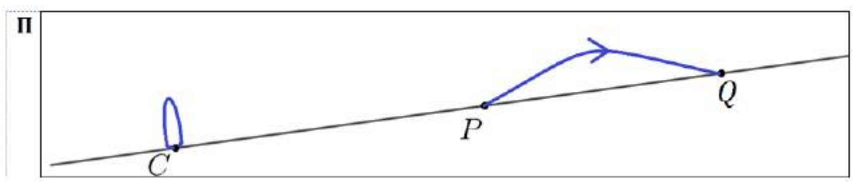


Figura 3-12.: Homotecia de centro C.

Hubo dificultad por parte de los estudiantes para entender la representación, pues no se habían trabajado antes transformaciones en el plano, por lo tanto se aclara que la primera flecha indica que la transformación del punto C al aplicar la homotecia h es el mismo punto C, la flecha que inicia en C y termina en C se llama bucle, la segunda indica que la transformación del punto P al aplicar h es el punto Q (la flecha inicia en P y termina en Q) y se aclara que el centro de la homotecia h y los puntos P y Q deben ser colineales.

Se hace entrega del taller correspondiente a la actividad 3. Para que los estudiantes reconozcan fácilmente una homotecia se realiza el primer ejercicio: Dada una homotecia, determinar el centro, el bucle y las flechas, como se muestra por ejemplo, en la Figura 3-13.

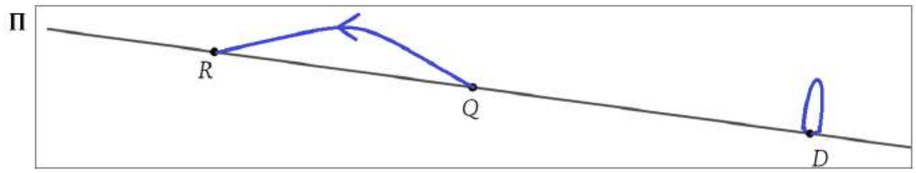


Figura 3-13.: Homotecia de centro D.

La mayoría de los estudiante no tuvo problemas en identificar el centro, el bucle y las flechas, pero si tuvieron dificultad con la notación, por lo tanto se aclaró que si la imagen de un punto P al aplicar la homotecia h es el punto Q, se puede escribir $h(P) = Q$ y entonces las flechas $(P, h(P))$ y (P, Q) son la misma.

En el segundo ejercicio propuesto se dieron las instrucciones para hallar la imagen de un punto X de Π por una homotecia h. Los estudiantes ubicaban en el plano un punto X que no estuviera sobre la recta CP, luego siguieron los pasos indicados, se ayudó a los estudiantes que evidenciaron dificultades, de manera que se corrigieran los errores, para lograr hallar la imagen del punto X por la homotecia h. En la Figura 3-14 se muestran algunos resultados obtenidos por los estudiantes.

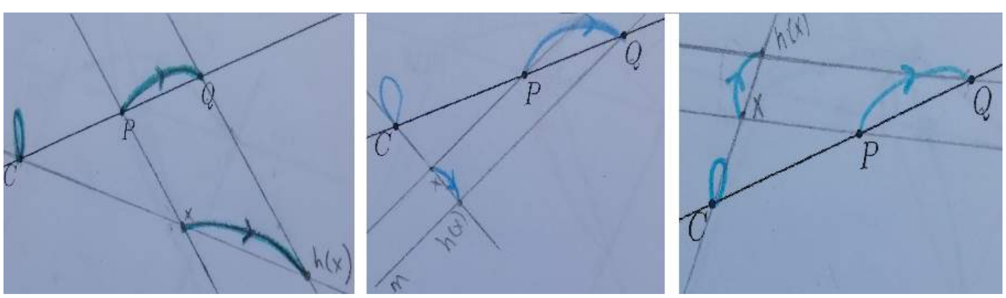


Figura 3-14.: Imagen de un punto X por la homotecia h.

En el tercer ejercicio se proponen 5 casos de homotecias, donde la intención de estos es practicar y observar los resultados, para luego socializar con los compañeros. (Ver Figura 3-15)

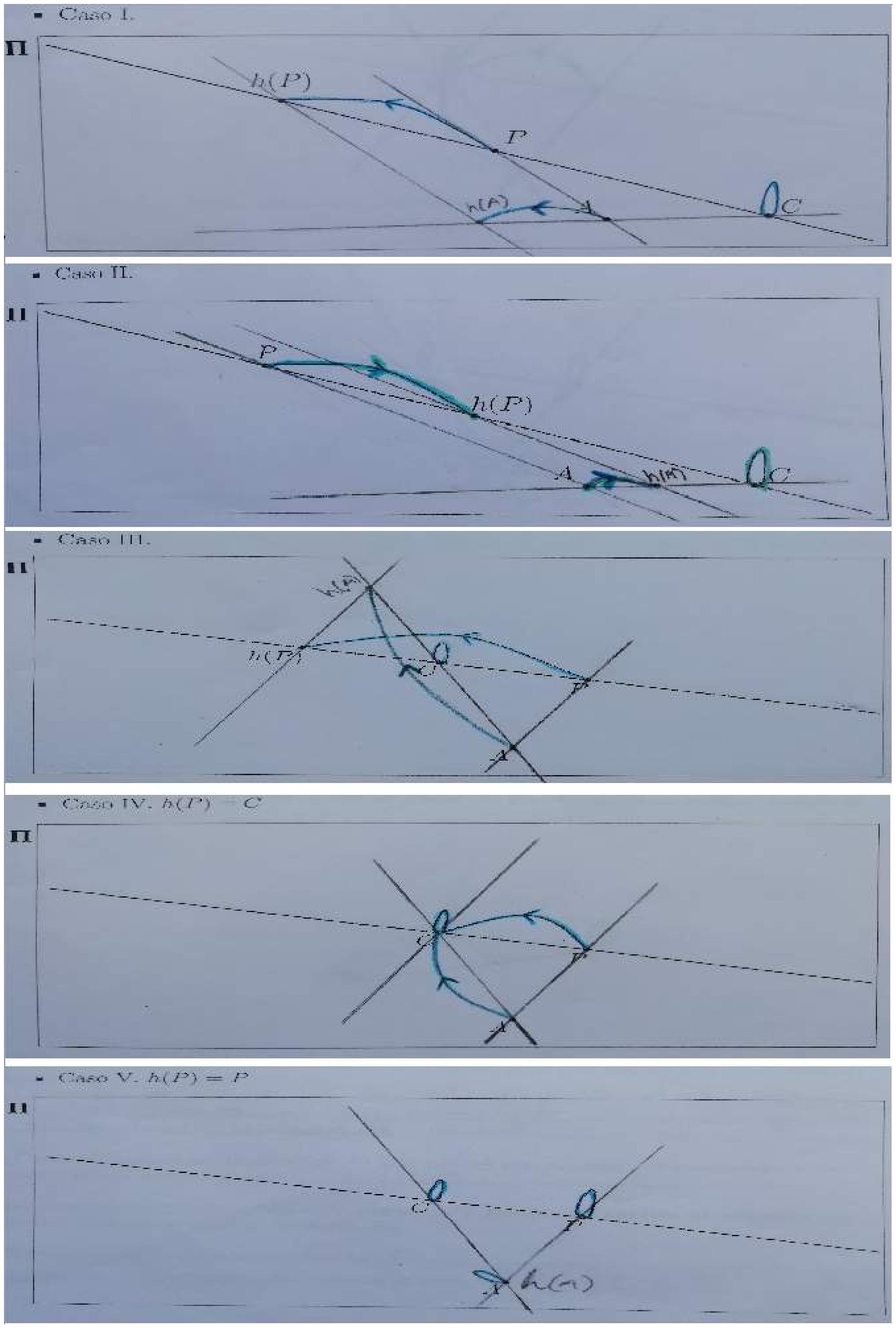


Figura 3-15.: Imagen de un punto A por la homotecia h, según cada caso.

En el quinto caso de la Figura 3-15 un estudiante preguntó “profe ¿cuál es el centro? pues hay dos bucles, uno en C y otro en P”, un compañero contestó “el punto C, pues en todos los casos C es el centro”, se les indicó a los estudiantes que tomaran cualquier punto de los dos como centro y que compararan con los compañeros el resultado. En este proceso se evidenciaron algunas dificultades para encontrar la imagen de A, por ejemplo, los estudiantes que tomaron C como centro, trazaban las rectas CA y PA, pero al trazar la recta m que debe ser paralela a PA y pasar por la imagen de P, la trazaban por C ignorando que $h(P) = P$, es decir, no se percataban que la recta m era la misma recta PA (ver Figura 3-16).

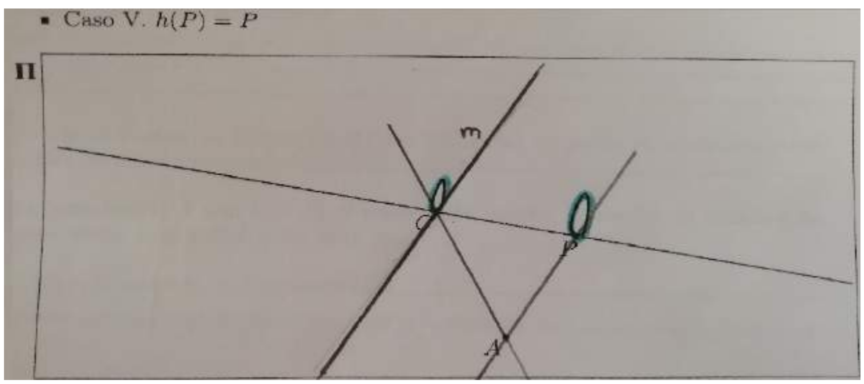


Figura 3-16.: Error al hallar la imagen de A por h.

Se les dijo que tuvieran en cuenta la definición de rectas paralelas, sin embargo se les recordó que dos rectas son paralelas si son iguales o no tienen puntos en común, entonces se les indicó que trazaran una recta por $h(P)$, es decir por el punto P, que fuera paralela a PA, de esta manera los estudiantes poco a poco se percataron que la recta m era la misma recta PA.

Se les preguntó por la imagen de A tomando a P como centro, varios estudiantes contestaron “da el mismo resultado”, “también da bucle”, “no importa cual de los dos puntos sea el centro, pues da el mismo resultado”.

Realizando la segunda parte del quinto caso, donde A se encuentra en la recta CP, se obtuvieron diferentes resultados, entre estos los de la Figura 3-17.

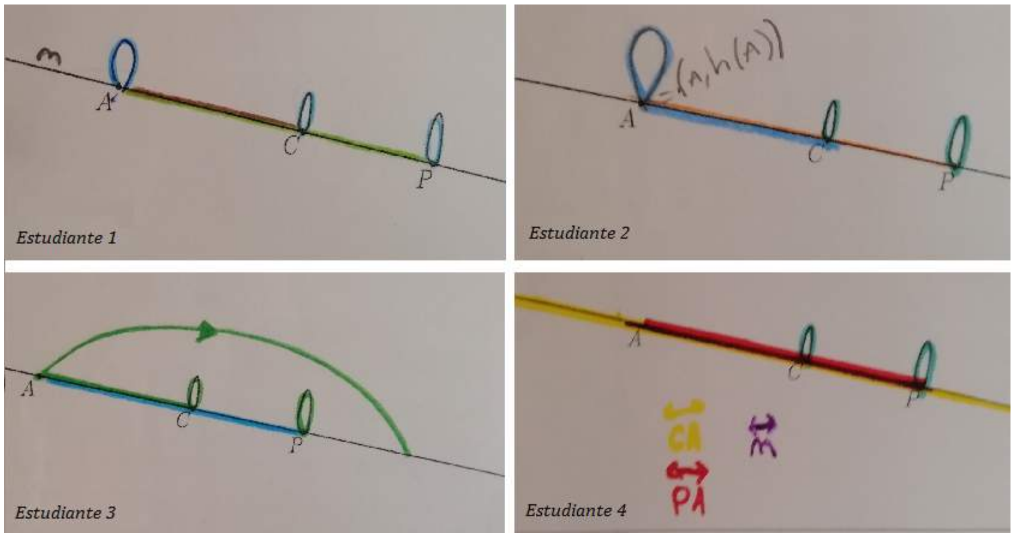


Figura 3-17.: Imagen de A por h.

Se les preguntó a los estudiantes por sus respectivos resultados, los cuales manifestaron:
E1. La recta m coincidió con las rectas AP y AC, entonces hice un bucle como en el anterior.
E2. Tracé las rectas según las instrucciones y como en el ejercicio anterior dio bucle, pensé que en este también.
E3. Tracé las rectas CA y PA pero no sabía donde terminaba la flecha.
E4. Al trazar las rectas CA, PA y m resultaron ser las mismas o iguales, entonces la recta m se interseca con la recta CA en muchos puntos, entonces no se a donde trazar la flecha.
Se socializaron los resultados y junto con los estudiantes se revisaron las instrucciones de cómo hallar la imagen de un punto por la homotecia h. Llegaron a la conclusión de que la flecha podía terminar en cualquier punto donde se intersecaban las rectas m y CA, como se muestra en la Figura 3-18.

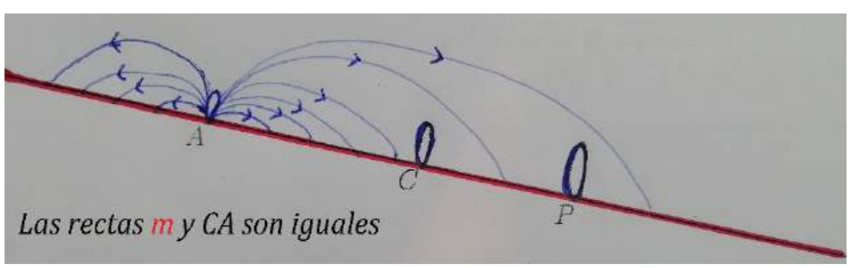


Figura 3-18.: Imagen de A por h.

Algunos estudiantes coincidieron en decir “salen muchas flechas de A” y se preguntaban ¿cuál es la flecha verdadera?, ¿todas son válidas o ninguna?, entonces se les recordó que la homotecia es una transformación en el plano, una función que hace corresponder a cada punto A exactamente un punto A' del plano, y que si todas las flechas fueran válidas, entonces al punto A no le correspondería exactamente un punto sino muchos y si ninguna es válida, entonces no tendría imagen y esto lleva a una contradicción, por lo tanto una de todas esas flechas es la verdadera. De tarea se les dejaron dos preguntas:

- ¿Cuál es la flecha que indica la imagen de A?
- ¿Cómo encontrar la flecha que indica la imagen de A?

Los estudiantes insistieron en que les diera la respuesta, se les dijo que primero realizáramos el siguiente ejercicio.

En el cuarto ejercicio se propone ubicar un punto A en cualquier parte del plano y hallar su imagen al aplicar la homotecia h, tal que $h(P) = P$ (ver caso V del ejercicio 3, Figura 3-15).
Los estudiantes ubicaron el punto A en el plano, luego determinaron la imagen correspondiente por la homotecia h (ver Figura 3-19).

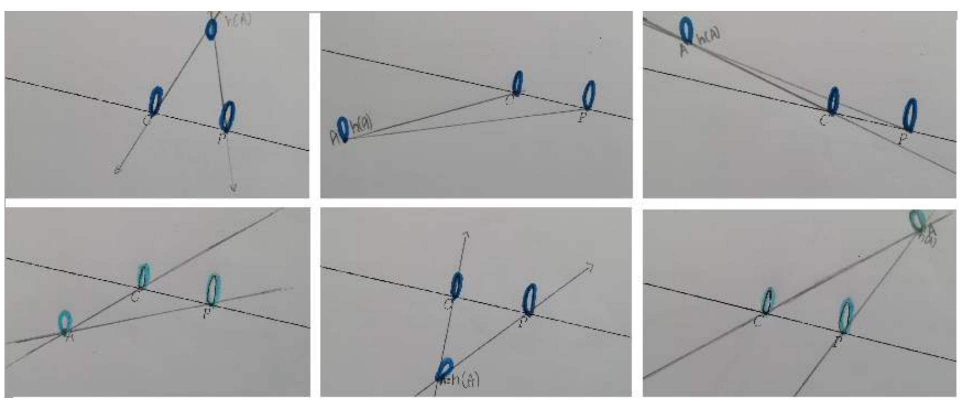


Figura 3-19.: Imagen por h del punto A.

Una vez que terminaron de hallar las imágenes, sin decirles, empezaron a comparar con sus compañeros dónde ubicaron el punto A y cuál fue la imagen respectiva al aplicar h.
Sin preguntarles, los estudiantes llegaron a una conclusión: “no importa donde ubiquemos al punto A, siempre va a dar bucle”, entonces se les preguntó:

- ¿Qué característica tiene la homotecia h?
Los estudiantes contestaron “todos son bucles”.

- ¿Por qué todos son bucles? Un estudiante contestó “las dos flechas son bucles”.

- ¿Cómo se denotan las dos flechas?
Varios estudiantes contestaron (C, C) y (P, P).

- ¿Cómo se denota la imagen de un punto P por la homotecia h?
Varios estudiantes contestaron $h(P)$.

Con lo anterior, se procedió a darle un nombre específico a este tipo de homotecia:
La homotecia h, con $h(P) = P$ para cada punto P, recibe el nombre de homotecia identidad y se nota 1_{Π}.

Con lo realizado anteriormente se les recordó la primera pregunta que quedó pendiente para la tarea:
¿Cuál es la flecha que indica la imagen de A?
Los estudiantes contestaron que la flecha verdadera era el bucle (A, A), se les preguntó ¿por qué?, varios estudiantes coincidieron en contestar “que en el ejercicio 4 no importaba donde se ubicaba el punto A, siempre daba bucle”.

La segunda pregunta de la tarea quedó pendiente, aunque algunos estudiantes motivados, terminando la clase se quedaron para saber cómo era la construcción para encontrar el bucle. Se les dijo que pensaran cómo podría ser y que la próxima clase contestaríamos la pregunta.

Evaluación: La definición de homotecia presentada según la propuesta de Georges Papy, creó expectativas en los estudiantes, por ser algo nuevo para ellos. Se trabajó la definición con la comprensión de cada frase y la relación con los conceptos previamente estudiados, lo cual permitió crear seguridad en los estudiantes. El planteamiento de los diferentes ejercicios para determinar la imagen de un punto por la homotecia h, permitió reconocer en algunos estudiantes dificultades y a la vez superarlas, como por ejemplo: reconocer que las rectas que son iguales son paralelas, la construcción de rectas paralelas con regla y escuadra y la comprensión de enunciados. Los estudiantes mostraban una motivación por desarrollar los ejercicios, lo cual facilitó el proceso y a la vez generó un espacio para opinar y socializar resultados.

3.4. Actividad 4. Homotecia 2.

Nombre: Homotecia 2. (Anexo 4)
Objetivo: Determinar la imagen de diferentes puntos por una homotecia.

Se inicia la actividad recordando las características de una homotecia y de la homotecia identidad. Luego los estudiantes quieren resolver la segunda pregunta de la tarea, que había quedado pendiente en la clase pasada: ¿cómo encontrar la flecha que indica la imagen de A? según la Actividad 3, cuando A se encuentra en la recta CP y se les responde que muy pronto lo resolverán.
Se procede a explicar e ilustrar los pasos para determinar la imagen por una homotecia h de un punto D que está en la recta CP y luego se entrega el taller correspondiente.

Algunos estudiantes manifiestan "no entiendo", "estoy perdido", se les invita a leer el resumen en donde está la explicación paso a paso, esto con el ánimo de que los estudiantes comprendan los enunciados. Varios de estos estudiantes dicen "sigo sin entender", por lo tanto se procede a leer la explicación de la guía con ellos y a explicar cada enunciado que se encuentra en el resumen, luego se les invita a resolver los ejercicios propuestos. Durante el desarrollo de la actividad se recorre el aula de clase con el fin de revisar, guiar y aclarar dudas en el proceso de los estudiantes.

El primer ejercicio consta de seis casos, en donde se debe hallar la imagen del punto D por la homotecia h.

En la Figura 3-20 se observan dos resultados del Caso I, el primero con error y el segundo correcto.

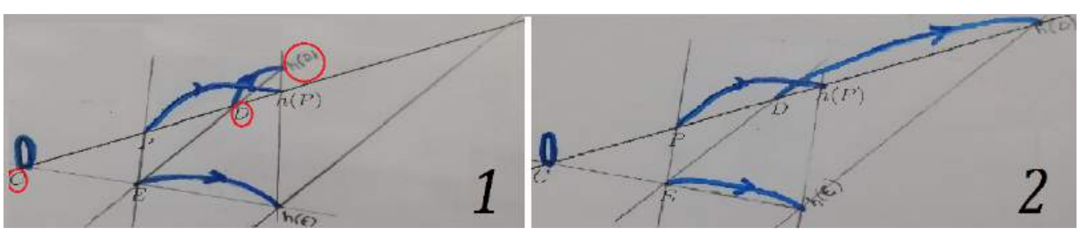


Figura 3-20.: Imagen de D por la homotecia h. Caso I.

En la construcción 1 de la Figura 3-20, el estudiante ubicó el punto $h(D)$ en la intersección de dos rectas, las cuales no eran las correctas, se le invitó a que encontrara el

error, revisando las instrucciones para hallar la imagen de un punto por una homotecia y la definición de una homotecia. Luego de que el estudiante encontrara el error, se procedió a socializar con los compañeros de modo de que ellos también encontraran el error. La mayoría de estudiantes encontraron el error, sin embargo, se les mencionó la importancia de tener claras las instrucciones para determinar la imagen de un punto por una homotecia y revisar que se cumpla la definición de homotecia, que por ejemplo en este caso, los puntos C, D y $h(D)$ deben ser colineales. La construcción 2 es la imagen correcta de D por la homotecia h.
Al desarrollar los Casos del II al VI, además de presentarse errores similares a los mencionados anteriormente se encuentran los siguientes:

- Realizan la construcción correctamente, pero se equivocan al trazar las flechas.
- Realizan las construcciones sin tener en cuenta cuál es el punto y cuál es su imagen al aplicar la homotecia.
- Falta precisión en el trazo de las rectas paralelas.

La Figura 3-21 presenta los diferente errores y su respectiva corrección en rojo.

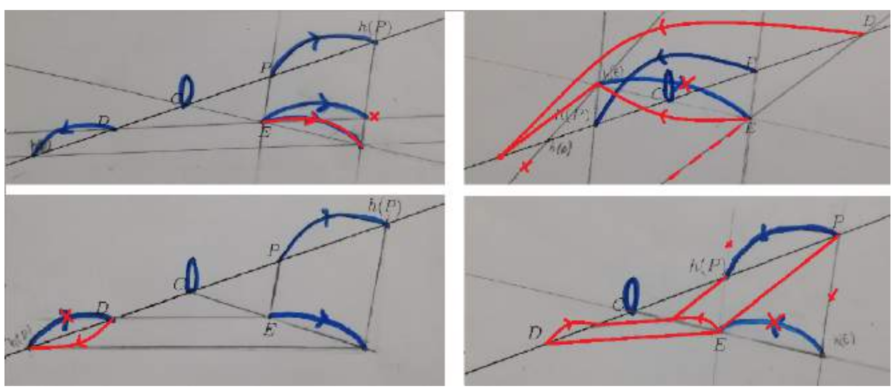


Figura 3-21.: Imagen de D por la homotecia h. Casos (II-VI).

En el segundo ejercicio se planteó determinar las imágenes de varios puntos del plano por las homotecias f, k, j, h y u, esto con el fin de practicar, observar y sacar conclusiones.

En la construcción de las imágenes de los puntos por la homotecia f, la mayoría de los estudiantes cometieron un error al determinar la imagen del punto que está sobre la recta CP el cual se muestra en la Figura 3-22.

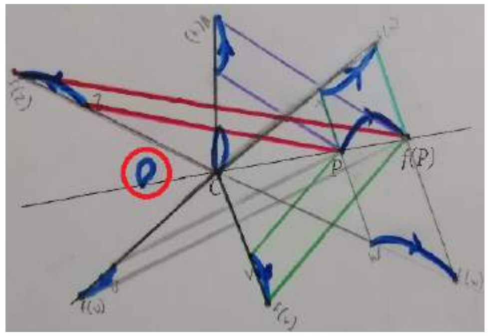


Figura 3-22.: Error de la imagen de un punto por la homotecia f.

Se les preguntó:

- ¿Por qué la imagen de ese punto es el mismo punto, es decir, la flecha es un bucle?
Varios estudiantes hacían alusión al ejercicio de la Actividad 3 donde quedó pendiente resolver la segunda pregunta de la tarea, diciendo “el punto A que está en la misma recta CP dio un bucle”, se les recordó que no habían mostrado cómo construir ese resultado.

- ¿Qué homotecia es la del ejercicio anterior (Actividad 3)?
Algunos estudiantes respondieron “la que todos son bucles”.

- ¿Qué nombre recibe esa homotecia?
Se demoraron un poco en responder “homotecia identidad”.
- ¿La homotecia f es la homotecia identidad, es decir todos son bucles?
Respondieron “no” y se percataron de que la imagen del punto que está en la recta CP por la homotecia f no es el mismo punto, es decir no hay un bucle.

Entonces, los estudiantes preguntaron ¿cómo se halla la imagen de ese punto?, se les respondió, “eso hemos venido haciendo, y esa es la pregunta 2 de la tarea que quedo pendiente, recuerden el resumen de esta actividad y los ejercicios del item 1”. Con lo anterior se evidenciaba que cuando empezaron a determinar las imágenes de varios puntos habían olvidado que la actividad se había iniciado hallando imágenes de puntos que estaban en la misma recta CP.

Los estudiantes revisaron los ejercicios anteriores y lograron determinar la imagen del punto que está en la recta CP. Al observar que los compañeros utilizaron diferentes flechas para determinar la imagen de este punto y que el resultado fue el mismo, empezaron a sospechar que podían utilizar cualquier flecha y siempre iba a dar el mismo resultado, esto lo fueron evidenciando a medida que determinaban las imágenes de varios puntos por las homotecias k, j, h y u como se muestra en la Figura 3-23.

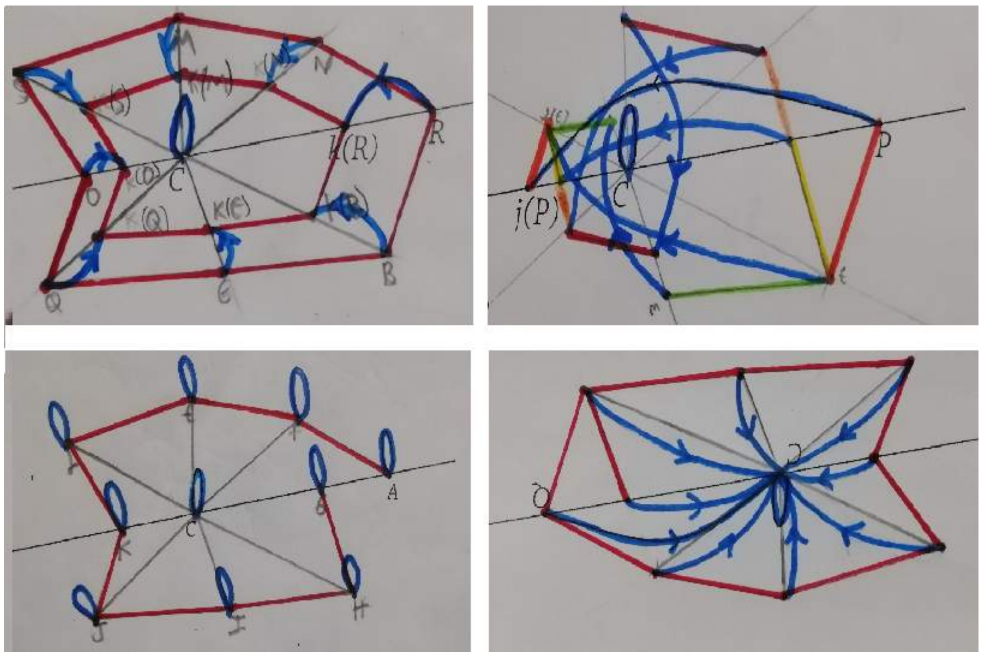


Figura 3-23.: Diferentes homotecias.

Al terminar los ejercicios propuestos se invitó a los estudiantes a observar las construcciones y a establecer conclusiones.

Los estudiantes lograron establecer que siempre que la flecha va hacia el centro, es decir la imagen de un punto por una homotecia es el centro C, entonces todas las imágenes de los puntos por esta homotecia van a ser C. Esta homotecia recibe el nombre de homotecia constante a C.

Evaluación: La actividad logró que los estudiantes practicaran, corrigieran errores y construyeran imágenes de varios puntos por diferentes homotecias, además se resolvió la pregunta pendiente 2 (tarea) la cual fue fundamental para iniciar el proceso de evidenciar, que una homotecia no son solo dos flechas si no infinitas, pero que solo basta con dos flechas para determinar la homotecia.
Se reforzó la homotecia identidad y se definió la homotecia constante.

Se pueden fusionar las Actividades 3 y 4 para evitar los inconvenientes que los estudiantes tuvieron al considerar la imagen de puntos en la recta CP.

3.5. Actividad 5. Homotecia-Figuras.

Nombre: Homotecia-Figuras. (Anexo 5)
Objetivo: Identificar las propiedades y características de la imagen de un polígono al aplicar una homotecia.

Se inicia la actividad con una construcción que realizan los estudiantes siguiendo las indicaciones del docente y luego, se hacen algunas preguntas. (Ver Figura 3-24)

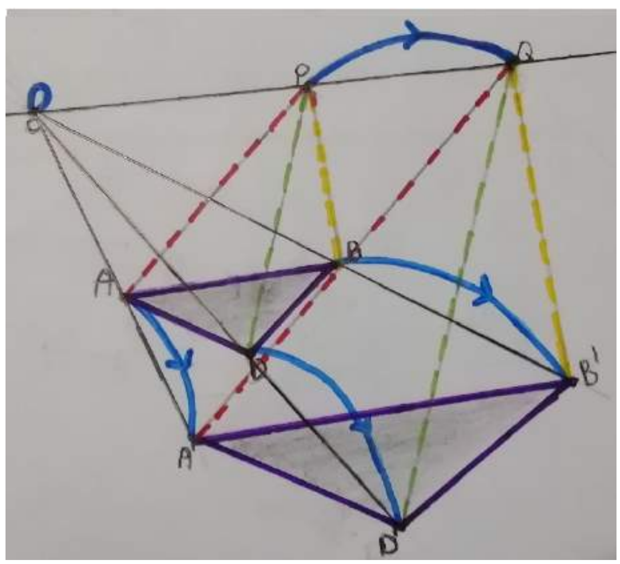


Figura 3-24.: Imagen de un triángulo por la homotecia h.

- En una hoja blanca dibujar la homotecia h dada.
- Ubica tres puntos no colineales A, B y D en el plano (hoja).
- Une los tres puntos mediante segmentos. ¿Qué figura se formó? Los estudiantes contestaron: "un triángulo".
- Determina las imágenes de los tres puntos A, B y D por la homotecia h, de modo que $h(A) = A'$, $h(B) = B'$ y $h(D) = D'$.
- Une los puntos A', B' y D' mediante segmentos. ¿Qué figura se formó? Los estudiantes contestaron: "un triángulo", "otro triángulo".

¿Qué relación hay entre los dos triángulos?
Los estudiantes contestaron: “uno es más grande que el otro”, “son semejantes”, “el grande es la imagen del pequeño”.
¿Por qué son semejantes? Los estudiantes contestaron: “tiene la misma forma”, “el triángulo grande es una ampliación del triángulo pequeño”, “los ángulos son iguales”.
¿Cuáles ángulos? Un estudiante contestó “A con A', B con B' y D con D'”.
¿Por qué? ¿Cómo puede asegurar eso?
Los estudiantes empezaron a hablar y a opinar, aportando ideas o refutando. Entre todos se logró evidenciar que con las rectas paralelas se podía demostrar que los ángulos son congruentes. Además, con el uso del teorema de Tales se logró evidenciar otra propiedad entre triángulos semejantes, la proporcionalidad entre sus lados.
¿Por qué el triángulo grande es la imagen del triángulo pequeño? Varios estudiantes coincidieron en manifestar que el triángulo grande se formó con las imágenes de los vértices del triángulo pequeño.
Se concluyó con los estudiantes que el triángulo $A'B'D'$ es la imagen del triángulo ABD al aplicar la homotecia h y que siguiendo las indicaciones iniciales se puede determinar la imagen h de cualquier polígono.

Se hace entrega del taller respectivo, el cual consta de tres ejercicios:

El primer ejercicio plantea determinar la imagen de un pentágono por una homotecia dada. La mayoría de los estudiantes realizan la construcción sin inconvenientes, hallan la imagen de un punto, con la nueva flecha buscan la imagen de otro punto y así sucesivamente, de esta forma facilitan el proceso, como se muestra en la Figura 3-25.

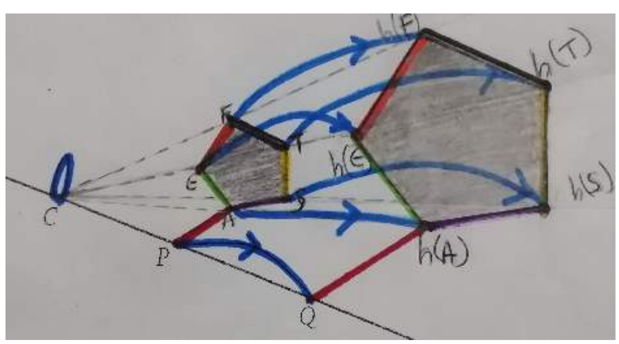


Figura 3-25.: Imagen del pentágono por la homotecia dada.

En el segundo ejercicio se plantean tres casos, en donde se debe determinar la imagen

de un triángulo por la homotecia dada.
Algunos estudiantes motivados por la actividad pasaban al tablero y con ayuda de los compañeros realizaban las construcciones. La Figura 3-26 presenta los resultados obtenidos por los estudiantes.

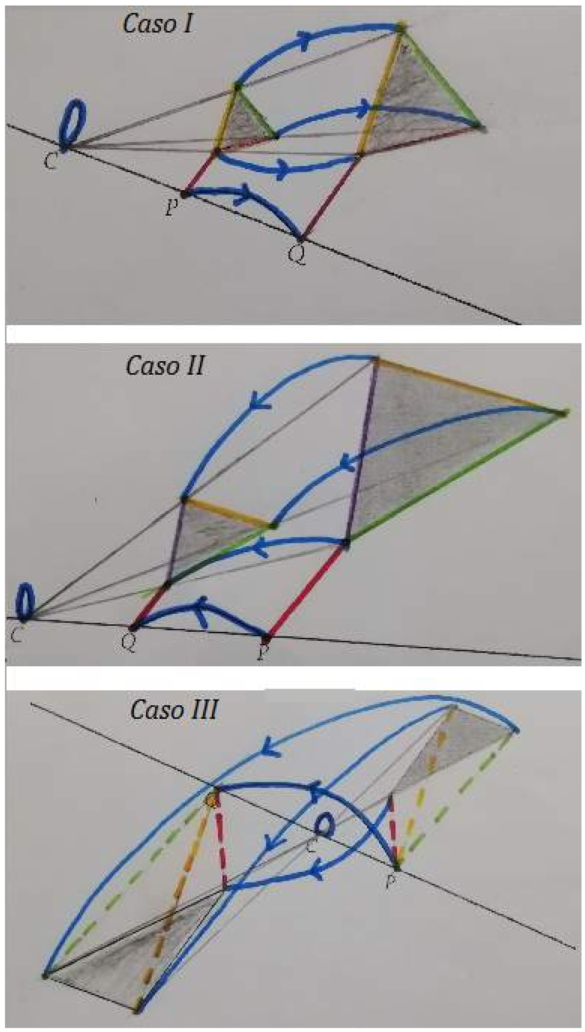


Figura 3-26.: Imagen de un triángulo por la homotecia dada.

