

**Caracterización de estados funcionales en fonocardiografía
empleando análisis acústico y técnicas de dinámica no lineal**

Edwin Alexander Cerquera Soacha

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ingeniería y Arquitectura
Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Computación
Manizales
2005

**Caracterización de estados funcionales en fonocardiografía
empleando análisis acústico y técnicas de dinámica no lineal**

Edwin Alexander Cerquera Soacha

Trabajo de grado para optar al título de
Magíster en Automatización Industrial

Director

Prof. César Germán Castellanos Domínguez Ph.D.

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ingeniería y Arquitectura
Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Computación
Manizales

2005

**Functional states characterization by using of acoustical analysis
and nonlinear dynamics techniques**

Edwin Alexander Cerquera Soacha

Thesis for the degree of
Master in Industrial Automation

Supervisor

Prof. César Germán Castellanos Domínguez Ph.D.

National University of Colombia

Faculty of Engineering and Architecture

Department of Electrical, Electronic and Computing Engineering

Manizales

2005

A Dios y mi familia

Contenido

Lista de tablas	vii
Lista de figuras	viii
Agradecimientos	xi
Resumen	xii
Abstract	xiii
Introducción	1
1. Análisis de señales	3
1.1. Análisis lineal	3
1.1.1. Transformada de Fourier en tiempo corto	3
1.1.2. Transformada wavelet	7
1.2. Análisis no lineal	12
1.2.1. Espacios de estado	12
1.2.2. Cálculo del tiempo de retardo	15
1.2.3. Medidas de complejidad	16
1.2.4. Método de sustitución	25
2. Estado del arte en el procesamiento de señales fonocardiográficas	27
2.1. Adquisición y preprocesamiento	27
2.1.1. Registro de señales	27
2.1.2. Reducción de perturbaciones	27
2.1.3. Segmentación de estados funcionales	29
2.2. Características de representación	31
2.2.1. Estimación de frecuencia instantánea	32
2.2.2. Transformada de Fourier en tiempo corto	33
2.2.3. Caracterización mediante modelos autorregresivos	36
2.2.4. Características wavelet	36
2.2.5. Medidas acústicas de caracterización	41
2.2.6. Medidas de complejidad en el análisis de la dinámica cardíaca	41
3. Marco experimental	48
3.1. Adquisición y preprocesamiento de las señales	48
3.1.1. <i>Denoising</i> mediante transformada wavelet discreta	48

3.1.2.	Análisis de estacionariedad y no linealidad	52
3.2.	Caracterización mediante técnicas de dinámica no lineal	53
3.2.1.	Estimación de la dimensión de correlación (D_2)	53
3.2.2.	Estimación de la entropía de Kolmogorov (K_2)	54
3.2.3.	Cálculo del máximo exponente de Lyapunov (λ_1)	54
3.2.4.	Cálculo del exponente de Hurst (H)	55
3.2.5.	Cálculo del exponente de la complejidad Lempel–Ziv (LZ)	56
3.2.6.	Limitaciones en el desempeño de los algoritmos	56
3.3.	Caracterización mediante análisis acústico	57
3.3.1.	Características acústicas	57
3.3.2.	Características de representación	58
3.3.3.	Preprocesamiento de las matrices de características acústicas	59
3.3.4.	Clasificación	60
4.	Resultados y discusiones	61
4.1.	Reducción de perturbaciones acústicas	61
4.2.	Análisis de estacionariedad y no linealidad	63
4.3.	Extracción de características basada en análisis de complejidad	64
4.4.	Resultados en el cálculo de las características acústicas y de representación	83
4.5.	Resultados de clasificación	84
4.6.	Extensiones futuras	84
5.	Conclusiones	86
	Bibliografía	87
A.	Preliminares fisiológicos	94
A.1.	Actividad mecánica del corazón y su registro	94
A.1.1.	Anatomía	94
A.1.2.	Auscultación	94
A.2.	Fonocardiografía	96
A.2.1.	Ruidos cardíacos	96
A.2.2.	Soplos cardíacos	97
B.	Características acústicas calculadas	100
B.1.	Características extraídas preliminarmente	100
B.2.	Características resultantes del preproceso	103
C.	Estacionariedad y pruebas de estacionariedad	105

Lista de tablas

1.1	Características de una serie de tiempo según su exponente de Hurst (H)	24
2.1	Valores de NRMSE para las funciones wavelet [1,2].	37
2.2	Medidas en dominio temporal, media y desviación estándar [3].	42
2.3	Valores de la entropía aproximada para los grupos estudiados.	42
2.4	Resultados del análisis de dinámicas no lineales según [4].	43
2.5	Valores normales de índices de variabilidad cardíaca [5].	43
2.6	Diferencias entre géneros durante el día y la noche. [5].	44
2.7	Valores de las características calculadas en [6].	44
3.1	Reglas de selección de umbral	50
3.2	Métodos de reescalamiento	51
3.3	Índices con más de 4 valores anómalos en cada matriz de características.	59
3.4	Características de las matrices de 41×97 que no tienen distribución gaussiana.	60
3.5	Características de las matrices de 41×97 que obtienen una distribución gaussiana después de la transformación.	60
4.1	Valores calculados para análisis de no linealidad.	63
4.2	Resultados promedio para el cálculo del exponente de Hurst	80
4.3	Resultados promedio para el cálculo de la complejidad LZ	82
4.4	Porcentajes de precisión de clasificación.	84
A.1	Características en frecuencia de los ruidos cardíacos [7].	97

Lista de figuras

1.1	Transformada de Fourier en tiempo corto [8].	4
1.2	Recubrimiento del plano tiempo-frecuencia a través de la TFTC [8].	4
1.3	Recubrimiento del plano tiempo-frecuencia a través de la WT [8].	8
1.4	Etapa de descomposición [8].	11
1.5	Estructura de la descomposición wavelet: <i>árbol wavelet</i> [8].	11
1.6	Etapa de reconstrucción [8].	12
1.7	Ejemplos de atractores, según la diferencia en su geometría.	16
1.8	ejemplo del cálculo de la función de suma de correlación	18
1.9	Cálculo de la D_2 .	19
1.10	Ejemplo de cálculo de los sustitutos	25
2.1	Registro de señales FCG.	28
2.2	Segmentación de ruidos cardíacos [9].	30
2.3	Diagrama de bloques para la detección de S_1 y S_2 . [10]	31
2.4	Espectrogramas y contornos para estados funcionales de señales FCG [11].	34
2.5	Estimación de espectros mediante método AR y TF [11].	35
2.6	Sonidos cardíacos y detalles de sus escalogramas [12].	39
2.7	Convergencia de la dimensión de correlación en diferentes estudios.	45
2.8	Diagramas de fase para estados funcionales [13].	46
2.9	Estimaciones de D_2 para diferentes estados.	47
3.1	Ejemplos de señales FCG que hacen parte de la base de datos analizada.	49
4.1	Resultados de SNR para cada combinación.	62
4.2	A. Señal original. B. <i>Denoising</i> con combinación hm. C. <i>Denoising</i> con combinación rm.	62
4.3	Comprobación de cuasiestacionariedad para los ciclos cardíacos en FCG.	64
4.4	Convergencia de D_2 para series sustituidas a diferentes longitudes.	65
4.5	Estimación de D_2 para un sistema de Lorenz.	65
4.6	Estimación de D_2 para una señal aleatoria.	66

4.7	Escalamiento para el ciclo de una señal FCG. No se ubica un escalado conveniente.	66
4.8	Escalamiento para el ciclo de una señal FCG. Se ubica un escalado conveniente.	67
4.9	Cálculos correspondientes a un sujeto normal. $Fm = 2000$, $\tau = 7$ y m desde 2 a 30.	67
4.10	Cálculos correspondientes a un sujeto normal. $Fm = 2000$, $\tau = 1$ y m desde 2 a 30.	68
4.11	Cálculos correspondientes a un sujeto normal. $Fm = 5000$, $\tau = 15$ y m desde 2 a 30.	68
4.12	Cálculos correspondientes a un sujeto normal. $Fm = 5000$, $\tau = 1$ y m desde 2 a 30.	68
4.13	Cálculos correspondientes a un sujeto normal. $Fm = 10000$, $\tau = 35$ y m desde 2 a 30.	69
4.14	Cálculos correspondientes a un sujeto normal. $Fm = 10000$, $\tau = 1$ y m desde 2 a 30.	69
4.15	Cálculos correspondientes a un paciente. $Fm = 2000$, $\tau = 6$ y m desde 2 a 30.	70
4.16	Cálculos correspondientes a un paciente. $Fm = 2000$, $\tau = 1$ y m desde 2 a 30.	70
4.17	Cálculos correspondientes a un paciente. $Fm = 5000$, $\tau = 11$ y m desde 2 a 30.	70
4.18	Cálculos correspondientes a un paciente. $Fm = 5000$, $\tau = 1$ y m desde 2 a 30.	71
4.19	Cálculos correspondientes a un paciente. $Fm = 10000$, $\tau = 22$ y m desde 2 a 30.	71
4.20	Cálculos correspondientes a un paciente. $Fm = 10000$, $\tau = 1$ y m desde 2 a 30.	71
4.21	Promedio de la estimación de D_2 para los ciclos cardíacos.	72
4.22	Valores de D_2 obtenidos ($m = 50$, $\tau = 1$ y tasa de muestreo de 10000).	73
4.23	Cálculos correspondientes a un sujeto normal. $Fm = 2000$.	74
4.24	Cálculos correspondientes a un sujeto normal. $Fm = 5000$.	74
4.25	Cálculos correspondientes a un sujeto normal. $Fm = 10000$.	75
4.26	Cálculos correspondientes a paciente. $Fm = 2000$.	75
4.27	Cálculos correspondientes a un paciente. $Fm = 5000$.	76

4.28	Cálculos correspondientes a un paciente. $Fm = 10000$.	76
4.29	Valores de K_2 obtenidos ($m = 50$, $\tau = 1$ y tasa de muestreo de 10000).	77
4.30	Cálculos correspondientes a un sujeto normal. $Fm = 2000$.	77
4.31	Cálculos correspondientes a un sujeto normal. $Fm = 5000$.	78
4.32	Cálculos correspondientes a un sujeto normal. $Fm = 10000$.	78
4.33	Cálculos correspondientes a un paciente. $Fm = 2000$.	79
4.34	Cálculos correspondientes a un paciente. $Fm = 5000$.	79
4.35	Cálculos correspondientes a un paciente. $Fm = 10000$.	80
4.36	Cálculos de λ_1 .	80
4.37	Valores de λ_1 obtenidos ($m = 5$, $\tau = 1$ y tasa de muestreo de 10000).	81
4.38	Valores de H para el ciclo de una señal normal y un patológica.	81
4.39	Valores de H obtenidos.	82
4.40	Valores de complejidad LZ obtenidos.	82
4.41	Estimación del coeficiente de la variación de la relación armónica al ruido.	84
A.1	Focos clásicos de auscultación.	96
A.2	Ruidos cardíacos con sus respectivas componentes.	97
A.3	Ejemplo de dos señales FCG.	99

Agradecimientos

Quiero expresar mi agradecimiento al director de este trabajo de grado, el Profesor César Germán Castellanos Domínguez Ph.D., docente del Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Computación de la Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales, y coordinador del *Grupo de Trabajo Académico en Control y Procesamiento Digital de Señales* (GC&PDS), por su dedicación, orientación y valiosa contribución.

En particular, quiero agradecer la colaboración de Juan D. Toro, Oscar E. Quintero, Carlos H. Ruiz, Diana M. Marín, David Márquez y Milton O. Sarria, estudiantes del programa curricular en Ingeniería Electrónica vinculados al GC&PDS, quienes con su dedicación, aportaron cada uno un grano de arena en esta investigación. De igual forma, a los estudiantes Genaro Daza S., del programa de Maestría en Automatización Industrial, y Edilson Delgado T., del programa de Doctorado en Ingeniería.

A la Profesora Montserrat Vallverdú, del Centro de Investigaciones en Ingeniería Biomédica de la Universidad Politécnica de Cataluña, por sus observaciones y aportes en el trabajo.

Al personal del Grupo Telesalud, de la Facultad de Ciencias para la Salud de la Universidad de Caldas, especialmente a los doctores: Ana María Matijasevic, Guillermo Agudelo, Jaime González y Gustavo Reyes, quienes estuvieron siempre dispuestos a colaborar en la discusión y aclaración de los aspectos fisiológicos que debía tener en cuenta en la investigación.

A las personas que nos permitieron la adquisición de sus señales fonocardiográficas, y a Diana Patricia Valencia y Camilo Barrera, estudiantes de Medicina de la Universidad de Caldas, por su colaboración en el manejo del equipo para adquisición de señales.

Al Ingeniero Sakari Lukkarinen, del *Helsinki University of Technology*, quien nos facilitó la base de datos de señales fonocardiográficas correspondientes a pacientes con valvulopatías cardíacas.

A todos los miembros del GC&PDS, que de una u otra manera, me animaron en el desarrollo de mis estudios de maestría.

Edwin Alexander Cerquera Soacha
Manizales, diciembre de 2005.

Resumen

Esta tesis de maestría, presenta una metodología para caracterización de señales FCG normales y patológicas, estas últimas correspondientes a pacientes con presencia de soplos causados por valvulopatías cardíacas. La extracción de características se realiza mediante técnicas orientadas al análisis de complejidad y al análisis acústico. Se compara la separabilidad entre clases producto de las características obtenidas mediante las dos técnicas mencionadas, realizando la detección mediante un clasificador bayesiano. Adicionalmente, se desarrolla un método para atenuación de perturbaciones acústicas en señales FCG basado en transformada wavelet discreta.

Abstract

This Master's thesis presents a methodology to characterize healthy and abnormal PCG signals. The abnormal signals contain frequencies corresponding to patients who have cardiac murmurs. The feature extraction in this research is carried out by means of techniques oriented to complexity analysis and acoustical analysis. It is compared the capacity of separation between classes using the features obtained by means of the two mentioned techniques, realizing the detection with a Bayesian classifier. In addition, it is developed a method to reduce the acoustical disturbances in PCG signals based on discrete wavelet transform and adaptive thresholding.

Introducción

Las enfermedades cardíacas son una de las principales causas de mortalidad y morbilidad en la sociedad moderna, por lo cual, cualquier avance en las técnicas de diagnóstico y tratamiento de enfermedades cardíacas, contribuye no solo al apoyo en el diagnóstico y tratamiento de estas enfermedades, sino también a la comprensión de la dinámica cardíaca y sus fenómenos subyacentes. Los sonidos del corazón son afectados y alterados de algún modo por valvulopatías cardíacas, causando sonidos de alta frecuencia conocidos como soplos, los cuales son a menudo los únicos indicadores de la etapa temprana de algunos trastornos cardiovasculares. La auscultación cardíaca por medio de un estetoscopio, es actualmente un procedimiento complejo para los practicantes de medicina, puesto que se necesita un amplio entrenamiento del sentido auditivo para determinar un diagnóstico acertado. Sin embargo, como método de auscultación no invasivo, resulta bastante sencillo cuando no se cuenta con herramientas y dispositivos de alta tecnología. Por lo tanto, en algunas circunstancias, especialmente en áreas rurales, puede ser el único medio disponible. No obstante, el análisis de los sonidos del corazón dado por los médicos por medio de la auscultación es un método cualitativo e insuficiente para diagnosticar algunas enfermedades del corazón.

Por otra parte, el desarrollo de los métodos para el procesamiento digital de señales biomédicas permite el acceso a herramientas de análisis basadas en las técnicas de dinámica no lineal, las cuales tienen en cuenta la influencia de la multitud de grados de libertad que se presentan en la actividad cardíacas, y por consiguiente, en la génesis de los sonidos cardíacos.

Por lo tanto, las restricciones inherentes al método de auscultación tradicional, que resultan de la incapacidad del oído humano para percibir todas las frecuencias sonoras, de la subjetividad del examinador y de las dificultades en la descripción de los hallazgos en la historia clínica, pueden ser significativamente disminuidas con el actual desarrollo de las herramientas computacionales para el procesamiento, modelado matemático y análisis digital de señales fonocardiográficas a través del análisis acústico y técnicas de dinámica no lineal en la caracterización de estados funcionales correspondientes a casos normales y con presencia de soplos cardíacos, lo que permitirá recuperar la fonocardiografía como un procedimiento válido e importante de apoyo diagnóstico en la evaluación de pacientes con enfermedad cardíaca.

Los objetivos del siguiente trabajo son:

- **Objetivo general:**

Desarrollar una metodología para la caracterización de los estados funcionales normal (ruidos cardíacos) y anormal (soplos cardíacos) empleando técnicas de análisis

acústico y dinámica no lineal sobre registros digitales de señales fonocardiográficas, orientada a mejorar la evaluación de pacientes con valvulopatías cardíacas.

- **Objetivos específicos:**

- 1: Investigar, comparar, y desarrollar métodos de remoción o atenuación de perturbaciones, segmentación, acondicionamiento y extracción de características para señales FCG.
- 2: Desarrollar un método de preproceso y extracción de características, basado en análisis acústico y técnicas de dinámica no lineal, orientado a la estimación y reconocimiento automatizado de estados funcionales correspondiente a estados normales y con presencia de soplos cardíacos
- 3: Validar y evaluar la metodología desarrollada para el soporte del diagnóstico cardíaco.

1. Análisis de señales

1.1. Análisis lineal

1.1.1. Transformada de Fourier en tiempo corto

En el área del procesamiento digital de señales, es usual analizar algunas señales en intervalos cortos de tiempo, en los cuales, los datos se procesan en intervalos definidos de tiempo finito con longitud T_a o *apertura*, como si cada uno de ellos tuviese propiedades estadísticas independientes:

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathcal{G} \{x[m]w[n-m]\}, m \in T_a \quad (1)$$

donde $x[n]$ corresponde a la señal digitalizada, $w[n]$ es la función de peso o *función ventana* centrada respecto a la apertura T_a escogida, de tal manera que facilite la extracción de las características de la señal, y $\mathcal{G} \{ \cdot \}$ representa la transformación de la secuencia aleatoria original, empleando comúnmente la transformada de Fourier en tiempo corto (TFTC) [14]. El análisis de señales mediante la TFTC, presenta ventajas sobre el uso de la transformada de Fourier (TF), ya que permite obtener información en el dominio del tiempo y la frecuencia simultáneamente, mientras que la TF no proporciona información que relacione cada componente en frecuencia con su localización exacta en el tiempo.

Generalmente, una ventana real y simétrica $w(t) = w(-t)$ se traslada en el valor de desplazamiento b , y modula a la frecuencia s , para obtener el *átomo* de tiempo–frecuencia de la TFTC:

$$w_{s,b}(t) = w(t-b)e^{jst} \quad (2)$$

donde $|w| = 1$, tal que $|w_{s,b}| = 1$ para cualquier $s, b \in L^2(T)$. En la práctica, se disponen de diversas funciones ventana, entre las que se encuentran: *blackman*, *Hamming*, *Gaussiana*, representadas en la Figura 1(a). También se pueden encontrar las ventanas *Coseno*, *Kaiser*, *Hanning*, entre otras.

La transformada lineal de tiempo–frecuencia, relaciona la señal con una familia de formas de onda que tienen su energía concentrada en regiones angostas, tanto en el tiempo como en la frecuencia, las cuales se conocen como *átomos de tiempo–frecuencia* [15], por lo que la TFTC de una señal $x(t) \in L^2(\mathbb{R})$. Teniendo en cuenta la Ec. (2), la TFTC está dada por el producto interno dado por (3) en el espacio $L^2(\mathbb{R})$:

$$v(s) = \langle x, w_{s,b} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)w(t-b)e^{-jst} dt \quad (3)$$

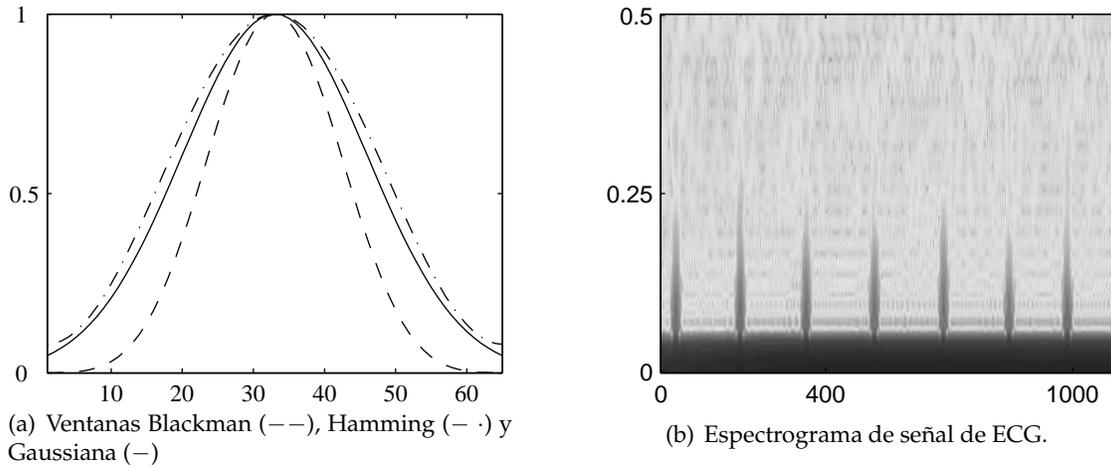


Figura 1.1: Transformada de Fourier en tiempo corto [8].

La correspondiente densidad de la energía de la señal $x(t)$, en el dominio tiempo–frecuencia, se obtiene calculando el *espectrograma* [14], representado en la Figura 1.1b, y esquematizado en la Fig. 1.2:

$$|v(s)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)w(t-b)e^{-jst} dt|^2 \quad (4)$$

La expresión (4) mide la energía de la señal $x(t)$ en la vecindad de (s, b) [15]. La representación por medio de distribuciones en tiempo–frecuencia, se utiliza en el análisis de señales no estacionarias, proporcionando una representación espectral de los datos en función del tiempo. Cuando la dinámica de la señal cambia lentamente, y no se requiere una buena resolución en alta frecuencia, las distribuciones en tiempo frecuencia se obtienen mediante la generación del espectrograma.

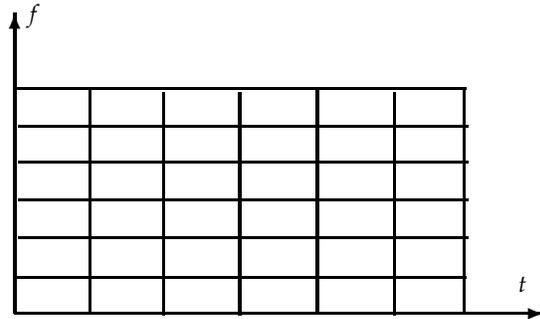


Figura 1.2: Recubrimiento del plano tiempo–frecuencia a través de la TFTC [8].

Cuando se necesita una buena resolución en tiempo y frecuencia, se recurre a la utilización de las distribuciones de Wigner–Ville o Choi Williams [16].

Distribuciones de Wigner–Ville y Choi–Williams. La *distribución de Wigner–Ville* (VWD), también conocida como *transformada de Wigner–Ville* se enmarca dentro de las distribuciones de energía de la señal en el dominio tiempo–frecuencia. El fundamento teórico se basa en el hecho de que la energía de una señal $x(t)$, puede encontrarse integrando el cuadrado del

módulo de la señal, ya sea en tiempo o frecuencia.

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

donde se $|x(t)|^2$ y $|X(\omega)|^2$ son densidades de energía en tiempo y frecuencia respectivamente. También es común hablar de densidad conjunta de energía $\rho_x(t, \omega)$, tal que

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_x(t, \omega) dt d\omega$$

Una de las propiedades más importantes de las distribuciones de energía en tiempo–frecuencia, es la covarianza tiempo–frecuencia, la cual garantiza que la distribución de frecuencia sea trasladada por una misma cantidad en el dominio de la frecuencia, cuando la señal se desplaza y modula en el tiempo. Se ha demostrado, que toda distribución que cumpla esta propiedad tiene la siguiente expresión [17]:

$$C_x(t, \omega : f) = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi\xi(s-t)} f(\xi, t) x(s + \tau/2) x^*(s - \tau/2) d\xi ds dt$$

donde $f(\xi, \tau)$ es una función bidimensional conocida como *función de parametrización* o *kernel*, y corresponde a la distribución tiempo–frecuencia, la cual corresponde a las distribuciones de *clase Cohen*.

Otra de las propiedades importantes que deben satisfacer las distribuciones en tiempo–frecuencia son las *propiedades marginales*:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_x(t, \omega) dt &= |X(\omega)|^2 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \rho_x(t, \omega) d\omega &= |x(t)|^2 \end{aligned}$$

la cuales establecen que si se integra la densidad conjunta de energía sobre una variable, se obtiene la densidad de energía correspondiente a la otra variable.

La WVD hace parte de las distribuciones de energía descritas anteriormente, la cual se calcula como la correlación de la señal $x(t)$ con una traslación en el tiempo y en frecuencia de ella misma.

$$WVD_x(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi\omega\tau} d\tau$$

o equivalentemente

$$WVD_x(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X\left(\omega + \frac{\xi}{2}\right) X^*\left(\omega - \frac{\xi}{2}\right) e^{j2\pi\xi t} d\xi$$

donde $X(\omega)$ es la transformada de Fourier de la señal $x(t)$. En particular, la WVD siempre toma valores reales, preserva los cambios en el tiempo y la frecuencia de la señal, y satisface las propiedades marginales [18]. Las principales propiedades de la WVD son:

- (1) *No linealidad*: La suma de dos señales no implica que sea la suma de la WVD de cada una de ellas.

- (2) *Conservación de la energía*: La integración de la WVD de una señal $x(t)$ en el dominio tiempo–frecuencia conduce a la obtención de la energía de $x(t)$.

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(t, \omega) dt d\omega$$

- (3) *Propiedades marginales*: La densidad espectral de energía y la potencia instantánea se pueden obtener como las distribuciones marginales de WVD_x :

$$\int_{-\infty}^{\infty} WVD_x(t, \omega) dt = |X(\omega)|^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} WVD_x(t, \omega) d\omega = |x(t)|^2$$

- (4) *Valores reales*: La WVD siempre toma valores reales.

$$WVD_x(t, \omega) \in \mathbb{R}, \forall t, \omega$$

- (5) *Covarianza en la traslación*: La WVD es covariante en tiempo y frecuencia.

$$y(t) = x(t - t_0) \Rightarrow WVD_y(t, \omega) = WVD_x(t - t_0, \omega)$$

$$y(t) = x(t)e^{j2\pi\omega_0 t} \Rightarrow WVD_y(t, \omega) = WVD_x(t, \omega - \omega_0)$$

- (6) *Covarianza en la expansión*: La WVD también conserva las expansiones

$$y(t) = \sqrt{k}x(kt); k > 0 \Rightarrow WVD_y(t, \omega) = W_x(kt, \omega/k)$$

- (7) *Compatibilidad con filtrado*: Si una señal $y(t)$ es la convolución de una señal $x(t)$ y un proceso h (filtro), la WVD de $y(t)$ es la convolución en el tiempo entre la WVD de h y la WVD de $x(t)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - s)x(s)ds \Rightarrow WVD_y(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} WVD_h(t - s, \omega)WVD_x(s, \omega)ds$$

- (8) *Compatibilidad con modulaciones*: Esta es la propiedad dual de la anterior. Si una señal $y(t)$ es la modulación de $x(t)$ por una función m , la WVD de $y(t)$ es la convolución en frecuencia entre la WVD de $x(t)$ y la WVD de m .

$$y(t) = m(t)x(t) \Rightarrow WVD_y(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} WVD_m(t, \omega - \xi)WVD_x(t, \xi)d\xi$$

- (9) *Conservación de soporte compacto*: Si una señal tiene soporte compacto en tiempo, su WVD tendrá también el mismo soporte compacto en tiempo

$$x(t) = 0, |t| > T \Rightarrow WVD_x(t, \omega) = 0, |t| > T$$

$$X(\omega) = 0, |\omega| > B \Rightarrow WVD_x(t, \omega) = 0, |\omega| > B$$

- (10) *Frecuencia instantánea*: La frecuencia instantánea de una señal $x(t)$ es el primer momento en frecuencia de la WVD

$$f_x(t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega WVD_{x_a}(t, \omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} WVD_{x_a}(t, \omega) d\omega}$$

donde x_a es la señal analítica asociada a $x(t)$.

- (11) *Retraso en el tiempo*: El retraso en el tiempo de $x(t)$ se puede obtener como el primer momento en el tiempo de la WVD

$$t_x(\omega) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t WVD_{x_a}(t, \omega) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} WVD_{x_a}(t, \omega) dt}$$

La *distribución de Choi–Williams* de una señal $x(t)$ se define como:

$$CWD(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi ft} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\gamma}{4\pi\tau^2}} e^{-\frac{\gamma(\mu-t)^2}{4\tau^2}} x\left(\mu + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(\mu - \frac{\tau}{2}\right) d\mu d\tau \quad (5)$$

donde γ es un factor que controla la supresión de términos cruzados y la resolución en frecuencia. La función $CWD(t, f)$ se convierte en la distribución de Wigner–Ville cuando $\gamma \rightarrow \infty$ [8].

1.1.2. Transformada wavelet

El análisis mediante transformada wavelet (WT), permite la localización conjunta de eventos en tiempo-frecuencia, el cual incluye la técnica de ventaneo con regiones de tamaño variable (Figura 1.3). Los intervalos largos de tiempo son utilizados donde se requiere información más precisa a baja frecuencia, mientras que los intervalos cortos se aplican en casos donde se necesita información de alta frecuencia. El análisis wavelet puede encontrar aspectos como tendencias, puntos de quiebre, discontinuidades en derivadas grandes, autosimilaridad, etc. [19]. En contraposición con lo que ocurre en la aplicación de la TFTC, si se desea una buena localización de la distribución resultante en el tiempo se escoge una ventana estrecha en tiempo, que va dividiendo el plano tiempo–frecuencia en rectángulos alargados en el sentido de la frecuencia, y estrechos a lo largo del tiempo. Si por el contrario, se desea una buena discriminación en la frecuencia de la distribución, las ventanas se rotan en su recubrimiento del plano 90° . La uniformidad del recubrimiento, una vez elegida la ventana, conlleva a difíciles compromisos de resoluciones que no siempre encuentran fácil solución. En la WT, la descomposición se realiza en diferentes componentes frecuenciales, de tal manera que cada una de éstas tenga una resolución de acuerdo con su escala [20]. La noción de escala se relaciona directamente con su interpretación cartográfica. Una versión de una señal cualquiera $x(t)$ aumentada en escala, será una señal similar pero muestreada a una tasa mayor $\left(x(t) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}x(t/2)\right)$. De forma similar, disminuir la escala de dicha señal lleva

consigo la reducción de la velocidad de muestreo, manteniendo una forma de onda similar $(x(t) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}x(2t))$. Partiendo de una señal conocida a una escala (de referencia), se puede llegar de muchas maneras a una nueva versión de dicha señal a otra escala predeterminedada. La búsqueda de una única señal a la escala destino, define el concepto de resolución, que depende de la cantidad de información presente en una señal; a mayor información mayor resolución tendrá una señal. Es importante tener presente, que si la señal original tiene resolución 1, nunca se podrá aumentar dicha resolución sin añadir más información.

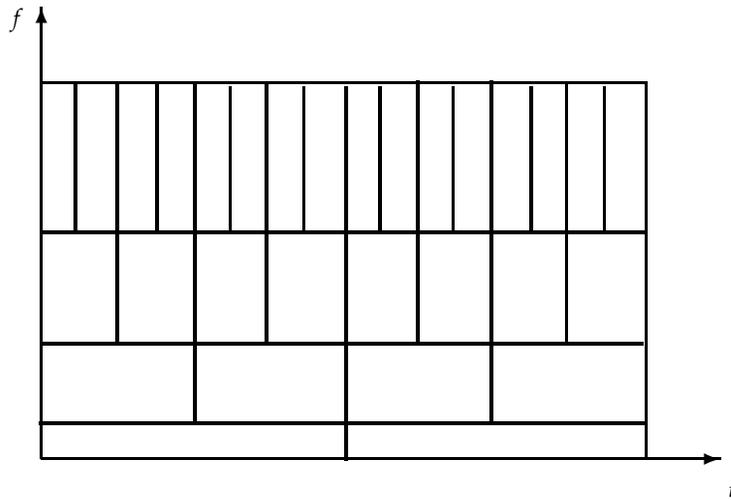


Figura 1.3: Recubrimiento del plano tiempo-frecuencia a través de la WT [8].

La función $\psi(t)$ de variable real t , que se conoce como función wavelet madre, y que debe oscilar en el tiempo, debe estar bien localizada en el dominio temporal. La localización temporal se expresa en la forma habitual de rápido decaimiento hacia cero cuando la variable independiente t tiende al infinito. La idea de oscilación de la función se traduce en la siguiente formulación

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (6)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^{m-1} \psi(t) dt = 0 \quad (7)$$

$$(8)$$

siendo $(m - 1)$ el valor del orden del momento de la función $\psi(t)$.

A partir de la función madre, se generan el resto de funciones de la familia mediante cambios de escala y traslaciones $\{\psi_{a,b}(t), a > 0, b \in \mathbb{R}\}$. La función madre, tradicionalmente se ajusta a escala unidad. El parámetro de escala a queda asociado a un estiramiento o encogimiento de la función madre. Así, dada una función localizada en el tiempo $s(t)$, su

versión escalada $s_a(t)$ se define como

$$s_a(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} s\left(\frac{t}{a}\right), \quad a \in \mathbb{R}, \quad a > 1 \quad (9)$$

La función (9), función mantiene la misma forma que $s(t)$ pero sobre un intervalo de representación (soporte) más amplio. Si el parámetro de escala se hace menor que 1, pero manteniéndolo siempre positivo (para evitar una inversión de la función) se obtiene una compresión del soporte de la función. El *parámetro de traslación* b , permite la localización temporal de la distribución de energía. A partir de la función madre $\psi(t)$, se generan las funciones wavelet $\psi_{a,b}(t)$ mediante operaciones conjuntas de cambio de escala y traslación,

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (10)$$

En [21], se demuestra que si la función madre $\psi(t)$ es real, entonces la familia de funciones definidas por su traslación y escalamiento conforman una base completa del espacio y, por lo tanto, se puede representar cualquier función (señal de energía finita ($x(t) \in L^2(\mathbb{R})$)) mediante una combinación lineal de las funciones $\psi_{a,b}(t)$, calculando los coeficientes de tal descomposición en la forma del producto escalar.

Transformada wavelet continua

La *transformada wavelet continua*, se describe por:

$$\begin{aligned} C(a, b) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi_{a,b}^*(t) dt \\ C(a, b) &= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = \langle x(t), \psi_{a,b}(t) \rangle \end{aligned} \quad (11)$$

donde el parámetro a es denominado de escala, mientras b se denomina de traslación. Ambos varían de forma continua por todo el eje real, esto es, $a, b \in \mathbb{R}, a > 0$. La función $x(t)$, puede ser reconstruida unívocamente utilizando la expresión

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle x(\tau), \psi_{a,b}(\tau) \rangle \psi_{a,b}(t) \frac{da db}{a^2} \quad (12)$$

donde la constante C_ψ , denominada *condición de admisibilidad*, depende sólo de la función wavelet madre $\psi(t)$, de acuerdo con

$$C_\psi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(\xi)|^2 |\xi|^{-1} d\xi < \infty \quad (13)$$

La condición de admisibilidad, asegura que la función wavelet madre no tenga contenido a frecuencia nula (o que éste resulte despreciable) (Ec. (6)) y con ello, que las versiones dilatadas resultantes de la función madre estén todas centradas a frecuencias diferentes.

A diferencia del caso de las expresiones de Fourier, la transformada $x(t) \rightarrow C(a, b)$ representa con mucha redundancia una función de una variable en un espacio bidimensional y por lo tanto, estas funciones wavelet no forman una base ortonormal real. Un muestreo apropiado de los parámetros de la función wavelet permite eliminar la redundancia, obtener una

base ortonormal de wavelets de soporte compacto y definir la metodología para el cálculo eficiente de los coeficientes wavelet.

Transformada wavelet discreta

En este caso, los parámetros de dilatación a y traslación b toman solamente valores discretos. La dilatación de la wavelet madre, se relaciona como potencias enteras de una escala de referencia a_0 , normalmente mayor que 1, así $a = a_0^j$. Para la discretización del parámetro b , se debe tener en cuenta que el recubrimiento discreto del plano tiempo-frecuencia es localizado en cada escala, así el parámetro de traslación depende del parámetro de escala. Para escalas mayores, la traslación debe ser mayor. Dado que el ancho de las funciones a cada escala es directamente proporcional con la misma, se toma una discretización del parámetro b directamente relacionada con la escala que se está trabajando $b = kb_0 a_0^j$.

$$a = a_0^j \quad (14)$$

$$b = kb_0 a_0^j \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad a_0 > 1, b_0 > 0 \quad (15)$$

Una base ortonormal de wavelets de soporte compacto pueden ser obtenidas al extender $L^2(\mathbb{R})$, el espacio de todas las señales de energía finita, por medio de traslaciones y dilataciones de la función wavelet (Ec. (10)), así

$$\psi_{j,k}(t) = a_0^{-j/2} \psi(a_0^{-j} t - kb_0) \quad (16)$$

donde j representa la escala y k la traslación temporal. Si se seleccionan escalas y posiciones basadas en potencias de 2 ($a_0 = 2$), llamadas escalas y posiciones diádicas, el análisis será mucho más eficiente e igual de preciso que el análisis continuo. Una vía para implementar este esquema usando filtros fue desarrollada en [20], cuyo algoritmo es en efecto un esquema clásico conocido como codificador sub-banda de dos canales. En este caso, la señal $f(t)$ se representa como una serie de *aproximaciones* (baja frecuencia) y *detalles* (alta frecuencia) en diferentes resoluciones. En cada etapa, un par de filtros h , g son aplicados a la señal de entrada para producir una señal de aproximación y una de detalle respectivamente. La señal de detalle, representa la información perdida desde una resolución alta, hasta una más baja. La representación wavelet es entonces, el conjunto de coeficientes de detalle en todas las resoluciones y los coeficientes de aproximación en la resolución más baja.

El algoritmo rápido para calcular los coeficientes wavelet, está dado por la siguiente expresión

$$ca_{j,k} = \sum_m h[2k - m] ca_{j-1}[m] \quad (17)$$

$$cd_{j,k} = \sum_m g[2k - m] ca_{j-1}[m] \quad (18)$$

$$(19)$$

Los filtros h y g son llamados *filtros espejo en cuadratura* y satisfacen la siguiente propiedad

$$g[n] = (-1)^{1-n}h[1-n] \quad (20)$$

La etapa de filtrado es seguida por una decimación diádica o submuestreo por un factor de 2. El esquema para una etapa de filtrado a una escala j se muestra en la Figura 1.4. La descomposición wavelet de una señal f analizada en una escala o nivel j , tiene la siguiente estructura: $[ca_j, cd_j, \dots, cd_1]$ (Figura 1.5). Los filtros h y g son derivados de bases de wavelets ortonormales y, por lo tanto, la reconstrucción de la señal a partir de la descomposición wavelet es exacta y dada por la Ec. (21), representada en la Figura 1.6 [8],

$$ca_{j-1,k} = 2 \sum_m (ca_{j,k}[m]h[k-2m] + cd_{m,k}[m]g[k-2m]) \quad (21)$$

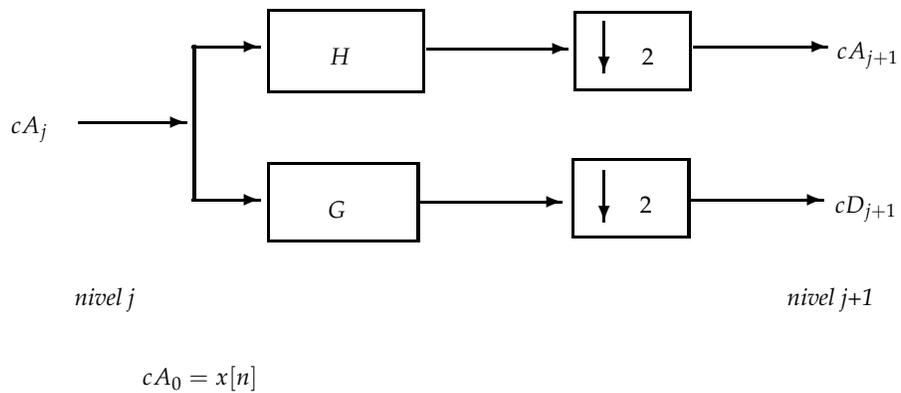


Figura 1.4: Etapa de descomposición [8].

