

DESARROLLO DE UNA METODOLOGÍA PARA APLICAR LA ESTRUCTURA DE CONTROL MPC UNIFICADA

Por
José Nelson Rojas Grisales

REQUISITO PARCIAL PARA OPTAR
AL TÍTULO DE
MAGISTER EN AUTOMATIZACIÓN INDUSTRIAL
DE LA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MANIZALES
SEPTIEMBRE 2004

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
DEPARTAMENTO DE
ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y COMPUTACIÓN

Los suscritos abajo firmantes certificamos y recomendamos a la Facultad de Ingeniería y Arquitectura para aceptar la tesis titulada **“DESARROLLO DE UNA METODOLOGÍA PARA APLICAR LA ESTRUCTURA DE CONTROL MPC UNIFICADA”** de **José Nelson Rojas Grisales** como requisito parcial para optar al título de **MAGISTER EN AUTOMATIZACIÓN INDUSTRIAL**.

Fecha: Septiembre 2004

Director:

NICOLÁS TORO GARCÍA

Jurados:

FABIOLA ANGULO GARCÍA

LUIS ENRIQUE AVENDAÑO

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Fecha: **Septiembre 2004**

Autor: **José Nelson Rojas Grisales**

Título: **DESARROLLO DE UNA METODOLOGÍA PARA
APLICAR LA ESTRUCTURA DE CONTROL MPC
UNIFICADA**

Departamento: **Eléctrica, Electrónica y Computación**

Grado: **M.Sc.** Convocatoria: **Septiembre** Año: **2004**

Firma del autor

Tabla de Contenido

Tabla de Contenido	v
Índice de Cuadros	viii
Índice de Figuras	ix
RESUMEN	xi
ABSTRACT	xii
1. HISTORIA	1
1.1. Estado del arte	1
1.2. Restricciones y Optimización	5
1.2.1. Algoritmo	5
1.3. Control predictivo restringido subóptimo	6
1.3.1. Evolución histórica del MPC	7
2. GENERALIDADES DEL MODELO DE CONTROL PREDICTIVO	10
2.1. Formulación del MPC	10
2.2. Extensiones del MPC	12
2.2.1. Modelo de proceso inestable	13
2.2.2. Modelo de proceso no lineal	13
2.2.3. Modelo de perturbación estocástica	13
2.2.4. Función objetivo estocástica	14
2.2.5. Medidas disponibles	14
2.2.6. Restricciones	15
2.2.7. Período de muestreo	15
2.3. MPC sin restricciones de desigualdad: GPC	15
2.4. Estabilidad	19
2.4.1. ¿Qué es estabilidad?	19

2.4.2.	Estabilidad con respecto a las condiciones iniciales	20
2.4.3.	Estabilidad entrada salida	21
2.5.	Teoría MPC con propiedades predecibles	23
2.5.1.	Estabilidad	23
2.5.2.	MPC con modelo lineal. Una prueba de estabilidad	24
2.5.3.	MPC con modelo no lineal	25
2.5.4.	Una prueba de estabilidad para MPC con modelo no lineal	27
2.5.5.	Prueba de estabilidad y práctica MPC	28
2.5.6.	Estabilidad robusta y fragilidad del MPC restringido	30
3.	METODOLOGÍA UNIFICADA	36
3.1.	Propuesta de metodología MPC unificada	37
3.2.	Estructura de diseño de sistemas de control	38
3.3.	Optimización MPC en tiempo real (RTO)	42
3.4.	Alternativas del MPC	44
3.5.	Control de matriz dinámica (DMC). Algoritmo	44
3.5.1.	Predicción multi paso para DMC	46
3.5.2.	Función objetivo	52
3.5.3.	Restricciones	54
3.6.	Solución por programación cuadrática del problema de control	58
3.6.1.	Programas cuadráticos	58
3.6.2.	Formulación del problema de control como un programa cuadrático	59
3.7.	Aplicación DMC	61
3.7.1.	Algoritmo de horizonte móvil	62
3.8.	Sintonización	64
4.	APLICACIÓN	66
4.1.	Conversión a formato matemático	66
4.1.1.	Requerimientos de diseño	66
4.1.2.	Especificaciones del sistema	71
4.1.3.	Representación de los requerimientos	71
4.2.	Diseño del sistema de control	72
4.2.1.	Librerías	72
4.2.2.	Modelo de la columna	72
4.2.3.	Características de operación	72
4.3.	Validación del sistema de control	73
4.3.1.	Criterios de desempeño	73
4.3.2.	Simulación de modelos	73
4.4.	Modelos de comunicación, información del producto comercial	76

4.4.1. Análisis de resultados	76
5. CONCLUSIONES	87
A. FUNDAMENTOS DE CONTROL PREDICTIVO DE PROCESOS	89
A.1. Elementos del control predictivo	90
A.1.1. Concepto de horizonte móvil	91
A.2. Modelos y predicciones	92
A.2.1. Respuesta al impulso (FIR)	92
A.2.2. Predicción multi paso	93
A.2.3. Predicción multi paso basado en modelo FIR	94
A.2.4. Modelo de respuesta al escalón	96
A.2.5. Predicción multi etapa recursiva basada en el modelo de respuesta al escalón	99
A.2.6. Generalización Multivariable	101
A.2.7. Modelo función de transferencia	103
A.2.8. Modelo ARMAX	103
A.2.9. Modelo de perturbaciones	103
A.2.10. Predicciones multi paso modelo función de transferencia	104
A.2.11. Modelo en el espacio de estado	110
A.2.12. Predicción multi paso con modelo en espacio de estado	110
A.3. Función objetivo	112
A.4. Ley de control	114
A.5. Restricciones	115
A.5.1. Restricciones en los sistemas de control	115
A.5.2. Restricciones en las plantas de procesos	119
A.6. Investigación en sistemas de control restringidos	121
A.6.1. Aplicaciones Industriales	124
B. Programa DMC_final.m	127
Bibliografía	131

Índice de cuadros

A.1. Comparación productos comerciales MPC	125
--	-----

Índice de figuras

3.1. La visión del empresario	38
3.2. La visión completa de la tarea de diseño	39
3.3. Estrategia del diseño de control de procesos	40
3.4. Resultado de la aplicación del diseño de sistema de control	41
3.5. Diagrama de flujo de ciclo cerrado, sistema de optimización de planta en tiempo real	43
3.6. Configuración RTO en ciclo cerrado	44
3.7. Alternativas MPC.	45
3.8. Esquema modelo básico	46
4.1. Columna de destilación	68
4.2. Bandeja típica.	69
4.3. Bandeja de alimentación.	69
4.4. Control DMC sintonizado	78
4.5. Variación del horizonte de predicción. $P = 61$, línea sólida; $P = 21$, línea punteada; $P = 30$, línea guión-punto; $P = 100$, línea de guiones	79
4.6. Variación del horizonte de Control. $M = 21$, línea sólida; $M = 10$, línea punteada; $M = 30$, línea guión-punto; $M = 61$, línea de guiones; en todos los casos $\lambda = 43, 4109$	80
4.7. Variación del horizonte de Control. $M = 21$, línea sólida; $M = 10$, línea punteada; $M = 30$, línea guión-punto; $M = 61$, línea de guiones	81

4.8. Variación de la matriz de peso del esfuerzo de control. $\lambda = 43, 4109$, línea sólida; $\lambda = 1$, línea punteada; $\lambda = 15$, línea guión-punto; $\lambda = 80$, línea de guiones	82
4.9. Variación de la matriz de peso de la señal de control. $\gamma = 1$, línea sólida; $\gamma = 0,2$, línea punteada; $\gamma = 2$, línea guión-punto; $\gamma = 5$, línea de guiones	83
4.10. Control servo, variación del punto de control	84
4.11. Control servo, variación del punto de control y del horizonte de control M , línea sólida $M = 21$ y línea punteada $M = 61$	85
A.1. Esquema general MPC	91
A.2. Sistema general de control con varias restricciones, limitaciones y perturba- ciones	116
A.3. La característica de saturación típica	116
A.4. Control basado en modelo y función objetivo para un sistema variante en el tiempo	120

RESUMEN

El último par de décadas ha dado testimonio de un crecimiento en el uso de computadoras para el control avanzado de plantas de proceso. Rápidos incrementos en hardware de computación, combinado con la competencia empresarial y regulaciones gubernamentales han sido principalmente responsables para este desarrollo. El MPC (Propoi, 1963; Rafal y Stevens, 1968; Nour-Eldin, 1971) se llevó a cabo primero en la industria antes de que una comprensión completa de sus propiedades teóricas estuviese disponible. El interés académico en MPC empezó a crecer a mediados de los años ochenta, particularmente después de dos talleres organizados por la Shell (Prett y Morari, 1987; Prett et al., 1990). La comprensión de las propiedades MPC generada por las investigaciones esencialmente académicas (Morari y García, 1982; Rawlings y Muske, 1993) han construido una fuerte estructura conceptual y práctica para practicantes y teóricos. Aunque varios problemas en esa estructura son todavía abiertos, existe una fundamentación fuerte. Este trabajo reúne los elementos académicos, técnicos y administrativos; los funciona con el fin de presentar un punto de vista unificado del como se utiliza en la actualidad en forma integrada la estructura de control MPC. Es un compendio de abstracciones y extractos de libros, artículos y notas de clase que luego de un proceso de selección riguroso permiten formar un documento de primera mano para los interesados en el tema MPC.

ABSTRACT

The last couple of decades has given testimony of a growth in the use of computers for the advanced control of process plants. Quick increments in calculation hardware, cocktail with the managerial competition and government regulations have been mainly responsible for this development. The MPC (Propoi, 1963; Rafal and Stevens, 1968; Nour-Eldin, 1971) it was carried out first in the industry before a complete understanding of its theoretical properties is available. The academic interest in MPC began to grow by the middle of the years eighty, particularly after two shops organized by the Shell (Prett and Morari, 1987; Prett et to the., 1990). The understanding of the properties MPC generated by the essentially academic investigations (Morari and García, 1982; Rawlings and Muske, 1993) they have built a strong conceptual structure and practice for practitioners and theoretical. Although several problems in that structure are still open, a strong foundation exists. This work gathers the academic elements, technicians and administrative; it works them with the purpose of presenting an unified point of view of the like it is used at the present time in integrated form the control structure MPC. It is a summary of abstractions and extracts of books, articles and class notes that allow to form a document first hand for the interested ones in the topic MPC after a rigorous selection process.

Capítulo 1

HISTORIA

1.1. Estado del arte

Hacia la mitad de las décadas de los setentas y ochentas, el MPC se origino en la industria. Asesorado por el trabajo del Modelo de Control Heurístico Predictivo (MHRC) conocido más tarde como Modelo de Control Algorítmico (MAC) y por el Control de Matriz Dinámica (DMC), la estrategia se popularizó en la industria petroquímica. Durante este período aparecieron muchas variantes del MPC entre ellas, Control Adaptivo de Horizonte Extendido (EHAC), Control Auto Adaptivo Extendido Predictivo (EPSAC), Control Adaptivo Multi Etapa Multivariable (MUSMAR), Control Adaptivo Multipredictivo de Horizonte Decayente (MURHAC), Control Predictivo Funcional (PFC), Control Predictivo Unificado (UPC), Control Predictivo Generalizado (GPC) son algunos de los algoritmos desarrollados [3]. A pesar del extenso número de variaciones introducidas, no se difiere mucho en los algoritmos, típicamente ellos difieren en el modelo del proceso (impulso, escalón, espacio de estado), la clase de perturbación utilizada (una constante, una rampa, filtro con ruido blanco) y su implementación.

Durante los noventas, la teoría del MPC maduro sustancialmente. La principal razón es probablemente el uso de modelos en espacio de estados en lugar de los modelos entrada salida. Ello originó simplificaciones, unificó y generalizó la teoría. Para el caso de estados no accesibles (no medibles), el filtro de Kalman (usado muy fácilmente en la formulación del espacio de estados), simplificó la parte de estimación, la conexión con el control cuadrático lineal dio profundidad en el conocimiento. La teoría de estabilidad es casi solamente posible en la formulación del espacio de estados y una parte reciente de la teoría del MPC está basada

sobre las desigualdades con matrices lineales que son más convenientes para los métodos del espacio de estados. [4]

El MPC requiere de una solución de un problema de optimización en cada instante. Esto determina una secuencia de control que mueve la navegación del estado del sistema en un conjunto de puntos deseados. Una estrategia MPC es escoger frecuentemente las capacidades de manejo de las restricciones. Recientemente el método de punto interior ha sido propuesto para resolver las asociaciones del problema de optimización restringido. [13]

En [10] se ha propuesto una clase de ley de control de horizonte hacia atrás (retrocediendo) que esta basada totalmente en los métodos tradicionales de punto interior. En particular, una función de barrera hacia atrás es usada para regular los puntos del interior del conjunto restrictivo. [5]

Una mira a la aplicación del MPC muestra que su tecnología fue originalmente desarrollada para plantas de potencia y aplicaciones en la refinación del petróleo, pero en la actualidad se encuentra incluida en una amplia variedad de ambientes de manufactura incluida la química, el procesamiento de alimentos, las industrias automotriz, aeroespacial, metalúrgica y la pulpa de papel. Las publicaciones asociadas con la teoría y práctica de la tecnología MPC están resumidas varios artículos y revisiones recientes. En [6] se presenta una breve historia de la tecnología MPC y una encuesta de aplicaciones industriales. En [10] se resumieron las propiedades teóricas de los algoritmos MPC y en [9] se discute el pasado, presente y futuro de la tecnología MPC.