En el tercer ejercicio se plantea que los estudiantes observen y comparen todas las construcciones realizadas para luego sacar conclusiones.

Los estudiantes manifestaban que la imagen de una figura al aplicar una homotecia, cambiaba según la dirección de la flecha, así:

- Si la flecha iba hacia la derecha la imagen de la figura aumentaba su tamaño.
- Si la flecha iba hacia la izquierda la imagen de la figura disminuía su tamaño.
- Si la flecha pasa por encima de C la imagen de la figura es inversa.

Se les dijo que si estaban seguros, que observaran el Caso III en donde la flecha va hacia la izquierda y que la imagen de la figura no disminuyó.

Un estudiante dijo: "el tamaño de la imagen de la figura crece porque Q está más lejos de C que P", los demás estudiantes observaron las figuras y se percataron de que si se cumplía, entonces el mismo estudiante añadió: "el tamaño de la imagen de la figura disminuye porque Q está más cerca de C que P".

Se les preguntó a los estudiantes:
- ¿Qué sucede con la imagen de la figura si Q y P están a igual distancia de C?

Los estudiantes contestaron: La imagen no cambia de tamaño.
- Si Q y P están a igual distancia de C, ¿la imagen es la misma figura?

Algunos estudiante respondieron "si" otros lo pensaban más. Se les dijo que pensaran dónde podrían estar ubicados P y Q para que estén a la misma distancia de C. Un estudiante dijo "P y Q son el mismo punto ó Q está al otro lado de C".
Revisando lo que dijo el estudiante surgen dos situaciones.

Situación 1. ¿Qué sucede con la flecha cuando P y Q son el mismo punto?
Los estudiante respondieron "es un bucle".
- ¿Qué nombre recibe la homotecia cuando tenemos dos bucles?

Algunos estudiantes recordaron rápidamente y contestaron "homotecia identidad, todos son bucles".
- ¿Qué sucede con la imagen de la figura si se le aplica esta homotecia?

Varios estudiantes contestaron: "queda la misma figura".

Situación 2. Si Q está "al otro lado" de C donde no está P.
- ¿Qué sucede con la flecha?

Los estudiantes contestaron "pasa por encima de C".
- Se les dijo que revisaran el Caso III de la actividad y que tuvieran en cuenta que allí P y Q no están a igual distancia de C, que había un cambio de tamaño; luego se les preguntó ¿qué sucede con la imagen de la figura si P y Q están a igual distancia de C?

Los estudiantes contestaron "queda de igual tamaño", "cambia de posición", "queda invertida".
- ¿La imagen es la misma figura?

Algunos estudiantes contestaron: "No", otros "no porque tendría que haber quedado en el mismo sitio”, “no, la imagen está invertida”.

A manera de conclusión se estableció con los estudiantes:
* Si P y Q están a igual distancia de C, entonces la imagen de una figura puede llegar a ser la misma ó invertida pero de igual tamaño.
* Si el centro de la homotecia está entre P y Q, entonces la imagen de la figura queda invertida.
* El tamaño de la imagen de la figura depende de la distancia de P y Q con respecto al centro C, es decir:
- Si la distancia de Q a C es mayor que la distancia de P a C, entonces la imagen es de mayor tamaño que la figura original.
- Si la distancia de Q a C es menor que la distancia de P a C, entonces la imagen es de menor tamaño que la figura original.

Luego de resumir, se realizaron otras preguntas:

- Si Q y C son el mismo punto, ¿qué sucede con la imagen de la figura al aplicar la homotecia?
Los estudiantes contestaron: “la imagen desaparece“, “la imagen es el punto C”.
- ¿Se puede determinar por la homotecia h, la imagen de un gato, un árbol, un edificio, cualquier objeto, o solo se puede con polígonos? ¿Por qué?
Los estudiantes discutieron, opinaron y llegaron a concluir: “sí se puede, se hallaría la imagen por la homotecia h de cada punto que compone al gato, al árbol, al edificio o al objeto.
Evaluación: La actividad evidenció:
- Motivación por parte de los estudiantes para realizar los ejercicios y corregir errores.
- Identificación de las propiedades de los polígonos semejantes.
- Uso del Teorema de Tales.
- Los estudiantes identificaron las propiedades y características de la imagen de un polígono al aplicar una homotecia.
- Los estudiantes muestran un avance en escuchar, opinar, refutar y argumentar.
- Faltó hacer ejercicios para evidenciar que la imagen de una recta por una homotecia es una recta paralela a ella.

3.6. Actividad 6. Composición de homotecias.

Nombre: Composición de homotecias. (Anexo 6)
Objetivo: Identificar las propiedades de la composición de homotecias de igual centro.

Se inicia la actividad explicando la composición de homotecias de igual centro, su definición, su notación y se realiza el ejemplo que se encuentra en el resumen de la actividad: Determinar $f \circ h$, si $f(R) = S$ y $h(P) = Q$, donde f y h son homotecias de centro C. Se explica paso a paso de manera que los estudiantes observen cómo actúa la composición sobre cada punto X. (Ver Figura 3-27)

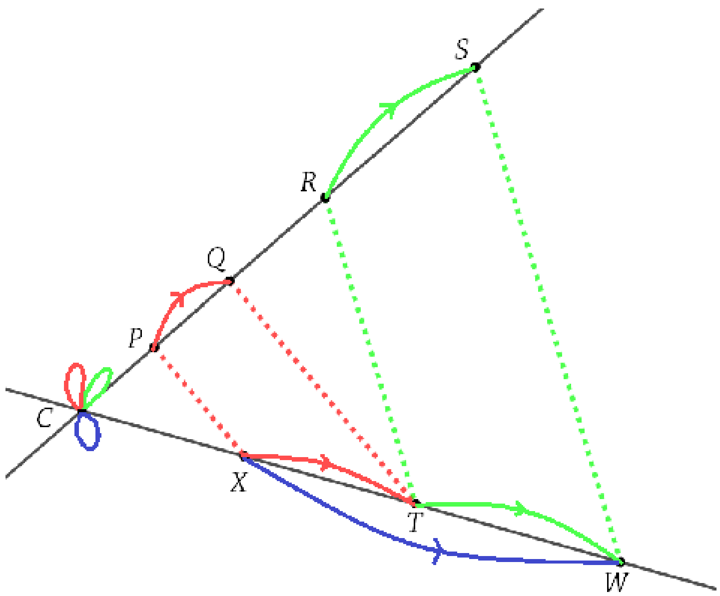


Figura 3-27.: $f \circ h$.

1. Se halla la imagen de X por h, donde $h(X) = T$.
2. Se halla la imagen de T por f, donde $f(T) = W$.
3. Se dibuja la flecha (X, W) en azul, que pertenece a $f \circ h$.

Algunos estudiantes preguntaron: ¿por qué de color azul y no de rojo o verde?
Se les indicó que observaran que la imagen del punto X por $f \circ h$ es W, además la flecha no puede ser roja, porque la imagen de X por h es T y además, la flecha no puede ser verde, porque la imagen de X por f no es W, lo cual se verificó.

4. Se halla la imagen de C por h: $h(C) = C$.
5. Se halla la imagen de $h(C)$ por f: $f(h(C)) = f(C) = C$, así la flecha (C, C) también pertenece a $f \circ h$.

Luego de realizar el ejemplo se les entregó a los estudiantes el taller respectivo y se les pidió que buscaran las imágenes de los puntos Y y Z por $f \circ h$. (Ver Figura 3-28)

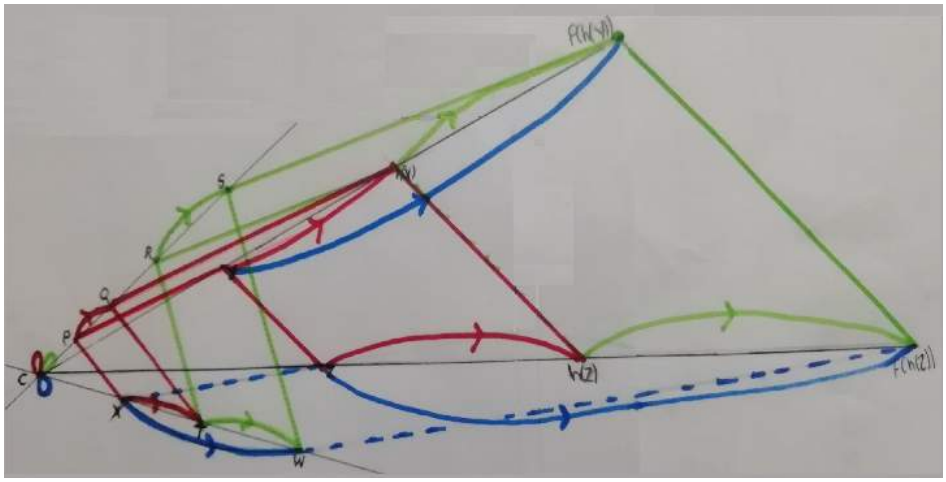


Figura 3-28.: $(f \circ h)(Y)$ y $(f \circ h)(Z)$.

Después de realizar las construcciones se socializaron los resultados con los estudiantes. Se concluyó que $f \circ h$ es otra homotecia de centro C.

Luego, con las mismas homotecias del ejemplo anterior, se les pidió a los estudiantes construir las imágenes de X, Y y Z por $h \circ f$, con color naranja. Se les indicó que utilizaran los pasos anteriores, pero primero con f y luego con h. (Ver Figura 3-29)

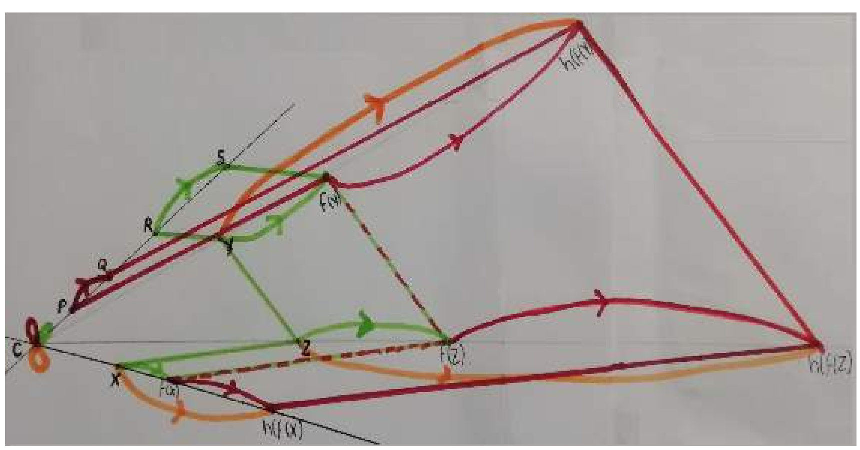


Figura 3-29.: $(h \circ f)(X)$, $(h \circ f)(Y)$ y $(h \circ f)(Z)$.

¿Cómo son $h \circ f$ y $f \circ h$?

Los estudiantes usaron papel calcante para comparar $h \circ f$ y $f \circ h$, luego contestaron: "$h \circ f$ es de color naranja y $f \circ h$ es de color azul", "las dos inician en el mismo punto y terminan en el mismo punto", entonces se preguntó ¿qué pasa con las flechas que cumplen esta condición?, los estudiantes contestaron "son las mismas flechas", "las flechas son iguales", "pertenecen a la misma homotecia", se les dijo: si las flechas pertenecen a la misma homotecia, entonces ¿cómo son $h \circ f$ y $f \circ h$?, los estudiantes lograron concluir que $h \circ f$ y $f \circ h$ son iguales.

Se platearon más ejercicios de composición de homotecias con diferentes casos, esto para evidenciar que se cumple la anterior conclusión.

Algunos resultados de las construcciones realizadas por los estudiante se presentan en la Figura 3-30 (f en rojo, h en verde).

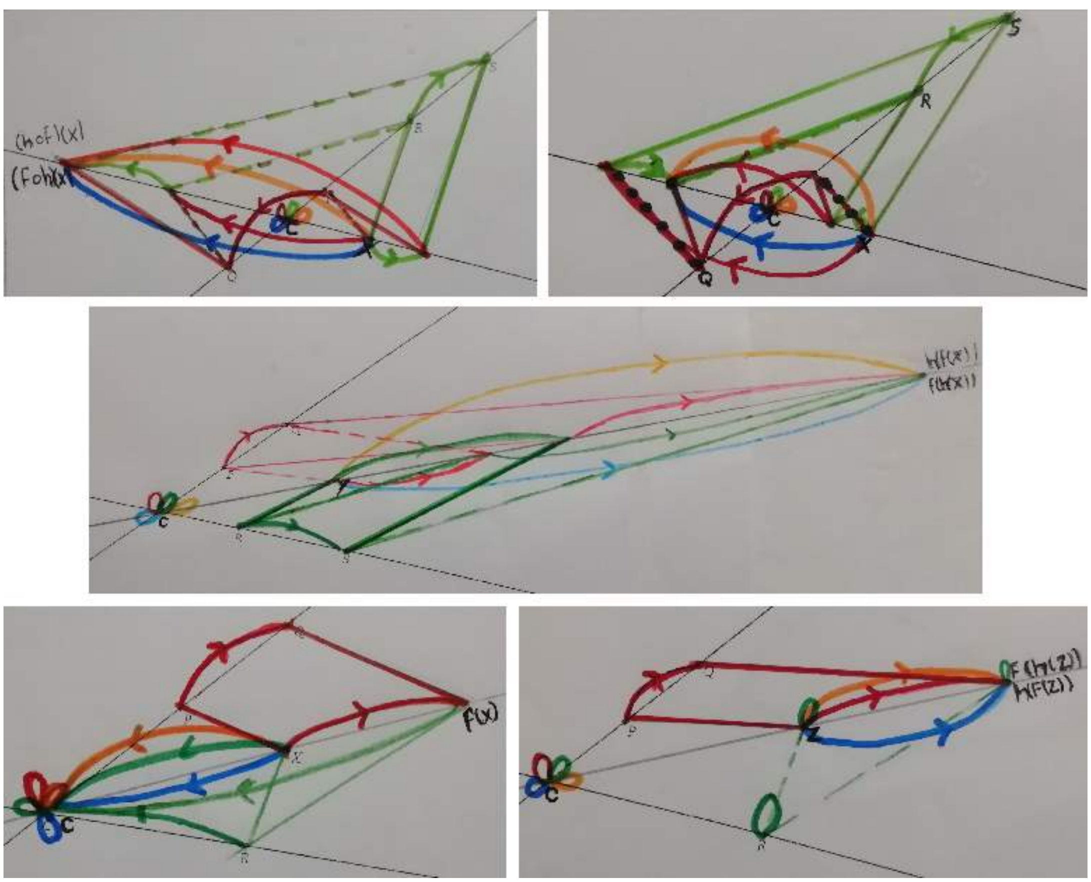
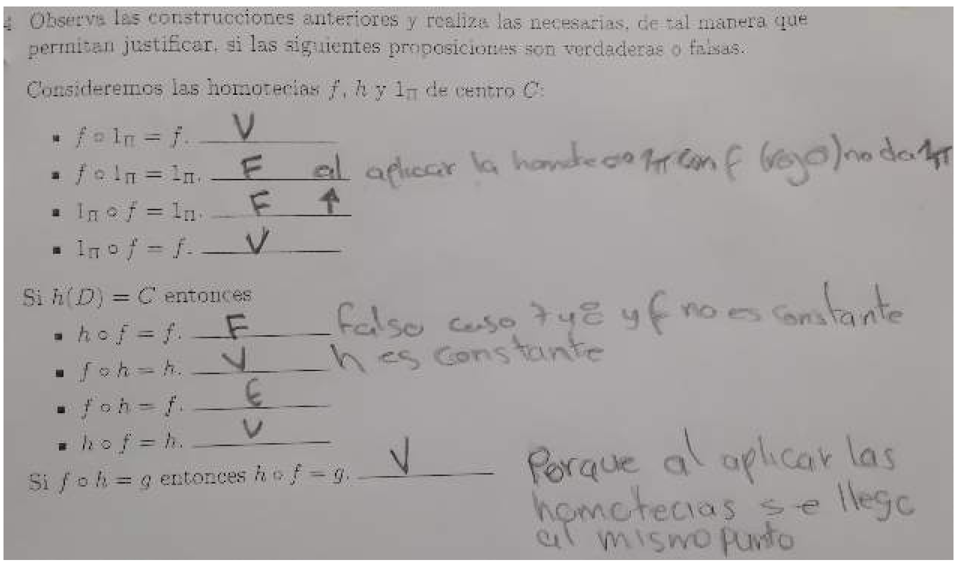


Figura 3-30.: $(f \circ h)$ y $(h \circ f)$, según cada caso.

Luego de socializar los resultados, se preguntó a los estudiantes: ¿en todos los casos anteriores se cumple que $f \circ h$ y $h \circ f$ son iguales?
Los estudiantes contestaron "si", "si, no importa cual aplique primero, el resultado es el mismo".

Luego, con la ayuda de las construcciones se completaron los datos que se presentan en la Figura 3-31.



4 Observa las construcciones anteriores y realiza las necesarias, de tal manera que permitan justificar, si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas.

Consideremos las homotecias f, h y 1_Π de centro C:

- $f \circ 1_\Pi = f$. V
- $f \circ 1_\Pi = 1_\Pi$. F al aplicar la homotecia 1_Π con f (rojo) no da 1_Π
- $1_\Pi \circ f = 1_\Pi$. F ↑
- $1_\Pi \circ f = f$. V

Si $h(D) = C$ entonces

- $h \circ f = f$. F falso caso 7 y 8 y f no es constante
- $f \circ h = h$. V h es constante
- $f \circ h = f$. F
- $h \circ f = h$. V

Si $f \circ h = g$ entonces $h \circ f = g$. V Porque al aplicar las homotecias se llega al mismo punto

Figura 3-31.: Proposiciones falsas o verdaderas.

Evaluación: La actividad evidenció:
-Dificultades en algunos estudiantes para determinar la imagen de un punto por la composición de homotecias, estas se trabajaron a medida que se avanzaba en las construcciones.
- Dadas dos homotecias f y h de centro C, entonces $f \circ h$ es una homotecia de centro C.
- Si f y h son homotecias del mismo centro, entonces $f \circ h$ y $h \circ f$ son iguales.

3.7. Actividad 7. Recta real y homotecias.

Nombre: Recta real y homotecias. (Anexo 7)

Objetivos:
- Identificar la relación que hay entre los puntos de una recta y los números reales.
- Identificar la relación entre la razón de una homotecia h de centro C y un punto de la recta real.

Se inicia la actividad explicando la graduación de una recta en el plano Π:
Dada la recta AB en Π, mediante la función a asignamos $a(A) = 0$ y $a(B) = 1$, es decir, 0 como abscisa de A y 1 como abscisa de B, esto para fijar la longitud unidad (regla). Se realiza un breve resumen recordando los números naturales, enteros, racionales, para luego ser ubicados en la recta AB, respetando las distancias.
Se les dio la siguiente situación a los estudiantes, si los puntos X y Z están en la recta AB, tales que $a(X) = 5$ y $a(Z) = 5$, ¿qué se puede decir de los puntos X y Z?
La mayoría de los estudiantes contestaron "están en la misma recta", "X y Z son el mismo punto".

Luego, se define la razón de una homotecia: Para cada homotecia h de centro C y $a(C) = 0$, donde $h(P) = Q$ y $a(P) = 1$, diremos que la razón de h es la abscisa de Q, es decir $r(h) = a(Q)$.
Como ejemplo se da la Figura 3-32, donde $h(P) = Q$, $a(P) = 1$ y $a(Q) = 3$, entonces $r(h) = a(Q) = 3$.

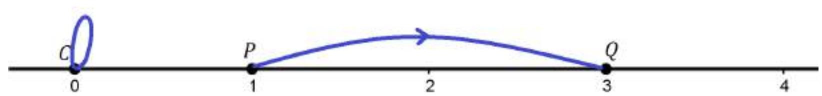
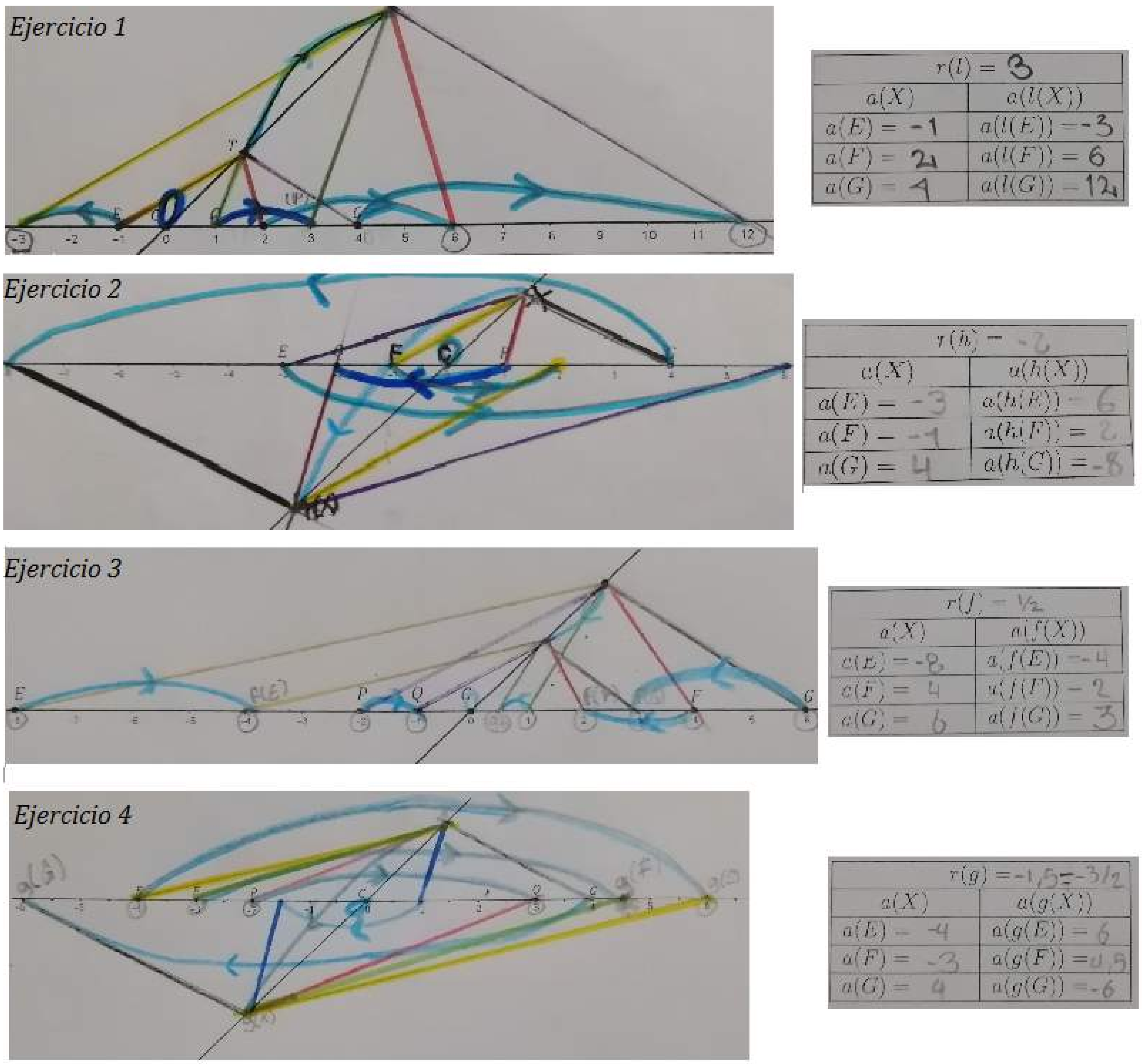


Figura 3-32.: $r(h) = a(Q) = 3$.

Se entrega el respectivo taller en donde se plantean una serie de ejercicios, los cuales consisten en:
- Determinar la razón de una homotecia h.
- Buscar las imágenes de los puntos E, F y G por la homotecia h.
- Determinar las abscisas de las imágenes de los puntos E, F y G por h.
- Con la información anterior completar una tabla.
- Responder: ¿qué relación hay entre la razón de h y las abscisas obtenidas?

Al principio algunos estudiantes tuvieron dificultades en determinar la razón de una homotecia h, debido a que no tenían en cuenta, o se les olvidaba que para determinar la razón de la homotecia se debe encontrar la imagen por h del punto que tiene como abscisa 1 y que la abscisa de esta imagen es la razón de la homotecia h.

A los estudiantes no se les dificultó buscar las imágenes de los puntos E, F y G por la homotecia h, determinar sus respectivas abscisas y completar la tabla. (Ver Figura 3-33)



$r(l) = 3$	
$a(X)$	$a(l(X))$
$a(E) = -1$	$a(l(E)) = -3$
$a(F) = 2$	$a(l(F)) = 6$
$a(G) = 4$	$a(l(G)) = 12$

$r(h) = -2$	
$a(X)$	$a(h(X))$
$a(E) = -3$	$a(h(E)) = 6$
$a(F) = -1$	$a(h(F)) = 2$
$a(G) = 4$	$a(h(G)) = -8$

$r(f) = 1/2$	
$a(X)$	$a(f(X))$
$a(E) = -8$	$a(f(E)) = -4$
$a(F) = 4$	$a(f(F)) = 2$
$a(G) = 6$	$a(f(G)) = 3$

$r(g) = -1,5 = -3/2$	
$a(X)$	$a(g(X))$
$a(E) = -4$	$a(g(E)) = 6$
$a(F) = -3$	$a(g(F)) = 4,5$
$a(G) = 4$	$a(g(G)) = -6$

Figura 3-33.: Relación entre la razón de una homotecia y las abscisas.

A la pregunta: ¿qué relación hay entre la razón de h y las abscisas obtenidas?

Los estudiantes contestaron:

* En el primer ejercicio, homotecia l:
- Se triplican las abscisas de los puntos E, F y G.
- Se multiplica por 3.
- Va aumentando de a 3 por unidad.
- Aumenta 3 y son múltiplos.
- Es una constante de proporcionalidad que es igual a 3.

* En el segundo ejercicio, homotecia h:
- Se multiplica por -2.
- Se multiplica y se utiliza ley de signos.
- Las abscisas se multiplican por -2.
- Es una constante de proporcionalidad que es igual a -2.
- Las abscisas se multiplican por $r(h)$.
- Se multiplican las abscisas por la razón y se obtienen las abscisas de las imágenes.

* En el tercer ejercicio, homotecia f:
- Se divide en 2.
- La columna $a(f(X))$ es la mitad de $a(X)$.
- Se multiplica por 0.5.
- Es una constante de proporcionalidad que es igual a $\frac{1}{2}$.
- Se multiplican las abscisas por la razón y se obtienen las abscisas de las imágenes.
- Es una constante de proporcionalidad.
- Las abscisas son la mitad de la abscisa de los puntos dados.

* En el cuarto ejercicio, homotecia g:
- Se multiplican las abscisas por la razón y se obtienen las abscisas de las imágenes.
- Es una constante de proporcionalidad.

Se les pidió comparar las respuestas y se les preguntó: ¿cuál relación se cumple para todos los casos?
Los estudiantes contestaron:
- Es una constante de proporcionalidad.
- Se multiplican las abscisas por la razón y se obtienen las abscisas de las imágenes.
- La razón multiplica las abscisas.

Los estudiantes lograron concluir:

- Entre las abscisas existe una constante de proporcionalidad y es la razón.
- La razón de una homotecia multiplica las abscisas de los puntos, es decir, si h es una homotecia de centro C con razón r y X un punto de la recta graduada, entonces se tiene $a(h(X)) = r \cdot a(X)$.

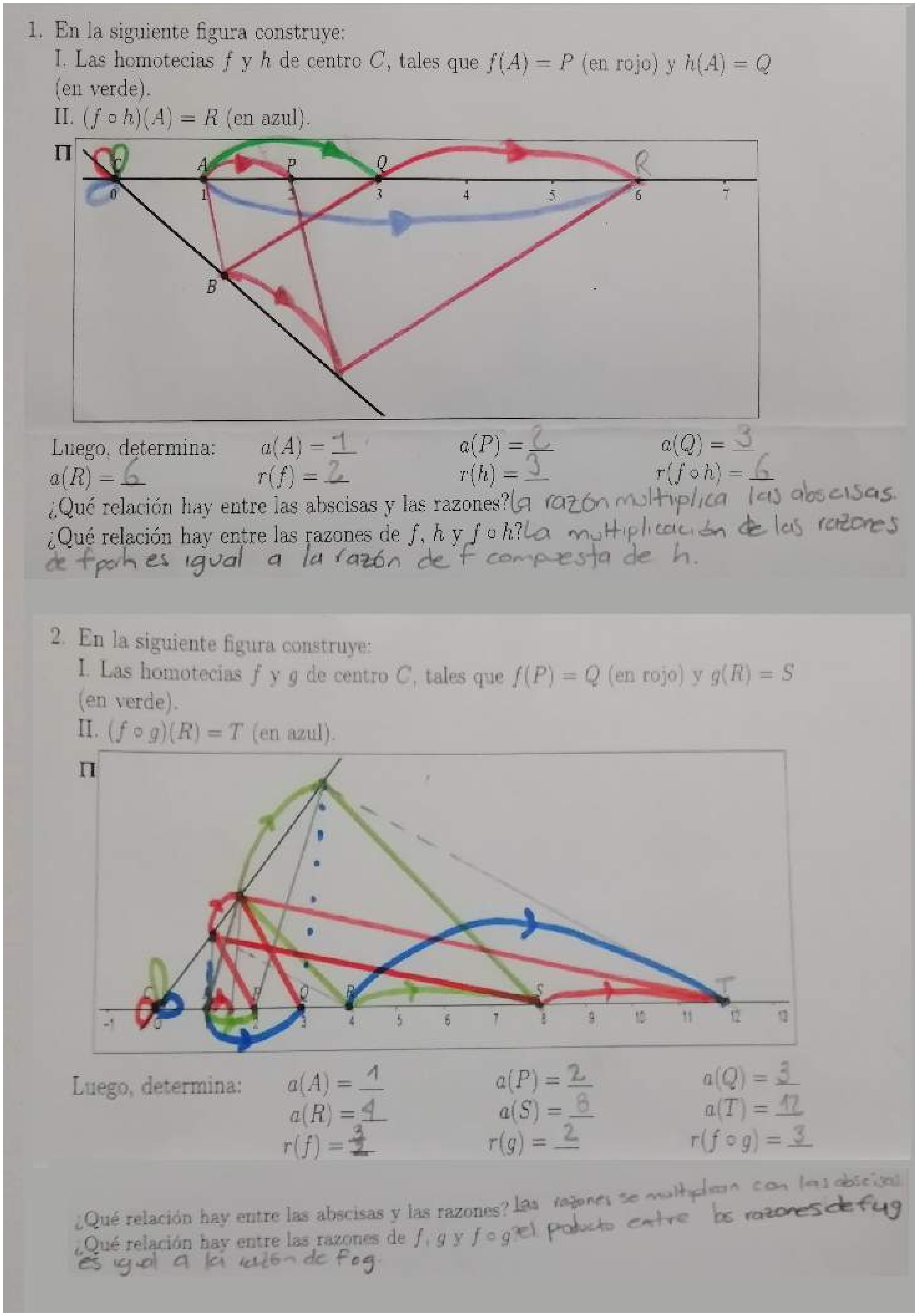
Evaluación: - Las dificultades presentadas por los estudiantes al determinar la razón de una homotecia se fueron superando a medida que se desarrollaba la actividad.
- Se logró una mayor participación de los estudiantes.
- Se logró relacionar los puntos de una recta y los números reales.
- Se logró evidenciar la relación entre la razón de una homotecia h de centro C y un punto de la recta real.
- Algunos estudiantes lograron evidenciar ley de signos.

3.8. Actividad 8. Multiplicación.

Nombre: Multiplicación. (Anexo 8)
Objetivos:
- Identificar la relación entre las homotecias y los números reales.
- Identificar la relación entre las razones de dos homotecias y la razón de la composición de estas.
- Evidenciar geométricamente el elemento neutro e inverso de la multiplicación de números reales, mediante el uso de homotecias.

Se entrega el respectivo taller el cual consta de 5 ejercicios.
Los dos primeros ejercicios plantean:
- Dos homotecias de centro C.
- Construir la composición de las dos homotecias.
- Determinar abscisas y razones indicadas.
- Se establecen dos preguntas: 1. ¿Qué relación hay entre las abscisas y las razones?
2. ¿Qué relación hay entre las razones?

Los estudiantes no presentaron mayor dificultad para realizar las construcciones y contestar las preguntas. (Ver Figura 3-34)



1. En la siguiente figura construye:
   I. Las homotecias f y h de centro C, tales que $f(A) = P$ (en rojo) y $h(A) = Q$ (en verde).
   II. $(f \circ h)(A) = R$ (en azul).

Luego, determina: $a(A) =$ 1 $a(P) =$ 2 $a(Q) =$ 3
$a(R) =$ 6 $r(f) =$ 2 $r(h) =$ 3 $r(f \circ h) =$ 6

¿Qué relación hay entre las abscisas y las razones? la razón multiplica las abscisas.
¿Qué relación hay entre las razones de f, h y $f \circ h$? La multiplicación de las razones de fyh es igual a la razón de f compuesta de h.

2. En la siguiente figura construye:
   I. Las homotecias f y g de centro C, tales que $f(P) = Q$ (en rojo) y $g(R) = S$ (en verde).
   II. $(f \circ g)(R) = T$ (en azul).

Luego, determina: $a(A) =$ 1 $a(P) =$ 2 $a(Q) =$ 3
$a(R) =$ 4 $a(S) =$ 8 $a(T) =$ 12
$r(f) = \frac{3}{2}$ $r(g) =$ 2 $r(f \circ g) =$ 3

¿Qué relación hay entre las abscisas y las razones? las razones se multiplican con las abscisas
¿Qué relación hay entre las razones de f, g y $f \circ g$? el poducto entre los razones de fug es igual a la razón de fog.

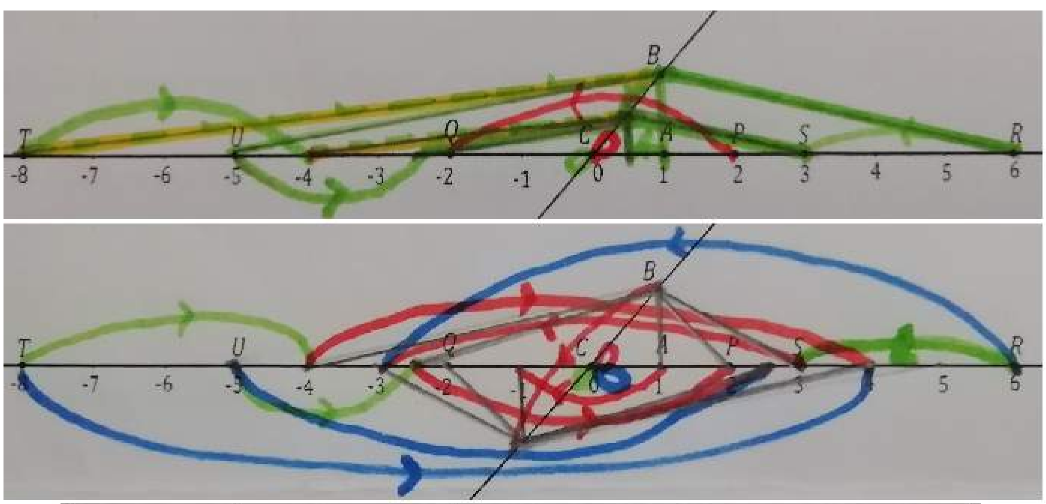
Figura 3-34.: Relación entre la razones de dos homotecias y su composición.