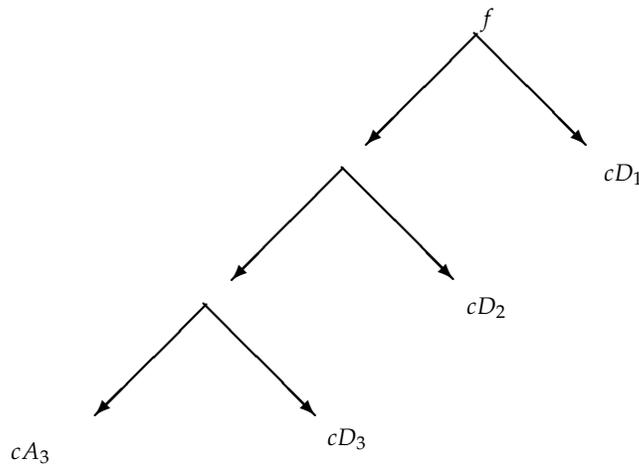


Figura 1.5: Estructura de la descomposición wavelet: *árbol wavelet* [8].

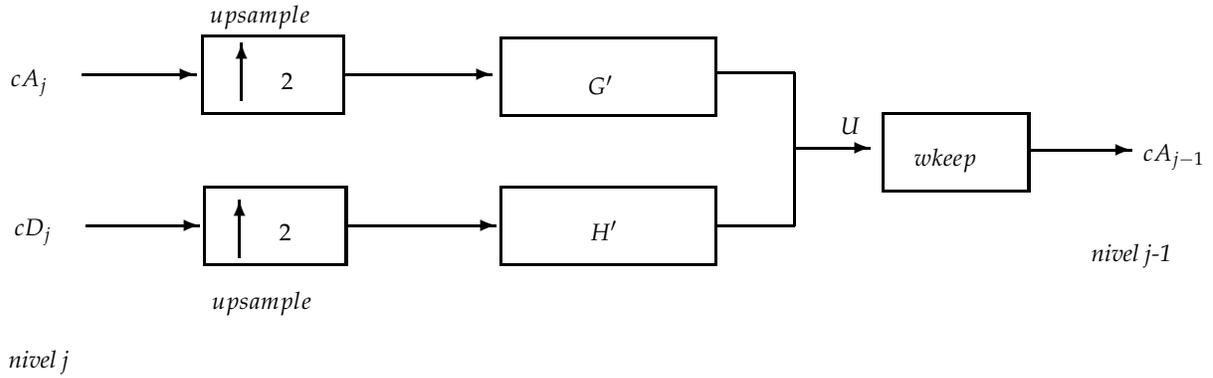


Figura 1.6: Etapa de reconstrucción [8].

1.2. Análisis no lineal

1.2.1. Espacios de estado

Los sistemas dinámicos no lineales son aquellos cuya respuesta ante un estímulo dado en algún instante de tiempo no se produce de forma proporcional a sus respectiva excitación de entrada [22]. En ciertas circunstancias, los sistemas determinísticos no lineales, entran en un estado llamado *caos*, cuando la respuesta del sistema presenta una notable sensibilidad a las condiciones iniciales del modelo; es por esto, que aunque exista un modelo determinístico del sistema no lineal, al entrar en el régimen caótico, se genera un comportamiento impredecible a largo plazo, si no se tienen de manera precisa las condiciones iniciales [23]. A diferencia del análisis lineal, el cual atribuye el comportamiento irregular de un sistema a la naturaleza aleatoria de la señal de entrada, las entradas aleatorias no son las únicas fuentes posibles de irregularidad en la salida de un sistema [22, 24].

Un sistema dinámico determinístico no lineal puede definirse en tiempo continuo mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\{\mathbf{x}(t)\} \quad (22)$$

donde \mathbf{f} es una función vectorial no lineal con dimensión $l \times 1$ que representa las reglas dinámicas de gobierno sobre el comportamiento de las variables, y \mathbf{x} es el vector de estado con dimensión $l \times 1$ que representa las variables dinámicas del sistema [24]. El número de estados l se conoce como el *orden* del sistema, y los grados de libertad están dados por la cantidad de ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas de primer orden, requeridas para describir el sistema y corresponden al número de componentes en el vector de estado $\mathbf{x}(t)$, $t \in (0, \infty)$ [25]. Cada una de las soluciones de la Ec. (22) corresponden a una *trayectoria* u *órbita* en un espacio con dimensión múltiple conocido como *espacio de fase*, el cual es un espacio vectorial abstracto generado por las variables dinámicas del sistema que representan la evolución en el tiempo [22].

Sea $s[n] = s(t_0 - nT_s)$, $n \in \mathbb{Z}^+$, la serie de datos con origen en el instante t_0 , muestreada en intervalos de tiempo T_s . La evolución tanto del vector de estado como de la observación se representa de la forma $\mathbf{x}(t_0 + (n+1)T_s) \approx \mathbf{x}(t_0 + nT_s) + T_s \mathbf{f}_D \{\mathbf{x}(t_0 + nT_s)\}$, de manera que las observaciones se toman como:

$$\begin{aligned} s(t_0 + nT_s) &\rightarrow s(t_0 + (n+1)T_s) \\ s[n] &\rightarrow s[n+1], \end{aligned}$$

Mediante la estimación de algunas propiedades, se determina si existe un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias que generan el sistema analizado. A partir de la serie de observaciones escalares $s[n] = s(t_0 + nT_s)$, se puede llegar a la representación en un espacio multivariable de fase haciendo uso del *teorema de inmersión* [26–28].

Sea un sistema dinámico $\mathbf{x}[n] \rightarrow \mathbf{f}_D(\mathbf{x}[n]) = \mathbf{x}[n+1]$, donde el espacio de fase de $\mathbf{x}[n]$ es de dimensión múltiple. Según el teorema de inmersión cuando se observa una cantidad escalar simple $h(\cdot)$, de alguna función vectorial de las variables dinámicas $\mathbf{g}(\mathbf{x}[n])$, entonces la estructura geométrica de esta dinámica multivariable puede ser comprendida a través del conjunto de medidas escalares $h(\mathbf{g}(\mathbf{x}[n]))$ en un espacio vectorial, cuyos componentes se originan al aplicar $h(\cdot)$ a potencias de $\mathbf{g}(\mathbf{x}[n])$.

Los vectores

$$\mathbf{S}[n] = [h(\mathbf{x}[n]), h(\mathbf{g}(\mathbf{x}^{\tau_1}[n])), h(\mathbf{g}(\mathbf{x}^{\tau_2}[n])), \dots, h(\mathbf{g}(\mathbf{x}^{\tau_{m-1}}[n]))], \quad (23)$$

definen la dinámica en un espacio euclídeo de dimensión múltiple. En general, a partir de las condiciones de suavidad de las funciones $h(\cdot)$ y $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ [28], se muestra que para un valor adecuado de dimensión, diversas propiedades importantes de la señal multivariable desconocida $\mathbf{x}[n]$ (en la fuente observada de caos) son reproducidas sin ambigüedad en el nuevo espacio de vectores $\mathbf{S}[n]$, mediante la reconstrucción del diagrama conocido como *atractor*. Esto es, el orden secuencial de los puntos $\mathbf{S}[n] \rightarrow \mathbf{S}[n+1]$, proporciona una forma de representar el sistema dinámico desconocido, dado por $\mathbf{x}[n] \rightarrow \mathbf{x}[n+1]$. Por lo tanto, el comportamiento determinístico de la fuente subyacente de observaciones, $\mathbf{x}[n] \rightarrow \mathbf{x}[n+1]$, asegura el determinismo de la representación dada por $\mathbf{S}[n] \rightarrow \mathbf{S}[n+1]$.

El vector $\mathbf{S}[n]$ se genera evitando los errores en el orden secuencial que podrían presentarse durante la proyección de la evolución desde el espacio original $\mathbf{x}[n]$ hacia el espacio escalar $h(\mathbf{g}(\mathbf{x}[n]))$. Tales errores resultan si dos puntos moderadamente lejanos en el espacio original fuesen proyectados cerca uno al otro a lo largo del eje de observaciones escalares. Esta falsa línea de vecindad de observaciones en $h(\mathbf{g}(\mathbf{x}[n]))$ puede surgir a partir de la proyección desde un espacio de mayor dimensión.

El arreglo $s[n]$ se escoge en calidad de la función escalar general de medida $h(\cdot)$, es decir $h(\mathbf{x}[n]) = s[n]$ y para la función general $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, se escoge la operación que describe el vector \mathbf{x} en un tiempo T_s , de tal modo que la τ_k potencia de $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, a partir de (23) está de la forma

$$\mathbf{g}^{\tau_k}(\mathbf{x}[n]) = \mathbf{x}[n + \tau_k] = \mathbf{x}(t_0 + [n + \tau_k] T_s)$$

por lo que las componentes de $\mathbf{S}[n]$ se expresan mediante

$$\mathbf{S}[n] = [s[n], s[n + \tau_1], s[n + \tau_2], \dots, s[n + \tau_{m-1}]]$$

Si se escoge $\tau_k = k\tau$, es decir, los tiempos de retardo que son múltiplos enteros de un retardo común τ , entonces el vector de datos $\mathbf{S}[n]$ es

$$\mathbf{S}[n] = [s[n], s[n + \tau], s[n + 2\tau], \dots, s[n + \tau(m - 1)]] \quad (24)$$

compuesto por observaciones que se encuentran retardadas en τ , para el instante nT_s .

Un estado del sistema dinámico en un instante de tiempo dado se representa por un punto en el espacio de fase. Si existen l variables dinámicas, entonces el estado en un tiempo dado se representa por un punto en el espacio euclídeo \mathbb{R}^l . En la medida en que las variables dinámicas cambian sus valores en el tiempo, los puntos representativos trazan una curva en el espacio de fase, la cual conduce a la formación del respectivo atractor.

Una vez se fija el estado actual de un sistema puramente determinístico, se pueden conocer también sus estados en futuros instantes de tiempo. Por lo tanto, es importante establecer correctamente el espacio de fase para el sistema de tal manera que, especificando un punto en éste, se pueda conocer el estado del sistema y viceversa, lo que conlleva a analizar su dinámica mediante el estudio del correspondiente espacio de fase. De esta forma, se asegura la existencia y unicidad de las trayectorias, siempre y cuando se conozcan las condiciones iniciales del sistema.

La técnica más conocida de reconstrucción de espacios de fase para sistemas dinámicos discretos es el *método por tiempos de retardo* [29]. La trayectoria reconstruida

$$\mathbf{S}_{l \times m} = [\mathbf{S}[1], \mathbf{S}[2], \dots, \mathbf{S}[l]]^T \quad (25)$$

se expresa en forma de matriz, en la cual cada fila es un vector del espacio de fase, siendo $\mathbf{S}[n]$ el estado del sistema (como se describe en 24). El número m de elementos se denomina *dimensión de inmersión*, que corresponde al mapeo inyectivo desde el espacio de fase en el espacio de estado original hacia el espacio \mathbb{R}^m [30]. El orden del sistema en (25),

$$l = N - (m - 1)\tau, \quad (26)$$

se determina de tal manera que cada estado l sea un punto en la reconstrucción del atractor dentro del espacio de fase, donde N es la longitud de la serie de tiempo.

De esta forma, se puede determinar si una serie de tiempo es o no de naturaleza determinística, empleando un sistema dinámico de dimensión baja. La dimensión del espacio de fase se da por el *teorema de inmersión de Takens*, según el cual, si se obtiene un atractor con dimensión d en (26) a partir de un conjunto de datos, entonces las propiedades topológicas del atractor son equivalentes a las propiedades topológicas del inmersión formado por los vectores del espacio de fase con dimensión m , tal que, $m \geq 2d + 1$ [25]. De este modo, se obtiene una versión topológicamente equivalente del espacio de fase a partir del comportamiento de una sola de las variables del sistema. En este caso, no es necesario observar

todas las variables y las ecuaciones del sistema dinámico pueden ser desconocidas. Tanto τ , como m pueden tomar diferentes valores, con lo cual se obtienen diferentes trayectorias reconstruidas en el espacio de fase.

Por lo tanto, la calidad en la representación de una serie de tiempo dentro de un espacio de fase está en obtener el valor de inmersión óptimo, que depende de los valores de τ y de m , los cuales determinan las propiedades topológicas del atractor y la respectiva predicción de los estados futuros de $\mathbf{x}[n]$. La selección del valor de τ es aún un problema que no tiene solución definitiva, aunque existen diversos métodos para su selección. En todo caso, si τ es muy pequeño, los elementos sucesivos de los vectores de retardo se correlacionan fuertemente, y todos los puntos de los datos se ubican cerca a la *línea identidad* o *diagonal* en el espacio de fase.

Un criterio simple en la estimación de τ consiste en calcular el primer cero de la *información mutua promedio* entre las variables aleatorias $s[n]$ y $s[n + \tau]$ [25]. Cuando τ tiene un valor muy grande, el comportamiento caótico de la señal hace que $s[n]$ y $s[n + \tau]$ sean prácticamente independientes, y la información mutua tiende a cero.

1.2.2. Cálculo del tiempo de retardo

Uno de los principales métodos para estimar el valor del tiempo de retardo (τ) es mediante el cálculo de la *información mutua promedio* (AMI) de la series de tiempo analizadas $s[n]$ y $s[n + \tau]$:

$$I(\tau) = \sum_{s[n], s[n+\tau]} p(s[n], s[n + \tau]) \log_2 \left(\frac{p(s[n], s[n + \tau])}{p(s[n])p(s[n + \tau])} \right),$$

donde $p(s[n], s[n + \tau])$ es la densidad de probabilidad conjunta para $s[n]$ y $s[n + \tau]$, así como $p(s[n])$ y $p(s[n + \tau])$ son las densidades de probabilidad marginales para $s[n]$ y $s[n + \tau]$ respectivamente. Con una mayor independencia estadística entre las series de análisis, se espera que la cantidad de información entre las medidas, es decir, la información mutua, sea igual a cero. Esta es una idea teórica que conecta dos conjuntos de medidas, una con respecto a otra, estableciendo un criterio para su dependencia mutua basada en la noción de conexión de información entre ellas. Sin embargo, para valores suficientemente grandes de τ las series $s[n]$ y $s[n + \tau]$ pueden considerarse independientes, e $I(\tau)$ tenderá a cero. El valor de τ se toma entonces donde se presenta el primer mínimo de la información mutua promedio $I(\tau)$ como valor para emplear en la reconstrucción del espacio de fase [25]. El procedimiento para escoger el primer mínimo de la información mutua promedio es similar al que se utiliza para escoger el primer cero de la función de autocorrelación lineal

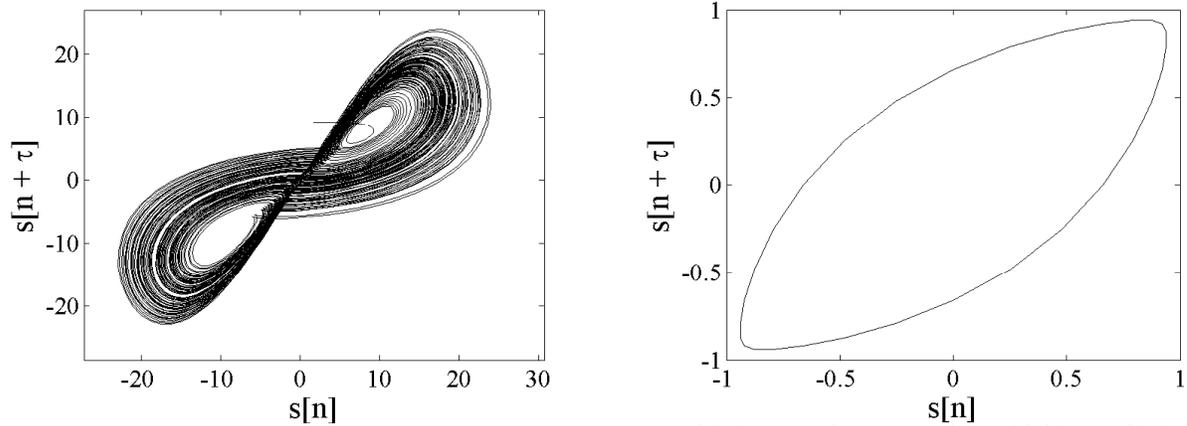
$$C(\tau) = \sum_n (s[n] - \bar{s})(s[n + \tau] - \bar{s}),$$

donde $\bar{s} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N s[n]$, es el tiempo en el cual se escoge el retardo τ . Este método representa la manera lineal óptima para seleccionar τ desde el punto de el valor de predicción de $s[n + \tau]$ a partir del conocimiento de $s[n]$, en el sentido de los mínimos cuadrados.

1.2.3. Medidas de complejidad

Dimensión fractal o fraccional. El análisis del comportamiento caótico de sistemas de dinámica no lineal, implica el estudio de su dimensión, que permite estimar el número de variables independientes que serían necesarias para describir toda la dinámica del sistema. Una estructura geométrica puede ser representada por un conjunto de puntos en un espacio euclídeo \mathbb{R}^m , con un valor de m lo suficientemente grande para localizar de forma única la posición de cada punto en la estructura. Cada conjunto en \mathbb{R}^m tiene asignado una dimensión topológica $d \in [0, m]$.

La dimensión fraccional o *dimensión fractal* (d) es cualquier medida de la dimensión que asuma valores no enteros, por lo que una estructura *fractal* es un conjunto con dimensión no entera. La geometría euclídea no acepta dimensiones fractales, luego $d = D$, $D \in \mathbb{Z}$. La importancia de los fractales en la dinámica no lineal, radica en que los atractores son estructuras geométricas de este tipo, y su dimensión d se relaciona con el número mínimo de variables necesarias para modelar la dinámica del respectivo atractor, similar a los representados en la Figura 1.7.



(a) Atractor de tipo fractal, correspondiente a un sistema de Lorenz.

(b) Atractor de una señal senoidal (periódica).

Figura 1.7: Ejemplos de atractores, según la diferencia en su geometría.

Sea v la cantidad de puntos dentro de una esfera de radio r , de tal manera que esta se disminuye a medida que r tiende a cero. Se determina entonces la reconstrucción en un atractor de la secuencia dada por la expresión (24) en un espacio euclídeo o en un espacio inmerso. Luego se establece algún punto x que esté cerca o sobre el atractor reconstruido, y se evalúa la manera como la cantidad de puntos sobre la órbita del atractor dentro de un radio r cambia a medida que este se hace más pequeño, aunque de forma moderada, dado que se tiene un número finito de datos, y si el radio es muy pequeño, ningún punto se ubicaría dentro de la esfera. Específicamente, el radio r debe ser suficientemente pequeño

para localizar una buena cantidad de puntos dentro de la esfera, pero no tan grande para que se ubiquen la totalidad de los datos dentro de la misma, lo cual tiene lugar si $r \approx R_A$, donde el tamaño del atractor está dado por $R_A = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |s[n] - \bar{s}|$. De esta manera, la cantidad de puntos v depende del radio r y la ubicación del punto x dentro de la esfera, de la forma, $v(x, r) \approx r^{d(x)}$, donde $d(x)$ es la dimensión del atractor que depende del punto x en donde se observe y de las condiciones iniciales del sistema, dado que el atractor, por ser una estructura cuya geometría no es tan regular como la de una esfera o un toroide, no tiene una dimensión topológica constante en todos sus puntos. Naturalmente, la densidad de puntos del atractor es heterogénea, debido a que también depende del radio r y el punto x . Este tipo de estructuras son conocidas como *atractores extraños*, cuya geometría es de tipo fractal. El valor del radio r varía de acuerdo al rango de magnitud $0 \ll r/R_A \ll 1$. Si el atractor fuese una figura geométrica regular de dimensión entera D , entonces se encontraría una cantidad de puntos r^D en cada atractor inmerso en una esfera de radio r alrededor del punto x , por lo que $d(x) = D, \forall x$ [25].

Con el propósito de identificar la dimensión fractal de un atractor extraño reconstruido a partir de la secuencia $\mathbf{S}[n]$, se calcula la cantidad de puntos observados dentro de la esfera de radio r alrededor de un punto x en el espacio de fase mediante la expresión:

$$v(x, r) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \Theta(r - |\mathbf{S}_i[n] - \mathbf{S}_j[n]|), \quad \Theta[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

donde $\Theta[n]$ es la función escalón (función de *Heaviside*) y N es la longitud de la secuencia de datos de $\mathbf{S}[n]$. La anterior expresión realiza el conteo de todos los puntos sobre la órbita $\mathbf{S}[n]$, dentro de un radio r en el punto x , y normaliza esta cantidad por el número total de los puntos contenidos en los datos. A partir de lo anterior, se obtiene la *suma de correlación generalizada* $C(q, r)$, entendida como la estimación de la cantidad de puntos cercanos y situados a una distancia r con respecto al total de puntos en el atractor, la cual se expresa como:

$$C(q, r) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Theta(r - |\mathbf{S}_i[n] - \mathbf{S}_j[n]|) \right]^{(q-1)} \quad (27)$$

Si r es menor que el tamaño del atractor, además mayor que el espacio más pequeño entre los puntos, entonces $C(r) \approx r^{(q-1)D_q}$, siendo D_q la dimensión fractal [25, 31]. La cantidad indicada en la expresión (27), cuando $q = 2$, es conocida como la *suma de correlación* [32], que sigue la siguiente aproximación: La probabilidad que dos puntos del conjunto estén en la misma esfera de radio r , es aproximadamente igual a la probabilidad que dos puntos del conjunto estén separados por una distancia ρ menor o igual que el radio r , esto es:

$$\rho(|\mathbf{S}_i[n] - \mathbf{S}_j[n]|) = \sqrt{\sum_{n=1}^N (\mathbf{S}_i[n] - \mathbf{S}_j[n])^2},$$

por lo cual, la suma de correlación $C(r)$ se da de la forma:

$$C(r) \approx \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N \Theta(r - \rho |S_i[n] - S_j[n]|) \quad (28)$$

La Figura 1.8 muestra un ejemplo de una señal de Lorenz y la estimación de su respectiva suma de correlación ($C(r)$) a partir de su reconstrucción en el espacio de fase con un valor de $\tau = 10$ y valores de dimensión de inmersión (m) desde 2 a 15. En la Figura 1.8b se genera una recta por cada valor de m .

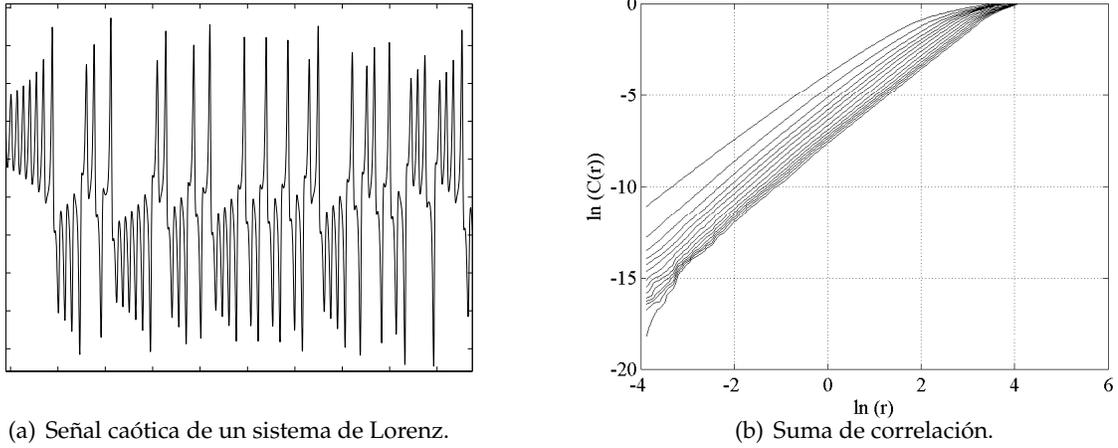


Figura 1.8: ejemplo del cálculo de la función de suma de correlación

Dimensión de capacidad (D_0). Una forma simple de medir la dimensión fractal de un atractor consiste en estimar la *dimensión de capacidad* o *dimensión box-counting* D_0 , cuya evaluación consiste en determinar cuántas esferas de radio r (que para este caso se pueden considerar como cuadrados para atractores inmersos en dos dimensiones o cubos para atractores inmersos en tres dimensiones, de lado r) son necesarias para cubrir todos los puntos del conjunto de datos. Para evaluar esta cantidad, se establece una función $N(r)$ como una función del radio (o lado en caso que sea un cuadrado o cubo) r cuando corresponde a un valor pequeño, y que representa la cantidad de esferas, cuadrados o cubos necesarios para cubrir el conjunto de puntos.

$$D_0 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log(N(r))}{\log\left(\frac{1}{r}\right)}$$

Cabe anotar que para valores de r suficientemente pequeños $N(r) \approx r^{-D_0}$.

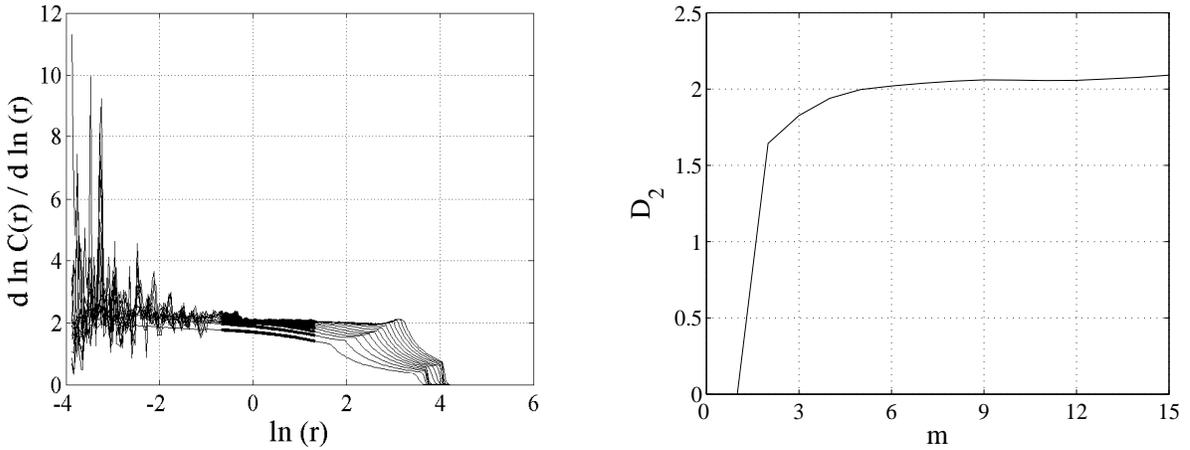
Dimensión de correlación (D_2). Es una medida de la complejidad de un sistema determinístico que proporciona el número de variables independientes necesarias para describir su comportamiento. Esta medida se obtiene a partir de la suma de correlación $C(r)$, determinando la zona donde las curvas generadas para cada valor de m se comportan de forma

lineal. A partir de esta región, se calcula la pendiente de cada recta, el cual representa el valor de D_2 para cada valor de m . La medida se expresa de la forma:

$$D_2 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log(C(r))}{\log(r)}$$

En la práctica, el cálculo de D_2 se basa en la estimación de la región en la cual la función $\ln(C(r))$, para cada valor de m , es lineal con respecto a $\ln(r)$. A este rango de valores de $\ln(r)$ se le denomina *región de escalamiento*. Primero se debe derivar la función $\ln(C(r))$, y se determinan los valores de $\ln(r)$ donde se encuentra la meseta de la derivada (Figura 1.9a). Posteriormente, de acuerdo al rango de valores de $\ln(r)$ determinados según la observación de la meseta en la gráfica de $d \ln(C(r)) / d \ln(r)$, se establecen los valores de $\ln(r)$ donde se debe estimar las pendientes de las rectas correspondientes a la función $\ln(C(r))$, para cada valor de m .

Normalmente, D_2 aumenta con respecto a m , hasta que converge a algún valor determinado dependiendo de la naturaleza de los datos analizados, como se muestra en la Figura 1.9, que calcula D_2 mediante la ubicación de la meseta en la Figura 1.9a, la cual se presenta para valores de $\ln(r)$ entre -1 y 1 aproximadamente.



(a) Derivada de la función $\ln(C(r))$ correspondiente a la Figura 1.8b.

(b) Dimensión de correlación

Figura 1.9: Cálculo de la D_2 .

Medidas de entropía

Entropías de Shannon y Rényi. La *entropía* es una medida que cuantifica la incertidumbre presente en un conjunto de datos debido a su cantidad de información. Sea

$$f(p(X_k)) = -p(X_k) \log_2(p(X_k)), \quad 0 \leq p(X_k) \leq 1 \quad (29)$$

donde $p(X_k)$ es la probabilidad de que una variable aleatoria X tome el valor de k (que representa el tamaño del alfabeto), con $k = 1, 2, \dots, N$. Por lo tanto, la función $f(p(X_k))$ es igual a cero cuando $p(X_k) = 0$ y $p(X_k) = 1$, y positiva para valores intermedios, hallándose su máximo valor ($f(p(X_k)) = 1$) cuando $p(X_k) = 0.5$. A partir de esta expresión, la *entropía de Shannon* (o *entropía de información*) se define como

$$H(X_k) = \sum_k f(p(X_k)) \quad (30)$$

De este modo, la entropía de un conjunto de datos se puede interpretar como el grado de información que proporciona su observación; entre mayor sea la incertidumbre en la observación del conjunto de datos, mayor es su valor de entropía, por consiguiente, la entropía de Shannon mide la incertidumbre de un sistema dinámico [33]. Si las probabilidades son cercanas a 0, se espera que una de ellas esté cercana a 1 (debido a que la suma de probabilidades debe ser igual a 1), en cuyo caso, el grado de aleatoriedad de la variable es mínima, dado que casi siempre toman el mismo valor, situación que se refleja en su disminuido valor de entropía. De otro lado, si todas las probabilidades son iguales, entonces se encuentran relativamente lejos de los valores de 0 y 1, y la función $f(p(X_k))$ aumenta su valor, indicando un grado elevado de entropía, en el que es difícil predecir el valor que toma la variable aleatoria en un tiempo subsiguiente [34]. Es necesario tener en cuenta que la entropía depende de la probabilidad que tiene una variable aleatoria de tomar ciertos valores correspondientes a un alfabeto determinado, mas no de los valores del alfabeto.

Se puede introducir un concepto generalizado a través de las *entropías de Rényi* delimitadas por un parámetro q :

$$H_q(X_k) = \frac{1}{1-q} \log_2 \sum_k p(X_k^q) \quad (31)$$

Las entropías de Rényi están bien definidas para valores de q positivos y diferentes de 1 [35]. Si en la expresión (31) se tiene que $\lim_{q \rightarrow 1}$, es útil expresar la entropía de Shannon como el límite de la derivada,

$$H(X_k) = - \lim_{q \rightarrow 1} \frac{\partial ((1-q) \exp(H_q(X_k)))}{\partial q}$$

En el caso que $q = 2$, se tiene la entropía de Rényi de orden 2, conocida como *entropía de extensión*, expresada mediante

$$H_2(X_k) = - \log_2 \left(\sum_k p(X_k^2) \right) \quad (32)$$

a partir de la cual se obtiene la *relación de participación inversa* mediante

$$R(X_k) = \frac{1}{\sum_k p(X_k^2)} = \exp(H_2(X_k)) \quad (33)$$

Esta cantidad caracteriza el *número efectivo de eventos diferentes* que puede admitir una variable estocástica.

Entropía de patrón. El *patrón* de un conjunto de datos se define como la secuencia de índices enteros que indican, en orden incremental de ocurrencia, el símbolo del alfabeto que toman cada uno de los elementos del conjunto. Los índices del patrón de la secuencia de datos adquieren valores enteros positivos desde 1 hasta un valor máximo, dado por el tamaño del alfabeto.

Sea $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ el parámetro que contiene las probabilidades de ocurrencia para los símbolos del alfabeto correspondientes a la variable aleatoria $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Dado que el orden de estas probabilidades no afectan el patrón, se asume, sin pérdida de generalidad, que $\theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_k$, y que $\Sigma = \{i, 1 \leq i \leq k\}$.

El *patrón* de X se denota por $\psi^n \triangleq \Psi(x^n)$. Teniendo en cuenta que diferentes secuencias de datos pueden tener el mismo patrón, para un alfabeto y un θ dados, la probabilidad de un patrón ψ^n inducido por una probabilidad subyacente distribuida de forma idéntica e independiente está dada por

$$P_\theta(\psi^n) = \sum_{y^n: \Psi(y^n) = \psi^n} P_\theta(y^n) \quad (34)$$

La probabilidad de $\Psi(x^n)$ puede expresarse mediante (34) sumando todas las secuencias que tienen el mismo patrón con un vector de parámetro fijo. Sin embargo, también se puede expresar fijando la secuencia actual y sumando todas las permutaciones de símbolos que se presentan en el vector de parámetro

$$P_\theta[\Psi(x^n)] = \sum_{\sigma} P_{\theta(\sigma)}(x^n) \quad (35)$$

donde la suma se realiza sobre todos los vectores de permutación σ , cuya diferencia entre sí es el índice del parámetro de probabilidad, asignado a por lo menos la ocurrencia de un símbolo, y $\theta(\sigma_i)$ denota el i -ésimo componente del vector permutado θ , de acuerdo a σ .

La tasa de entropía de una fuente distribuida de forma idéntica e independiente se denota por $H_\theta(X)$, y la secuencia de entropía por $H_\theta(X^n) = nH_\theta(X)$. Por lo tanto, la entropía del patrón de secuencia de orden n de una fuente θ se define como

$$H_\theta(\Psi^n) \triangleq - \sum_{\Psi^n} P_\theta(\psi^n) \log P_\theta(\psi^n) \quad (36)$$

Entropía de Kolmogorov. El cálculo de la entropía de Kolmogorov permite medir la impredecibilidad de un sistema dinámico [33]. Se considera un sistema dinámico inmerso en un espacio de fase con dimensión m , el cual se encuentra dividido en cajas de tamaño r^m , siendo r la longitud del lado de cada una. Se asume entonces la existencia de un atractor dentro del espacio de fase, formado por la evolución temporal de una trayectoria $\mathbf{S}[n]$, cuyos puntos representan los estados dinámicos del sistema medidos en intervalos de tiempo τ .

Sea $p(k_1, k_2, \dots, k_m)$ la probabilidad conjunta de que la trayectoria $\mathbf{S}[\tau]$ se encuentre en la caja k_1 , $\mathbf{S}[2\tau]$ en k_2 , hasta $\mathbf{S}[m\tau]$ en k_m , entonces, la entropía de Kolmogorov se define como:

$$K = - \lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ m \rightarrow \infty}} \frac{1}{m\tau} \sum_{p(k_1, k_2, \dots, k_m)} p(k_1, k_2, \dots, k_m) \ln p(k_1, k_2, \dots, k_m), \quad (37)$$

A partir de (37), se define la estimación K_2 de la entropía de Kolmogorov de la forma [36]:

$$K_{2,m}(r) = \frac{1}{\tau} \ln \frac{C_m(r)}{C_{m+1}(r)} \quad 0 \leq K_2 \leq K \quad (38)$$

donde m es dimensión de inmersión, τ es el valor de retardo, $C_m(r)$ es la suma de correlación definida en (28). El valor $K_2 \rightarrow \infty$ para sistemas aleatorios, mientras $0 < K_2 < \infty$ para sistemas caóticos.

Máximo exponente de Lyapunov

Una de las principales características de los sistemas caóticos es su *impredecibilidad* durante prolongados periodos de tiempo, como consecuencia de la inherente inestabilidad de las soluciones y de la dependencia de sus condiciones iniciales. A medida que las trayectorias de un sistema caótico evolucionan temporalmente en un espacio de fase, se presenta una separación entre las mismas que crece con tasa exponencial. En las series de tiempo, predominantemente periódicas, también se presenta una separación entre las trayectorias durante su evolución temporal, pero de tipo lento mas no exponencial. Por lo tanto, se puede cuantificar esta separación en un instante determinado mediante el cálculo de un exponente relacionado con el incremento de la distancia entre las trayectorias conocido como *máximo exponente de Lyapunov*, el cual calcula la magnitud del caos en el sistema analizado.

En la determinación de los valores de predicción $\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{f}_D(\mathbf{x}(n))$ e $\mathbf{y}(n+1) = \mathbf{f}_D(\mathbf{y}(n)) = \mathbf{f}_D(\mathbf{x}(n) + \mathbf{u}(n))$, se puede emplear la aproximación lineal con respecto a $\mathbf{S}_x(n)$, que describa las pequeñas desviaciones de las trayectorias $\mathbf{S}_x(n)$ y $\mathbf{S}_y(n)$, dadas por:

$$\mathbf{u}[n+1] = \mathbf{J}(\mathbf{S}_x[n]) \mathbf{u}[n] \quad (39)$$

donde $\mathbf{J}(\mathbf{S}_x[n])$ es la matriz del jacobiano evaluada en un punto de referencia de $\mathbf{S}_x[n]$. Así, sean dos puntos en un instante de tiempo inicial n_0 correspondientes a las trayectorias $\mathbf{S}_x[n]$ y $\mathbf{S}_y[n]$, se determina la distancia entre ambos como:

$$\mathbf{u}[n_0] = \|\mathbf{S}_x[n_0] - \mathbf{S}_y[n_0]\|, \quad \mathbf{u}[n_0] \ll 1 \quad (40)$$

El valor $\mathbf{u}[\Delta n]$ es la distancia en el instante de tiempo n entre las trayectorias $\mathbf{S}_x[n]$ y $\mathbf{S}_y[n]$ que emergen a partir de $\mathbf{S}_y[n_0]$ y $\mathbf{S}_x[n_0]$ a causa de su evolución temporal, $\mathbf{u}[\Delta n] = \|\mathbf{S}_x[n_0 + \Delta n] - \mathbf{S}_y[n_0 + \Delta n]\|$, donde $\mathbf{S}_x[n_0 + \Delta n]$ es la trayectoria $\mathbf{S}_x[n]$ que se origina en el punto $\mathbf{S}_x[n_0]$ después que ha evolucionado en un tiempo dado por $\Delta n = n - n_0$. Lo mismo sucede con la trayectoria $\mathbf{S}_y[n]$. De (39) se obtiene:

$$\mathbf{u}[\Delta n] = \mathbf{J}[\Delta n] \mathbf{u}[n_0]; \quad \mathbf{J}[\Delta n] = \mathbf{J}(\mathbf{S}_x[\Delta n - 1]) \mathbf{J}(\mathbf{S}_x[\Delta n - 2]) \dots \mathbf{J}(\mathbf{S}_x[n_0])$$

donde $\mathbf{J}[\Delta n]$ es la matriz formada por el producto de las matrices del jacobiano evaluadas en los estados que forman el segmento de la trayectoria $\mathbf{S}_x[n]$.

Con el propósito de medir la *separación exponencial* de las trayectorias, se asume que en el futuro distante ($\Delta n \gg 0$) la norma del vector $\mathbf{u}[\Delta n]$ se comporta como

$$\|\mathbf{u}[\Delta n]\| = \|\mathbf{u}[n_0]\| e^{(\lambda \Delta n)}; \Delta n \rightarrow \infty \quad (41)$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$, siendo $\mathbf{u}[n_0] \ll 1$ y $\Delta n \gg 1$. Se define entonces el máximo exponente de Lyapunov (λ) de la forma:

$$\begin{aligned} \lambda(\mathbf{S}_x[n_0], \mathbf{u}[n_0]) &= \lim_{\Delta n \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta n} \ln \|\mathbf{J}[\Delta n] \mathbf{u}[n_0]\| \\ &= \lim_{\Delta n \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta n} \ln \|\mathbf{J}(\mathbf{S}_x[\Delta n - 1]) \mathbf{J}(\mathbf{S}_x[\Delta n - 2]) \cdots \mathbf{J}(\mathbf{S}_x[n_0]) \mathbf{u}[n_0]\| \end{aligned}$$

El número $\lambda(\mathbf{S}_x[n_0], \mathbf{u}[n_0])$ caracteriza en el futuro distante ($\Delta n \gg 0$) la separación exponencial de las trayectorias $\mathbf{S}_x[\Delta n]$ y $\mathbf{S}_y[\Delta n]$, que inicialmente diferían según (40). El máximo exponente de Lyapunov depende entonces de la condición inicial $\mathbf{S}_x[n_0]$ correspondiente a la trayectoria de referencia, así como de la separación inicial $\mathbf{u}[n_0]$ entre las trayectorias.

Si λ es positivo, significa que existe una divergencia exponencial de las trayectorias, indicando presencia de caos. Dos trayectorias no se pueden separar a una distancia mayor que el tamaño del atractor, por lo que la expresión (41) es válida solo para tiempos Δn en los que $\mathbf{u}[\Delta n]$ permanece pequeño. Si se presenta el caso contrario, se obtiene una saturación de la distancia, lo cual se evita acudiendo a una definición matemática que involucra los límites $\mathbf{u}[n_0] \rightarrow 0$ y $\Delta n \rightarrow \infty$. La cantidad de exponentes de Lyapunov es la misma que el número de estados, los cuales se ordenan como $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_l$, donde el valor λ_n mide la tasa de expansión del elemento de volumen en el espacio de fase y λ_1 es el máximo exponente de Lyapunov. Si $\lambda_n > 0$ hay expansión, si $\lambda_n = 0$ el crecimiento es lineal, y si $\lambda_n < 0$ hay contracción en alguna dirección específica.

Una *trayectoria caótica* es una trayectoria acotada en el espacio de fase que se tiene si $\lambda_1 > 0$, si $\lambda_1 < 0$ entonces es una trayectoria periódica, y si $\lambda_1 = 0$ existen puntos de bifurcación, donde el comportamiento cambia de regular a caótico y viceversa.