Usualmente el MPC usa modelo lineales discretos y en general los resultados del problema de optimización son no lineales y no convexos. Sin embargo, si el objetivo de control y las restricciones dependen monolíticamente de las salidas del sistema, el problema del MPC puede ser reconfigurado como un problema con un conjunto fiable y convexo. Si adicionamos una función objetivo convexa, esto lleva a un problema de optimización, que puede ser resuelto muy eficientemente. [7]

La identificación de múltiples variables en ciclo cerrado de procesos industriales de gran escala fue estudiada por el Método Asintótico (ASYM) [8]. Los cuatro problemas a resolver son el diseño de la señal de control, la selección de la estructura y el orden del modelo, la estimación de parámetros y la validación del modelo se resuelven de manera sistemática, el método utilizado provee exactitud del modelo entrada salida y del modelo de la perturbación no medida, el modelo del error es cuantificado por una matriz de error que puede ser usada para la validación del modelo y su rediseño.

La existencia de la tecnología industrial MPC tiene varias limitaciones, las más destacadas son: [3]

- Modelos sobre parametrizados. Muchos productos comerciales usan modelos de la planta de respuesta al escalón o al impulso, los cuales son sobre parametrizados. Por ejemplo, un proceso de primer orden puede ser descrito por una función de transferencia con tres parámetros, mientras que un modelo de respuesta al escalón requiere de más de 30 coeficientes. De otro lado, estos modelos no son válidos para procesos inestables. Este problema puede ser superado por el uso de modelos paramétricos autoregresivos.
- Sintonización. El procedimiento de sintonización no está claramente definido dado que el equilibrio entre los parámetros y el comportamiento del ciclo cerrado no es muy claro. La sintonización en presencia de restricciones debe ser aún más dificultosa y aún para el caso nominal, no es fácil garantizar estabilidad en ciclo cerrado; que es la causa que mucho esfuerzo debe ser realizado en las simulaciones. La factibilidad del problema es uno de los tópicos más desafiantes del MPC hoy en día.
- Sub optimalidad de la optimización dinámica. Algunos paquetes proveen soluciones subóptimas para minimizar la función de costo en orden de acelerar el tiempo de la solución. Esta puede ser aceptada en aplicaciones de alta velocidad (sistemas de rastreo) donde la solución del sistema en cada tiempo de muestreo no es factible, pero es dificultoso justificarlo para aplicación de control de procesos a menos que pueda ser mostrada que la solución subóptima es siempre muy cercana al óptimo.
- Incertidumbre del modelo A pesar de que los paquetes de identificación de modelos proveen estimaciones con incertidumbre, la gran mayoría no usa esta información para el diseño del controlador.
- Asumir perturbaciones constantes A pesar de que posiblemente la asunción más razonable es considerar que la perturbación puede permanecer constante en el futuro, la mejor realimentación puede ser posible si la distribución de la perturbación puede ser caracterizada con más cautela.
- Análisis Un análisis sistemático de las propiedades de estabilidad y robustez del MPC no es posible en la formulación original de horizonte finito. La ley de control es en

general variante en el tiempo y no puede ser representada en un prototipo de la forma de ciclo cerrado, especialmente en el caso de restricciones.

El éxito de la tecnología MPC como un paradigma de control de procesos puede ser atribuido a tres factores importantes. [6]

- Lo primero es la incorporación de un modelo explícito del proceso en los cálculos del controlador. Esto permite al controlador, en principio, tratar directamente con todas las características significativas de la dinámica del proceso.
- En segundo lugar, el algoritmo MPC considera la conducta de la planta sobre un futuro horizonte en el tiempo. Esto significa que los efectos de las perturbaciones anticipadas y de retroalimentación puedan ser anticipadas y removidas, permitiendo al controlador manejar la planta cerradamente a lo largo de una trayectoria deseada en el futuro.
- Finalmente, el control MPC considera las entradas, el estado y las restricciones de salida del proceso directamente en el cálculo de control. Esto significa que las violaciones a las restricciones sean poco probables, resultando en un control ajustado a las condiciones óptimas para el estado estable del proceso.

Es la inclusión de las restricciones lo que más claramente distingue el MPC de otros paradigmas de control de procesos.

En la actualidad se investigan las estrategias de [11]

- Modelo de Control Predictivo No Lineal (NMPC)
- El costo computacional
- La descripción de la planta como Modelo Múltiple
- El diseño de controladores para estabilizar la planta en una región dada
- El diseño de controladores libres de desviación (*offset*)

Un estudio de métodos [15] se da en García et al. (1989). Una versión ha resultado ser aceptada particular y ampliamente: el ahora muy conocido Control Predictivo Generalizado (GPC). Se introdujo por Clarke et al. (1987a,b) y fue conceptualmente basado en los

primeros algoritmos de Richalet et al. (1978) y Cutler y Ramaker (1980). Dada la apariencia del GPC, se han sugerido muchas extensiones y complementos. Éstos fueron unificados por Soeterboek (1992) dentro *Control Predictivo Unificado* llamado (UPC). Este control es ligeramente más flexible por lo que se refiere a la estructura del modelo, selección de criterios y parámetro de sintonía que el GPC. Bitmead et al. (1990) expuso críticamente el control predictivo generalizado y argumento que el problema de control sin restricciones para sistemas lineales se maneja bien por los métodos de diseño de controladores *Gaussian Cuadrático Lineal* (LQG).

Inicialmente, el control predictivo se vio como una alternativa para el control de desplazamiento de polos y de varianza mínima generalizada en sistemas autosintonizables y adaptables. El GPC tenía las propiedades agradables de ser aplicable a sistemas de fase no mínima o a sistemas inestables en ciclo abierto, a sistemas con tiempo muerto u orden desconocido, para nombrar algunos casos. Después, la habilidad del control predictivo para ocuparse de la entrada y el estado de sistemas restringidos ha recibido mucha atención, vea por ejemplo Mayne et al. (2000) para un estudio comprensivo con respecto a la estabilidad y optimalidad para el control predictivo restringido. Honestamente, la Programación Cuadrática (QP) puede resolver el problema restringido (García y Morshedi, 1984) pero la carga de cálculo puede ser exigente (Tsang y Clarke, 1988) y por consiguiente QP es relativamente lenta, conveniente principalmente para los procesos muestreados. Esto aumento la necesidad para otras soluciones más ampliamente aplicables y posiblemente subóptimas con menor complejidad de cálculo (Poulsen et al., 1999). El intercambio entre el desempeño del ciclo cerrado y la velocidad de cálculo es un problema importante.

1.2. Restricciones y Optimización

Declarado el problema de programación cuadrático restringido se debe buscar el mínimo y para ello se usa un algoritmo de optimización iterativo. Un algoritmo básico se describe en 1.2.1

1.2.1. Algoritmo

Boceto de algoritmo de optimización iterativo.

Optimizar x_0

```

1            $i \leftarrow 0$ 
2 while criterio de parada no es satisfecho
3     do  $d_i \leftarrow$  dirección de búsqueda
4      $\lambda_i \leftarrow$  paso en dirección de búsqueda
5          $x_{i+1} \leftarrow x_i + \lambda_i d_i$ 
6          $i \leftarrow i + 1$ 
7     evaluar el criterio de parada
8     return solución óptima

```

El algoritmo muestra básicamente dos rasgos que lo identifican como algoritmo de optimización: dirección de búsqueda, y tamaño de paso en la dirección de búsqueda.

Varias técnicas de programación cuadrática están disponibles para resolver el problema de minimización declarado (vea por ejemplo Luenberger (1984)) y se ha usado en un contexto de control de predictivo, por ejemplo por García y Morshedi (1984); Camacho (1993) y Chisci y Zappa (1999). Sin embargo, los métodos de QP son complejos, consumen tiempo (probablemente puede ser un problema en las aplicaciones de tiempo real electromecánicas), y puede llevar a problemas numéricos como lo señalo Rossiter et al. (1998). Así, los métodos de proyección de gradiente simple como *Rosen's* ha explorado (vea por ejemplo Bazaraa et al. (1993)) y aplicado al control predictivo, por ejemplo por Soeterboek (1992) y Hansen (1996). Sin embargo, en el caso de restricciones de velocidad, la complejidad de este algoritmo aumenta significativamente.

1.3. Control predictivo restringido subóptimo

Control Predictivo restringido Subóptimo (SCPC) ha sido el problema de Kouvaritakis et al. (1998) y Poulsen et al. (1999). Se renuncia a la búsqueda de una solución óptima en favor de una carga de cálculo disminuida. Tal acercamiento suboptimal es basado en una interpolación lineal entre la solución óptima sin restricciones y una solución conocida y *factible* (la solución no activa las restricciones). El problema de optimización se reduce a encontrar un solo parámetro de la interpolación y puede resolverse explícitamente. Según los autores, el grado de optimalidad para el método es grande y los beneficios de la solución coinciden con la solución óptima sin restricciones cuando es factible.

1.3.1. Evolución histórica del MPC

Este resumen de los cambios históricos del MPC se divide en tres fragmentos, el avance en conceptos y aplicaciones, los estudios en estabilidad y el manejo de las restricciones.

Avance en conceptos y aplicaciones

1963 Propoi: Receding Horizon Control

1976/78 Richalet MPHC: "Model Predictive Heuristic Control" (Modelo de control predictivo heurístico)

1979/80 Cutler y Ramaker: DMC "Dynamic Matrix Control" (Matriz Dinámica de Control)

(En ambos algoritmos, se considera un modelo basado en la respuesta del proceso para la predicción y el cálculo de la acción de control se basa en la minimización del error de predicción sujeto a restricciones operacionales)

1982 Rouhani y Mehr: Model Algorithmic Control (Modelo de Control Algorítmico)

1982 Garcia y Morari: Internal Model Control (Modelo de control interno)

1984 Peterka: Predictor-based Self-tuning Control

1984 Ydstie: EHAC "Extended Horizon Adaptive Control" (Control Adaptable de Horizonte Extendido)

(Se trata de llevar la salida futura cerca de la referencia en un instante de tiempo posterior al retardo del proceso y permite distintas estrategias según la señal de control se considere constante en un determinado intervalo o se quiera minimizar su valor o incremento)

1985 De Keyser y van Cauwenberghe: EPSAC "Extended Prediction Self Adaptive Control" (Control predictivo Extendido Auto Adaptable)

(Se propone una señal de control constante a partir del instante actual)

1987 Campo y 1994 Alwright: MPC con modelación de la incertidumbre paramétrica.

(Se diseña el CPBM optimizando la función objetivo para la situación más desfavorable de las incertidumbres en los parámetros del modelo)

1987 Clarke: GPC "Generalized Predictive Control" (Predictivo Control Generalizado)

(Se basa en una función cuadrática que incluye el error de predicción y la energía de control en instantes futuros. Además, el algoritmo GPC permite enfrentar sistemas complejos como sistemas inestables en lazo abierto y retardo de tiempo variable)

1987 Richalet: Predictive Functional Control (Control predictivo funcional)

1987 Campo y Morari: Robust Model Predictive Control (Control predictivo de modelo robusto)

1989 Kinnaert: Adaptive GPC for MIMO Systems

1989 Bitmead y otros: Adaptive Optimal Control vs. GPC

1989 Gawthrop y Demircioglu: Continuous-time GPC

1989 Li y otros: A State-space Formulation of MPC

1990 Soeterboek: Unified Predictive Control (Control Unificado Predictivo)

1990 Ricker: MPC With State Estimation

1994 Lee: State-space Interpretation of MPC

1991 Clarke y Scattolini: Constrained Receding-Horizon Predictive Control

1991 Bordons y Camacho: GPC adaptivo simplificado

(Este algoritmo es de fácil implementación en procesos industriales, basado en un modelo de primer orden para el sistema y que simplifica el cálculo de la acción de control).

1997 Kothare y otros: Robust Constrained MPC Using LMI (state-space)

Los estudios en estabilidad

1988 Hashimoto: Condiciones de estabilidad para sistemas multivariables con control predictivo

1988 Gyu Byun: Resultados de estabilidad para los algoritmos EHAC y GPC.

1992 Kouvaritakis y Rossiter: GPC, que asegura la estabilidad en lazo cerrado.

1992 Mosca: Algoritmo de control predictivo estable bajo condiciones específicas.

1993 Rawlings y Muske: The Stability of Constrained Receding Horizon Control (infinite horizon)

El manejo de las restricciones

1984/86 García y Morshedi: DMC con restricciones operacionales (QDMC "Quadratic Dynamic Matrix Control").

1988 Tsang: GPC con restricciones en las variables manipuladas para un horizonte de control de dos instantes de tiempo.

1989 García y 1990 Zafiriou: Problemas de control predictivo multivariable con restricciones

1993 Camacho: Problema similar con restricciones en las variables de entrada y salida, cuya solución se basa en transformar el problema de optimización cuadrática (QP "Quadratic Programming") en un problema lineal auxiliar para reducir el esfuerzo computacional.

1992 Madrid: Control GPC con restricciones utilizando programación dinámica.

1992 Demircioglu: GPC continuo con restricciones en el estado que garantiza la estabilidad del sistema.

1993 Rawlings: Factibilidad de las restricciones en el MBPC garantiza la estabilidad en lazo cerrado.

1994 Rossiter: Condiciones necesarias y suficientes para la factibilidad de restricciones y estabilidad del sistema

1995 Rossiter: GPC con restricciones en presencia de perturbaciones.

1996 Boucher: Tratamiento unificado para las restricciones de igualdad y desigualdad para el GPC basado en QP.

1997 Álvarez: Método para resolver infactibilidades de las restricciones para sistemas de control GPC multivariables.