El tercer ejercicio consta de tres casos, en los cuales se plantea:

- Dos homotecias de centro C.
- Construir las imágenes de varios puntos por la composición de las dos homotecias.
- Determinar la razones de las homotecias indicadas.
- Con la información anterior completar una tabla.
- Con la información de la figura y de la tabla responder:

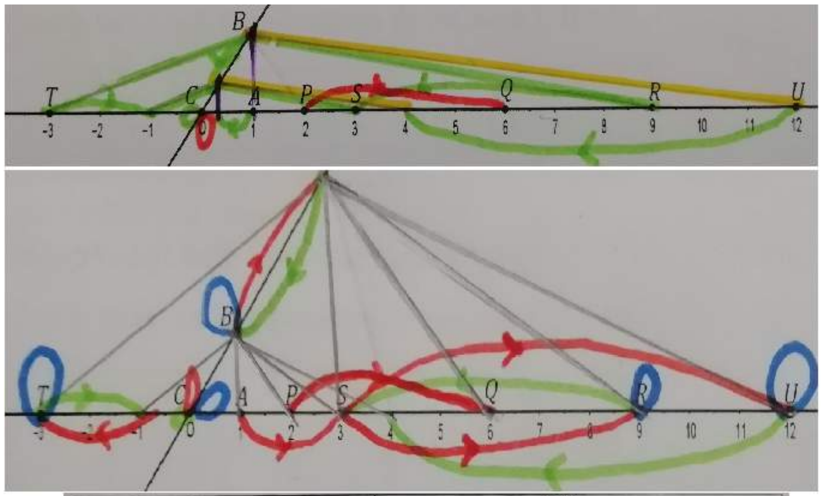
¿Qué relación hay entre la abscisa de un punto X, las razones de las dos homotecias y la abscisa de la imagen de X por la composición de las dos homotecias?

Los estudiantes hicieron trabajo colaborativo de manera que se ayudaban e iban corrigiendo errores. Las Figuras 3-35, 3-36 y 3-37, ilustran los tres casos.



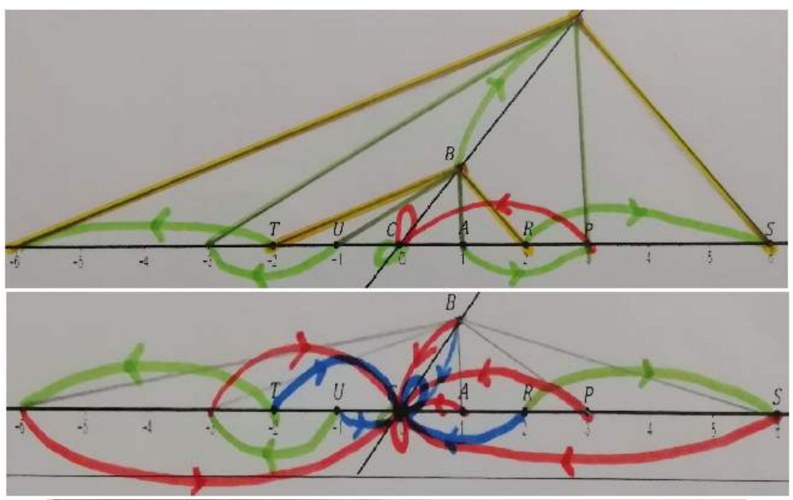
$r(l) = \frac{1}{2}$		$r(k) = -1$
$a(X)$	$a(l(X))$	$a(k(l(X))) = a((k \circ l)(X))$
$a(R) = 6$	$a(l(R)) = 3$	$a(k(l(R))) = a((k \circ l)(R)) = -3$
$a(T) = -8$	$a(l(T)) = -4$	$a(k(l(T))) = a((k \circ l)(T)) = 1$
$a(U) = -5$	$a(l(U)) = -\frac{5}{2}$	$a(k(l(U))) = a((k \circ l)(U)) = \frac{5}{2}$

Figura 3-35.: Caso I. k en rojo, l en verde y $k \circ l$ en azul.



$r(g) = \frac{1}{3}$		$r(f) = 3$
$a(X)$	$a(g(X))$	$a(f(g(X))) = a((f \circ g)(X))$
$a(R) = 9$	$a(g(R)) = 3$	$a(f(g(R))) = a((f \circ g)(R)) = 9$
$a(T) = -3$	$a(g(T)) = -1$	$a(f(g(T))) = a((f \circ g)(T)) = -3$
$a(U) = 12$	$a(g(U)) = 4$	$a(f(g(U))) = a((f \circ g)(U)) = 12$

Figura 3-36.: Caso II. f en rojo, g en verde y $f \circ g$ en azul.



$r(j) = 3$		$r(h) = 0$
$a(X)$	$a(j(X))$	$a(h(j(X))) = a((h \circ j)(X))$
$a(R) = 2$	$a(j(R)) = 6$	$a(h(j(R))) = a((h \circ j)(R)) = 0$
$a(T) = -2$	$a(j(T)) = -6$	$a(h(j(T))) = a((h \circ j)(T)) = 0$
$a(U) = -1$	$a(j(U)) = -3$	$a(h(j(U))) = a((h \circ j)(U)) = 0$

Figura 3-37.: Caso III. h en rojo, j en verde y $h \circ j$ en azul.

La respuesta que dieron a la pregunta fue: "se multiplica la abscisa por la razón de una homotecia y el resultado se multiplica por la razón de la otra homotecia", se generalizó de manera que: Dadas dos homotecias u y w de centro C y X un punto de la recta graduada, entonces se tiene que $a(X) \cdot r(u) \cdot r(w) = a((u \circ w)(X))$.

Algunas preguntas adicionales que se plantearon en los casos II y III fueron:
Caso II. ¿Qué nombre recibe la homotecia $f \circ g$?
Los estudiantes contestaron " 1_Π", "homotecia identidad".

Caso III. La homotecia h de centro C, tal que $h(P) = C$ se conoce como homotecia constante, ¿por qué recibe este nombre?
Los estudiantes no tuvieron problema en responder: "porque todas las imágenes van al centro".
Para cada punto P de Π, ¿qué valor toma $a(h(P))$?
Los estudiantes no dudaron en responder "es cero", "cero, porque la abscisa de C es cero", "cero, en la tabla se ve, porque al multiplicar las abscisas por $r(h)$ da cero, todo numero multiplicado por cero da cero".

Con la información de los tres casos los estudiantes completaron los datos de la tabla que se muestra en la Figura 3-38.

$r(m)$	$r(n)$	$r(m \circ n)$
$r(k) = -1$	$r(l) = \frac{1}{2}$	$r(k \circ l) = -\frac{1}{2}$
$r(f) = 3$	$r(g) = \frac{1}{3}$	$r(f \circ g) = 1$
$r(h) = 0$	$r(j) = 3$	$r(h \circ j) = 0$

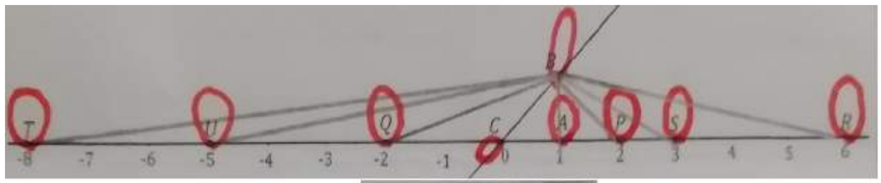
Figura 3-38.: Información de los Casos I, II y III.

Se planteó la pregunta: ¿Qué relación hay entre las razones $r(m)$, $r(n)$ y $r(m \circ n)$?
Los estudiantes contestaron: "$r(m)$ se multiplica por $r(n)$ y da como resultado $r(m \circ n)$", "el producto de las razones de m y n es igual a la razón de $(m \circ n)$".
Se animó a los estudiantes a escribir la expresión algebraica que representa lo anterior.
Los estudiantes establecieron: $r(m) \cdot r(n) = r(m \circ n)$.

En el cuarto ejercicio se planteó: Dada la homotecia m de centro C, tal que $m(P) = P$ y $a(P) = 2$.

- Determinar la imagen de varios puntos de la recta graduada por m.
- Determinar $r(m)$.
- Completar la tabla con la información anterior.

La Figura 3-39 presenta la homotecia m y la información de la tabla.



$r(m) = 1$	
$a(X)$	$a(m(X))$
$a(T) = -8$	$a(m(T)) = -8$
$a(U) = -5$	$a(m(U)) = -5$
$a(Q) = -2$	$a(m(Q)) = -2$
$a(A) = 1$	$a(m(A)) = 1$
$a(S) = 3$	$a(m(S)) = 3$
$a(R) = 6$	$a(m(R)) = 6$

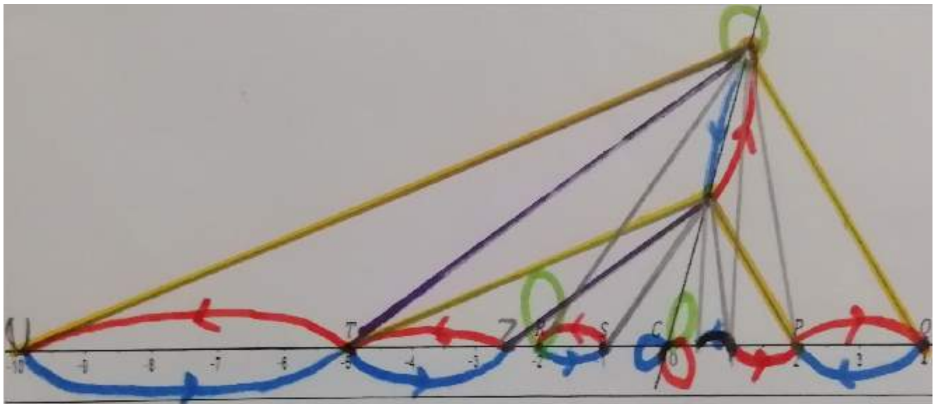
Figura 3-39.: Información de la homotecia m.

Los estudiantes reconocieron de inmediato que la homotecia m es la identidad.
Se les preguntó ¿cuál es el efecto sobre las abscisas al aplicar la homotecia m?
Los estudiantes contestaron: “se crea un bucle, al iniciar y terminar en la misma abscisa”, “que se multiplica la razón con las abscisas y dan las mismas abscisas”, “que da el mismo resultado, porque las abscisas se multiplican por 1”.

Se logró relacionar el elemento neutro de la multiplicación de números reales con la homotecia 1_Π, los estudiante manifestaron que la homotecia 1_Π con la composición de homotecias cumple el mismo papel que el 1 en la multiplicación de números reales, “da el mismo resultado”.

En el quinto ejercicio, dadas dos homotecias f y g de centro C, tales que $f(P) = Q$ en rojo y $g(R) = S$ en azul.
- Determinar la imagen del punto T por f y por g, donde $f(T) = U$ y $g(T) = Z$.
- Construir $f(S)$, $f(Z)$, $g(Q)$, $g(U)$ y $(f \circ g)(R)$ (en verde).
- Completar la tabla con la información anterior.

La Figura 3-40 presenta las homotecias f y g con la información de la tabla.



$f(P) =$ Q	$f(S) =$ R	$f(T) =$ U	$f(Z) =$ T
$g(Q) =$ P	$g(R) =$ S	$g(U) =$ T	$g(T) =$ Z

Figura 3-40.: Información de las homotecias f y g.

Los estudiantes, luego de realizar las construcciones y completar la tabla empezaron a comparar resultados.

Se procedió a responder las preguntas:
- ¿Qué relación hay entre las homotecias f y g?
Los estudiantes contestaron: "las flechas de f terminan en el punto donde inician las flechas de g y viceversa", "las flechas van en dirección contraria", "son inversas".
- ¿Qué homotecia es $f \circ g$?
Los estudiantes respondieron: "identidad", "1_Π".

Luego, determinaron $r(f)$, $r(g)$, $a(f(S))$, $a(f(Z))$, $a(g(Q))$ y $a(g(U))$ para completar los datos de las tablas (ver Figura 3-41).

$r(f) =$ 2	
$a(X)$	$a(f(X))$
$a(P) =$ 2	$a(f(P)) =$ 4
$a(S) =$ −1	$a(f(S)) =$ -2
$a(T) =$ −5	$a(f(T)) =$ −10
$a(Z) =$ -2,5	$a(f(Z)) =$ -5
$a(C) =$ 0	$a(f(C)) =$ 0

$r(g) =$ 0,5	
$a(X)$	$a(g(X))$
$a(Q) =$ 4	$a(g(Q)) =$ 2
$a(R) =$ −2	$a(g(R)) =$ -1
$a(U) =$ −10	$a(g(U)) =$ -5
$a(T) =$ −5	$a(g(T)) =$ -2,5
$a(C) =$ 0	$a(g(C)) =$ 0

Figura 3-41.: Relación entre $r(f)$ y $r(g)$.

Se le preguntó a los estudiantes:
- ¿Qué relación hay entre $r(f)$ y $r(g)$?
Los estudiantes no contestaron, se les dijo que revisaran y compararan las tablas y notaran los resultados, un estudiante dijo "la segunda tabla da los resultados que son los datos iniciales de la primera tabla y viceversa", otro "son inversas".
- ¿Cuál es la razón de $f \circ g$? Los estudiantes contestaron que 1.
- ¿Qué producto se obtiene entre $r(f)$ y $r(g)$? Los estudiantes contestaron que 1.
- ¿Cuál es el producto de las razones de dos homotecias inversas?
Los estudiantes contestaron es 1, es decir, $r(f) \cdot r(g) = 1$.
- ¿Qué sucede con $a(f(C))$ y $a(g(C))$ al aplicar $r(f)$ y $r(g)$ respectivamente?
Los estudiantes contestaron: "da cero, porque es un bucle", "pues que sigue con su mismo valor, ya que todo número multiplicado por 0 da 0".

Luego en varios ejercicios, se les dieron dos homotecias inversas h y k, la razón de h y se les preguntó: ¿cuál es la razón de la homotecia k?
- $r(h) = 3$, $r(h) = -5$, $r(h) = \dfrac{1}{4}$ y $r(h) = 0$.
Los estudiantes se tomaron un tiempo para responder:
$r(h) = 3$, entonces $r(k) = \dfrac{1}{3}$, porque $3 \cdot \dfrac{1}{3} = 1$.
$r(h) = -5$, entonces $r(k) = -\dfrac{1}{5}$, porque $-5 \cdot (-\dfrac{1}{5}) = 1$.
$r(h) = \dfrac{1}{4}$, entonces $r(k) = 4$, porque $\dfrac{1}{4} \cdot 4 = 1$ y
$r(h) = 0$ no tiene, porque no hay algún número que multiplicado por 0 de 1.

Se logró relacionar y evidenciar con los estudiantes los inversos de la multiplicación de números reales con la composición de homotecias inversas.

Evaluación: La actividad logró evidenciar:
- Trabajo colaborativo entre los estudiantes.
- El uso y la relación de los datos de las figuras y la tablas.
- La relación entre las homotecias y los números reales.
- La relación entre las razones de dos homotecias y la razón de la composición de estas.
- El elemento neutro y los inversos de la multiplicación de números reales, mediante el uso de homotecias.
- El producto de un número real por 0, mediante el uso de homotecias.

3.9. Actividad 9. Propiedad conmutativa.

Nombre: Propiedad conmutativa. (Anexo 9)
Objetivo: Evidenciar geométricamente la propiedad conmutativa de la multiplicación de números reales, mediante el uso de homotecias de igual centro.

Se entrega el respectivo taller el cual consta de 5 ejercicios.

Los dos primeros ejercicios plantean: Dadas dos homotecias h (roja) y k (verde) de centro C.
- Construir $h \circ k$ (azul).
- Determinar $r(h)$, $r(k)$ y $r(h \circ k)$.
- Construir $k \circ h$ (naranja).
- Determinar $r(k \circ h)$.

Los estudiantes no presentaron mayor dificultad para realizar las construcciones. (Ver Figuras 3-42 y 3-43)

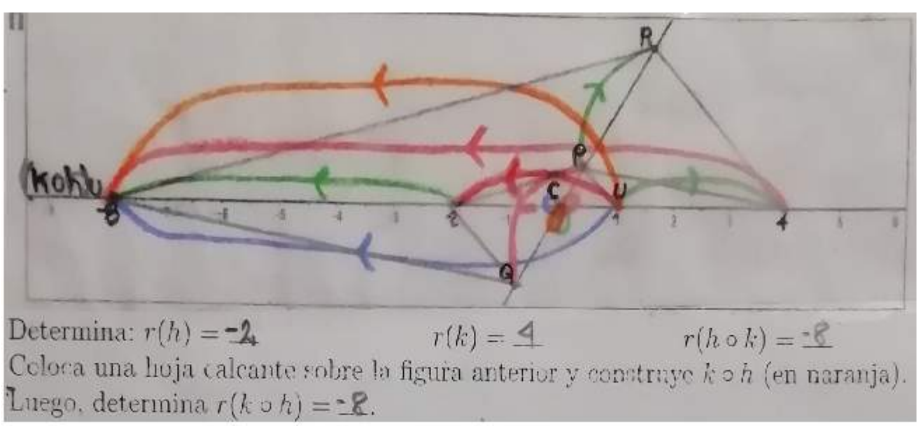


Figura 3-42.: $h(P) = Q$ y $k(P) = R$.

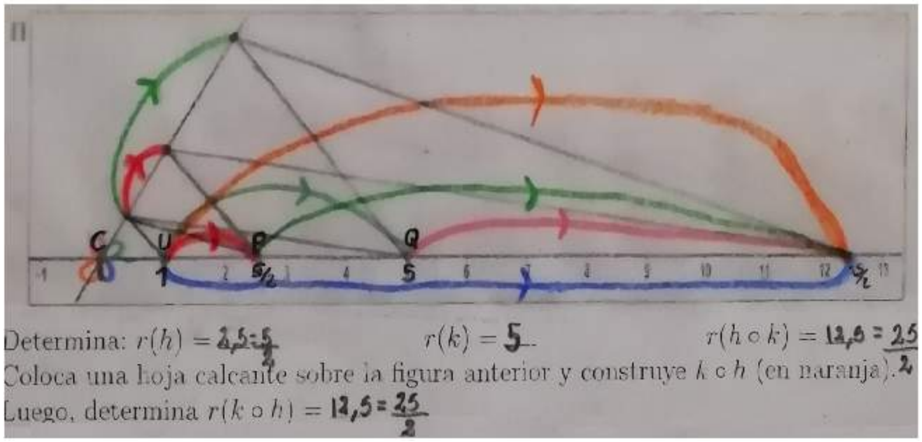


Figura 3-43.: $h(U) = P$ y $k(U) = Q$.

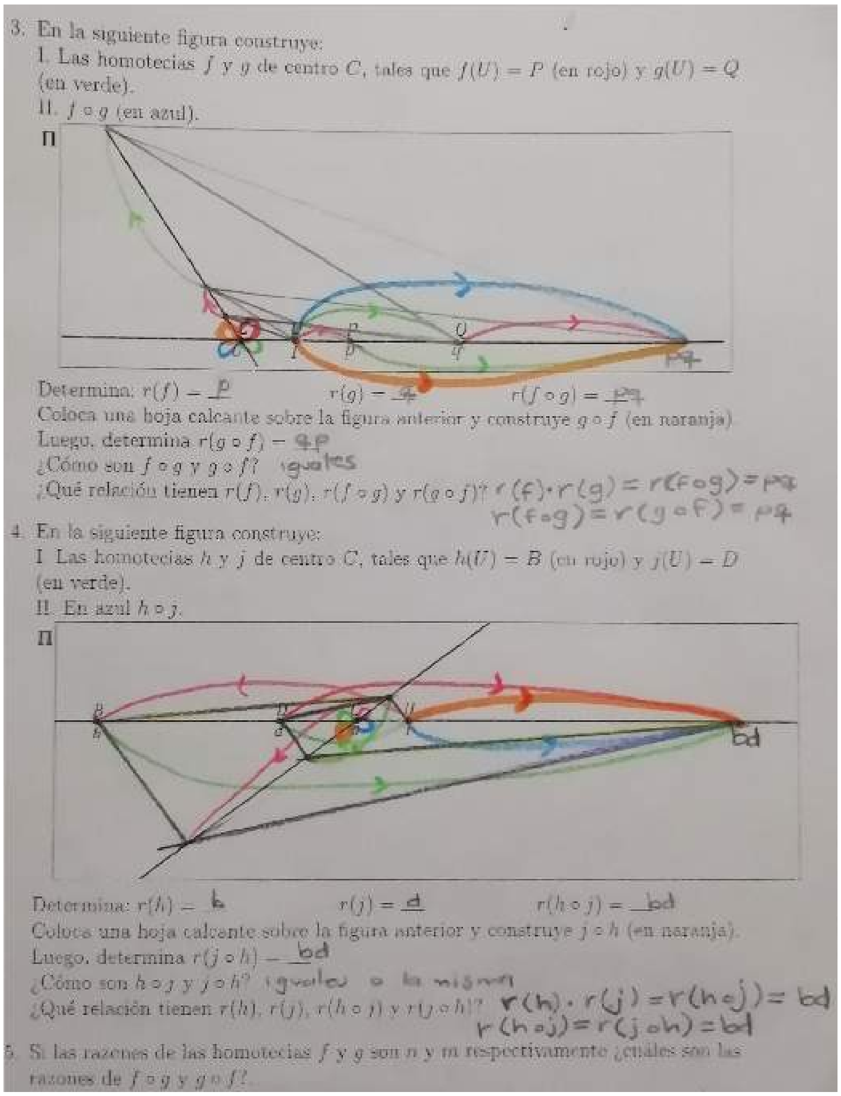
- Se establecen dos preguntas:

1. ¿Qué relación tienen $h \circ k$ y $k \circ h$?
Los estudiantes contestaron: "son la misma", "son iguales".

2. ¿Qué relación tienen $r(h)$, $r(k)$, $r(h \circ k)$ y $r(k \circ h)$.
Los estudiantes contestaron: "la multiplicación de las razones es igual a la razón de la compuesta", "al multiplicar da el mismo resultado", "son lo mismo porque llegaron al mismo punto", "$r(h) \cdot r(k) = r(h \circ k)$ y $r(k) \cdot r(h) = r(k \circ h)$", "no importa el orden en que se aplique la homotecia siempre se llega al mismo punto".

Se les preguntó ¿qué propiedad de la multiplicación de los números reales se comporta igual?
Los estudiantes contestaron: "en la que el orden de los factores no altera el producto", "propiedad conmutativa".

Los ejercicios 3 y 4 se plantean similares a los dos primeros, pero con diferentes casos de homotecias, esto con el fin de practicar y evidenciar si las observaciones hechas por los estudiantes se verifican. (Ver Figura 3-44)



3. En la siguiente figura construye:
I. Las homotecias f y g de centro C, tales que $f(U) = P$ (en rojo) y $g(U) = Q$ (en verde).
II. $f \circ g$ (en azul).

Determina: $r(f) =$ p $r(g) =$ q $r(f \circ g) =$ pq
Coloca una hoja calcante sobre la figura anterior y construye $g \circ f$ (en naranja).
Luego, determina $r(g \circ f) =$ qp
¿Cómo son $f \circ g$ y $g \circ f$? iguales
¿Qué relación tienen $r(f)$, $r(g)$, $r(f \circ g)$ y $r(g \circ f)$? r(f)·r(g) = r(f∘g) = pq
r(f∘g) = r(g∘f) = pq

4. En la siguiente figura construye:
I. Las homotecias h y j de centro C, tales que $h(U) = B$ (en rojo) y $j(U) = D$ (en verde).
II. En azul $h \circ j$.

Determina: $r(h) =$ b $r(j) =$ d $r(h \circ j) =$ bd
Coloca una hoja calcante sobre la figura anterior y construye $j \circ h$ (en naranja).
Luego, determina $r(j \circ h) =$ bd
¿Cómo son $h \circ j$ y $j \circ h$? iguales o la misma
¿Qué relación tienen $r(h)$, $r(j)$, $r(h \circ j)$ y $r(j \circ h)$? r(h)·r(j) = r(h∘j) = bd
r(h∘j) = r(j∘h) = bd

5. Si las razones de las homotecias f y g son n y m respectivamente ¿cuáles son las razones de $f \circ g$ y $g \circ f$?

Figura 3-44.: Ejercicios 3 y 4 -Actividad 9.

Los estudiantes manifestaron que las observaciones realizadas en los dos primeros ejercicios se seguían cumpliendo.

En el quinto ejercicio se planteó:
Si las razones de las homotecias f y g son n y m respectivamente, ¿cuáles son las razones de $f \circ g$ y $g \circ f$?
Los estudiantes respondieron: "nm", "$r(f) \cdot r(g) = r(f \circ g) = n \cdot m$ y $r(g \circ f) = m \cdot n$", "son iguales no importa el orden, $r(f \circ g) = r(g \circ f) = nm$".

Los estudiantes concluyeron: La composición de homotecias de igual centro es conmutativa, lo cual permite verificar la conmutatividad del producto de números reales, es decir, $nm = mn$.

Evaluación: La actividad no presentó mayor dificultad a los estudiantes y estuvo acorde al proceso desarrollado hasta el momento, lo cual permitió evidenciar:
- Trabajo colaborativo entre los estudiantes.
- Motivación e interés por parte de los estudiantes al lograr realizar la actividad sin mayor dificultad.
- La propiedad conmutativa de la multiplicación de números reales, mediante el uso de homotecias de igual centro.

3.10. Actividad 10. Razón de una homotecia y leyes de signos.

Nombre: Razón de una homotecia y leyes de signos. (Anexo 10)
Objetivos:
- Identificar las homotecias que tienen razón menor que cero, entre cero y uno, igual a uno o mayor que uno.
- Evidenciar geométricamente las leyes de signos en la multiplicación de números reales, mediante el uso de homotecias de igual centro.

Se entrega el respectivo taller el cual consta de 3 ejercicios.
El primer ejercicio presenta ocho homotecias, a las que se les debe encontrar su razón correspondiente y mencionar cuáles de ellas tienen razón menor que 0, entre 0 y 1, igual a 1 y mayor que 1.
La Figura 3-45 presenta los resultados de los estudiantes.

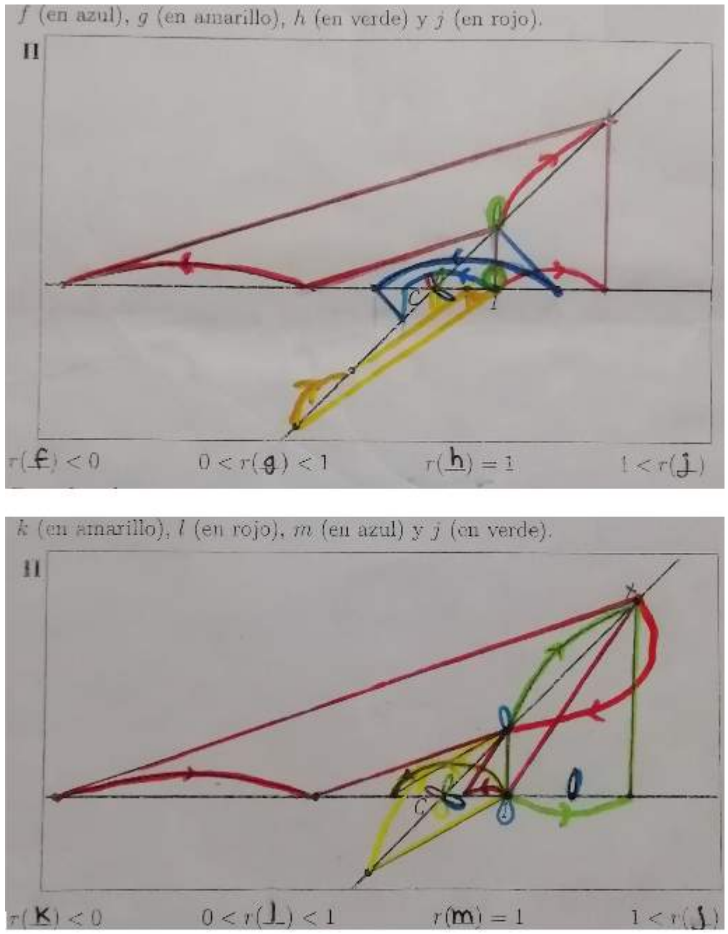


Figura 3-45.: Primer ejercicio.

En el segundo ejercicio se planteó una homotecia h de centro C, determinada por las flechas (C, C) y (P, Q).

Se preguntó ¿qué relación debe existir entre C, P y Q para que las siguientes proposiciones sean verdaderas?

- $r(h) < 0$. Los estudiantes contestaron: “C está entre P y Q”.
- $0 < r(h) < 1$. Los estudiantes contestaron: “Q está entre C y P”.
- $1 < r(h)$. Los estudiantes contestaron: “P está entre C y Q”.
- $r(h) = 1$. Los estudiantes contestaron: “P y Q son el mismo punto”.
- $r(h) = 0$. Los estudiantes contestaron: “C y Q son el mismo punto”.

Los estudiantes se colaboraban, cualquier duda que tenían, la resolvían entre ellos y si no la podían resolver, preguntaban.

En el tercer ejercicio se planteó: Dadas f y h dos homotecias de centro C, tales que $r(f) = t$ y $r(h) = u$.
- Dibujar f y h según cada caso.
- Construir $f \circ h$ y hallar $r(f \circ h)$.

La Figura 3-46 presenta los resultados obtenidos por los estudiantes.

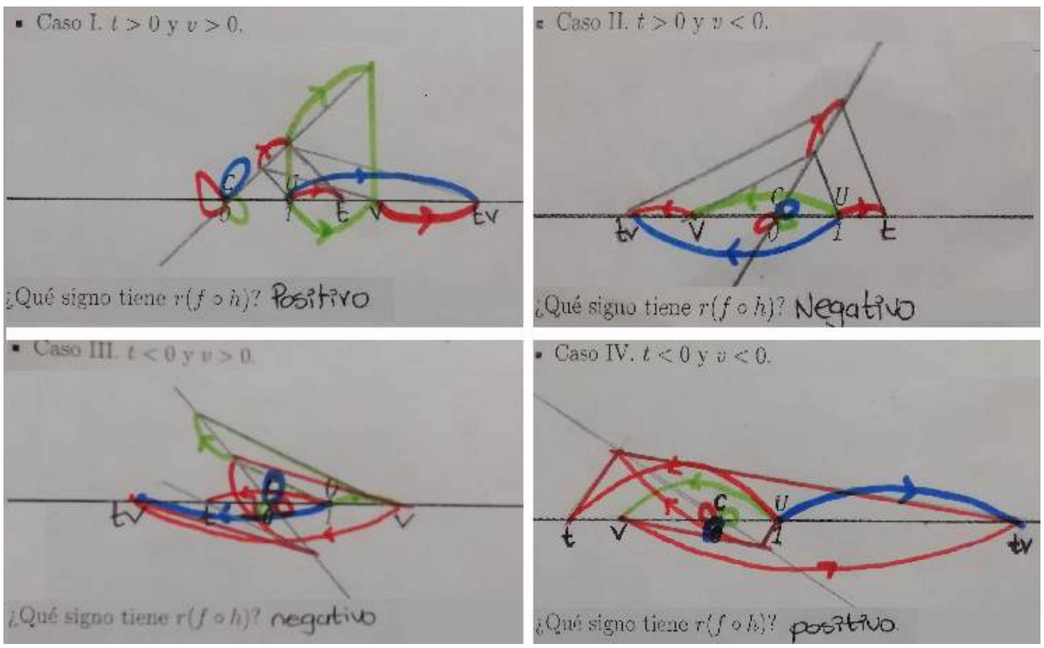


Figura 3-46.: Signo de la razón de una homotecia.

Luego, con la información obtenida en cada caso, completan los datos de la tabla presentada en la Figura 3-47.

$r(f) =$ t	$r(h) =$ v	$r(f \circ h) =$ tv
+	+	+
+	-	−
-	+	−
-	-	+

Figura 3-47.: Leyes de signos.

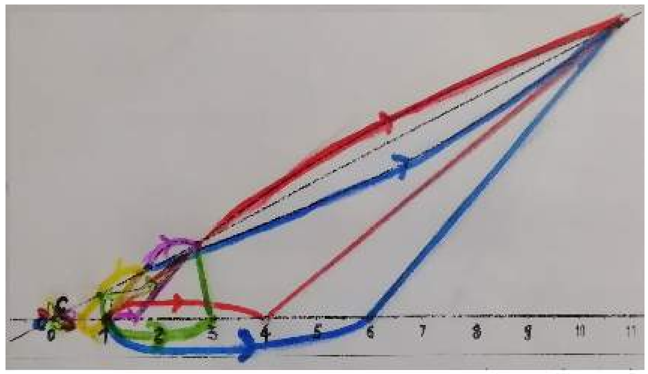
Los estudiantes concluyen que en los casos anteriores se cumplen las leyes de signos, que la composición de homotecias permitió justificar la leyes de signos y en especial la ley de "menos por menos da más", es decir, que negativo por negativo da positivo.

Evaluación:
- Los estudiantes se colaboraban unos a otros explicando dudas, lo cual permitió observar cuáles estudiantes estaban más avanzados en el proceso.
- Los estudiantes lograron identificar las homotecias que tienen razón menor que cero, entre cero y uno, igual a uno o mayor que uno.
- Se evidenciaron geométricamente las leyes de signos en la multiplicación de números reales, mediante el uso de homotecias de igual centro.

3.11. Actividad 11. Propiedad asociativa.

Nombre: Propiedad asociativa. (Anexo 11)
Objetivo: Evidenciar geométricamente la propiedad asociativa de la multiplicación de números reales, mediante el uso de homotecias de igual centro.

Se entrega el respectivo taller el cual consta de 3 ejercicios.
Los dos primeros ejercicios plantean algo similar, pero con diferentes casos de homotecias. En el primer ejercicio se dan tres homotecias de centro C: f (en verde), g (en amarillo) y h (en rojo). Se pide a los estudiantes que verifiquen en la figura: $f \circ g$ (en morado) y $(f \circ g) \circ h$ (en azul) y luego, en la recta graduada construyan las razones de: f, g, h, $f \circ g$ y $(f \circ g) \circ h$, para completar los datos de la tabla. (Ver Figura 3-48)



$r(f)$	$r(g)$	$r(f \circ g)$	$r(h)$	$r((f \circ g) \circ h)$
3	0,5	1,5	4	6

Figura 3-48.: Razones de f, g, h, $f \circ g$ y $(f \circ g) \circ h$.

Se plantea construir $g \circ h$ (en café) y $f \circ (g \circ h)$ (en naranja), la Figura 3-49 ilustra la construcción realizada por los estudiantes.

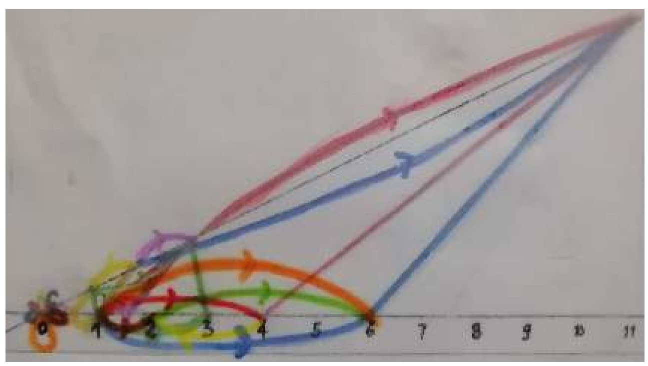


Figura 3-49.: Propiedad asociativa.

Se pregunta ¿cómo son $(f \circ g) \circ h$ y $f \circ (g \circ h)$?
Los estudiantes contestan: “son iguales”, “son la misma”.
Los estudiantes hallan las razones de $g \circ h$ y $f \circ (g \circ h)$, para luego completar los datos de la tabla. (Ver Figura 3-50).