Exponente de Hurst

Este se calcula para detectar situaciones de memoria a largo plazo en una serie de tiempo. Si H existe, sus valores se encontrarán en un rango entre 0 y 1, evidenciando un comportamiento no lineal en la serie de tiempo analizada, así como la persistencia o no a largo plazo de la respectiva señal. La Tabla 1.1 establece el comportamiento de un conjunto de datos de acuerdo al valor de su exponente de Hurst [37].

El cálculo del exponente de Hurst de la serie $s[n]$ está dado en la forma

$$(cN)^H = \frac{R(N)}{\sigma(N)}$$

Valor de H	Comportamiento a largo plazo de la serie de tiempo
$0 \leq H < 0.5$	Las tendencias del pasado serán inversas en el futuro
$H = 0.5$	Comportamiento similar a ruido blanco o movimiento browniano
$0.5 < H \leq 1$	Las tendencias del pasado permanecerán en el futuro

Tabla 1.1: Características de una serie de tiempo según su exponente de Hurst (H)

donde c es una constante, $R(N)$ es el rango de variación dado por

$$R(N) = \max_{1 \leq M \leq N} y(M, N) - \min_{1 \leq M \leq N} y(M, N), \quad y(M, N) = \sum_{n=1}^M (s[n] - \bar{s}(N))$$

siendo $\bar{s}(N) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N s[n]$ y $\sigma(N) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (s[n] - \bar{s}(N))^2}$ las respectivas estimaciones de la media y desviación estándar. El cálculo de $R(N)/\sigma(N)$ puede ser inexacto cuando el tamaño de N es demasiado grande o demasiado pequeño, por lo cual se procura calcular H usando valores intermedios de N .

Complejidad Lempel–Ziv

El cálculo de la complejidad Lempel–Ziv (Complejidad LZ) permite estimar qué tan compleja o irregular es una serie de tiempo. En este sentido, el ruido blanco tiene la máxima complejidad posible. Es una estimación del grado de complejidad algorítmica que tendría que presentar una simulación capaz de representar fielmente el fenómeno. Generalmente, se calcula mediante el algoritmo descrito en [38, 39]. Las posibilidades se mueven en rangos entre 0 y 1, donde:

- Complejidad LZ = 1: Máxima complejidad (serie aleatoria).
- Complejidad LZ = 0: Serie perfectamente predecible.

Se mide el número de patrones distintos que deben ser copiados para reproducir una secuencia dada. Sea una secuencia de datos $\mathbf{x} = x_1 x_2 x_3 \cdots x_n$, a la cual se le realiza un recorrido de izquierda a derecha, y cada vez que se encuentra una sub-secuencia nueva, denotada como Q , se incrementa un contador de complejidad c . Para una misma, secuencia se repite el procedimiento tomando segmentos cada vez mayores de la secuencia, partiendo siempre del primer elemento de la misma. Al terminarse la secuencia \mathbf{x} , el número resultante c es su medida de complejidad. Para completar el análisis, se debe tener en cuenta que solo tienen sentido los valores relativos de c , por tal motivo, este valor se divide entre el tamaño de la secuencia [38].

Para la implementación del algoritmo que calcula la complejidad LZ, se consideran únicamente las cadenas de ceros y unos. Se convierte el conjunto de datos original en secuencias de 0 cuando la diferencia entre dos elementos sucesivos es negativa, y 1 cuando la diferencia entre los dos elementos sucesivos es positiva o nula. El algoritmo para estimar c , se basa por lo tanto en la reconstrucción de la cadena original \mathbf{x} mediante operaciones de copia e

inserción de símbolos Q en una nueva cadena C . La complejidad (c) aumenta conforme se necesiten nuevos símbolos o secuencias de símbolos Q para reproducir el conjunto x .

1.2.4. Método de sustitución

Es un método que permite detectar una estructura no lineal determinista en una serie temporal, en la cual, se agrupan de nuevo los datos con cierta pérdida de determinismo. Propuesto en [40], es uno de los métodos más aceptados y utilizados actualmente para comprobar hipótesis sobre determinismo no lineal. Si los resultados al aplicar medidas dinámicas son significativamente diferentes antes y después de sustituir los datos, se concluye que existe una estructura no lineal determinista en la serie original. Básicamente, existen dos tipos de procedimientos para obtener datos sustituidos.

El primero consiste en dar un orden aleatorio de los datos, con lo cual se conserva la distribución de probabilidad, pero se generan funciones de correlación y espectros de potencia diferentes [41]. El segundo método para sustituir un conjunto de datos, consiste en obtener la transformada de Fourier de la serie de tiempo, luego aleatorizar sus fases entre 0 y 2π , y posteriormente realizar la transformada inversa de Fourier. El procedimiento produce una serie de datos que conservan la estructura del mismo espectro de Fourier y función de autocorrelación que la serie original, aunque se produce una diferente distribución de probabilidad.

Todos los métodos que cuantifican la no linealidad muestran fluctuaciones, pero no se dispone de los datos de distribución en forma analítica. En este caso se necesitaría el uso de las técnicas de Monte Carlo para evaluar la significación de los resultados. De esta forma, se formula la *hipótesis nula*, por ejemplo, que los datos hayan sido creados por un proceso Gaussiano lineal estacionario, por lo cual, se intenta rechazar esta hipótesis comparando los resultados a través de realizaciones apropiadas de la hipótesis nula. Dado que el hecho de asumir la nulidad no es muy simple hay libertad para establecer los parámetros, las técnicas de Monte Carlo tienen que tomar en cuenta estos factores. Una aproximación es construir *realizaciones restringidas* de la hipótesis nula. El propósito es que la libertad de parámetros dispuesta por la nulidad se refleje por propiedades específicas de los datos. Por ejemplo, que los coeficientes desconocidos de un proceso autorregresivo se reflejen en la función de autocorrelación. De esta forma, las realizaciones restringidas se obtienen aleatorizando los datos bajo la condición que un conjunto apropiado de parámetros permanezca

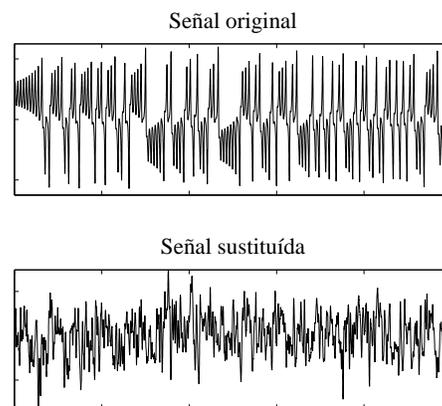


Figura 1.10: Ejemplo de cálculo de los sustitutos

fijo. En este caso, se pueden obtener los datos aleatorios con un periodograma dado, asumiendo las fases aleatorias y tomando la inversa de la transformada de Fourier del periodograma analizado. Los datos aleatorios con la misma distribución como un conjunto de datos dado se pueden generar permutando los datos de forma aleatoria sin reemplazo.

Algoritmo 1 Cálculo de los valores sustitutos vía la TF

Require: $x(t_l), y(t_l) = 0, l = 1, \dots, N$

$z(n) = x(n) + jy(n), n = 1, \dots, N, \{ \text{Conformar arreglo complejo a partir de la serie de entrada} \}$

$Z(m) = X(m) + jY(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N z(n)e^{-2\pi j(m-1)(n-1)/N} \{ \text{Cálculo de la transformada de Fourier} \}$

$\phi_m \in [0, \pi], m = 2, 3, \dots, \frac{N}{2} \{ \text{Conjunto de fases aleatorias} \}$

for $m = 1, \dots, N$ **do**

$$Z(m)' = \begin{cases} Z(m), & m = 1, m = \frac{N}{2} + 1 \\ |Z(m)| e^{j\phi_m}, & m = 2, 3, \dots, \frac{N}{2} \\ |Z(N - m + 2)| e^{-j\phi_{N-m+2}}, & m = \frac{N}{2} + 2, \frac{N}{2} + 3, \dots, N \end{cases} \quad \{ \text{Aplicar las fases aleatorizadas} \}$$

al arreglo obtenido de la transformada de Fourier}

end for

$z(n)' = x(n)' + jy(n)' = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N Z_m' e^{2\pi j(m-1)(n-1)/N} \{ \text{Cálculo de la transformada inversa de Fourier} \}$

El método de cálculo de datos sustituidos con la misma media, varianza y espectro de potencia inicialmente estima la transformada de Fourier de la serie de datos analizada, aleatorizar las fases, y luego toma la inversa de la transformada de Fourier. El algoritmo de cálculo se muestra en el algoritmo 1 y un ejemplo de realización en la Figura 1.10 que representa ambos casos: *a*) datos originales obtenidos de una señal FCG, *b*) datos sustitutos. La medida de la significación entre las medidas, para este caso, se desarrolla de acuerdo al método propuesto en [42]:

$$v = \frac{|Q_D - \mu_H|}{\sigma_H} \quad (42)$$

donde Q_D , es el valor de la medida sobre el conjunto de datos original, y tanto μ_H como σ_H son la media y la desviación estándar de las medidas calculadas sobre los datos sustituidos.

2. Estado del arte en el procesamiento de señales fonocardiográficas

2.1. Adquisición y preprocesamiento

2.1.1. Registro de señales

Los avances de la microelectrónica han permitido el desarrollo de instrumentos para la auscultación cardíaca, por lo cual se dispone actualmente en el mercado de dispositivos electrónicos con la capacidad de proporcionar la representación gráfica de los sonidos generados por el funcionamiento del corazón, así como su respectivo almacenamiento y procesamiento en tiempo real [43–45].

Los sensores utilizados en la adquisición de señales FCG son, normalmente, estetoscopios electrónicos con salida de voltaje representando las vibraciones mecánicas o acústicas captadas en la superficie precordial del paciente. En [45] se destaca el desarrollo de un instrumento para adquirir este tipo de señales, el cual consiste de una tarjeta de adquisición que recibe información proveniente de 16 canales preamplificadores a 16 *bits*, ubicados en diferentes zonas de la superficie precordial. Así mismo, utiliza un software para la representación visual de la señal FCG a través de su periodograma y espectrograma, con la posibilidad de aplicación de filtros a diferentes frecuencias de corte en varias frecuencias de muestreo.

En [46, 47] se presenta un sistema de software para el análisis en tiempo real de señales FCG, mediante la visualización, procesamiento, y registro de los sonidos cardíacos con todos los formatos estándares para sonidos multimedia (11025 *Hz*, 22050 *Hz*, 44100 *Hz*, 8/16 *bits*, mono/stereo). Este sistema está compuesto por un estetoscopio electrónico, audífonos, un computador personal y un software para el análisis de los sonidos adquiridos, donde este último tiene la capacidad de visualizar representaciones de la señal FCG por medio de la TFTC, así como la opción de manejar filtrado digital según las necesidades de análisis.

2.1.2. Reducción de perturbaciones

Las señales fonocardiográficas pueden ser alteradas por perturbaciones que contaminan el contenido de la información y disminuyen la efectividad en las tareas de clasificación y reconocimiento, orientadas al diagnóstico automatizado de diversas patologías [48].

Uno de los mayores tipos de perturbaciones es el ocasionado por los sonidos respiratorios en el momento de la adquisición de los registros fonocardiográficos; esta perturbación

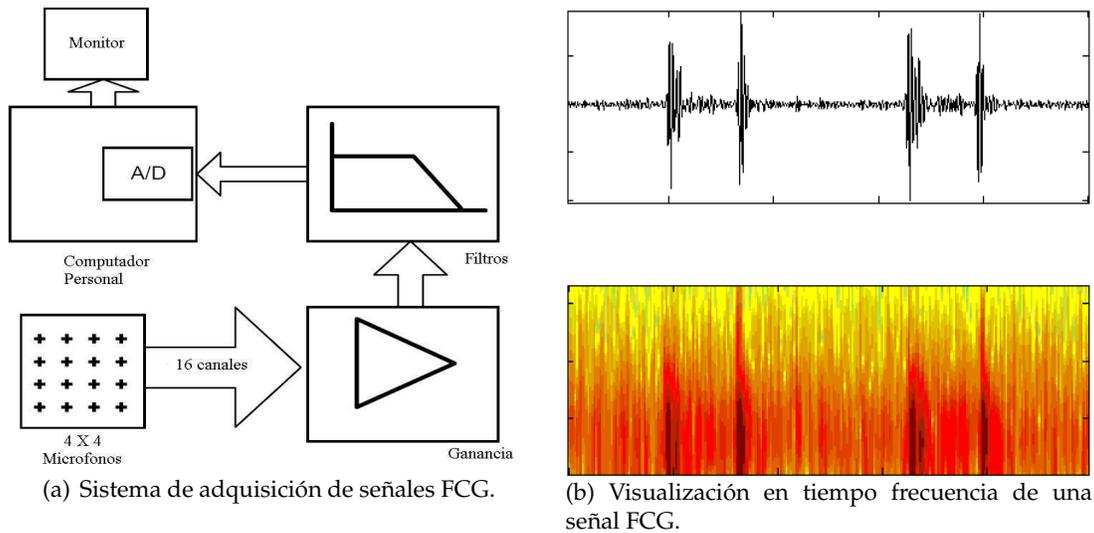


Figura 2.1: Registro de señales FCG.

puede ser disminuida empleando técnicas de estimación no estacionaria del tiempo de retardo [49]. De esta forma, se realiza la descomposición de la señal mediante la TW en sus respectivas subbandas, después se separan los sonidos cardíacos de los sonidos respiratorios y se realiza iterativamente en cada subbanda la estimación de retardo de tiempo (TDE - *time delay estimation*) usando técnicas adaptativas que minimizan la potencia del error. El retardo de tiempo es actualizado usando un primer sistema de adaptación no lineal de *Levenberg-Marquardt*, mientras que la función del otro sistema adaptativo (que usa un filtro transversal rápido) es la de minimizar el promedio del cuadrado del error entre la salida del retardo estimado y la del filtro adaptativo.

Otra técnica para la atenuación del ruido en señales fonocardiográficas es el denoising mediante técnicas de promediado combinadas con la TWD [48]. Para realizar el reescalamiento, es necesario definir el mejor método a utilizar para lograr una reconstrucción óptima de la señal, teniendo en cuenta las modificaciones en la escala de la función wavelet utilizada en el momento de calcular los coeficientes wavelet. De acuerdo con las características de la señal, se tienen varias opciones en la forma como esta se desea realizar, es decir, si se va a usar una estimación simple del nivel del ruido basado en el primer nivel de coeficientes, o una estimación dependiente del nivel del ruido, o si la señal presenta ruido no blanco.

Con los coeficientes que estaban por encima del umbral, y aquellos que fueron modificados por medio de la umbralización suave en cada uno de los niveles desde 1 hasta N , se reconstruye la señal s , haciendo uso de la TWD inversa, obteniendo una señal similar a la anterior pero sin ruido y sin pérdida significativa de la información.

Otro método empleado en la remoción de perturbaciones similares al ruido Gaussiano en señales fonocardiográficas es el de *matching pursuit* [50], tomando en calidad de base

redundante las funciones wavelet de *Gabor*, que presentan propiedades adecuadas en el análisis tiempo–frecuencia. La señal $x(t)$ es proyectada dentro de un diccionario de átomos de tiempo–frecuencia $w_{s,b}(t)$, así:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n w_{s,b}(n; t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \frac{1}{\sqrt{s_n}} w\left(\frac{t - b_n}{s_n}\right) \exp(j(2\pi f_n t + \phi_n))$$

donde x_n son los coeficientes de expansión, s_n , es el factor de escala que controla el ancho de la función ventana y b_n ajusta la localización temporal. El factor $1/\sqrt{s_n}$ es usado para normalizar el átomo $w_{s,b}$. A partir de los átomos en tiempo–frecuencia, se halla el error cuadrático medio normalizado entre la señal original y la señal reconstruida [50].

2.1.3. Segmentación de estados funcionales

La segmentación de señales FCG tiene por objetivo dividir los ciclos cardíacos, y éstos, a su vez, en eventos significativos desde el punto de vista de su interpretación diagnóstica. Se puede considerar la segmentación de señales FCG en dos niveles, el primero divide el FCG en ciclos cardíacos independientes, comenzando cada uno de ellos en $S1$ y finalizando justo antes del siguiente $S1$, el segundo nivel consiste en la identificación de los eventos que forman el ciclo cardíaco ($S1, S2, S3, S4$, soplos, ...), identificándolos correctamente y delimitando su comienzo y final [51].

Una forma de segmentar las señales del corazón consiste en separar la señal fonocardiográfica en cuatro partes: El primer ruido ($S1$), la sístole, el segundo ruido ($S2$) y la diástole [9,47]. Este tipo de segmentación exige el cálculo de la envolvente de la señal fonocardiográfica normalizada, para lo cual se emplean diferentes características [9], entre ellas:

$$\begin{aligned} \text{Energía de Shannon: } & SE_x = -x^2 \log x^2 \\ \text{Entropía de Shannon: } & H(|x|) = -|x| \log |x| \\ \text{Valor absoluto: } & |x| \\ \text{Energía (cuadrática): } & E = x^2 \end{aligned}$$

donde x representa la señal FCG normalizada. La energía de Shannon resulta ser el mejor método para calcular la envolvente de la señal, por cuanto acentúa su intensidad media y el efecto de baja intensidad mucho más que la señal de intensidad alta, logrando así que sea más fácil encontrar los sonidos de baja intensidad. La energía promedio se calcula en ventanas con aperturas de 0.02 s a través de toda la señal, con valores de traslapo de 0.01 s. Para efectos de proceso, la envolvente ζ se estandariza estadísticamente:

$$\hat{\zeta} = \frac{\zeta - \bar{\zeta}}{\sigma_{\zeta}}$$

En [9], para dividir el ciclo cardíaco en sus cuatro componentes, se ubican los instantes en el tiempo y los intervalos de los picos dominantes de los ruidos $S1$ y $S2$, y a continuación se obtienen los intervalos de los períodos sistólico y diastólico. A partir del contorno estimado de la envolvente, se fija un valor de umbral con el fin de eliminar aquellas señales de baja intensidad, y así, determinar los picos que indican cuál es la posición en el tiempo de los

ruidos S1 y S2 de la señal fonocardiográfica; de esta manera, los artefactos también son eliminados (Figura 2.2).

En general, se considera que los métodos estacionarios, como por ejemplo los que se basan en la transformada en corto tiempo de Fourier o los métodos autoregresivos, son inadecuados para la descripción de la señal FCG debido a que el promedio y la autocorrelación para este tipo de señales varían con respecto a la traslación a lo largo del eje del tiempo. Debido a esto, es preferible la segmentación adaptativa, en la cual la señal no se divide en segmentos de longitud fija, sino en segmentos acordes con su comportamiento dinámico.

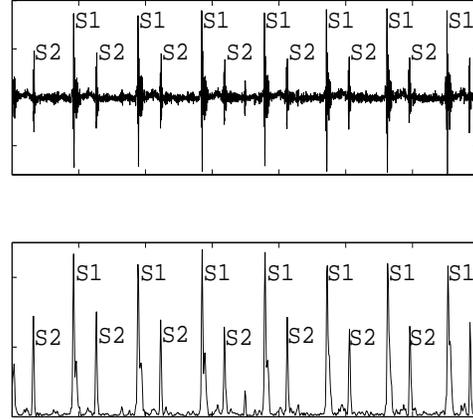


Figura 2.2: Segmentación de ruidos cardíacos [9].

Otra forma de estimación no estacionaria es la segmentación basada en la descomposición y la reconstrucción de la señal fonocardiográfica por medio de wavelets, la cual consiste en comparar el ancho de banda del registro de la bioseñal con las respectivas bandas de frecuencia de los coeficientes de descomposición, atenuando las perturbaciones y mejorando la eficiencia del algoritmo [47].

En [10] se presenta la detección del primer y segundo ruido cardíaco (S1 y S2) a través del análisis tiempo–frecuencia por medio de la TW. El criterio para determinar la wavelet madre más conveniente para analizar la señal fonocardiográfica, consiste en comparar las energías normalizadas de los coeficientes de detalle que se obtienen a partir de un conjunto de wavelets convencionales: *Daubechies*, *Meyer* y *Morlet*.

Como se observa en la Figura 2.3, la detección del primer componente de S1 se genera a partir de la comparación entre la composición de la energía de la señal (multiplicación de las energías e_4 , e_5 y e_6 obtenidas a partir de los coeficientes de detalle) y una fracción constante K_1 (media temporal de las energías e_4 , e_5 y e_6). La detección de la segunda componente se realiza a partir de las energías e_3 y e_4 y una ventana temporal generada al marcar la ubicación de S2, además de una fracción derivada de la constante K_2 , del mismo nivel adaptativo utilizada para la detección de la primer componente de S1. El método final de detección es comparado con la energía hallada a partir de la transformada de Hilbert, por medio de la comparación de los detalles importantes.

En [52] se presenta un método de segmentación de soplos sistólicos por medio de redes neuronales, para clasificarlos entre patológicos e inocentes a través de análisis espectral. La

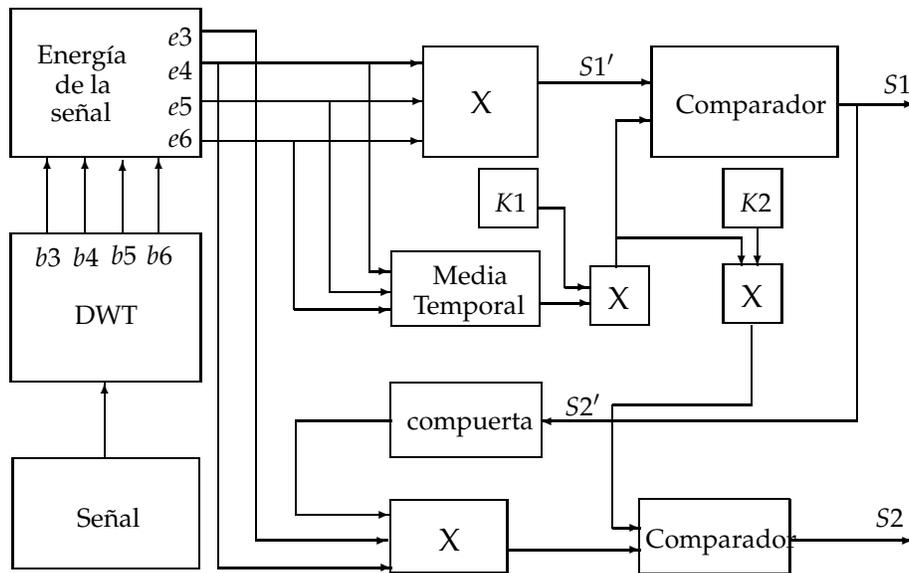


Figura 2.3: Diagrama de bloques para la detección de S1 y S2. [10]

red neuronal utilizada para la detección de los soplos sistólicos fue un perceptrón de tres capas con 20 unidades en la capa de entrada, 20 en la capa escondida y una en la capa de salida. La red neuronal fue entrenada para detectar la presencia de soplos sistólicos.

2.2. Características de representación

En el análisis de señales FCG, no solo es necesario disponer de información en el dominio del tiempo, sino también de su contenido espectral. Aunque es posible realizar por separado el análisis en estos dos dominios, las técnicas tiempo–frecuencia permiten representar simultáneamente la intensidad, el tiempo y la frecuencia de la señal FCG.

La técnica básica para análisis de la señal FCG es la transformada de Fourier, pero su desventaja radica en que su representación no es en el dominio tiempo–frecuencia, sino que analiza la frecuencia de la señal sin información localizada en el tiempo. Dado que la señal FCG es no estacionaria, la transformada de Fourier proporciona información muy limitada, destinada a obtener el contenido en frecuencia de un determinado evento o periodo, aunque sin conocer cómo varían las frecuencias en el tiempo [51]. Por consiguiente, para un mejor análisis de la señal FCG, se deben implementar procedimientos en tiempo–frecuencia, en donde el más representativo ha sido la TFCT, junto con otras técnicas como la distribución de Wigner–Ville, de Choi–Williams, entre otras. Estas transformadas están definidas por un núcleo que proporciona características de resolución en tiempo–frecuencia [51].

2.2.1. Estimación de frecuencia instantánea

En [53] se presenta un método a partir del cálculo de la frecuencia instantánea f_i para obtener información acerca de la manera en que el contenido de frecuencia de la señal FCG varía en el tiempo con el objeto de caracterizar ruidos y soplos cardíacos.

Sea la señal $x[n]$ dividida en bloques traslapados de N muestras. La señal $x[n]$ se enmascara por una función ventana $w[m]$, la cual se desplaza L muestras en el tiempo a través de $x[n]$. Por lo tanto, dos bloques consecutivos se traslapan $N - L$ muestras. Si la señal de entrada se multiplica por la función ventana, se obtiene, $x[Ln + m]w[m]$. Entonces, para cada muestra n a partir de la secuencia previa sometida al ventaneo, se obtiene una nueva secuencia de longitud V desplazada L muestras en el tiempo. Si $w[m]$ es la función rectangular, definida como:

$$w(m) = \begin{cases} 1, & 0 \leq m \leq V - 1 \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

y $N = V$. La secuencia ventaneada para cada n es:

$$x[Ln + m] = \begin{cases} x[L(n - 1) + m + 1], & m = 0, 1, 2, \dots, N - 2 \\ x_{ad}, & m = N - 1 \end{cases}$$

donde x_{ad} es la nueva muestra. La transformada Hilbert x' se obtiene de la forma:

$$x'[Ln, m] = \begin{cases} x'[L(n - 1), m + 1], & m = 1, 3, \dots, N - 1 \\ x'[L(n - 1), m + 1] + Y[Ln]C[m], & m = 0, 2, \dots, N - 2 \end{cases}$$

siendo

$$Y[Ln] = x[Ln + V] - x[Ln] \quad (43)$$

y $C[m] = \frac{2}{N} \cot\left(\frac{\pi(m+1)}{N}\right)$. Para $N = V$ y $L = 1$, la Ec. (43) se transforma en, $Y[n] = x[n + N] - x[n]$, que corresponde a $Y[n] = x_{add} - x[0]$, para la secuencia ventaneada.

En general, el valor f_i de una señal en tiempo continuo $x(t)$ se define como la derivada de la fase $\phi(t)$ de la señal analítica asociada $z(t)$:

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} [\arg z(t)] = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (44)$$

Para una señal en tiempo discreto, la expresión de la frecuencia instantánea es similar a la Ec. (44), pero usando derivadas discretas de la fase en lugar de $d\phi(t)/dt$, como por ejemplo a través de la diferencia finita central (DFC):

$$f_i[n] = \frac{1}{4\pi} (\phi[n + 1] - \phi[n - 1])$$

En [54] se propone el cálculo de f_i en la caracterización de señales FCG para rangos de frecuencia desde el primer ruido cardíaco hasta los soplos sistólicos. Los datos obtenidos muestran diferencias en la frecuencia instantánea entre los soplos patológicos y los soplos inocentes, por lo que este procedimiento se convierte en un método para clasificar soplos

sistólicos según sean inocentes o patológicos. En este caso, el valor f_i se podría calcular a partir de la distribución de Wigner–Ville (DWV):

$$f_i(t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} fW(t, f)df}{\int_{-\infty}^{\infty} W(t, f)df}$$

donde f es la frecuencia y $W(t, f)$ la DWV para una señal en tiempo continuo $x(t)$. Sin embargo, la frecuencia instantánea de la señal FCG real es cero dado que ésta se define como la derivada de la función de fase de una señal compleja. Con el objetivo de obtener el valor f_i de un k periodo de la señal FCG, se calcula la señal analítica $z_k(t)$ a partir de la señal FCG real, dada por $x_k(t)$. La señal analítica $z_k(t)$ está dada por, $z_k(t) = x_k(t) + jH[x_k(t)]$, donde H es la transformada de Hilbert.

2.2.2. Transformada de Fourier en tiempo corto

La TFCT es la técnica básica en tiempo–frecuencia para el análisis de señales no estacionarias, como el caso del FCG, por cuanto permite investigar las características de los sonidos de forma exacta [11]. En [55] se afirma que es importante mantener la longitud de la ventana de análisis tan corta como sea posible para garantizar la hipótesis de estacionaridad sobre los pequeños segmentos analizados. No obstante, esto puede reducir la resolución en frecuencia del espectrograma obtenido, pero si se ajusta el tiempo de deslizamiento de la ventana, se puede obtener un resultado aceptable. Para este caso, el espectrograma se calcula, en primera instancia, por medio de una ventana de corta longitud para generar una representación temporal del FCG, luego una ventana de mayor longitud se aplica para generar una representación espectral de la energía del FCG. La resolución en tales representaciones depende directamente de la longitud de la ventana. De esta manera, la representación temporal permite medir la duración de los ruidos y ciclos cardíacos, mientras que el espectro, asumiendo una buena resolución en frecuencia, permite la caracterización espectral de los sonidos cardíacos.

En otro trabajo presentado en [11] se aplica la TFCT para caracterizar señales FCG y obtener representaciones de parámetros tales como, localización en el tiempo de los ruidos cardíacos y sus componentes, contenidos de frecuencia, localización del ciclo cardíaco, y la forma de las envolventes en la caracterización de los soplos cardíacos. Adicionalmente, el espectrograma han demostrado ser de gran uso clínico en la identificación de soplos en pacientes con valvulopatías cardíacas analizando su contorno, a pesar de sus problemas de resolución (Figura 2.4) [56].

El análisis por espectrograma también es útil en la caracterización de soplos causados por deficiencias en válvulas artificiales. En [57], se compara el empleo de las técnicas de representación bilineales en tiempo–frecuencia con el espectrograma para caracterizar el comportamiento de los soplos del corazón producidos por válvulas artificiales implantadas

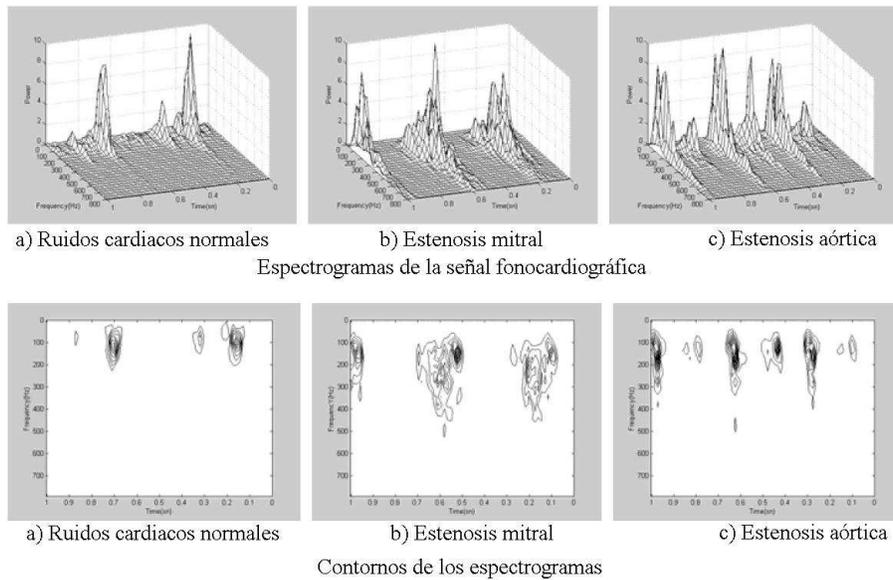


Figura 2.4: Espectrogramas y contornos para estados funcionales de señales FCG [11].

en las posiciones mitral y aórtica. Los soplos analizados en este estudio son aquellos producidos por estenosis mitral, regurgitación mitral, estenosis aórtica, regurgitación aórtica, un soplo musical sistólico y un soplo musical diastólico. En la primera parte del estudio, se estudian las características generales de la amplitud y contenido espectral de los soplos mediante observación visual del espectrograma de los FCG obtenidos de varios pacientes con patologías valvulares conocidas, luego se genera un modelo paramétrico para cada soplo. Los soplos causados por estenosis y por regurgitación son modelados como una salida secuencial de bancos de filtros pasabajas excitados por una entrada de ruido blanco. Los parámetros básicos de cada filtro se seleccionan para simular, como una función del tiempo, las características básicas de aleatoriedad de los soplos del corazón. Los soplos musicales son modelados como una senoide determinística de frecuencia modulada y amplitud constante.

En [46] se propone el sistema Amore, basado en una etapa de adquisición de señales FCG y otra de software para su respectiva caracterización, como una forma de desarrollar una herramienta diagnóstica para los estados funcionales del corazón utilizando la TFCT. Esta herramienta, permite la visualización simultánea de la señal fonocardiográfica en el dominio del tiempo y de su representación en tiempo–frecuencia a través del espectrograma. La ventana utilizada para el cálculo de la TFCT es de tipo Hamming, presentando el espectrograma a una resolución de 1024 puntos, a escala logarítmica para determinar la magnitud de los ruidos y soplos cardíacos. Así mismo, el sistema presenta la posibilidad de almacenar los sonidos de FCG adquiridos junto con información clínica del paciente examinado. De igual manera, el sistema permite el apoyo en el diagnóstico a estudiantes de medicina, así como

facilitar los procedimientos de teleconsulta al permitir el registro y envío de los archivos de audio generados a través de correo electrónico.

En [11] se realiza un estudio sobre caracterización de señales FCG por medio del periodograma, el cual se comporta como un estimador del espectro de potencia basado en la transformada de Fourier para determinar las componentes de frecuencia de las señales FCG. No obstante, el periodograma no permite establecer los instantes de tiempo en los que se presentan los distintos valores de frecuencia presentes en una señal no estacionaria, como es el caso del FCG, y menos aún cuándo se presentan los respectivos cambios de componentes frecuenciales en el transcurso del tiempo. Este estudio también compara la caracterización por medio del periodograma junto con la estimación del espectro por método autoregresivo (Figura 2.5).

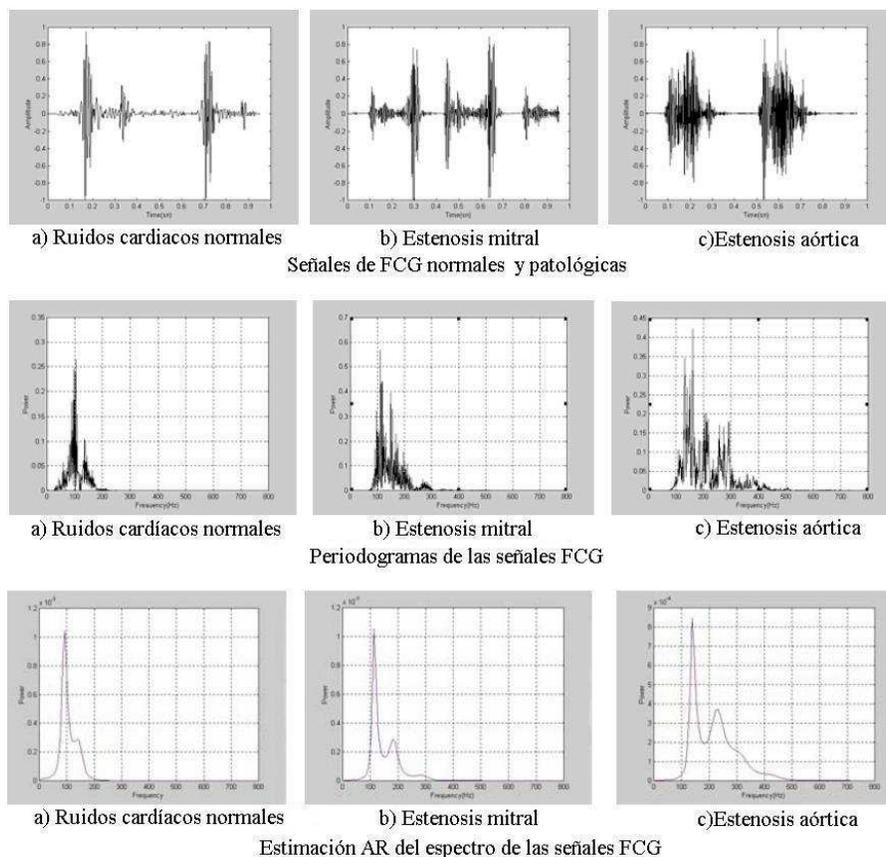


Figura 2.5: Estimación de espectros mediante método AR y TF [11].

De otro lado, en [58] se presenta un método de análisis espectral basado en algoritmos de Búsqueda Ortogonal Rápida (FOS–*Fast Orthogonal Search*) y clasificación de señal múltiple (MUSIC–*MUltiple Signal Classification*) orientados a la detección de calcificaciones

valvulares u otro tipo de anomalías, dado que estudios previos han demostrado que los picos de frecuencia dominante se desplazan a espectros de alta frecuencia cuando las hojillas o valvas de las válvulas cardíacas se calcifican o endurecen. En este trabajo, se afirma que los análisis en frecuencia tradicionales como la transformada de Fourier o la técnica de estimación espectral autoregresiva no son apropiadas porque asumen que la frecuencia de la señal permanece constante durante el intervalo de la transformada, por lo cual se adopta el análisis con los algoritmos FOS y MUSIC como método alternativo para realizar análisis espectral de los sonidos producidos por la acción de las válvulas cardíacas. Según los resultados obtenidos, en caso de fallas en el funcionamiento de las válvulas, las frecuencias pico dominantes obtenidas del análisis espectral con el método propuesto superan los 300 Hz.

2.2.3. Caracterización mediante modelos autorregresivos

La aplicación de los métodos paramétricos para identificar los sonidos del corazón permite la estimación de las características espectrales de la señal fonocardiográfica. En este caso la estimación espectral de la señal está dada por, $S(f) = \frac{\sigma_r^2}{\left|1 + \sum_{p=1}^m a_p e^{-j2\pi f p}\right|}$, donde σ_r^2 es la varianza del ruido y se asume que es constante. Según la Figura 2.5, el espectro AR ofrece información más comprensiva acerca de las señales FCG, proporcionando una visualización más detallada y exacta en el dominio de la frecuencia que la estimación espectral [11].

Puesto que la varianza del ruido σ_e^2 es una constante, los únicos valores necesarios para calcular las formas del espectro son los coeficientes de predicción a_p . En [59] se investiga el uso del modelo de estimación paramétrica AR no Gaussiano en registros fonocardiográficos normales y anormales, obteniendo como resultado alta inmunidad a los ruidos de fondo y artefactos.

2.2.4. Características wavelet

La transformada wavelet, por ser otra técnica de análisis tiempo-frecuencia, se emplea para la caracterización de señales no estacionarias, especialmente en localización de singularidades [60]. Particularmente, en la caracterización de las señales fonocardiográficas se analizan los siguientes valores basados en el análisis wavelet:

- La estimación de la distribución del espectro potencias wavelet:

$$WE(k) = \left| \sum_{n=1}^N \mathcal{W}_{a,b}(n, k) \right|^2 \quad (45)$$

donde N es el número de muestras de la señal y k es la frecuencia local.

- La densidad de energía DE de la TW:

$$DE(n) = \left| \sum_{k=1}^M \mathcal{W}_{a,b}(n, k) \right|^2 \quad (46)$$

donde M es el número de frecuencia respecto a la escala.

La transformada wavelet está diseñada para proporcionar una buena resolución en el tiempo y poca resolución en frecuencia cuando se analizan altas frecuencias, así como una buena resolución en frecuencia cuando se analizan bajas frecuencias. Es así como en [1] y [2] se realiza un estudio para determinar la wavelet madre óptima en el proceso de caracterización de señales FCG, lo cual involucró la comparación de estos resultados con los que se obtienen por medio del modelamiento matemático autorregresivo. Para este caso, la representación en tiempo–frecuencia conjunta combina la distribución de energía (DE), amplitud instantánea, y distribución de frecuencia (DF). Por lo tanto, la TWC de una señal debe satisfacer esta condición. Se puede encontrar entonces un valor de similaridad comparando la estimación espectral de potencia wavelet (WE) con la estimación espectral de potencia a través de un modelo AR.

Para este propósito, se establece la WE y la DE como se definen en (45) y (46) respectivamente. Mientras las distribuciones de energía de la señal original se obtienen a partir de la TWC, las estimaciones espectrales de potencia de los modelos AR y obtenidas a partir de la TWC deben presentar la misma variación en la máxima diferencia entre la WE y la estimación espectral de potencia. De esta forma, se utiliza el error cuadrático medio normalizado NRMSE (*Normalized root-mean-square error*) para calcular el valor de similaridad:

$$NRMSE = \sqrt{\frac{\sum (WE(n) - DE(n))^2}{\sum DE(n)^2}} \times 100 \quad (47)$$

El estudio comparativo para las wavelets (*Haar, Meyer, Morlet, Mexican Hat, Gauss, Daubechies*) indica que las wavelets *Haar* y *Mexican Hat* presentan un espectro de energía inadecuado para altas frecuencias. La Tabla 2.1 presenta los valores normalizados obtenidos a partir de las pruebas a cada una de las wavelet. Los resultados indican que la wavelet *Morlet* es la más adecuada de las técnicas tiempo–frecuencia basadas en la transformada wavelet para extraer de forma exacta las características de los ruidos y soplos cardíacos, dado que el valor normalizado para esta wavelet es el más bajo que se obtuvo.