Capítulo 2

GENERALIDADES DEL MODELO DE CONTROL PREDICTIVO

2.1. Formulación del MPC

Considere un proceso estable simple entrada simple salida (SISO) [14] con entrada u y salida y . Una formulación del problema MPC con optimización en línea puede ser en el tiempo k :

$$\min_{u[k|k], \dots, u[k+p-1|k]} \sum_{i=1}^p \delta_i (y[k+i|k] - r(k))^2 + \sum_{i=1}^m \lambda_i \Delta u[k+i|k]^2 \quad (2.1.1)$$

sujeto a

$$u_{\text{máx}} \geq u[k+i-1|k] \geq u_{\text{mín}}, i = 1, \dots, m \quad (2.1.2)$$

$$\Delta u_{\text{máx}} \geq \Delta u[k+i-1|k] \geq -\Delta u_{\text{máx}}, i = 1, \dots, m \quad (2.1.3)$$

$$y_{\text{máx}} \geq y[k+i|k] \geq y_{\text{mín}}, i = 1, \dots, p \quad (2.1.4)$$

dónde p y $m < p$ son las longitudes de los horizontes de predicción de la salida (N_p , variable controlada) y de la señal de control (N_c , entrada manipulada) del proceso, respectivamente;

$u[k + i - 1 | k]$, $i = 1, \dots, p$, es el conjunto de valores entrada futura del proceso con respecto a la optimización realizada, dónde

$$u[k + i | k] = u[k + m - 1 | k], i = m, \dots, p - 1 \quad (2.1.5)$$

$r(k)$ es el valor de referencia, $\delta(i)$ y $\lambda(i)$ son los factores de ponderación y Δ es el operador de diferencia hacia atrás, que da origen a los cambios en la velocidad de la señal de control; i.e.,

$$\Delta u[k + i - 1 | k] \hat{=} u[k + i - 1 | k] - u[k + i - 2 | k] \quad (2.1.6)$$

En la forma típica MPC (Prett y García, 1988), el problema de optimización anterior se resuelve en el tiempo k , y la entrada óptima $u[k] = u_{opt}[k | k]$ es aplicada al proceso. Este procedimiento se repite subsecuentemente en los tiempos $k + 1$, $k + 2$, etc.

Es claro que la formulación del problema anterior hace necesaria la predicción de salidas futuras $y[k + i | k]$ y a su vez es necesario el uso de un *modelo* para el *proceso* y otro para las *perturbaciones* externas. Asuma que el modelo de respuesta finita al impulso (FIR) describe la dinámica del proceso controlado.

$$y[k] = \sum_{j=1}^n h_j u[k - j] + d[k] \quad (2.1.7)$$

donde h_i son los coeficientes del modelo (es el módulo central de convolución) y d es una perturbación. Entonces

$$y[k + i | k] = \sum_{j=1}^n h_j u[k + i - j | k] + d[k + i | k] \quad (2.1.8)$$

donde

$$u[k + i - j | k] = u[k + i - j], i - j < 0 \quad (2.1.9)$$

La predicción de la perturbación futura $d[k + i | k]$ puede ser hallada con una aproximación o simplificación:

$$d[k + i | k] = d[k | k] = y[k] - \sum_{j=1}^n h_j u[k - j] \quad (2.1.10)$$

donde $y[k]$ el valor medido de la salida del proceso en el tiempo de muestreo k y $u[k-j]$ son los valores pasados de la entrada del proceso u . Substituyendo las ecuaciones (2.1.8) a (2.1.10) en las ecuaciones (2.1.1) a (2.1.4) obtenemos

$$\begin{aligned} \min_{u[k|k], \dots, u[k+p-1|k]_{i=1}} \sum_{i=1}^p \delta_i \left(\sum_{j=1}^n h_j u[k+i-j|k] - \sum_{j=1}^n h_j u[k-j] + y[k] - r(k) \right)^2 \\ + \sum_{i=1}^m \lambda_i \Delta u[k+i-1|k]^2 \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

sujeto a

$$u_{\text{máx}} \geq u[k+i-1|k] \geq u_{\text{mín}}, i = 1, 2, \dots, m \quad (2.1.12)$$

$$\Delta u_{\text{máx}} \geq \Delta u[k+i-1|k] \geq -\Delta u_{\text{máx}}, i = 1, 2, \dots, m \quad (2.1.13)$$

$$y_{\text{máx}} \geq \sum_{j=1}^n h_j u[k+i-j|k] - \sum_{j=1}^n h_j u[k-j] + y[k] \geq y_{\text{mín}}, i = 1, \dots, p \quad (2.1.14)$$

El problema de optimización anterior es un problema de programación cuadrática (QP) que puede resolverse fácilmente a cada instante de tiempo k .

2.2. Extensiones del MPC

La formulación anterior MPC era típica en las primeras aplicaciones industriales que se trataron en los procesos estables diseñados por el modelo de respuesta finita al impulso (FIR). Los modelos FIR, aunque no esencialmente se caracterizan por un algoritmo basado en modelo como MPC, tienen ciertas ventajas desde un punto de vista de aplicación práctica: pueden representar retrasos de tiempo y dinámicas complejas con igual facilidad. Los errores en la caracterización de ruido blanco o coloreado en los experimentos de ciclo abierto no introducen desviaciones en la estimación de los parámetros. No es necesario ningún conocimiento avanzado de modelamiento ni técnicas de identificación, si se usan experimentos simples de respuesta al escalón para la identificación del proceso. En lugar de un observador

o un estimador de estado de la teoría clásica de control óptima, un modelo del proceso es directamente empleado en el algoritmo para predecir las salidas futuras del proceso (Morari, 1988). Su principal desventaja es el uso de demasiados parámetros y que puede ser más pronunciado en el caso de sistemas multivariables.

Mientras una clase grande de procesos puede tratarse por esa formulación, clases más generales pueden ser manejadas por formulaciones MPC que se concentran en las siguientes características:

2.2.1. Modelo de proceso inestable

En este caso, un modelo de proceso FIR no puede usarse. Un modelo en el espacio de estados, los modelos paramétricos tales como CARIMA, ARIMAX, DARMAX pueden usarse. Como los sistemas MPC crecen en tamaño, la probabilidad de incluir una unidad inestable o marginalmente estable (integrante) aumenta. Para tales unidades, los modelos como los anteriores son necesarios.

2.2.2. Modelo de proceso no lineal

La no linealidad de los procesos químicos se documenta bien (Shinskey, pp. 55-56, 1967; Foss, 1973; Buckley, 1981; García y Prett, 1986; Morari, 1986; Informe de la IEEE, 1987; Comité de Informes NRC, Pág., 148, 1988; Fleming, 1988; Prett y García, Pág., 18, 1988; Edgar, 1989; Longwell, 1991; Bequette, 1991; Kane, 1993; Allgöwer y Doyle, 1997; Ogunnaike y Wright, 1997). Ejemplos típicos son columnas de destilación y reactores. Los modelos no lineales están generalmente mal definidos por modelos lineales y allí existían varias posibilidades para representar los sistemas no lineales. Los modelos basados en los primeros principios, empíricos, híbridos, en espacio de estados, entrada salida son estructuras posibles. Además, el desarrollo y adaptación de tales modelos son un problema central MPC.

2.2.3. Modelo de perturbación estocástica

Hay varias posibilidades de usar modelos de perturbación estocástica aparte, como el modelo mostrado de orden cero en la ecuación (2.1.10) (Ljung, 1987).

2.2.4. Función objetivo estocástica

La formulación MPC anterior asume que las salidas futuras del proceso son determinísticas sobre el horizonte finito de optimización. Para una representación más realista de las salidas futuras del proceso, uno puede considerar una predicción probabilística (estocástica) para $y[k+i|k]$ y la fórmula de la función objetivo debe contener una función de expectativa apropiada. Por ejemplo, si $y[k+i|k]$ es probabilística, entonces podría usarse la función de esperanza de la ecuación 2.1.1. Esta formulación, conocida como realimentación óptima de ciclo abierto, no tiene en cuenta el hecho que la información adicional estaría disponible en el momento futuro $k+i$, y asume que el sistema podría esencialmente correr en el modo de ciclo abierto sobre el horizonte de optimización. Una alternativa, produce una ley de realimentación óptima de ciclo cerrado y confía en la siguiente formulación de programación dinámica de la función objetivo:

$$\begin{aligned} \min_{u[k|k]} & (\delta(1) (y[k+1|k] - r(k))^2 + \Delta u[k|k]^2 + (\delta(2) (y[k+2|k+1] - r(k))^2 \\ & + \Delta u[k+1|k+1]^2 + \dots)) \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Mientras la ley de realimentación óptima de ciclo abierto no produce requisitos de cálculo pesados, la ley de realimentación óptima de ciclo cerrado se complica considerablemente más. En la práctica, la ley de realimentación óptima de ciclo abierto produce resultados que están cerca de aquellos producidos por la ley de realimentación óptima de ciclo cerrado. Sin embargo, hay casos para los cuales la ley de realimentación óptima de ciclo abierto puede ser de lejos inferior a la ley de realimentación óptima de ciclo cerrado. Rawlings et al. (1994) presenta un ejemplo relacionado con un sistema genérico organizado. Lee y Yu (1997) muestran que la realimentación óptima de ciclo abierto es, en general, inferior a la realimentación óptima de ciclo cerrado para procesos no lineales y procesos lineales con coeficientes inciertos. Ellos también desarrollaron varias leyes explícitas de realimentación óptima de ciclo cerrado para varios casos MPC sin restricciones.

2.2.5. Medidas disponibles

Para variables controladas que no se pueden medir directamente, las medidas deben ser inferidas empleando medidas de variables secundarias en conjunto con análisis de muestras

de laboratorio. Buenos métodos inferenciales confían en modelos íntegros. Además, los resultados de los análisis de laboratorio, se producen mucho menos frecuentemente que las estimaciones inferenciales, por lo tanto tienen que ser mezcladas las estimaciones inferenciales producidas con las medidas secundarias.

Para sistemas MPC que usan modelos de espacio de estados, normalmente no todos los estados son mensurables, esto hace necesario un estimador de estado (Lee et al, 1994).

2.2.6. Restricciones

Mientras las restricciones que ponen los límites en las entradas de proceso son triviales de formular, las restricciones de las salidas de proceso son más difíciles de encontrar, porque las salidas futuras del proceso $y[k+i|k]$ se predicen en términos de un modelo. Si la función de densidad de probabilidad de $y[k+i|k]$ es conocida, entonces las restricciones determinísticas sobre $y[k+i|k]$ pueden reemplazarse por restricciones probabilísticas de la forma

$$\Pr \{y[k+i|k] \leq y_{\text{máx}}\} \geq \alpha \quad (2.2.2)$$

(Schwarm y Nikolaou, 1997).

2.2.7. Período de muestreo

La selección del tiempo de muestreo t_k para que se realice la optimización en línea es una tarea importante, aunque no tanto como las otras tareas de diseño MPC. La situación vuelve más interesante cuando las medidas o decisiones tienen lugar a intervalos de tiempo diferentes para las variables (Lee et al., 1992). La multitud de escalas de tiempo diferentes es usualmente manejada a través de la descomposición del problema de optimización global en línea a la solución de sub problemas independientes, cada uno con una escala de tiempo diferente.

