# Un paseo por la historia de la Teoría de Juegos

**A trip down the history of game theory**

**Ángel F. Tenorio Villalón**[1,a], **Ana M. Martín Caraballo**[1,b]

**Resumen.** Mostramos la evolución histórica de la Teoría de Juegos desde los primeros atisbos en el s. XVIII hasta su formulación formal y estudio en profundidad en relación a cuestiones de índole económico, político y social. Nos centraremos tanto en los inicios como en el punto álgido de esta teoría: la década de 1950. Para mostrar la relevancia alcanzada por esta rama del conocimiento, indicamos algunos hitos posteriores al período temporal aquí tratado, como son su importancia durante la Guerra Fría o la concesión de cuatro Premios Nobel de Economía por avances en este campo.

**Palabras claves:** Teoría de juegos, evolución histórica, formalización matemática, aplicación a ciencias sociales y económicas.

**Abstract.** We show the historical evolution of Game Theory, from the eighteenth century with its first traces; and we have looked over the time line until reaching the mathematical formulation of games and the in-depth study of Game Theory, in relation with economical, political or social issues. We have focused on the origin of Game Theory and the climax where regular research starts in the 1950s. To show its importance, we have commented some milestones following the period considered here, e.g., its relevance during the Cold War or the four Nobel Prizes in Economic Sciences for advances in this discipline.

**Keywords:** Game theory, historical evolution, mathematical foundations, application to economical and social sciences.

Mathematics Subject Classification: 91–03, 01A60, 01A55, 01A50.

Recibido: noviembre de 2014 Aceptado: febrero de 2015

## 1. Introducción

Cuando las Matemáticas son aplicadas a otras ciencias (como puede ser especialmente el caso de las Ciencias Sociales y Económicas), es necesario que situaciones del mundo real se modelicen mediante objetos matemáticos cuyo estudio teórico posibilite (y facilite) la resolución del problema general y de

[1]Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica, Pablo de Olavide de Sevilla, Sevilla, España
[a]aftenorio@upo.es
[b]ammarcar@upo.es

cualquier otro que tenga un mínimo de analogía tanto en los datos como en las hipótesis de trabajo. En concreto, a la hora de la toma de decisiones es conveniente saber las posibles estrategias que pueden seguirse y contextualizarlas en relación a las estrategias que pueden tener los contrincantes.

El estudio de las estrategias que se pueden seguir ante una situación (tanto de colaboración como de conflicto) es el objeto de estudio de la Teoría de Juegos. De hecho, los orígenes de esta teoría se plantean principalmente estrategias para ganar juegos de azar o decidir la estructura de los sistemas electorales, por poner algunos ejemplos (que serán detallados posteriormente al hablar de los orígenes de la Teoría de Juegos en la siguiente sección).

En este sentido, veremos cómo la necesidad práctica del ser humano ha sido causa necesaria para el surgimiento y posterior desarrollo de la Teoría de Juegos. El origen práctico de muchos de los procedimientos y conceptos que hoy día usamos de manera natural con las Matemáticas ha sido algo habitual en la historia de la humanidad como recogen historiadores de las ciencias tan prestigiosos como [40] y [42], siendo de gran importancia las cuestiones de tipo económico para el avance de muchos procedimientos y conceptos matemáticos.

Desde sus orígenes, la Teoría de Juegos ha consistido en la modelización y análisis de situaciones de conflicto y cooperación entre decisores racionales e inteligentes, véase [56]; reduciendo la toma de decisiones entre agentes (los denominados jugadores) a un comportamiento puramente racional basado en cuáles serían las estrategias más beneficiosas o menos perjudiciales para afrontar la interacción (el denominado juego) entre ellos. Para esa toma de decisiones, deben tenerse en cuenta tanto nuestras decisiones como las posibles que podrían tomar los jugadores restantes.

De este modo, cada jugador busca la estrategia óptima con la que conseguir sus objetivos y en base a dicha estrategia, tomar decisiones. La estrategia en cuestión dependerá tanto del comportamiento previsto en los otros jugadores como del observado durante el propio juego, pudiéndose llegar a adaptar la estrategia a cada situación. Para ello deben ponderarse las posibles acciones o estrategias en relación con las del resto de jugadores para decidir cuál es la mejor opción a considerar y si interesa cooperar o enfrentarse a todos o a algunos de los restantes jugadores.

La Teoría de Juegos permite modelizar muchas interacciones entre agentes que, *a priori*, no parecen estar relacionadas y que habría que resolver buscando una solución *ad hoc*. Es más, al modelizar dicha interacción como un juego, pueden encontrarse similitudes y analogías con otros problemas que presentan la misma estructura y, por tanto, pueden basarse en el mismo análisis formal y resolución óptima para tomar decisiones sin tener en consideración el problema real del que provienen.

Ya que las interacciones modelizadas por juegos pueden permitir la cooperación o no entre los jugadores, los juegos suelen dividirse entre los que son cooperativos y los que no lo son. Los primeros permiten alcanzar acuerdos vinculantes entre los jugadores por medio de una serie de mecanismos preestablecidos, ya que algunos jugadores tiene los mismos objetivos y ganan o pierden conjuntamente, véase [38]. Por otra parte, en los juegos no cooperativos cada jugador busca única y exclusivamente su beneficio personal, admitiéndose explícitamente todas las posibilidades de cooperación entre jugadores, véase [18].

## 2. Los precedentes de la Teoría de Juegos

Desde sus orígenes la Teoría de Juegos se concibió como una herramienta que permitiese alcanzar una mejor comprensión del comportamiento existente en los fenómenos sociales. Esta utilidad práctica ha hecho que no solo se desarrolle su estudio puramente teórico; sino que se ha vuelto esencial su aplicación en casi todos los ámbitos de las ciencias sociales en relación a la toma de decisiones.

La Teoría de Juegos tal y como la percibimos en la actualidad se considera mayoritariamente que comienza con la publicación de la obra *Theory of Games and Economic Behavior* [63] en 1944 por el matemático austrohúngaro John von Neumann (1903-1957) y el economista alemán Oskar Morgenstern (1902-1977). De esta obra hablaremos posteriormente, ya que en esta sección queremos dar un breve pero intenso paseo por la prehistoria de la Teoría de Juegos y hablar de los principales trabajos que, sin ser propios de la Teoría de Juegos, sí pueden considerarse precursores de la misma y conllevaron posteriormente un estudio matemático formal para establecer los fundamentos teóricos de la Teoría de Juegos que culminarían con el trabajo de von Neumann y Morgenstern.