	<i>Haar</i>	<i>Meyer</i>	<i>Morlet</i>	<i>Mexican Hat</i>	<i>Gaus(5)</i>	<i>Daubechies(5)</i>
NRMSE	81.7571	77.4302	45.3214	64.2474	79.9617	74.8662

Tabla 2.1: Valores de NRMSE para las funciones wavelet [1,2].

En [61, 62] se presenta un estudio orientado específicamente a detección de transientes en señales FCG. El trabajo demuestra que se puede obtener una separación entre sujetos normales y anormales mediante la aplicación de la transformada wavelet, especialmente separaciones entre soplos sistólicos y diastólicos de alta frecuencia, así como de estos mismos a baja frecuencia. En [63] se desarrolla un primer prototipo de una herramienta de diagnóstico e interpretación de señales FCG, basado en un modelo del sistema de consulta

médica según la metodología CommonKADS. A través de esta herramienta, se sintetiza el procedimiento de diagnóstico en un conjunto de reglas, que posteriormente se incorporan a la aplicación mediante un lenguaje específico para la construcción de sistemas basados en el proceso de diagnóstico. Este proyecto plantea como objetivo general el diseño, desarrollo e implementación de un conjunto de facilidades para el registro, almacenamiento, consulta, visualización y análisis de señales FCG, orientadas al prediagnóstico clínico no-invasivo de alteraciones cardíacas en atención primaria.

En [64] se presenta una comparación entre procedimientos de caracterización con la TFCT y la TW. Se afirma que la TW es más adecuada para caracterizar las componentes aórtica (A_2) y pulmonar (P_2) del segundo ruido cardíaco (S_2), algo que no se puede lograr con éxito mediante la aplicación de la TFCT. Por lo tanto, la caracterización con la TW de estas componentes del S_2 permite diagnosticar anomalías en las válvulas pulmonar y aórtica. Adicionalmente, dado que gran parte de la información en la señal FCG se encuentra en el rango de bajas frecuencias, la aplicación de las técnicas *wavelet package* permite la representación más exacta de las características de las componentes de la señal FCG ubicadas en este rango de frecuencias. En [65] se propone realizar el proceso de caracterización mediante el ventaneo con la función wavelet de Gabor, con lo cual se obtiene la extracción efectiva de características temporales para los ruidos cardíacos (S_1 y S_2), así como la ubicación de la energía espectral en forma precisa, lo que facilita la clasificación de señales patológicas y normales. Sin embargo, se menciona que la principal desventaja está en el costo computacional al realizar operaciones con la TWC. El análisis espectral realizado en [66], sugiere que el ciclo cardíaco se caracteriza por transientes y cambios rápidos del espectro en el tiempo, y que cada una de las enfermedades cardíacas produce una modificación diferente en la dinámica del corazón, lo que hace posible una caracterización de tales enfermedades. Así mismo, se propone la detección de los dos componentes acústicos de S_2 (A_2 y P_2), mediante la función wavelet *Daubechies*.

El análisis de correlación de la descomposición wavelet permite la discriminación de señales FCG patológicas y normales en [67]. Se puede hallar la presencia de una estenosis de la válvula aórtica (AVS) (del inglés *aortic valve stenosis*) a partir de las señales FCG obtenidas en el área de auscultación aórtica, en la escala de frecuencia de 172 – 345 Hz. En [12] se realiza un estudio sobre análisis de señales FCG por medio de la distribución en tiempo–frecuencia generada por la transformada wavelet coclear, aplicada a la caracterización de sonidos cardíacos normales y anormales, cuyos escalogramas exhiben diferencias morfológicas notorias en términos de duración y composición espectral de los sonidos. Estas diferencias sugieren que el escalograma basado en la transformada wavelet coclear podría convertirse en una aproximación para el diseño de sistemas de diagnóstico automático de valvulopatías cardíacas.

Otra técnica basada en la transformada wavelet para analizar señales FCG es el escalograma puede verse como una matriz derivada a partir del procedimiento de filtrado wavelet

a una señal. La línea k de la matriz se forma por la salida al cuadrado de un filtro wavelet particular, cuya expresión en forma de Laplace es:

$$\Psi_k(s) = K_h K_g P(s) \prod_{i=1}^m \frac{s^2 + \frac{e^{\alpha_i \omega_z} s + (e^{\alpha_i \omega_z})^2}{Q_z}}{s^2 + \frac{e^{\alpha_i \omega_{P_N}} s + (e^{\alpha_i \omega_{P_N}})^2}{Q_P}}$$

donde

$$P(s) = \frac{s^2 + \frac{\omega_{P_N} s}{Q_b}}{s^2 + \frac{\omega_{P_N} s}{Q_p} + (\omega_{P_N})^2}, \omega_{P_N} = \omega_p e^{-\alpha(k-m-1)}$$

siendo m y α parámetros determinados por la resolución espectral deseada, y ω_p , ω_z , Q_b , Q_z , K_h y K_g parámetros dependientes del modelo coclear. Los escalogramas donde se muestra la diferencia en el comportamiento entre los dos tipos de señales fonocardiográficas se muestran en la Figura 2.6.

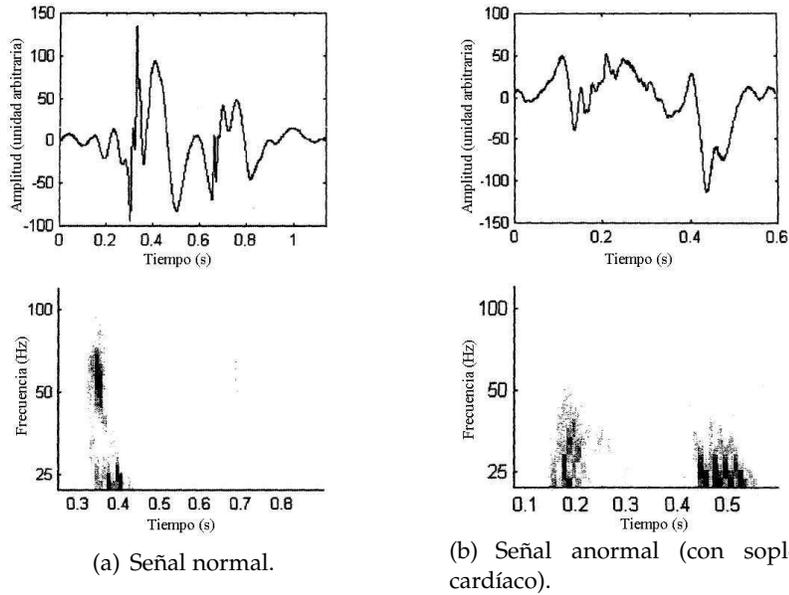


Figura 2.6: Sonidos cardíacos y detalles de sus escalogramas [12].

En [68] se presenta un estudio donde los espectros de las señales FCG analizadas se dividen en sub-bandas para extraer la información discriminante que se encuentra en señales fonocardiográficas normales y patológicas, mediante análisis con transformada wavelet. Los coeficientes wavelet se determinan con la función *Daubechies 2*.

En [69] se realiza un estudio para clasificar soplos inocentes y patológicos de forma efectiva, por medio de una red neuronal tipo perceptrón, cuya entrada son los espectros estimados de los ciclos cardíacos escogidos para realizar la investigación. En [70], a partir de un vector de características obtenido por medio de la transformada wavelet, se realiza la

clasificación de registros normales y registros anormales con presencia de regurgitación mitral (RM) usando una red neuronal artificial del tipo perceptrón multicapa, formada por una capa de entrada, una oculta y una de salida. La red fue entrenada y evaluada con 125 registros normales y 52 registros anormales, obteniendo una posición de clasificación del 94.28%. Otro ejemplo del empleo de redes neuronales se presenta en [71], donde se identifica nueve tipos de deficiencias valvulares. El conjunto que se entrena se obtiene a partir de un vector de 216 características usando descomposición wavelet, dando como resultado un porcentaje de clasificación del 95%.

En [72] se presenta un método para clasificar soplos sistólicos por medio de la representación en tiempo-frecuencia, el cual detecta la presencia de este tipo de soplos a través de una red neuronal de varias secuencias, para luego aplicar transformada wavelet con el fin de realizar la clasificación. Una segunda red neuronal clasifica la distribución en tiempo-frecuencia de las señales con soplos patológicos e inocentes. La efectividad en la detección de los soplos fue de 98%, mientras que la clasificación de los soplos patológicos e inocentes fue del 76.8% y del 84.5% respectivamente. Los mismos autores en [73] proponen un método para clasificar señales FCG en tres tipos: normal, con soplo inocente, y con soplo patológico. El método detecta la presencia de soplos sistólicos a través de un algoritmo de cuantización vectorial de aprendizaje, así mismo, son clasificados con esta misma técnica en soplos inocentes y patológicos. La etapa de detección presenta una efectividad del 99.4%, y la de clasificación para soplos inocentes y patológicos es de 96.9% y 94.9% respectivamente. De igual manera, el sistema desarrollado también tiene la capacidad de clasificar los soplos sistólicos en sub-clases, tales como soplos musicales, de eyección, etc.

De igual forma, en [74] se presenta un trabajo en el que se caracterizaron señales FCG con una técnica de análisis en tiempo-frecuencia conocida como *espectrograma de media recortado* (TMS) (del inglés *trimmed mean spectrogram*). Las características fueron extraídas a partir del contenido según la aplicación de los algoritmos TMS con respecto a los eventos sistólicos y diastólicos. Junto con las intensidades acústicas, estas características fueron establecidas como los datos de entrada a una red neuronal de probabilidad para la respectiva clasificación. Se emplearon 56 fonocardiogramas para entrenar la red neuronal, incluyendo 21 normales y 35 patológicos. Se probó la red neuronal con 18 fonocardiogramas normales y 37 patológicos. El sistema proporcionó una sensibilidad de 97.3% (36/37) y una especificidad de 94.4% (17/18) detectando soplos sistólicos patológicos.

En [75] se propone un método para clasificar señales FCG a través de un sistema de redes neuronales entrenando el clasificador mediante la tasa de aprendizaje adaptivo, trabajando con 10 variedades de sonidos cardíacos. El conjunto de entrenamiento incluyó 100 muestras, así como otras 100 muestras para examinar el desempeño del reconocimiento automático de patrones, cuyos resultados fueron de un 99% de reconocimiento correcto, lo cual indica, según los resultados de este trabajo, la robustez del sistema desarrollado.

2.2.5. Medidas acústicas de caracterización

Dado que las diferentes condiciones patológicas del corazón causan soplos y anormalidades en los sonidos cardíacos mucho antes de reflejarse en otros síntomas, la modificación de los sonidos del corazón podría facilitar la auscultación cardíaca y la educación médica [76]. Particularmente, el retardo de algunos sonidos del corazón mejora la capacidad de los mismos en el reconocimiento y la discriminación de características que resultan de diversos desórdenes cardíacos. Así por ejemplo en [77], se emplean dos técnicas para analizar la separación de los sonidos por retraso: análisis WSOLA, (*Waveform Similarity Overlap-and-Add*) MTSM (*Multiresolutional Time Scale Modification*). En este proceso de modificación, se preserva la calidad de los ruidos cardíacos, y su espectro de frecuencia no fue desplazado. Para evaluar el desempeño del método propuesto, se aplica un test de evaluación auditiva subjetiva por parte de 20 médicos expertos. Se demostró que el retraso de tiempo de algunos ruidos cardíacos mejora la capacidad de los médicos para reconocer y discriminar eventos que resultan de desórdenes cardíacos, por lo que se concluye de este trabajo que la modificación de los ruidos cardíacos facilita en alguna forma la interpretación de los sonidos obtenidos en el proceso de auscultación.

De otro lado, en [78], se presenta la clasificación de señales fonocardiográficas normales y patológicas por medio de los modelos ocultos de Markov. La remoción de las perturbaciones de la señal se realiza a partir de una descomposición y reconstrucción wavelet de 6 niveles. Para formar el vector de características se usaron tres métodos: tradicional, decimación y transformada wavelet. Los resultados de clasificación para los tres métodos fueron del 97.3 %, 98.2 % y 99.1 % respectivamente.

2.2.6. Medidas de complejidad en el análisis de la dinámica cardíaca

Las señales de variabilidad de la frecuencia cardíaca (HRV, por su significado en inglés: *Heart rate variability*) han sido ampliamente estudiadas mediante la aplicación de medidas correspondientes a técnicas de dinámica no lineal.

En [3] se aplica un método para comparar la variabilidad de la frecuencia cardíaca en sujetos normales con respecto a pacientes con enfermedad de Chagas, mediante la aplicación de métodos relacionados con el cálculo de dinámica simbólica y entropía aproximada (*EnAp*) sobre los respectivos datos provenientes de las series RR de los electrocardiogramas adquiridos. Adicionalmente, los coeficientes obtenidos en datos correspondientes a pacientes chagásicos dependen del grado de daño del miocardio. Se estudió un grupo de 18 sujetos normales con respecto a tres grupos de pacientes con enfermedad de Chagas, divididos en tres grupos según el grado de evolución de la enfermedad: *Ia*, *Ib* e *Ic*. La Tabla 2.2 muestra los resultados obtenidos para las variables medidas en el dominio del tiempo, media y desviación estándar de la serie RR.

En la Tabla 2.3 se muestran valores de la entropía aproximada para el grupo de control y los diferentes grupos de pacientes chagásicos. Se puede observar que el grupo de control y el grupo *Ib* presentan valores más elevados de la entropía aproximada que el grupo *II*,

<i>Variables</i>	<i>Ritmo normal</i>	<i>Grupo Ia</i>	<i>Grupo Ib</i>	<i>Grupo Ic</i>
media (ms)	912±151	865±156	907±182	900±128
desviación estándar (ms)	37±14	52±36	40±19	56±55

Tabla 2.2: Medidas en dominio temporal, media y desviación estándar [3].

con un nivel de diferencia estadística $p = 0.007$ y $p = 0.04$ respectivamente. En general, se observa que el grupo de control presenta un valor más alto de la entropía aproximada que en los diferentes grupos de pacientes chagásicos, lo cual muestra una mayor irregularidad de la variabilidad cardíaca en los sujetos sanos.

<i>Índices</i>	<i>Ritmo normal</i>	<i>Grupo Ia</i>	<i>Grupo Ib</i>	<i>Grupo II</i>	<i>Valor p</i>
<i>EnAp</i>	0.42	0.35	0.39	0.30	Ritmo normal, II
	±	±	±	±	0.007
	0.10	0.17	0.15	0.14	Ib, II
					0.04

Tabla 2.3: Valores de la entropía aproximada para los grupos estudiados.

Se demuestra entonces que los métodos tradicionales (media y desviación estándar de la serie RR) no son suficientes en la descripción de los cambios dinámicos de la variabilidad cardíaca, concluyendo que los métodos de aplicación de medidas no lineales pueden ser utilizadas para caracterizar y diferenciar entre sujetos sanos y pacientes chagásicos.

En [4] se presenta un método para calcular respectivamente el exponente α que caracteriza el proceso $1/|f|^\alpha$, la entropía aproximada, la dimensión de correlación, y el máximo exponente de Lyapunov utilizando el algoritmo desarrollado en [79]. Para la estimación del valor de α se utilizaron las 24 horas de señal con latidos ectópicos de cada registro, interpolada y remuestreada. La interpolación y remuestreo son necesarios ya que, en este caso, el exponente α se estima por el método de Regresión de FFT, el cual utiliza el espectro de la señal de intervalos RR que se obtiene utilizando la transformada discreta de Fourier. Esta última requiere que la señal a analizar posea muestras equiespaciadas, condición que no cumple la señal de intervalos RR sin este acondicionamiento. Para el cálculo de la entropía y la dimensión de correlación se utilizaron segmentos de señal de 5000 datos por paciente. Para hallar el máximo exponente de Lyapunov se utilizaron solo 500 datos por paciente, debido a la gran cantidad de tiempo de cálculo que insume el algoritmo implementado. La Tabla 2.4 se muestran los resultados obtenidos.

En [5] se presenta un estudio sobre la variabilidad cardíaca con respecto al género y al momento en el que se realiza el estudio, según sea de día o de noche, mediante la adquisición y reproducción de sus electrocardiogramas y series RR a través de sistemas Holter. Se calcularon los índices espectrales de potencia junto con los índices de dimensión fractal, pendiente

	α	Entropía	Dim. de correlación	Max. exp de Lyapunov
Normales	1.326	1.899	1.692	0.060
HTA	1.085	1.762	1.719	0.090
Coronarios	0.992	1.531	1.198	0.041

Tabla 2.4: Resultados del análisis de dinámicas no lineales según [4].

de la función $1/f$, máximo exponente de Lyapunov y entropía aproximada. Se muestra que la población femenina presenta una variabilidad cardíaca menor comparada con la población masculina, tal como se expresa en las componentes espectrales de la variabilidad cardíaca. Se presenta una diferencia significativa entre valores en las poblaciones femenina y masculina para los cálculos de la entropía aproximada y el máximo exponente de Lyapunov, ambos durante el día y la noche. La dimensión fractal muestra solamente una diferencia de género durante las horas de sueño. Todos los índices en el dominio de la frecuencia y medidas no lineales presentan una diferencia entre el día y la noche, con excepción de frecuencias de baja potencia. La dimensión fractal y la entropía aproximada se correlacionan altamente con potencias de alta frecuencia, mientras que la pendiente $1/f$ fue correlacionada con potencias de baja frecuencia. Los resultados también indican un incremento en la complejidad de la dinámica cardíaca durante la noche, y se encuentra que las mujeres parecen tener un mecanismo regulatorio más complejo de la frecuencia cardíaca, tal como se expresa en las diferencias de índices no lineales, indicando la significancia en las diferencias entre día y noche: *** $p < 0.001$, ** $p < 0.01$, * $p < 0.05$, n.s.= ninguna significancia (Tablas 2.5 y 2.6).

	Masculino día		Masculino noche		Diferencia Día - noche
	Media	Desviación estándar	Media	Desviación estándar	
Media RR(ms)	743.31	93.19	953.09	133.02	***
Frec. dominante HRV					
Potencia total (ms^2)	2168.63	1521.00	329.57	2549.14	***
Potencia LF (ms^2)	874.50	551.20	1096.49	864.78	n.s.
% Potencia LF	41.18	8.51	33.64	7.52	***
Potencia HF(ms^2)	220.75	228.06	514.79	585.58	***
% Potencia HF	9.09	4.17	13.36	7.08	***
LF/HF	5.67	3.24	3.43	2.4	***
HRV no lineal					
Pendiente $1/f$	-1.18	0.18	-1.11	0.21	**
FD	1.26	0.08	1.19	0.07	***
ApEn	0.74	0.17	0.80	0.16	**
Lyapunov	0.27	0.07	0.30	0.10	**

Tabla 2.5: Valores normales de índices de variabilidad cardíaca [5].

En [6] se presenta un estudio para caracterizar variabilidad cardíaca mediante el cálculo de dimensión de correlación (CD), máximo exponente de Lyapunov (LE), mínima dimensión

	<i>Femenino día</i>		<i>Femenino noche</i>		<i>Diferencia Día - noche</i>
	<i>Media</i>	<i>Desviación estándar</i>	<i>Media</i>	<i>Desviación estándar</i>	
Media RR (ms)	701.59	83.34	890.04	110.05	***
<i>Frec. dominante HRV</i>					
Potencia total (ms^2)	1428.70	943.21	1967.04	1540.57	***
Potencia LF (ms^2)	567.20	392.59	644.31	504.76	n.s.
% Potencia LF	38.77	7.65	31.81	6.99	***
Potencia HF (ms^2)	162.91	160.15	399.58	469.52	***
% Potencia HF	10.48	4.49	17.99	8.06	***
LF/HF	4.40	2.09	2.31	1.52	***
<i>HRV No lineal</i>					
Pendiente 1/f	-1.21	0.17	-1.15	0.21	*
FD	1.28	0.08	1.22	0.08	***
ApEn	0.80	0.17	0.92	0.20	***
Lyapunov	0.25	0.17	0.92	0.09	**

Tabla 2.6: Diferencias entre géneros durante el día y la noche. [5].

de embriamiento (d_E), tiempo de retardo (τ), y significancia (S) después de realizar el test de datos sustituidos. La Tabla 2.7 muestra los resultados en el cálculo de estos índices para las señales analizadas, donde $H1$ a $H9$ corresponde a los sujetos normales, y de $P1$ a $P6$ a los sujetos con deficiencia cardíaca.

<i>Medidas para varios sujetos</i>					
<i>Sujeto</i>	τ	d_E	LE	CD	S
H1	2	6	0.4718	3.33	0.30
H2	5	6	0.4992	3.58	5.62
H3	5	7	0.6755	4.00	0.93
H4	6	4	0.5304	2.50	23.67
H5	3	6	0.5299	3.20	0.01
H6	6	6	0.5343	3.45	18.63
H7	2	6	0.8442	2.37	24.20
H8	4	7	0.7812	4.002	1.1457
H9	2	6	0.9775	1.7	4.9096
P1	2	9	0.4301	1.20	42.10
P2	8	6	0.3083	1.50	29.59
P3	2	6	0.3691	1.65	7.86
P4	2	4	0.4301	0.798	31.17
P5	2	5	0.2741	0.516	20.284
P6	7	4	0.4356	1.3	22.439

Tabla 2.7: Valores de las características calculadas en [6].

En [80] se presenta un estudio para detectar la presencia de determinismo no lineal en pacientes con cardiomiopatía hipertrófica, utilizando como índice no lineal la dimensión de correlación. La Figura 2.7a muestra las diferencias entre los índices de complejidad para las

señales originales y las generadas por sustitución de datos, indicando la convergencia para las señales sin sustituir.

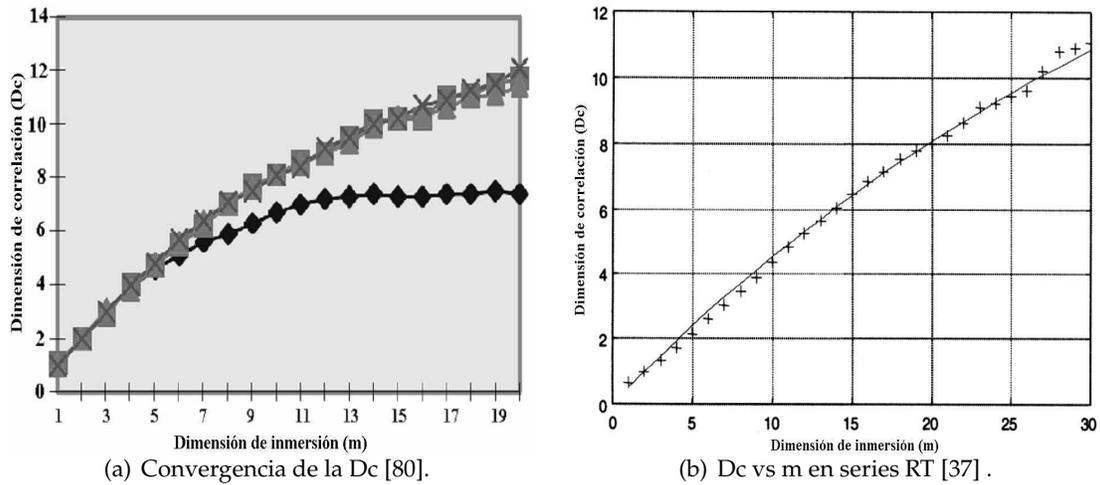


Figura 2.7: Convergencia de la dimensión de correlación en diferentes estudios.

Adicionalmente, se determina que, de acuerdo al valor de dimensión de correlación obtenido, las señales analizadas corresponden a sistemas caóticos de orden alto, ya que se obtienen valores superiores a 5. Los mismos autores, en otro trabajo [37], afirman en forma adicional que la serie RT no presenta indicios de determinismo no lineal, y que por el contrario, sus valores de dimensión de correlación con respecto a la dimensión de embebimiento no encuentran un punto de convergencia, lo cual es típico en señales estocásticas (Figura 2.7b).

Adicionalmente, se analizan los datos mediante la aplicación de medidas de complejidad Lempel Ziv (LZ), exponente de Hurst (HE) y dimensión de capacidad (CapD), para hallar diferencias entre las series RR correspondientes a pacientes sanos y con alto y bajo riesgo de muerte debidos a cardiomiopatía hipertrófica, tal como se observa en la Figura 2.9a.

Entre las conclusiones que se obtienen en [37], se afirma con base en los valores obtenidos de dimensión de correlación para individuos sanos, que el sistema de control de la frecuencia cardíaca es un mecanismo complejo de alta dimensionalidad, es decir, de más de 10 grados de libertad, por lo que en sentido estricto no podría considerarse como un sistema caótico, que usualmente están caracterizados por una baja dimensionalidad (con grados de libertad menores a 5). Sin embargo queda claro, a partir de los resultados obtenidos con el método de los datos sustituidos que se trata de un proceso determinista no lineal, sobre el que actúa un complejo mecanismo de regulación controlado principalmente por el sistema nervioso autónomo. En contraposición, al aplicar la metodología para obtener la dimensión de correlación de las series RT, que caracterizan el tiempo de la repolarización de los ventrículos, no se observó un comportamiento determinista, sino por el contrario, un claro comportamiento

que corresponde a los procesos estocásticos, lo que indica que los sistemas que regulan este último proceso son de una naturaleza muy distinta de aquellos que regulan la frecuencia cardíaca.

En [13] se presenta un sistema asistido por computador para el reconocimiento de arritmias basado en análisis en el espacio de fase. Se estudian arritmias de los siguientes tipos: Contracción ventricular prematura (PVC), fibrilación atrial (AF), taquicardia ventricular (VT) y fibrilación ventricular (VF). La clasificación fue llevada a cabo mediante una red neuronal multicapa obteniendo una exactitud del 98.55 %. La Figura 2.8a muestra la caracterización de una señal correspondiente a un paciente con ritmo sinusal normal a diferentes valores de τ : (a) 8.3 ms (b) 13.9 ms (c) 27.8 ms (d) 55.6 ms. La Figura 2.8b muestra la reconstrucción en el espacio de fase de las señales analizadas con su respectivo tipo de arritmia: (a) Ritmo normal (b) PVC (c) AF (d) VT.

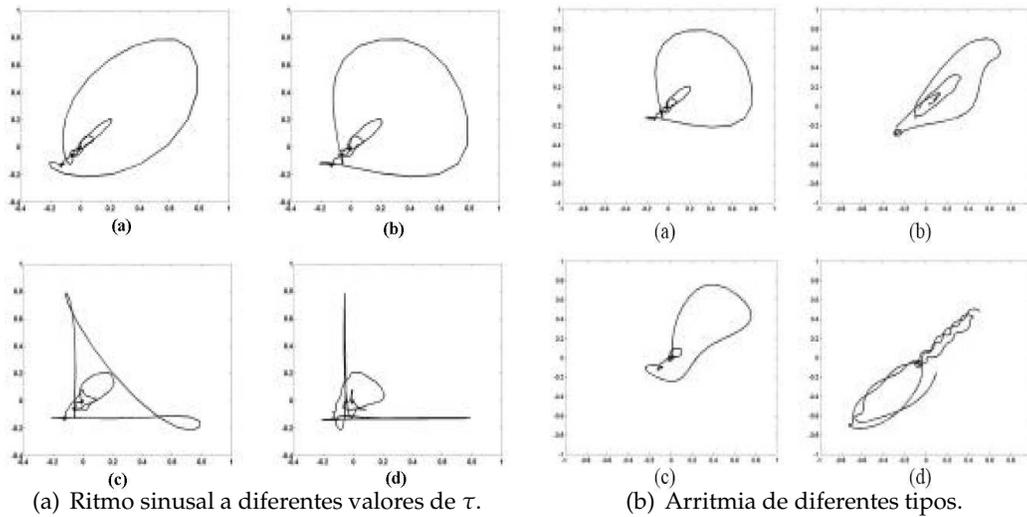
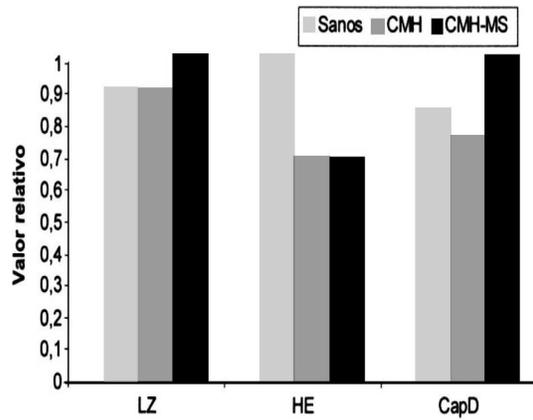


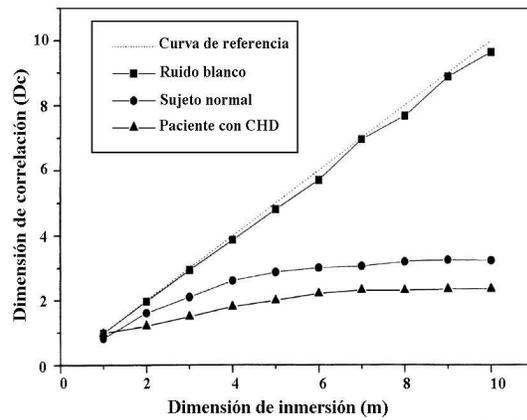
Figura 2.8: Diagramas de fase para estados funcionales [13].

En cuanto al proceso de clasificación, la exactitud media de la clasificación para ritmo normal, PVC, AF, VT y VF fue de 100 %, 93.7 %, 99.8 %, 99.7 %, y 99.4 % respectivamente. Es así como la técnica propuesta, basada en el análisis de espacio de fase, muestra que puede ser efectiva con una exactitud de 98.55 %, en la clasificación de arritmias que se presentan en pacientes cuya enfermedad cardíaca tiene una evolución crítica.

En [81] se confirma la baja complejidad que presentan los electrocardiogramas correspondientes a pacientes con algún tipo de enfermedad cardíaca, según la Figura 2.9b.



(a) Complejidad en sujetos sanos y pacientes con cardiomiopatía hipertrófica [37].



(b) Curvas de referencia para valores de D_2 [81].

Figura 2.9: Estimaciones de D_2 para diferentes estados.

3. Marco experimental

3.1. Adquisición y preprocesamiento de las señales

La base de datos con la que se realiza este trabajo está conformada por señales FCG que fueron adquiridas a pacientes normales y con anomalías auscultatorias, causadas por valvulopatías que conllevan a la presencia de soplos cardíacos.

Se tomaron 44 registros FCG normales con un estetoscopio electrónico Meditron marca WelchAllyn, a una frecuencia de muestreo de 44100 Hz, dentro de un grupo de estudiantes de la Facultad de Ciencias para la Salud de la Universidad de Caldas y empleados del Hospital Infantil Universitario *Rafael Henao Toro* de la ciudad de Manizales, sin limitaciones de edad y sexo siempre y cuando su edad no fuese menor a 18 años. Simultáneamente, se registró la señal de electrocardiografía, lo que permite correlacionar temporalmente la sucesión de eventos mecánicos y eléctricos del corazón durante el ciclo cardíaco (Figura 3.1a). El punto anatómico sobre el cual se tomaron los registros corresponde al foco mitral, en fase de apnea espiratoria, cada uno con una duración de 8 segundos, con los pacientes en posición decúbito dorsal. Todas las señales normales se tomaron dentro de la cabina acústica del Hospital Infantil Universitario, previo sometimiento de los pacientes a un chequeo médico para comprobar sus estados de normalidad auscultatoria e indicarles el propósito del estudio.

Los registros anormales hacen parte de la base de datos de fonocardiografía del Laboratorio de Electrónica aplicada del *Helsinki University of Technology (HUT)*, compuestos por 49 señales FCG, muestreadas a 11025 Hz. A diferencia de las señales adquiridas dentro de las actividades del Grupo, estas no tienen la señal electrocardiográfica de forma simultánea (Figura 3.1b).

Las señales fueron segmentadas en ciclos cardíacos mediante un algoritmo diseñado para tal fin, en trabajos previos realizados dentro del Grupo de Control y Procesamiento Digital de Señales. Sin embargo, en algunos casos, especialmente en las señales anormales, el proceso automatizado de segmentación se dificultó como consecuencia de la presencia de las componentes correspondientes a los soplos, motivo por el cual, en estos casos se realizó la segmentación de los ciclos cardíacos de forma manual.

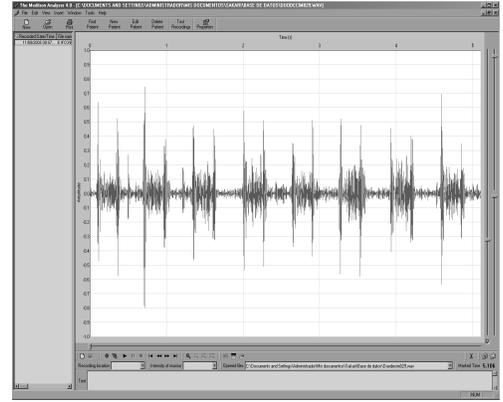
Adicionalmente, las señales fueron sometidas a un proceso de normalización y atenuación de perturbaciones acústicas mediante la técnica conocida como *denoising* [48].

3.1.1. *Denoising* mediante transformada wavelet discreta

El análisis en la estimación de las medidas, incluye la comparación de los resultados con y sin aplicación del método de *denoising*, el cual requiere de los siguientes parámetros:



(a) Señal FCG adquirida a un sujeto normal.



(b) Señal FCG con presencia de soplo sistólico.

Figura 3.1: Ejemplos de señales FCG que hacen parte de la base de datos analizada.

- Método de umbralización.
- Regla de selección de umbral.
- Nivel de descomposición.
- Método de reescalamiento.

Métodos de umbralización

Se analizan dos métodos de umbralización: *fuerte (hard thresholding)*, en la cual los coeficientes de valor absoluto menor al umbral se hacen 0 y los demás se dejan igual:

$$x_u = \begin{cases} x & \text{para } |x| > x_0 \\ 0 & \text{para } |x| \leq x_0 \end{cases} \quad (48)$$

El segundo método corresponde a la umbralización suave o *soft thresholding*, en la cual los coeficientes cuyo valor absoluto se encuentran por debajo del umbral también se hacen 0, pero los coeficientes restantes son reducidos a un valor cercano a 0 [48, 82]:

$$x_u = \begin{cases} \text{sign}(x)(|x| - x_0) & \text{para } |x| > x_0 \\ 0 & \text{para } |x| \leq x_0 \end{cases} \quad (49)$$

donde x_0 es el umbral, x la señal original, y x_u la señal umbralizada.

Reglas de selección de umbral

Se presentan cuatro opciones para escoger la regla de selección del umbral más apropiada, las cuales se pueden observar en la Tabla 3.1.

Estas reglas utilizan regresiones estadísticas sobre el tiempo de los coeficientes de las perturbaciones para obtener estimaciones no paramétricas de la señal reconstruida. Para la primera regla mencionada se realiza la selección basándose en el principio de *Stein's Unbiased*

<i>Regla</i>	<i>Descripción</i>
Rigrsure	Selección usando el principio de <i>Stein's Unbiased Risk Estimate (SURE)</i> .
Sqtwolog	Forma fija del umbral que es igual a la raíz cuadrada de dos veces el logaritmo de la longitud de la señal.
Heursure	Selección usando una combinación de las dos opciones antes mencionadas.
Minimaxi	Selección del umbral usando el principio del <i>minimaxi</i>

Tabla 3.1: Reglas de selección de umbral

Risk Estimate (SURE), el cual calcula una estimación del riesgo para un valor particular de umbral x_0 . Minimizando el riesgo en x_0 , se obtiene una selección del valor de umbral. El principio de *SURE* está dado por la Ec. (50) en función de un parámetro de suavización λ , particularmente un umbral.

$$SURE(\lambda) = F(\lambda) - \sigma^2 + 2\sigma^2 \frac{N - N_0}{N} \quad (50)$$

donde $F(\lambda)$ es el dato de entrada, σ^2 la varianza del ruido, N el número de muestras de la señal, y N_0 el número de coeficientes wavelet correspondientes al ruido ubicados bajo el umbral. Este método, a diferencia de la umbralización universal, depende directamente de la señal de entrada, y no sólo de una estimación basada en los datos de la varianza del ruido σ^2 [82]. En la segunda regla de selección, se usa una forma fija de umbral que resulta en la acción del *minimax* multiplicado por un factor pequeño proporcional al logaritmo de la longitud de la señal N

$$sqt = \sqrt{2 \log N} \quad (51)$$

En la tercera regla se emplea una combinación entre las dos anteriores, donde, si la relación señal-ruido es muy pequeña, la estimación con *SURE* resulta muy ruidosa. Por lo tanto, se utiliza la forma fija del umbral. En la cuarta regla, el umbral se escoge con base en el principio del *minimax* para el error cuadrático medio. Este principio es utilizado en la estadística para diseñar estimadores, ya que obtiene el mínimo del máximo error cuadrático medio. Para realizar la selección del umbral, minimiza el riesgo máximo relativo con respecto a la selección óptima del riesgo. En [82], se sostiene que esta tasa de riesgo se comporta de la forma $2 \log N$, y el mismo umbral con *minimax* es asintótico,

$$\lambda_{mM} \sim \sqrt{2 \log N} \sigma \quad (52)$$

donde λ_{mM} representa la selección del umbral con *minimax*, N el número de puntos de la señal, y σ la desviación estándar del ruido.

Niveles de descomposición y métodos de reescalamiento

El proceso de descomposición puede ser iterativo, con aproximaciones sucesivas siendo descompuestas cada vez, de manera que la señal quede reducida en componentes de más

baja resolución. Para este proceso, se usa un método denominado *árbol de descomposición de wavelet*. En la práctica se selecciona un nivel de descomposición adecuado según la naturaleza de la señal [83].

En la Tabla 3.2 se indican los métodos disponibles en el toolbox de wavelet de Matlab. En el primer método se sigue el modelo básico del ruido, y no realiza reescalamiento. En el segundo se sigue el modelo básico de ruido pero con ruido no escalado, y realiza el reescalamiento usando solo una estimación simple del nivel de ruido, el cual se calcula con base en los coeficientes del primer nivel de descomposición [48]. El tercero corresponde al modelo básico de ruido con ruido no blanco, y el reescalamiento lo realiza basado en una estimación que depende del nivel de ruido en este nivel de descomposición [48].

<i>Método</i>	<i>Descripción</i>
One	Sigue el modelo básico del ruido
Sln	Modelo básico del ruido con ruido no escalado
Mln	Modelo básico del ruido con ruido no blanco

Tabla 3.2: Métodos de reescalamiento

Wavelets utilizadas para la realización del *denoising*

Los algoritmos se implementan con wavelets ortogonales, pues permiten una mejor reconstrucción de la señal original y su proceso de cálculo es relativamente sencillo [48] [84]. Esto se debe a que cada coeficiente wavelet se calcula únicamente con un producto escalar entre la señal original y la wavelet. Su tiempo de cómputo es corto y permite hallar la transformada con el mismo número de muestras de la señal original [85]. Las wavelets que satisfacen estas condiciones son las *Haar*, *Daubechies*, *Symlets* y *Coiflets* [48].

El procedimiento para lograr la reducción de las perturbaciones en las señales FCG, consiste en diseñar unos algoritmos de *denoising* empleando los parámetros mencionados anteriormente, utilizando cada una de las reglas de selección del umbral con los métodos de reescalamiento. Estas combinaciones se hicieron variando el nivel de descomposición desde 1 hasta 10 con una serie de wavelets recomendadas para este fin por su condición de ortogonalidad.

Posteriormente, dependiendo de los conceptos emitidos por un grupo de tres médicos expertos en auscultación al escuchar las señales procesadas con el *denoising*, se descartan los algoritmos cuyas combinaciones en cuanto a reglas de selección de umbral y métodos de reescalamiento, alteren de forma inapropiada las características propias de la señal, como puede ser la remoción de información clínica, la reducción considerable en el contenido de la misma, la alteración de los ruidos *S1*, *S2* y de los soplos, y por supuesto, aquellos que no realizan ninguna reducción de las perturbaciones.

El cálculo de la relación señal–ruido (SNR) para cada una de las señales procesadas se obtiene mediante la expresión

$$SNR = 10 \log \left(\frac{\sum_{n=1}^N (x(n) - \bar{x})^2}{\sum_{n=1}^N (x(n) - \tilde{x}(n))^2} \right) \quad (53)$$

en donde $x(n)$ es la señal original, $\tilde{x}(n)$ la señal reconstruida, \bar{x} la media de la señal y N el tamaño de la ventana sobre la cual se calcula. La obtención del valor de la SNR se realiza sobre las señales procesadas con los algoritmos que, a criterio de los médicos expertos en auscultación, presentan los mejores resultados de procesamiento por *denoising*, al facilitar la percepción acústica de los ruidos y soplos cardíacos de las señales FCG analizadas. Este método se diferencia con el planteado en [48], ya que este plantea el cálculo de la SNR entre la señal de FCG contaminada con ruido blanco gaussiano y la señal procesada con los algoritmos de *denoising*.

3.1.2. Análisis de estacionariedad y no linealidad

Análisis de estacionariedad. Para la realización del análisis de estacionariedad de las señales FCG, se asume que cada ciclo cardíaco tiene las mismas características estadísticas de uno con respecto al otro, y que por lo tanto, la ventana cuasiestacionaria sobre la cual se debe estimar las medidas de caracterización dinámica no lineal corresponden al tiempo de duración de cada ciclo cardíaco. Una explicación más detallada del concepto de estacionariedad se encuentra en el Anexo C.