2.3. MPC sin restricciones de desigualdad: GPC

Cuando no hay restricciones de desigualdad (ecuaciones (2.1.12) a (2.1.14)), la minimización de la función objetivo cuadrática de la ecuación (2.1.1) tiene una simple solución de

forma cerrada, que puede expresarse como sigue. Las ecuaciones (2.1.8) y (2.1.10) producen

$$y_{k+1|k}^{k+p|k} = H u_{k|k}^{k+p-1|k} + G u_{k-n}^{k-1} + y[k] \quad (2.3.1)$$

dónde, se asume que $p > n$,

$$y_{k+1|k}^{k+p|k} \triangleq [y[k+1|k] \cdots y[k+p|k]]^T \quad (2.3.2)$$

$$u_{k|k}^{k+p-1|k} \triangleq [u[k|k] \cdots u[k+p-1|k]]^T \quad (2.3.3)$$

$$u_{k-n}^{k-1} \triangleq [u[k-n] \cdots u[k-1]]^T \quad (2.3.4)$$

$$y[k] \triangleq \underbrace{[y[k] \cdots y[k]]^T}_p \quad (2.3.5)$$

$$H \triangleq \left. \begin{bmatrix} h_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & h_1 & 0 & & \vdots \\ h_n & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & h_n & \cdots & h_1 \end{bmatrix} \right\} p \quad (2.3.6)$$

$$G \triangleq \left. \begin{bmatrix} 0 & h_n & \cdots & h_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & h_n \\ \vdots & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \right\} p - \left. \begin{bmatrix} h_n & \cdots & h_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ h_n & \cdots & h_1 \end{bmatrix} \right\} p \quad (2.3.7)$$

y la ecuación (2.1.1) se convierte en

$$\begin{aligned}
& \min_{u_{k|k}^{k+p-1|k}} \left(y_{k+1|k}^{k+p|k} - r(k) \right)^T W \left(y_{k+1|k}^{k+p|k} - r(k) \right)^T + \left(\Delta u_{k|k}^{k+m-1|k} \right)^T R \left(\Delta u_{k|k}^{k+m-1|k} \right) = \\
& \min_{u_{k|k}^{k+p-1|k}} \left(H J u_{k|k}^{k+p-1|k} + G u_{k-n}^{k-1} + y[k] - r(k) \right)^T W \left(H J u_{k|k}^{k+p-1|k} + G u_{k-n}^{k-1} + y[k] - r(k) \right)^T + \\
& \left((I - P) u_{k|k}^{k+p-1|k} - Q u_{k-n}^{k-1} \right)^T R \left((I - P) u_{k|k}^{k+p-1|k} - Q u_{k-n}^{k-1} \right) \quad (2.3.8)
\end{aligned}$$

donde

$$r(k) = \underbrace{[r(k) \cdots r(k)]^T}_p \quad (2.3.9)$$

$$u_{k|k}^{k+m-1|k} \triangleq [u[k|k] \cdots u[k+m-1|k]]^T \quad (2.3.10)$$

$$\Delta u_{k|k}^{k+m-1|k} \triangleq [\Delta u[k|k] \cdots \Delta u[k+m-1|k]]^T \quad (2.3.11)$$

$$W \triangleq \text{Diag}(\delta_1 \quad \cdots \quad \delta_p) \quad (2.3.12)$$

$$R \triangleq \text{Diag}(\lambda_1 \quad \cdots \quad \lambda_m) \quad (2.3.13)$$

$$P \triangleq \left. \begin{array}{c} \overbrace{\left[\begin{array}{ccccc} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]}^m \\ \end{array} \right\} m \quad (2.3.14)$$

$$Q \triangleq \left. \begin{array}{c} \overbrace{\left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}^n \\ \end{array} \right\} m \quad (2.3.15)$$

y

$$J \triangleq \underbrace{\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right]}_m \left. \vphantom{\begin{array}{c} \left[\right]} \right\} m \\ \cdots \\ \underbrace{\left[\begin{array}{cccc} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right]}_m \left. \vphantom{\begin{array}{c} \left[\right]} \right\} p-m \end{array} \right\} p \quad (2.3.16)$$

La solución directa de este problema de optimización es:

$$\begin{aligned} u_{opt_k|k}^{k+p-1|k} &= J u_{opt_k|k}^{k+m-1|k} \\ &= J [(I - P)^T R (I - P) + J^T H^T W H J]^{-1} \\ &\quad [J^T H^T W e[k] - ((I - P)^T R Q + J^T H^T W G) u_{k-n}^{k-1}] \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

donde $e[k] \triangleq r[k] - y[k]$ y la entrada $u[k]$ podría ser implementada

$$u[k] = \underbrace{\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right]}_p u_{opt_k|k}^{k+p-1|k}$$

Por consiguiente, el controlador es un control lineal invariante en el tiempo y no es necesaria ninguna optimización en línea. La teoría de control lineal, para la que hay una inmensa literatura puede usarse equivalentemente en el análisis o diseño sin restricciones MPC (Morari y García, 1982). Un resultado similar puede obtenerse para varias variantes MPC, con tal de que la función objetivo de la ecuación 2.1.1 sea una función cuadrática $u_{opt_k|k}^{k+p-1|k}$ y el modelo del proceso ecuación (2.3.1) permanezca lineal en $u_{opt_k|k}^{k+p-1|k}$. Observe que la apariencia de la salida medida del proceso $y[k]$ ecuación (2.3.1) introduce la información necesitada por MPC para que sea un controlador de realimentación. Este es el espíritu de la teoría de control óptima lineal clásica, en la cual el estado del proceso controlado $x[k]$ contiene la información necesitada por el control realimentado.

Si uno realiza el análisis y diseño usando directamente una forma cerrada MPC como en la ecuación (2.1.1) o su forma equivalente de optimización en línea, ecuación (2.3.17), es un asunto de conveniencia en la traslación de los requisitos de ingeniería a ecuaciones de diseño. Por ejemplo, la ecuación (2.3.17) puede usarse para determinar los polos del controlador y por consiguiente la conducta de ciclo cerrado (por ejemplo, estabilidad, ceros, desplazamiento, etc.). De otro lado, la ecuación (2.1.1) puede usarse para ayudar directamente a sintonizar el sistema MPC. Por ejemplo, hacemos intuitivamente claridad sobre el “menor” de la matriz R , el más rápido ciclo cerrado puede ser un riesgo de proximidad a la inestabilidad. Semejantemente, la salida del proceso y seguirá los cambios escalón en el punto de ajuste $r(k)$ si la longitud del horizonte de predicción p es suficiente. Una apreciación global MPC dentro de una estructura de control lineal puede encontrarse en Mosca (1995). Clarke y colaboradores han usado el término control predictivo generalizado (GPC) para describir esencialmente el algoritmo MPC sin restricciones (Clarke et al., 1987; Bitmead et al., 1990).

2.4. Estabilidad

2.4.1. ¿Qué es estabilidad?

El concepto de estabilidad es central en el estudio de sistemas dinámicos. Hablando sin excesos, la estabilidad es la propiedad de los sistemas dinámicos que relaciona la “buena” conducta de ese sistema por largo tiempo. Mientras la estabilidad por si sola no puede garantizar necesariamente desempeño satisfactorio de un sistema dinámico, no es concebible que un sistema dinámico pueda desempeñarse bien sin ser estable.

La estabilidad puede cuantificarse de varias maneras diferentes, cada una proporciona una visión de los aspectos particulares y la conducta del sistema dinámico. Las descripciones matemáticas del sistema y sus alrededores son necesarias para los resultados cuantitativos. Dos amplias clases de definiciones de estabilidad son asociadas con:

1. Estabilidad con respecto a las condiciones iniciales y
2. Estabilidad entrada salida,

respectivamente. Las dos clases son complementarias y también pueden combinarse. Para sistemas lineales son, en general, dos clases equivalentes. Sin embargo, ellas son diferentes (aunque interrelacionadas) para dinámicas no lineales.

2.4.2. Estabilidad con respecto a las condiciones iniciales

Considere un sistema descrito por una ecuación en diferencias vectorial

$$x[k+1] = f(k, x[k]), \quad k \geq 0 \quad (2.4.1)$$

dónde $x : Z_+ \rightarrow \mathfrak{R}^n$ y $f : Z_+ \times \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$. Sin pérdida de generalidad, el vector 0 se asume como un punto de equilibrio del sistema (2.4.1). Se dice que un sistema es estable alrededor del punto de equilibrio 0 si el estado x eventualmente regresa a 0 cuando su valor inicial es cualquier lugar dentro una pequeña vecindad alrededor de 0. La declaración precedente se toma con precisión en las siguientes definiciones.

Definición 1 Estabilidad

El punto de equilibrio **0** en tiempo k_0 de la ecuación (2.4.1) se dice que es *estable* para tiempo k_0 si, para cualquier $\varepsilon > 0$, allí existe un $\delta(k_0, \varepsilon) > 0$ tal que

$$\|x[k_0]\| < \delta(k_0, \varepsilon) \Rightarrow \|x[k]\| < \varepsilon, \forall k \geq k_0 \quad (2.4.2)$$

Definición 2 Estabilidad uniforme

El punto de equilibrio 0 en tiempo k_0 de la ecuación (2.4.1) se dice que es *uniformemente estable* sobre $[k_0, \infty]$ si, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\left. \begin{array}{l} \|x[\ell]\| < \delta(\varepsilon) \\ \ell \geq k_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \|x[k]\| < \varepsilon, \forall k \geq \ell \quad (2.4.3)$$

Definición 3 Estabilidad asintótica

El punto de equilibrio 0 en tiempo k_0 de la ecuación (2.4.1) se dice que es *asintóticamente estable* para tiempo k_0 si

1. es estable en el tiempo k_0 y
2. existe un $\delta(k_0) > 0$ tal que

$$\|x[k_0]\| < \delta(k_0) \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|x[k]\| = 0 \quad (2.4.4)$$

Definición 4 Estabilidad asintótica uniforme

El punto de equilibrio 0 en tiempo k_0 de la ecuación (2.4.1) se dice que es *uniformemente y asintóticamente estable* sobre $[k_0, \infty]$ si

1. es uniformemente estable sobre $[k_0, \infty]$ y
2. existe un $\delta > 0$ tal que

$$\left. \begin{array}{l} \|x[\ell]\| < \delta \\ \ell > k_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|x[k]\| = 0 \quad (2.4.5)$$

Definición 5 Estabilidad asintótica global

El punto de equilibrio 0 en tiempo k_0 de la ecuación (2.4.1) se dice que es *global asintóticamente estable* si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x[k]\| = 0 \quad (2.4.6)$$

para algún $x[k_0]$

Comentarios

- Aunque no hay ningún requisito en la magnitud de δ que aparece en las definiciones anteriores, en la práctica δ se desea que sea tan grande como sea posible, para asegurar un posible rango más grande de estados iniciales que en el futuro lleguen a 0.
- No es importante que la norma particular $\|*\|$ en \mathfrak{R}^n sea usada en las ecuaciones (2.4.2) y (2.4.3), porque cualquiera de las dos normas $\|*\|_a$ y $\|*\|_b$ en \mathfrak{R}^n son equivalentes, por ejemplo, existen constantes positivas k_1 y k_2 tal que $k_1 \|x\|_a \leq \|x\|_b \leq k_2 \|x\|_a$ para cualquier $x \in \mathfrak{R}^n$. Veremos que la opción de norma particular es importante en la estabilidad entrada salida.
- Como las definiciones anteriores insinúan, para que un sistema no sea estable alrededor de 0, no es necesario para el sistema producir señales que crezcan sin límite.

2.4.3. Estabilidad entrada salida

La estabilidad entrada salida se refiere al efecto de las entradas del sistema sobre las salidas del sistema. Por consiguiente, el énfasis es cómo las magnitudes de las entradas y las salidas están relacionadas. Estas ideas de magnitud, sistema y estabilidad se explican a continuación.

Definición 6 Las normas p

La magnitud de una señal $x : Z_+ \rightarrow \mathfrak{R}^n$ se cuantifica por su norma p , definida como

$$\|x\|_p \hat{=} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|x[k]\|^p \right)^{1/p} \quad (2.4.7)$$

dónde $1 \leq p \leq \infty$ y $\|x[k]\|$ puede ser cualquier norma Euclidiana en \mathfrak{R}^n

Basados en la definición anterior, podemos proporcionar una primera definición de estabilidad.

Definición 7 Estabilidad entrada limitada salida limitada (BIBO)

Un sistema S , mapeando una señal de entrada u a una señal de salida x con $S(0) = 0$, es estable si una entrada limitada produce una salida limitada, es decir,

$$\|u\|_p < \infty \Rightarrow \|x\|_q < \infty \quad (2.4.8)$$

Una declaración alternativa de la ecuación (2.4.8) es

$$u \in l_p^m \Rightarrow x \in l_q^m \quad (2.4.9)$$

donde

$$l_p^m \hat{=} \left\{ z : Z \rightarrow \mathfrak{R}^m \mid \|z\|_p < \infty \right\} \quad (2.4.10)$$

Una convención usual es escoger $p = q$ en la definición 7, aunque pueden seleccionarse valores diferentes para p y q .

La definición 7 es útil para caracterizar la *inestabilidad* de una manera significativa.

Definición 8 Estabilidad de ganancia finita (FG)

Un sistema $S : l_p^m \rightarrow l_q^n : u \mapsto x \hat{=} Su$, es de *ganancia finita* estable si la ganancia (norma inducida) de S es finita, es decir,

$$\|S\|_{i,pq} \hat{=} \sup_{u \in l_p^m - \{0\}} \frac{\|x\|_q}{\|u\|_p} < \infty \quad (2.4.11)$$

La limitación de Definición 8 es que la señal de entrada u puede variar sobre el espacio entero l_p^m . Esto crea dos problemas:

1. El espacio entero l_p^m puede contener las señales físicas sin sentido; y

2. Las características de estabilidad de S pueden ser diferentes sobre diferentes subconjuntos de l_p^m .

Choi y Manousiouthakis (1997) recientemente introdujeron el concepto de ganancia finita inicial para condiciones de estabilidad, para combinar las visiones proporcionadas por cada uno de los dos tipos de estabilidad anteriores:

Definición 9 Condiciones de estabilidad para ganancia finita inicial

Un sistema $S : l_p^m \rightarrow l_q^n : u \mapsto x \hat{=} Su$ es estable para ganancia finita sobre el conjunto U en condiciones iniciales $s[0]$ en el conjunto S si se mantiene la siguiente desigualdad:

$$\sup_{\substack{u \in U \\ s[0] \in S}} \frac{\|x\|_q}{\|u\|_p} < \infty \quad (2.4.12)$$

La ventaja de la definición anterior es que da una caracterización completa de la conducta de estabilidad de un sistema. Su desventaja es que el cómputo del lado izquierdo en la ecuación (2.4.12) no es trivial.

2.5. Teoría MPC con propiedades predecibles

2.5.1. Estabilidad

Debido a que ningún control equivalente lineal invariante en el tiempo existe para un controlador MPC restringido, determinando la estabilidad de un sistema restringido MPC de ciclo cerrado no se puede confiar en métodos adecuados para sistemas lineales, como la determinación de los polos de la matriz de transferencia de ciclo cerrado. Recientes desarrollos han vertido una luz en la estabilidad del MPC restringido. El origen de demostrar la estabilidad MPC restringido ya fue planteado por Economou (1985) quién postuló, antes de que su vida alcanzara un fin trágico, que podría establecerse esa estabilidad de ciclo cerrado para MPC restringido usando el teorema reducción del mapeo. Mayne y Michalska (1991) y Rawlings y Muske (1993), a través de artículos, desarrollaron estructuras activas para establecer la estabilidad de ciclo cerrado en tiempo continuo y tiempo discreto de sistemas MPC restringidos, respectivamente. Estos trabajos proveen las herramientas correctas para

el estudio de un gran problema de control considerado difícil. A continuación se presenta una discusión de ideas pertinentes.