La primera referencia a los juegos y la lógica existente en éstos aparece en una de las obras filosóficas del matemático y filósofo alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), que se titulaba *Nouveaux Essais sur l'entendement humain* [49] y, aunque fue escrita en 1704, permaneció inédita hasta 1765 cuando se publicó una recopilación de sus obras en latín y francés. En ella constataba la aparición de "una nueva clase de lógica, concerniente a los grados de probabilidad [...] para perseguir la investigación de los juegos de azar". Según Leibniz, la mente humana "se despliega más minuciosamente en los juegos que en actividades más serias".

La siguiente aportación relevante para la Teoría de Juegos tiene lugar en 1713 con la aparición del concepto de estrategia mixta y la regla minimax para la obtención de la hoy llamada solución minimax, por la que se minimiza la posible pérdida en el peor escenario y que coincide con el equilibrio de Nash del juego en cuestión. Sería precisamente el matemático francés Pierre-Rémond de Montmort (1678-1619) quien las publicaría en la segunda edición de su obra *Essay d'analyse sur les jeux de hasard* [55], edición que completaba sustancialmente la anterior e incluía toda su correspondencia con el matemático suizo Nicolaus I Bernoulli (1687-1759) entre 1710 y 1713. En esa correspondencia le planteaba Montmort a Bernoulli el problema de encontrar una solución de equilibrio basado en la regla minimax de estrategia mixta para resolver una versión con dos jugadores de un juego de carta clásico denominado "Le Her".

Este problema, según reconoce el propio Montmort en sus cartas a Bernoulli, le fue comunicado por correspondencia por “Monsieur de Waldegrave”, quien no solo lo planteó sino que, en una carta a Bernoulli, incluía una resolución del problema usando una estrategia basada en lo que hoy se denomina regla minimax. Montomort, Bernoulli y Waldegrave continuaron su correspondencia sobre esta cuestión (inconclusa en la fecha de publicación de la obra de Montmort) y un segundo problema que Montmort denominó “Probléme de la Poulle” en su obra y que Todhunter [76] renombraría como Problema de Waldegrave.

La demostración dada por Waldegrave sería redescubierta posteriormente por el estadístico, biólogo y genetista inglés Ronald Aylmer Fisher (1890-1962) en 1934 [29].

En este punto, hay que hacer una aclaración sobre Waldegrave, del que no hemos dado ningún dato. Esto es así porque no se sabe a ciencia cierta quién era el “Monsieur de Waldegrave” que mantuvo correspondencia con Montmort y Bernoulli. Tradicionalmente, se ha seguido la identificación realizada por Kuhn [46], según la cual sería el noble inglés Sir James Waldegrave (1684-1741), primer Earl Waldegrave. Esta identificación ha sido considerada por la inmensa mayoría de autores posteriores como, por ejemplo Dimand y Dimand [22]. Sin embargo, Henny [39] indicó que no sería Sir James sino su tío; al que posteriormente Barnard [6] identificaría con Sir William Waldegrave (c. 1636-1701), médico jefe del Príncipe de Gales. Desafortunadamente, ambas identificaciones parecen ser incorrectas a la vista de las investigaciones actuales. En un primer intento de identificar correctamente a “Monsieur de Waldegrave”, Bellhouse [7] indica que, en el “Essay”, Montmort escribió que Waldegrave era “un caballero inglés, hermano de Milord Waldegrave, quien se desposó con una hija natural del Rey Jacobo II de Inglaterra”. Por tanto, Bellhouse identifica a Milord Waldegrave como el Barón Henry Waldegrave, padre de Sir James y sobrino de Sir William, lo cual coincide con la afirmación de Henny pero descarta las dos identificaciones que existían sobre la figura de Waldegrave. Más aún, en el caso de Sir William, la identificación carecía de sentido pues habría fallecido una década antes de la correspondencia entre “Monsieur de Walgrade” y Montmort.

Haciendo uso de la documentación existente sobre la nobleza inglesa, Bellhouse detecta que el Barón Henry Waldegrave tuvo tres hermanos menores y concluye que son éstos los candidatos a ser el “Monsieur de Waldegrave” de los escritos de Montmort. En este sentido, Bellhouse [7] conjeturó que parecía sensato identificar a esta figura con Charles Waldegrave, ya que era el más relevante de los tres hermanos y sus vivencias son compatibles con haber conocido a Montmort y Bernoulli y haber podido establecer la correspondencia en las fechas indicadas. Sin embargo, el propio Bellhouse, en colaboración con Fillion, ha corregido en 2013, véase [8] esta identificación en base a las caligrafías en los manuscritos existentes en los Archivos Nacionales de Francia en París, concluyendo que fue Francis, hermano de Henry y Charles.

Siguiendo con el tema que nos ocupa, existen más precedentes de la Teoría de Juegos a lo largo del s. XVIII, pero para encontrarlos debemos pasar al ámbito de las Ciencias Sociales y más concretamente, revisar algunos trabajos que analizaban los sistemas electorales en la Francia de los años previos a la Revolución Francesa.

Es en este período cuando el político y matemático francés Marie-Jean-Antoine Nicolas de Caritat (1743-1794), más conocido como Marqués de Condorcet, publicaría su *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix* [20] en 1785 en la que aparecía por primera vez el Teorema del jurado y la Paradoja de Condorcet. Este teorema determina la probabilidad relativa de un grupo de individuos alcanzando la decisión correcta y cómo dependiendo de esa probabilidad debe aumentar o disminuir el número de individuos para que se alcance dicha decisión. Por otro lado, la Paradoja de Condorcet plantea la posibilidad de que las preferencias colectivas son cíclicas, aunque no lo sean las individuales y por tanto, el criterio de lo que prefiere la mayoría no da un vencedor claro. En esta misma obra también aparece el método de Condorcet, que es en un método de elección del candidato que ganaría por mayoría en cualquier emparejamiento contra otro candidato, suponiendo que exista un candidato con dicha propiedad. Esta técnica es una de las técnicas básicas de la Teoría de Juegos a la hora de establecer preferencias y el candidato que se obtiene al aplicarla, se denomina ganador de Condorcet.

Una década antes, en 1770 (aunque publicada en 1784 [10]), el matemático, físico y político francés Jean-Charles de Borda (1733-1799) había presentado en la *Académie Royale des Sciences* un método de elección con un único ganador que se obtiene en base a la ordenación hecha por cada votante según sus preferencias por los candidatos. Este método se denomina actualmente Recuento Borda.