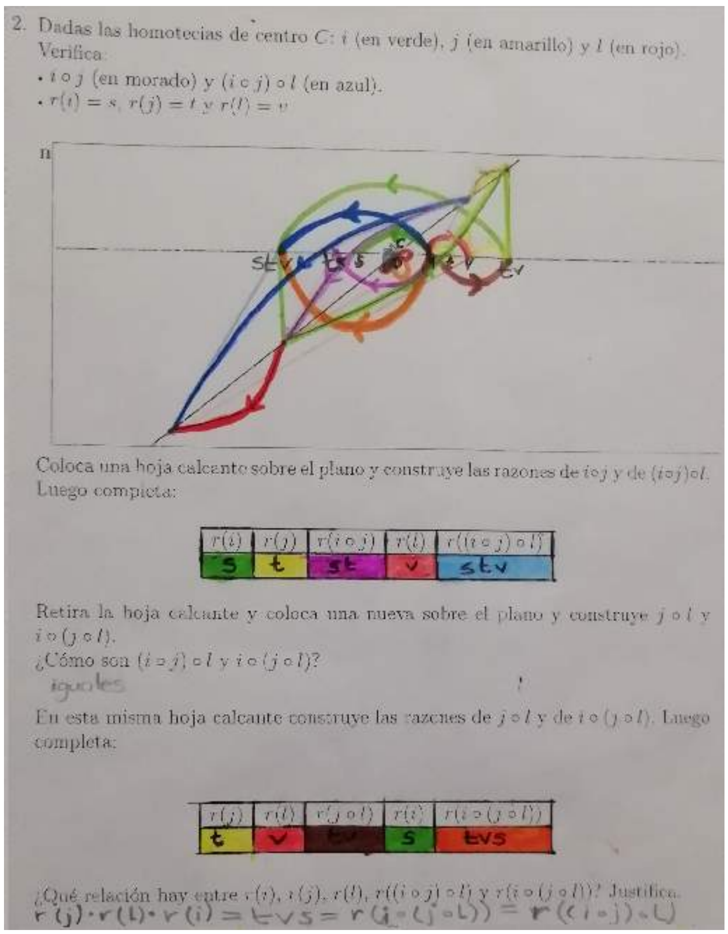
$r(g)$	$r(h)$	$r(g \circ h)$	$r(f)$	$r(f \circ (g \circ h))$
0,5	4	2	3	6

Figura 3-50.: Razones de g, h, f, $g \circ h$ y $f \circ (g \circ h)$.

Se pregunta ¿qué relación hay entre las razones de f, g, h, $(f \circ g) \circ h$ y $f \circ (g \circ h)$?
Los estudiantes contestaron: “al multiplicar las razones da como resultado la razón de

las tres compuestas", "el producto de las razones de f, g y h es igual a la razón de la composición de las tres homotecias", un estudiante estableció "$r(f) \cdot r(g) \cdot r(h) = r((f \circ g) \circ h) = r(f \circ (g \circ h))$".

Se realizó el segundo ejercicio para revisar si las observaciones y la relaciones dichas anteriormente por los estudiantes, se cumplen para las demás homotecias. (Ver Figura 3-51)



2. Dadas las homotecias de centro C: i (en verde), j (en amarillo) y l (en rojo). Verifica:
- $i \circ j$ (en morado) y $(i \circ j) \circ l$ (en azul).
- $r(i) = s$, $r(j) = t$ y $r(l) = v$

Coloca una hoja calcante sobre el plano y construye las razones de $i \circ j$ y de $(i \circ j) \circ l$. Luego completa:

$r(i)$	$r(j)$	$r(i \circ j)$	$r(l)$	$r((i \circ j) \circ l)$
s	t	st	v	stv

Retira la hoja calcante y coloca una nueva sobre el plano y construye $j \circ l$ y $i \circ (j \circ l)$.

¿Cómo son $(i \circ j) \circ l$ y $i \circ (j \circ l)$?

iguales

En esta misma hoja calcante construye las razones de $j \circ l$ y de $i \circ (j \circ l)$. Luego completa:

$r(j)$	$r(l)$	$r(j \circ l)$	$r(i)$	$r(i \circ (j \circ l))$
t	v	[illegible]	s	tvs

¿Qué relación hay entre $r(i)$, $r(j)$, $r(l)$, $r((i \circ j) \circ l)$ y $r(i \circ (j \circ l))$? Justifica.

$r(j) \cdot r(l) \cdot r(i) = tvs = r(i \circ (j \circ l)) = r((i \circ j) \circ l)$

Figura 3-51.: Ejercicio 2-Actividad 11.

En el tercer ejercicio se propusieron tres homotecias de centro C: m, n y w, con razones a, b y d respectivamente.

Se preguntó ¿cuáles son las razones de $(m \circ n) \circ w$ y $m \circ (n \circ w)$?

Los estudiante contestaron: "la multiplicación de las tres razones", "son iguales y son

el producto de las tres razones", "son abd porque se multiplican", algunos estudiantes establecieron: "$r(m) \cdot r(n) \cdot r(w) = r((m \circ n) \circ w) = r(m \circ (n \circ w)) = abd$, porque no importa el orden en que se realice el producto de las razones, es el mismo", se aclaró que no es el orden, sino la forma en que se asocien las razones.
Se concluyó que la composición de homotecias es asociativa y permite verificar la propiedad asociativa del producto de números reales, es decir, $(ab)d = a(bd)$.

Evaluación:
- Algunos estudiantes presentaron dificultades para realizar las construcciones, pues se confundían o se perdían en el proceso, para lo cual se les guió paso a paso de manera que fueran realizando las construcciones y lograran responder las preguntas.
- Se evidenció geométricamente la propiedad asociativa de la multiplicación de números reales, mediante el uso de homotecias de igual centro.

3.12. Actividad 12. Evaluación.

Nombre: Evaluación. (Anexo 12)
Objetivo: Verificar que los estudiantes:
- Reconocen las propiedades de la multiplicación de los números reales y las leyes de signos, mediante el uso de homotecias de igual centro.
- Reconocen las características de la imagen de un polígono al aplicar una homotecia.

Se plantea la evaluación para hacer un diagnóstico de los resultados del proceso desarrollado por los estudiantes; este taller evaluativo consta de 2 ítems:

El primer ítem establece ilustrar geométricamente lo pedido, usando homotecias:

- Una propiedad de la multiplicación de los números reales.
- Una ley de signos.

Este ítem busca dar libertad al estudiante para ilustrar una de las propiedades de la multiplicación de números reales y una ley de signos, además que permite evidenciar la habilidad de relacionar y utilizar las homotecias, para así crear mayor seguridad en el conocimiento del estudiante.

La mayoría de los estudiantes mostraban seguridad al momento de desarrollar el taller, pocos estaban inseguros porque no sabían cuál propiedad ilustrar, preguntaban que si cambiaba el valor de la evaluación según la propiedad que ilustraran, por lo que se dialogó con los estudiantes manifestándoles que el objetivo de la actividad no era sacar una nota, sino evidenciar las habilidades del conocimiento adquirido a partir de las actividades desarrolladas. Se les dijo que si deseaban podían ilustrar más de una propiedad.

Las Figuras 3-52, 3-53, 3-54, 3-55, 3-56, 3-57, 3-58 y 3-59 presentan las construcciones realizadas por los estudiantes.

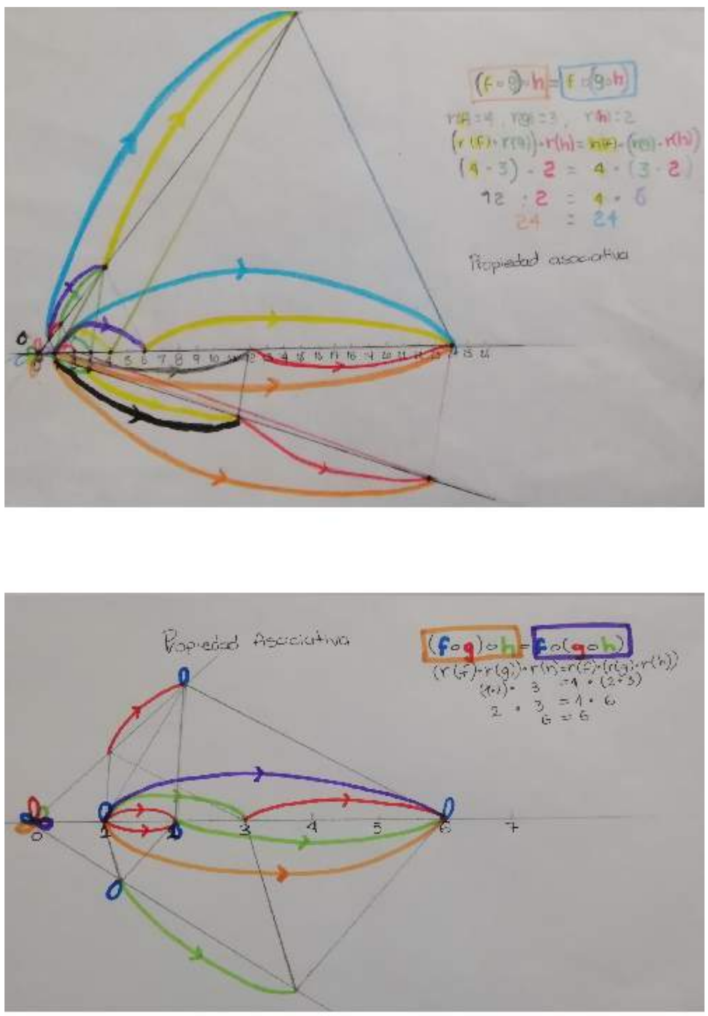


Figura 3-52.: Propiedad asociativa.

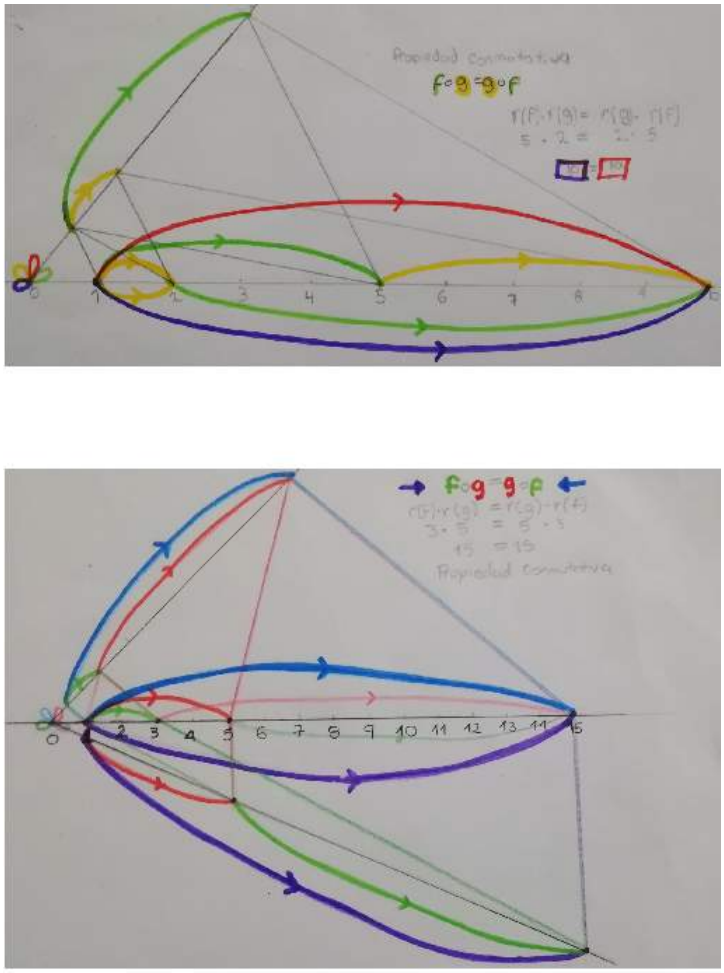


Figura 3-53.: Propiedad conmutativa.

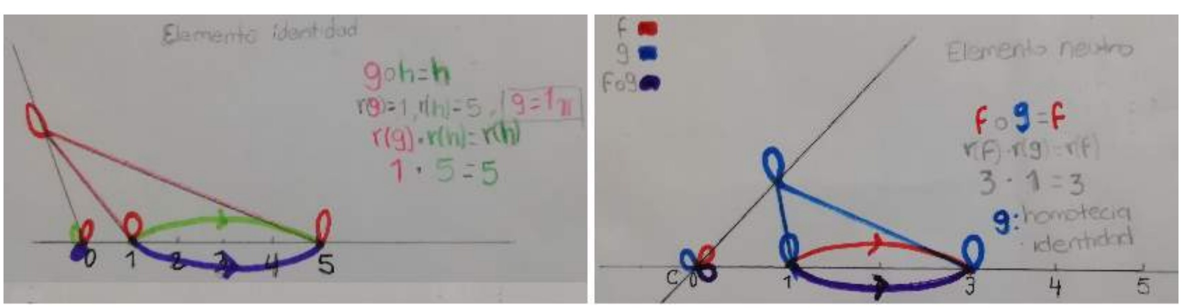


Figura 3-54.: Elemento neutro.

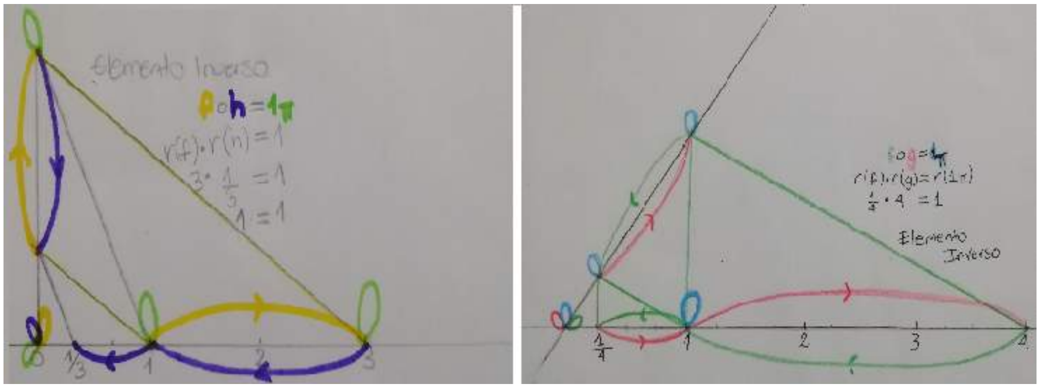


Figura 3-55.: Inversos multiplicativos.

Entre las propiedades ilustradas por los estudiantes se encontraron:
- 12 estudiantes ilustraron la propiedad conmutativa.
- 7 estudiantes ilustraron el elemento neutro.
- 4 estudiantes ilustraron los elementos inversos.
- 2 estudiantes ilustraron la propiedad asociativa.

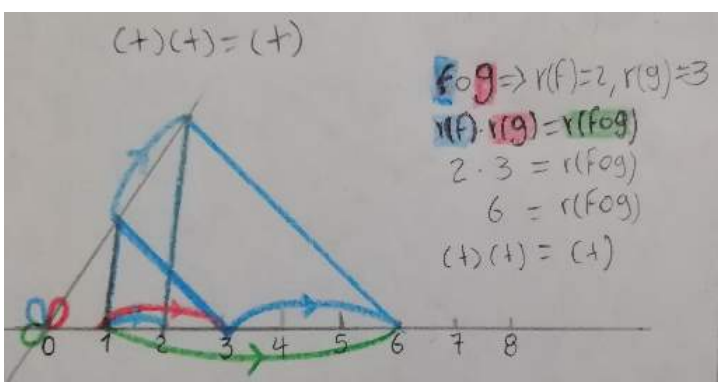


Figura 3-56.: $(+)(+) = (+)$.

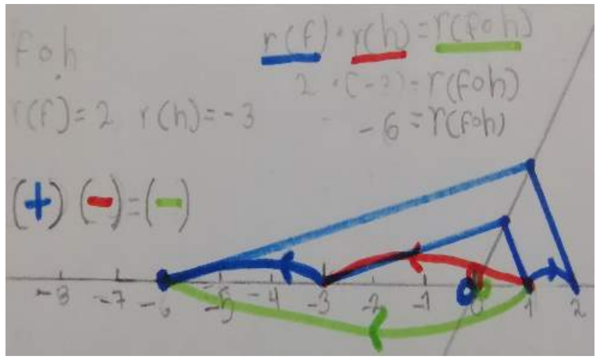


Figura 3-57.: $(+)(-) = (-)$.

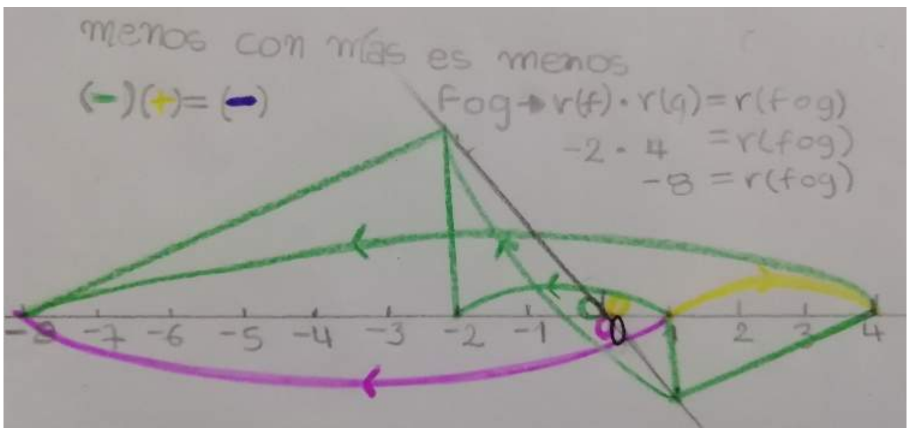


Figura 3-58.: $(-)(+) = (-)$.

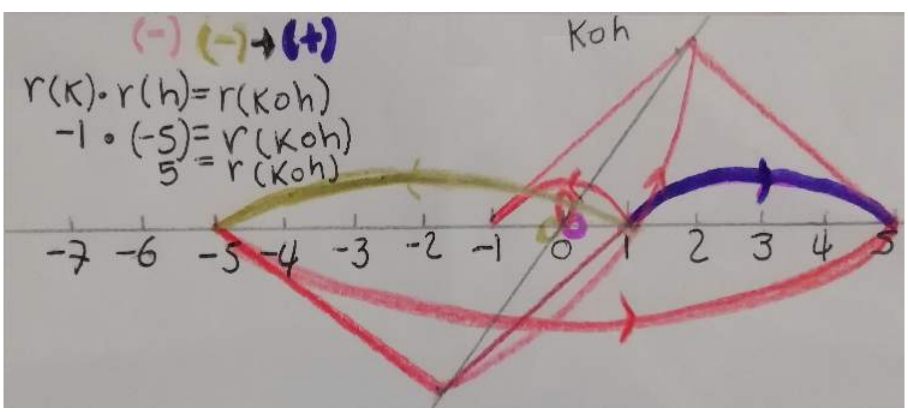


Figura 3-59.: $(-)(-) = (+)$.

Entre las leyes de signos ilustradas por los estudiantes se encontraron:
- 8 estudiantes ilustraron positivo por positivo.
- 6 estudiantes ilustraron positivo por negativo.
- 7 estudiantes ilustraron negativo por positivo.
- 5 estudiantes ilustraron negativo por negativo.

El segundo ítem busca evidenciar que los estudiantes reconocen las características de la imagen de una figura al aplicar una homotecia.

El segundo ítem pide mencionar en cada caso, cómo debe ser la razón de la homotecia h, de tal manera que al hallar la imagen de una figura por h, se cumpla:
- La imagen es igual a la figura.
28 estudiantes respondieron $r(h) = 1$.

- La imagen no se invierte y es de menor tamaño que la figura.
26 estudiantes respondieron $0 < r(h) < 1$.
2 estudiantes respondieron $r(h) < 1$, no tuvieron en cuenta que esta afirmación incluía casos en donde la imagen es invertida y/o de mayor tamaño.

- La imagen no se invierte y es de mayor tamaño que la figura.
27 estudiantes respondieron $r(h) > 1$.
1 estudiante respondió $r(h) < 1$, confundió el signo $<$ con $>$.

- La imagen es invertida y de igual tamaño que la figura.
25 estudiantes respondieron $r(h) = -1$.
3 estudiantes no respondieron.

- La imagen es invertida y de menor tamaño que la figura.
17 estudiantes respondieron $-1 < r(h) < 0$.
6 estudiantes respondieron $r(h) < 0$, no tuvieron en cuenta que esta afirmación incluía casos en donde la imagen es invertida pero también de mayor tamaño.
5 estudiantes no respondieron.

- La imagen es invertida y de mayor tamaño que la figura.
18 estudiantes respondieron $r(h) < -1$.
4 estudiantes respondieron $r(h) > 1$, no tuvieron en cuenta que la imagen debía ser invertida.
5 estudiantes respondieron $r(h) > -1$, no tuvieron en cuenta que incluían casos de

menor tamaño, igual tamaño y la imagen no se invertía.
1 estudiante no respondió.

- La imagen de la figura es el centro de la homotecia.
26 estudiantes respondieron $r(h) = 0$.
2 estudiantes no respondieron.

En el segundo ítem, se guió a los estudiantes recordándoles que tuvieran en cuenta lo desarrollado en las Actividades 5 y 10.

La Tabla **3-2** presenta el porcentaje de respuestas correctas de la Actividad 12.

Tabla 3-2.: Porcentaje de respuestas correctas - Actividad 12.

Ítem	Correctas %
1(a)	$89,29$
1(b)	92,86
2(a)	100
2(b)	92,86
2(c)	96,43
2(d)	89,29
2(e)	60,71
2(f)	64,29
2(g)	92,86

La actividad permitió evidenciar que la mayoría de los estudiantes reconocen:
- Las propiedades de la multiplicación de los números reales, mediante el uso de homotecias de igual centro.
- Las leyes de signo, mediante el uso de homotecias de igual centro.
- Las características de la imagen de una figura al aplicar una homotecia.

4. Conclusiones

Los aportes históricos, epistemológicos y teóricos me aportaron una visión más amplia para la construcción, el desarrollo y el aprendizaje de un concepto.

Los aspectos metodológicos, didácticos y pedagógicos desarrollados en el trabajo permitieron diseñar e implementar la unidad didáctica acorde a la estructura cognitiva de los estudiantes, para relacionarlos de manera adecuada con el nuevo conocimiento.

Las construcciones planteadas en el trabajo y realizadas por los estudiantes, permitieron trabajar elementos de geometría como: puntos, rectas paralelas, rectas secantes, colinealidad, punto medio de un segmento, triángulos, cuadriláteros, entre otros; los cuales permitieron desarrollar y evidenciar diferentes propiedades geométricas.

Ante el trabajo realizado se evidenció que los estudiantes presentaron falencias en la comprensión e interpretación de enunciados, por ende, las actividades desarrolladas con los estudiantes aportaron al mejoramiento de la interpretación de enunciados.

Las actividades planteadas contribuyeron a desarrollar en los estudiantes la habilidad de argumentar y justificar proposiciones. También permitieron observar un interés y motivación para participar y trabajar de manera colaborativa en el desarrollo de los ejercicios.

Tras el trabajo realizado con los estudiantes se evidenciaron falencias al momento de medir longitudes con la regla. Las actividades planteadas contribuyeron a emplear correctamente la regla como instrumento para medir. También permitieron apreciar de manera sencilla las propiedades y características de la imagen de un polígono por una homotecia.

El desarrollo de las diferentes actividades evidenció la relación existente entre la multiplicación de números reales y la composición de homotecias de igual centro. Los estudiantes mostraron interés y se sintieron motivados al descubrir que de manera geométrica se iban evidenciando las propiedades de la multiplicación de los números reales.

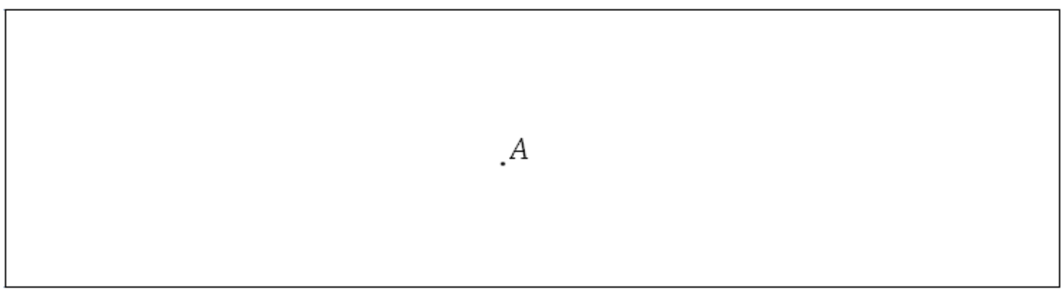
El trabajo de un concepto desarrollado en conjunto desde la aritmética y la geometría, permite variar, enriquecer y presentar actividades a los estudiantes de forma dinámica, con la obtención de mejores resultados.

A. Anexo 1: Actividad de aula 1. Conceptos básicos

I.E.D DOMINGO SAVIO			
Área de Matemáticas	**Actividad de Aula 1: Conceptos Básicos**		
Estudiante:		**Grado:**	**Fecha:**
Materiales: Lápiz, esfero, borrador, colores, regla y escuadra.			

1. Sea A un punto del plano Π.

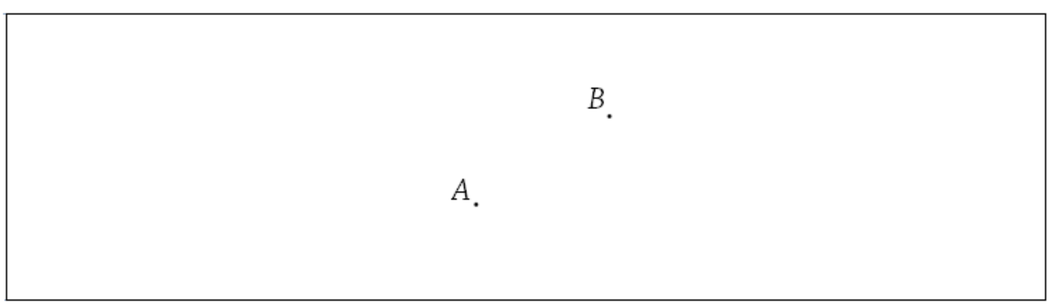
Π



- Traza todas las rectas que están en el plano y que pasan por el punto A.
- ¿Cuántas rectas pasan por el punto A?____________________

2. Sean A y B dos puntos del plano Π.

Π



- Traza todas las rectas que pasan a la vez por los puntos A y B.

- ¿Cuántas rectas pasan a la vez por los puntos A y B?__________________
- Si dos rectas m y l pasan por los puntos A y B ¿Qué se puede concluir con respecto a las dos rectas? __________________________________

3. Completa los espacios con las siguientes palabras para que las proposiciones sean verdaderas.

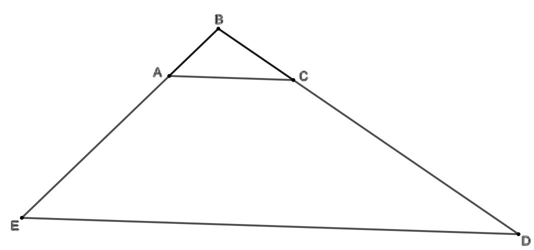
Secantes	Paralelas	Colineales	No colineales

Sean p y q dos rectas que están en el plano Π

- Las rectas p y q son ______________ si son iguales o no tienen puntos en común.
- Las rectas p y q son ______________ si se intersecan en un solo punto.
- La recta p pasa por los puntos A y B y la recta q pasa por los puntos C y D, entonces los puntos A, B, C y D son ______________ si las rectas p y q son iguales.
- La recta p pasa por los puntos A y B y el punto C no está en p, entonces los puntos A, B y C son ______________.

4. En la siguiente figura los segmentos AC y DE son paralelos.
   Calcula la medida del segmento AE,
   si las medidas de los segmentos:

$$AB = 3u$$
$$BC = 4u$$
$$BD = 16u$$

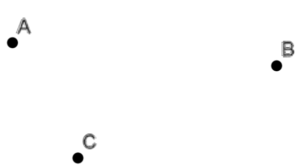
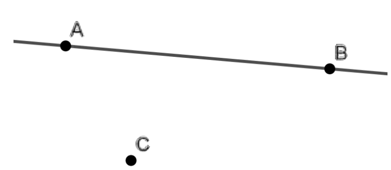


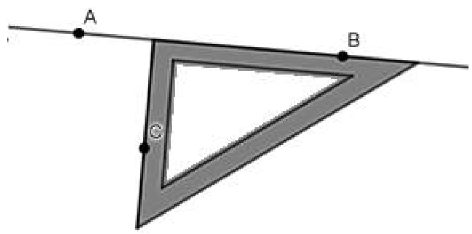
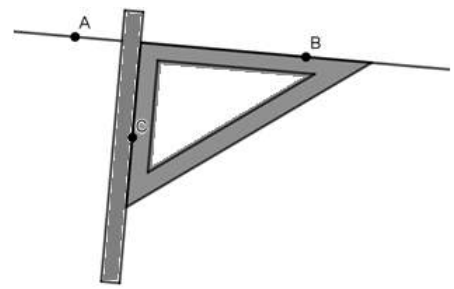
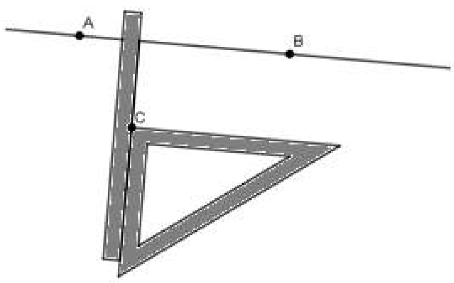
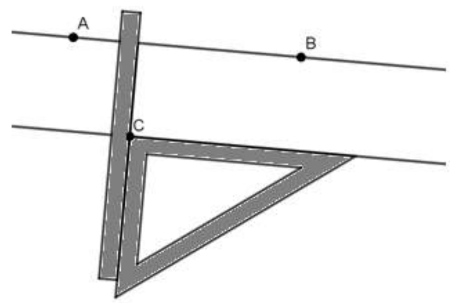
5. Traza dos rectas paralelas y distintas utilizando regla y escuadra, e indica los pasos a seguir de manera que la construcción garantice que sean paralelas.

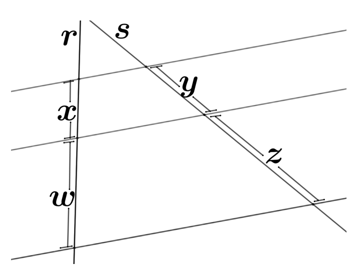
B. Anexo 2: Actividad de aula 2. Rectas paralelas-Proporción

I.E.D DOMINGO SAVIO		
Área de Matemáticas	**Actividad de Aula 2: Rectas Paralelas-Proporción**	
Estudiante:	**Grado:**	**Fecha:**
Materiales: Lápiz, esfero, borrador, colores, regla y escuadra.		

Resumen:

Dos rectas que están en un mismo plano son **paralelas** si son iguales o no tienen puntos en común. Si las rectas l y m son paralelas, se escribe $l \parallel m$.	
Para construir rectas paralelas con regla y escuadra se recomiendan los siguientes pasos.	
(1) Ubica tres puntos A, B y C en el plano Π de tal manera que no sean colineales.	(2) Traza la recta AB.
	
(3) Toma la escuadra y ubica los lados que conforman el ángulo recto, de manera que, un lado este sobre la recta AB y el otro pase por el punto C.	(4) Coloca una regla sobre el lado de la escuadra que pasa por el punto C, la cual debe mantenerse firme y sin moverse.

	
(5) Con la regla firme desliza la escuadra hasta que el vértice del ángulo recto coincida con el punto C.	(6) Traza la recta que contiene a Cy que está determina por el lado de la escuadra que estaba sobre la recta AB.
	

Razón: Expresión numérica de comparación entre las medidas de dos magnitudes. Se escribe: $$\frac{x}{y}$$	**Proporción:** Igualdad entre dos razones. Se escribe: $$\frac{x}{y} = \frac{w}{z} = K$$
Teorema de Tales: Si dos rectas $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{s}$ se cortan por varias rectas paralelas, los segmentos determinados por los puntos de intersección sobre una de ellas son proporcionales a los segmentos determinados por los puntos correspondientes en la otra.	 $$\frac{x}{y} = \frac{w}{z} = K$$

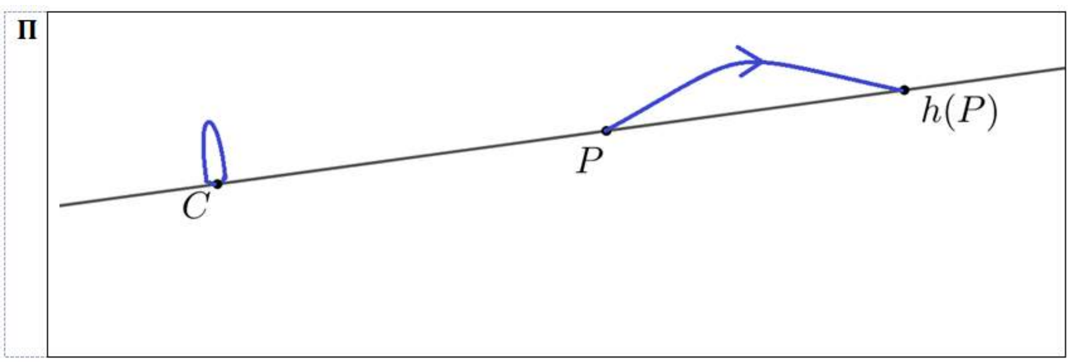
1. Realiza el proceso descrito para construir:
   - Una recta que pase por el punto A y que sea paralela a la recta BC.
   - Una recta que pase por el punto B y que sea paralela a la recta AC.
2. Si en la ilustración del teorema de Tales los valores de x,y y w son: $x = 4$, $y = 6$ y $w = 8$, determina los valores de z y k.

3. Sigue las siguientes instrucciones y contesta.
   - Traza tres puntos P, Q y R no colineales de tal manera que $PQ = 12$ y $QR = 8$
   - Une los puntos para formar un triángulo.
   - Ubica con ayuda de la regla el punto medio S del lado PQ.
   - Traza la recta n que contiene a S y que es paralela al lado PR.
   - Ubica el punto U, el cual es la intersección de la recta n con el lado QR.
   - ¿Qué característica tiene el punto U? ____________________
   - Determina las razones:
   $$\frac{RU}{UQ} = \_\_\_\_ \qquad \frac{PS}{SQ} = \_\_\_\_$$
4. La anterior construcción cumple el teorema de Tales.
   De acuerdo al enunciado del teorema:
   - ¿Cuáles serían las rectas r y s?____________
   - ¿Cuáles serían las rectas paralelas que cortan a las rectas r y s?____________
   - ¿Cuáles serían los puntos de intersección entre las rectas paralelas y la rectas r y s? ____________
   - ¿Cuáles serían los segmentos proporcionales?
5. Ahora, con la construcción del ítem (3):
   - Traza la recta m que contiene a S y que es paralela al lado QR.
   - Ubica el punto T, el cual es la intersección de la recta m con el lado PR.
   - ¿Qué característica tiene el punto T?____________
   - Traza el segmento TU.
   - ¿Qué relación tiene el segmento TU con el lado PQ?____________
   - Mide con ayuda de la regla los segmentos ST, TU, US y PR.
   - ¿Qué características tienen los segmentos ST, TU y US al relacionarlos con los lados QR,PQ y PR respectivamente?
   - Completa:
   $$\frac{PT}{PR} = \qquad \frac{QS}{PQ} = \qquad \frac{QU}{QR} =$$
   $$\frac{US}{PR} = \qquad \frac{ST}{QR} = \qquad \frac{TU}{PQ} =$$

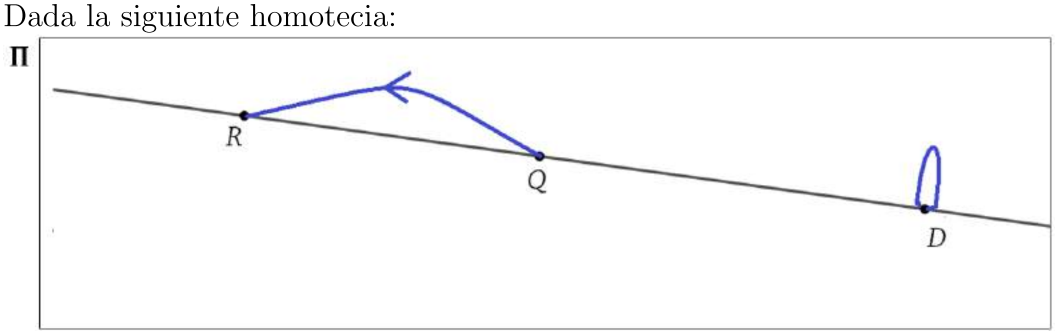
C. Anexo 3: Actividad de aula 3. Homotecia 1

I.E.D DOMINGO SAVIO		
Área de Matemáticas	**Actividad de Aula 3: Homotecia 1**	
Estudiante:	**Grado:**	**Fecha:**
Materiales: Lápiz, esfero, borrador, colores, regla y escuadra.		