2.5.2. MPC con modelo lineal. Una prueba de estabilidad

Considere la siguiente descripción de espacio de estado de un proceso lineal, invariante en el tiempo (no necesariamente estable)

$$x[k+1] = Ax[k] + Bu[k] \quad (2.5.1)$$

dónde $x \in \mathfrak{R}^{n_x}$, $u \in \mathfrak{R}^{n_u}$. Asumimos el conocimiento perfecto de las matrices A y B , la información estado completo $x[k]$, y ausencia de perturbaciones. El objetivo MPC en el tiempo k es

$$\min_{u[k|k], \dots, u[k+p-1|k]} J[k] \quad (2.5.2)$$

donde

$$J[k] \hat{=} \sum_{i=1}^p x[k+i|k]^T W x[k+i|k] + \sum_{i=1}^p x[k+i-1|k]^T R u[k+i-1|k] \quad (2.5.3)$$

W es una matriz definida positiva y R es una matriz semi definida positiva. El estado y las restricciones de entrada son

$$G[k+i-1]u[k+i-1|k] < g[k+i-1], \quad i = 1, \dots, p \quad (2.5.4)$$

$$H[k+i]x[k+i|k] \leq h[k+i], \quad i = 1, \dots, p \quad (2.5.5)$$

Se asume que las restricciones anteriores definen regiones no vacías (convexas) que contienen el punto $(0, 0)$.

La estabilidad MPC de ciclo cerrado puede establecerse usando el siguiente argumento de Lyapunov (Rawlings et al., 1994). Asuma que $G[k+i-1]$, $g[k+i-1]$, $H[k+i]$ y $h[k+i]$ son independientes de k e i . Considere una solución

$$U_{opt_{k|k}}^{k+p-1|k} = \{u_{opt}[k|k], \dots, u_{opt}[k+p-1|k]\} \quad (2.5.6)$$

para la ecuación (2.5.2) en el tiempo k , y asuma que p es lo bastante grande para que $x[p] = 0$. Considere el siguiente candidato de control para la entrada en el tiempo $k+1$:

$$U_{k+1|k+1}^{k+p-1|k+1} = \{u_{opt}[k+1|k], \dots, u_{opt}[k+p-1|k], 0\} \quad (2.5.7)$$

$U_{k+1|k+1}^{k+p-1|k+1}$ es factible en el tiempo $k+1$, porque contiene la entrada u que satisfizo las mismas restricciones en el tiempo k . Los resultados de las entradas factibles anteriores en un valor de la función objetivo $J[k+1]$ que satisfacen

$$J[k+1] = J_{opt}[k] - x[k]^T W x[k] - u[k]^T R u[k] \quad (2.5.8)$$

Debido a la optimidad, las salidas de la ecuación anteriores

$$\begin{aligned} J_{opt}[k+1] &\leq J[k+1] \\ &= J_{opt}[k] - x[k]^T W x[k] - u[k]^T R u[k] \\ &\leq J_{opt}[k] \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

donde las últimas desigualdades resultan en matrices W semi definida positiva y R definida positiva. Por consiguiente, la sucesión $\{J[k]_{k=k_0}^{\infty}\}$ es no creciente. También se limita debajo de 0. Por consiguiente, la sucesión $\{J[k]_{k=k_0}^{\infty}\}$ converge, es decir $\lim_{k \rightarrow \infty} J[k] = a$. Para mostrar que $a=0$, restructure la ecuación (2.5.9), para conseguir

$$\begin{aligned} x[k]^T W x[k] + u[k]^T R u[k] &\leq J_{opt}[k] - J_{opt}[k+1] \Rightarrow \\ \lim_{k \rightarrow \infty} (x[k]^T W x[k] + u[k]^T R u[k]) &\leq J_{opt}[k] - \lim_{k \rightarrow \infty} J_{opt}[k+1] = 0 \Rightarrow \\ \lim_{k \rightarrow \infty} x[k] &= 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} u[k] = 0 \end{aligned}$$

y la estabilidad de ciclo cerrado es probada.

2.5.3. MPC con modelo no lineal

La prueba de estabilidad de Lyapunov como se presentara en la sección 3.5.2 puede extenderse a los sistemas no lineales. Porque los sistemas no lineales están definidos, por que ellos no son (a saber lineal), la estructura de la prueba resultante debe ser definida precisamente. Usando temporalmente a Rawlings (1994) y Meadows et al. (1995), consideramos

sistemas dinámicos de la forma

$$x[k+1] = f(x[k], u[k]) \quad (2.5.10)$$

dónde $f : \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}^n$ es continua y $f(0,0) = 0$. Se asume que el estado x es mensurable. El problema de optimización MPC en línea se vuelve

$$\min_{u[k|k], \dots, u[k+p-1|k]} I[k] \quad (2.5.11)$$

donde

$$I[k] \hat{=} \sum_{i=0}^{p-1} L(x[k+i|k], u[k+i|k]) \quad (2.5.12)$$

sujeto a la ecuación (2.5.11) y el estado, entrada, y los restricciones terminales

$$x[k+i|k] \in X[k+i], \quad i = 0, \dots, p-1 \quad (2.5.13)$$

$$u[k+i|k] \in U[k+i], \quad i = 0, \dots, p-1 \quad (2.5.14)$$

La función $L : \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}$ que aparece en la ecuación (2.5.12) se asume que satisface las siguientes propiedades:

$$L(0,0) = 0 \quad (2.5.15)$$

Existe una función no decreciente

$$\gamma : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) \quad (2.5.16)$$

tal que $\gamma(0) = 0$ y $0 < \gamma(\|x, u\|) \leq L(x, u)$ para todo $(x, u) \neq (0, 0)$

Esto lleva a las siguientes propiedades adicionales de L :

$$L(x, u) > 0 \quad \forall \quad (x, u) \neq (0, 0) \quad (2.5.17)$$

$$L(x, u) = 0 \Leftrightarrow (x, u) = (0, 0) \quad (2.5.18)$$

$$L(x, u) \rightarrow 0 \Rightarrow (x, u) \rightarrow (0, 0) \quad (2.5.19)$$

La función J en el ecuación (2.5.3) satisface todas las condiciones anteriores.

Como en el caso lineal, una prueba para la estabilidad de ciclo cerrado puede construirse, si puede garantizarse que

$$x[k + p | k] = 0 \quad (2.5.20)$$

La ecuación (2.5.20) puede satisfacerse si se escoge la longitud del horizonte móvil p , sea lo “ bastante grande”, o si la restricción en la ecuación (2.5.20) está directamente incorporada en el problema de optimización en línea. En cualquier caso, una prueba de estabilidad de ciclo cerrado puede construirse como sigue.

2.5.4. Una prueba de estabilidad para MPC con modelo no lineal

Como en el caso lineal, asumimos conocimiento perfecto de f , la información estado completo de $x[k]$, y ausencia de perturbaciones. Se asume que las restricciones definen regiones no vacías (convexo) que contienen el punto $(0, 0)$. También se asume que $X[k + i]$ y $U[k + i]$ son independiente de k e i . Asumamos que existe una solución

$$U_{opt_{k|k}}^{k+p-1|k} = \{u_{opt}[k | k], \dots, u_{opt}[k + p - 1 | k]\} \quad (2.5.21)$$

para la ecuación (2.5.11) en el momento k , corresponde para $x[p] = 0$. Considere el siguiente candidato para control de entrada en el tiempo $k + 1$:

$$U_{opt_{k+1|k+1}}^{k+p|k} = \{u_{opt}[k + 1 | k], \dots, u_{opt}[k + p - 1 | k], 0\} \quad (2.5.22)$$

$U_{opt_{k|k}}^{k+p-1|k}$ es factible en el tiempo $k+1$, porque contiene la entrada u que satisfizo las mismas restricciones en el tiempo k , el punto $(0, 0)$ se ha asumido que es factible, y se asume que f es conocida perfectamente. Los resultados de las entradas factibles anteriores

son valores de la función objetivo $I[k + 1]$ que satisfacen

$$\begin{aligned} I_{opt}[k + 1] &\leq I[k + 1] \\ &= I_{opt}[k] - L(x[k]u[k]) \\ &\leq I_{opt}[k] \end{aligned} \tag{2.5.23}$$

donde los últimos resultados de la desigualdad dan L semi definida positiva. Por consiguiente, la sucesión $\{I[k]_{k=k_0}^{\infty}\}$ es no creciente. También se limita por debajo de 0. Por consiguiente, la sucesión $\{I[k]_{k=k_0}^{\infty}\}$ converge a un límite b .

Para mostrar ese $b = 0$, restructure la ecuación (2.5.23), para conseguir

$$\begin{aligned} 0 &\leq L(x[k]u[k]) \leq I_{opt}[k] - I_{opt}[k + 1] \Rightarrow \\ 0 &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} L(x[k]u[k]) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} (I_{opt}[k] - I_{opt}[k + 1]) = 0 \Rightarrow \\ \lim_{k \rightarrow \infty} L(x[k]u[k]) &= 0 \Rightarrow \\ \lim_{k \rightarrow \infty} (x[k]u[k]) &= (0, 0) \end{aligned}$$

donde la última igualdad sigue la propiedad (2.5.19) de la función L . Esto completa la prueba de estabilidad de ciclo cerrado.

2.5.5. Prueba de estabilidad y práctica MPC

Las pruebas de estabilidad anteriores son relativamente simples. Ellas confían en la desigualdad

$$0 \leq L(x[k]u[k]) \leq I_{opt}[k] - I_{opt}[k + 1] \tag{2.5.24}$$

Se comprueban los vínculos de las desigualdades anteriores en varias suposiciones, de las cuales las siguientes son importantes:

1. El problema de optimización en línea, ecuaciones (2.5.2) o (2.5.11), es factible.
2. El estado puede dirigirse al punto de ajuste a lo sumo en p etapas, es decir $x[p] = 0$
3. El modelo del proceso controlado A y B en la ecuación (2.5.1) o f en la ecuación (2.5.10) es perfecto.
4. No hay perturbaciones externas.

5. El estado x es medible.
6. La entrada y las restricciones de estado, ecuaciones (2.5.4) y (2.5.5) o (2.5.13) y (2.5.14) son independientes del tiempo.
7. El óptimo global del problema de optimización en línea, incluye la restricción terminal $x[k + p | k] = 0$ que puede ser computado exactamente.

Para procesos estables, los practicantes de MPC han asegurado tradicionalmente que las suposiciones 1 y 2 son satisfechas si:

1. Se selecciona p lo bastante grande y
2. Si se realiza la optimización con respecto a $u[k | k], \dots, u[k + m | k]$, donde $m \ll p$.

Rawlings y Muske (1993) han mostrado que la idea anterior puede extenderse a los procesos inestables. Además de garantizar la estabilidad, su acercamiento mantiene una manera computacionalmente eficaz para la aplicación en línea. Su idea es empezar con un horizonte de control finito (decisión) pero un horizonte de predicción infinito (función objetivo), es decir, $m < \infty$ y $p = \infty$ y entonces usar el principio de optimalidad de Bellman y los resultados de la teoría de control óptimo para sustituir el objetivo de horizonte de predicción infinito por un objetivo de horizonte de predicción finito más un término de penalización terminal de la forma:

$$x[p]^T P x[p] \quad (2.5.25)$$

correspondiente al valor óptimo de la parte truncada de la función objetivo original. Chen y Allgöwer (1996) han presentado una extensión de la idea anterior a MPC con modelos no lineales y restricciones a la entrada. Ellos computan el término de penalización terminal fuera de línea como la solución apropiada de una ecuación de Lyapunov. Genceli y Nikolaou (1995) han mostrado cómo asegurar la viabilidad y como consecuencia como asegurar la estabilidad robusta para MPC no lineal con modelos Volterra.

Seleccionando p lo bastante grande no es la única manera de garantizar las suposiciones 1 y 2. Se podría directamente incluir una restricción de finalización $x[p] = 0$ en el problema de optimización en línea, una idea propuesta por varios investigadores (Kleinman, 1970;

Thomas, 1975; Keerthi y Gilbert, 1988; Mayne y Michalska, 1990). Esta restricción no presenta ningún desafío de cálculo serio en la aplicación en línea. Otras opciones también son posibles, basadas, por ejemplo, en restringir $x(p)$ para pertenecer a las pequeñas vecindades del punto de ajuste (Mayne, 1996) o en los argumentos de la restricción de estados (Morari y de Oliveira, 1997; Mayne, 1997).

Los procesos inestables proponen un desafío adicional, que la estabilización sólo es posible si el estado $x(k)$ se encuentra en un cierto dominio, para que, aunque la entrada pueda restringirse bastante (ecuación (2.1.2)), la acción de control pueda estar disponible. Si el estado no está en el dominio de estabilizabilidad entonces nada puede hacerse para dirigir el estado al punto de ajuste.