Los siguientes precedentes en la Teoría de Juegos se sitúan en el s. XIX. Concretamente, el matemático francés Antoine Augustin Cournot (1801-1877) desarrolló en 1838 [17] un modelo de competición imperfecta (denominado duopolio de Cournot o competición de Cournot) en la que compiten dos empresas con la misma función de coste y productos homogéneos (i.e., las características y calidades del producto coinciden en ambas empresas) en un escenario estático. Este trabajo no solo estableció el comienzo del análisis de oligopolios (como término intermedio entre la competencia perfecta y los monopolios), sino que también conllevó un análisis teórico del comportamiento que podrían tener los empresarios en un duopolio y que se basaba en la toma simultánea de decisiones por ambos empresarios para obtener un equilibrio que optimice el precio de su producto en función de las cantidades producidas y que corresponde a un tipo particular de lo que posteriormente se denominará de manera general equilibrio de Nash dentro de la Teoría de Juegos. Así, el modelo de Cournot se basaba en obtener el denominado equilibrio de Cournot-Nash por el cual, cuando las empresas eligen las cantidades en el conjunto de precios, el equilibrio conlleva que las empresas consideren precios por encima de los precios que superan el coste marginal y por tanto son precios competitivos.

La obra de Cournot recibió la respuesta crítica del matemático y economista francés Joseph-Louis-François Bertrand (1822-1900) en 1883 [9], cuando en una recensión del libro de Cournot, expuso que parecía más lógico que las empresas en un duopolio se enfrentasen en términos de cambios en el precio en lugar de en las cantidades que se vendían. Por tanto, las empresas elegirían el precio de su producto en base a la siguiente lógica: si los precios de ambas empresas son el mismo, pero el coste marginal es menor que el precio, entonces las empresas estarían incentivadas a disminuir sus precios con el fin de conseguir una mayor parte del mercado. Por tanto, el equilibrio (también de tipo Nash) se alcanzaría cuando el precio coincidiese con el coste marginal. Sin embargo, el modelo planteado por Bertrand planteaba una paradoja (denominada la Paradoja de Bertrand) por la cual el duopolio acaba en un monopolio tanto si las dos empresas decidían aliarse como si decidían enfrentarse, ya que en un enfrentamiento, la que tiene un menor coste marginal se haría con todo el mercado.

Esta paradoja hizo que el economista y estadístico irlandés Francis Ysidro Edgeworth (1845-1926) plantease una modificación al modelo dado por Bertrand e introdujese lo que se denomina modelo Edgeworth o modelo Bertrand-Edgeworth en 1897 [26] al analizar en profundidad la Paradoja de Bertrand. La modificación introducida por Edgeworth consistía en incluir restricciones en la capacidad de producción de las empresas con el fin de que dichas empresas tuviesen la opción potencial tanto de aliarse como de no hacerlo.

Precisamente, sería el propio Edgeworth quien publicaría el tratado más relevante en relación con la Teoría de Juegos en el s. XIX. Dicho tratado versaba tanto sobre econometría como sobre la aplicación de las matemáticas al análisis de los fenómenos psicológicos. Esta obra data de 1881 y se titula *Mathematical Psychics* [25] y es una muestra de la relevancia de su autor en el análisis de equilibrios (como ya hemos podido ver anteriormente) en fenómenos sociales y en el movimiento utilitarista neo-clásico, introduciendo muchos de los aspectos de la Teoría de Juegos ya que modelizó la economía política y las elecciones sociales en base a un principio de incertidumbre. De hecho, en esta obra demostró que en una economía de trueque existían muchas soluciones para alcanzar un equilibrio competitivo, por lo que existía una indeterminación del contrato; sin embargo, cuando el número de actores en la economía aumenta, el nivel de indeterminación va reduciéndose y si existe un número infinito de actores (la competición perfecta), el problema resulta estar completamente determinado con una única solución que coincide con el "equilibrio" de los economistas. De hecho, esta conjetura (llamada Conjetura de Edgeworth) se puede enunciar en términos del concepto de núcleo ("core") en Teoría de Juegos, siendo la primera aparición en la literatura de esta noción, aunque bajo el nombre de curva de contrato.

Pero no solo en las cuestiones económicas y sociales aparecieron antecedentes a la Teoría de Juegos tal y como la formularon von Neumann y Nash, sino que, en 1871, el naturalista y geólogo inglés Charles Robert Darwin (1809-1882) ya introdujo la Teoría de Juegos en el ámbito de la biología evolutiva en su memoria *The Descent of Man, and Selection in Relation to Sex* [19] y expuso en esencia lo que hoy viene a denominarse la Teoría de Selección Sexual que, pese a ser rechazada en los tiempos de Darwin se ha vuelto central en la biología evolutiva moderna y en la ecología del comportamiento gracias a la teoría genética de la evolución natural propuesta por Fisher en 1930 [28] y que coincide en esencia con lo expuesto por Darwin en su obra anteriormente citada.

La selección sexual pretendía explicar la siguiente paradoja de la teoría de la evolución: ¿Cómo pueden evolucionar características que reducen la supervivencia? La propuesta de Darwin fue basar su selección sexual en la diferenciación de si se debía a relaciones entre el mismo sexo o entre sexos distintos. Las primeras consistía en la predominancia por la fuerza de un miembro sobre otro (por lo general, la existencia de una macho dominante) mientras que la segunda, usando la terminología actual, se podría enunciar como que si una característica genética mejoraba la selección de los miembros de un sexo por el otro, dicha característica quedaba establecida en los miembros de la especie aunque ello significase una reducción en su supervivencia. En esencia, Darwin afirmaba que la evolución de ciertas características se basaba en base a la selección sexual de los miembros de un sexo sobre otro para aumentar la posibilidad de procreación y daba especial énfasis a la elección del sexo femenino sobre el masculino en cuanto a las relaciones entre distintos sexos. Precisamente, el primer modelo matemático-estadístico para la selección sexual por medio de la elección de la hembras fue dado por el propio Fisher en 1915 [27], demostrando que las características de un macho podían evolucionar si dicha característica y su preferencia por parte de las hembras tenían una base genética y se heredaban. Este modelo fue denominado modelo *runaway* de selección natural de Fisher, véase [1].