Homotecia: Para cada punto C del plano Π, una homotecia de centro C, es una transformación $h : \Pi \to \Pi$ determinada por la flechas $(C, h(C) = C)$ y $(P, h(P))$, donde C, P y $h(P)$ son colineales. A la flecha $(C, h(C) = C)$ que corresponde a (C, C) la llamamos bucle.



1. Dada la siguiente homotecia:



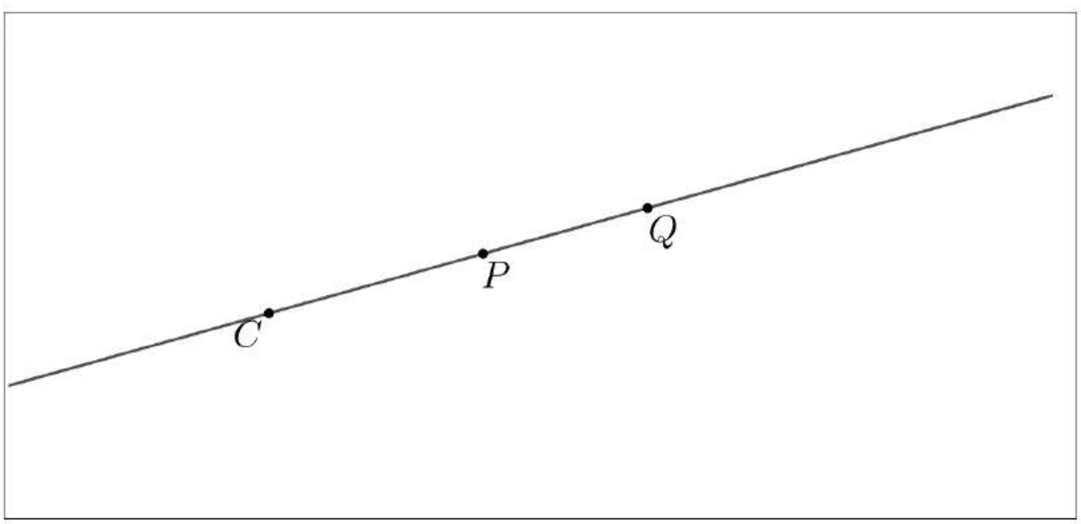
Determina:

- Centro: ______________________
- Bucle: ______________________
- Flechas: ______________________

2. Dados tres puntos C, P y Q colineales, realiza en el plano dado la siguiente construcción:

   - Dibuja las flechas (C, C) y (P, Q) que corresponden a una homotecia h de centro C
   - Ubica un punto X que no este sobre la recta CP
   - Traza la recta CX
   - Traza la recta PX
   - Traza una recta m que pase por Q, tal que $m \parallel PX$
   - Ubica el punto $h(X)$ en la intersección de las rectas m y CX
   - Dibuja la flecha $(X, h(X))$

Π

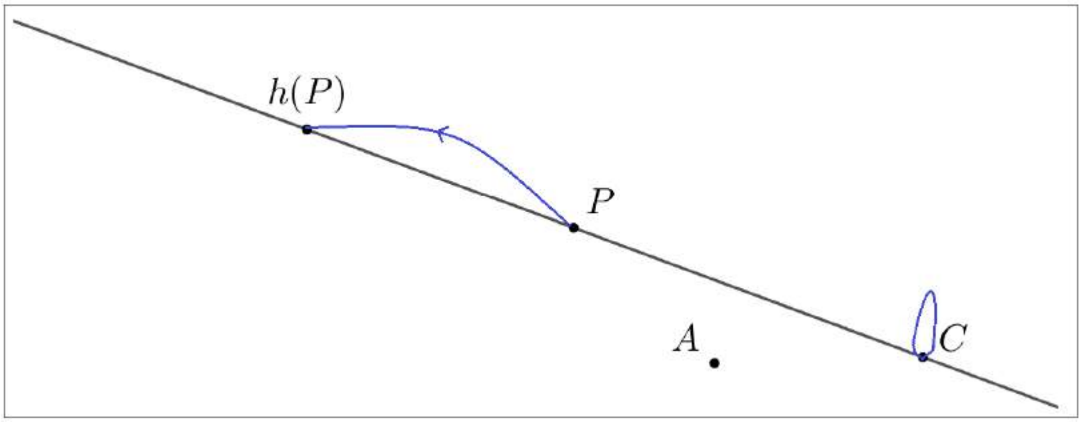


De esta manera se halla la imagen $h(X)$ de cada punto X de Π por la homotecia h.

3. Determina la imagen $h(A)$ del punto A de Π, según el caso.

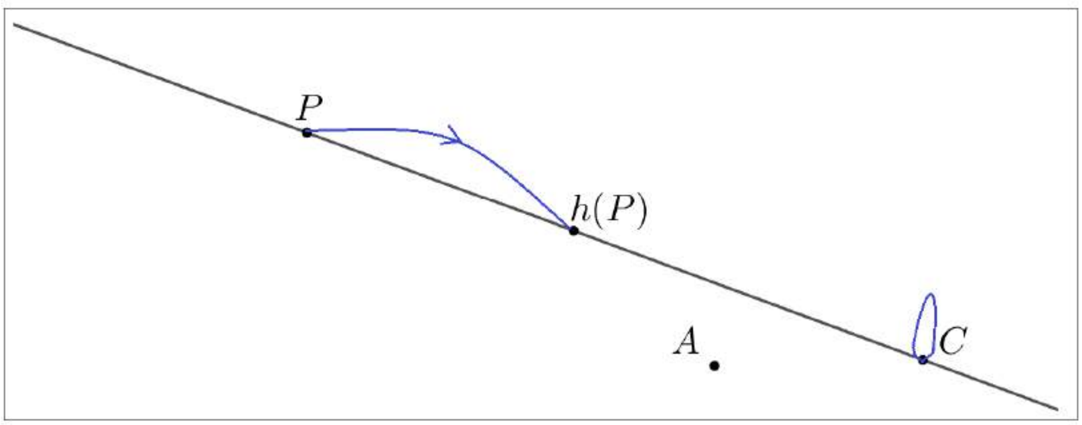
- Caso I.

Π



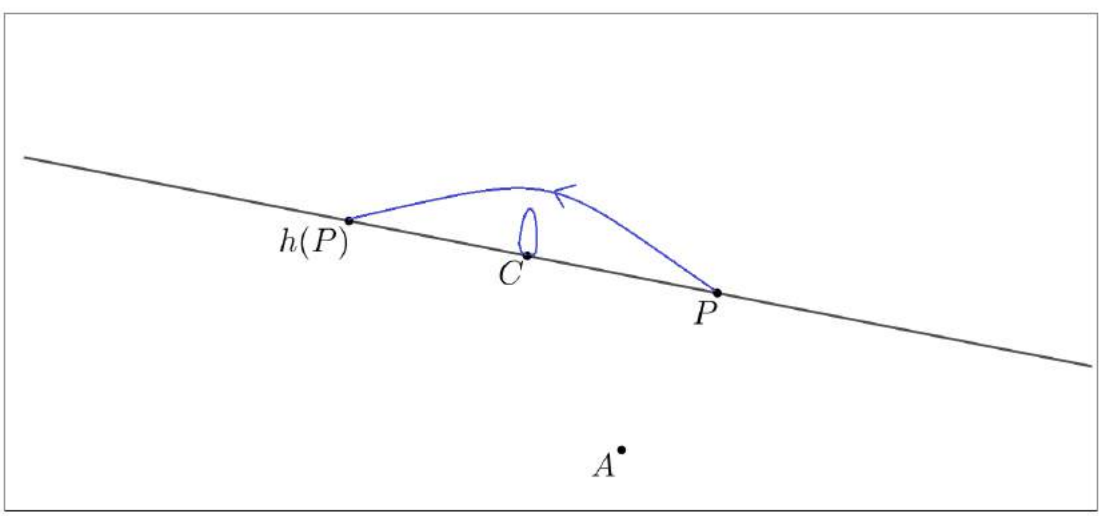
- Caso II.

Π



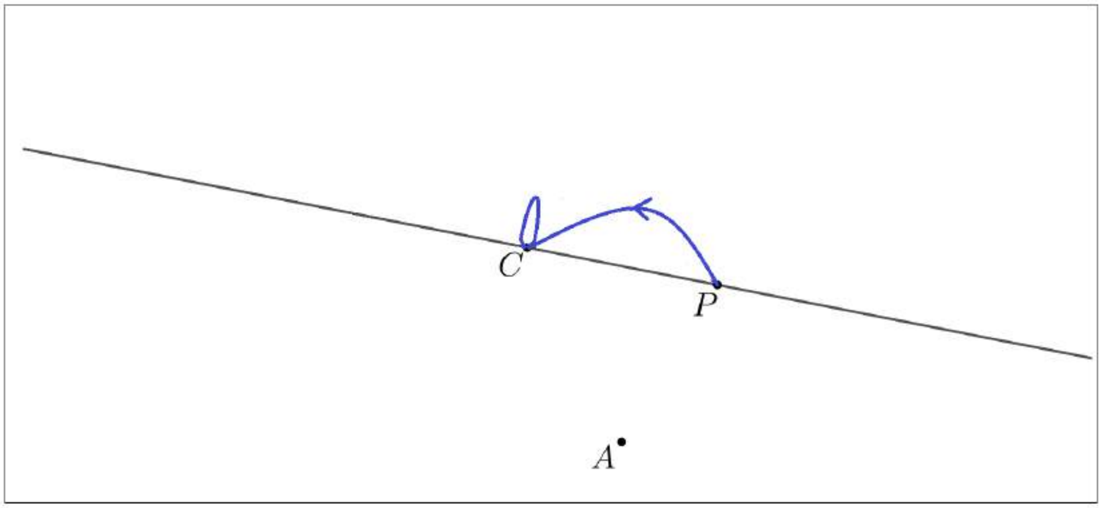
- Caso III.

Π



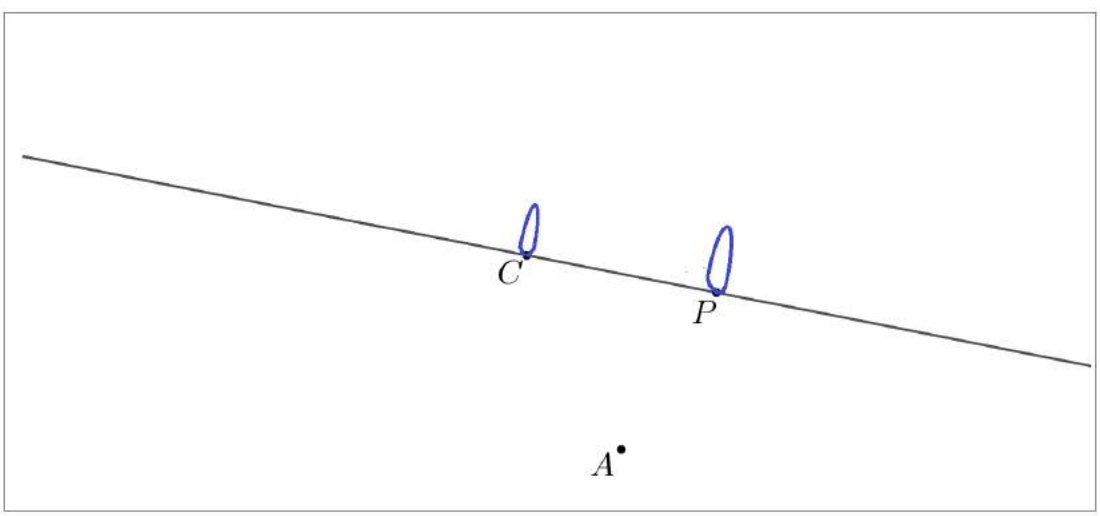
- Caso IV. $h(P) = C$

Π



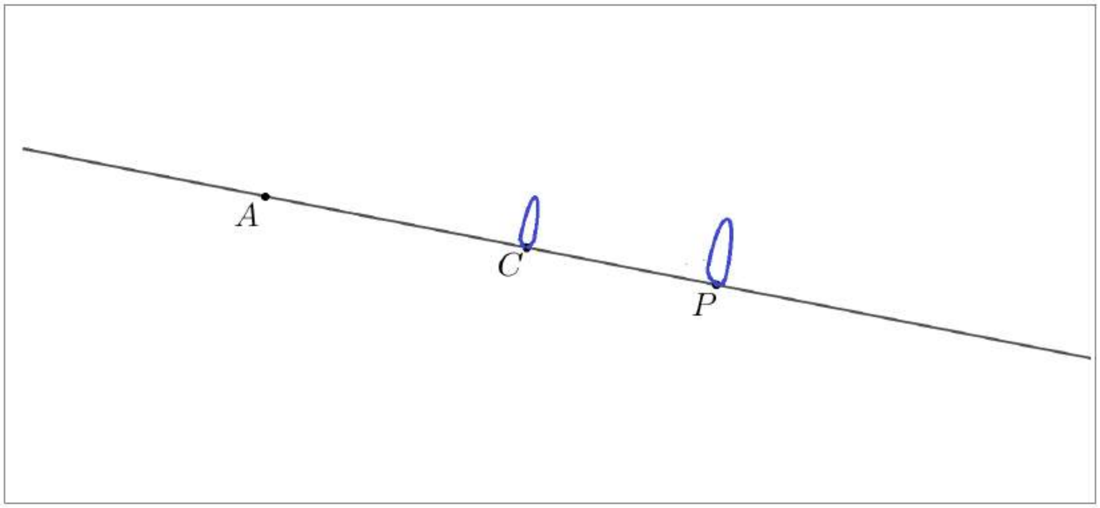
- Caso V. $h(P) = P$

Π



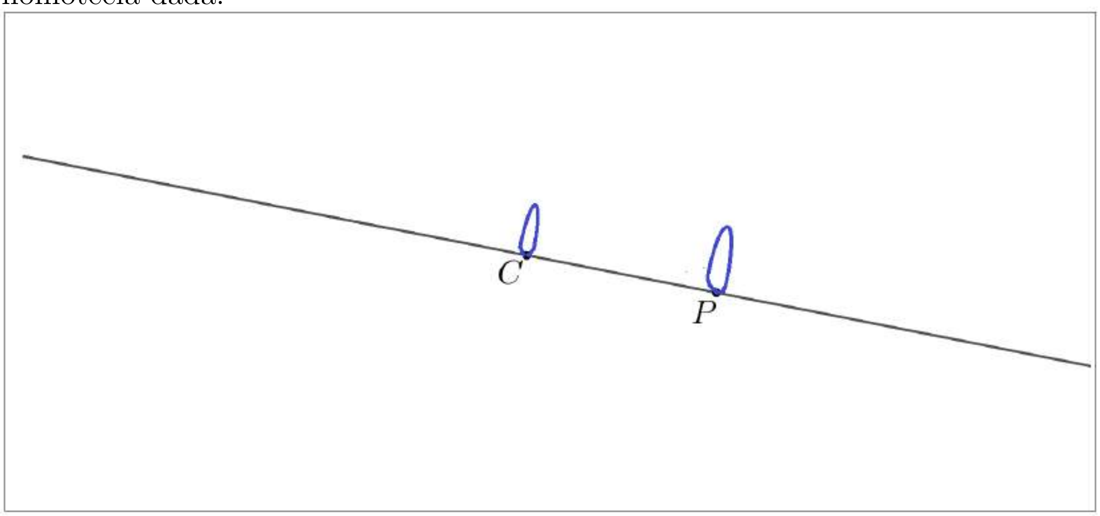
En el mismo caso V, halla ahora la imagen de A, si se encuentra en la recta CP.

Π



4. Ahora ubica el punto A en cualquier parte del plano y halla su imagen al aplicar la homotecia dada.

Π



Revisa las construcciones anteriores y compáralas con las de tus compañeros, luego escribe tus observaciones.

____

____

____

¿Cómo se llaman las flechas (A, A) que inician en un punto A cualquiera y terminan en ese mismo punto? ______________________________

La homotecia h con $h(P) = P$ para cada punto P, recibe el nombre de homotecia identidad y se nota 1_Π.

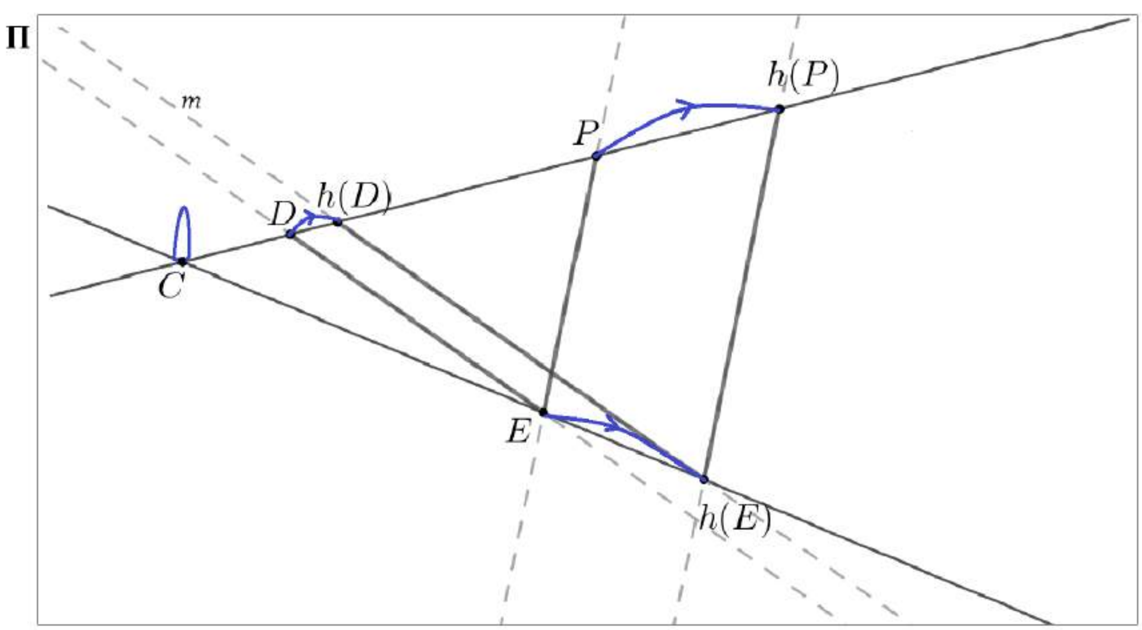
¿Cuál es el centro de la homotecia 1_Π?______________________________

¿Cuáles son las flechas que determinan la homotecia 1_Π?______________________________

D. Anexo 4: Actividad de aula 4. Homotecia 2

I.E.D DOMINGO SAVIO		
Área de Matemáticas	**Actividad de Aula 4: Homotecia 2**	
Estudiante:	**Grado:**	**Fecha:**
Materiales: Lápiz, esfero, borrador, colores, regla y escuadra.		

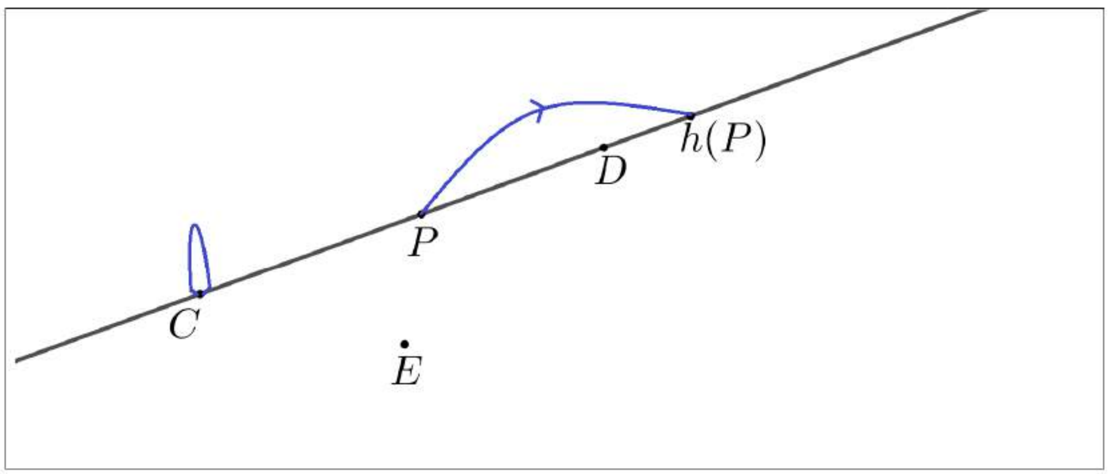
La homotecia h de centro C, determinada por las flechas (C, C) y (P, P), es decir, si $h(P) = P$ para cada punto P, se llama la homotecia identidad y se nota 1_Π.
Dada una homotecia h de centro C determinada por las flechas (C, C) y $(P, h(P))$.
La siguiente figura ilustra los pasos para determinar la imagen h de un punto D que está en la recta CP.
(1) Ubica un punto E cualquiera, que no esté sobre la recta CP.
(2) Determina la imagen $h(E)$ del punto E.
(3) Usando la flecha $(E, h(E))$ halla $h(D)$.



1. Determina $h(D)$ para cada caso.

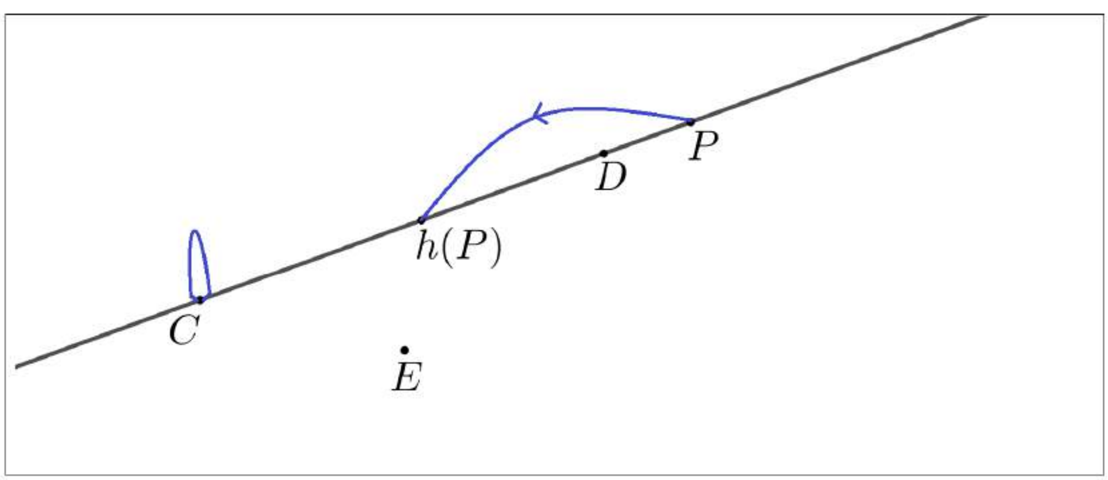
- Caso I.

$\mathbf{\Pi}$

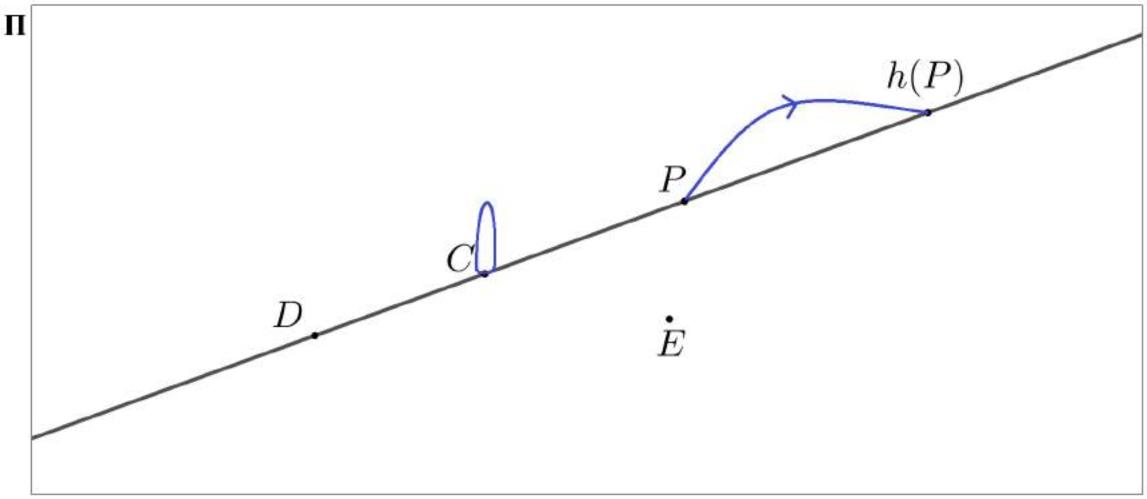


- Caso II.

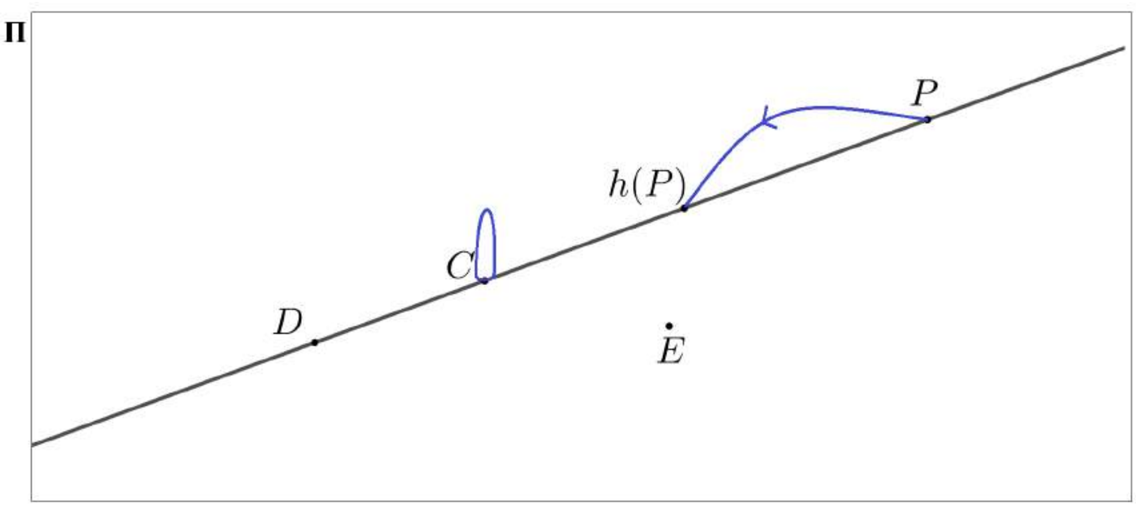
$\mathbf{\Pi}$



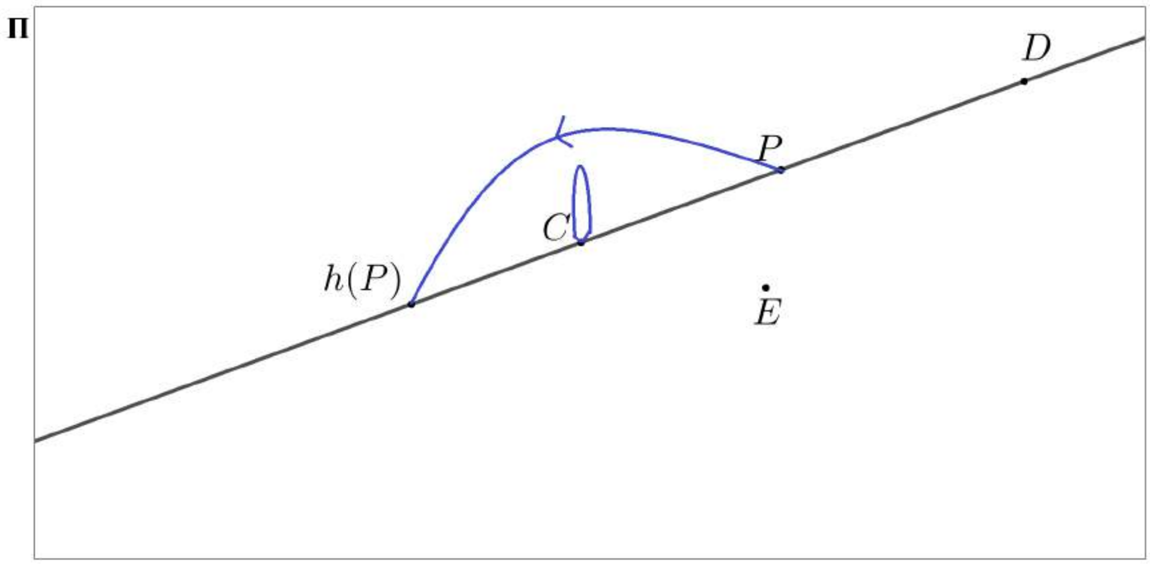
- Caso III.



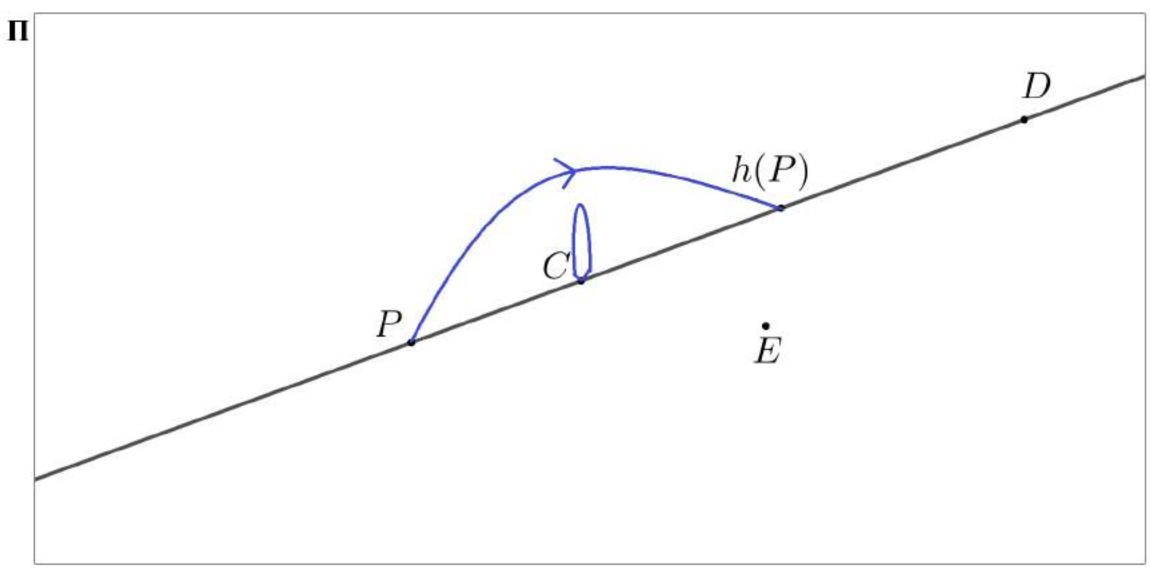
- Caso IV.



- Caso V.



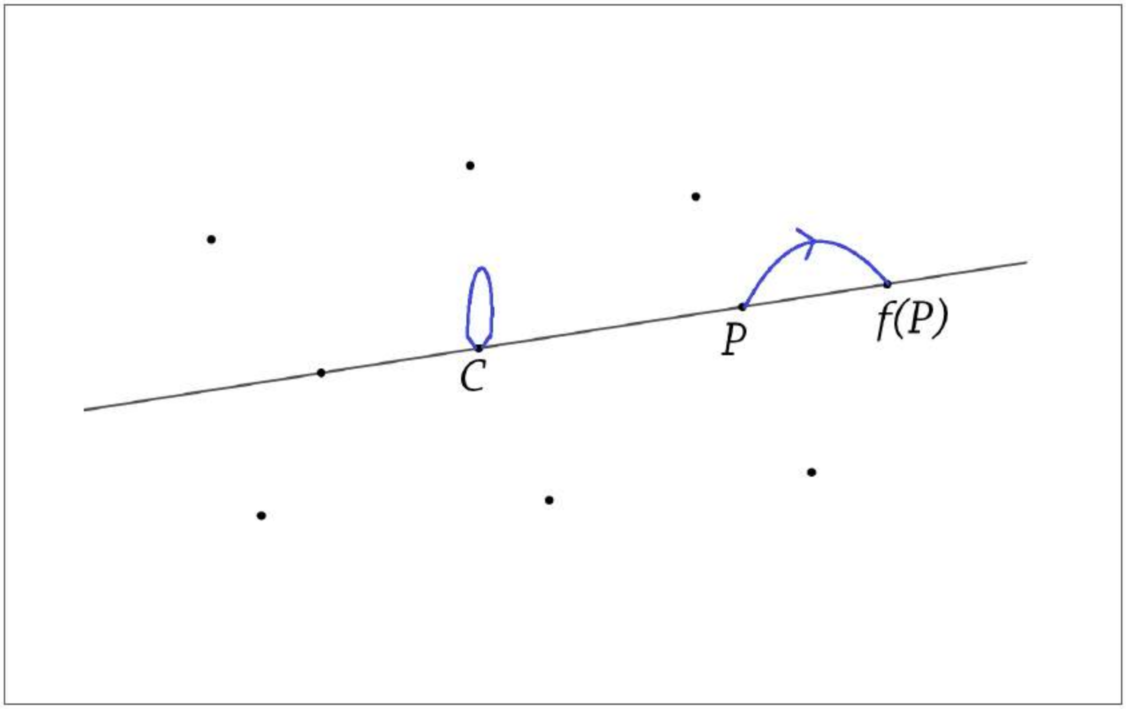
- Caso VI.



2. Construye:

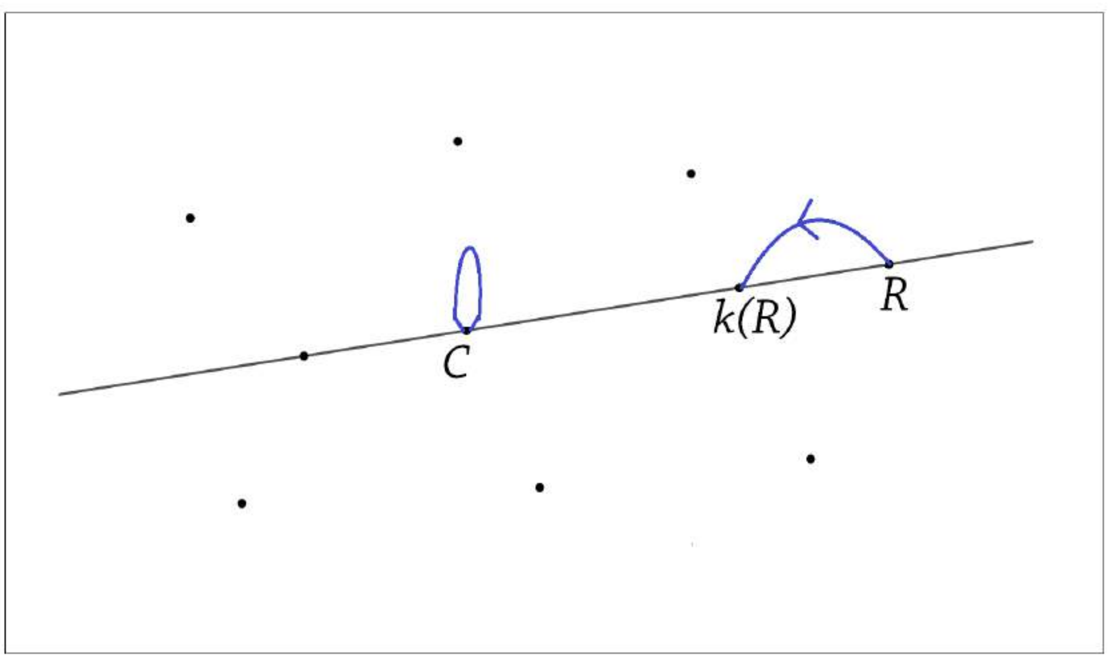
- Las imágenes por la homotecia f, de los puntos señalados.