La viabilidad de estados restringidos es un problema común (Teorema 1 en Rawlings et al., 1994). Cuando tengan que ser satisfechas las restricciones de salida, como en la ecuación (2.1.4), entonces podría ocurrir que una adecuada acción de control esté disponible, debido a las restricciones como en la ecuación (2.1.2). Si tal incapacidad se descubre, uno puede usar las variables de relajación adicionales para modificar las restricciones de salida así:

$$y_{\text{máx}} + \varepsilon \geq y[k + i | k] \geq y_{\text{mín}} - \varepsilon, \quad i = 1, \dots, p \quad (2.5.26)$$

y agregar un término $q\varepsilon^2$ a la función objetivo en la ecuación (2.1.1).

La prueba de estabilidad puede extenderse para ocuparse de perturbaciones externas limitadas (suposición 4) por adición contable, aunque los resultados pueden ser conservativos. Alternativamente, se puede introducir un integrador en la salida del proceso y mostrar la estabilidad de un sistema integrante sin perturbaciones.¹

2.5.6. Estabilidad robusta y fragilidad del MPC restringido

Para mostrar la desigualdad (2.5.24), se han hecho las suposiciones precedentes 1 a 7. Cuando las suposiciones 1, 4, y 5 no están satisfechas, se originan los problemas de *robustez*, porque el proceso se comporta diferentemente que como lo asumió el controlador. Cuando la suposición 7 no está satisfecha, entonces se originan los problemas de *fragilidad*, porque el controlador se comporta diferentemente que como se diseñó. Debe mencionarse que el

¹Por ejemplo, el modelo FIR de la ecuación 2.1.7 puede ser sustituido por $y[k] = y[k+1] + \sum_{j=1}^n h_j u[k-j]$, por esa razón eliminamos la perturbación escalón d

problema de fragilidad no se confina a los sistemas MPC restringidos. Keel y Bhattacharya (1997) mostraron que incluso en los sistemas de control lineales invariantes en el tiempo, hay controladores que con desviaciones sumamente pequeñas de los valores de los parámetros del controlador a las de sus valores de diseño pueden producir la inestabilidad.

Estabilidad robusta

Para asegurar estabilidad robusta con la presencia de incertidumbres en el modelo, asegúrese que se satisface la desigualdad (2.5.24), aunque las matrices A y B en la ecuación (2.5.1) o la función f en la ecuación (2.5.10) no se conozcan perfectamente. La desigualdad (2.5.24) también tiene que ser satisfecha cuando las perturbaciones externas entran en el sistema. Dos acercamientos han aparecido en la literatura.

1. Escoger los parámetros de MPC normal y la función objetivo en línea $I[k]$ (por ejemplo las matrices Q y R en $J[k]$ para el caso lineal) de tal manera que $0 \leq I_{opt}[k] - I_{opt}[k+1]$. En otros términos, se intenta la robustez a través de la mejor sintonización MPC, con modificaciones menores de la estructura MPC.
2. Modificar el problema de optimización en línea MPC, agregando restricciones que ayudan a estabilizar el sistema de ciclo cerrado, sin la dependencia crítica sobre la sintonización. Por ejemplo, agregar al problema MPC de optimización en línea una restricción adicional del tipo

$$0 \leq I_{opt}[k+1] - I[k] \quad (2.5.27)$$

La ventaja del primer acercamiento es que la forma del problema normal de optimización MPC se mantiene. La desventaja es que el objetivo en línea puede volverse conservador no real, dependiendo de la magnitud de las incertidumbres del modelo de proceso. La ventaja del segundo acercamiento es que el objetivo en línea puede formularse en cierto modo que refleje el verdadero objetivo de control, sin tener en cuenta la estabilidad, porque lo último se obliga en la restricción de la ecuación (2.5.27). Su desventaja es que el problema de optimización en línea MPC puede complicarse.

Sintonización MPC para estabilidad robusta

Considere el siguiente problema de optimización en línea MPC para ciclo abierto estable, sistema multi entrada multi salida (MIMO), con modelo de respuesta finita al impulso (FIR):

$$\min_{\varepsilon[k+1|k], \dots, \varepsilon[k+n_w|k], \Delta u[k|k], \dots, \Delta u[k+m|k]} J[k] \quad (2.5.28)$$

donde

$$\begin{aligned} J[k] \hat{=} & \sum_{j=1}^{n_o} v_j \sum_{i=1}^p (y_j[k+i|k] - r_j)^2 + \sum_{j=1}^{n_o} \delta_j \sum_{i=1}^{n_w} \varepsilon_j[k+i|k]^2 \\ & + \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{i=0}^m \lambda_{i,j} \Delta u_j[k+i|k]^2 \end{aligned} \quad (2.5.29)$$

sujeto a

Predicción de salida del proceso

$$y_j[k+i|k] = \sum_{i=1}^n G^{[j]} u[k+i-j|k] + d[k+i|k], \quad i = 1, \dots, p \quad (2.5.30)$$

Predicción de la perturbación

$$d[k+i|k] = y[k] - \sum_{i=1}^n G^{[j]} u[k-j], \quad i = 1, \dots, p \quad (2.5.31)$$

Restricciones de movimiento de la entrada

$$-\Delta u_{\text{máx}} \leq \Delta u[k+i|k] \leq \Delta u_{\text{máx}}, \quad i = 0, \dots, m \quad (2.5.32)$$

Restricciones de la entrada

$$u_{\text{mín}} \leq u[k+i|k] \leq u_{\text{máx}}, \quad i = 0, \dots, m \quad (2.5.33)$$

Restricciones de la salida suavizadas

$$y_{\text{mín}} - \varepsilon[k+i|k] \leq y[k+i|k] \leq y_{\text{máx}} + \varepsilon[k+i|k], \quad i = 1, \dots, n_w \quad (2.5.34)$$

Restricciones de finalización

$$u[k + m + i | k] = \left(\sum_{j=1}^N G^{[j]} \right)^{-1} (r(k) - d[k + m + i | k]), \quad i \geq 0 \quad (2.5.35)$$

donde n_i es el número de entradas de proceso; n_o es el número de salidas del proceso; n_w es el número de entradas, es el número de pasos de tiempo sobre los que las restricciones de salida son forzadas; $G^{[j]}$ son las matrices de los coeficientes FIR del modelo del proceso. Se asume que la salida del proceso real es

$$y[k] = \sum_{j=1}^N H^{[j]} u[k + i - j] + d[k] \quad (2.5.36)$$

El módulo central del modelo $\{G^{[j]}\}_{j=1}^N$ es diferente del módulo central verdadero $\{H^{[j]}\}_{j=1}^N$, con el error de modelo limitado como

$$|H^{[j]} - G^{[j]}| \leq E_{\text{máx}}^{[j]} \quad (2.5.37)$$

Se asumen perturbaciones externas limitadas:

$$d_{\text{mín}} \leq d[k] \leq d_{\text{máx}} \quad (2.5.38)$$

y

$$-\Delta d_{\text{máx}} \leq \Delta d[k] \leq \Delta d_{\text{máx}} \quad (2.5.39)$$

donde

$$\Delta d_{\text{máx}} \begin{cases} \geq 0, & k \leq M \\ = 0, & k > M \end{cases} \quad (2.5.40)$$

Para el sistema MPC anterior, las ecuaciones (2.5.28) hasta la (2.5.35), Vuthandam et al. (1995) desarrollaron las condiciones suficientes para la estabilidad robusta con desplazamiento cero. Estas condiciones pueden usarse directamente para el cálculo de valores mínimos para la predicción y longitud del horizonte de control, p y m , respectivamente, así como para los coeficientes de supresión de movimiento r_{ji} que no son iguales a los de

horizonte de control finito. Si las condiciones de estabilidad robustas son suficientes, ellas son conservativas, particularmente para modelos muy grandes con incertidumbre en los límites.

Fragilidad

Las pruebas de estabilidad desarrolladas implícitamente asumen que se puede obtener una solución exacta del MPC para la optimización en línea. Sin embargo, una solución exacta no siempre puede obtenerse en casos como los siguientes:

- El problema de optimización en línea es no convexo, por consiguiente las garantías por alcanzar el óptimo global pueden ser difíciles de obtener.
- El problema de optimización en línea es no lineal y tiene restricciones de igualdad. La satisfacción de esas restricciones no es exacta pero aproximada.

En el primero de los dos casos anteriores, puede obtenerse un óptimo local lejos del óptimo global. En tal caso, el análisis de estabilidad basada en el logro de óptimo global se estropearía completamente. En el segundo caso, si el problema de optimización en línea es convexo, entonces la solución encontrada numéricamente estaría cerca de la solución exacta. Podría concluirse entonces que el análisis de estabilidad sería válido, por lo menos para pequeños errores en la aproximación del sistema MPC exacto por uno aproximadamente (numéricamente) computado en línea, con tal que los argumentos de continuidad sean válidos. Resulta, sin embargo, que esto no es necesariamente cierto. Keel y Bhattacharya (1997) han mostrado que allí existen controles frágiles lineales invariantes en el tiempo, es decir tal estabilidad de ciclo cerrado es muy sensible a las variaciones en los parámetros de control. En ese contexto, deben examinarse las propiedades de fragilidad MPC rigurosamente.

Varios autores (Scokaert et al., 1998) han desarrollado variantes MPC y las correspondientes pruebas de estabilidad que corrigen y superan los dos problemas anteriores

1. Requiriendo que la optimización en línea alcance una solución *factible* (sub. óptimo) del correspondiente problema, y/o
2. Sustituyendo restricciones de igualdad del tipo

$$f(x) = 0 \tag{2.5.41}$$

por restricciones de desigualdad del tipo

$$-\varepsilon \leq f(x) \leq \varepsilon \quad (2.5.42)$$

dónde ε es un vector de valores “pequeños”. Esto asegura que la restricción de finalización puede satisfacerse *exactamente* y, por consiguiente, el análisis de estabilidad puede ser rigurosamente válido.

Capítulo 3

METODOLOGÍA UNIFICADA

Enfrentarse al problema de diseño de sistemas de control implica un conocimiento profundo de la planta. La solución planteada depende de los conocimientos de los diseñadores, de las metodologías que estén a punto y del presupuesto. Muchas técnicas están en su punto pero no cumplen las expectativas de los operadores de la planta o de la parte administrativa. Para las plantas químicas en especial, las condiciones de operación provocan alta interactividad entre las variables, su modelamiento es difícil y son en general sistemas no lineales. En muchas plantas de proceso continuamente deben cambiarse las condiciones de operación debido a las condiciones de mercado y los cambios en las referencias en la planta se pueden prever cuando se planea la producción.

Implementar un sistema de control de proceso es una tarea compleja que debe planear, desarrollar y ejecutar entre el personal administrativo y técnico cumpliendo un conjunto de normas dictadas por el diseño, la operación del proceso y las condiciones económicas del mercado de insumos, producto y servicios.

El objetivo central del presente trabajo es mostrar un camino lógico y comprensible para desarrollar una solución a un problema de control en la industria, así pues se presenta una metodología unificada (planeación + MPC) para enfrentar estas situaciones.

El MPC [26] no hace referencia a un diseño concreto de un controlador sino más bien a un conjunto de ideas o características para el desarrollo de estrategias de control y que aplicadas en cada caso en un mayor o menor grado, dan lugar a diferentes tipos de controladores.

Las principales características que comparten todas aquellas estrategias de control que

pueden englobarse dentro del termino Control Predictivo Basado en Modelos son las siguientes:

- Todas ellas hacen uso explícito de un modelo del proceso.
- Como consecuencia de la minimización de una cierta función de coste, se obtienen en cada instante, no una señal de control sino una cierta secuencia de señales de control óptimas.
- Se aplica el concepto denominado *receding horizon* (horizonte móvil). Es decir, aunque se obtenga una secuencia de control óptima, sólo se utiliza la primera acción de control de todas ellas, despreciándose las demás. En el instante siguiente y utilizando la nueva información disponible, se repiten de nuevo todos los cálculos.

De las ideas anteriores, se puede deducir la diversidad de estrategias que pueden surgir en base a estas características. Como consecuencia, aparecerán diferentes controladores:

- según el tipo de modelo del proceso utilizado.
- según el tipo de función de coste utilizada.
- según el método aplicado para la optimización.

3.1. Propuesta de metodología MPC unificada

El desarrollo tecnológico de un país esta relacionado directamente con una adecuada generación de conocimientos, bien sea producido por sus habitantes o por transferencia desde otros lugares. Se presenta un procedimiento general de diseño del control de procesos teniendo como actor principal el MPC.

El diagrama 3.1 tomado de [21] muestra de una manera simple como se ve el sistema de control por parte del cuerpo directivo empresarial, donde sus tareas consisten en proporcionar los objetivos corporativos y el valor de los productos para formular con destreza la función de coste que el sistema de control debe optimizar y para luego aplicar las correcciones al proceso.