Para comprobar esta suposición, se calcularon los valores de media y desviación estándar en cada uno de los ciclos cardíacos. Se escogieron para el análisis los ciclos con la mínima desviación estándar en cada una de las señales FCG.

Análisis de no linealidad. El análisis de no linealidad, tiene como fin confirmar la presencia de determinismo no lineal en las señales analizadas. El procedimiento requiere la aplicación del método de sustitución descrito en la sección 1.2.4, el cual consiste en destruir la información de determinismo no lineal que se presenta en una serie de tiempo, para este caso, las señales FCG. Bajo la suposición de una distribución gaussiana de la medida, el criterio común para rechazar la hipótesis nula es $\nu > 2$, según [86].

En este trabajo, la medida aplicada para el análisis de no linealidad es la dimensión de correlación (D_2), por ser la más representativa en cuanto a cuantificación de la dimensión fractal de una serie de tiempo reconstruida en el espacio de fase. Es así como a partir de 13 señales normales, se generan 30 series sustituidas, y se estima el valor de D_2 para cada una mediante el algoritmo estimador de Takens contenido en [87, 88]. Posteriormente, se obtienen los valores estadísticos correspondientes a la Ec. (42).

Análisis de dispersión con aumentos en la longitud de los datos. Es importante comprobar la convergencia en la estimación de las medidas conforme aumenta la longitud de

los datos, mediante la respectiva disminución en los valores de la desviación estándar. Se realizó 20 veces el procedimiento de sustitución de datos, para 5 señales FCG normales, y se estimó D_2 [87,88] para varios segmentos de cada una estas series sustituidas, incrementando gradualmente la longitud de cada uno desde $N = 2^8$ hasta 2^{15} . De esta manera se examina la dependencia en la estimación de las medidas dinámicas según la longitud de la serie de datos.

3.2. Caracterización mediante técnicas de dinámica no lineal

3.2.1. Estimación de la dimensión de correlación (D_2)

El cálculo de la dimensión de correlación (D_2) requiere la estimación previa de la función suma de correlación ($C(r)$), de acuerdo a la expresión (28). En este trabajo, se diseña un algoritmo para el cálculo de $C(r)$ según [89], y se evalúa su funcionamiento al aplicarse sobre un conjunto de datos cuyo resultado de D_2 se conoce *a priori*. En [90] se presenta un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias de Lorenz, descritas por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= -xy + rx - y \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}\tag{54}$$

con las siguientes condiciones iniciales: $\sigma = 16$, $b = 4$, $r = 45.92$, tiempo de integración $T_s = 0.01$, y longitud (N) igual a 50000 datos. Según [90], la dimensión fractal de un sistema de Lorenz con estas condiciones tiene un valor aproximado a 2.06. Por lo tanto, se genera un conjunto de datos de estas características, con los parámetros y condiciones iniciales mencionadas, estimando seguidamente su función $\ln(C(r))$.

Detección de la región de escalamiento. La detección de la región de escalamiento, se realiza teniendo en cuenta que en cualquier región lineal de la función $\ln(C(r))$, las pendientes o derivadas tienden a ser similares. La función $d \ln(C(r)) / d \ln(r)$ representa la magnitud de las pendientes de $\ln(C(r))$. Los argumentos de entrada del algoritmo que calcula la región de escalamiento son los valores correspondientes a $\ln(C(r))$ y $\ln(r)$, y devuelve dos valores que corresponden a los índices máximo y mínimo de la región de escalamiento contenida en el vector de valores del eje $\ln(r)$. El primer paso que ejecuta el algoritmo es estimar la función $d \ln(C(r)) / d \ln(r)$ mediante el cálculo de pendientes de puntos vecinos. En el segundo paso, analiza la similaridad de las magnitudes obtenidas tras derivar la función $\ln(C(r))$ utilizando la desviación estándar de cada segmento analizado, ya que el segmento con menor desviación es el más similar en términos de magnitud. En el tercer y último paso, encuentra los índices con los que se puede obtener el segmento de menor dispersión en los vectores de $\ln(C(r))$ y $\ln(r)$.

Al tener definida la región de escalamiento, se calculan las pendientes de las rectas de la función $\ln(C(r))$ vs $\ln(r)$ en los valores de $\ln(r)$ según la función $d \ln(C(r)) / d \ln(r)$, donde cada una de estas rectas representa la suma de correlación para cada valor de dimensión de

inmersión. Este análisis se realiza con un valor de $\tau = 16$, según la estimación mediante la función de información mutua promedio (AMI) (sección 1.2.2). El algoritmo también se aplica sobre una señal aleatoria, esperando que la evolución de D_2 , conforme aumenta el valor de m , sea de naturaleza lineal.

Aplicación del algoritmo en señales FCG. Después de realizarse la calibración del algoritmo diseñado, se procede a aplicarlo sobre las señales FCG normales y anormales. Se calcula la función $\ln C(r)$ vs $\ln(r)$ sobre los ciclos de menor desviación estándar en cada señal FCG, de acuerdo al resultado del análisis de estacionariedad para cada una, determinándose también su región de escalamiento de acuerdo a la función $d \ln(C(r)) / d \ln(r)$, así como la respectiva evolución de D_2 vs m . El análisis se realizó con ciclos muestreados a 2000, 5000, y 10000 muestras por segundo, para valores de τ de 1 y según lo que se haya obtenido mediante el cálculo de la función AMI.

3.2.2. Estimación de la entropía de Kolmogorov (K_2)

Después de estimar la función $C(r)$ para los datos analizados, se puede calcular la entropía de Kolmogorov (K_2), cuyo procedimiento se realiza de acuerdo a [36], lo cual se describe en la sección 1.2.3. En este caso, la estimación de K_2 también se realiza en los datos correspondientes a cada ciclo de la señal FCG que presentaron la mínima desviación estándar, muestreados a 2000, 5000 y 10000 muestras por segundo, para valores de τ de 1 y según lo que se haya obtenido mediante el cálculo de la función AMI. El valor al que converge la Ec. (38), aplicada sobre la misma región de escalamiento donde se calcula D_2 , se toma como la entropía de Kolmogorov.

3.2.3. Cálculo del máximo exponente de Lyapunov (λ_1)

El algoritmo desarrollado en este trabajo para hallar el máximo exponente de Lyapunov se basa en [89], el cual estima λ_1 de la siguiente forma:

Después que se reconstruyen las trayectorias, el algoritmo localiza el *vecino cercano* de cada punto en la trayectoria. El vecino cercano, $\mathbf{S}_{\hat{j}}$, se encuentra a través de la búsqueda del punto que minimiza la distancia al punto de referencia particular \mathbf{S}_j , lo cual se expresa mediante:

$$\mathbf{u}_j(n_0) = \min_{\mathbf{S}_{\hat{j}}} \left\| \mathbf{S}_j - \mathbf{S}_{\hat{j}} \right\| \quad (55)$$

donde $\mathbf{u}_j(n_0)$ es la distancia inicial desde el j -ésimo punto a su vecino cercano, y $\|\dots\|$ denota la norma euclídea. Se impone la restricción que los vecinos cercanos tienen una separación temporal mayor que el periodo medio de la serie de tiempo ($|j - \hat{j}| > \text{periodo medio}$). Esto permite considerar cada par de vecinos como condiciones iniciales cercanas para diferentes trayectorias. El máximo exponente de Lyapunov se estima entonces como la tasa media de separación de los vecinos cercanos. Se asume entonces que el cálculo de λ_1 viene dado por:

$$\lambda_1(\Delta n) = \frac{1}{\Delta n N} \frac{1}{(l - \Delta n)} \sum_{j=1}^{l - \Delta n} \ln \frac{\mathbf{u}_j(\Delta n)}{\mathbf{u}_j(n_0)} \quad (56)$$

donde N es el periodo de muestreo de la serie de tiempo, $\mathbf{u}_j(\Delta n)$ es la distancia entre el j -ésimo par de vecinos cercanos después de Δn pasos discretos en el tiempo, y l es el número de puntos reconstruidos según la Ec. (24). Para mejorar la convergencia (con respecto a Δn), se da una forma alterna de la Ec. (56).

$$\lambda_1(\Delta n, k) = \frac{1}{kN} \frac{1}{(l-k)} \sum_{j=1}^{l-k} \ln \frac{\mathbf{u}_j(\Delta n + k)}{\mathbf{u}_j(\Delta n)} \quad (57)$$

En la Ec. (57), k se toma como constante, y λ_1 se extrae localizando la meseta de $\lambda_1(\Delta n, k)$ con respecto a Δn . A partir de la de la definición de λ_1 dada en (41), se asume que j -ésimo par de vecinos cercanos diverge aproximadamente a una tasa dada por el máximo exponente de Lyapunov:

$$\mathbf{u}_j(\Delta n) \approx C_j e^{\lambda_1(\Delta n N)} \quad (58)$$

donde C_j es la separación inicial. Tomando el logaritmo a ambos lados de la Ec. (58), se obtiene:

$$\ln \mathbf{u}_j(\Delta n) \approx \ln C_j + \lambda_1(\Delta n N) \quad (59)$$

La Ec. (59) representa un conjunto de líneas aproximadamente paralelas (para $j = 1, 2, \dots, M$), cada una con una pendiente proporcional a λ_1 . De esta forma, el máximo exponente de Lyapunov se calcula mediante un arreglo de mínimos cuadrados de la línea definida por:

$$y(\Delta n) = \frac{1}{N} \langle \ln \mathbf{u}_j(\Delta n) \rangle \quad (60)$$

donde $\langle \cdot \rangle$ denota el promedio sobre todos los valores de j .

3.2.4. Cálculo del exponente de Hurst (H)

El cálculo del exponente de Hurst (H) se realiza de acuerdo al procedimiento descrito en 1.2.3. El valor de H , se define como la pendiente que se obtiene al calcular la media de la relación $R(N)/\sigma(N)$, dada por la Ec. (1.2.3), para diferentes escalas en la longitud de los datos de la serie de tiempo analizada.

El algoritmo para la estimación del exponente de Hurst, diseñado en este trabajo, no usa solapamiento de regiones de datos, básicamente porque se encontró que el solapamiento de regiones no producía resultados exactos. El tamaño que se escogió para las regiones de análisis fueron en potencias de dos, empezando por 8 y finalizando en un tamaño menor o igual al tamaño total de la serie objeto del análisis, es decir: 8, 16, 32, 64, etc. Es importante resaltar que todas estas determinaciones se escogieron con el fin de calibrar el algoritmo, y así obtener los resultados más exactos [91].

Otras versiones del algoritmo reescalado de rango pueden usar el solapamiento de las regiones y no limitarse a tamaños de datos que son potencias de 2, con el fin de ajustarse al tipo de serie que estén analizando. Esto debido a que el algoritmo reescalado de rango estima el exponente de Hurst mediante el cálculo de promedios de rangos reescalados sobre múltiples

regiones de datos, hecho por el cual este algoritmo presenta una buena aproximación para el exponente de Hurst en series de tiempo con determinada cantidad de muestras.

3.2.5. Cálculo del exponente de la complejidad Lempel–Ziv (LZ)

La estimación de la complejidad LZ se realiza siguiendo el procedimiento descrito en la sección 1.2.3.

Balanceo de las matrices de características resultantes. Dado que se tienen 44 registros normales y 49 patológicos, se debe balancear las matrices resultantes de características para cada clase, es decir, que la cantidad de ciclos de FCG analizados deben ser iguales tanto para el grupo de señales normales como para el grupo de patológicas.

3.2.6. Limitaciones en el desempeño de los algoritmos

Algoritmo estimador del exponente de Hurst. Cuando se realiza el cálculo en series de tiempo mayores a 10000 muestras por segundo, el algoritmo presenta inestabilidad en el momento de realizar la estimación, por lo cual, se debe desarrollar nuevamente la calibración del algoritmo, escogiendo el tamaño de las regiones sobre las que se calculará el rango y la desviación estándar ($R(N)/\sigma(N)$).

Algoritmo estimador de la dimensión de correlación. Como se mencionó, el programa para el cálculo de la dimensión de correlación está basado en el algoritmo de Rosenstein. Al derivar la función de suma de correlación para estimar los valores de dimensión de correlación en cada valor de dimensión de inmersión, el programa toma regiones superiores o iguales a 20 muestras para calcular su desviación estándar, tomando como región más lineal la región de menor desviación estándar.

Como la dimensión de correlación es básicamente la pendiente de la región de escalamiento, es importante escoger muy bien ésta región, para lo cual, el algoritmo que calcula la región de escalamiento permite calibrar el número mínimo de muestras por región a analizar (20 en este estudio), y además, permite hacer una elección de la región de escalamiento de manera manual, solamente indicando el valor mínimo y máximo, en caso que sea necesario.

Es importante indicar que para las señales FCG que se analizan, la zona de escalamiento se presenta en la misma región para todas las señales, por lo cual se puede indicar manualmente al programa los límites de la misma. Puede suceder que para señales de otra naturaleza, la región de escalamiento varíe, razón por la cual se recomienda dejar que el programa la calcule automáticamente para luego hacer un análisis detallado de la viabilidad de la región encontrada, y poder decidir si se trabaja en la región calculada o se escoge otra manualmente de ser necesario.

No obstante, los programas están hechos en lenguaje C++, por lo que el tiempo de cómputo es menor que en otros compiladores. Adicionalmente, según [89], el algoritmo es altamente insensible al número de muestras y ruido presente en la serie de tiempo, por lo cual, las variaciones que se puedan presentar en los resultados dependen del tiempo de retardo (τ) y la dimensión de inmersión (m).

3.3. Caracterización mediante análisis acústico

Se aplican algoritmos de caracterización acústica desarrollados previamente dentro del GC&-PDS para análisis de señales de voz, dado que al igual que las señales FCG, también son señales de tipo acústico, así que se evalúa si estos algoritmos puede proporcionar información que discrimine entre clases normal y patológica en FCG. Las características calculadas a los ciclos de FCG bajo análisis se indican en el Anexo B.1.

En el análisis de señales de audio, es común el uso de dos tipos de características:

Características Acústicas: Califican las cualidades del sonido y poseen un sentido físico determinado [92].

Características de Representación: Correspondientes a valores calculados a partir de alguna forma de representación del sonido. Usualmente no poseen sentido físico.

En este trabajo se hace uso de características de tipo Acústicas (CA) y de Representación (wavelets).

3.3.1. Características acústicas

En cuanto a la extracción de (CA) se han desarrollado numerosos algoritmos de estimación de éstas [93] [94] [95] [96] [97]. En el presente trabajo se emplean algunas CA utilizadas en [98] con muy buen rendimiento y que se enuncian a continuación.

Pitch (F_0): El pitch o *frecuencia fundamental*, se define como la frecuencia referencia correspondiente a un tono sinusoidal que produce la misma sensación de altura que la señal en análisis [99].

Jitter (J): Corresponde a la medida de la perturbación de la frecuencia (o el correspondiente período) y es definido como la variación de la frecuencia fundamental durante el latido. Esta variabilidad, se refleja en el promedio del desvío estándar de la F_0 . Sin embargo, las mediciones del *Jitter* son relativas a variaciones en pequeños intervalos de tiempo. Vale decir que el *Jitter* mide cuánto difiere un período dado de su período consecutivo y no cuánto difiere un período fundamental de otro posterior cualquiera. Por lo tanto, el *Jitter* es una medida de la variabilidad de la frecuencia, período a período, sin tener en cuenta los cambios voluntarios de la frecuencia fundamental [100].

Rango fonatorio (R_f): Representa el rango entre F_{0min} y F_{0max} , expresado en semitonos.

Cociente de perturbación de tono (C_{pt}): Representa la variabilidad período a período con un factor de suavizado de 5 períodos.

Error de predicción normal (NEP): Una característica para estimar el nivel de ruido, calculando la energía normalizada de la señal residual; expresada como la proporción de la media geométrica del modelo de espectro y su media aritmética [101].

Excitación glótica al ruido (GNE): Es la estimación del ruido relacionado con una excitación sincrónica en las diferentes bandas de frecuencia [102]. El ruido turbulento

generado durante la constricción conlleva a una excitación no correlacionada. El sincronismo es expresado por la correlación entre envolventes de diferentes bandas de frecuencia.

Relación armónico ruido (HNR): Existen variados desórdenes en una señal de audio, a los cuales se les puede asociar la presencia de ruido aditivo en la respectiva onda acústica. Debido a esto se han creado diversos algoritmos que buscan estimar la cantidad de ruido aditivo presente en las señales acústicas [98].

Energía de los segmentos (E): la energía se calcula como la diferencia entre la energía de la emisión del latido menos la energía del ruido ambiente [98].

Menor cuadrado de peso recursivo (WRLS): Forma adaptativa para estimar las variaciones de parámetros, en tiempo y frecuencia de una señal de audio.

Densidad de cruces por cero (Z_{No}): de la señal analizada.

En algunas de estas CA se utilizan también momentos representativos de las mismas como la media, la desviación estándar, la varianza, el mínimo, el máximo.

3.3.2. Características de representación

Se emplean las siguientes,

Cepstrum: Se define como la transformada de *Fourier* del logaritmo del espectro. Usado para determinar periodicidades en el espectro de la señal. Adiciones en el dominio del *Cepstrum* corresponden a multiplicaciones en el de la frecuencia y a convoluciones en el tiempo [103].

Coefficientes *Cepstrum* sobre la escala de frecuencia Mel (MFCC): se definen como el *cepstrum* real de una señal de tiempo corto ventaneada y que ha sido derivada de la *FFT* de esa señal. Se usa una escala de frecuencia no lineal para aproximar el comportamiento del sistema no auditivo [104].

Predicción lineal (LP): La idea básica detrás del análisis de predicción lineal es que una muestra de audio en el tiempo n , $s(n)$ puede aproximarse como una combinación lineal de las p muestras de audio anteriores [104].

Coefficientes de predicción lineal (LPC): Con los cuales se construye el filtro inverso de la señal, usado como blanqueador espectral, es decir, para eliminar los efectos de los ruidos generados por los tejidos circundantes al corazón, y resaltar la función de excitación [98].

Transformada wavelet: Empleada en su modalidad discreta (*DWT*) [105], a través del cálculo de la desviación estándar de cada uno de los 6 primeros niveles de descomposición de los coeficientes de detalle y sobre el sexto nivel de descomposición de los coeficientes de aproximación, considerando diferentes onditas madre para realizar más adelante su selección.

Al igual que en las CA, en algunas características de representación se evalúan momentos significativos de las mismas como la media, la desviación estándar, la varianza, el mínimo, el máximo.

3.3.3. Preprocesamiento de las matrices de características acústicas

El cálculo de las características acústicas genera errores en tres de los registros normales, por lo tanto, estos registros se retiran del análisis, obteniendo una matriz de 41×128 para las señales normales. La matriz de características resultante se balancea con la de los registros patológicos, retirando otros 3 registros de la matriz de características correspondiente a las señales patológicas, donde el criterio de remoción es el de retirar las señales con menos separabilidad en la estimación de D_2 (la descripción de cada una de las características estimadas se encuentra en el Anexo B).

Dentro de la matriz de características acústicas, se encuentran 10 índices cuyos valores son complejos, correspondientes a las características de la 95 a la 104, por lo que se procede a retirarlos, resultando una matriz de 41×118 . A estas matrices (una para cada clase: normal y patológico) se le aplica un algoritmo para detectar la cantidad de valores anómalos por cada característica. Si la característica calculada presenta valores anómalos en más del 10 % de los registros (es decir, más de 4 valores anómalos dado que se tienen 41 registros), se retira del análisis.

En la Tabla 3.3 se presentan las características que son removidas para cada una de las matrices de características según la clase. La unión de ambos conjuntos son las características que se remueven en cada una de las matrices

	<i>Características anómalas</i>
Matriz de señales normales	8, 15, 17, 50, 63, 65, 73, 74, 75, 90, 92, 93 y 94.
Matriz de señales patológicas	4, 8, 13, 16, 42, 52, 53, 54, 63, 65, 75, 94 y 95.
Unión de las características anómalas	4, 8, 13, 15, 16, 17, 42, 50, 52, 53, 54, 63, 65, 73, 74, 75, 90, 92, 93, 94 y 95.

Tabla 3.3: Índices con más de 4 valores anómalos en cada matriz de características.

De esta manera, las matrices de características para cada clase se reducen a un tamaño de 41×97 .

El siguiente paso es realizar un test de normalidad para cada una de las características resultantes, con el fin de comprobar que los valores de los índices en todos los registros tengan una distribución gaussiana. La selección de estas características se realiza bajo el criterio de que las que presenten un valor de significancia mayor a 0.5, deben retirarse momentáneamente para someterse a un proceso de normalización, en el que se procura transformar la distribución no gaussiana a una gaussiana para cada característica. La Tabla 3.4 muestra las características de cada una de las matrices de 41×97 para cada clase que no tuvieron una distribución gaussiana.

	<i>Características que no tienen distribución gaussiana</i>
Matriz de señales normales	1, 4, 6, 8, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 24, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 35, 36, 38, 39, 43, 44, 45, 46, 47, 49, 55, 56, 57, 59, 62, 63, 64, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 86, 87, 92, 93, 95, 96 y 97.
Matriz de señales patológicas	4, 8, 9, 10, 11, 14, 15, 16, 17, 18, 21, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 43, 44, 45, 46, 47, 49, 53, 55, 57, 59, 60, 61, 62, 63, 69, 70, 71, 73, 74, 77, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88 y 89.

Tabla 3.4: Características de las matrices de 41×97 que no tienen distribución gaussiana.

Después del procedimiento de transformación, se remueve la característica 43 en cada una de las matrices de cada clase, debido a que resultan valores que tienden al infinito. Se realiza nuevamente la prueba de normalidad, para detectar aquellas características que siguen teniendo una distribución no gaussiana después de la transformación. Adicionalmente, se debe tener en cuenta que también resultan algunas características cuyos índices toman valores complejos, por lo que se trabaja con la parte real de todos los valores. La Tabla 3.5 presenta las características de la matriz de 41×97 de cada clase que toman una distribución gaussiana como consecuencia del proceso de transformación.

	<i>Características transformadas</i>
Matriz de señales normales	14, 22, 23, 24, 32, 35, 40, 42 y 43.
Matriz de señales patológicas	13, 16, 18, 24, 27, 28, 29, 30, 31, 33, 34, 36 y 37.

Tabla 3.5: Características de las matrices de 41×97 que obtienen una distribución gaussiana después de la transformación.

En esta parte del preproceso de datos, se realiza nuevamente la operación de unión entre los conjuntos de características de las matrices para cada clase que no obtienen una distribución gaussiana después de la transformación, retirándose de forma definitiva del análisis.

3.3.4. Clasificación

En términos de discriminación, se evalúa el poder discriminante de las características extraídas mediante un clasificador bayesiano, para separar entre clases normal y patológica, utilizando el método de validación cruzada. En el caso de las matrices correspondientes al análisis acústico, la clasificación se realiza después de aplicar un procedimiento para selección de características, mediante prueba de hipótesis univariada y análisis de correlación.

4. Resultados y discusiones

4.1. Reducción de perturbaciones acústicas

De acuerdo a los conceptos dados por el grupo de tres médicos expertos en auscultación, los mejores resultados en la reducción de perturbaciones acústicas se obtienen con los siguientes tipos de wavelet: *Coiflet* 4 y 5, *Symlet* 9 y 11, y *Daubechies* 11 y 14. Entre este grupo, la wavelet *Coiflet* 4 produce los resultados más satisfactorios, tanto en señales normales como en las que contienen soplos cardíacos. El método de umbralización *soft thresholding* es el mejor para este procedimiento, debido a que no elimina totalmente los coeficientes que se encuentran por encima del umbral, permitiendo que la señal sea reconstruida con una mayor exactitud, algo que no ocurre con el método *hard thresholding*, pues este puede causar discontinuidades en la señal.

En cuanto al nivel de descomposición, se encuentra que con 8 niveles, el algoritmo tiene su mejor desempeño, dado que si se utilizan menos niveles, la señal FCG permanece aún con perturbaciones ajenas a la información clínica de interés, y si se usan más niveles, se reducen las perturbaciones pero también se reducen considerablemente las características de los ruidos cardíacos normales *S1* y *S2*. Asimismo, con la colaboración de los médicos expertos, se determina que el parámetro *heursure* es el más adecuado como regla de selección del umbral, y el *mln* como método de reescalamiento.

Notación de los parámetros. La combinación de los parámetros se indica con dos letras, obteniendo la notación utilizada en la Figura 4.2: la primera representa la regla de selección de umbral, es decir,

- h: heursure
- r: rigrsure
- s: sqtwolog
- m: minimaxi

y la segunda corresponde al método de reescalamiento,

- m: mln
- s: sln
- o: one

Es así como las dos barras color lila y azul claro, encerradas en círculos, indican que los valores de SNR obtenido para señales procesadas con combinación hm (selección de umbral: heursure, método de reescalamiento: mln) y rm (selección de umbral: rigrsure, método de reescalamiento: mln) se ubican en rangos entre 40 y 50 dB.

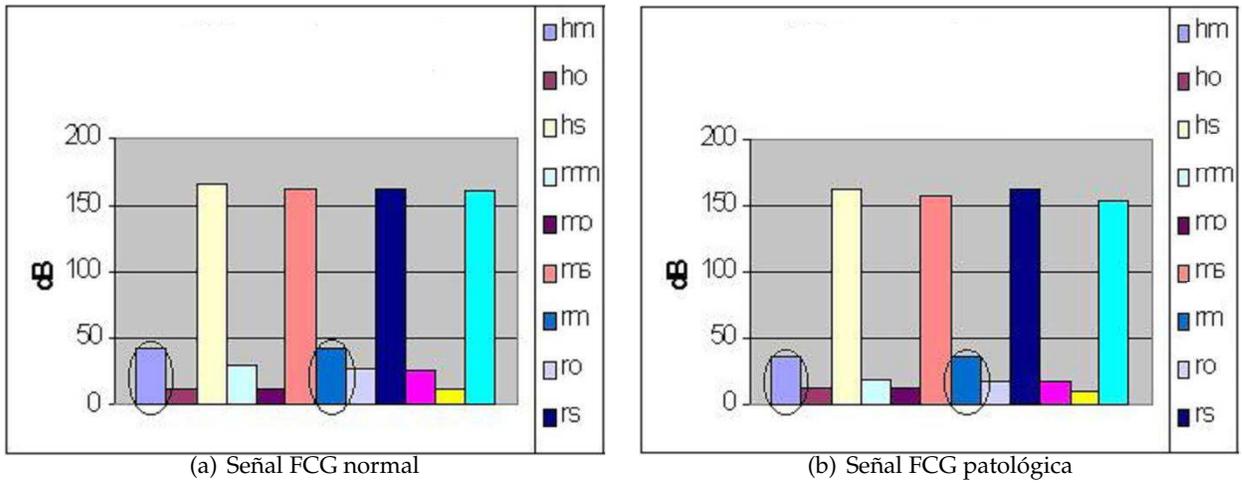


Figura 4.1: Resultados de SNR para cada combinación.

En la Figura 4.2a se muestra una señal FCG normal, antes y después de ser sometida al *denoising* con los parámetros denotados por las combinaciones *hm* y *rm*, mientras que en la Figura 4.2b se muestra una señal con presencia de soplo cardíaco, procesada con las mismas condiciones.

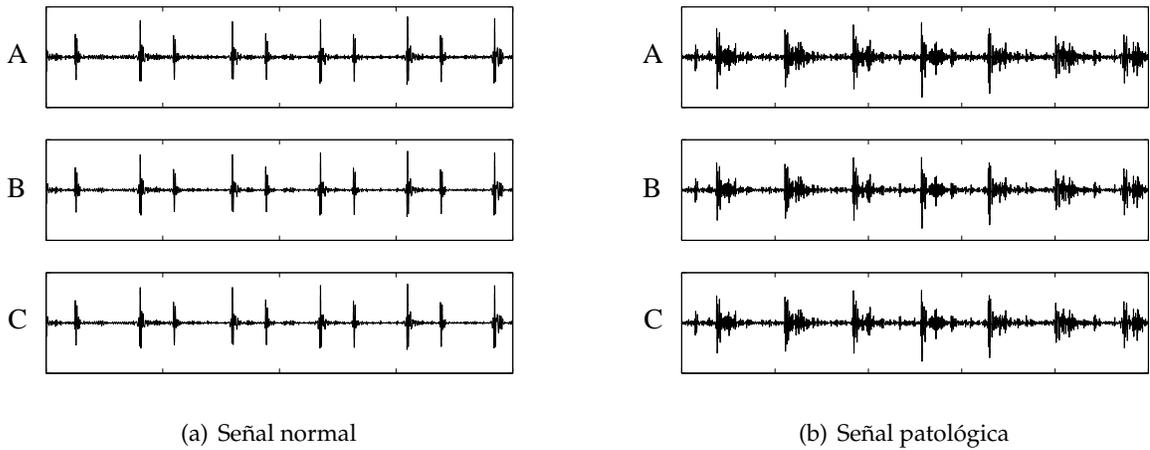


Figura 4.2: A. Señal original. B. *Denoising* con combinación *hm*. C. *Denoising* con combinación *rm*.

Teniendo en cuenta los conceptos emitidos por los médicos expertos, se observa que los resultados comprendidos entre 20 y 60 dB son aquellos en donde se presenta el mejor

desempeño del algoritmo, ya que si está por debajo de este rango, se remueven algunas características propias de la señal, y si encuentra por encima, la reducción de las perturbaciones acústicas es mínima o nula (Figura 4.1).

Cabe anotar, que el propósito principal de la aplicación del *denoising* sobre las señales de FCG ha sido mejorar las condiciones de audibilidad de las señales, y no una forma de mejorar la estimación de las medidas. No obstante, se realiza la comparación de resultados en la clasificación cuando el método se aplica, así como cuando no se aplica.

4.2. Análisis de estacionariedad y no linealidad

La Tabla 4.1 muestra los resultados del análisis de no linealidad para comprobar la presencia de determinismo no lineal, en 13 señales de FCG correspondientes a sujetos normales. Según [86], si $\nu > 2$, se puede comprobar la presencia de determinismo no lineal en las señales analizadas, por lo cual, se puede rechazar la hipótesis nula que indica que las señales FCG se originan en procesos de tipo lineal.

Señal	Q_D	μ_H	σ_H	ν
1	2.3881	6.6830	0.6899	6.2250
2	2.7997	4.3046	0.1973	7.6261
3	1.9195	6.5349	1.6270	2.8367
4	1.1411	5.0020	0.4730	8.1633
5	1.7035	5.0976	0.3643	9.3181
6	1.4692	7.1575	1.1147	5.1028
7	3.9464	6.5138	0.5230	4.9091
8	2.5486	6.8110	0.7446	5.7241
9	1.7549	5.5428	0.6783	5.5841
10	2.3787	6.1610	0.6201	6.0991
11	1.6242	6.9260	0.7813	6.7862
12	2.9756	6.3279	0.6956	4.8193
13	2.9745	7.9813	1.1014	4.5461

Tabla 4.1: Valores calculados para análisis de no linealidad.

La Figura 4.3 muestra los resultados de los análisis de estacionariedad para comprobar la cuasiestacionariedad de los ciclos cardíacos en FCG. Los valores de media y desviación estándar son muy similares entre cada uno de los ciclos.

La Figura 4.4 muestra la disminución en los valores de la desviación estándar para el cálculo de D_2 mediante el algoritmo estimador de Takens [87], conforme aumenta la longitud de las 20 series sustituidas, para valores de longitud N desde 2^8 hasta 2^{15} , en cada una de las 5 señales FCG escogidas, donde la menor dispersión se presenta cuando los datos corresponden a una longitud $N = 2^{13}$.

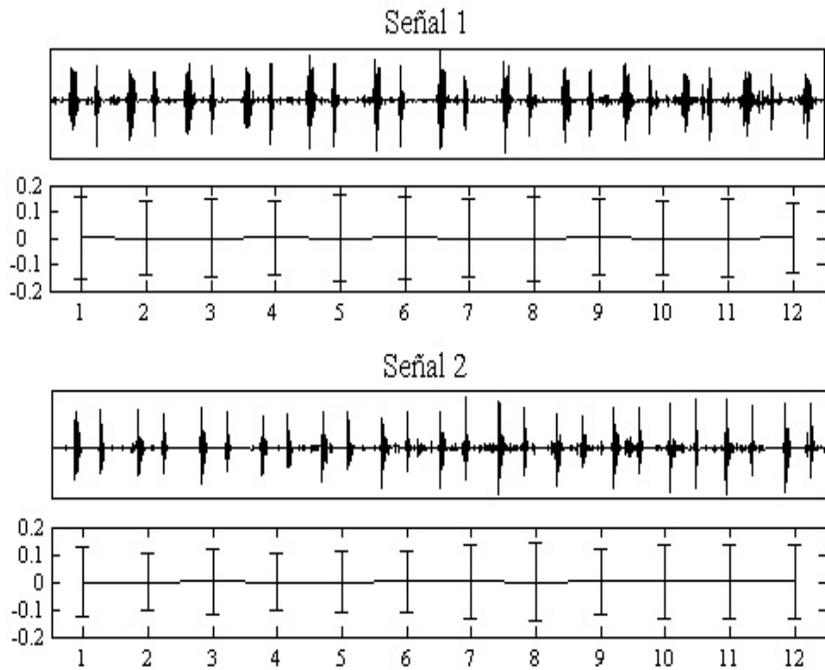


Figura 4.3: Comprobación de cuasiestacionariedad para los ciclos cardíacos en FCG.

4.3. Extracción de características basada en análisis de complejidad

Resultados de la calibración del algoritmo para estimación de la dimensión de correlación. La Figura 4.5 presenta el cálculo de D_2 para la señal de un sistema de Lorenz descrito por la Ec. (54), con condiciones iniciales conocidas y con un valor de τ igual a 16, calculado mediante la función AMI. El resultado para valores de m desde 2 hasta 30 se aproxima a 2.06, tal como se indica en [90]. El algoritmo detecta de forma automática la región de escalamiento, la cual es señalada en las próximas figuras mediante un rectángulo con bordes discontinuos, en las gráficas de $\ln(C(r))$ vs $\ln(r)$ y $d \ln(C(r)) / d \ln(r)$ vs $\ln(r)$.

La Figura 4.6 presenta el cálculo de D_2 para una señal aleatoria, con un valor de τ igual a 1 calculado mediante la función AMI. Es difícil definir una región de escalamiento en la Figura 4.6b, por lo que el comportamiento de D_2 conforme aumenta el valor de m no encuentra un valor de convergencia (Figura 4.6c), lo cual es un resultado esperado para señales aleatorias. La región delimitada por el rectángulo se escogió de forma manual y no automatizada, dado que el algoritmo es incapaz de definirlo en forma automática. No obstante, se debe escoger estos valores de $\ln(r)$ con el fin de demostrar la falta de convergencia en la aproximación de D_2 .

Según las Figuras 4.5 y 4.6, se demuestra que el algoritmo diseñado en este trabajo realiza una estimación confiable de $C(r)$, la cual permite establecer también una región de escalamiento para el cálculo de D_2 vs m .

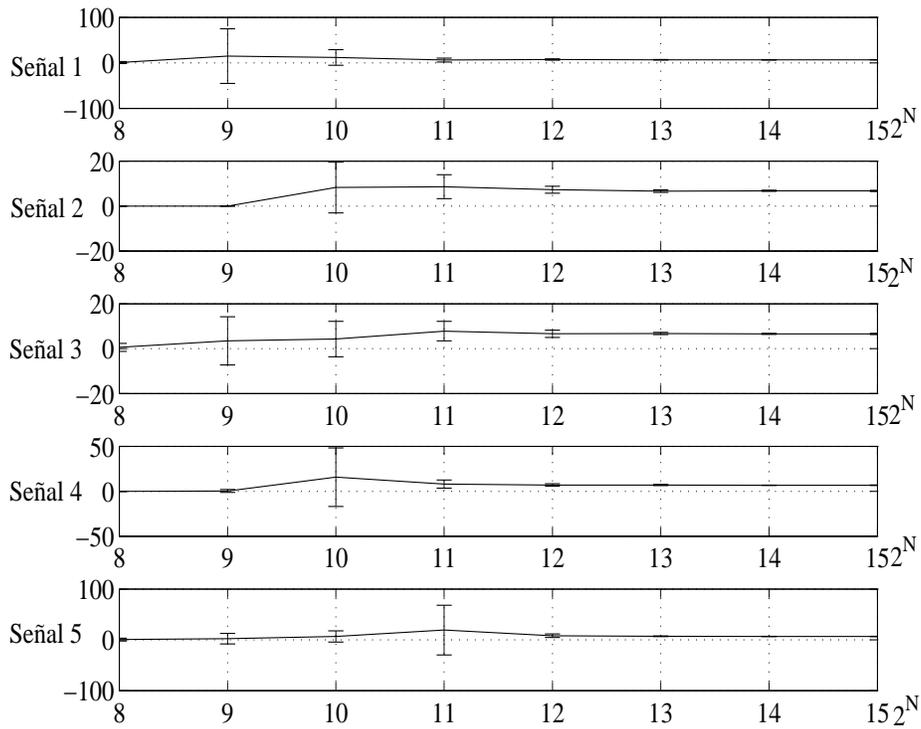


Figura 4.4: Convergencia de D_2 para series sustituidas a diferentes longitudes.

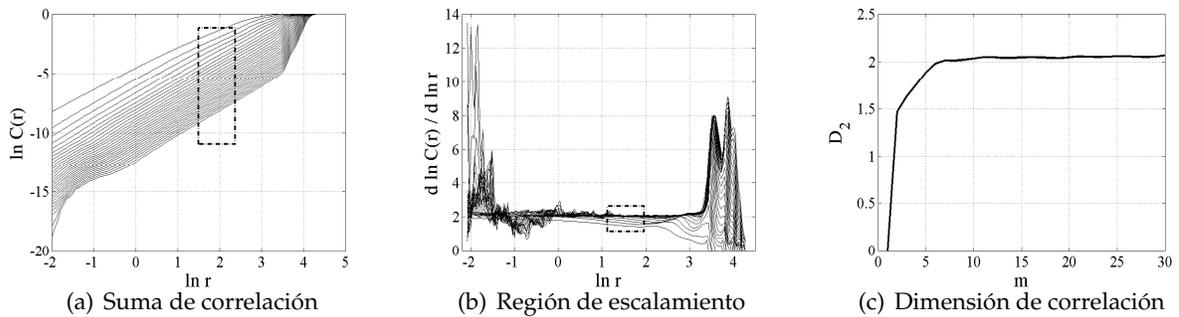


Figura 4.5: Estimación de D_2 para un sistema de Lorenz.

Resultados de la estimación de la dimensión de correlación para las señales FCG. En el procedimiento para detectar las regiones de escalamiento correspondientes a las señales FCG, la detección automática se ubica en regiones donde el valor de la función $d \ln (C(r)) / d \ln (r)$ es cero, lo cual no es conveniente (Figura 4.7)

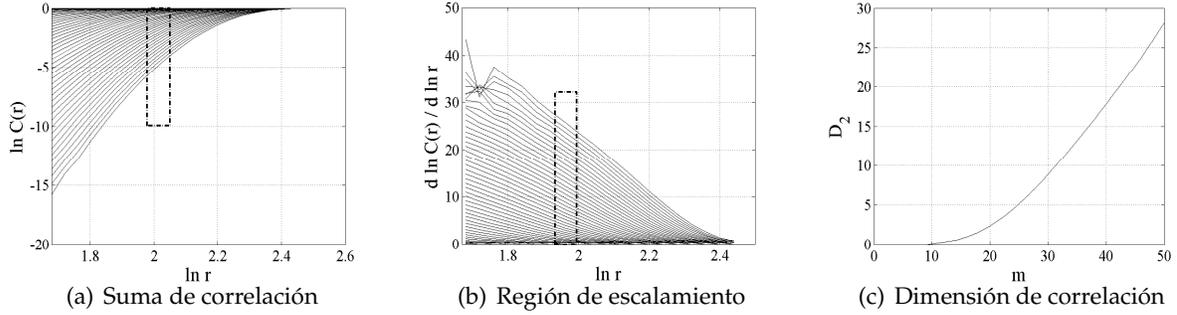


Figura 4.6: Estimación de D_2 para una señal aleatoria.

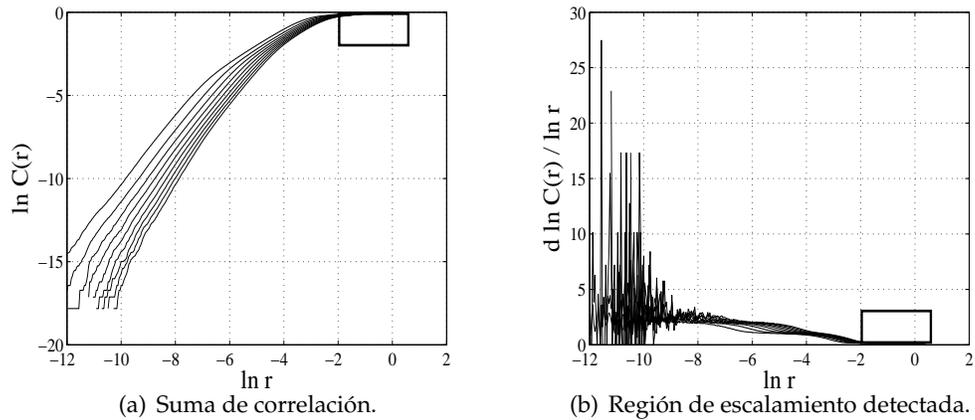


Figura 4.7: Escalamiento para el ciclo de una señal FCG. No se ubica un escalado conveniente.