## 3. Hacia la formalización de la Teoría de Juegos: de Zermelo a von Neumann

Es en el s. XIX cuando aparecen las primeras publicaciones matemáticas y con resultados formales que podrían englobarse en la Teoría de Juegos. La primera de estas aportaciones se debe al matemático y lógico alemán Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871-1953) que publicó un artículo en 1913 [80] en el que establecía dos teoremas sobre el juego del ajedrez; juego que usa como ejemplo, pero que permite analizar cualquier juego con dos jugadores sin movimientos de oportunidad y con intereses completamente enfrentados (lo que hoy día se denomina juego no cooperativo de suma cero) y pudiendo realizarse infinitos movimientos aunque en una cantidad finita de posiciones. Las dos cuestiones que busca resolver con sus teoremas son: a) el significado de que un jugador esté en posición ganadora y su definición de una forma matemática objetiva; y b) si puede determinarse el número de movimientos necesarios para forzar la victoria a partir de dicha posición. Con respecto a la primera cuestión, Zermelo establece una condición necesaria y suficiente para asegurar que una posición es ganadora y demuestra que no puede garantizarse la victoria de un jugador que no pueda perder. Con respecto a la segunda pregunta, Zermelo demostró por reducción al absurdo que el número de movimientos necesarios para forzar una victoria nunca sería superior al de posiciones existentes en el juego.

Este artículo fue complementado por otros dos trabajos realizados por dos matemáticos húngaros Dénes König (1884-1944) y László Kalmár (1905-1976). El primero publicó en 1927 un artículo [43] en el que aplicaba un resultado de la teoría de conjuntos para demostrar una conjetura que previamente le había propuesto von Neumann: si $q$ es una posición ganadora, entonces existe un número $N$ dependiente de $q$ tal que las blancas pueden forzar la victoria en menos de $N$ movimientos partiendo de la posición $q$. Este resultado lo probó sin necesidad de usar que el número de posiciones fuese finito, por lo que generalizaba el segundo problema de Zermelo para juegos con infinitas posiciones, pero de modo que desde cada posición solo una cantidad finita de posiciones pueden ser alcanzadas. Por su parte, Kalmár [41] publicó entre 1928 y 1929 una generalización de ambos modelos, permitiendo que hubiese tanto infinitas posiciones como que desde cada posición se pudiesen alcanzar también un número infinito de posiciones.

En esa misma década, entre 1921 y 1927, el matemático y político francés Félix Édouard Justin Émile Borel (1871-1956) realizó una serie de cinco artículos [11, 12, 13, 14, 15] en los que establece los fundamentos de la teoría de juegos psicológicos, véase Frechet [31]. En ellos Borel estudia los juegos de estrategia, dando la primera formulación matemática moderna de una estrategia mixta y estudiando la búsqueda de la solución minimax para juegos simétricos de dos jugadores con intereses completamente opuestos; demostrándolo para jugadores con 3 y 5 estrategias. Además, introduce la idea de *estrategia pura*, aunque bajo el nombre de método de juego. En estos artículos, Borel deja clara su postura sobre la no existencia de soluciones minimax para juegos con más de cinco estrategias posibles, aunque posteriormente cambia de opinión y conjetura en [15] la existencia de la solución minimax dejándolo como un problema abierto.

Poco después, en 1928, von Neumann [62] dio una demostración del teorema minimax para estos juegos independiententemente del número de estrategias que pueda tener cada jugador (que ha de ser una cantidad finita) y asumiendo que los intereses son completamente opuestos. En este trabajo de von Neumann aparece la definición formal de estrategia que se utiliza actualmente y se introduce la forma extensiva de un juego como un árbol lógico enraizado (lo que permitiría posteriormente un tratamiento matricial del juego por medio de las matrices de adyacencia e incidencia del grafo). Previamente, el matemático polaco Władysław Hugo Dionizy Steinhaus (1887-1972) publicó en 1925 [75] un artículo en el que incluía la primera definición formal de estrategia y se realizaba un estudio en profundidad del concepto.

Posteriormente, en 1938, Borel [16] publicaría la segunda parte del cuarto volumen de su *Traité du calcul des probabilités et de ses applications* bajo el título de *Applications des jeux de hasard* con la colaboración de otros autores y en el que se recopilan varios trabajos de Teoría de Juegos. En esta obra cabe destacar el capítulo 4 titulado *Jeux où le psychologie joue un rôle fondamental* y la nota elaborada por el matemático francés Jean Ville (1910-1989) en la que da una demostración del teorema minimax basada en la convexidad y teoría de desigualdades [79]. Esta prueba fue posteriormente revisada y simplificada por von Neumann y Morgenstern en 1944 [63]. Posteriomente, el matemático estadounidense Lynn Harold Loomis (1915-1994) daría en 1946 [51] la primera prueba completamente algebraica del Teorema minimax.

Una vez hemos establecido los precedentes y los orígenes en la formulación matemática, que culmina con el artículo de 1928 von Neumann citado con anterioridad, llegamos a lo que se acepta como la obra clave y referencia básica de la Teoría de Juegos: el libro *Theory of Games and Economic Behavior* de 1944 por von Neumann y Morgenstern que citamos al comienzo de la sección anterior.

Esta obra fue el primer tratamiento riguroso y exhaustivo del concepto de juego, estrategia y resolución del mismo, así como sobre la forma de representar las preferencias de los jugadores. Además, no solo estudiaron los juegos en los que los intereses de los jugadores son completamente contrapuestos (los denominados juegos no cooperativos de suma cero), sino que consideraron también aquellos juegos en los que la ganancia de un jugador no necesariamente significa pérdidas para el otro (y que se corresponden con los juegos cooperativos de suma nula con recompensa transferible). Todo ello desde una perspectiva puramente económica y con el objetivo de modelizar el comportamiento económico mediante la Teoría de Juegos. De hecho, en esta obra se usó la Teoría de Juegos para desarrollar una teoría axiomática de la utilidad.

## 4. La década prodigiosa: 1950–1960

La obra de von Neumann y Morgenstern causó tal impacto entre los matemáticos y economistas de su época que no solo conllevó que la Teoría de Juegos comenzase a considerarse como una disciplina científica, sino que fue el comienzo de una investigación intensa y exhaustiva en este campo. Precisamente, es la década de 1950 junto con el comienzo de la de 1960, en la que se desarrollan numerosos artículos teóricos sobre esta disciplina y sobre sus aplicaciones a distintos problemas y situaciones económicas. Como muestra de la actividad en la investigación relativa a este campo, habría que resaltar los cuatro volúmenes de la colección *Annals of Mathematics Studies* [24, 47, 48, 78] que se dedicaron monográficamente a la Teoría de Juegos bajo el título *Contributions to the Theory of Games* (el primer volumen data de 1950 y el cuarto de 1959).