Π

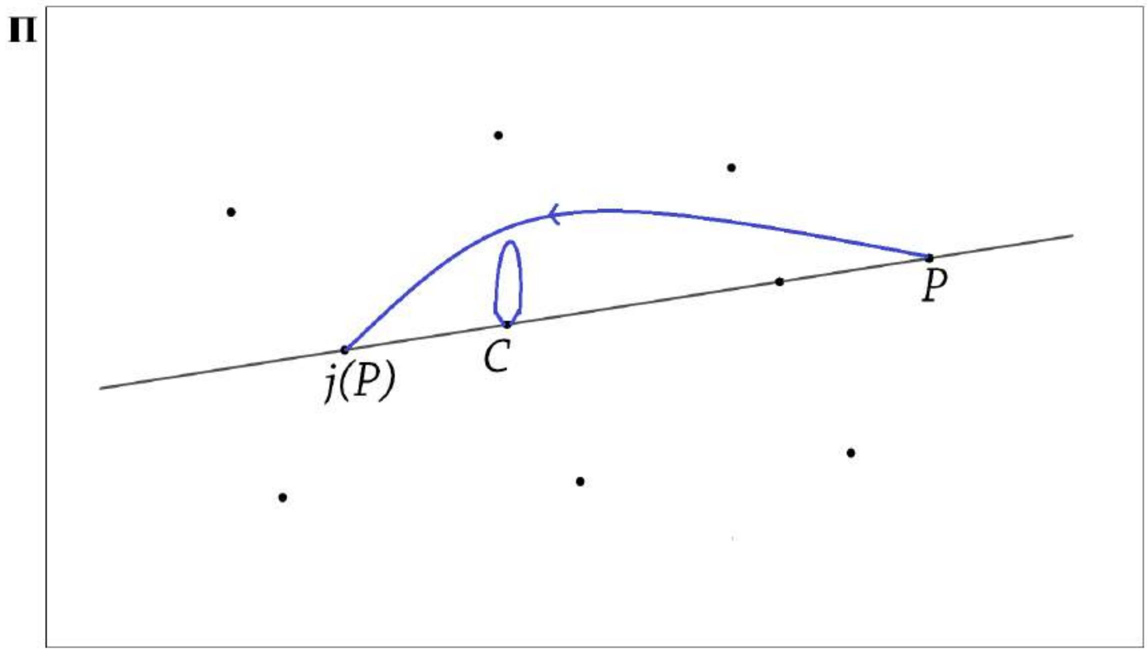


- Las imágenes por la homotecia k, de los puntos señalados.

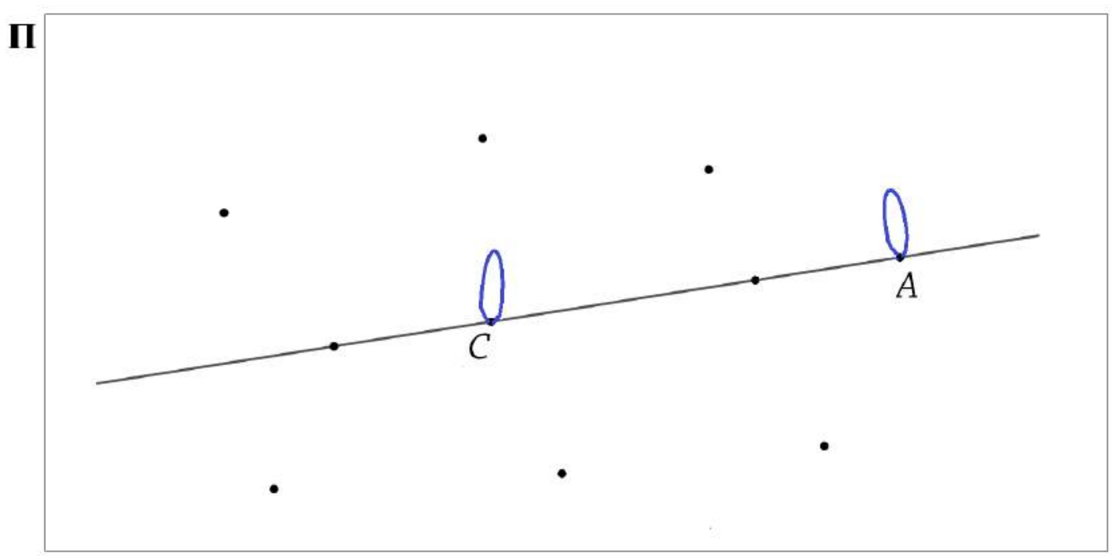
Π



- Las imágenes por la homotecia j, de los puntos señalados.

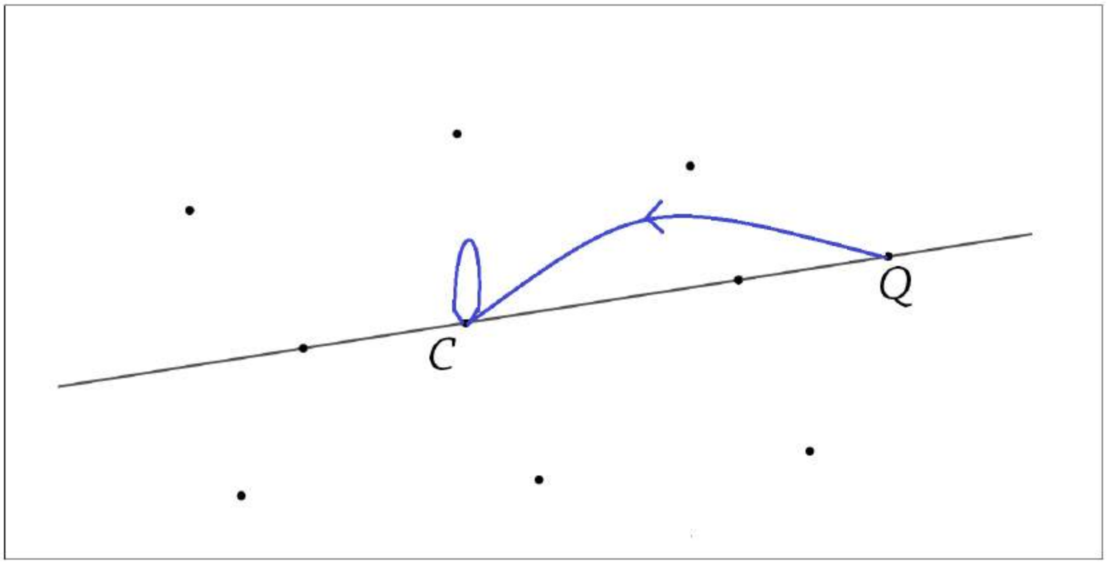


- Las imágenes por la homotecia h, de los puntos señalados.



- Las imágenes por la homotecia u, de los puntos señalados.

Π



3. Completa los espacios para que las proposiciones sean verdaderas.
   Dada una homotecia h de centro C determinada por las flechas (C, C) y $(P, h(P))$ entonces la imagen $h(X)$ de un punto X cumple:

   - Si P está entre C y $h(P)$ entonces X está entre ________ y $h(X)$
   - Si $h(P)$ está entre C y P entonces ________ está entre ________ y ________
   - Si C está entre P y $h(P)$ entonces ________ está entre ________ y ________
   - Si $C = h(P)$ entonces ________
   - Si $h(P) = P$ para todo punto P, entonces ________, por lo tanto $h =$________

E. Anexo 5: Actividad de aula 5. Homotecia-Figuras

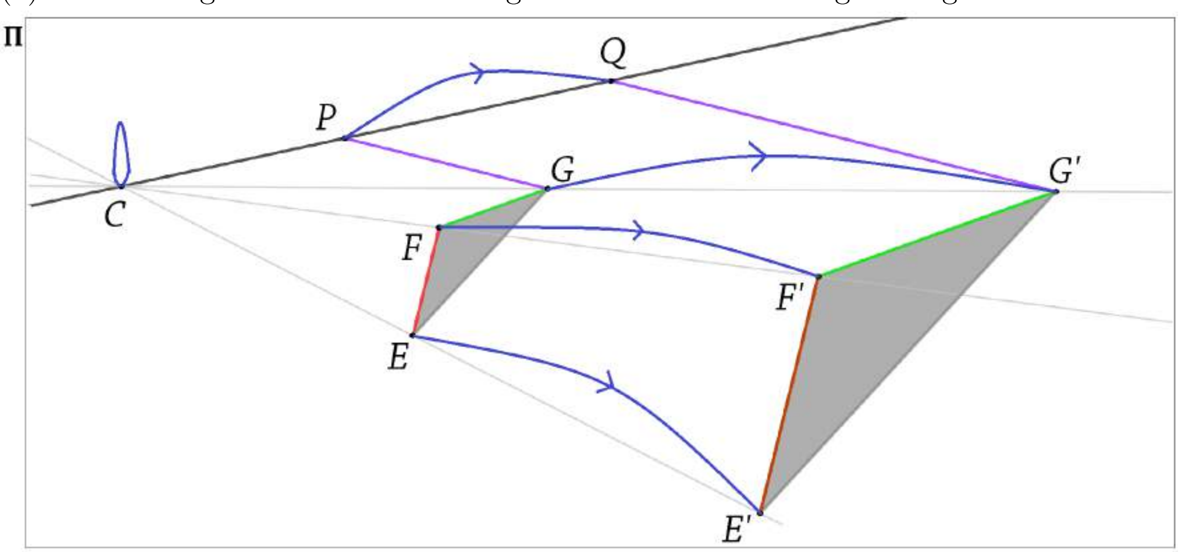
I.E.D DOMINGO SAVIO		
Área de Matemáticas	**Actividad de Aula 5: Homotecia-Figuras**	
Estudiante:	**Grado:**	**Fecha:**
Materiales: Lápiz, esfero, borrador, colores, regla y escuadra.		

Considere una homotecia h de centro C determinada por las flechas (C, C) y $(P, h(P))$, donde $h(P) = Q$.

Para determinar la imagen de un polígono mediante h se realizan los siguientes pasos:

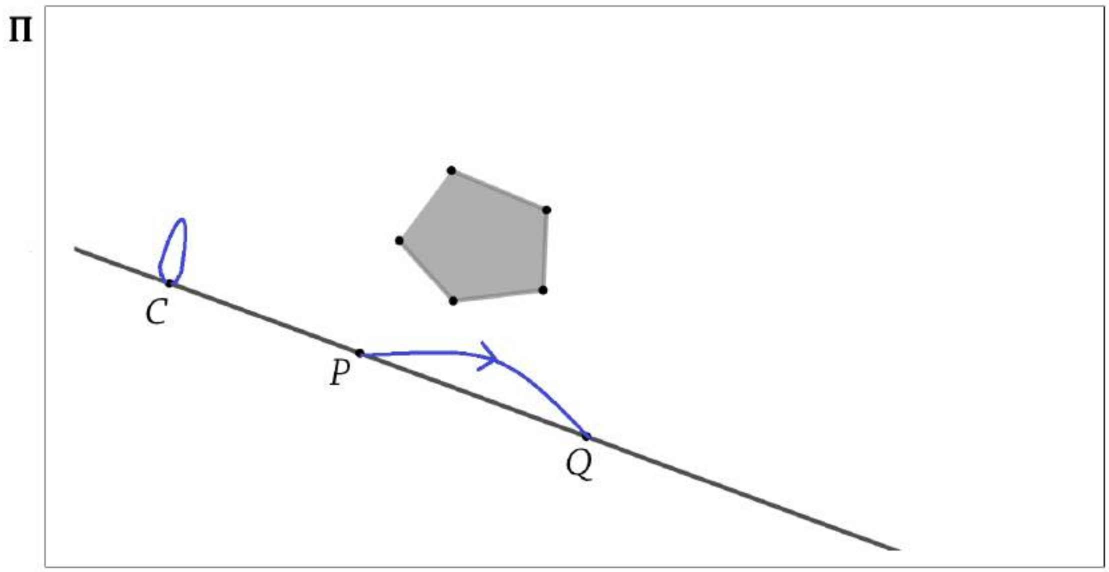
(1) Halla la imagen de cada uno de los vértices del polígono aplicando h.

(2) Une la imágenes de los vértices siguiendo el orden de la figura original.



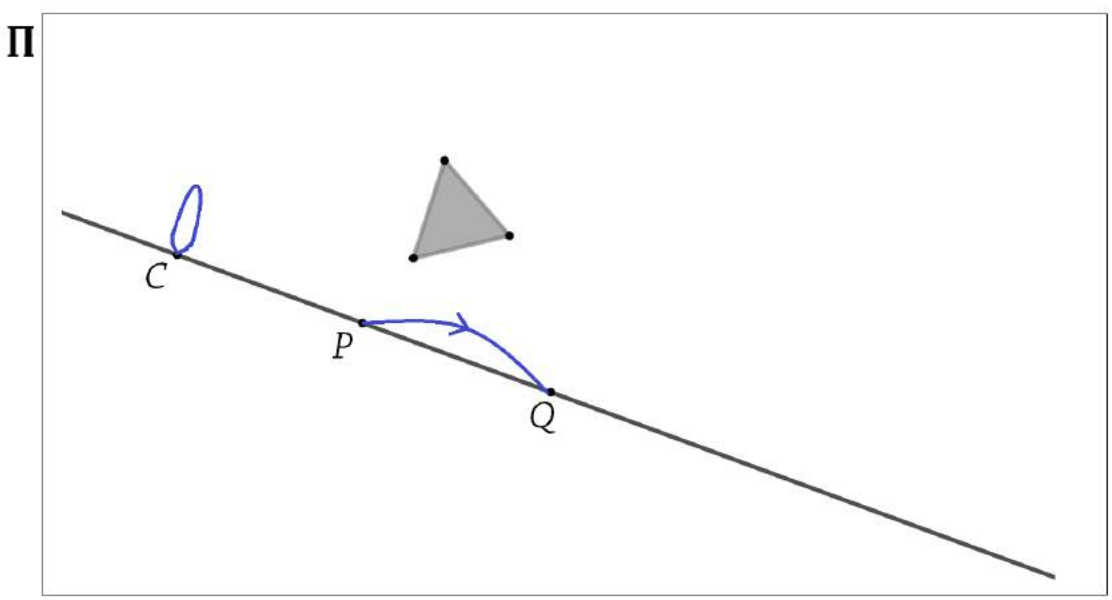
Observa que para hallar F' y E' se usaron las flechas (G, G') y (F, F') respectivamente.

1. Determina la imagen del polígono por la homotecia dada.

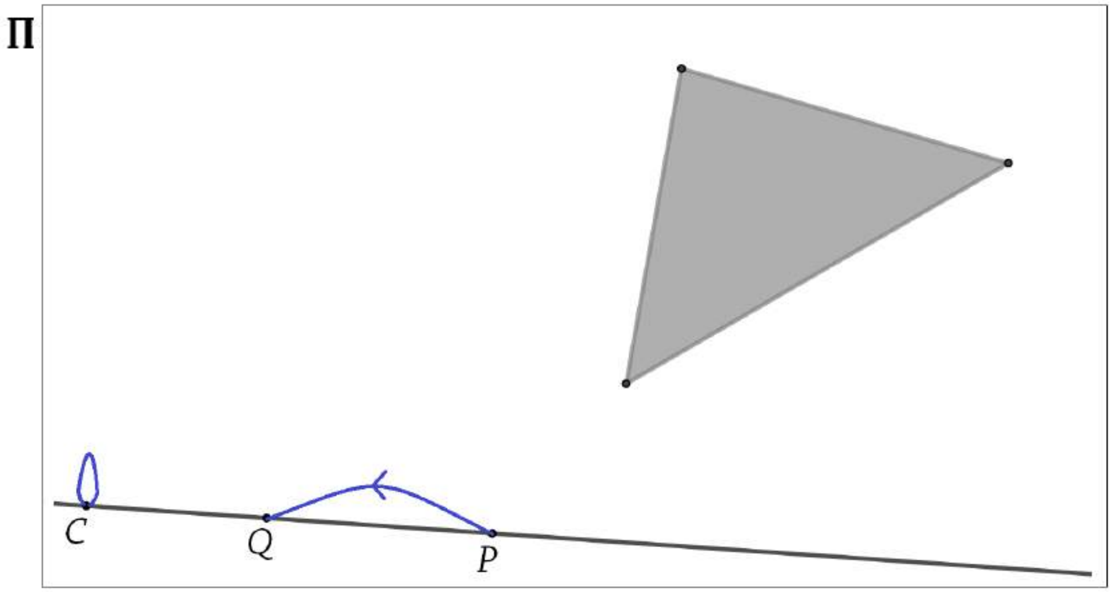


2. En cada caso determina la imagen del triángulo por la homotecia dada.

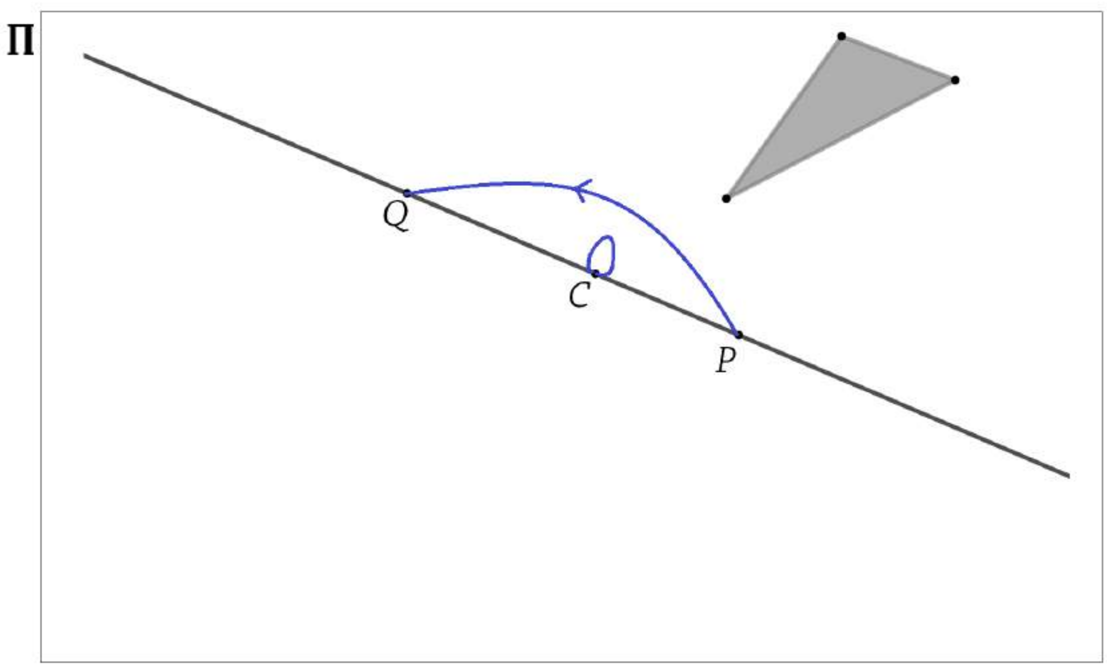
- Caso I.



- Caso II.



- Caso III.



3. Revisa las construcciones anteriores y compara cada figura con su imagen al aplicar la homotecia h, luego escribe tus observaciones.

F. Anexo 6: Actividad de aula 6. Composición de Homotecias

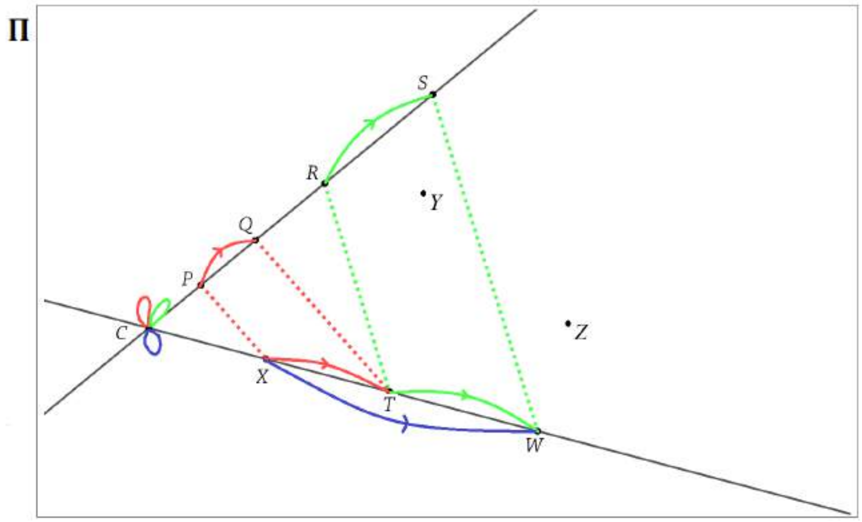
<table>
<tr><td colspan="3">I.E.D DOMINGO SAVIO</td></tr>
<tr><td>Área de Matemáticas</td><td colspan="2">Actividad de Aula 6: Composición de Homotecias</td></tr>
<tr><td>Estudiante:</td><td>Grado:</td><td>Fecha:</td></tr>
<tr><td colspan="3">Materiales: Lápiz, esfero, borrador, colores, regla y escuadra.</td></tr>
</table>

Composición de homotecias de igual centro.

Si f y h son homotecias de centro C, llamamos composición de f y h a la transformación que se nota $f \circ h$ y actúa sobre cada punto X de la siguiente manera:
$(f \circ h)(X) = f(h(X))$, es decir, primero se busca la imagen de X por $h : h(X)$ y luego se busca la imagen de $h(X)$ por $f : f(h(X))$.

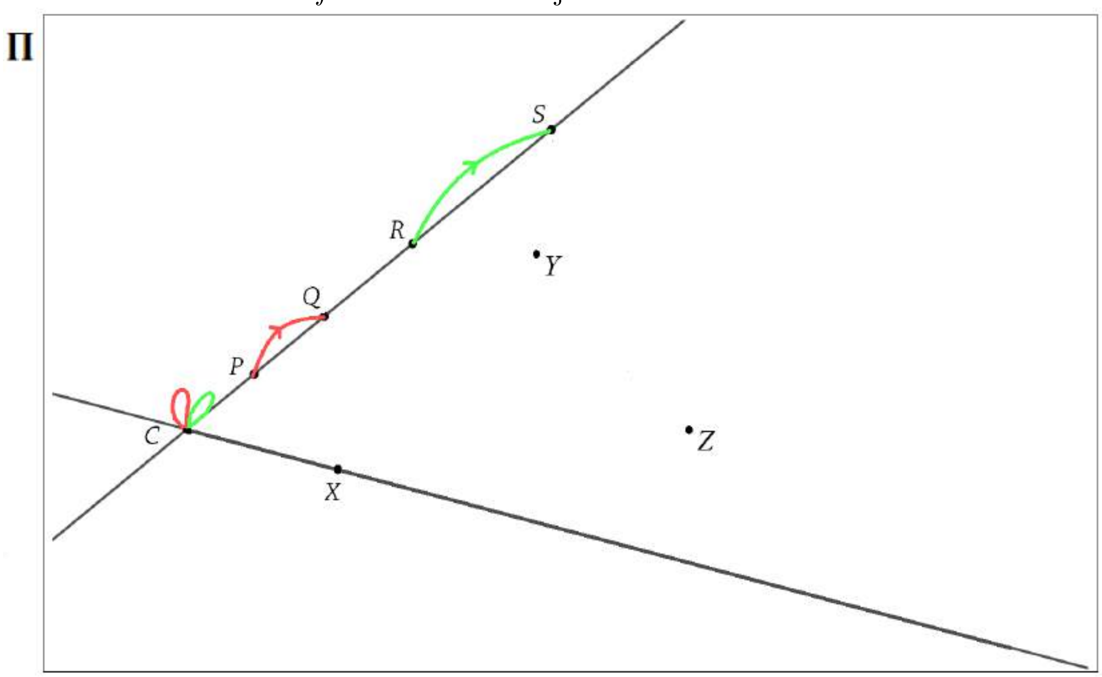
Ejemplo: Determinar $f \circ h$, si $f(R) = S$ y $h(P) = Q$, donde f y h son homotecias de centro C.

Aplicando la definición, se obtiene:
I. La imagen de un punto X aplicando h, donde $h(X) = T$.
II. La imagen de T aplicando f, donde $f(T) = W$.
III. La flecha (X, W) pertenece a $f \circ h$.
IV. Ahora, buscando la imagen de C: $f(h(C)) = f(C) = C$, así (C, C) también pertenece a $f \circ h$.



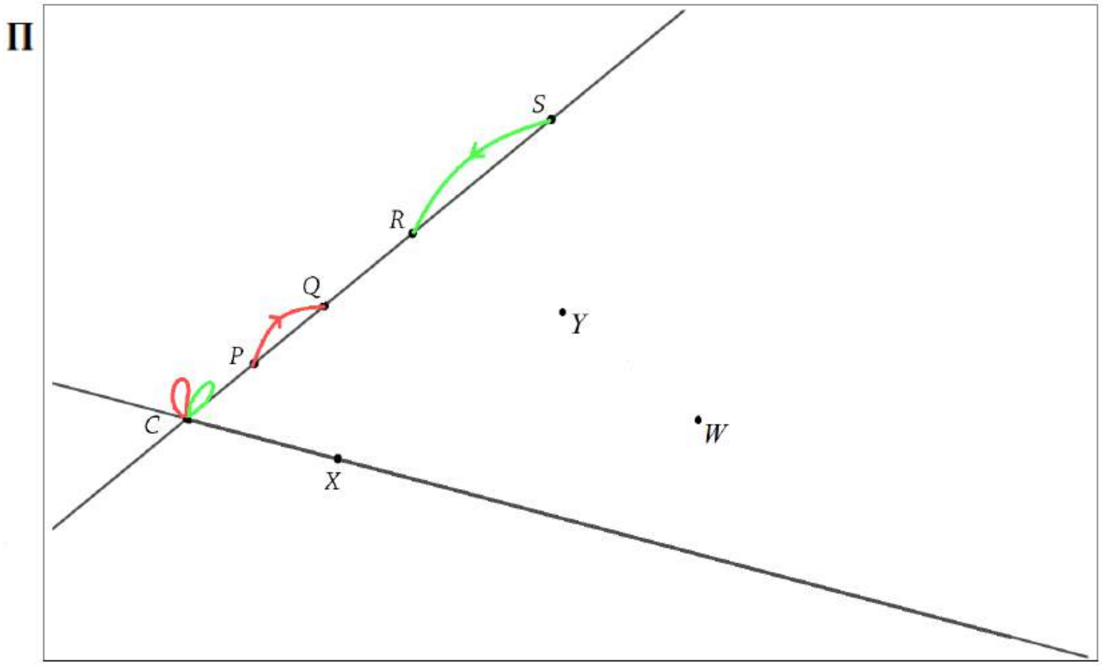
Busca la imagen de Y y de Z por $f \circ h$. Retiñe las flechas de f con verde, de h con rojo y de $f \circ h$ con azul.
Puede observarse que $f \circ h$ es otra homotecia de centro C.

1. Considerando las mismas homotecias f y h del ejemplo anterior, construye al menos 4 flechas de $h \circ f$ con color naranja.



¿Cómo son $h \circ f$ y $f \circ h$?

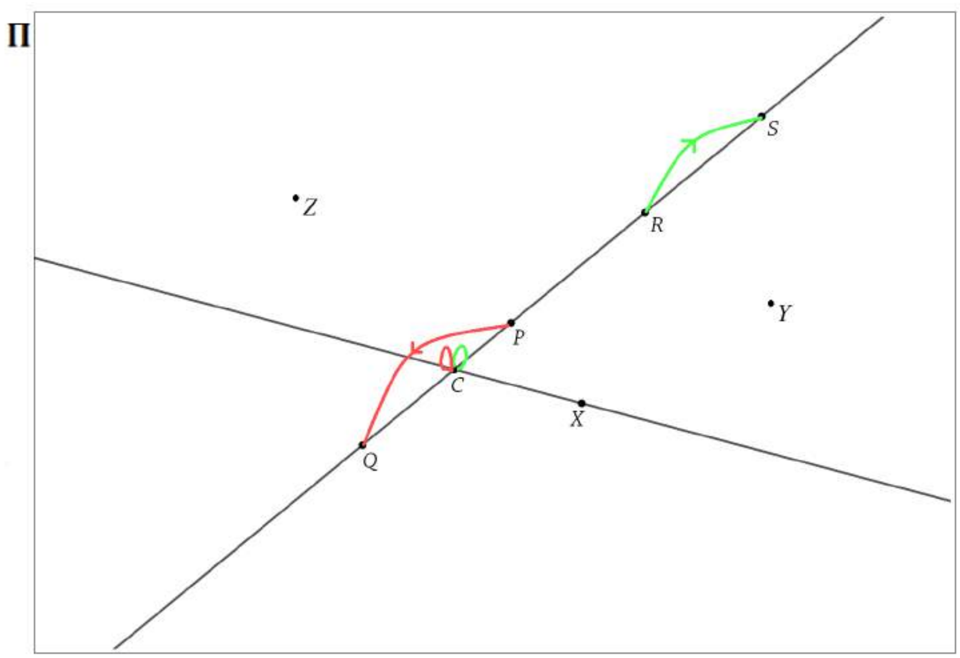
2. Dadas las homotecias f y h de centro C, tales que $f(P) = Q$ (en rojo) y $h(S) = R$ (en verde), dibuja varias flechas de $f \circ h$ con color azul y de $h \circ f$ con color naranja.



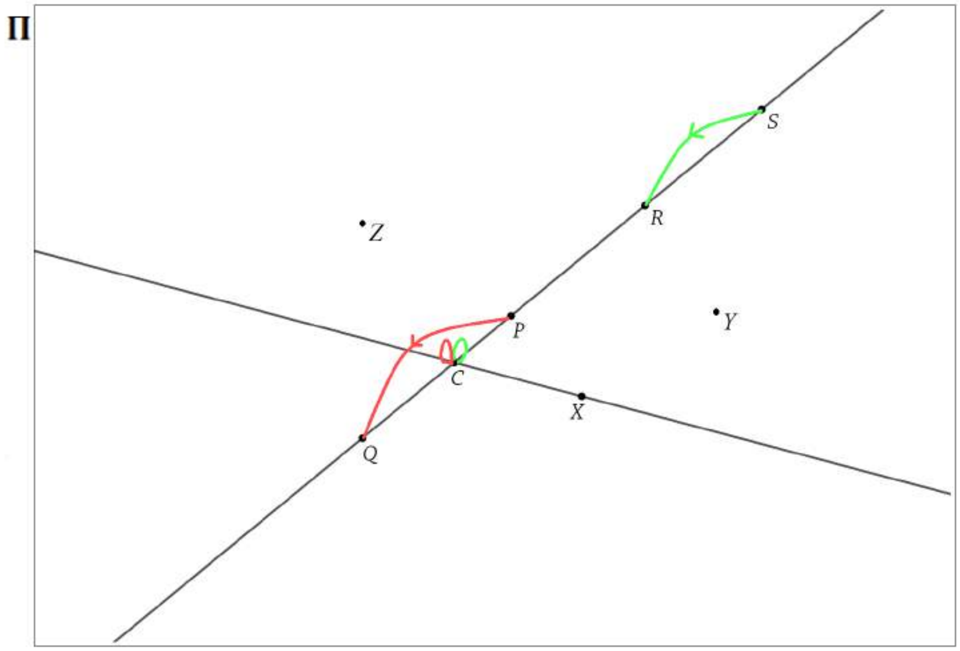
¿Cómo son $h \circ f$ y $f \circ h$?

3. En cada caso considera las homotecias f (en rojo) y h (en verde) de centro C y determina $f \circ h$ con color azul y $h \circ f$ con color naranja.