Si se analizan las gráficas cuando se genera la función $d \ln (C(r)) / d \ln (r)$ para todos los valores de m , y para todos los segmentos de FCG analizados, se observa que las regiones de escalamiento adecuadas para el cálculo de D_2 tienen una ubicación común cuando los valores de $\ln(r)$ son menores a -2.8 . Por tal motivo, la búsqueda automática del escalado por parte del algoritmo se limita a valores de $\ln(r)$ menores a -2.8 (Figura 4.8).

Las Figuras 4.9 y 4.10 presentan los resultados en el proceso de la estimación de D_2 para el ciclo de menor desviación estándar correspondiente a un sujeto normal, muestreado a 2000 muestras por segundo. En estos casos, también es difícil definir una región de escalamiento en las funciones $d \ln (C(r)) / d \ln (r)$ vs $\ln (r)$, tanto para un valor de τ igual a 7, obtenido mediante la función AMI, como para τ igual a 1, lo cual impide obtener una convergencia en el valor de D_2 vs m . Se asume que este hecho se presenta como consecuencia de que la cantidad de muestras en cada conjunto de datos es insuficiente para la estimación. Las

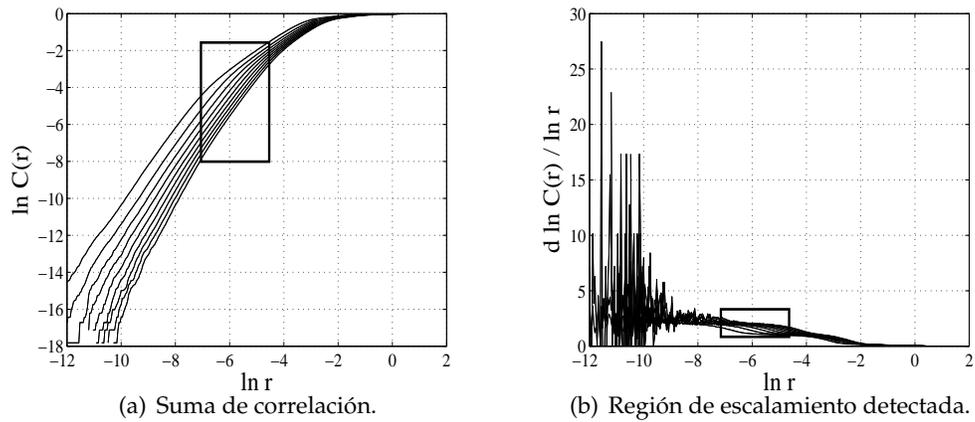


Figura 4.8: Escalamiento para el ciclo de una señal FCG. Se ubica un escalado conveniente.

gráficas que se presentan de aquí en adelante, indican los resultados al analizar las señales procesadas con el método de *denoising*, excepto si se menciona lo contrario.

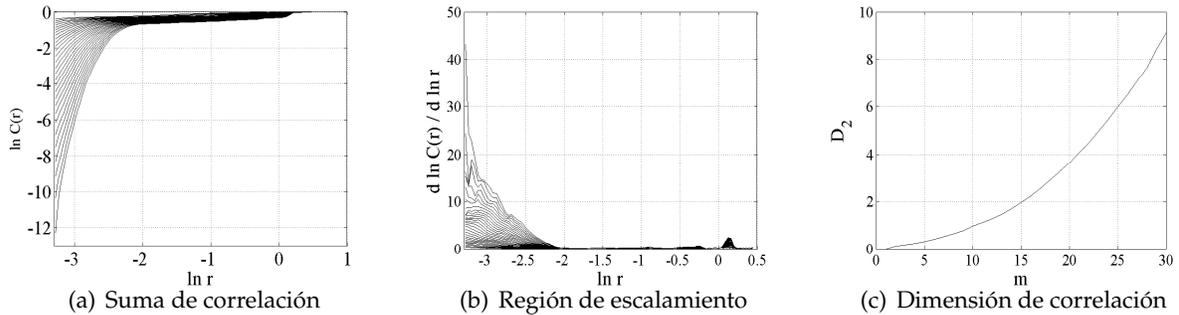


Figura 4.9: Cálculos correspondientes a un sujeto normal. $Fm = 2000$, $\tau = 7$ y m desde 2 a 30.

Las Figuras 4.11 y 4.12 muestran el mismo procedimiento para el ciclo cardíaco muestreado a una tasa mayor (5000 muestras por segundo). El valor de τ obtenido con la función AMI es igual a 15, con el cual, tampoco se puede definir una región de escalamiento clara (Figura 4.11b), mientras que en el caso en que la estimación se realiza con un valor de $\tau = 1$, se observa una meseta en la función $d \ln(C(r)) / d \ln(r)$ vs $\ln(r)$ (Figura 4.12b).

Los datos para la estimación de D_2 vs m en el ciclo cardíaco correspondiente a un sujeto normal, muestreado a 10000 muestras por segundo, se observan en las Figuras 4.13 y 4.14. En este caso, tampoco se presenta un escalamiento bien definido cuando la estimación se realiza utilizando el valor de $\tau = 35$, obtenido con la función AMI (Figura 4.13b), mientras que para $\tau = 1$, se observa una región de escalamiento mejor definida que en el caso donde el ciclo

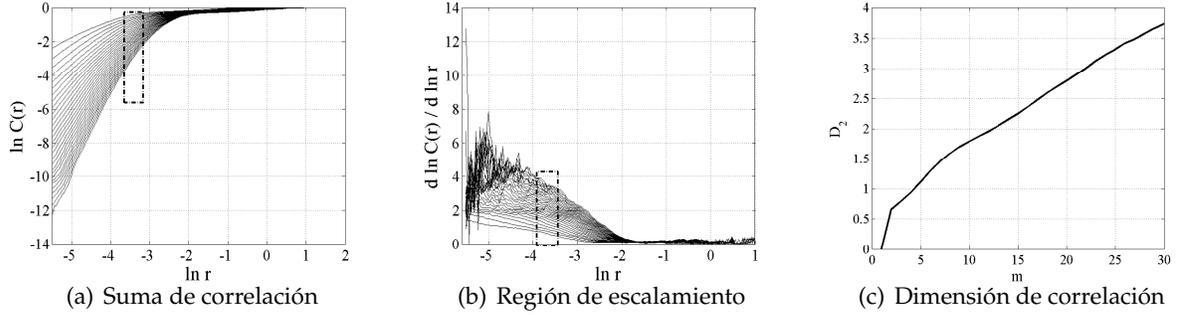


Figura 4.10: Cálculos correspondientes a un sujeto normal. $Fm = 2000$, $\tau = 1$ y m desde 2 a 30.

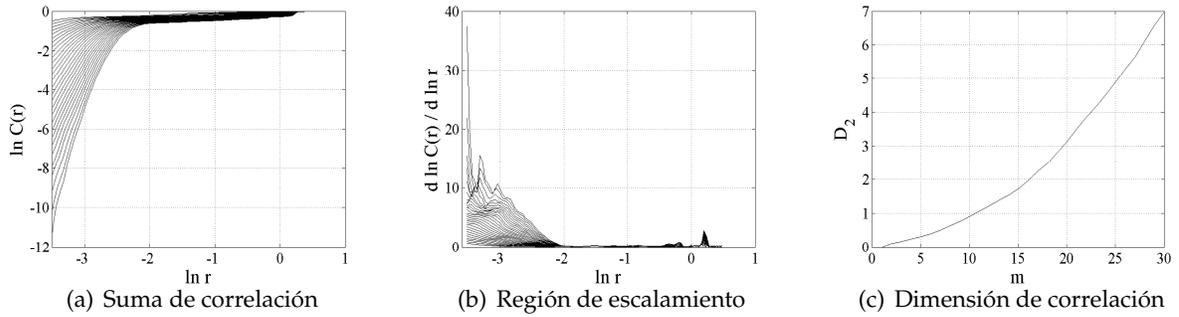


Figura 4.11: Cálculos correspondientes a un sujeto normal. $Fm = 5000$, $\tau = 15$ y m desde 2 a 30.

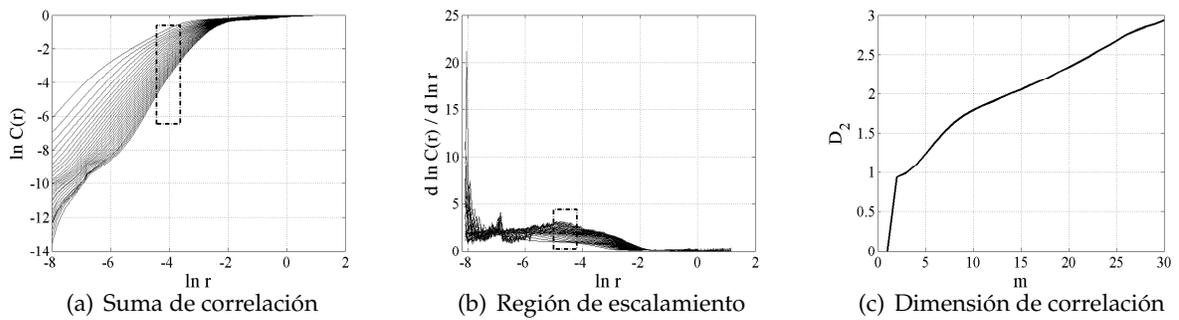


Figura 4.12: Cálculos correspondientes a un sujeto normal. $Fm = 5000$, $\tau = 1$ y m desde 2 a 30.

está muestreado a 5000 muestras por segundo (Figura 4.14b), lo que hace que la evolución de D_2 vs m busque un valor de convergencia de forma más clara.

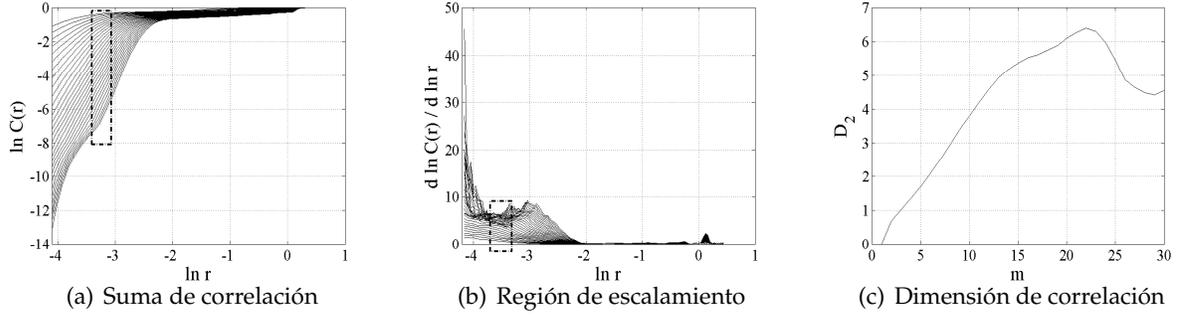


Figura 4.13: Cálculos correspondientes a un sujeto normal. $Fm = 10000$, $\tau = 35$ y m desde 2 a 30.

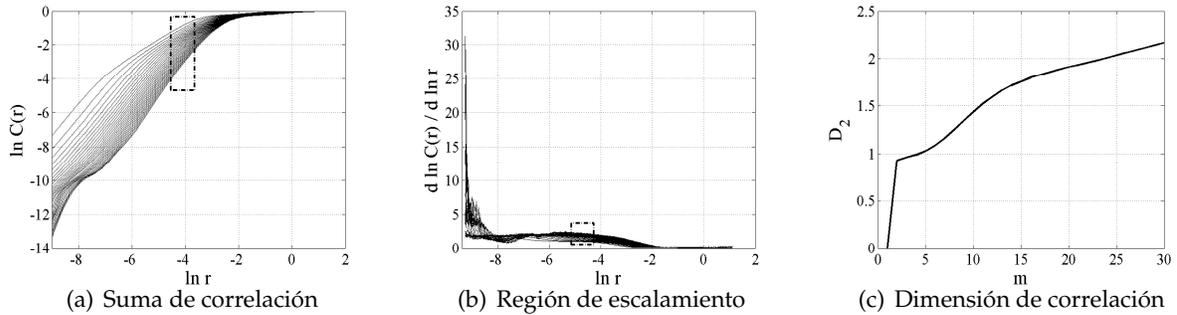


Figura 4.14: Cálculos correspondientes a un sujeto normal. $Fm = 10000$, $\tau = 1$ y m desde 2 a 30.

Las Figuras 4.15 a 4.20 muestran el análisis para el ciclo cardíaco de mínima desviación estándar correspondiente a un paciente o sujeto con anomalías auscultatorias. En todos los casos, es decir, para ciclos muestreados a 2000, 5000, y 10000 muestras por segundo, y para valores de τ iguales a 1, y al valor que se haya obtenido mediante la función AMI, las gráficas de $d \ln(C(r)) / d \ln(r)$ vs $\ln(r)$ presentan regiones de escalamiento más definidas que en los casos de sujetos normales. Sin embargo, el único caso donde existe una evolución congruente del valor de D_2 con respecto a m , se presenta cuando el ciclo está muestreado a 10000 muestras por segundo, con un valor de $\tau = 1$ (Figura 4.20). En todos los casos de la estimación de D_2 para las señales anormales, la región de escalamiento fue detectada de forma automática, previa restricción de la búsqueda de esta región, definiéndose solamente para valores de $\ln(r) < -2.8$, de acuerdo a lo expuesto anteriormente.

La Figura 4.21 muestra el promedio de la estimación de D_2 para cada uno de los ciclos cardíacos analizados, tanto normales como patológicos. El cálculo se realiza utilizando un valor de τ igual a 1, para valores de m desde 2 hasta 50. Se observa que la separabilidad entre clases comienza a ser más notoria para valores de m mayores a 25, lo cual indica que las clases

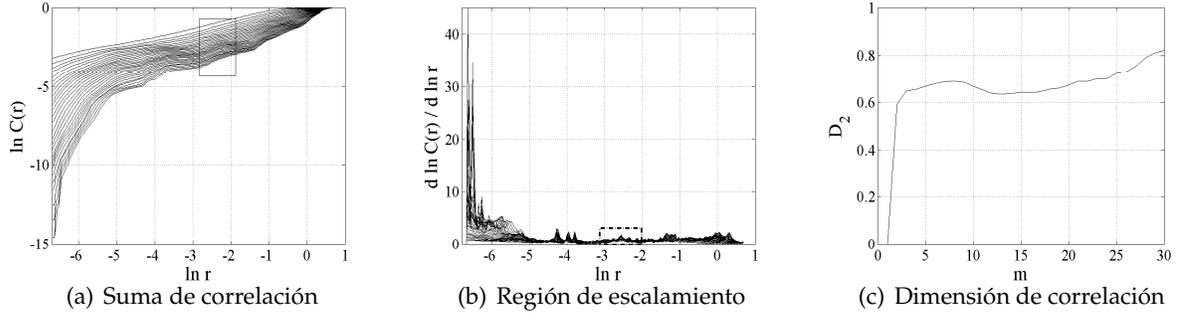


Figura 4.15: Cálculos correspondientes a un paciente. $Fm = 2000, \tau = 6$ y m desde 2 a 30.

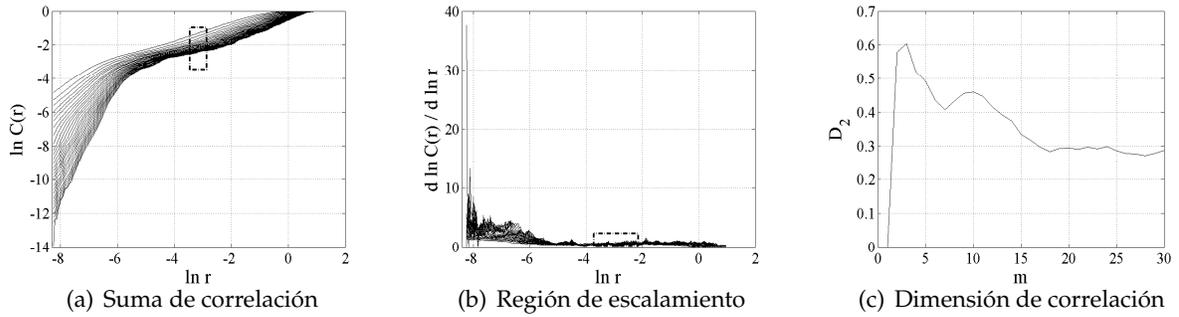


Figura 4.16: Cálculos correspondientes a un paciente. $Fm = 2000, \tau = 1$ y m desde 2 a 30.

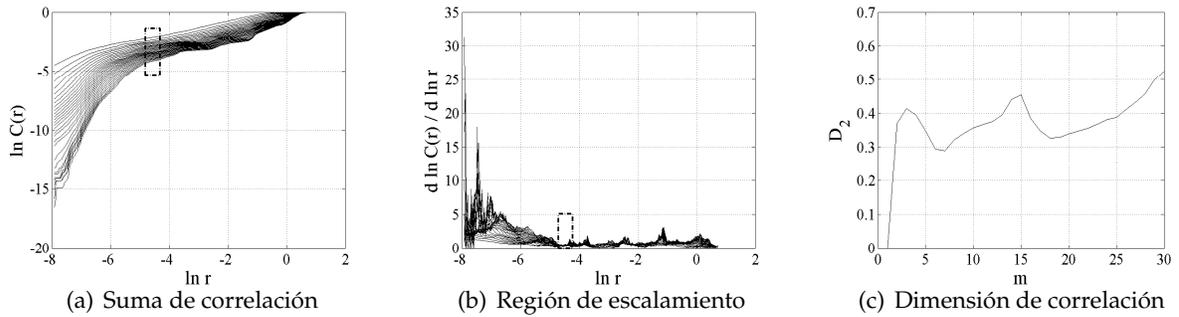


Figura 4.17: Cálculos correspondientes a un paciente. $Fm = 5000, \tau = 11$ y m desde 2 a 30.

son separables cuando las señales FCG se reconstruyen en un espacio de fase altamente dimensional. Cabe anotar, que se utiliza el valor de $\tau = 1$ debido a que facilita la definición

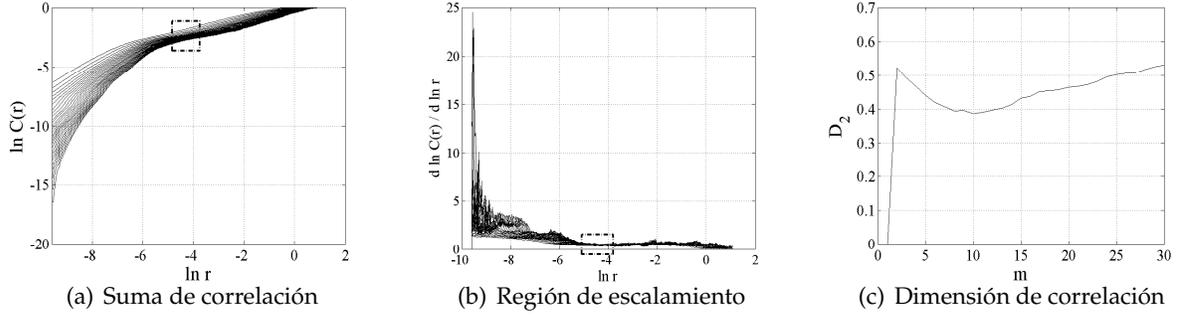


Figura 4.18: Cálculos correspondientes a un paciente. $Fm = 5000$, $\tau = 1$ y m desde 2 a 30.

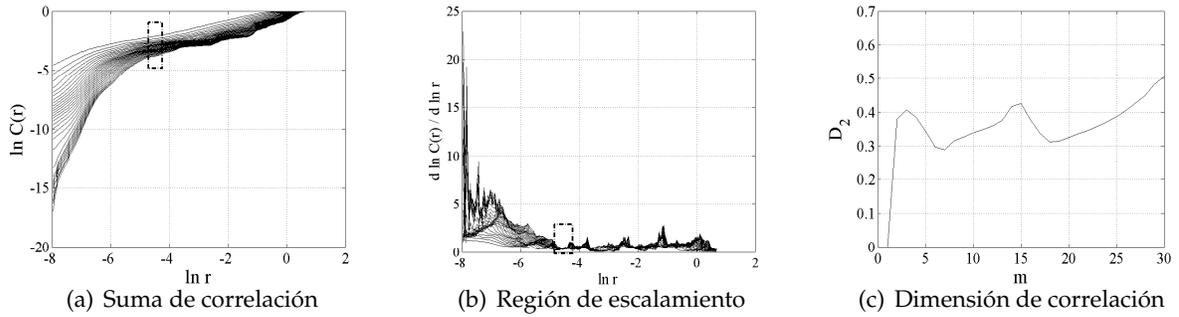


Figura 4.19: Cálculos correspondientes a un paciente. $Fm = 10000$, $\tau = 22$ y m desde 2 a 30.

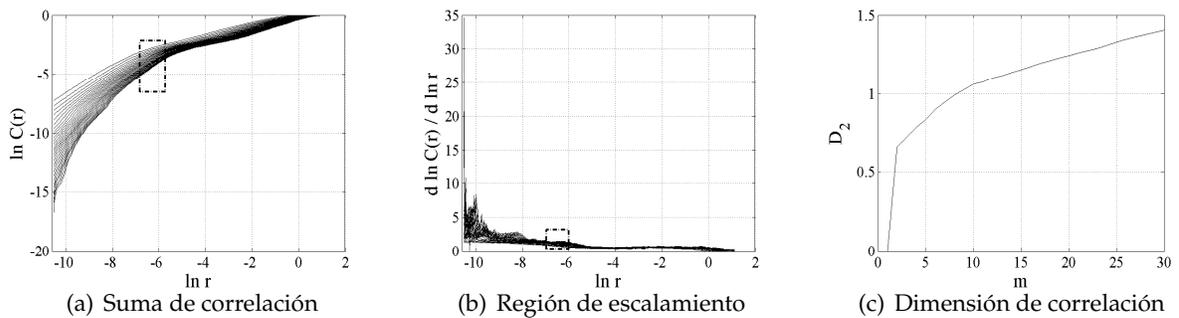


Figura 4.20: Cálculos correspondientes a un paciente. $Fm = 10000$, $\tau = 1$ y m desde 2 a 30.

de la meseta en la función $d \ln (C(r)) / d \ln(r)$, y por consiguiente, el establecimiento de una región de escalamiento clara.

Así mismo, se puede establecer que la complejidad en los datos correspondientes a la clase normal es mayor a la que se presenta en señales patológicas, y por tanto, se describen por un mayor número de variables dinámicas. Esta situación, es similar a la que se presenta en señales electrocardiográficas (ECG), en donde la complejidad también es mayor en casos normales que en casos anormales (cabe recordar, que las señales ECG representan la actividad eléctrica del corazón, mientras que las señales FCG, lo hacen con la actividad mecánica). La Figura 4.29 muestra los valores de D_2 para cada uno de los ciclos de FCG analizados. Se observa que es necesaria la aplicación del *denoising* para hallar separabilidad entre las clases mediante la estimación de D_2 .

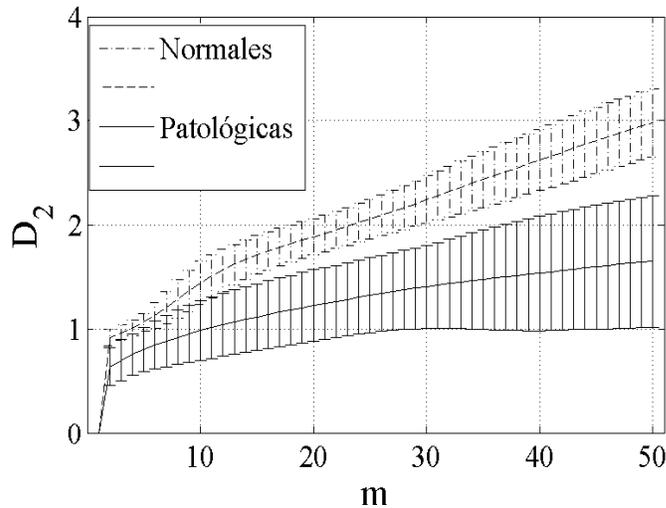


Figura 4.21: Promedio de la estimación de D_2 para los ciclos cardíacos.

Por lo tanto, se muestra que los valores de tiempo de retardo τ , calculados mediante la función AMI, no son adecuados para la estimación de la dimensión de correlación (D_2), asumiéndose que para valores cercanos a estos valores, se presenta la misma situación, ya que pequeños cambios en el valor de τ al estimar D_2 no afectan el resultado de forma significativa. Se observa también que la convergencia de D_2 vs m es más notoria entre menor sea el valor de τ .

De igual manera, se debe tener en cuenta que los ciclos cardíacos no tienen la misma longitud entre sí, ya que dependen de la variabilidad cardíaca de cada paciente, así que la cantidad de datos de cada latido para una tasa de muestreo de 2000 muestras por segundo se encuentra entre 1500 a 1900 datos, mientras que para un muestreo de 10000 muestras por segundo, se tiene entre 7500 y 9500 datos aproximadamente. A 10000 muestras por segundo, se obtiene la convergencia esperada. No obstante, no es conveniente realizar las estimaciones

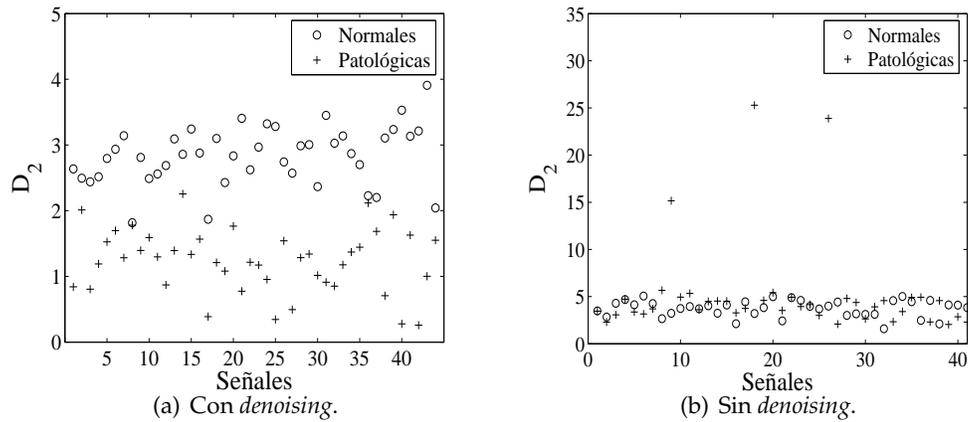


Figura 4.22: Valores de D_2 obtenidos ($m = 50, \tau = 1$ y tasa de muestreo de 10000).

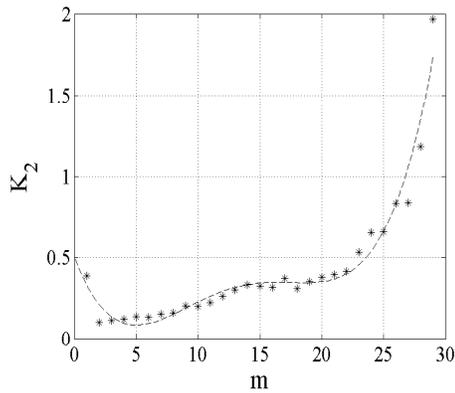
a una tasa de muestreo mayor a 10000, puesto que este hecho implica un alto costo computacional, sin tener certeza de que los resultados en cuanto a separabilidad mejoren de forma significativa.

De acuerdo a lo anterior, las otras características de complejidad se estiman en los ciclos analizados de las señales FCG con un muestreo de 10000 muestras por segundo.

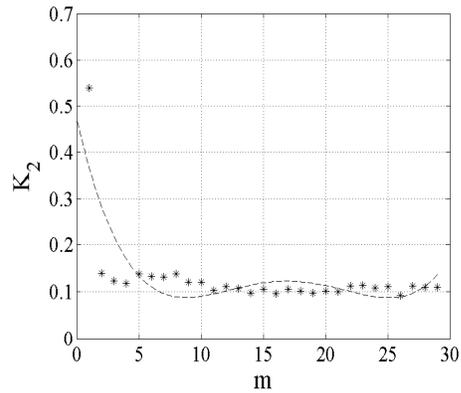
Resultados de la estimación de la entropía de Kolmogorov para las señales FCG. Las Figuras 4.23, 4.24 y 4.25, muestran los resultados de la estimación de K_2 para el ciclo cardíaco con menor dispersión correspondiente a la señal FCG de un sujeto normal, en donde se observa que la estimación realizada con un valor de $\tau = 1$ presenta la convergencia necesaria para determinar el valor de la entropía de Kolmogorov (Figuras 4.23b, 4.24b y 4.25b). Para las figuras correspondientes al análisis de K_2 , los signos * representan los puntos donde se estima el cálculo, y la líneas discontinuas indican la regresión hecha para ubicar la convergencia de los puntos. Este efecto es más notorio cuando el ciclo está muestreado a 10000 muestras por segundo (Figura 4.25b).

Las Figuras 4.26 a 4.28 muestran el análisis de K_2 para el ciclo cardíaco con menor dispersión de una señal FCG correspondiente a un paciente o sujeto con anomalías auscultatorias. Se observa que el valor en la convergencia de K_2 disminuye con respecto al caso de la señal del sujeto normal. Adicionalmente, la convergencia también es más notoria cuando se realiza la estimación con valores de $\tau = 1$. La Figura ?? muestra los valores de K_2 para cada uno de los ciclos de FCG analizados. Al igual que en el caso de la estimación de D_2 , la aplicación del *denoising* facilita la separabilidad entre clases.

La Figura 29(a) indica que la impredecibilidad en las señales normales es mayor en las señales patológicas. Así mismo, el resultado confirma la naturaleza caótica de las señales FCG, tanto normales como patológicas, dado que esta condición exige que $0 < K_2 < \infty$. No

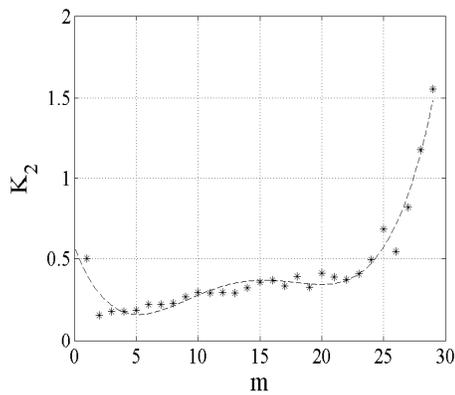


(a) K_2 con $\tau = 7$, obtenido mediante la función AMI.

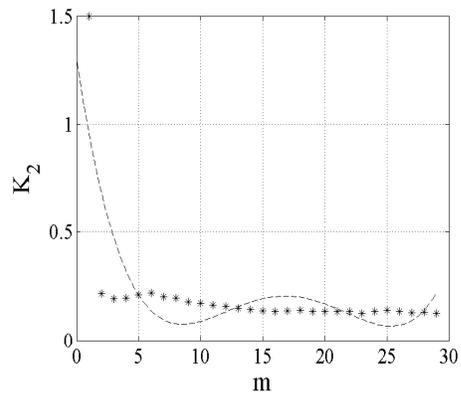


(b) K_2 con $\tau = 1$

Figura 4.23: Cálculos correspondientes a un sujeto normal. $Fm = 2000$.



(a) K_2 con $\tau = 15$, obtenido mediante la función AMI.



(b) K_2 con $\tau = 1$

Figura 4.24: Cálculos correspondientes a un sujeto normal. $Fm = 5000$.

obstante, la impredecibilidad cuantificada mediante la estimación de K_2 es baja, dado que los resultados para ambas clases, normal y patológico, están cercanos a un valor de 0.

Al igual que en el caso de la estimación de D_2 , el valor de τ adecuado para la obtención de los valores de K_2 sigue siendo 1, ya que permite establecer una convergencia de éste índice con respecto a la dimensión de inmersión m , aunque es posible obtener esta convergencia en las señales patológicas tanto para valores de $\tau = 1$, como para los obtenidos mediante la función AMI.

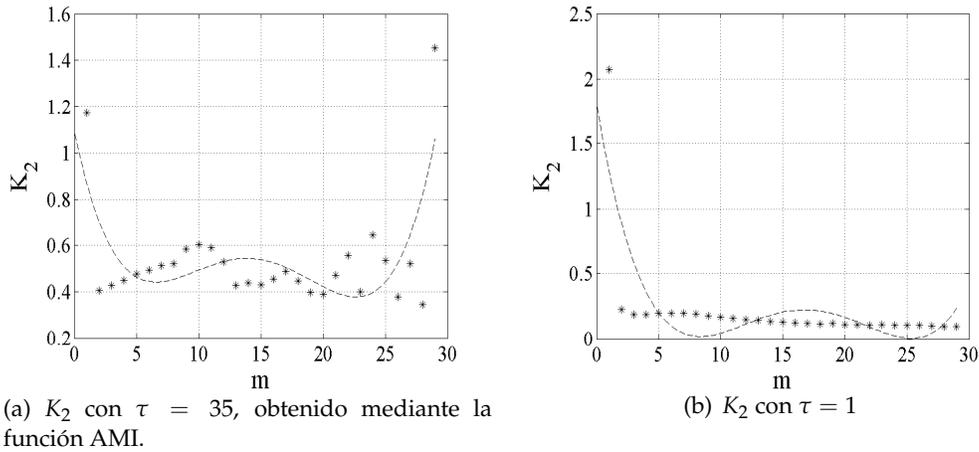


Figura 4.25: Cálculos correspondientes a un sujeto normal. $Fm = 10000$.

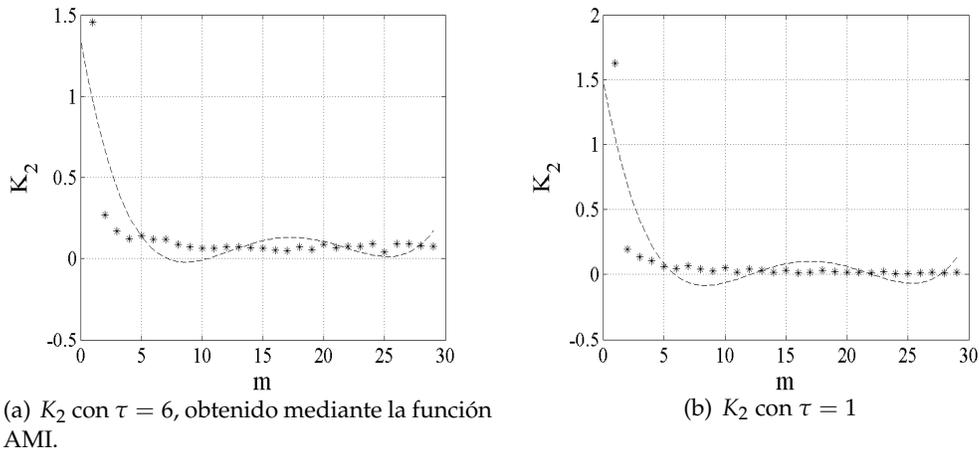


Figura 4.26: Cálculos correspondientes a paciente. $Fm = 2000$.

Resultados de la estimación del máximo exponente de Lyapunov para las señales FCG. Las Figuras 4.30 a 4.32 muestran los resultados de la evolución en la separación de las trayectorias con respecto al aumento de la ventana temporal, según la Ec. (59) (representada por las líneas continuas), tanto para un valor de $\tau = 1$ como para el obtenido mediante la función AMI, para el ciclo cardíaco con la mínima desviación estándar correspondiente a la señal FCG de un sujeto sin anomalías auscultatorias. La regresión lineal, denotada por la Ec. (60), se representa por las líneas discontinuas, y las regiones con signos * indican los valores de n que se tomaron para hacer la regresión lineal.

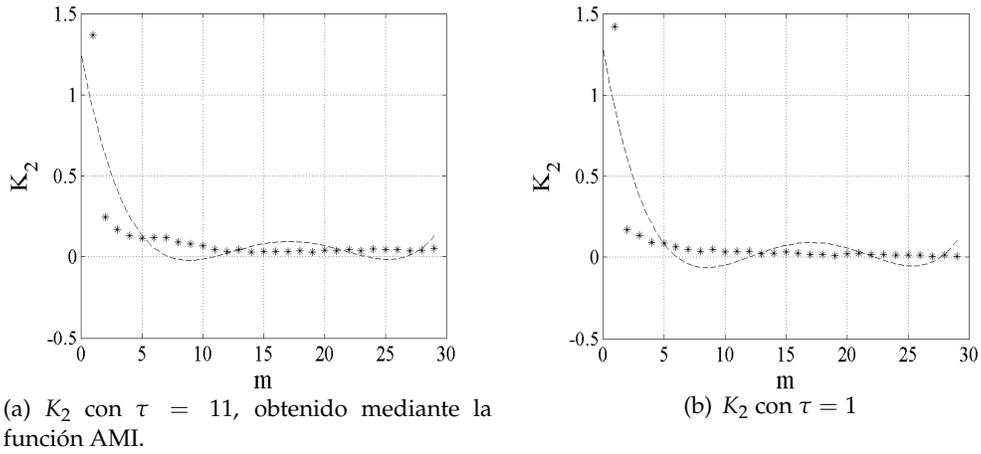


Figura 4.27: Cálculos correspondientes a un paciente. $Fm = 5000$.

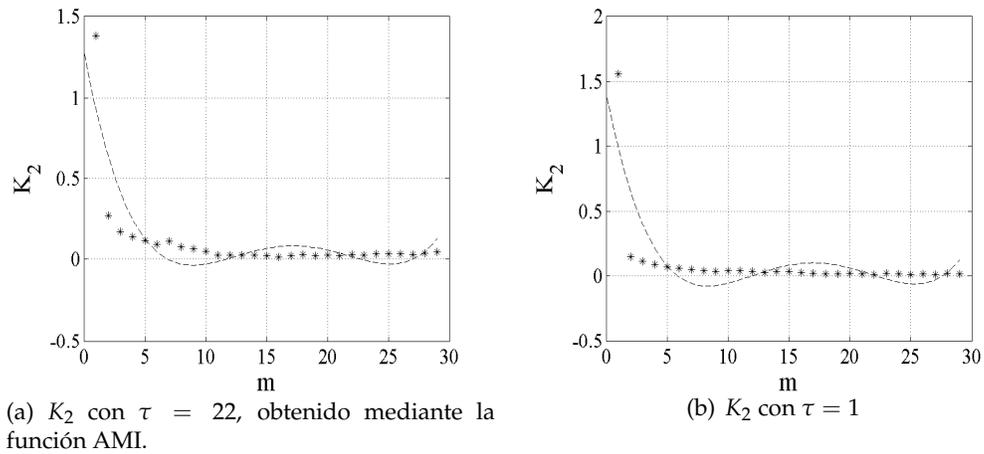


Figura 4.28: Cálculos correspondientes a un paciente. $Fm = 10000$.

Las Figuras 4.33 a 4.35 muestran el mismo análisis para el ciclo cardíaco correspondiente a la señal FCG de un paciente o sujeto con anomalías auscultatorias. Se observa que la pendiente de la estimación de $\ln \mathbf{u}_j(\Delta n)$ vs n en el ciclo cardíaco de la señal normal es mayor que en la señal anormal.

La Figura 4.36 muestra los promedios de la estimación de λ_1 para los ciclos de menor desviación estándar, correspondientes a todas las señales normales y patológicas de la base de datos analizada. El muestreo utilizado es de 10000 muestras por segundo, para valores

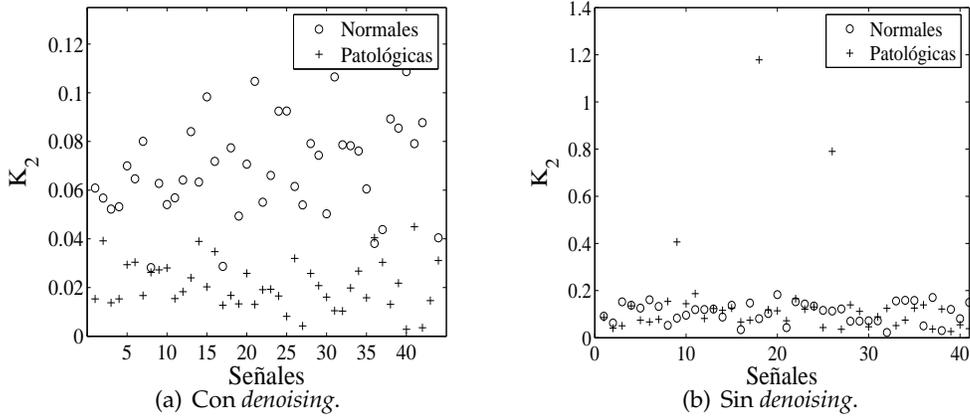


Figura 4.29: Valores de K_2 obtenidos ($m = 50$, $\tau = 1$ y tasa de muestreo de 10000).