En dos artículos de 1950 [44] y 1953 [45] respectivamente, el matemático estadounidense Harold William Kuhn (n. 1925) introdujo la formulación actual de juegos en forma extensiva y estableció los resultados básicos de este tipo de juegos.

Pero el hecho clave de la Teoría de Juegos en la década de 1950 y que sustenta toda la investigación posterior en relación al estudio de los juegos denominados no cooperativos, se debe al matemático estadounidense John Forbes Nash Jr. (n. 1928). En 1950, Nash presenta su tesis doctoral titulada *Non-cooperative games* [59] bajo la supervisión del matemático canadiense William Albert Tucker (1905-1995) y en la que se establecen las bases generales de este tipo de juegos. En dicha memoria se introducía el concepto de punto de equilibrio (o equilibrio de Nash como es conocido actualmente) y probaba su existencia. Los resultados esenciales de esta memoria aparecerían publicados en sendos artículos fechados en 1950 [58] y 1951 [60], en los que también se propone el denominado "Programa Nash" por el que se sugiere el estudio de los juegos cooperativos mediante su reducción a juegos no cooperativos. Como puesta en práctica de su programa, Nash [57, 61] estableció la teoría axiomática del regateo, probando la existencia y unicidad de la denominada solución de regateo de Nash. Precisamente, estas referencias se consideran claves en la literatura relacionada con los problemas de negociación.

Tras introducir Nash la noción de punto de equilibrio, éste junto con el matemático canadiense John Patterson Mayberry (1929-2014) y el economista estadounidense Martin Shubik (n, 1926) publicarían un artículo en 1953 [54] en el que demostraban que el equilibrio de Nash generalizaba el equilibrio clásico en un duopolio de Cournot.

La Corporación RAND (abreviatura de *Research ANd Development*), fundada en 1948, jugó también un papel importante en el desarrollo de la Teoría de Juegos y sería uno de los principales centros de investigación en este campo desde entonces. Por poner algunos ejemplos de su relevancia en este campo, la primera versión del trabajo de Nash de 1953 apareció como informe técnico de esta corporación en 1950. En 1950, el matemático polaco-estadounidense Melvin Dresher (1911-1992) y el matemático estadounidense Merril Meeks Flood (1908-1991) desarrollaron el modelo teórico del juego de cooperación y conflicto conocido como el "Dilema del Prisionero", que sería formalizado con el formato y nombre que se le conoce actualmente por Tucker en 1950 para hacer más accesible el modelo de Dresher y Flood. Sin embargo, la publicación de la formalización de Tucker tendría que esperar a 1980 [77], aunque Flood publicó un artículo en el que se exponían las ideas principales del modelo en 1958 [30] (previamente ya había aparecido en un memorándum de la Corporación RAND en 1952); mientras que Dresher expondría el modelo en su monografía de 1961 [23].

En el seno de la Corporación RAND es también donde se introduce y formaliza el concepto de "core" o núcleo usado en Teoría de Juegos. Concretamente, fueron el matemático y economista estadounidense Lloyd Stowell Shapley (n. 1923) y el matemático canadiense Donald Bruce Gillies (1928-1975) quienes introducirían de manera independiente dicho concepto: el primero en un memorándum de la Corporación RAND en 1952 [69] y el segundo en su tesis doctoral y un artículo en 1953 [32, 33]. Precisamente, sería Gillies quien daría la definición actual de "core" en un artículo posterior de 1959 [34]. La relación entre el concepto de "core" y el de curva de contrato definido por Edgeworth fue establecido por Shubik en 1959 [73].

Por su parte, Shapley sería también el artífice de lo que se viene a denominar el valor de Shapley en los juegos cooperativos (valor que mide la importancia de cada jugador en un juego cooperativo para que la cooperación global funcione y el nivel de recompensa que se podría esperar), concepto que introduce en su artículo de 1953 [70] sobre juegos con $n$ jugadores. Ese mismo año, Shapley también publicaría su artículo *Stochastic Games* [71], en el que demostraba la existencia de estrategias estacionarias (i.e., que dependen única y exclusivamente del juego y no de factores externos) óptimas para juegos estrictamente competitivos con beneficios futuros descontados a una tasa fija.

En esta misma época, el economista y matemático francés Gérard Debreu (1921-2004) introdujo el primer modelo de equilibrio competitivo con su teorema de existencia en un artículo de 1952 [21] en el que permitía la actuación de economías externas. Este artículo sería precursor del que se publicaría dos años más tarde (en 1954 [2]) por el economista americano Kenneth Joseph Arrow (n. 1921) y el propio Debreu en el que establecerían la existencia de un equilibrio competitivo, usando los resultados de 1952 sin permitir economías externas. Este modelo pasó a denominarse modelo de Arrow-Debreu y se ha vuelto esencial ya que asegura que, bajo ciertos supuestos económicos, existe un conjunto de precios para el que la oferta agregada se iguala con la demanda agregada para cualquier mercancía considerada.

## 5. Consolidación y aplicación

Desde finales de la década de los 1950 y durante toda la década de 1960 el desarrollo de la Teoría de Juegos fue emparejado con aplicaciones de éstos a distintos campos de conocimientos y a la resolución de problemas que surgían en el mundo real. En este sentido, Shapley y Shubik [72] usaron en 1954 el valor de Shapley para determinar cuál era el poder de los miembros del Consejo de Seguridad de la ONU (que modelizaban mediante un juego cooperativo) en un artículo que se acepta como pionero en la aplicación de la Teoría de Juegos a las Ciencias Políticas. También, el matemático estadounidense Robert Duncan Luce (1925-2012) y el psicoanalista y politólogo estadounidense Arnold Austin Rogow (1924-2006) llevaron a cabo en 1956 [53] un análisis de las distribuciones de poder que podían tener lugar en un congreso conformado por dos partidos políticos (pensando especialmente en el aparato legislativo estadounidense). Por su parte, el politólogo William Harrison Riker (1920-1993) desarrolló en 1959 [64] un índice para determinar el poder de un político y estudió cómo podría maximizarse esta medida. Hay que dejar claro que trabajos como los tres que acabamos de referir, han hecho que la Teoría de Juegos se considere parte inseparable de las Ciencias Políticas como disciplina, apareciendo en todas las monografías sobre éstas. Precisamente, el primer libro sobre Teoría de Juegos escrito pensando en su uso por investigadores del ámbito de de las Ciencias del Comportamiento surge en esta época, más concretamente en 1957 [52], como colaboración del anteriormente mencionado Luce con el estadístico estadounidense Howard Raiffa (n. 1924).