Para emprender una tarea de diseño tan compleja deben participar además del personal administrativo, un selecto grupo de personal técnico quien conjuntamente desarrollarán

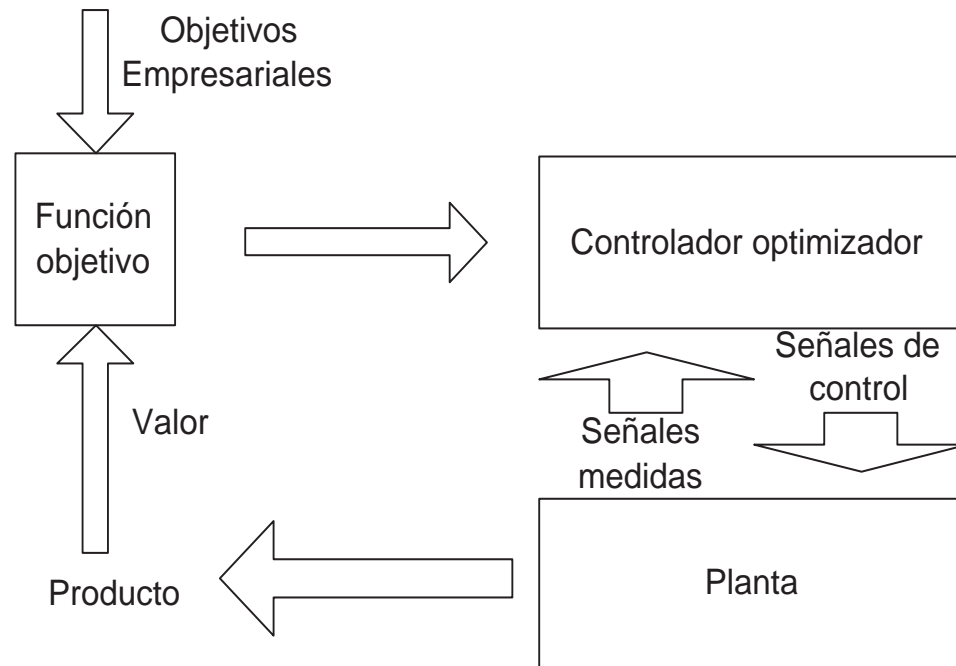


Figura 3.1: La visión del empresario

el proyecto de diseño de control de procesos. En la figura 3.2 muestra como el personal técnico tiene la responsabilidad de formular los modelos del proceso y su simulación, la función de objetivo y la estrategia de optimización que en ciclo abierto o cerrado vigilarán el funcionamiento de la planta en forma continua y óptima.

3.2. Estructura de diseño de sistemas de control

Inicialmente, la dirección de la entidad corporativa formula en detalle el proyecto de diseño de control que debe contemplar los siguientes puntos:

- Objetivos generales y específicos.
- Tiempos totales y por actividad.
- Metodología de seguimiento y control de actividades
- Recursos humanos, técnicos, económicos, de infraestructura.
- Cronograma de actividades.

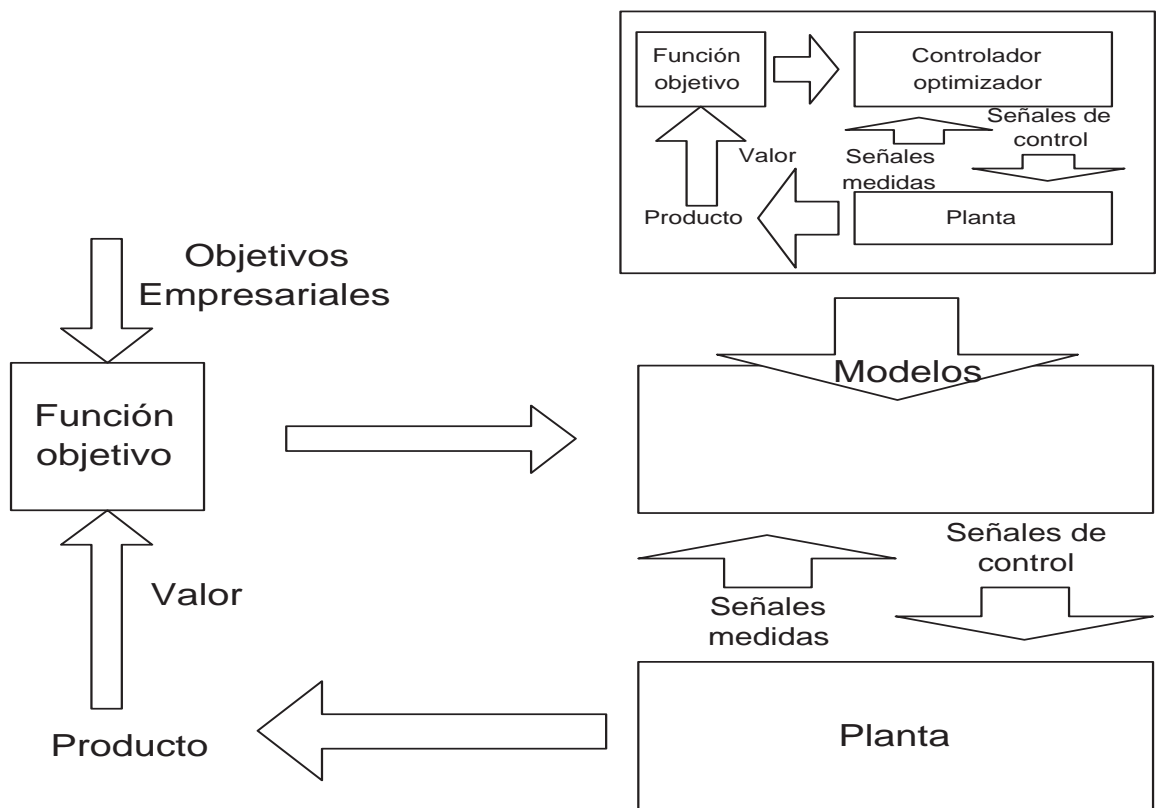


Figura 3.2: La visión completa de la tarea de diseño

El personal seleccionado y capacitado, debe enfrentarse para cumplir la siguiente estrategia [22]:

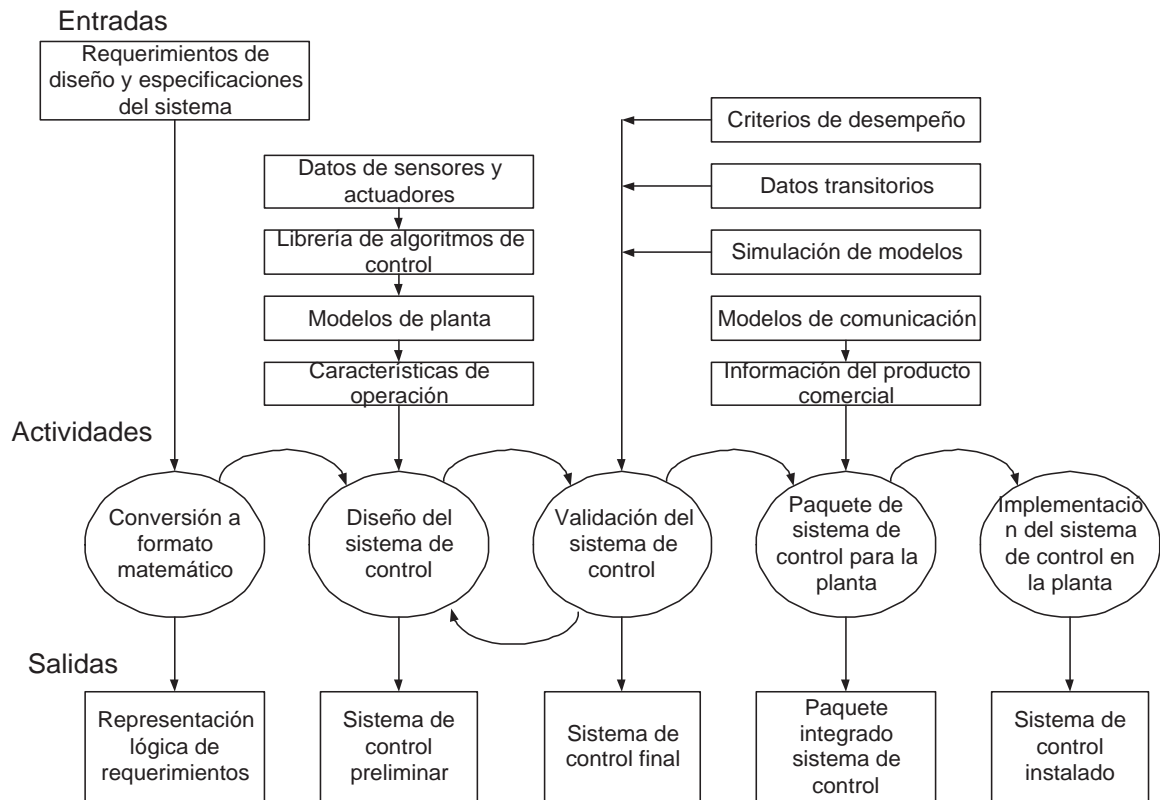


Figura 3.3: Estrategia del diseño de control de procesos

La primera actividad es la conversión de las necesidades de diseño y las especificaciones del proceso a un formato lógico matemático. El resultado proporciona información histórica y las entradas para la siguiente actividad. Enseguida requerimos de bases de datos de sensores y actuadores, una librería de algoritmos de control, los modelos de planta y los características de operación. Como resultado obtenemos un diseño preliminar del sistema de control. Junto con los criterios de desempeño, datos de estado transitorio, simulación de modelos se valida el sistema de control y en realimentación con la anterior actividad se desarrolla el sistema de control final. Luego preparamos la forma de comunicaciones en tiempo real y la información del producto obtenido, generándose el paquete integrado de sistema de control de la planta al cual finalmente se le adecuará la manera de implementación para que sea instalado.

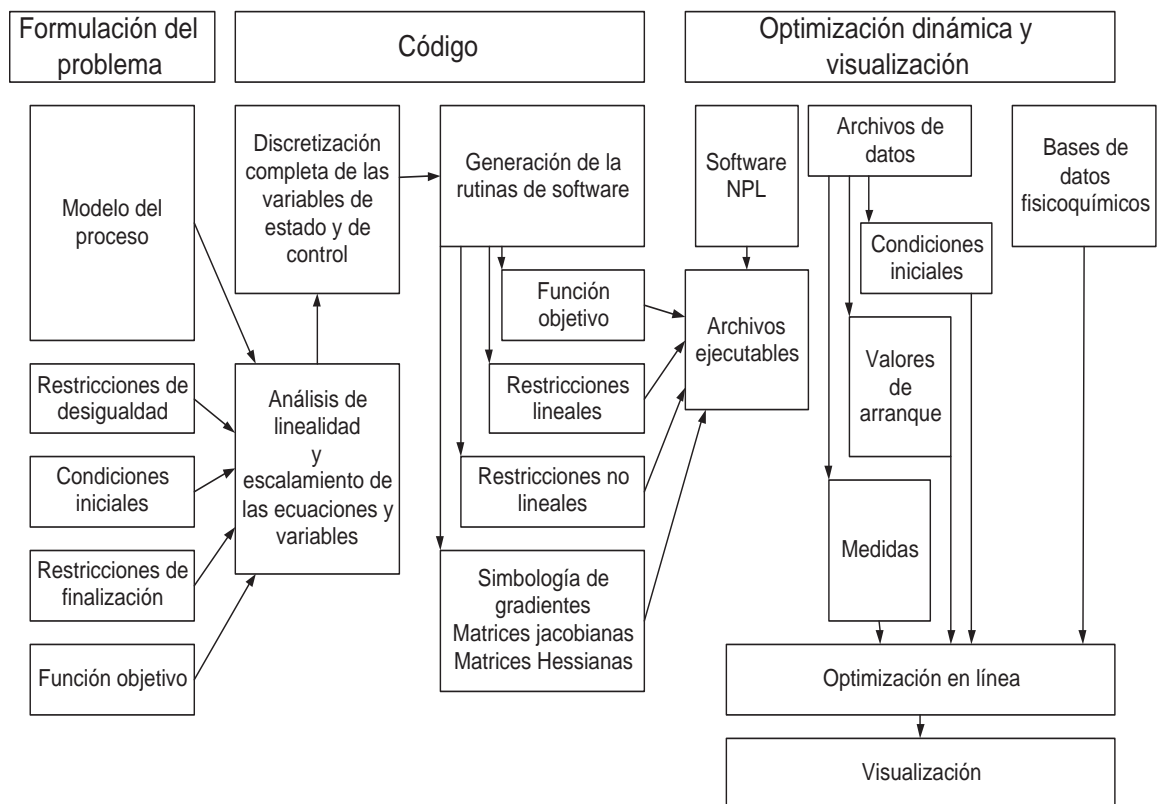


Figura 3.4: Resultado de la aplicación del diseño de sistema de control

Son varias las aplicaciones relacionadas en la bibliografía que muestran un procedimiento como el anterior, pero la realizada por la compañía Tennessee Eastman (TE) Challenge Process (ver figura 3.4) [23], muestra el resultado de la aplicación estrategia de diseño de sistema de control, donde aparecen los componentes más importantes de lo que se conoce como optimización en línea.

3.3. Optimización MPC en tiempo real (RTO)

Además de las técnicas MPC [24], se han desarrollado técnicas de optimización de planta en ciclo cerrado para que éstas funcionen en las mejores condiciones económicas de operación, ya que cuando se usan modelos aproximados (mal condicionados, incompletos, lineales, variantes en el tiempo) para describir la conducta de plantas en estado estacionario, deben corregirse (adaptarse) con cierta frecuencia. Estas técnicas de optimización de ciclo cerrado usan un modelo de primeros principios (principios fundamentales) basados en estado estacionario de la planta para el cálculo de las condiciones de operación que traerán el mejor desempeño económico en su operación. Contrariamente a la optimización hecha dentro del sistema de control predictivo por medio de una aproximación lineal local se valida la conducta de la planta, un modelo basado en primeros principios es aplicado para que cubra la conducta de las no linealidades de la planta sobre grandes intervalos de operación.