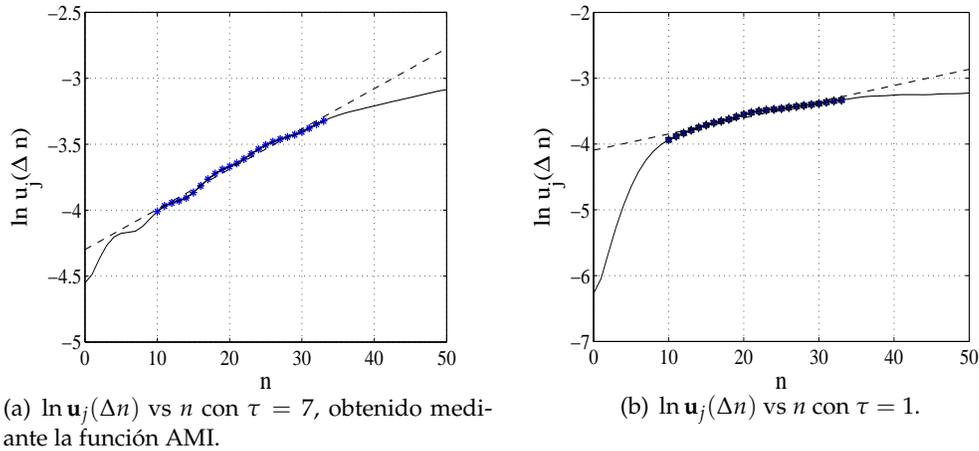
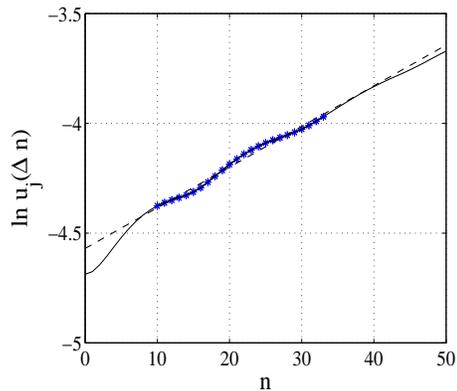


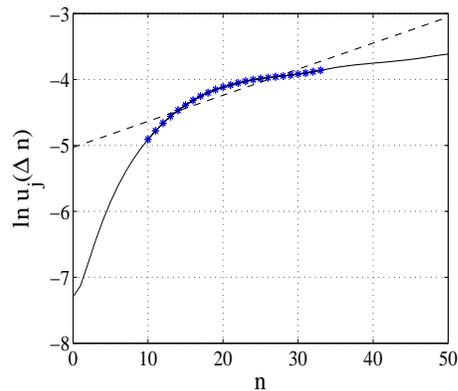
Figura 4.30: Cálculos correspondientes a un sujeto normal. $Fm = 2000$.

de τ de 1, 2 y 3, y en valores de m iguales a 5, 10, 15, 20, 25 y 30. Se observa que la impredecibilidad en señales normales es mayor que en las señales patológicas, lo cual se asocia a los resultados en la estimación de K_2 (Figura 29(a)).

La Figura 4.37a muestra los valores de λ_1 para cada uno de los ciclos de FCG analizados, los cuales son positivos pero muy cercanos a cero, indicando que el comportamiento de la dinámica en señales FCG, tanto normales como patológicas, se aproxima a un sistema de ciclo límite marginalmente estable. No obstante, son resultados que se esperan en este tipo de señales, ya que en datos correspondientes a señales ECG, también se obtienen valores de λ_1 positivos pero cercanos a 0. El hecho de no aplicar el *denoising* antes de la estimación de λ_1 , causa un leve cambio en la separabilidad entre clases (Figura 4.37b).

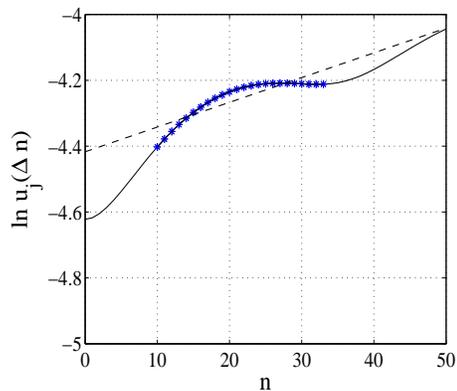


(a) $\ln \mathbf{u}_j(\Delta n)$ vs n con $\tau = 15$, obtenido mediante la función AMI.

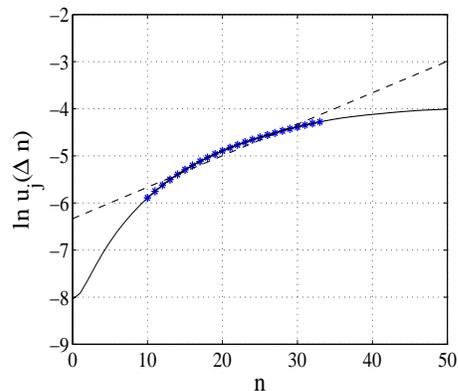


(b) $\ln \mathbf{u}_j(\Delta n)$ vs n con $\tau = 1$.

Figura 4.31: Cálculos correspondientes a un sujeto normal. $Fm = 5000$.



(a) $\ln \mathbf{u}_j(\Delta n)$ vs n con $\tau = 35$, obtenido mediante la función AMI.



(b) $\ln \mathbf{u}_j(\Delta n)$ vs n con $\tau = 1$.

Figura 4.32: Cálculos correspondientes a un sujeto normal. $Fm = 10000$.

Adicionalmente, se observa a partir de la Figura 4.36a, que aunque el valor de $\tau = 1$ para el cálculo de λ_1 sigue siendo el más adecuado (dada la mayor separabilidad que proporciona, al menos desde el punto de vista cualitativo) el valor de m no necesita ser tan alto como en el caso de la estimación de D_2 , sino que con un valor de $m = 5$ es suficiente para obtener tal separabilidad, lo cual es conveniente desde el punto de vista de costo computacional, ya que éste se incrementa conforme lo hace m .

De otro lado, en las Figuras 4.36a, 4.36b y 4.36c, se observa que en valores de m elevados la separabilidad entre las clases disminuye junto con sus niveles de impredecibilidad. Si se compara estos resultados con los obtenidos en la estimación de D_2 para cada una de las

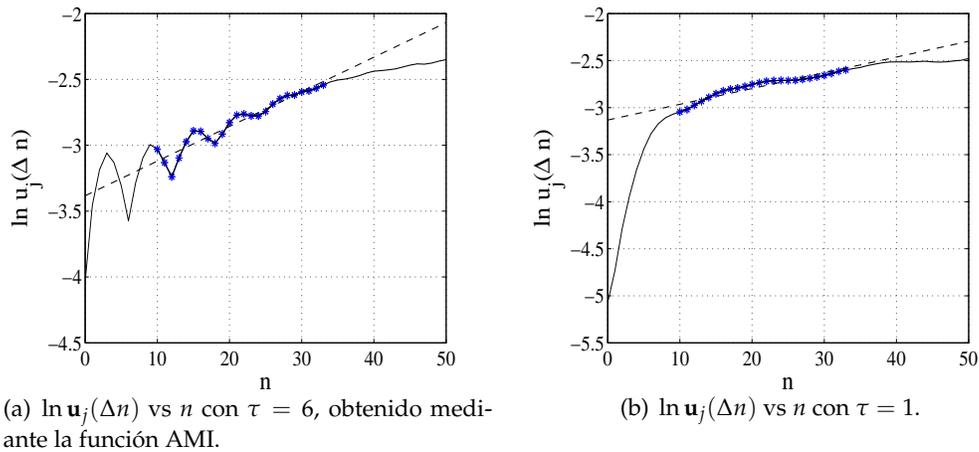


Figura 4.33: Cálculos correspondientes a un paciente. $Fm = 2000$.

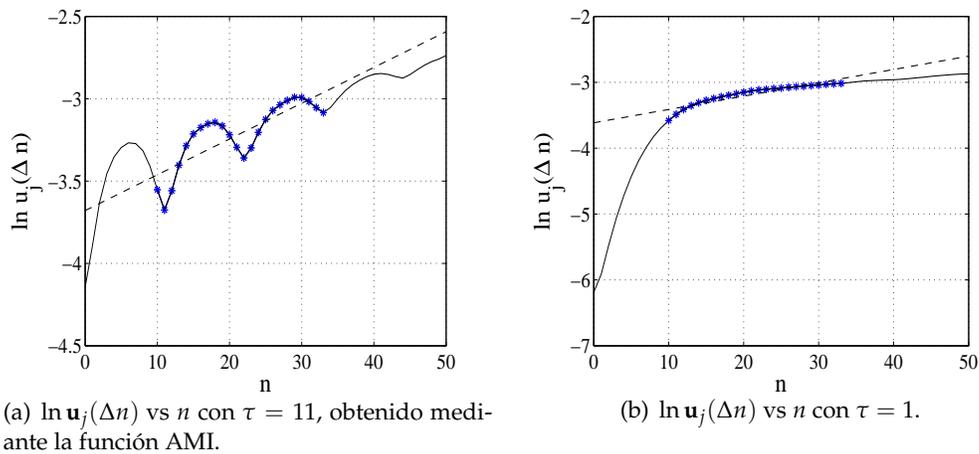


Figura 4.34: Cálculos correspondientes a un paciente. $Fm = 5000$.

clases, se puede deducir que cuando se reconstruyen las señales FCG en un espacio de fase altamente dimensional, su complejidad aumenta, pero el caos disminuye.

Resultados de la estimación del exponente de Hurst para las señales FCG. La Figura 4.38 muestra las pendientes generadas por la relación $R(N)/\sigma(N)$ para el ciclo cardíaco de mínima desviación, correspondiente a una señal normal y un patológica, muestreadas a 10000 muestras por segundo.

La Figura 4.39 muestra los valores de H para cada uno de los ciclos de FCG analizados, indicando la diferencia en la estimación cuando no se aplica el *denoising* (Figura 4.39b). Los valores de H para ambas clases, normal y patológica, son mayores a 0.5, indicando que los

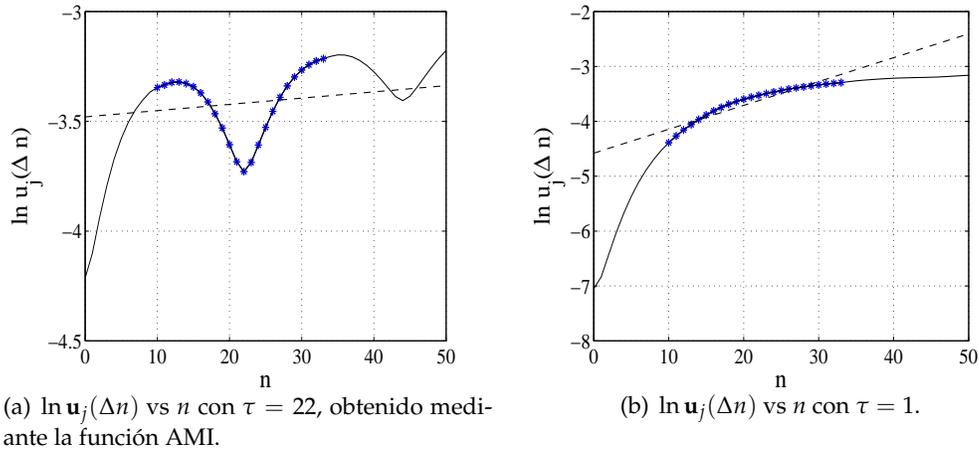


Figura 4.35: Cálculos correspondientes a un paciente. $Fm = 10000$.

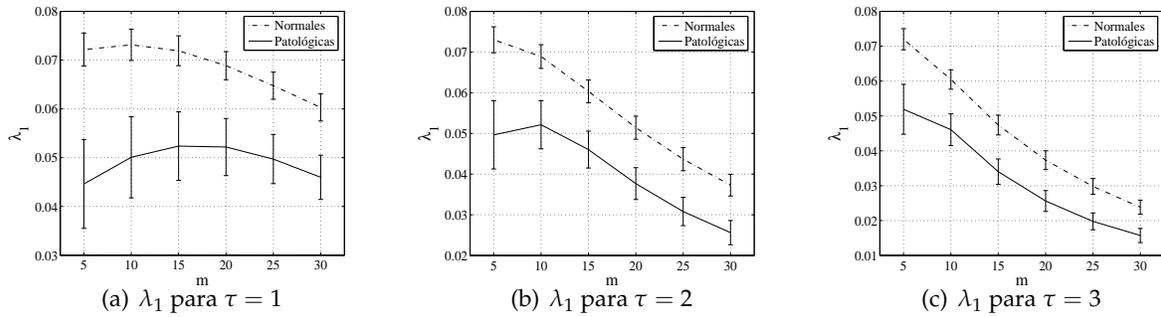


Figura 4.36: Cálculos de λ_1 .

ciclos de FCG analizados son predecibles a largo plazo, ya que las tendencias del pasado permanecen en el futuro. En otras palabras, las señales FCG son de carácter determinístico, y no estocástico. La Tabla 4.2 indica los valores promedio calculados para cada clase. Se observa que la aplicación del *denoising* no implica una mayor separabilidad entre las clases mediante la estimación del exponente de Hurst.

	Normales	Patológicas
Con <i>denoising</i>	0.64639 ± 0.0285	0.62333 ± 0.0426
Sin <i>denoising</i>	0.63722 ± 0.0267	0.60298 ± 0.0478

Tabla 4.2: Resultados promedio para el cálculo del exponente de Hurst

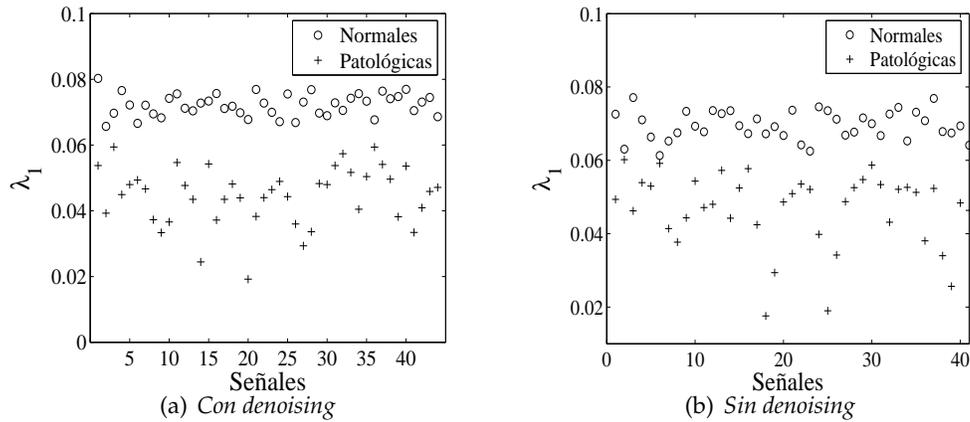


Figura 4.37: Valores de λ_1 obtenidos ($m = 5$, $\tau = 1$ y tasa de muestreo de 10000).

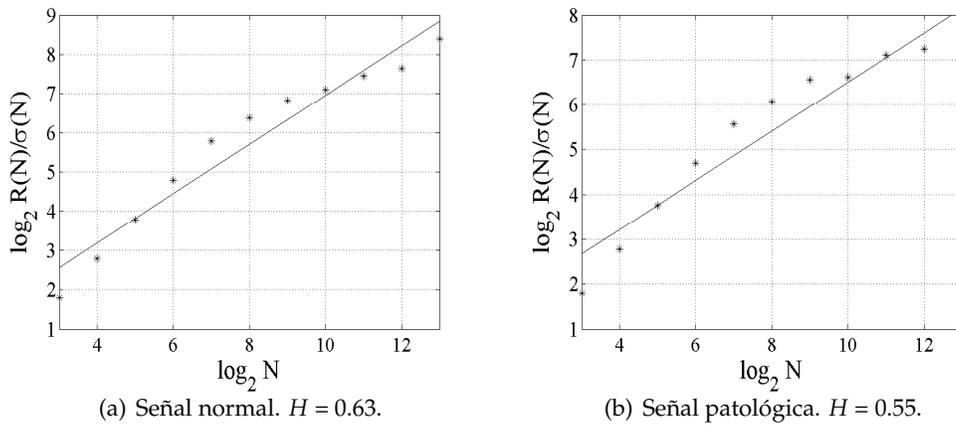


Figura 4.38: Valores de H para el ciclo de una señal normal y un patológica.

Resultados de la estimación de la complejidad Lempel–Ziv para las señales FCG. La Figura 4.40 muestra los valores de complejidad LZ para cada uno de los ciclos de FCG analizados, y la Tabla 4.3 presenta los valores promedio calculados para cada clase, normal y patológica. A diferencia de la caracterización hecha mediante el exponente de Hurst, en el caso de la complejidad LZ si existe una diferencia significativa entre las clases, siempre y cuando las señales hayan sido procesadas previamente con *denoising* (Figura 4.40a).

Según la Figura 4.40, la complejidad algorítmica que tendría que presentar una simulación capaz de representar fielmente una señal FCG patológica, es mayor a la que se necesita para representar una señal normal. Los valores cercanos a 0, tanto para señales normales, como para las patológicas, indica que ambas clases son predecibles, según lo expuesto en la

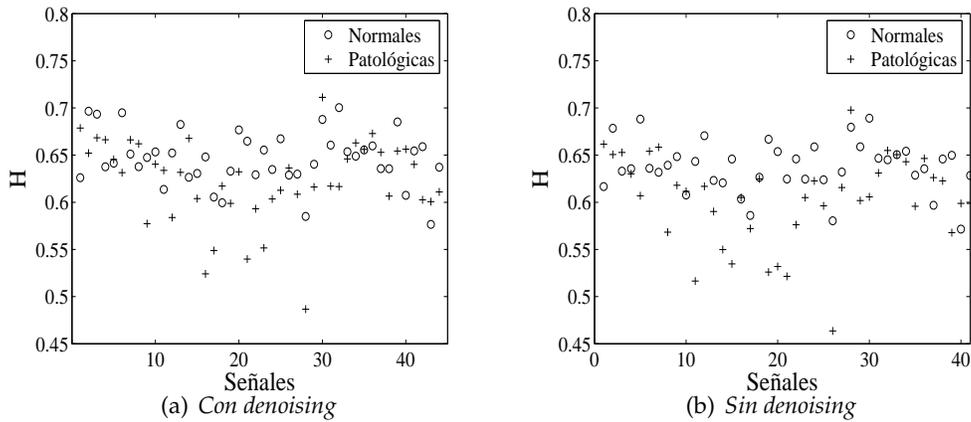


Figura 4.39: Valores de H obtenidos.

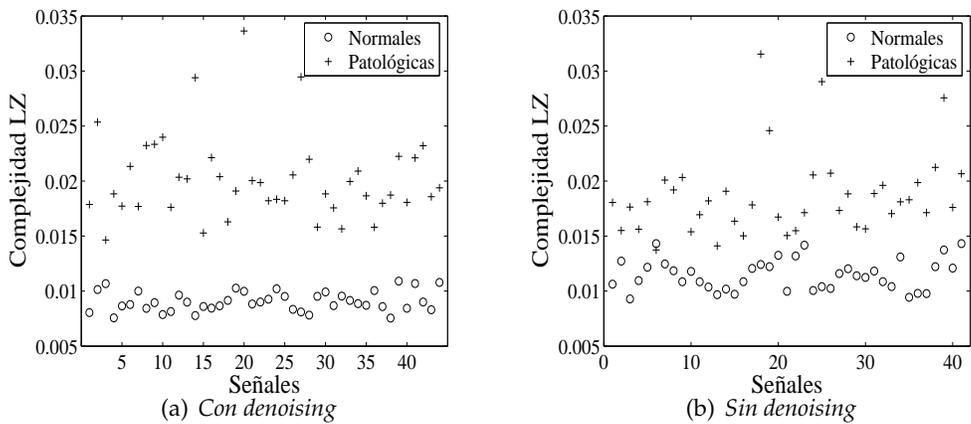


Figura 4.40: Valores de complejidad LZ obtenidos.

	<i>Normales</i>	<i>Patológicas</i>
<i>Con denoising</i>	0.0090595 ± 0.0009086	0.020132 ± 0.0038
<i>Sin denoising</i>	0.0114767 ± 0.0013992	0.018675 ± 0.0037

Tabla 4.3: Resultados promedio para el cálculo de la complejidad LZ

sección 1.2.3. Esta situación, es acorde y congruente con los resultados en las estimaciones de las demás características de complejidad: dimensión de correlación (D_2), entropía de Kolmogorov (K_2), máximo exponente de Lyapunov (λ_1) y exponente de Hurst (H).

Balaceo de las matrices de características resultantes. Se realiza el balanceo de las matrices de características estimadas, basadas en medidas de complejidad y las que obtienen

por análisis acústico. A partir de la observación de la Figura 22(a), se escogen 5 registros patológicos, que debido al ruido de estimación, no presentan separabilidad con respecto a la clase normal, para que ambas matrices de características de complejidad queden con 44 observaciones. Como se mencionó en la sección 3.3.3, se presentan errores al estimar las características acústicas y de representación en 3 de los 44 registros normales, por lo que se remueven otros 3 registros de la matriz de características basadas en medidas de complejidad para las señales patológicas. De esta manera, se obtienen dos matrices de características, cada una de tamaño 41×5 para cada clase, normal y patológica, tanto para las que resultan del análisis de complejidad, como para las que resultan del análisis acústico.

4.4. Resultados en el cálculo de las características acústicas y de representación

Después del preproceso de los datos, se realiza la selección efectiva de características mediante prueba de hipótesis univariada y análisis de correlación, con la cual se obtiene solamente una característica discriminante, que corresponde al *coeficiente de variación de la relación armónica al ruido* (HNRcvar) (sección 3.3.1) y que hace parte del grupo de características acústicas (Figura 4.41a). Este hecho, indica que los algoritmos para estimación de características de representación matemática, tales como el *cepstrum*, los coeficientes de predicción lineal, y la transformada wavelet, desarrollados para caracterización de señales de voz, no son adecuados para establecer criterios de separabilidad entre señales FCG normales y patológicas. Adicionalmente, el resultado indica que las componentes de frecuencia correspondientes a los soplos, causado por el flujo turbulento de sangre en presencia de valvulopatías cardíacas, tienen características de ruido aditivo en las señales FCG.

Al realizar el análisis acústico sin la aplicación previa del *denoising*, las características resultantes para la clasificación son las siguientes:

- Fo: Frecuencia central
- HNRcvar: Coeficiente de variación de la relación armónica al ruido
- Zno: Número de cruces por cero
- LPmax: Máximo de la predicción lineal
- mfcc(11): Coeficiente central en la escala de mel 11

Nuevamente, se observa que estas medidas corresponden al grupo de características acústicas, es decir, que cuando no se aplica *denoising* antes de realizar la estimación, las características de representación tampoco son adecuadas para la clasificación. De otro lado, a pesar que una de las características seleccionadas también es el coeficiente de variación de la relación armónica al ruido (HNRcvar), la separabilidad entre las clases se pierde a causa de no aplicar el *denoising* en los ciclos de las señales FCG (Figura 4.41b).

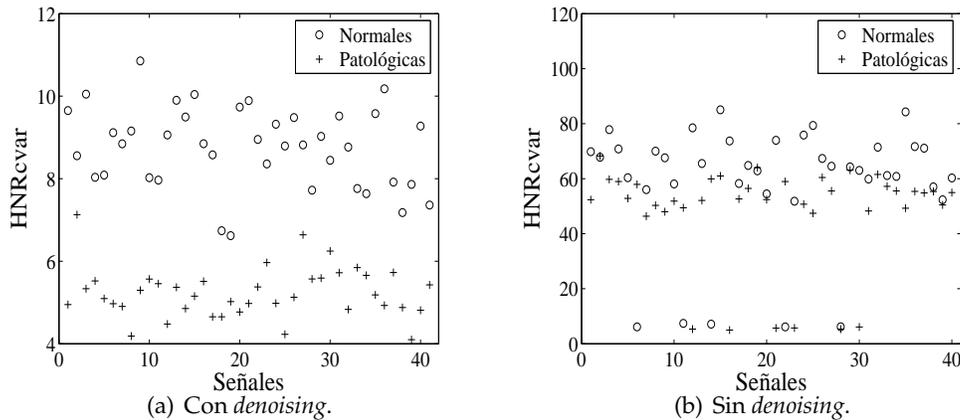


Figura 4.41: Estimación del coeficiente de la variación de la relación armónica al ruido.

4.5. Resultados de clasificación

La tabla 4.4 muestra los porcentajes en la precisión de clasificación según los métodos utilizados en la caracterización: análisis acústico y técnicas de dinámica no lineal. Se puede apreciar la elevada precisión de clasificación generada por las técnicas de caos.

	Precisión de clasificación
Características acústicas con <i>denoising</i>	98.78 %
sin <i>denoising</i>	86.25 %
Características de complejidad con <i>denoising</i>	99.90 %
sin <i>denoising</i>	97.56 %

Tabla 4.4: Porcentajes de precisión de clasificación.

4.6. Extensiones futuras

En cuanto a las extensiones futuras, se presentan las siguientes:

- Se espera profundizar en la caracterización de medidas subjetivas acústicas, por ejemplo, la intensidad, tono y timbre. Estas medidas son sugerencias del personal médico, quienes las emplean para diferenciar soplos causados por diferentes valvulopatías cardíacas (estenosis e insuficiencia, que pueden ser de tipo mitral, valvular, tricuspídea o mitral). Sin embargo, el desarrollo de estas medidas supone la reconstrucción de la actual base de datos, dadas su restricciones anteriormente indicadas.
- En cuanto a las medidas de complejidad, se propone, realizar la caracterización con casos más específicos de anormalidad, por ejemplo, diferentes tipos particulares de valvulopatías, como los soplos sistólicos causados por insuficiencia mitral

- o diastólicos causados por estenosis aórtica. Probablemente, en estos escenarios se facilite algún tipo de explicación fisiológica.
- Sin embargo, una de las restricciones a suplir de manera inmediata, consiste en la adecuación y desarrollo de un protocolo de medida en forma de una nueva base de datos de señales FCG.

5. Conclusiones

- Las medidas de análisis de complejidad aplicadas a señales FCG permiten diferenciar entre estados funcionales normal y patológico, éstos últimos correspondientes a la presencia de soplos causados por valvulopatías cardíacas. A pesar del costo computacional que demanda estos procedimientos, la separabilidad que proporcionan entre las clases analizadas, normal y patológica, es mayor a la que se obtiene mediante el análisis acústico.
- Las medidas de análisis acústico, específicamente las características acústicas que estiman la cantidad de ruido aditivo en las señales FCG, son útiles para diferenciar entre señales normales y con presencia de soplos, mientras que las características de representación no son adecuadas para tal efecto por no presentar indicios de separación entre clases. La ventaja en la aplicación de este análisis radica en que el costo computacional es menor con respecto al requerido por las medidas de complejidad.
- La atenuación de perturbaciones acústicas con la técnica de *denoising* implementada en este trabajo, mediante descomposición y reconstrucción utilizando transformada wavelet discreta y umbralización adaptativa, mejora las condiciones de perceptibilidad auditiva de las señales FCG. Su valor se encuentra en el punto de vista semiológico, ya que se atenúa componentes acústicas que no corresponden a información clínica, sin deteriorar las características auditivas de los sonidos cardíacos, el cual es un tipo de análisis que no se encuentra descrito en la literatura. Adicionalmente, el *denoising* aplicado a señales FCG incrementa la separabilidad de las clases, tanto en el análisis acústico como en el análisis de complejidad, permitiendo obtener precisiones de clasificación mayores al 98 %.
- El acceso a bases de datos de señales FCG acondicionadas para el entrenamiento de sistemas automatizados no es suficiente, por lo que el trabajo exigió la creación de una base de registros normales propia. Aunque también se encontraron bases de datos de acceso libre en Internet, éstas no estaban lo suficientemente comentadas.
- La metodología implementada para la detección de estados funcionales en FCG es efectiva para la detección de estados funcionales normal (ruidos cardíacos) y anormal (soplos cardíacos), presentando un alto poder discriminante entre éstas clases de acuerdo a la capacidad de las medidas aplicadas para establecer márgenes de separabilidad entre casos normales y patológicos.

Bibliografía

- [1] B. Ergen and Y. Tatar, "Optimal continuous wavelet analysis of phonocardiogram signals," *IJCI Proceedings of International Conference on Signal Processing*, vol. 1, no. 2, pp. 188–192, September 2003.
- [2] B. Ergen and Y. Tatar, "Optimal continuous wavelet analysis of periodograms signals," *IJCI Proceedings of International Conference on Signal Processing*, vol. 1, no. 2, September 2003.
- [3] P. Guillén, M. Vallverdú, R. Rojas, D. Jugo, H. Carrasco, and P. Caminal, "Dinámica no lineal para caracterizar la variabilidad del ritmo cardíaco en pacientes chagásicos," *Memorias II Congreso Latinoamericano de Ingeniería Biomédica, CORAL2001*, Mayo 2001.
- [4] A. Agostini, L. Gamero, and P. Rumi, "Aplicación clínica de la biblioteca de funciones vflab para el análisis de la variabilidad de la frecuencia cardíaca," *XVII Congreso brasileiro de ingeniería biomédica (Florianópolis, Santa Catarina, Brasil)*, 2000.
- [5] F. Beckers, D. Ramaekers, and A. Aubert, "Gender-related differences in nonlinear indices of heart rate variability," *II Congreso Latinoamericano de ingeniería Biomédica, Habana 2001*, Mayo 2001.
- [6] I. Servan, M. Asyali, G. Celebi, and M. Pehlivan, "Nonlinear analysis of heart rate variability."
- [7] G. Ewing, "A new approach to the analysis of third heart sound," Master's thesis, University of Adelaide, 1989.
- [8] F. Ojeda and G. Castellanos, "Extracción de características usando transformada wavelet en la identificación de voces patológicas," Universidad Nacional de Colombia. Sede Manizales, 2003, grupo de Control y Procesamiento Digital de Señales.
- [9] H. Liang, S. Lukkarinen, and I. Hartimo, "Heart sound segmentation algorithm based on heart sound envelopogram," *Proceedings of Computers in Cardiology*, vol. 24, pp. 105–108, 1997.
- [10] M. Santos and M. Souza, "Detecção da primeira e segunda bulhas (s1 e s2) dos sons cardíacos através de análise tempo-frequência," *Anais do CBEB'2000*, 2000.
- [11] B. Ergen and Y. Tatar, "Time-frequency analysis of phonocardiogram," *MEASUREMENT 2003, Proceedings of the 4th International Conference, Smolenice, Slovak Republic*, 2003.
- [12] F. C. Jandre and M. N. Souza, "Wavelet analysis of phonocardiograms: Differences between normal and abnormal heart sounds," *19th International Conference IEEE/EMBS. Chicago IL. USA*, 1997.

- [13] N. Srinivasan, M. Wong, and S. Krishnan, "A new phase space analysis algorithm for cardiac arrhythmia detection," *Proc. IEEE/EMBS International conference, Mexico.*, 2003.
- [14] M. Akay, *Time frequency and wavelets in biomedical signal processing*. IEEE press series in Biomedical Engineering, 1998.
- [15] G. S. Mallat, "Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $\mathcal{L}^2(\mathcal{R})$," *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 315, no. 1, pp. 69–87, 1989.
- [16] W. G. O. B. Pressure and H. R. V. E. S. of Hypertension, "Terms used in time series analysis of cardiovascular data." [Online]. Available: <http://www.cbi.dongnocchi.it/glossary/Home.html>
- [17] L. Debnath, *Wavelet Transforms and Their Applications*. Birkhäuser, 2002.
- [18] F. Auger, P. Flandrin, P. Goncalves, and o. Lemoine, "Time frequency toolbox for use with matlab, tutorial," CNRS(France), Rice University (USA), 1996.
- [19] MathWorks, "Wavelet toolbox: User's guide - version 2. for use with matlab, the math-works, inc., natick, ma,," 2000.
- [20] S. Mallat, "Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$," *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 315, no. 1, pp. 69–87, 1989.
- [21] Y. Meyer, "Wavelets: Algorithms and applications," *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 1993.
- [22] H. Kantz and T. Schreiber, *Nonlinear Time Series Analysis*, ser. 7. USA: Cambridge Nonlinear Science, 2002.
- [23] T. S. Parker and L. O. Chua, "Chaos: A tutorial for engineers," in *IEEE Proceedings*, vol. 75, 1987, pp. 982–1008.
- [24] B. Henry, N. Lovell, and F. Camacho, *Nonlinear dynamics time series analysis*, M. Akay, Ed. IEEE Press Series on Biomedical Engineering, 2001, vol. II.
- [25] H. D. I. Abarbanel, *Analysis of Observed Chaotic Data*. Springer, N.Y., 1996.
- [26] R. Mañé, D. Rand, and L. Young, *Dynamical systems and turbulence*, B. Springer, Ed. Warwick 1980, 1981.
- [27] J. Eckman and D. Ruelle, "Ergodic theory of chaos and strange attractors," *reviews of modern physics*, vol. 57, no. 617, 1985.
- [28] M. Casdagli, T. Sauer, and J. Yorke, "Embedology," *J. Stat. Phys.*, vol. 65, no. 579, 1991.
- [29] R. Hegger, H. Kantz, and T. Schreiber, "Practical implementation of nonlinear time series methods: The tisean package," *arXiv:chao-dyn/9810005*, September 1998.
- [30] H. Kantz, J. Kurths, and G. Mayer-Kress, *Nonlinear Analysis of Physiological Data*. New York. USA: Springer, 1998.
- [31] Y. Almog, O. Oz, and S. Akselrod, "Correlation dimension estimation: Can this non-linear description contribute to the characterization of blood pressure control in rats?" *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 46, no. 5, pp. 535–547, 1999.
- [32] P. Grassberger and I. Procaccia, "Characterization of strange atractors," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 50, pp. 346–349, 1983.

- [33] P. Walters, *An Introduction to Ergodic Theory*, G. T. in Mathematics, Ed. Springer, 1982, vol. 79.
- [34] A. Hyvärinen, J. Karhunen, and E. Oja, *Independent component analysis*. N.Y: John Wiley sons, 2001.
- [35] K. Zyczkowski, "Renyi extrapolation of shannon entropy," *OPEN SYST.INF.DYN.*, vol. 10, p. 297, 2003. [Online]. Available: <http://www.citebase.org/cgi-bin/citations?id=oai:arXiv.org:quant-ph/0305062>
- [36] P. Grassberger and I. Procaccia, "Estimation of the kolmogorov entropy from a chaotic signal," *Physical Review A*, vol. 28, no. 4, pp. 2591–2593, October 1983.
- [37] R. Carvajal, M. Vallverdú, and P. Caminal, "Análisis no lineal de la variabilidad de la frecuencia cardíaca en casos normales y cardiopatías," *Revista Mexicana de Ingeniería Biomédica*, vol. 21, no. 2, Junio 2000.
- [38] F. Kaspar and H. G. Schuster, "Easily calculable measure for the complexity of spatiotemporal patterns," *Phys. Rev. A.*, vol. 36, pp. 842–848, 1987.
- [39] "Página web de geofísica," GeoEnterprises. [Online]. Available: <http://www.geofisica.cl/English/pics5/FUM3.htm>
- [40] J. Theiler, S. Eubank, A. Longtin, B. Galdrikian, and D. Farmer, "Testing for nonlinearity in time series: The method of surrogate data," *Physica D*, vol. 58, pp. 77–94, 1992.
- [41] J. Sprott and G. Rowlands, *Chaos Data Analyzer, The Professional Version 2.1*. Physics Academic Software, USA, 1998.
- [42] J. Theiler, S. Eubank, A. Longtin, B. Galdrikian, and D. Farmer, "Testing for nonlinearity in time series: The method of surrogate data," *Physica D*, vol. 58, pp. 77–94, 1992.
- [43] 3M *Littmann Electronic Stethoscope Model 4000*, Littmann.
- [44] W. Myint and B. Billard, "An electronic stethoscope with diagnosis capability," Auburn University, Tech. Rep., February 2001.
- [45] B. Ergen and Y. Tatar, "A different virtual instrument for data acquisition and analysis of phonocardiogram," *IJCI Proceedings of International Conference on Signal Processing*, vol. 1, no. 2, pp. 47–51, 2003.
- [46] K. Sikiö, "Design and implementation of biosignal monitoring and analysis software," Master's thesis, Helsinki University of Technology, Espoo, Finland, 1999.
- [47] S. Lukkarinen, H. Liang, and I. Hartimo, "A heart sound segmentation algorithm using wavelet decomposition and reconstruction," in *In 19th Annual International Conference IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*, Chicago, USA, October/November 1997.
- [48] S. Messer, J. Agzarian, and D. Abbott, "Optimal wavelet denoising for phonocardiograms," *Microelectronics Journal*, no. 32, pp. 931–941, 2001.
- [49] Sadjadi, "Interference cancellation in respiratory sounds via a multiresolution joint time-delay and signal-stimulation scheme," *IEEE Transaction on Biomedical Engineering*, vol. 44, no. 10, October 1997.

- [50] X. Zhang, L. Durrand, and J. Coatrieux, "Analysis synthesis of phonocardiogram based of matching pursuit method," *IEEE transactions on Biomedical Engineering*, 1998.
- [51] J. Martínez, "Fonocardiografía: Estadio del arte," Informe PB-63-002, Universidad Politécnica de Cartagena. Universidad de Murcia.
- [52] T. Nakamitsu, H. Shino, T. Kotani, K. Yana, K. Harada, J. Sudoh, E. Harasawa, and H. Itoh, "Detection and classification of systolic murmur using a neural network," *IEEE*, 1996.
- [53] A. Hernández-Esteban, F. Toledo-Moreo, J. Martínez-Alajarín, J. Martínez-Álvarez, and R. Ruiz-Merino, "Fpga-based implementation of the instantaneous frequency estimation of phonocardiographic signals," *IFAC Workshop on Programmable Devices and Systems*, pp. 423–428, November 2004.
- [54] H. Yoshida, H. Shino, and K. Yana, "Instantaneous frequency analysis of systolic murmur for phonocardiogram," *19th international conference-IEEE/EMBS*, 1997.
- [55] A. Djebbari and F. B. Reguig, "Short-time fourier analysis of the phonocardiogram signal," *The 7th International conference on electronics, circuits and systems, 2000. ICECS*, vol. 2, pp. 844–847, December 2000.
- [56] B. Ergen and Y. Tatar, "Time-frequency analysis of phonocardiogram," *EMBS/BMES Conference*, 2002.
- [57] F. Debiais, L. G. Durand, P. Pibarot, and R. Guardo, "Time-frequency analysis of heart murmurs. part i: Parametric modelling and numerical simulations," *Medical & Biological Engineering & Computing*, no. 35, pp. 474–479, September 1997.
- [58] S. Kim, H. J. Lee, J. Huh, and B. Chang, "Spectral analysis of heart valve sound for detection of prosthetic heart valve diseases," *Yoisei Medical Journal*, vol. 39, no. 4, pp. 302–308, 1998.
- [59] L. Shun and M. shen, "The analysis and clasification of phonocardiogram based in high order spectra," *IEEE signal Procesing*, 1999.
- [60] I. Provaznik, "Wavelet analysis for signal detection applications to experimental cardiology research," Ph.D. dissertation, Brno University of Technology, 1996.
- [61] B. El-Asir, L. Khadra, A. Al-Abbasi, and M. Mohammed, "Multiresolution analysis of heart sounds," *ICECS*, 1996.
- [62] B.El-Asir, L.Khadra, A. Al-Abbasi, and M. Mohammed, "Time–frequency analysis of heart sounds," *IEEE TENCON*, 1996.
- [63] C. Vigueras, "Desarrollo de un sistema de diagnóstico de soplos cardíacos a partir de la señal fonocardiográfica," Proyecto fin de carrera. Departamento de Ingeniería de la Información y las Comunicaciones. Universidad de Murcia, Diciembre 2003.
- [64] J. Lee, S. Lee, I. Kim, H. Min, and S. Hong, "Comparison between short time fourier and wavelet transform for feature extraction of heart sound," *IEEE TENCON*, 1999.