Pero esto no solo ocurrió en el ámbito de las Ciencias Sociales y Humanas, sino que en el ámbito de la biología evolutiva aparece la primera aplicación explícita de la Teoría de Juegos con un artículo del genetista y biólogo evolutivo americano Richard Charles Lewontin (n. 1929) en 1961 [50].

Como había pasado desde sus orígenes, la Teoría de Juegos siguió avanzando gracias a su aplicación a las Ciencias Económicas. Así, en 1959 [3], el matemático israelí-estadounidense Robert John Aumann (n. 1930) publicó un trabajo en el que, además de introducir el concepto de equilibrio fuerte, daba la versión del Teorema de Tradición Oral para este tipo de equilibrios. El Teorema de Tradición Oral (*Folk Theorem* en inglés) establece que el conjunto de equilibrios de Nash para un juego repetido se puede expresar en base a los resultados factibles del juego de una tirada asociado. El resultado era ampliamente conocido a finales de la década de 1950, pero sin publicar y con autoría desconocida. Su no publicación, según Luce y Raiffa [52], podría bien deberse a la simplicidad de dicho resultado o a la complejidad para poder escribirlo rigurosamente. Posteriormente, el propio Aumann, conjuntamente con Shapley en 1976 [5], dio la versión de este resultado para juegos repetidos y en relación a los equilibrios perfectos de Nash de dichos juegos. Resultado al que, de manera independiente, llegó el economista y matemático israelí Ariel Rubinstein con sendos trabajos en 1976 [66] y 1979 [65].

Precisamente, en 1959, Shubik publica su monografía sobre oligopolios [74], en la que por primera vez se modelizaban explícitamente los oligopolios mediante la teoría de juegos no cooperativos y que contiene uno de los primeros enunciados del Teorema de la Tradición Oral.

Para concluir este recorrido histórico con el que hemos pretendido dar una buena visión de la ebullición del estudio de la Teoría de Juegos y su directo desarrollo en base a las aplicaciones que se hacía de los resultados a otros ámbitos de conocimientos distintos de los puramente matemáticos, no podemos olvidar la relevancia de la obra *The Strategy of Conflict* [67] escrito por el economista estadounidense Thomas Crombie Schelling (n. 1942) y que fue considerado por *Times Literary Suplement* en 1995 y 2008 como uno de los cien libros más influyentes en Occidente desde 1945. En esa obra, Schelling inicia la investigación en el comportamiento estratégico (o comportamiento ante el conflicto, como él lo llamaba) y enfatizó la importancia de la información y compromiso en las dinámicas de estrategias, siendo fundamental el análisis de los juegos no cooperativos con múltiples equilibrios.

En este sentido, tampoco hemos de obviar la importancia que tuvo la Teoría de Juegos en la década de 1960 durante la Guerra Fría. Como ejemplo, indicar los trabajos que, entre 1965 y 1968, llevaron a cabo el ya mencionado Aumann, el matemático israelí Michael Bahir Maschler (1927-2008) y el matemático americano Richard Edwin Stearns (n. 1936) para la Agencia de Desarme y Control de Armas de los Estados Unidos relativos a la aplicación de la Teoría de Juegos a la dinámica en las negociaciones de control armamentístico. Algunos de estos artículos se convirtieron en la base y fundamento de los que hoy se denominan juegos repetidos o iterados (consistentes en juegos en forma extensiva en los que se repite un juego base un determinado número de veces) y fueron recogidos en Aumann, Maschler y Stearns [4].

Sin embargo, el reconocimiento mundial y público de la gran relevancia que ha tenido la Teoría de Juegos en el campo del Análisis Económico tuvo lugar con la concesión del Premio del Banco de Suecia en Ciencias Económicas en memoria de Alfred Nobel (el comúnmente denominado Premio Nobel de Economía) en 1994 al economista húngaro John Charles Harsanyi (1920-2000), junto con el ya mencionado John F. Nash y el economista Reinhard Justus Reginald Selten (n. 1930), los tres especialistas en la Teoría de Juegos y su aplicación a la economía para el estudio de los equilibrios generales de tipo Nash (véase Harsanyi [35, 36, 37] y Selten [68]).

Posteriormente, esto se vería reforzado cuando en 2005, les otorgaron a Schelling y Aumann el Premio Nobel de Economía. El primero fue galardonado por trabajar con modelos dinámicos para el análisis de la cooperación y conflicto, instaurando los primeros ejemplos de la Teoría de Juegos evolutiva; mientras que el segundo fue premiado por sus aportaciones al estudio de los equilibrios, lo cual llevó a cabo utilizando la Teoría de Juegos. De los logros realizados por ambos autores ya hemos hecho referencia anteriormente en este trabajo. También las ediciones de 2007 y 2012 de dichos premios fueron concedidas a avances en el estudio de la Teoría de Juegos. En el caso del año 2007, el matemático y economista Leonid Hurwicz (1917-2008) y el matemático y economista estadounidense Roger Bruce Myerson (n. 1951) fueron los galardonados junto con el economista estadounidense Eric Stark Maskin (n. 1950) por establecer los fundamentos de la teoría de diseño de mecanismos, una rama de la Teoría de Juegos que trabaja con información privada. Por su parte, en 2012, el ya mencionado en este trabajo L.S. Shapley fue el galardonado junto con el investigador operativo y economista Alvin Elliot Roth (n. 1951) por sus aportaciones a la Economía en el ámbito de la Teoría de Juegos y, en particular, por la teoría de localizaciones estables y la práctica de diseño de mercados, basada en el uso de herramientas de juegos cooperativos y no cooperativos.

# Referencias


[1] M. B. Andersson, *Sexual selection*, Princeton University Press, Princeton, 1994.

[2] K. J. Arrow and G. Debreu, *Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy*, Econometrica **22** (1954), 265–290.