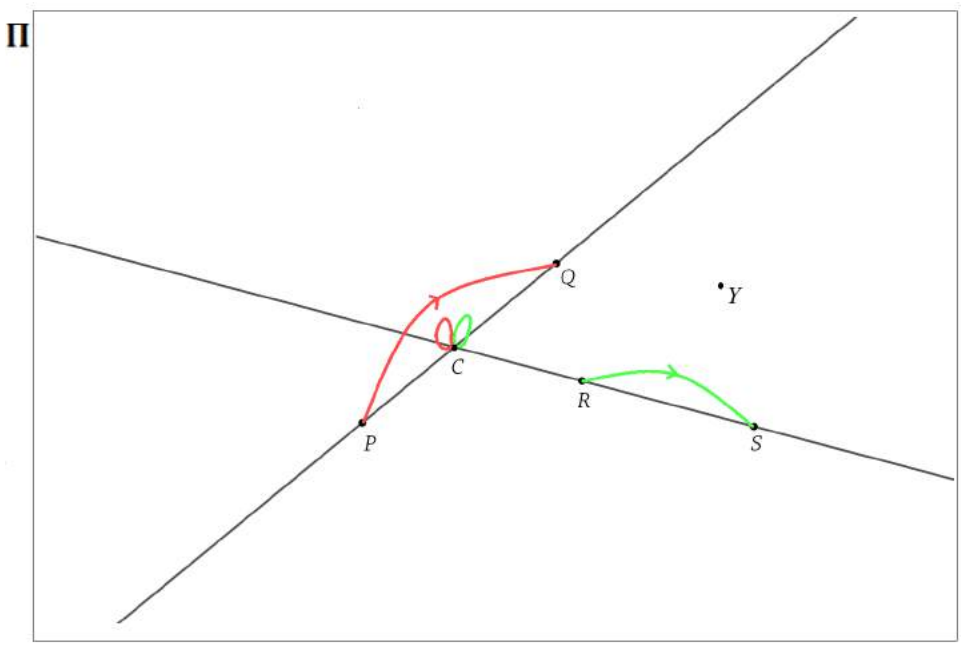
   - Caso I. $f(P) = Q$ y $h(R) = S$



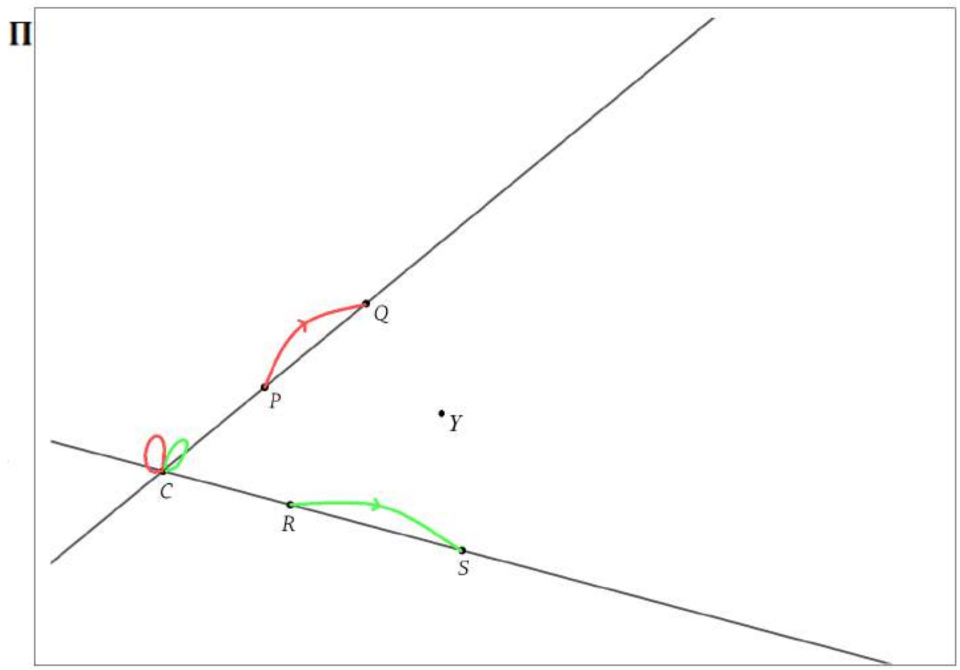
- Caso II. $f(P) = Q$ y $h(S) = R$



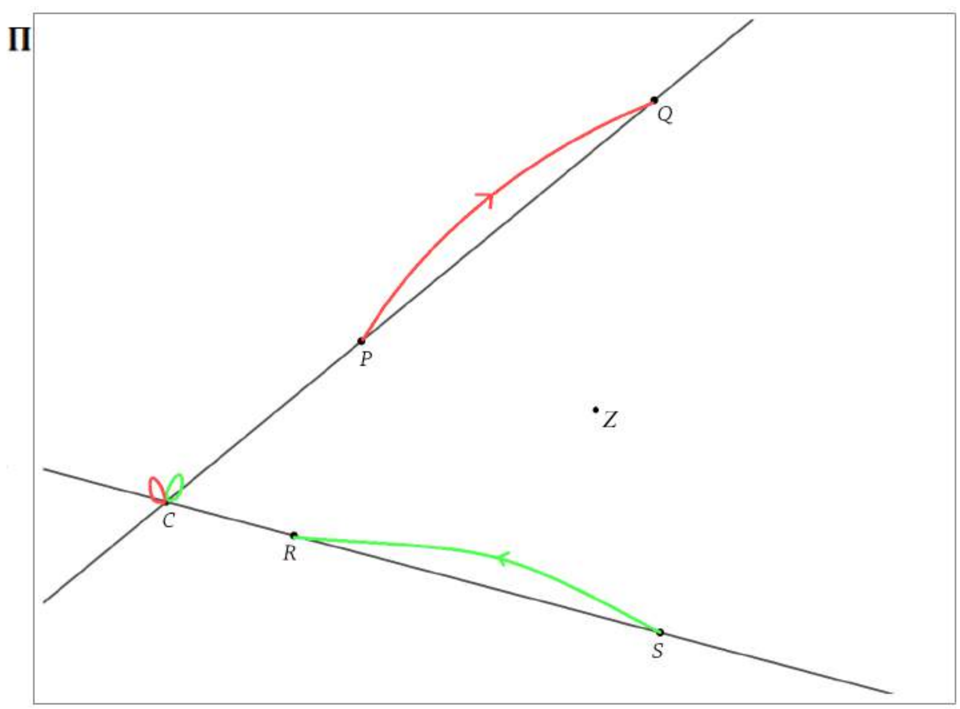
- Caso III. $f(P) = Q$ y $h(R) = S$



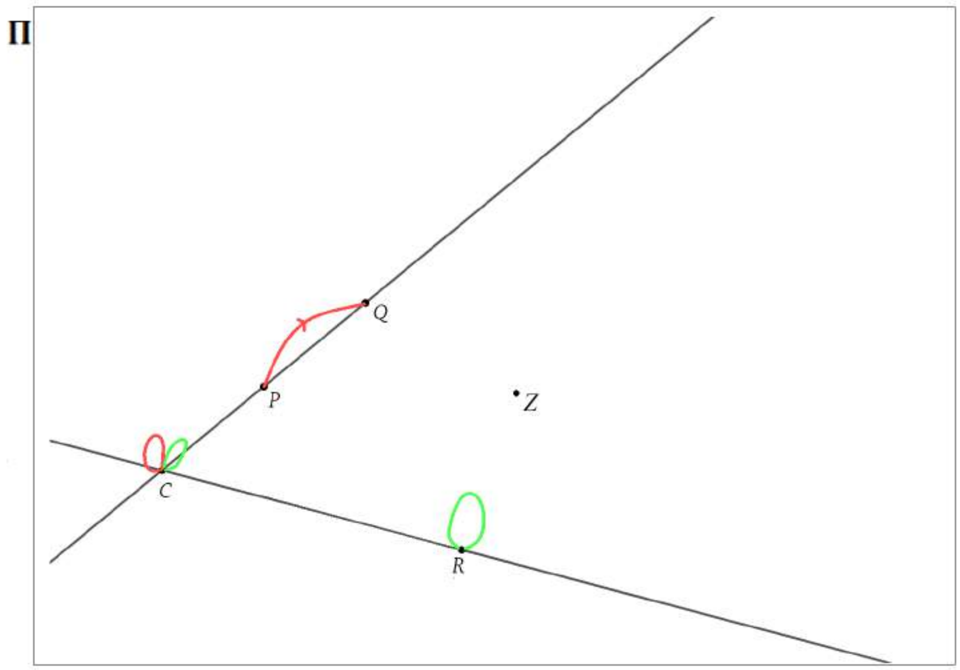
- Caso IV. $f(P) = Q$ y $h(R) = S$



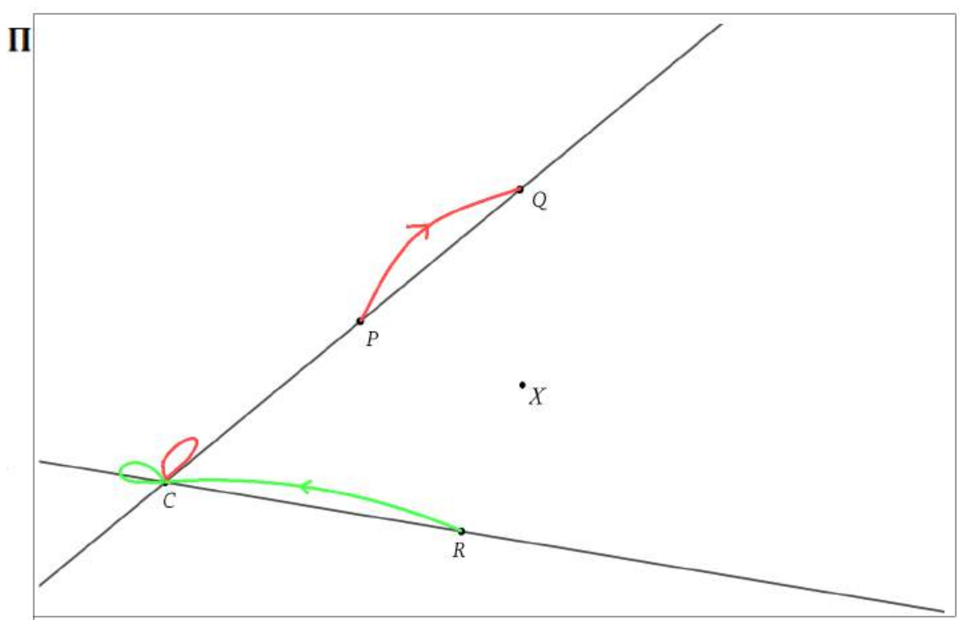
- Caso V. $f(P) = Q$ y $h(S) = R$



- Caso VI. $f(P) = Q$ y $h = 1_\Pi$

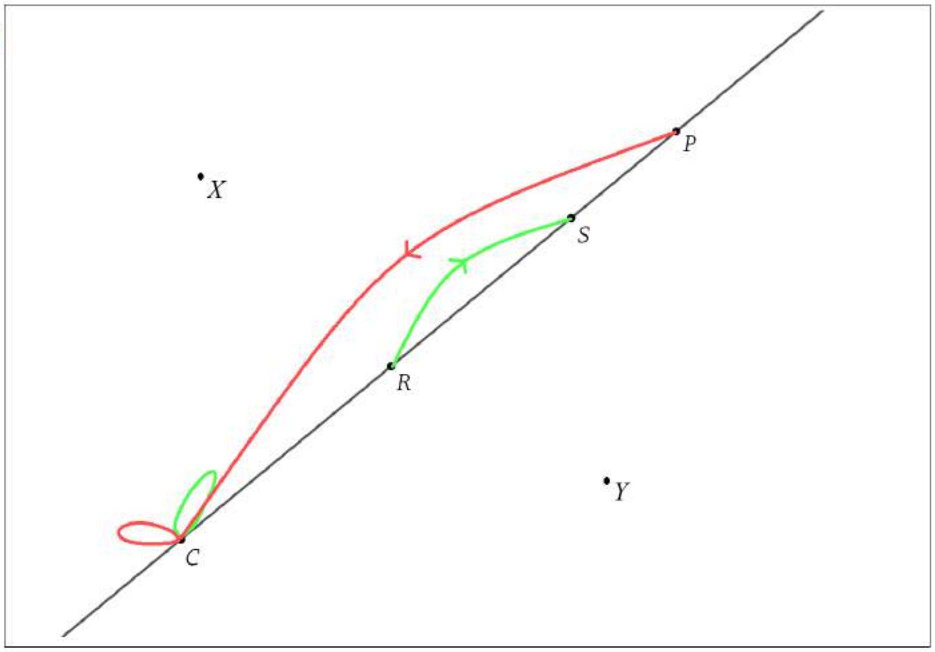


- Caso VII. $f(P) = Q$ y $h(R) = C$



- Caso VIII. $f(P) = C$ y $h(R) = S$

Π



4. Observa las construcciones anteriores y realiza las necesarias, de tal manera que permitan justificar, si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas.
   Consideremos las homotecias f, h y 1_Π de centro C:

   - $f \circ 1_\Pi = f$. ______________

   - $f \circ 1_\Pi = 1_\Pi$. ______________

   - $1_\Pi \circ f = 1_\Pi$. ______________
   - $1_\Pi \circ f = f$. ______________

   Si $h(D) = C$ entonces

   - $h \circ f = f$. ______________
   - $f \circ h = h$. ______________
   - $f \circ h = f$. ______________
   - $h \circ f = h$. ______________

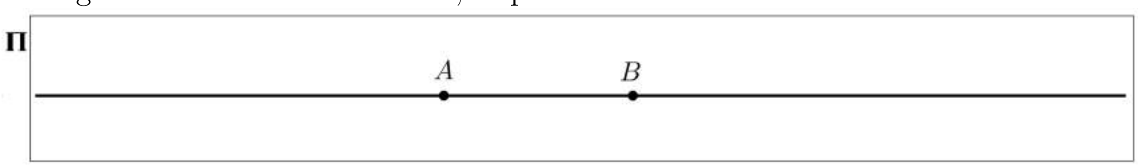
   Si $f \circ h = g$ entonces $h \circ f = g$. ______________

G. Anexo 7: Actividad de aula 7. Recta real y homotecias

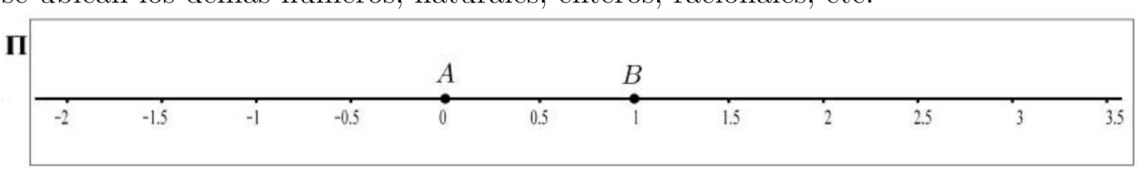
I.E.D DOMINGO SAVIO		
Área de Matemáticas	**Actividad de Aula 7: Recta real y homotecias**	
Estudiante:	**Grado:**	**Fecha:**
Materiales: Lápiz, esfero, borrador, colores, regla y escuadra.		

Recta real y homotecias.

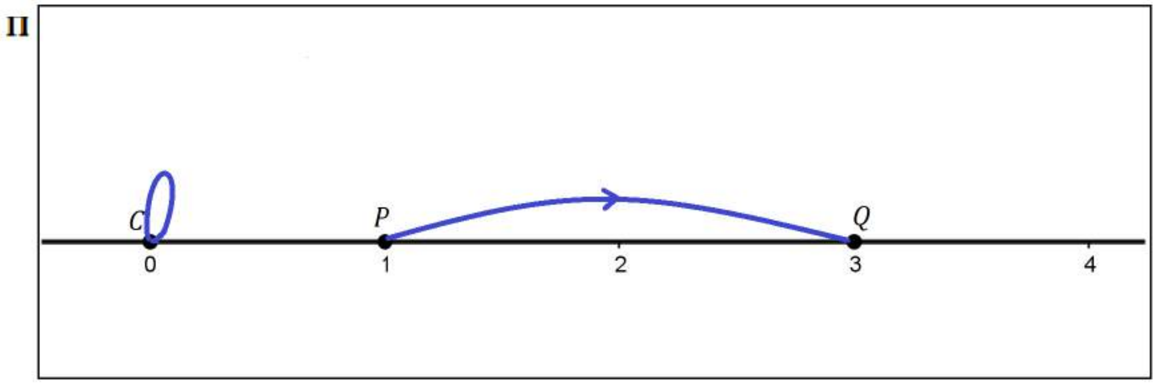
Para graduar una recta AB en Π, se procede así:



Tomamos 0 como la abscisa de A y 1 como la abscisa de B, que notaremos $a(A) = 0$ y $a(B) = 1$, esto para fijar la longitud unidad (regla). Luego, respetando las distancias se ubican los demás números, naturales, enteros, racionales, etc.

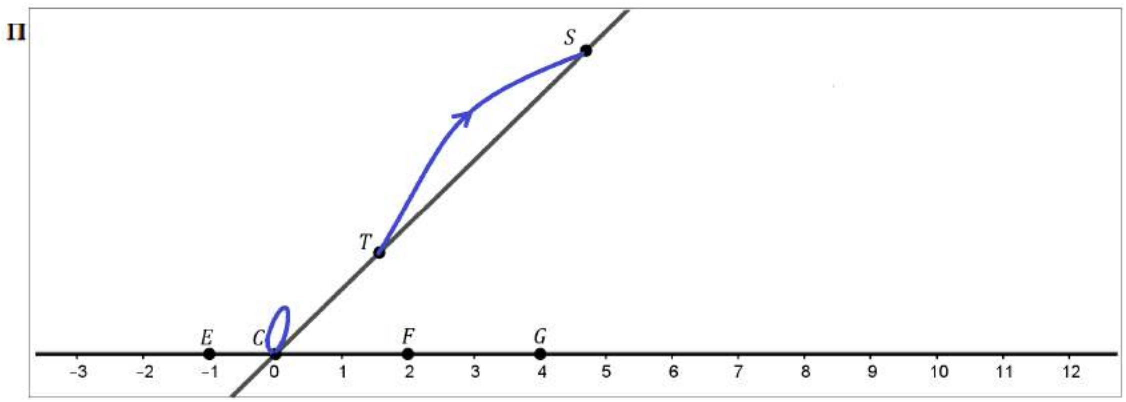


Razón de homotecia: Para cada homotecia h de centro C y $a(C) = 0$, tal que $h(P) = Q$ y $a(P) = 1$, diremos que la razón de h es la abscisa de Q y lo notaremos: $r(h) = a(Q)$



Así, si $a(Q) = 3$, entonces $r(h) = a(Q) = 3$, como se observa en el gráfico anterior.

1. Sea l una homotecia de centro C tal que $l(T) = S$. Determina $r(l)$.

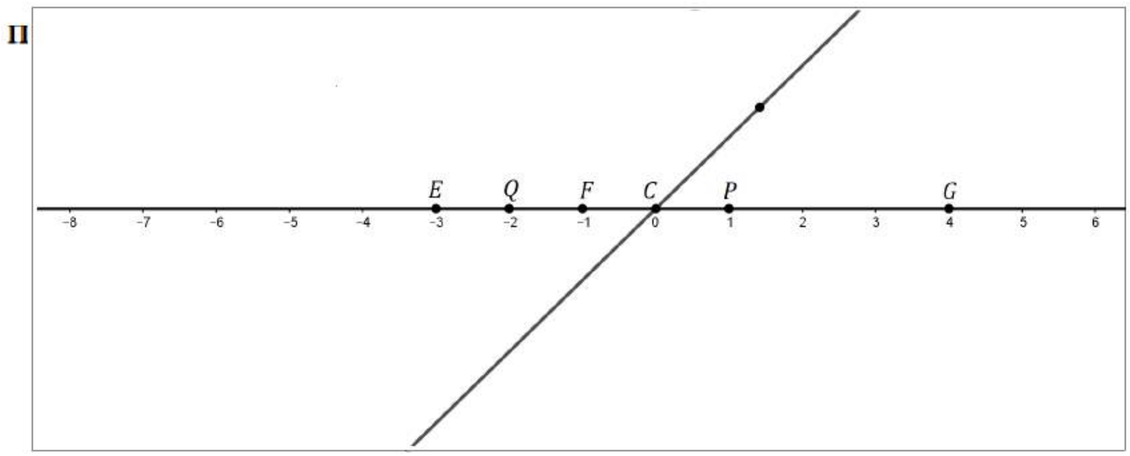


Luego:
- Busca la imagen de los puntos E, F y G por l.
- Marca las abscisas de $l(E)$, $l(F)$ y $l(G)$.
- Completa la tabla.

$r(l) =$	
$a(X)$	$a(l(X))$
$a(E) =$	$a(l(E)) =$
$a(F) =$	$a(l(F)) =$
$a(G) =$	$a(l(G)) =$

¿ Qué relación hay entre $r(l)$ y las abscisas obtenidas?

2. Sea h una homotecia de centro C tal que $h(P) = Q$, $a(P) = 1$ y $a(Q) = -2$. Construye $h(E)$, $h(F)$ y $h(G)$ y determina sus abscisas.

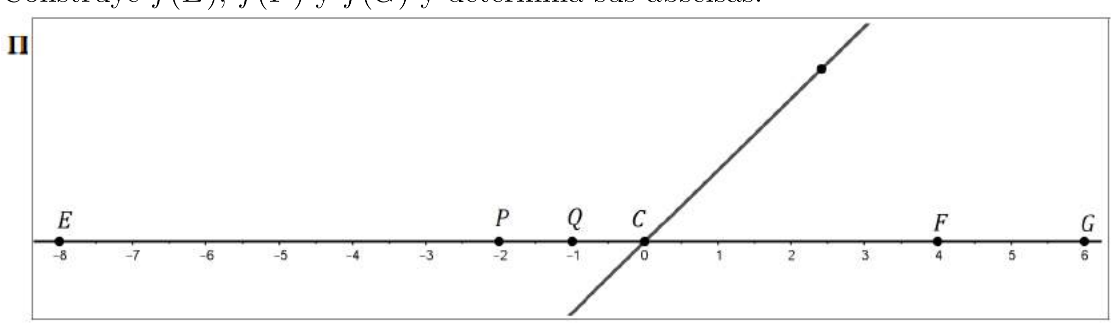


Luego:
- Determina $r(h)$
- Completa la tabla.

$r(h) =$	
$a(X)$	$a(h(X))$
$a(E) =$	$a(h(E)) =$
$a(F) =$	$a(h(F)) =$
$a(G) =$	$a(h(G)) =$

¿ Qué relación hay entre $r(h)$ y las abscisas obtenidas?

3. Sea f una homotecia de centro C tal que $f(P) = Q$, $a(P) = -2$ y $a(Q) = -1$. Construye $f(E)$, $f(F)$ y $f(G)$ y determina sus abscisas.

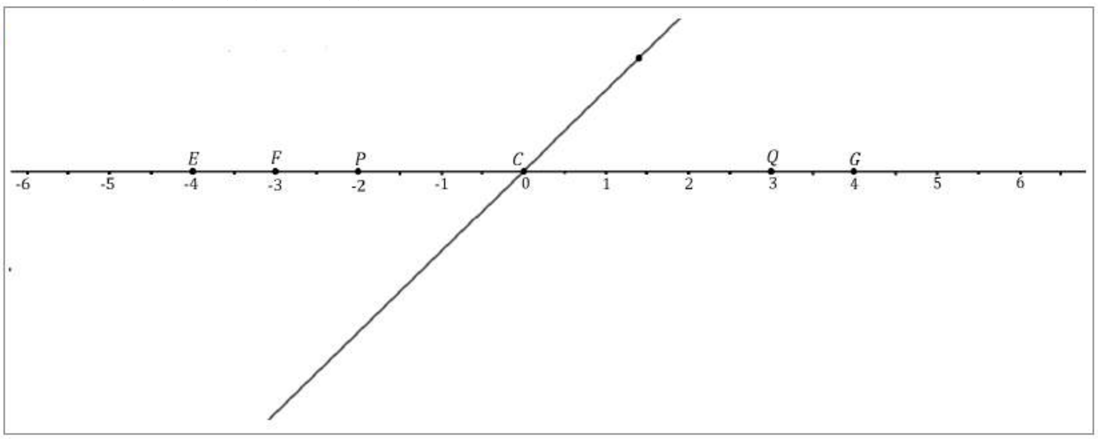


Luego:
- Determina $r(f)$
- Completa la tabla.

$r(f) =$	
$a(X)$	$a(f(X))$
$a(E) =$	$a(f(E)) =$
$a(F) =$	$a(f(F)) =$
$a(G) =$	$a(f(G)) =$

¿ Qué relación hay entre $r(f)$ y las abscisas obtenidas?

4. Sea g una homotecia de centro C tal que $g(P) = Q$, $a(P) = -2$ y $a(Q) = 3$. Construye $g(E)$, $g(F)$ y $g(G)$ y determina sus abscisas.

Π


Luego:
- Determina $r(g)$
- Completa la tabla.

$r(g) =$	
$a(X)$	$a(g(X))$
$a(E) =$	$a(g(E)) =$
$a(F) =$	$a(g(F)) =$
$a(G) =$	$a(g(G)) =$

¿ Qué relación hay entre $r(g)$ y las abscisas obtenidas?

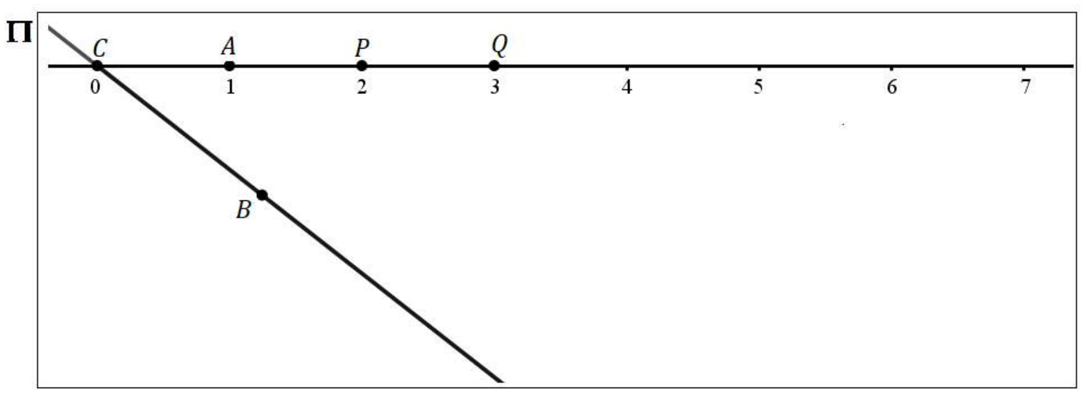
5. Conclusiones.

H. Anexo 8: Actividad de aula 8. Multiplicación

I.E.D DOMINGO SAVIO		
Área de Matemáticas	**Actividad de Aula 8: Multiplicación**	
Estudiante:	**Grado:**	**Fecha:**
Materiales: Lápiz, esfero, borrador, colores, hojas calcantes, regla y escuadra.		

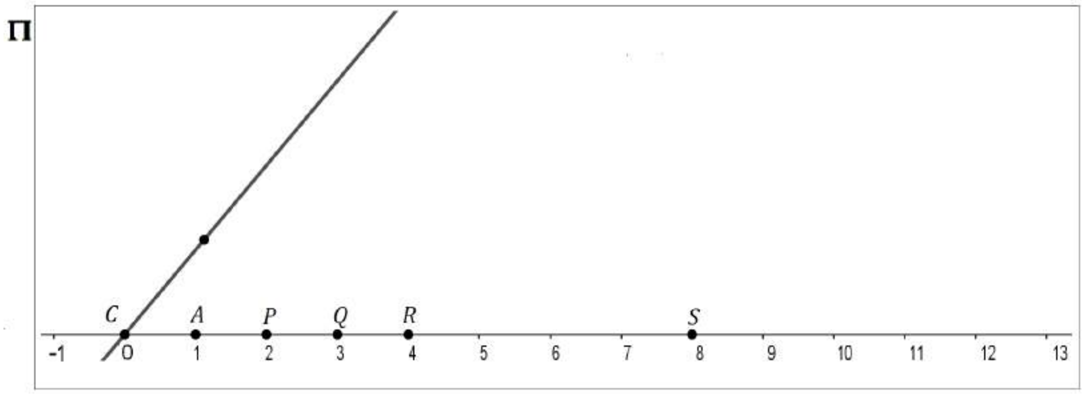
Multiplicación y homotecias de igual centro.

1. En la siguiente figura construye:
   I. Las homotecias f y h de centro C, tales que $f(A) = P$ (en rojo) y $h(A) = Q$ (en verde).
   II. $(f \circ h)(A) = R$ (en azul).



Luego, determina: $a(A) =$ ___ $a(P) =$ ___ $a(Q) =$ ___
$a(R) =$ ___ $r(f) =$ ___ $r(h) =$ ___ $r(f \circ h) =$ ___
¿Qué relación hay entre las abscisas y las razones?
¿Qué relación hay entre las razones de f, h y $f \circ h$?

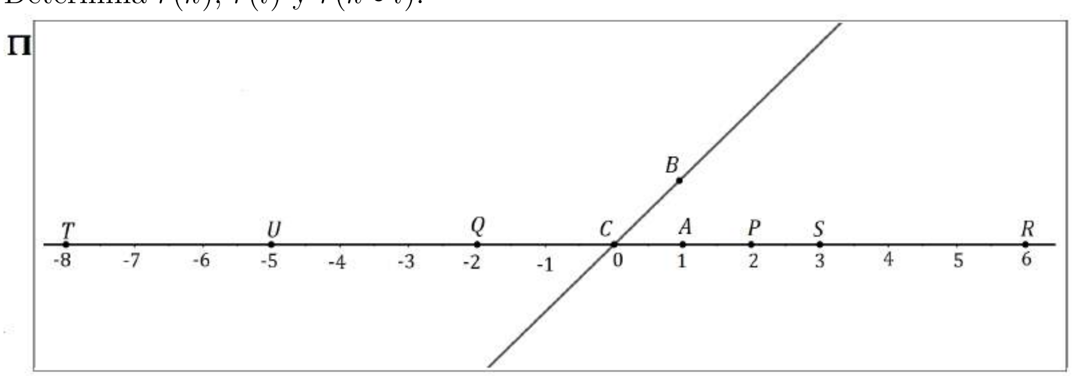
2. En la siguiente figura construye:
   I. Las homotecias f y g de centro C, tales que $f(P) = Q$ (en rojo) y $g(R) = S$ (en verde).
   II. $(f \circ g)(R) = T$ (en azul).



Luego, determina: $a(A) = \_\_$ $a(P) = \_\_$ $a(Q) = \_\_$
$a(R) = \_\_$ $a(S) = \_\_$ $a(T) = \_\_$
$r(f) = \_\_$ $r(g) = \_\_$ $r(f \circ g) = \_\_$
¿Qué relación hay entre las abscisas y las razones?
¿Qué relación hay entre las razones de f, g y $f \circ g$?

3. Construye y determina según cada caso:

   - Caso I.
     I. Las homotecias k y l de centro C, tales que $k(P) = Q$ (en rojo) y $l(R) = S$ (en verde).
     II. $l(B)$, $l(T)$ y $l(U)$.
     III. En azul: $(k \circ l)(R)$, $(k \circ l)(T)$, $(k \circ l)(U)$ y $(k \circ l)(B)$
     Determina $r(k)$, $r(l)$ y $r(k \circ l)$.



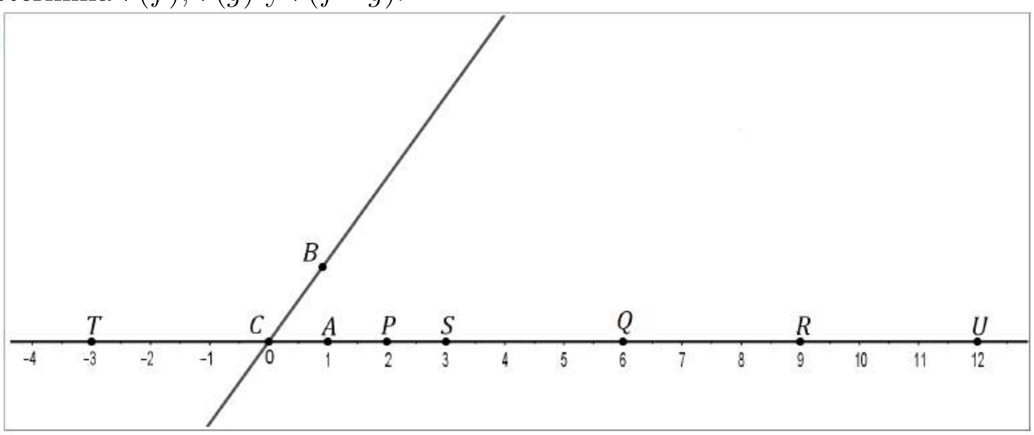
Completa la tabla.

$r(l) =$		$r(k) =$
$a(X)$	$a(l(X))$	$a(k(l(X))) = a((k \circ l)(X))$
$a(R) =$	$a(l(R)) =$	$a(k(l(R))) = a((k \circ l)(R)) =$
$a(T) =$	$a(l(T)) =$	$a(k(l(T))) = a((k \circ l)(T)) =$
$a(U) =$	$a(l(U)) =$	$a(k(l(U))) = a((k \circ l)(U)) =$

Según la información de la figura y la tabla.
¿Qué relación hay entre $a(X)$, $r(l)$, $r(k)$ y $a((k \circ l)(X))$?

- Caso II.
  I. Las homotecias f y g de centro C, tales que $f(P) = Q$ (en rojo) y $g(R) = S$ (en verde).
  II. $g(B)$, $g(T)$ y $g(U)$.
  III. En azul: $(f \circ g)(R)$, $(f \circ g)(T)$, $(f \circ g)(U)$ y $(f \circ g)(B)$
  Determina $r(f)$, $r(g)$ y $r(f \circ g)$.

Π



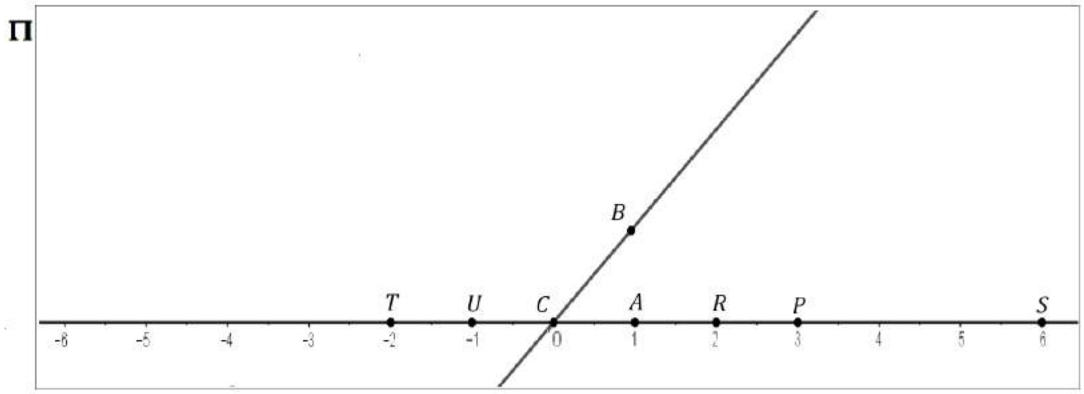
Completa la tabla.

$r(g) =$		$r(f) =$
$a(X)$	$a(g(X))$	$a(f(g(X))) = a((f \circ g)(X))$
$a(R) =$	$a(g(R)) =$	$a(f(g(R))) = a((f \circ g)(R)) =$
$a(T) =$	$a(g(T)) =$	$a(f(g(T))) = a((f \circ g)(T)) =$
$a(U) =$	$a(g(U)) =$	$a(f(g(U))) = a((f \circ g)(U)) =$

Según la información de la figura y la tabla.
¿Qué relación hay entre $a(X)$, $r(f)$, $r(g)$ y $a((f \circ g)(X))$?
¿Qué nombre recibe la homotecia $f \circ g$?

- Caso III.

Las homotecias h y j de centro C, tales que $h(P) = C$ (en rojo) y $j(R) = S$ (en verde).
II. $j(B)$, $j(T)$ y $j(U)$.
III. En azul: $(h \circ j)(R)$, $(h \circ j)(T)$, $(h \circ j)(U)$ y $(h \circ j)(B)$
Determina $r(h)$, $r(j)$ y $r(h \circ j)$.



Completa la tabla.

$r(j) =$		$r(h) =$
$a(X)$	$a(j(X))$	$a(h(j(X))) = a((h \circ j)(X))$
$a(R) =$	$a(j(R)) =$	$a(h(j(R))) = a((h \circ j)(R)) =$
$a(T) =$	$a(j(T)) =$	$a(h(j(T))) = a((h \circ j)(T)) =$
$a(U) =$	$a(j(U)) =$	$a(h(j(U))) = a((h \circ j)(U)) =$

Según la información de la figura y la tabla.
¿Qué relación hay entre $a(X)$, $r(h)$, $r(j)$ y $a((h \circ j)(X))$?
La homotecia h tal que $h(P) = C$ se conoce como homotecia constante.
¿Por qué recibirá este nombre?
Para cada punto P de Π, ¿qué valor toma $a(h(P))$?

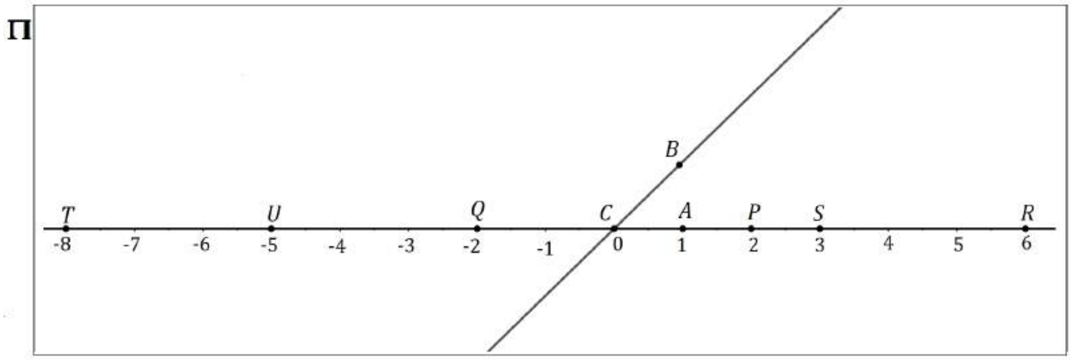
- Completa la tabla con la información de los casos I, II y III.

$r(m)$	$r(n)$	$r(m \circ n)$
$r(k) =$	$r(l) =$	$r(k \circ l) =$
$r(f) =$	$r(g) =$	$r(f \circ g) =$
$r(h) =$	$r(j) =$	$r(h \circ j) =$

¿Qué relación hay entre las razones $r(m)$, $r(n)$ y $r(m \circ n)$?

4. En la siguiente figura construye la homotecia m de centro C, tal que $m(P) = P$

y $a(P) = 2$.
Luego, determina $m(T)$, $m(U)$, $m(Q)$, $m(A)$, $m(S)$, $m(R)$, $m(B)$ y $r(m)$.