- [65] "A new window on sound. nature neuroscience," 2002, URL: <http://neurosci.nature.com>.
- [66] Debbal, "Study of the split for the second cardiac sound using the wavelet transform," *Geni -Biomedical Laboratory (GBM), Departement of électronic Faculty of science engineering. Tlemcen, Algeria*, 2000.
- [67] A. Voss, J. Herold, R. Schroeder, F. Nasticzky, A. Mix, P. Ullrich, and T. Huebner, "Diagnosis of aortic valve stenosis by correlation analysis of wavelet filtered heart sounds," *25th International Conference IEEE/EMBS. Cancun. Mexico*, 2003.
- [68] M.N.Kurnaz and T. Ölmez, "Determination of features for heart sounds by using wavelet transform," *Proceedings of the 15 th IEEE Symposium on Computer-Based Medical Systems (CBMS)*, 2002.
- [69] C. DeGroff, S. Bhatikar, J. Hertzberg, R. Shandas, L. Valdes-Cruz, and R. Mahajan, "Artificial neural network-based method of screening heart murmurs in children," *Circulation*, vol. 103, no. 22, pp. 2711–2716, June 2001.
- [70] M. Z. Zamri, "Wavelet analysis and classification of mitral regurgitation and normal heart sounds based on artificial neural networks." *IEEE*, pp. 619–620.
- [71] O. Say, Z. Dokur, and T. Olmez, "Classification of heart sounds by using wavelet transform," *EMBS/BMES Conference*, pp. 128–129, 2002.
- [72] H. Shino, H. Yoshida, H. Mizuta, and K. Yana, "Phonocardiogram classification using time–frequency representation," *Proceedings - 19th international conference - IEEE/EMBS. Chicago. USA*, 1997.
- [73] H. Yoshida, H. Shino, and K. Yana, "Phonocardiogram classification using self-organizing map with learning vector quantization," *Proceedings of the first joint BMES/EMBS Conference. Serving humanity, advancing technology. Atlanta.*, 1999.
- [74] T. Leung, P. White, W. Collis, E. Brown, and A. Salmon, "Classification of heart sounds using time–frequency method and artificial neural networks," *Proceedings of the 22nd annual EMBS international conference. Chicago. USA*, pp. 988–991, July 2000.
- [75] I. Turkoglu and A. Arslan, "An intelligent pattern recognition system based on neural network and wavelet decomposition for interpretation of heart sounds," *Proceedings of the 23rd annual EMBS international conference. Istanbul. Turkey*, pp. 1747–1750, October 2001.
- [76] T. Modegi, "Xml transcription method for biomedical acoustic signals," *Medinfo*, 2001.
- [77] Z. Telatar and O. Erodul, "Heart sounds modification for the diagnosis of cardiac disorders," *IJCI Proceedings of International Conference on Signal Processing*, vol. 1, no. 2, pp. 100–105, 2003.
- [78] M. Hanjouri and W. Alkhaldi, "Heart diseases diagnosis using HMM," *IEEE Melecon*, 2002.
- [79] A. Wolf, B. J. Swift, H. L. Swinney, and J. A. Vastano, "Determining lyapunov exponents from time series," *Physica D*, vol. 16, pp. 285–317, 1985.

- [80] R. Carvajal, M. Vallverdú, R. Baranowski, and P. Caminal, "Detección de determinismo no lineal en la variabilidad de la frecuencia cardiaca," in *II Congreso Latinoamericano de Ingeniería Biomédica*, La Habana, Cuba, Mayo 2001.
- [81] Z. Wang, X. Ning, Y. Zhang, and G. Du, "Nonlinear dynamic characteristics analysis of synchronous 12-lead ecg signals," *IEEE Engineering in medicine and biology*, pp. 110–115, September/October 2000.
- [82] M. Jansen, *Noise Reduction by Wavelet Thresholding*. Springer-Verlag, 2001.
- [83] T. M. Inc., "Multiple-level decomposition," URL: <http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/toolbox/wavelet/>.
- [84] M. Misiti, Y. Misiti, G. Oppenheim, and J. Poggi, *Wavelet Toolbox: For Use With MATLAB*. The Math Works Inc, 1996.
- [85] B. Hubbard, *The World According to Wavelets*. 289 Linden Street: A K Peters, 1996.
- [86] S. Eyal, Y. Almong, O. Oz, S. Eliash, and S. Akselrod, "Nonlinear dynamics applied to blood pressure control," *Autonomic Neuroscience: Basic and Clinical*, no. 89, pp. 24–30, 2001.
- [87] C. Merkwirth, U. Parlitz, I. Wedekin, and W. Lauterborn, "Tstool user manual version 1.11," April 2002, URL: <http://www.physik3.gwdg.de/tstool/indexde.html>.
- [88] C. Merkwirth, U. Parlitz, and W. Lauterborn, "Fast nearest neighbor searching for non-linear signal processing," *Phys. Rev. E*, vol. 62, no. 2, pp. 2089–2097, 2000.
- [89] M. Rosenstein, J. Collins, and C. D. Luca, "A practical method for calculating largest lyapunov exponents from small data sets," PACS codes: 05.45.+b, 02.50.+s, 02.60.+y, November 1992.
- [90] H. D. I. Abarbanel, *Analysis of Observed Chaotic Data*. N.Y.: Springer, 1996.
- [91] "Estimating the hurst exponent." [Online]. Available: http://www.bearcave.com/misl/misl_tech/wavelets/hurst/
- [92] F. Vargas, "Selección de características en el análisis acústico de voces," Master's thesis, Universidad Nacional de Colombia sede Manizales, 2003.
- [93] P. Boersma, "Accurate short - term analysis of the fundamental frequency and the harmonics to noise ratio of sample sound." pp. 100 –104, 1993.
- [94] A. Cheveigne, *A Mixed Speech Fo Estimation Algorithm*. University Paris., 2000.
- [95] J. Fitch. and W. Shabana., "A wavelet based pitch detector for musical signal," *U.K. Bath 2.000*, 2000.
- [96] L. Seltzer and D. Michael., *Automatic Detection of Corrupt Spectrographic Feature For Robust Speech Recognition*. Carnegie Mellon University. Pittsburgh, Pennsylvania, 2000.
- [97] X. Sun., *A Pitch Determination Algorithm Based on Subharmonic to Harmonic Ratio*, 2000.
- [98] O. D. Castrillón, "Método para la discriminación entre voces normales y disfuncionales, basado en la selección efectiva de parámetros acústicos de la voz. aplicación en la población de la zona centro de colombia," Ph.D. dissertation, Universidad Politécnica de Valencia (España), 2004.

- [99] D. G. Childers, *Speech processing and synthesis toolboxes*. NYC, NY: Wiley, 2000.
- [100] J. González. and T. Cervera, "Análisis acústico de la voz: Fiabilidad de un conjunto de parámetros multidimensionales," *Otorrinolaringología España 2002*, vol. 53, 2002.
- [101] F. Plante, H. Kesleer, and B. Cheetham, "Speech monitoring of infective laryngitis," Electrical Engineering and electronics department. Liverpool University., 1996.
- [102] M. Frohlich. and D. Michaelis., "Acoustic voice analysis by mean of the hoarseness diagram," *Journal of Speech, Language and hearing research*, vol. 3, 2000.
- [103] "Cepstrum," National Instruments. [Online]. Available: <http://zone.ni.com/devzone/nidzgloss.nsf/webmain/DDE7C42C7C99AD5A8625686A0078B80C?OpenDocument>
- [104] M. Álvarez, "Reconocimiento de voz sobre diccionarios reducidos usando modelos ocultos de markov," Trabajo de Grado, Ingeniería Electrónica, Manizales, Caldas, Colombia, 2004.
- [105] F. Sepúlveda, "Extracción de parámetros de señales de voz usando técnicas de análisis en tiempo-frecuencia," Master's thesis, Universidad Nacional de Colombia, Manizales, Caldas, Colombia, 2004.
- [106] F. Ganong., *Fisiología Médica*, 15th ed., El Manual Moderno, México, 1996.
- [107] S. W. Jacob, *Anatomía y Fisiología Humana*, 4th ed. McGraw Hill, 1982.
- [108] A. A. Luisada, D. M. MacCanon, B. Coleman, and L. P. Feigen, "New studies on the first heart sound," *Am. J. Cardiol.*, vol. 28, no. 140, 1971.
- [109] A. A. Luisada, *The sounds of the normal heart*. St. Louis: Warren H. Green, Inc, 1972.
- [110] R. F. Rushmer, *Cardiovascular Dynamics*. Philadelphia: W. B. Saunders Company, 1976.
- [111] R. M. Rangayyan, *Biomedical signal analysis: A case-study approach*, M. A. Wiley-Interscience, Ed. New York, USA: IEEE press in Biomedical Engineering, 2002.
- [112] M. Tavel, D. D. Brawn, and D. Shandler, "Enhanced auscultation with a new graphic display system," *Archives of Internal Medicine*, vol. 8, no. 154, pp. 893–896, 1994.
- [113] R. Rangayyan and R. Lehner, "Phonocardiogram signal analysis: a review," *CRC Critical Reviews in Biomedical Engineering*, vol. 15, no. 3, pp. 211–236, 1988.
- [114] L. G. Durand and P. Pibarot, "Digital signal processing of the phonocardiogram: Review of the most recent advancements," *Critical Reviews in Biomedical Engineering*, vol. 23, no. 3/4, pp. 163–219, 1995.
- [115] M. Tahmasbi, "Vlsi implementattion of the herth sounds maximum entropy espectral estimation," Master's thesis, University of Adelaide, 1994.
- [116] M. Cheitlin and D. Skolow, *Clinical Cardiology*. Prentice Hall international Inc., 1993.
- [117] M. Castillo, "Soplos inocentes," *Rev. chil. pediatr.*, vol. 71, no. 1, pp. 61–64, Enero 2000.
- [118] G. Moody, "Ecg-based indices of physical activity."
- [119] A. Goldberger, "Hands-on time series experiments for students: Exploring human gait and heart rate dynamics," Disponible en <http://physionet.cps.unizar.es/tutorials/dynamics/>, 1999.

A. Preliminares fisiológicos

A.1. Actividad mecánica del corazón y su registro

A.1.1. Anatomía

Los eventos cardíacos que se presentan desde el inicio de un latido hasta el inicio del próximo se conocen como *ciclo cardíaco*, el cual consta básicamente de un período de diástole, durante el cual los ventrículos se llenan de sangre, seguido de un período de sístole, en el que la sangre es expulsada a las arterias. En condiciones normales, la sangre fluye de forma continua de las grandes venas a las aurículas, donde tres cuartas partes del volumen sanguíneo pasan directamente a los ventrículos. Para el flujo de la otra cuarta parte del volumen de la sangre, se hace necesario una contracción auricular que termina con el llenado del ventrículo, por lo cual las aurículas son consideradas como bombas auxiliares.

Durante la sístole ventricular, se acumulan grandes cantidades de sangre en las aurículas debido a que permanecen cerradas las válvulas auriculoventriculares (AV). Por lo tanto, en cuanto la sístole ha terminado y las presiones ventriculares caen de nuevo a los valores diastólicos, la presión auricular moderadamente elevada abre inmediatamente las válvulas AV y permite que la sangre fluya rápidamente a los ventrículos. Durante el último tercio de la diástole, las aurículas se contraen y dan un impulso adicional al llenado de los ventrículos. Inmediatamente después del comienzo de la contracción del ventrículo, la presión ventricular crece bruscamente, provocando el cierre de las válvulas AV. Después de que transcurren entre 0.02 y 0.03 s [106] se eleva la presión suficientemente para abrir las válvulas sigmoideas contra las presiones de la aorta y de la arteria pulmonar. Por tanto, durante este período, se produce la contracción en los ventrículos, pero produciendo el vaciamiento. Cuando la presión ventricular izquierda se eleva ligeramente por encima de los 80 *mmHg*, las presiones ventriculares impulsan la apertura de las válvulas sigmoideas, e inmediatamente comienza la expulsión de la sangre de los ventrículos. Al final de la sístole comienza bruscamente la relajación ventricular, permitiendo que disminuyan rápidamente las presiones intraventriculares. Las elevadas presiones de las grandes arterias distendidas empujan inmediatamente a la sangre retrógradamente hacia los ventrículos, lo que hace que se cierren las válvulas aórtica y pulmonar. Durante este período, las presiones intraventriculares vuelven rápidamente a sus bajos valores diastólicos. A continuación, se abren las válvulas AV para comenzar un nuevo ciclo de bombeo ventricular [107].

A.1.2. Auscultación

En el ejercicio de la medicina clínica la auscultación ha sido un método rutinario de evaluación del estado de normalidad o anormalidad orgánica, a través de la percepción de los sonidos originados en las diferentes estructuras anatómicas. Su trascendencia en la valoración cardíaca supera la

recolección de signos a través de los otros métodos de exploración física tales como la inspección, palpación y percusión del área precordial. Teniendo en cuenta que la información obtenida con la auscultación mediante el estetoscopio convencional permite acercamientos importantes al diagnóstico cardiológico, y que se trata de un método de bajo costo y fácil acceso, incluso en lugares remotos, la auscultación se reconoce por su valor clínico, ocupando un sitio importante en la formación de los médicos. Aunque se reconocen las limitaciones de la audición humana, la recolección de estas ondas sonoras con el estetoscopio no puede ser reemplazada por métodos tecnológicos alternativos tales como el doppler y el ultrasonido, pues son claras las ventajas de la auscultación en términos de relación costo/efectividad.

Como parte del método semiológico, la auscultación cardíaca representa específicamente la adquisición de las vibraciones mecánicas provenientes del corazón y transmitidas por los tejidos vecinos hacia la pared torácica. En la génesis de estos fenómenos acústicos participan los diferentes eventos mecánicos que se presentan durante el ciclo cardíaco, entre los que se incluyen la contracción muscular, la apertura y cierre de las válvulas y el desplazamiento del flujo sanguíneo. En este sentido, existen discrepancias en cuanto al origen específico de los ruidos, pero se consideran dos teorías principales. La *teoría valvular*, en la que se argumenta que los ruidos cardíacos son vibraciones variantes en el tiempo, resultantes de la tensión abrupta que se produce sobre las valvas u hojillas de las válvulas cardíacas al final de su cierre y de su apertura; desde esta posición se asume que en el tiempo que transcurre entre el cierre y la apertura de las mismas no se produce ningún sonido. Por otro lado, la *teoría hemodinámica* [108–110], la cual es la más aceptada actualmente, atribuye el origen de los ruidos cardíacos a las vibraciones de toda la estructura del corazón, como consecuencia de la aceleración y desaceleración de los fluidos de sangre intracardíacos, seguidos por el cierre y apertura de las válvulas. Esto último, compara el corazón con una bomba llena de fluido, que vibra completamente cuando es estimulada en cualquiera de sus puntos [111].

La frecuencia de las vibraciones acústicas de los fenómenos cardíacos está determinada por el mecanismo productor, encontrándose variaciones en el rango de 16 a 1000 Hz. La frecuencia de vibración de cada fenómeno determina a su vez la posibilidad de ser detectada por el oído humano, así como las diferencias en el tono o frecuencia. Las vibraciones acústicas generadas por la contracción muscular son de baja frecuencia (1 – 30 Hz), mientras que las producidas por la acción de las válvulas y el flujo turbulento de sangre son de alta frecuencia (30 – 1000 Hz).

La auscultación cardíaca se efectúa por medio de un estetoscopio convencional, que posee una campana abierta o un diafragma cerrado para hacer contacto con el pecho del paciente, y que se conecta a través de un conducto de goma o silicona a las olivas que se ubican en el oído del especialista que realiza el examen. El diafragma transmite en mejor forma el sonido y es más adecuado para escuchar los sonidos agudos (como es el caso del segundo ruido cardíaco) y los soplos, mientras que la campana se utiliza para escuchar los sonidos graves [112]. Mediante la auscultación, junto con el examen físico general, puede obtenerse la información fisiológica precisa para seleccionar adecuadamente los métodos diagnósticos instrumentales que completarán ulteriormente el diagnóstico. La precisión del diagnóstico realizado mediante el procedimiento de auscultación depende del empleo de un aparato adecuado, del silencio ambiental y, sobre todo, de la concentración del especialista que realiza el examen junto con ciertas condiciones de conocimientos y experiencia.

Con el fin de realizar una buena auscultación es necesario tener en cuenta varios factores [112]:

- Focos de auscultación.

- Ritmo y frecuencia.
- Características y alteraciones de los ruidos cardíacos normales.
- Características de los soplos cardíacos (si existen).

La definición de los focos de auscultación dependen de la cavidad o válvula cardíaca que se debe examinar. Los focos más utilizados son: mitral, tricuspídeo, pulmonar y aórtico. El foco mitral se encuentra cerca del ápex o punta del corazón; el tricuspídeo en el cuarto espacio intercostal, cerca del borde derecho del esternón; el foco pulmonar se ubica en la línea izquierda del esternón, en el segundo o tercer espacio intercostal, y el aórtico se encuentra a la derecha del esternón, en el segundo espacio intercostal. Los focos mitral y tricuspídeo se conocen también como los *focos de punta*, mientras que el pulmonar y aórtico se conocen como *focos de base* (Fig. A.1).

A.2. Fonocardiografía

El fonocardiograma es un registro gráfico del sonido producido por la actividad mecánica del corazón. En este se observan los tiempos y las intensidades relativas de los sonidos cardíacos en forma clara y repetida [113]. La fonocardiografía fue desarrollada para mejorar los resultados obtenidos con el estetoscopio convencional, cuyos sonidos pueden ser amplificados con circuitos electrónicos o aplicaciones de software. El desarrollo de la microelectrónica digital y analógica ha abierto nuevas posibilidades en el campo de la instrumentación para la auscultación. Actualmente, existen amplificadores de alta calidad, los cuales llevan a la aplicación de sistemas digitales para la adquisición, registro, almacenamiento, y análisis de los sonidos cardíacos por medio de estetoscopios electrónicos.

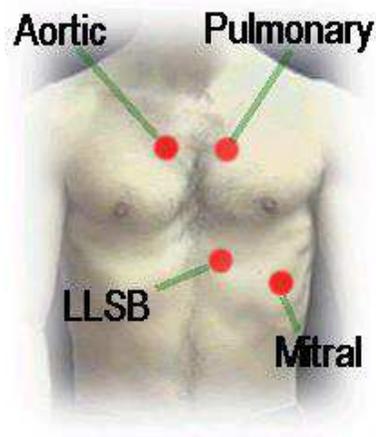


Figura A.1: Focos clásicos de auscultación.

A.2.1. Ruidos cardíacos

Primer ruido cardíaco (S1). El primer ruido cardíaco (S1) se atribuye al sonido generado por el cierre de las válvulas mitral (M1) y tricúspide (T1) al comienzo de la sístole ventricular. Este está dividido en cuatro componentes; el primero, de baja frecuencia, ocurre cuando la primera contracción del miocardio en el ventrículo empuja la sangre hacia las aurículas; el segundo componente es de alta frecuencia y comienza con la tensión abrupta del cierre de las válvulas AV, desacelerando la sangre, después las válvulas sigmoideas se abren y el flujo de la sangre es expulsado hacia los ventrículos [114]; el tercer componente es generado por la oscilación de la sangre entre la raíz de la aorta y las paredes ventriculares; y el cuarto componente es generado por las vibraciones producidas por la turbulencia en la expulsión de la sangre a través de la aorta y de la arteria pulmonar.

Segundo ruido cardíaco (S2). El segundo ruido cardíaco ocurre en el fin de la sístole ventricular y el comienzo de la relajación ventricular, constituyendo dos componentes de alta frecuencia, cierre de la válvula aórtica *A2* y pulmonar *P2* [114]. S2 usualmente posee componentes de más alta frecuencia que S1, y generalmente su duración es menor que la de S1 [115].

Tercer y cuarto ruidos cardíacos (S3 y S4). En algunos casos se escucha un tercer ruido cardíaco S3, que corresponde a la fase de llenado ventricular. Es un ruido de baja frecuencia, y se puede presentar entre 0.12 a 0.16 s después de S2 [116]. El cuarto ruido cardíaco S4 es producido en la final de la diástole, y se genera por la contracción de las aurículas desplazando el flujo dentro de los ventrículos.

Las diversas componentes de los ruidos cardíacos se pueden apreciar en la Figura A.2. El tiempo comprendido entre S1 y S2 se conoce como *período sistólico*, mientras que entre S2 y S1 se presenta el *período diastólico*.

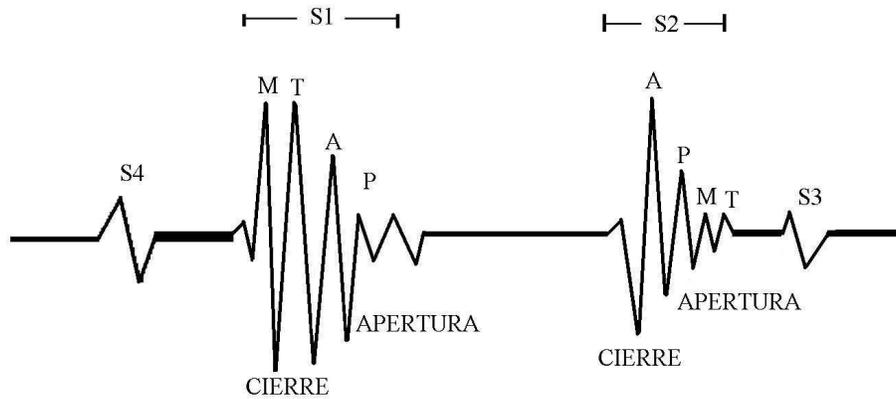


Figura A.2: Ruidos cardíacos con sus respectivas componentes.

Ruido cardíaco	Duración [s]	Rango de frecuencia [Hz]
S1	0.1 – 0.12	20 – 150
S2	0.08 – 0.14	50 – 60
S3	0.04 – 0.05	20 – 50
S4	0.04 – 0.05	menos de 25

Tabla A.1: Características en frecuencia de los ruidos cardíacos [7].

A.2.2. Soplos cardíacos

Los soplos cardíacos son sonidos anormales generados por turbulencias en el flujo sanguíneo a través de las cavidades del corazón, las cuales se producen por defectos en las paredes del corazón o valvulopatías cardíacas. Con respecto a esta última causa, se conocen principalmente dos tipos de deficiencias en el funcionamiento valvular: la *estenosis*, que consiste en la inadecuada apertura valvular, y la *insuficiencia o regurgitación*, que se presenta cuando la válvula no se cierra suficientemente, ocasionando un reflujo de sangre en sentido inverso al normal.

En el momento de la auscultación y de la descripción deben considerarse las siguientes características:

- *Area de registro de los soplos*: Tienden a escucharse mejor sobre el foco correspondiente a la válvula cardíaca donde se producen.
- *Irradiación*: Los soplos generalmente se irradian en el sentido del flujo, ya sea eyectivo, regurgitante o de llenado, a otras áreas distintas a donde se auscultan con más intensidad. En la irradiación también influye la intensidad, pues cuanto más intenso es un soplo más ampliamente se irradia en todas las direcciones.
- *Intensidad*: La mayor o menor intensidad con la que se oye un soplo, que depende de la cantidad y velocidad de la sangre y de las características de los tejidos interpuestos. Desde el punto de vista semiológico existe una escala entre I y VI, I para soplos de intensidad mínima y VI para intensidad máxima.

Soplos sistólicos. Por lo general son menos significativos que los soplos diastólicos, dentro de ellos se encuentran:

- *Soplo de expulsion*: Comienza cuando el flujo se inicia en uno de los grandes vasos y termina antes del cierre valvular.
- *Soplo holosistólico*: Comienzan con S1 y continúan hasta S2, es decir, ocupan todo el período sistólico. Normalmente, son causados por insuficiencia de una o ambas válvulas AV (mitral o tricúspide), así como por situaciones de comunicación interventricular (CIV).

Soplos diastólicos. Siempre son causados por valvulopatías cardíacas graves, dentro de los cuales se encuentran:

- *Protodiastólicos*: Se presentan solamente al inicio de la diástole. Generalmente, son causados por insuficiencia de una o ambas válvulas sigmoideas (aórtica y pulmonar).
- *Presistólico*: Son causados por una disminución del radio en las válvulas AV, como por ejemplo en casos de estenosis mitral y tricuspídea.

En la Fig. A.3 se presenta el ejemplo de una señal normal y una con presencia de soplo en el período sistólico.

Soplos inocentes. Los soplos inocentes son por definición aquellos que no se asocian con ninguna anomalía cardíaca anatómica o fisiológica. Estos son conocidos también como soplos funcionales, benignos, dinámicos, inocuos o normales, aunque el término más común y esclarecedor es inocente o normal. Es importante recalcar que los soplos inocentes se auscultan en más del 50% de los niños normales desde su infancia hasta la adolescencia y son de naturaleza fisiológica. Estos soplos resultan de la turbulencia en el origen de las grandes arterias que salen de los respectivos ventrículos en un suave ángulo y son relativamente más estrechas que estos últimos. El soplo se oye mejor en los niños que en los adultos debido al menor grosor de la pared torácica, y por lo tanto, mayor proximidad de las estructuras cardíacas a la pared torácica. Las características clínicas más frecuentes de un soplo inocente son que se localizan al comienzo del sístole, generalmente son de corta duración, de baja intensidad, grado I a II, máximo III/VI, forma de diamante en el fonocardiograma, de irradiación escasa y no se asocian a ninguna anomalía cardíaca [117].

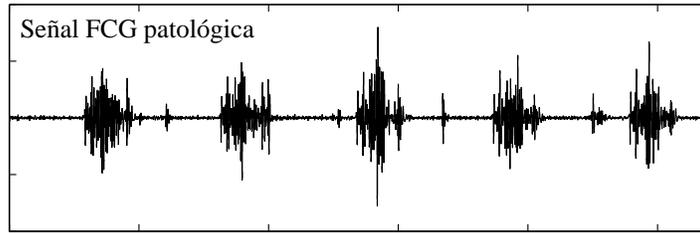
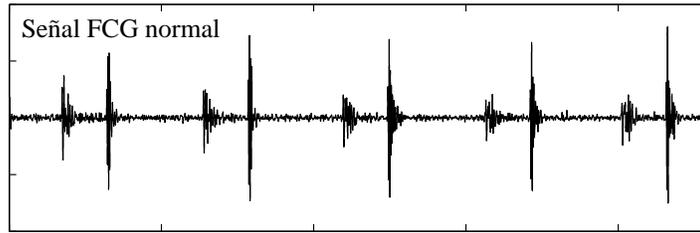


Figura A.3: Ejemplo de dos señales FCG.

B. Características acústicas calculadas

B.1. Características extraídas preliminarmente

- (1) Fo: frecuencia central
- (2) Fdesv: desviación estándar
- (3) Fmax: frecuencia máxima
- (4) Fmin: frecuencia mínima
- (5) FM: mediana
- (6) Fvar: varianza
- (7) Rf: rango fonatorio (diferencia entre mínimo y máximo)
- (8) Fcvar: coeficiente de variación
- (9) Fskew: oblicuidad
- (10) Fkurt: curtosis
- (11) Fmom3: momento centralizado orden 3
- (12) Fmom4: momento centralizado orden 4
- (13) Fmom5: momento centralizado orden 5
- (14) Fmom6: momento centralizado orden 6
- (15) Jitter
- (16) Jp: jitter porcentual
- (17) Cpt: coeficiente de perturbación de tono
- (18) NEP: noise error prediction
- (19) gne: excitación glótica al ruido (promedio)
- (20) maxgne: máximo gne
- (21) mingne: mínimo gne
- (22) desvgne: desviación del gne
- (23) Mgne: mediana gne
- (24) gnevar: varianza gne
- (25) gnecovm: media de la matriz de covarianza del gne
- (26) HNRm: relación armónica al ruido media
- (27) HNRmax: relación armónica al ruido máximo
- (28) HNRmin: relación armónica al ruido mínimo
- (29) HNRdesv: relación armónica al ruido desviación estándar
- (30) HNRvar: relación armónica al ruido varianza
- (31) HNRran: relación armónica al ruido rango
- (32) HNRcvar: relación armónica al ruido coeficiente de variación
- (33) HNRskew: relación armónica al ruido oblicuidad
- (34) HNRkurt: relación armónica al ruido media

- (35) HNRdesM: relación armónica al ruido desviación de mediana absoluta
- (36) HNRmom3: relación armónica al ruido momento centralizado de orden 3
- (37) HNRmom4: relación armónica al ruido momento centralizado de orden 4
- (38) HNRmom5: relación armónica al ruido momento centralizado de orden 5
- (39) HNRmom6: relación armónica al ruido momento centralizado de orden 6
- (40) Promceps: promedio de los cepstrales (spectrum)
- (41) Maxceps: máximo de los cepstrales
- (42) Minceps: mínimo de los cepstrales
- (43) Stdceps: desviación estándar de los cepstrales
- (44) Medceps: mediana de los cepstrales
- (45) Varceps: varianza de los cepstrales
- (46) Ranceps: rango de los cepstrales
- (47) Cvarceps: coeficiente de variación de los cepstrales
- (48) Skewceps: oblicuidad de los cepstrales
- (49) Kurtceps: curvatura de los cepstrales
- (50) desMceps: desviación de mediana absoluta de los cepstrales
- (51) mom3ceps
- (52) mom4ceps
- (53) mom5ceps
- (54) mom6ceps
- (55) prommfcc: coeficientes ceptrales en la escala de mel
- (56) maxmfcc
- (57) minmfcc
- (58) stdmfcc
- (59) medmfcc
- (60) varmfcc
- (61) E: energia
- (62) Emax
- (63) Emin
- (64) Edesv
- (65) EM
- (66) Evar
- (67) Eran
- (68) Ecvar
- (69) Eskew
- (70) Ekurt
- (71) EdesM
- (72) Emom3
- (73) Emom4
- (74) Emom5
- (75) Emom6
- (76) Z: densidad de cruces por cero
- (77) Zdesv

- (78) Zvar
- (79) Zno: número de cruces por cero
- (80) LP: coeficientes de predicción lineal
- (81) LPmax
- (82) LPmin
- (83) LPdesv
- (84) LPM
- (85) LPvar
- (86) LPran
- (87) LPcvar
- (88) LPskew
- (89) LPkurt
- (90) LPdesM
- (91) LPmom3
- (92) LPmom4
- (93) LPmom5
- (94) LPmom6
- (95) lpc1: coeficiente de predicción lineal 1
- (96) lpc2
- (97) lpc3
- (98) lpc4
- (99) lpc5
- (100) lpc6
- (101) lpc7
- (102) lpc8
- (103) lpc9
- (104) lpc10
- (105) ceps(1): coeficiente cepstral 1
- (106) ceps(2): coeficiente cepstral 2
- (107) ceps(3): coeficiente cepstral 3
- (108) ceps(4): coeficiente cepstral 4
- (109) ceps(5): coeficiente cepstral 5
- (110) ceps(6): coeficiente cepstral 6
- (111) ceps(7): coeficiente cepstral 7
- (112) ceps(8): coeficiente cepstral 8
- (113) ceps(9): coeficiente cepstral 9
- (114) ceps(10): coeficiente cepstral 10
- (115) ceps(11): coeficiente cepstral 11
- (116) ceps(12): coeficiente cepstral 12
- (117) mfcc(1): coeficiente central en la escala de mel 1
- (118) mfcc(2): coeficiente central en la escala de mel 2
- (119) mfcc(3): coeficiente central en la escala de mel 3
- (120) mfcc(4): coeficiente central en la escala de mel 4

- (121) mfcc(5): coeficiente central en la escala de mel 5
- (122) mfcc(6): coeficiente central en la escala de mel 6
- (123) mfcc(7): coeficiente central en la escala de mel 7
- (124) mfcc(8): coeficiente central en la escala de mel 8
- (125) mfcc(9): coeficiente central en la escala de mel 9
- (126) mfcc(10): coeficiente central en la escala de mel 10
- (127) mfcc(11): coeficiente central en la escala de mel 11
- (128) mfcc(12): coeficiente central en la escala de mel 12

B.2. Características resultantes del preproceso

- (1) Fdesv
- (2) Fmax
- (3) Fmin
- (4) Fvar
- (5) Fcvar
- (6) Fskew
- (7) Fmom5
- (8) Jitter
- (9) Jp
- (10) cpt
- (11) NEP
- (12) HNRm
- (13) HNRmin
- (14) HNRdesv
- (15) HNRvar
- (16) HNRran
- (17) HNRcvar
- (18) HNRskew
- (19) HNRkurt
- (20) promceps
- (21) minceps
- (22) stdceps
- (23) varceps
- (24) cvarceps
- (25) skewceps
- (26) kurtceps
- (27) desMceps
- (28) mom4ceps
- (29) mom5ceps
- (30) mom6ceps
- (31) medmfcc
- (32) E
- (33) Emax

- (34) Emin
- (35) Edesv
- (36) EM
- (37) Evar
- (38) Eran
- (39) EdesM
- (40) Emom4
- (41) Emom5
- (42) Emom6
- (43) Z
- (44) Zdesv
- (45) Zno
- (46) LPmax
- (47) LPvar
- (48) LPcvar
- (49) LPskew
- (50) LPdesM
- (51) LPmom4
- (52) LPmom5
- (53) LPmom6
- (54) ceps(1)
- (55) ceps(2)
- (56) ceps(3)
- (57) ceps(4)
- (58) ceps(5)
- (59) ceps(6)
- (60) ceps(7)
- (61) mfcc(5)
- (62) mfcc(6)
- (63) mfcc(9)

C. Estacionariedad y pruebas de estacionariedad

El concepto básico de *estacionariedad*, se basa en el hecho de que todos los parámetros que describen la dinámica del sistema estudiado tienen que ser fijos y constantes durante el periodo de medida, es decir, que sus características estadísticas no deben ser dependientes del tiempo. Si el proceso bajo observación es probabilístico, se caracterizará por distribuciones de probabilidad para las variables involucradas en el sistema. Para procesos estacionarios, estas probabilidades no dependen del tiempo, situación que también se presenta si el proceso se especifica por un conjunto de probabilidades de transición entre diferentes estados. En el caso que hayan reglas determinísticas gobernando la dinámica del sistema, estas no deben cambiar durante el tiempo comprendido por la serie de tiempo. Un concepto alternativo de estacionariedad, se refiere a cuando no es posible el acceso a la calibración o modificación de las condiciones o propiedades del equipo que realiza la medida y produce la serie de tiempo a analizar, por lo cual solo se tiene la información de los datos disponibles. De acuerdo a este segundo concepto de estacionariedad, los sistemas son estacionarios cuando se considera una cantidad infinita de observaciones o muestras, pero son no estacionarios cuando se consideran cantidades finitas de observaciones. En un sentido formal, una señal es estacionaria si todas las probabilidades de transición a partir de un estado a otro son independientes del tiempo dentro del periodo de observación, o sea, si las transiciones se producen a partir de la secuencia de datos, incluyendo la correspondiente constancia de los parámetros relevantes [22,118].

Por lo tanto, una señal FCG es no estacionaria, porque las probabilidades de transición dependen del tiempo, ya que es en momentos establecidos por el ritmo cardíaco en los que se presentan los ruidos y soplos cardíacos. Además, esto también se puede sustentar en el hecho que, si la señal es regular durante casi todo el tiempo de observación, pero presenta irrupciones frecuentes, se considera no estacionaria, aún si los parámetros permanecen constantes, aunque si estos eventos aparecen muy frecuentemente en la serie de tiempo, se habla de una independencia de las probabilidades de transición observadas y por lo tanto es estacionaria, situación que se observa si la serie de tiempo correspondiente a una señal FCG se toma en un periodo de observación extenso.

Se puede inferir la presencia de cambios en las propiedades dinámicas del sistema a partir del cálculo de las características estadísticas para varios segmentos del conjunto de datos. Si estas características se calculan para la primera y segunda mitad de una serie de tiempo analizada, no deben diferir más allá de sus fluctuaciones estadísticas. En este caso, se prefiere el cálculo de la media y la varianza para comprobar la presencia de los cambios en las propiedades dinámicas del sistema en varios segmentos de la serie de tiempo.

El análisis de señales fisiológicas tiende a menudo a enfocarse en cantidades promedio, con comparaciones de medias y varianzas, lo cual se conoce como *estadística en el dominio del tiempo* [119]. En

algunas ocasiones, se aplican análisis adicionales basados en técnicas en el dominio de la que frecuencia, involucrando así el análisis espectral. No obstante, la utilidad de ciertas medidas, basadas en el análisis fractal y la dinámica no lineal permanece indeterminada.

La estacionariedad se define como la cualidad de un proceso en el cual los parámetros estadísticos (media y desviación estándar) del proceso no cambian con el tiempo. Según su estacionariedad, un proceso puede ser débilmente estacionario o fuertemente estacionario.

- *Proceso débilmente estacionario*: Es aquel cuya media y función de autocorrelación son constantes.
- *Proceso fuertemente estacionario*: Es aquel donde todos los momentos de orden más alto permanecen constantes, incluyendo la media y la varianza.

No obstante, los procesos fuertemente estacionarios nunca son vistos en la práctica, y sólo se discuten por sus propiedades matemáticas. Los procesos débilmente estacionarios, se observan en el mundo real, y usualmente se asume que están aproximados a la estacionariedad en sentido estricto (proceso fuertemente estacionario) para ser tratados como tales. Cualquier proceso *realmente* estacionario, puede verse como tal sólo si la cantidad de datos muestreados del proceso es muy grande comparada con el componente de mas baja frecuencia en los datos. En otras palabras, si se toman las muestras de un proceso en un periodo de tiempo corto (comparado con la longitud de los datos), un proceso estacionario podría parecer no estacionario.

La estacionariedad en un proceso aleatorio implica que sus características estadísticas no cambian con el tiempo. Dicho de otra manera, si se observa un proceso aleatorio estacionario en algún instante de tiempo t , sería imposible distinguir las características estadísticas en ese tiempo de aquellas observadas en otro instante de tiempo, denominado como t' .

Estacionariedad en sentido estricto y en sentido amplio. Sea un vector aleatorio de longitud N de un proceso aleatorio:

$$X = (X(t_1)X(t_2)\dots X(t_N))^T,$$

su función de distribución acumulativa (CDF) de orden N es:

$$F_{X(t_1), \dots, X(t_N)}(x_1, \dots, x_N) = \Pr(X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_N) \leq x_N)$$

donde $X(t)$ es estacionaria en el sentido estricto si, y solo si:

$$F_{X(t_1), \dots, X(t_N)}(x_1, \dots, x_N) = F_{X(t_1+c), \dots, X(t_N+c)}(x_1, \dots, x_N)$$

para todos los cambios de tiempo, todos los N finitos y todos los arreglos de puntos t_1, \dots, t_N .

La *estacionariedad en sentido amplio* de una señal, también conocida *estacionariedad débil*, se estudia cuando el objeto de análisis son las propiedades o momentos hasta de 2^o orden (media, autocorrelación, covarianza, etc.), lo cual sucede en muchas aplicaciones prácticas. $X(t)$ se define estacionaria en sentido amplio (o débilmente estacionaria), si y solo si:

- (1) El valor medio es independiente de t , $\forall t$

$$E[(X(t))] = \mu$$

(2) La autocorrelación depende sólo de $\tau = t_2 - t_1, \forall t_1$

$$\begin{aligned} E[X(t_1)X(t_2)] &= E[X(t_1)X(t_1 + \tau)] \\ &= r_{XX}(\tau) \end{aligned}$$

Los momentos de segundo orden se definen en términos de distribuciones de probabilidad de segundo orden, y los procesos estrictamente estacionarios son siempre débilmente estacionarios, aunque no significa que se siempre se presenta el caso contrario.

Pruebas de estacionariedad. Existen dos aproximaciones generales en las pruebas de estacionariedad: *paramétricas y no paramétricas*. Las aproximaciones paramétricas, se aplican generalmente en análisis de señales en el dominio del tiempo, sobre todo en casos donde se hacen suposiciones acerca de la naturaleza de los datos. Las aproximaciones no paramétricas, se aplican en el dominio de la frecuencia, como por ejemplo en casos donde el sistema involucra una *caja negra*, en donde no se pueden hacer suposiciones básicas sobre la naturaleza del sistema.

A pesar de que las pruebas no paramétricas son ampliamente aplicadas, son menos poderosas que las paramétricas. La pruebas paramétricas, requieren entre un 5 y un 35 % más datos que las pruebas paramétricas para llegar a la misma conclusión estadística con el mismo nivel de confiabilidad.

Existen dos formas de evaluar la estacionariedad de una señal: el *run test*, y el *reverse arrangement test*. El *run test* puede detectar una tendencia monotónica en una serie de tiempo $x(i), i = 1, 2, \dots, N$. Un *run* se define como una sucesión de uno o más eventos idénticos, los cuales están seguidos o precedidos por diferentes eventos o ningún evento. Para realizar la prueba de *run test*, primero se calcula la media (\bar{x}) de los eventos $x(i)$, y la serie $y(i)$ se deriva de $x(i)$ de la siguiente forma:

$$y(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } x(i) < \bar{x} \\ 1 & \text{si } x(i) \geq \bar{x} \end{cases}$$

Luego se computa la cantidad de *runs* en $y(i)$. Si $x(i)$ es un proceso estacionario aleatorio, el número de *runs* es una variable aleatoria con media igual a $N/2 + 1$ y varianza igual a $(N(N-2))/(4(N-1))$. Un número de *runs* significativamente diferente de $N/2 + 1$ indica no estacionariedad por la posible presencia de una tendencia en $x(i)$.

En el caso de la aplicación del *reverse arrangement test*, el método para detectar la tendencia monotónica se basa en el cálculo del número de veces que $x(i) > x(j)$ con $i < j$ (cada una de estas desigualdades es llamada *reverse arrangement*) para todo i . Si la secuencia de $x(i)$ son observaciones independientes de la misma variable aleatoria, entonces el número de *reverse arrangement* es una variable aleatoria con media igual a $N(N-1)/4$ y varianza $N(2N+5)(N-1)/72$. Un número de *reverse arrangements* significativamente diferente de $N(N-1)/4$ indica no estacionariedad por la posible presencia de una tendencia en $x(i)$.