[3] R. J. Aumann, *Acceptable Points in General Cooperative n-Person Games*, Contributions to the Theory of Games, Volume IV (A. W. Tucker and R. D. Luce, eds.), Annals in Mathematics Studies, no. 40, Princeton University Press, Princeton, 1959, pp. 287–324.

[4] R. J. Aumann, M. B. Maschler, and R. E. Stearns, *Repeated games with incomplete information*, MIT Press, Cambridge, 1995.

[5] R. J. Aumann and L. S. Shapley, *Long Term Competition - A Game-Theoretic Analysis*, Essays in Game Theory in Honor of Michael Maschler (N. Megiddo, ed.), Springer-Verlag, Berlín, 1994, Originalmente mimeo de Hebrew Uniersity of Jerusalem, 1976, pp. 1–15.

[6] G. A. Barnard, *Review of 'A History of Probability and Statistics: And Their Applications Before 1750'*, SIAM Review **33** (1991), 286–290.

[7] D. R. Bellhouse, *The Problem of Waldegrave*, Journal Électronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique **3** (2007), no. 2, 12 pp.

[8] D. R. Bellhouse and N. Fillion, *Le Her and Other Problems in Probability Discussed by Bernoulli, Montmort and Waldegrave*, Statistical Science.

[9] J. Bertrand, *Theorie mathématique de la richesse sociale*, Journal des Savants **1883** (1883), 499–508.

[10] J. C. Borda, *Memoire sur les elections au scrutin*, Histoire de l'Académie Royale des Sciences **1781** (1784), 657–664.

[11] É Borel, *La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symétrique*, Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences **173** (1921), 1304–1308.

[12] ______, *Éléments de la Théorie des Probabilités*, 3e édition ed., pp. 204–224, Librairie Scientifique J. Hermann, París, 1924.

[13] ______, *Sur les jeux où interviennent l'hasard et l'habileté des joueurs*, Compté Rendu de la 47e Session de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences. Bordeaux, 1923, Association Française pour l'Avancement des Sciences, París, 1924, pp. 79–85.

[14] ______, *Un théorème sur les systèmes de formes linéaires a déterminant symétrique gauche*, Comptes Rendus Académie des Sciences **183** (1926), 925–927: 996.

[15] ______, *Sur les systèmes de formes linéaires à déterminant symétrique gauche et la théorie générale du jeu*, Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences **184** (1927), 52–54.

[16] ______, *Traité du calcul des probabilités et de ses applications*, vol. 4, Gauthiers-Villars, París, 1938.

[17] A. Cournot, *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*, L. Hachette, París, 1838.

[18] E. Van Damme and D. Furth, *Game theory and the market*, Chapters in Game Theory (P. Borm and H. Peters, eds.), Kluwer Academic Publishers, Dordretch, 2002, pp. 51–81.

[19] C. Darwin, *The descent of man, and selection in relation to sex*, John Murray, Londres, 1871.

[20] M. de Condorcet, *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*, Imprenta Real, París, 1785.

[21] G. Debreu, *A Social Equilibrium Existence Theorem*, Proceedings of the National Academy of Science of the United States of America **38** (1952), 886–893.

[22] M. A. Dimand and R. W. Dimand, *A History of Game Theory*, vol. 1, Routledge, Londres, 1996.

[23] M. Dresher, *The mathematics of games of strategy: Theory and applications*, Prentice-Hall, New Jersey, 1961.

[24] M. Dresher, A. W. Tucker, and P. Wolfe, *Contributions to the Theory of Games, Volume III*, Annals in Mathematics Studies, no. 39, Princeton University Press, Princeton, 1957.

[25] F. Y. Edgeworth, *Mathematical psychics*, Kegan Paul & Co., Londres, 1881.

[26] ______, *La teoría pura del monopolio*, Giornale Degli Economisti **40** (1897), 13–31.

[27] R. A. Fisher, *The evolution of sexual preference*, Eugenics Review **7** (1915), 184–192.

[28] ______, *The Genetical Theory of Natural Selection*, Clarendon Press, Oxford, 1930.

[29] ______, *Randomisation and an Old Enigma of Card Play*, Mathematical Gazette **18** (1934), 294–297.

[30] M. M. Flood, *Some experimental games*, Management Science **5** (1958), 5–26, Previamente publicado como memorándum en M.M. Flood, *Some experimental games*, Research Memorandum RM-789, Santa Mónica: RAND Corporation, 1952.

[31] M. Frechet, *Emile Borel, Initiator of the Theory of Psychological Games and its Application*, Econometrica **21** (1953), 95–96: 126.

[32] D. B. Gillies, *Location of Solutions*, Report of an Informal Conference on the Theory of $n$-Person Games (H. W. Kuhn, ed.), Department of Mathematics, Princeton University, 1953.

[33] ______, *Some Theorems on n-Person Games*, Ph.D. thesis, Department of Mathematics, Princeton University, 1953.

[34] ______, *Solutions to general non-zero-sum games*, Contributions to the Theory of Games, Volume IV (A. W. Tucker and R. D. Luce, eds.), Annals in Mathematics Studies, no. 40, Princeton University Press, Princeton, 1959, pp. 47–85.

[35] J. C. Harsanyi, *Games with imcomplete information played by "bayesian" players. Part I*, Management Science **14** (1967), no. 1, 159–182.

[36] ______, *Games with imcomplete information played by "bayesian" players. Part II*, Management Science **14** (1968), no. 5, 320–334.

[37] ______, *Games with imcomplete information played by "bayesian" players. Part III*, Management Science **14** (1968), no. 7, 486–502.

[38] J. C. Harsanyi and R. Selten, *A General Theory of Equilibrium Selection in Games*, MIT Press, Cambridge, 1988.

[39] J. Henny, *Niklaus und Johann Bernoullis Forschungen auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung in ihrem Briefwechsel mit Pierre Rémond de Montmort*, Die Werke von Jakob Bernoulli (B. L. Van der Waerden, ed.), vol. 3, Birkhäuser, Basel, 1975, pp. 457–507.

[40] G. G. Joseph, *La cresta del pavo real. Las Matemáticas y sus raíces no europeas*, Editorial Pirámide, Madrid, 1996.

[41] L. Kalmár, *Zur Theorie der abstrakten Spiele*, Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged) **4** (1928–1929), no. 1–2, 65–85.

[42] M. Kline, *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*, Alianza Editorial, Madrid, 1992.

[43] D. König, *Über eine Schlussweise aus dem Endlichen ins Unendliche*, Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged) **3** (1927), no. 2–3, 121–130.