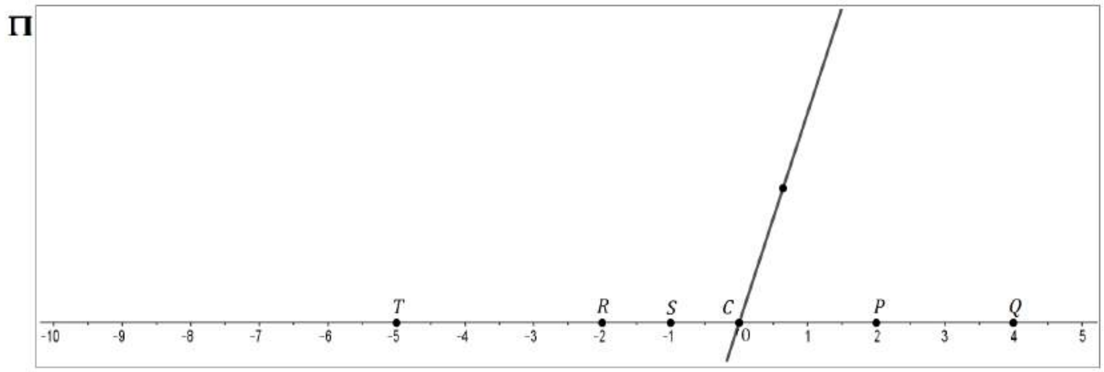


Completa la tabla.

$r(m) =$	
$a(X)$	$a(m(X))$
$a(T) =$	$a(m(T)) =$
$a(U) =$	$a(m(U)) =$
$a(Q) =$	$a(m(Q)) =$
$a(A) =$	$a(m(A)) =$
$a(S) =$	$a(m(S)) =$
$a(R) =$	$a(m(R)) =$

Completa:
La homotecia h con $h(X) = X$ para cada punto X, recibe el nombre de homotecia ________ y se nota ___.
Al aplicar la homotecia m a un punto P se obtiene como imagen el mismo punto P, por lo tanto se puede afirmar que la homotecia ________ es la identidad.
¿Cuál es el efecto sobre las abscisas al aplicar la homotecia m?

5. En la siguiente figura construye:
I. Las homotecias f y g de centro C, tales que $f(P) = Q$ (en rojo) y $g(R) = S$ (en azul), con $a(P) = 2$, $a(Q) = 4$, $a(R) = -2$ y $a(S) = -1$.
II. $f(T) = U$ y $g(T) = Z$, donde $a(T) = -5$



Luego:
-Construye $f(S)$, $f(Z)$, $g(Q)$, $g(U)$ y $(f \circ g)(R)$.
-Completa la tabla.

$f(P) =$	$f(S) =$	$f(T) =$	$f(Z) =$
$g(Q) =$	$g(R) =$	$g(U) =$	$g(T) =$

Según la información de la figura y de la tabla.
¿Qué relación hay entre las homotecias f y g?
¿Qué homotecia es $f \circ g$?
Ahora:
-Determina $r(f)$ y $r(g)$.
-Determina las abscisas de $f(S)$, $f(Z)$, $g(Q)$ y $g(U)$.
-Completa las tablas.

$r(f) =$	
$a(X)$	$a(f(X))$
$a(P) =$	$a(f(P)) =$
$a(S) =$	$a(f(S)) =$
$a(T) =$	$a(f(T)) =$
$a(Z) =$	$a(f(Z)) =$
$a(C) =$	$a(f(C)) =$

$r(g) =$	
$a(X)$	$a(g(X))$
$a(Q) =$	$a(g(Q)) =$
$a(R) =$	$a(g(R)) =$
$a(U) =$	$a(g(U)) =$
$a(T) =$	$a(g(T)) =$
$a(C) =$	$a(g(C)) =$

Según la información de la figura y de las tablas.
¿Qué relación hay entre $r(f)$ y $r(g)$?
¿Qué producto se obtiene entre $r(f)$ y $r(g)$?
¿Qué sucede con $a(f(C))$ y $a(g(C))$ al aplicar $r(f)$ y $r(g)$ respectivamente? Justifica.

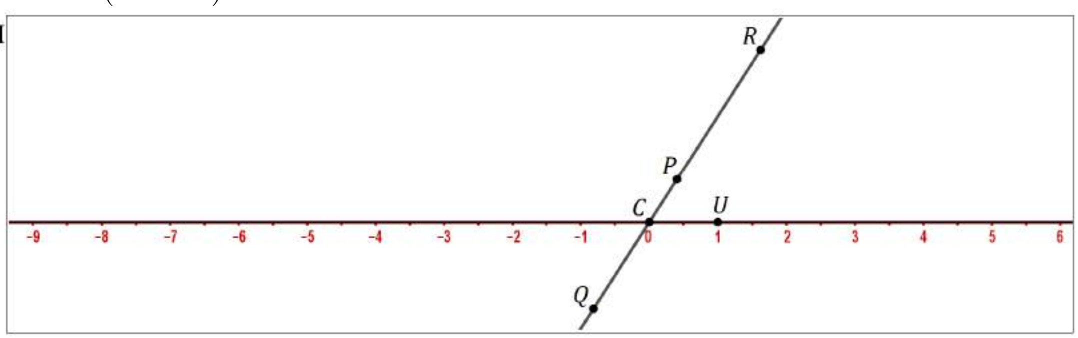
6. Conclusiones.

I. Anexo 9: Actividad de aula 9. Propiedad conmutativa

I.E.D DOMINGO SAVIO			
Área de Matemáticas	**Actividad de Aula 9: Propiedad conmutativa**		
Estudiante:		**Grado:**	**Fecha:**
Materiales: Lápiz, esfero, borrador, colores, hojas calcantes, regla y escuadra.			

Propiedades de la multiplicación y homotecias de igual centro.

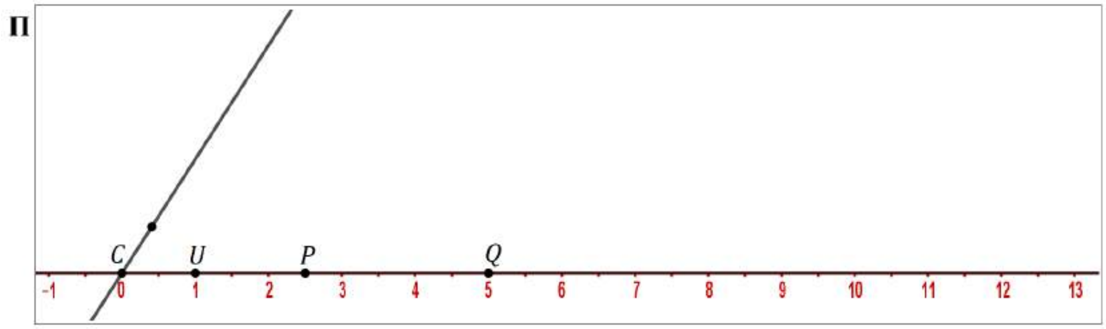
1. En la siguiente figura construye:
   I. Las homotecias h y k de centro C, tales que $h(P) = Q$ (en rojo) y $k(P) = R$ (en verde).
   II. $h \circ k$ (en azul).



   Determina: $r(h) =$ ___ $r(k) =$ ___ $r(h \circ k) =$ ___
   Coloca una hoja calcante sobre la figura anterior y construye $k \circ h$ (en naranja).
   Luego, determina $r(k \circ h) =$ ___.
   ¿Qué relación tienen $k \circ h$ y $h \circ k$?
   ¿Qué relación tienen $r(h)$, $r(k)$, $r(k \circ h)$ y $r(h \circ k)$?

2. En la siguiente figura construye:
   I. Las homotecias h y k de centro C, tales que $h(U) = P$ (en rojo) y $k(U) = Q$

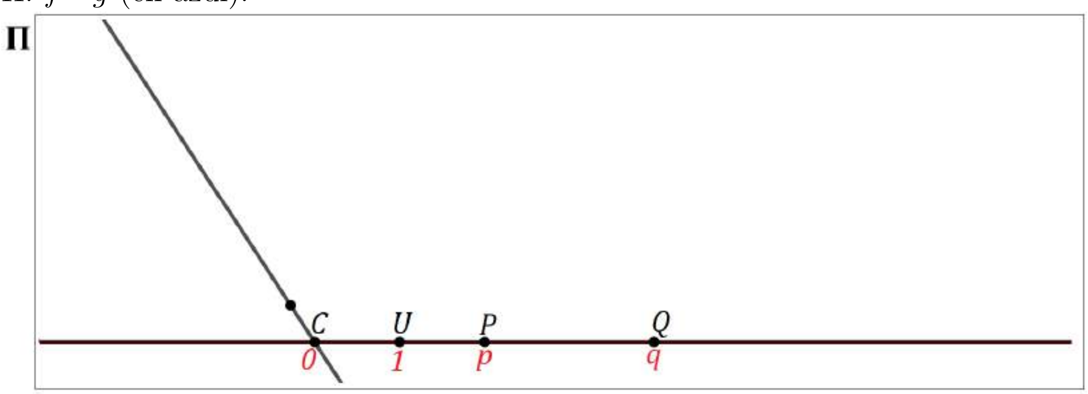
(en verde).
II. $h \circ k$ (en azul).



Determina: $r(h) =$ ___ $r(k) =$ ___ $r(h \circ k) =$ ___

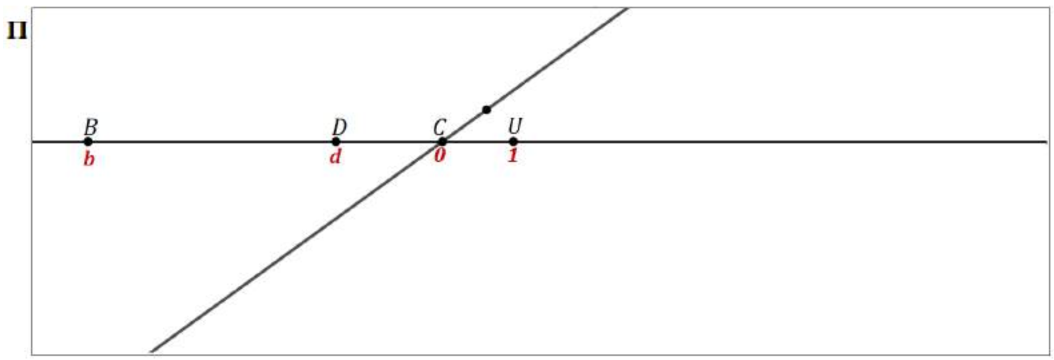
Coloca una hoja calcante sobre la figura anterior y construye $k \circ h$ (en naranja). Luego, determina $r(k \circ h) =$ ___.
¿Qué relación tienen $k \circ h$ y $h \circ k$?
¿Qué relación tienen $r(h)$, $r(k)$, $r(k \circ h)$ y $r(h \circ k)$?

3. En la siguiente figura construye:
I. Las homotecias f y g de centro C, tales que $f(U) = P$ (en rojo) y $g(U) = Q$ (en verde).
II. $f \circ g$ (en azul).



Determina: $r(f) =$ ___ $r(g) =$ ___ $r(f \circ g) =$ ___
Coloca una hoja calcante sobre la figura anterior y construye $g \circ f$ (en naranja). Luego, determina $r(g \circ f) =$ ___
¿Cómo son $f \circ g$ y $g \circ f$?
¿Qué relación tienen $r(f)$, $r(g)$, $r(f \circ g)$ y $r(g \circ f)$?

4. En la siguiente figura construye:
   I. Las homotecias h y j de centro C, tales que $h(U) = B$ (en rojo) y $j(U) = D$ (en verde).
   II. En azul $h \circ j$.



   Determina: $r(h) =$ ___ $r(j) =$ ___ $r(h \circ j) =$ ___

   Coloca una hoja calcante sobre la figura anterior y construye $j \circ h$ (en naranja). Luego, determina $r(j \circ h) =$ ___
   ¿Cómo son $h \circ j$ y $j \circ h$?
   ¿Qué relación tienen $r(h)$, $r(j)$, $r(h \circ j)$ y $r(j \circ h)$?

5. Si las razones de las homotecias f y g son n y m respectivamente ¿cuáles son las razones de $f \circ g$ y $g \circ f$?.

6. Conclusiones.

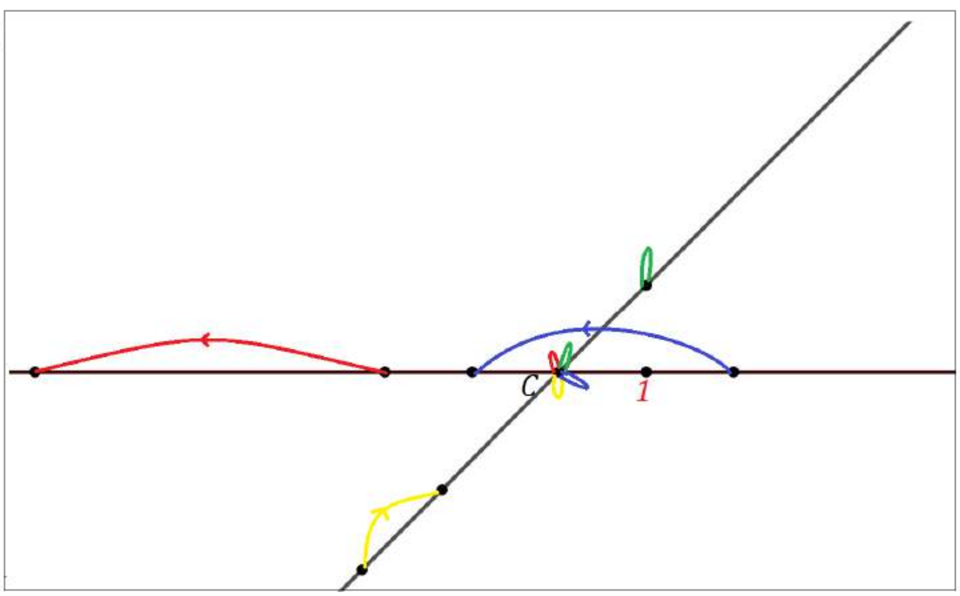
J. Anexo 10: Actividad de aula 10. Razones y leyes de signos

I.E.D DOMINGO SAVIO		
Área de Matemáticas	**Actividad de Aula 10: Razones y leyes de signos**	
Estudiante:	**Grado:**	**Fecha:**
Materiales: Lápiz, esfero, borrador, colores, hojas calcantes, regla y escuadra.		

Razones y leyes de signos.

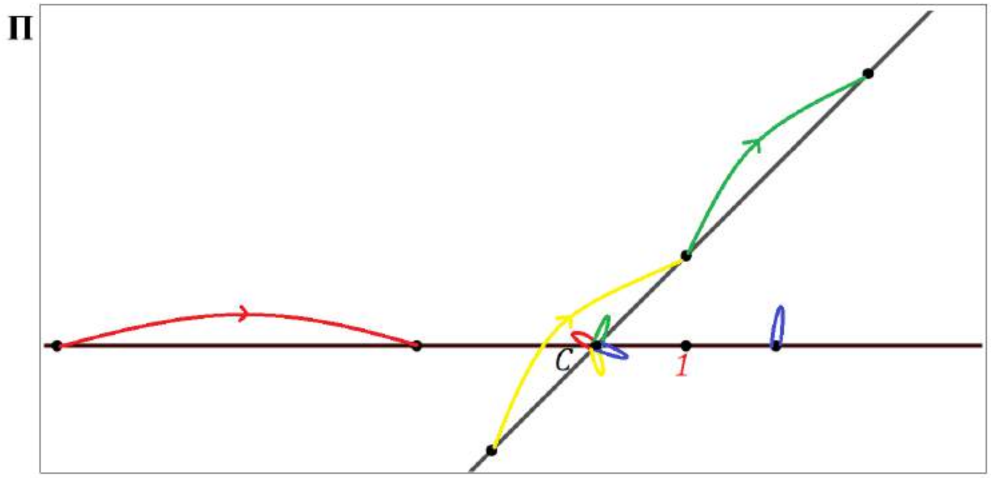
1. Observa y construye lo necesario en cada figura para completar la información.
   - Considera las siguientes homotecias de centro C:
     f (en azul), g (en amarillo), h (en verde) y j (en rojo).

Π



$r(\underline{\quad}) < 0$ $\quad$ $0 < r(\underline{\quad}) < 1$ $\quad$ $r(\underline{\quad}) = 1$ $\quad$ $1 < r(\underline{\quad})$

   - Considera las siguientes homotecias de centro C:
     k (en amarillo), l (en rojo), m (en azul) y j (en verde).



$r(\underline{\quad}) < 0$ $\qquad 0 < r(\underline{\quad}) < 1$ $\qquad r(\underline{\quad}) = 1$ $\qquad 1 < r(\underline{\quad})$

2. Completa.
   Dada una homotecia h de centro C, determinada por las flechas (C, C) y (P, Q) ¿Qué relación debe existir entre C, P y Q para que las siguientes proposiciones sean verdaderas?

   - Si $r(h) < 0$ entonces ___ está entre ___ y ___

   - Si $0 < r(h) < 1$ entonces ___ está entre ___ y ___

   - Si $1 < r(h)$ entonces ___ está entre ___ y ___

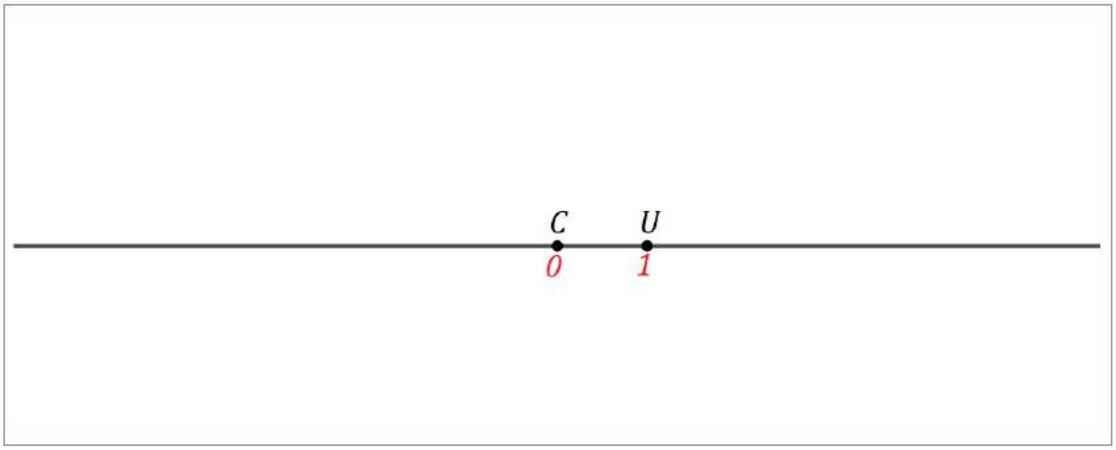
   - Si $r(h) = 1$ entonces ___ y ___ son el mismo punto.

   - Si $r(h) = 0$ entonces ___ y ___ son el mismo punto.

3. Considera f y h dos homotecias de centro C, tales que $r(f) = t$ y $r(h) = v$.
   Dibuja f y h según cada caso. Usa algunos puntos de Π como ayuda.
   Luego, construye $f \circ h$ y halla $r(f \circ h)$.

   - Caso I. $t > 0$ y $v > 0$.

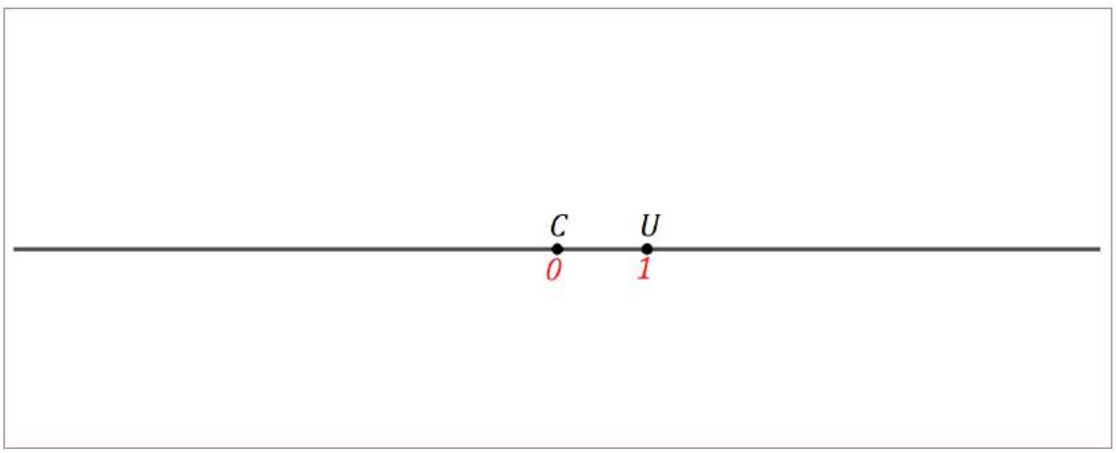
Π



¿Qué signo tiene $r(f \circ h)$?

- Caso II. $t > 0$ y $v < 0$.

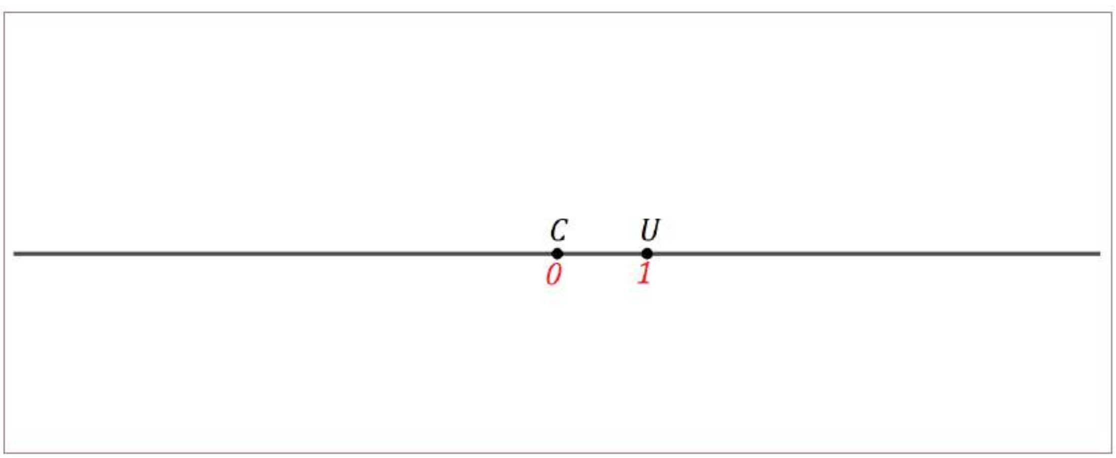
Π



¿Qué signo tiene $r(f \circ h)$?

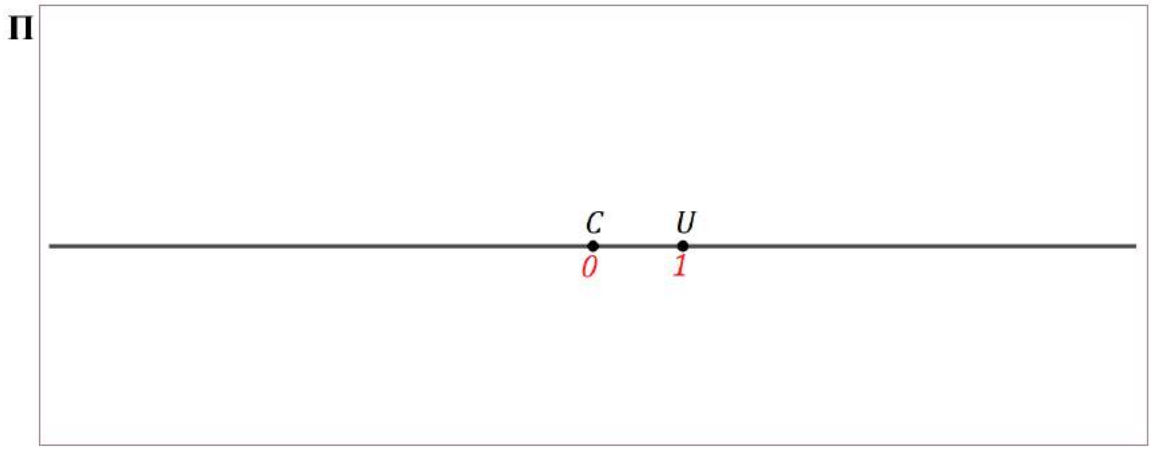
- Caso III. $t < 0$ y $v > 0$.

Π



¿Qué signo tiene $r(f \circ h)$?

- Caso IV. $t < 0$ y $v < 0$.



¿Qué signo tiene $r(f \circ h)$?

Completa la siguiente tabla.

$r(f) =$ t	$r(h) =$ v	$r(f \circ h) =$
+	+	
+	-	
-	+	
-	-	

4. Conclusiones.

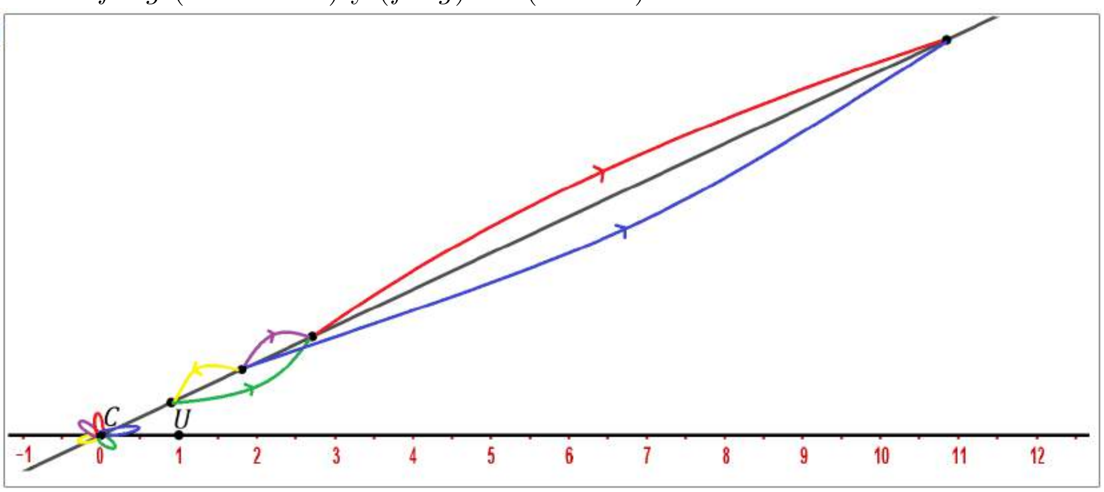
K. Anexo 11: Actividad de aula 11. Propiedad asociativa

I.E.D DOMINGO SAVIO			
Área de Matemáticas	**Actividad de Aula 11: Propiedad asociativa**		
Estudiante:		**Grado:**	**Fecha:**
Materiales: Lápiz, esfero, borrador, colores, hojas calcantes, regla y escuadra.			

Propiedades de la multiplicación y homotecias de igual centro.

1. Dadas las homotecias de centro C: f (en verde), g (en amarillo) y h (en rojo). Verifica: $f \circ g$ (en morado) y $(f \circ g) \circ h$ (en azul).

   II

   En la recta graduada construye las razones de f, g, h, $f \circ g$ y $(f \circ g) \circ h$. Luego completa:

$r(f)$	$r(g)$	$r(f \circ g)$	$r(h)$	$r((f \circ g) \circ h)$

   Coloca una hoja calcante sobre el plano y construye $g \circ h$ y $f \circ (g \circ h)$.
   ¿Cómo son $(f \circ g) \circ h$ y $f \circ (g \circ h)$?

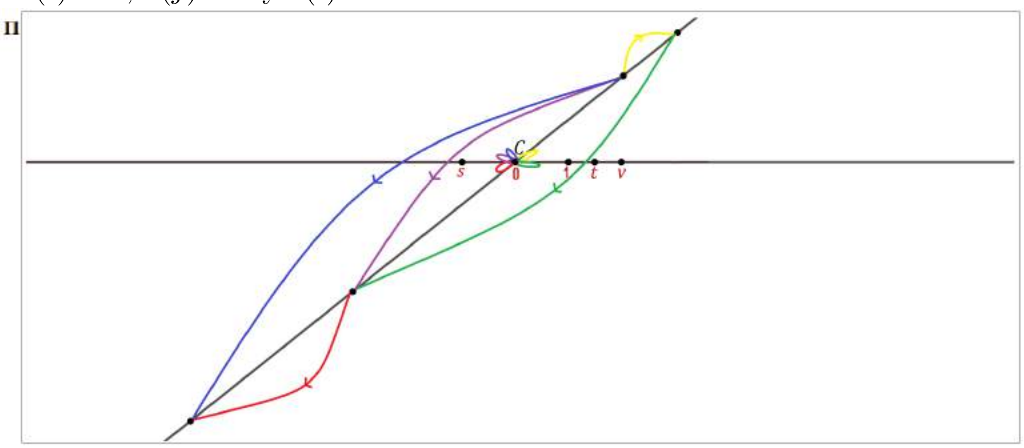
Ahora, en la hoja calcante y sobre la recta graduada halla las razones de $g \circ h$ y $f \circ (g \circ h)$. Luego completa:

$r(g)$	$r(h)$	$r(g \circ h)$	$r(f)$	$r(f \circ (g \circ h))$

¿Qué relación hay entre las razones de f, g, h, $(f \circ g) \circ h$ y $f \circ (g \circ h)$? Justifica.

2. Dadas las homotecias de centro C: i (en verde), j (en amarillo) y l (en rojo). Verifica:
   - $i \circ j$ (en morado) y $(i \circ j) \circ l$ (en azul).
   - $r(i) = s$, $r(j) = t$ y $r(l) = v$.

II



Coloca una hoja calcante sobre el plano y construye las razones de $i \circ j$ y de $(i \circ j) \circ l$. Luego completa:

$r(i)$	$r(j)$	$r(i \circ j)$	$r(l)$	$r((i \circ j) \circ l)$

Retira la hoja calcante y coloca una nueva sobre el plano y construye $j \circ l$ y $i \circ (j \circ l)$.
¿Cómo son $(i \circ j) \circ l$ y $i \circ (j \circ l)$?
En esta misma hoja calcante construye las razones de $j \circ l$ y de $i \circ (j \circ l)$. Luego completa:

$r(j)$	$r(l)$	$r(j \circ l)$	$r(i)$	$r(i \circ (j \circ l))$

¿Qué relación hay entre $r(i)$, $r(j)$, $r(l)$, $r((i \circ j) \circ l)$ y $r(i \circ (j \circ l))$? Justifica.

3. Dadas las homotecias m, n y w de centro C, con razones a, b y d respectivamente, ¿cuáles son las razones de $(m \circ n) \circ w$ y $m \circ (n \circ w)$?

4. Conclusiones.

L. Anexo 12: Actividad de aula 12. Evaluación

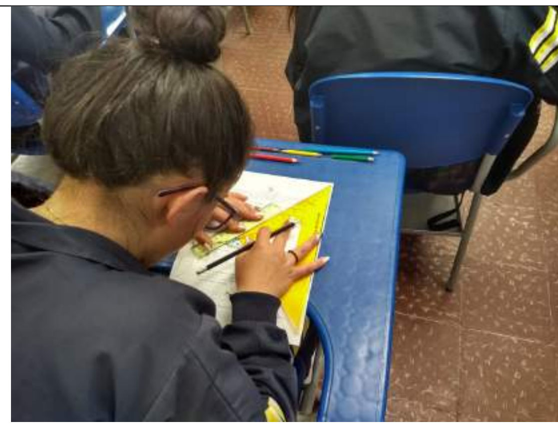
<table>
<tr><td colspan="4">I.E.D DOMINGO SAVIO</td></tr>
<tr><td>Área de Matemáticas</td><td colspan="3">Actividad de Aula 12: Evaluación</td></tr>
<tr><td colspan="2">Estudiante:</td><td>Grado:</td><td>Fecha:</td></tr>
<tr><td colspan="4">Materiales: Lápiz, esfero, borrador, colores, hojas calcantes, regla y escuadra.</td></tr>
</table>

Evaluación.

1. En cada caso, ilustra de forma geométrica usando homotecias.
   - Una propiedad de la multiplicación de los números reales.
   - Una ley de signos.
2. En cada caso, menciona cómo debe ser la razón de la homotecia h, de tal manera que al hallar la imagen de una figura por h, se tenga que:
   - La imagen es igual a la figura.
   - La imagen no se invierte y es de menor tamaño que la figura.
   - La imagen no se invierte y es de mayor tamaño que la figura.
   - La imagen es invertida y de igual tamaño que la figura.
   - La imagen es invertida y de menor tamaño que la figura.
   - La imagen es invertida y de mayor tamaño que la figura.
   - La imagen de la figura es el centro de la homotecia.

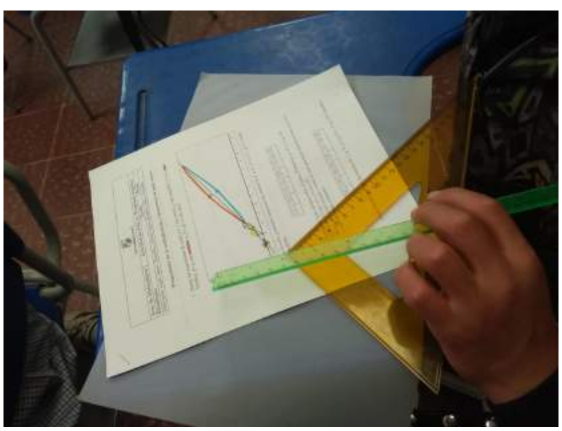
M. Anexo 13: Fotografías de aplicación de la propuesta










Bibliografía

[Apostol, 1984] Apostol, T. M. (1984). *Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal 1*. Editorial Reverté, S.A. Barcelona, España.

[Boyer, 1986] Boyer, C. B. (1986). *Historia de la matemática.* Alianza Editorial. Madrid, España.

[Chevallard, 1991] Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* AIQUE. Buenos Aires.

[Díaz, 2002] Díaz, G. J. L. (2002). *Tales de Mileto*. Apuntes de historia de las matemáticas, 1(1):17. Universidad de Sonora. México.

[Fraleigh, 1988] Fraleigh, J. B. (1988). *Álgebra abstracta.* Editorial Addison-Wesley Iberoamericana. Wilmington, Delaware, E.U.A.

[Hilbert, 1996] Hilbert, D. (1996). *Fundamentos de la geometría.* Editorial CSIC-CSIC Press. Madrid, España.

[Latorre, 2003] Latorre, A. (2003). *La investigación-acción.* Editorial Grao, de IRIF, S.L. Barcelona, España.

[MEN, 1998] MEN (1998). *Lineamientos curriculares.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

[MEN, 2006] MEN (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

[Moise, 1966] Moise, E. (1966). *Geometría moderna.* Editorial Addison-Wesley Iberoamericana. México.

[Mosquera, 2008] Mosquera, L. S. (2008). *El teorema de Pappus en la adición y en la multiplicación*. Sigma, 8:35-43. Universidad de Nariño. Colombia.

[Ortiz, 2005] Ortiz, F. A. (2005). *Historia de la matemática. La matemática en la antiguedad.* 1. Pontificia Universidad Católica del Perú.

[Papy, 1970] Papy, G. (1970). *Matemática moderna 2.* Editorial Universitaria de Buenos Aires . Argentina.

[Peña, 2011] Peña, N. E. (2011). *Definición geométrica de la multiplicación de reales usando homotecias*. Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia. Bogotá.

[Rivera, 2011] Rivera, R. O. (2011). *Ilustración de algunas relaciones existentes entre las propiedades geométricas del plano y las propiedades y operaciones de los números reales*. Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia. Bogotá.

[Rodríguez, 2004] Rodríguez, P. M. L. (2004). *La Teoría del Aprendizaje Significativo*. Conferencia sobre Mapeo Conceptual. Pamplona, España.