[44] H. W. Kuhn, *Extensive Games*, Proceedings of the National Academy of Science of the United States of America **36** (1950), 570–576.

[45] ______, *Extensive Games and the Problem of Information*, Contributions to the Theory of Games, Volume II (H. W. Kuhn and A. W. Tucker, eds.), Annals of Mathematics Studies, no. 28, Princeton University Press, Princeton, 1953, pp. 193–216.

[46] ______, *Preface to Waldegrave's Comments: Excerpt from Montmort's Letter to Nicholas Bernoulli*, Precursors in Mathematical Economics: An Anthology (W. J. Baumol and S. H. Goldfeld, eds.), London School of Economics and Political Science, Londres, 1968, pp. 3–9.

[47] H. W. Kuhn and A. W. Tucker, *Contributions to the Theory of Games, Volume I*, Annals in Mathematics Studies, no. 24, Princeton University Press, Princeton, 1950.

[48] ______, *Contributions to the Theory of Games, Volume II*, Annals in Mathematics Studies, no. 28, Princeton University Press, Princeton, 1953.

[49] G. W. Leibinz, *Nouveaux Essais sur l'entendement humain*, Oeuvres philosophiques, latines et françoises, de feu Mr. de Leibnitz (R. E. Raspe, ed.), J. Scheuder, Amsterdam y Leipzig, 1765.

[50] R. C. Lewontin, *Evolution and the Theory of Games*, Journal of Theoretical Biology **1** (1961), 382–403.

[51] L. H. Loomis, *On a Theorem of von Neumann*, Proceedings of the National Academy of Science of the United States of America **32** (1946), 213–215.

[52] R. D. Luce and H. Raiffa, *Games and Decisions: Introduction and Critical Survey*, John Wiley & Sons, New York, 1957.

[53] R. D. Luce and A. A. Rogow, *A game theoretic analysis of congressional power distributions for a stable two-party system*, Behavioral Science **1** (1956), 83–95.

[54] J. P. Mayberry, J. F. Nash, and M. Shubik, *A Comparison of Treatments of a Duopoly Situation*, Econometrica **21** (1953), 141–154.

[55] P. R. Montmort, *Essay d'analyse sur les jeux de hasard*, 2da. edición ed., Jacque Quillau, París, 1713.

[56] R. B. Myerson, *Game Theory: Analysis of Conflict*, Harvard University Press, Cambridge, 1991.

[57] J. F. Nash, *The bargaining problem*, Econometrica **18** (1950), 155–162.

[58] ______, *Equilibrium points in $n$-person games*, Proceedings of the National Academy of Science of the United States of America **36** (1950), 48–49.

[59] ______, *Non-cooperative games*, Ph.D. thesis, Department of Mathematics, Princeton University, 1950.

[60] ______, *Non-cooperative games*, Annals of Mathematics **54** (1951), 286–295.

[61] ______, *Two-person cooperative games*, Econometrica **21** (1953), 128–140, Previamente publicado como informe técnico en J.F. Nash, *Two-person cooperative games*, RAND P-172. Santa Mónica: RAND Corporation, 1950.

[62] J. Von Neumann, *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*, Mathematische Annalen **100** (1928), 295–320.

[63] J. Von Neumann and O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton, 1944.

[64] W. H. Riker, *A test of the adequacy of the power index*, Behavioral Science **4** (1959), 120–131.

[65] A. Rubinstein, *Equilibrium in Supergames with the Overtaking Criterion*, Journal of Economic Theory **21** (1979), 1–9.

[66] ______, *Equilibrium in Supergames*, Essays in Game Theory in Honor of Michael Maschler (N. Megiddo, ed.), Springer-Verlag, Berlín, 1994, Originalmente mimeo de Center for Mathematical Economics and Game Theory, Hebrew University of Jerusalem (1976), pp. 17–28.

[67] T. Schelling, *The strategy of conflict*, Harvard University Press, Cambridge, 1960.

[68] R. Selten, *Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfragetragheit*, Zeitschrift f¸r die gesamte Staatrwissenschaft **121** (1965), 301–324: 667–689.

[69] L. S. Shapley, *Notes on the n-Person Game III: Some Variants of the von-Neumann-Morgenstern Definition of Solution*, Research Memorandum RM-817, RAND Corporation, Santa Mónica, 1952.

[70] ______, *A Value for n-Person Games*, Contributions to the Theory of Games, Volume II (H. W. Kuhn and A. W. Tucker, eds.), Annals of Mathematics Studies, no. 28, Princeton University Press, Princeton, 1953, pp. 307–317.

[71] ______, *Stochastic Games*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America **39** (1953), 1095–1100.

[72] L. S. Shapley and M. Shubik, *A Method for Evaluating The Distribution of Power in a Committee System*, American Political Science Review **48** (1954), 787–792.

[73] M. Shubik, *Edgeworth Market Games*, Contributions to the Theory of Games, Volume IV (A. W. Tucker and R. D. Luce, eds.), Annals in Mathematics Studies, no. 40, Princeton University Press, Princeton, 1959, pp. 267–278.

[74] ______, *Strategy and Market Structure: Competition, Oligopoly, and the Theory of Games*, John Wiley & Sons, New York, 1959.

[75] H. Steinhaus, *Definicje potrzebne do teorji gry i poscigu*, Mysl Akademicka (Lwow) **1** (1925), 13–14, Traducido al inglés como H. Steinhaus, *Definitions for a theory of games and pursuit*, Naval Research Logistics Quaterly **7** (1960), 105–108.

[76] I. Todhunter, *History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Lagrange*, Macmillan, Cambridge, 1865.

[77] A. W. Tucker, *On Jargon: The Prisoner's Dilemma. A Two Person Dilemma*, UAMP Journal **1** (1980), 101.

[78] A. W. Tucker and R. D. Luce, *Contributions to the Theory of Games, Volume IV*, Annals in Mathematics Studies, no. 40, Princeton University Press, Princeton, 1959.

[79] J. Ville, *Sur la théorie générale des jeux où intervient l'habileté des joueurs*, Traité du calcul des probabilités et de ses applications (É Borel, ed.), vol. 4, Gauthiers-Villars, París, 1938, pp. 105–113.

[80] E. Zermelo, *Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels*, Proceedings of the Fifth Congress of Mathematicians (Cambridge) (E. W. Hobson and A. E. H. Love, eds.), vol. II, Cambridge University Press, 1913, pp. 501–504.