Después de detectar las condiciones de estado estacionario por medio de análisis estadístico de las señales de proceso registradas y después de la reconciliación de los datos de proceso registrados, la función objetivo se optimiza en dos pasos:

- En un primer paso es seleccionado un conjunto de parámetros de holgura, que se ajusta para hacer que el comportamiento del modelo registrado corresponda al de la planta real.
- En la etapa de optimización son determinadas las condiciones de funcionamiento que maximizan la economía de planta para condiciones dadas de mercado y las condiciones de planta son usadas para ajustar el modelo.

Para solucionar los problemas de las no linealidades en la optimización, se aplican técnicas SQP (Programación Secuencial Cuadrática). El sistema de optimización en lazo cerrado parece indicar condiciones constante de la planta, pues no tiene información sobre la dinámica

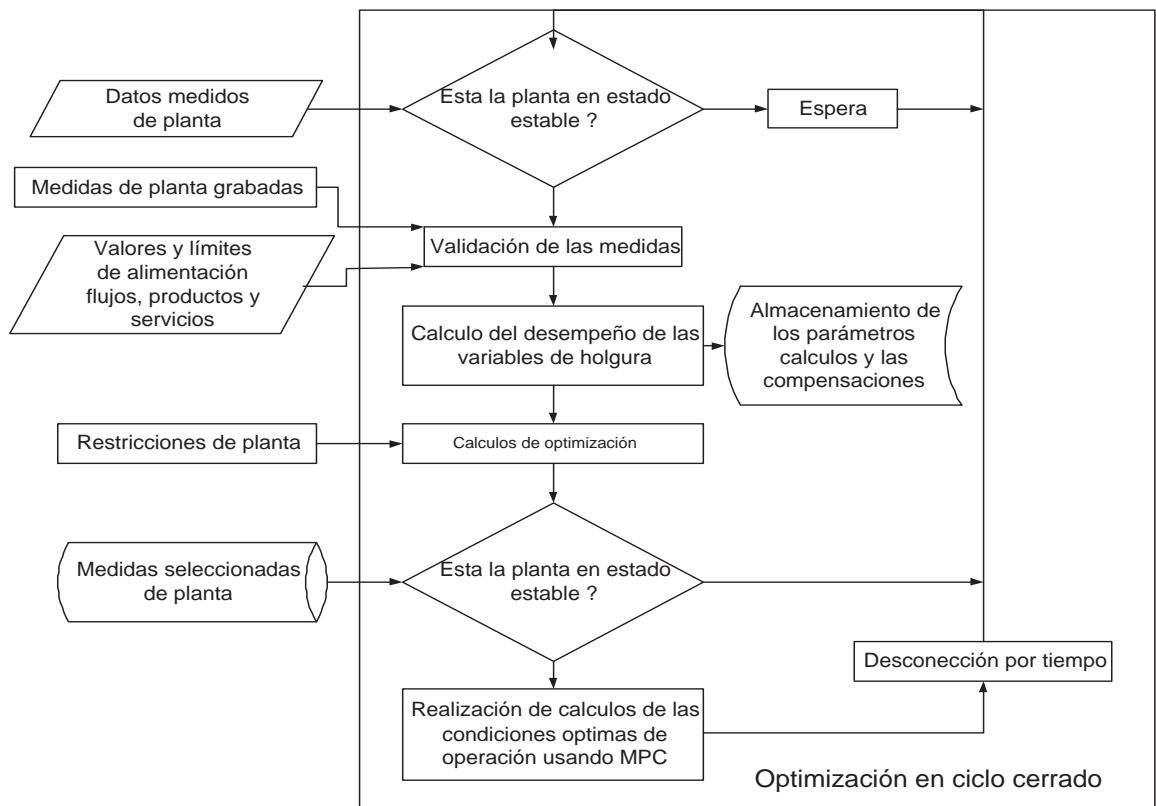


Figura 3.5: Diagrama de flujo de ciclo cerrado, sistema de optimización de planta en tiempo real

de la planta. Debido a las perturbaciones que influyen continuamente, una planta nunca estará realmente en estado estacionario. El estado estacionario supuesto es en consecuencia artificial.

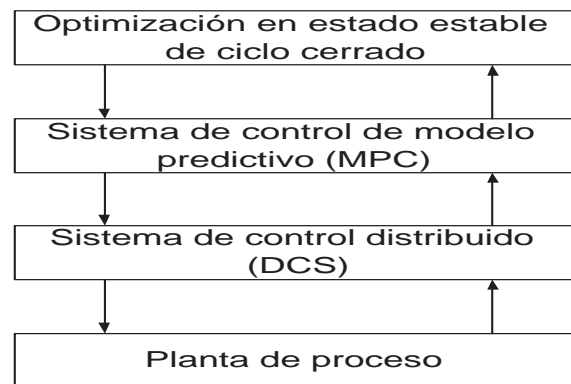


Figura 3.6: Configuración RTO en ciclo cerrado

Después de que las condiciones de funcionamiento óptimas han sido determinadas, estas condiciones son entregadas para que los sistemas MPC actúen.

Así la optimización en tiempo real y el MPC actúan mejorando el desempeño técnico y económico.

3.4. Alternativas del MPC

Son muchas y variadas las diferentes posibilidades de desarrollar el MPC, la figura 3.7 muestra las diferentes clases de técnicas para cada uno de los principales elementos de esta estructura de control. Así, cualquier alternativa escogida debe ser analizada por el grupo de trabajo, pues uno de los mayores inconvenientes a superar lo constituye el tener dominio en cada una de las técnicas seleccionadas que luego serán integradas para dar la solución al problema MPC.

3.5. Control de matriz dinámica (DMC). Algoritmo

A manera ilustrativa se presenta el desarrollo matemático completo del controlador DMC, muy conocido entre los desarrolladores de software de control.

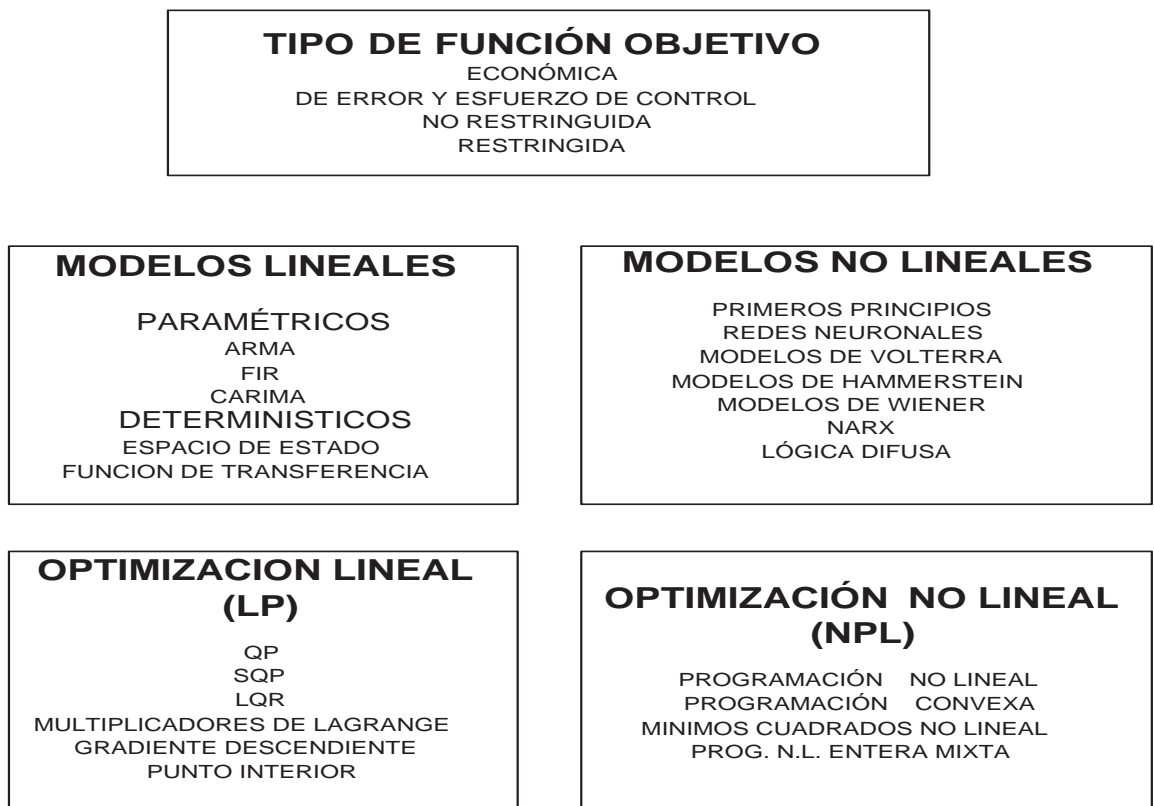


Figura 3.7: Alternativas MPC.

3.5.1. Predicción multi paso para DMC

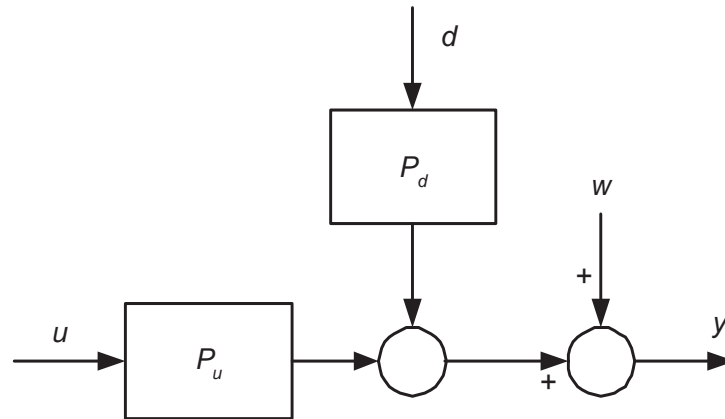


Figura 3.8: Esquema modelo básico

Consideramos la figura 3.8 donde tenemos tres tipos diferentes de entradas externas [25]: la variable manipulada u (MV), cuyo efecto sobre la salida, normalmente una variable controlada (CV), se describe por P_u ; la variable de perturbación medida d (DV), cuyo efecto sobre la salida se describe por P_d y finalmente las perturbaciones no medidas y no modeladas w_y que agregan una desviación (bias) a la salida del sistema. El sistema global puede describirse por:

$$y(k) = \begin{bmatrix} P^u & P^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k) \\ d(k) \end{bmatrix} + w_y(k) \quad (3.5.1)$$

Suponemos que los modelo de respuesta al escalón S^u , S^d están disponibles para la dinámica sistema P^u y P^d , respectivamente. Definimos el modelo global multivariable de respuesta al escalón:

$$S = \begin{bmatrix} S^u & S^d \end{bmatrix} \quad (3.5.2)$$

que están dirigidos por la entrada global:

$$\Delta v(k) = \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta d(k) \end{bmatrix} \quad (3.5.3)$$

Sea el estado del sistema:

$$\tilde{Y}(k) = [\tilde{y}_0(k), \tilde{y}_1(k), \dots, \tilde{y}_{n-1}(k)]^T \quad (3.5.4)$$

Por definición, el estado consiste en las salidas del sistema en el futuro:

$$\tilde{Y}(k) = \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k+1) \\ \vdots \\ y(k+n-1) \end{bmatrix} \quad (3.5.5)$$

obtenidas bajo la suposición de que las entradas del sistema no cambian los valores anteriores, es decir:

$$\begin{aligned} \Delta u(k) &= \Delta u(k+1) = \dots = 0 \\ \Delta d(k) &= \Delta d(k+1) = \dots = 0 \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

El estado no incluye la información de perturbación no medida y se supone la definición:

$$w_y(k) = w_y(k+1) = \dots = 0 \quad (3.5.7)$$

El estado se actualiza con:

$$\tilde{Y}(k) = M\tilde{Y}(k-1) + S\Delta v(k-1) \quad (3.5.8)$$

La ecuación refleja el efecto del cambio de la entrada $\Delta v(k-1)$ sobre la evolución futura del sistema suponiendo que no hay ningún cambio adicional en la entrada. La influencia de los cambios en la entrada se manifiestan a través de la matriz de respuesta al escalón S . El efecto de cualquier cambio en una entrada futura también se describe apropiadamente por la matriz de respuesta al escalón. Consideramos la salida predicha, para las siguientes p etapas de tiempo:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} y(k+1|k) \\ y(k+2|k) \\ y(k+3|k) \\ \vdots \\ y(k+p|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1(k) \\ \tilde{y}_2(k) \\ \tilde{y}_3(k) \\ \vdots \\ \tilde{y}_p(k) \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} S_1^u \\ S_2^u \\ S_3^u \\ \vdots \\ S_p^u \end{bmatrix} \Delta u(k|k) + \begin{bmatrix} 0 \\ S_1^u \\ S_2^u \\ \vdots \\ S_{p-1}^u \end{bmatrix} \Delta u(k+1|k) + \cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ S_1^u \end{bmatrix} \Delta u(k+p-1|k) \\
& + \begin{bmatrix} S_1^d \\ S_2^d \\ S_3^d \\ \vdots \\ S_p^d \end{bmatrix} \Delta d(k|k) + \begin{bmatrix} 0 \\ S_1^d \\ S_2^d \\ \vdots \\ S_{p-1}^d \end{bmatrix} \Delta d(k+1|k) + \cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ S_1^d \end{bmatrix} \Delta d(k+p-1|k) \\
& + \begin{bmatrix} w_y(k+1|k) \\ w_y(k+2|k) \\ w_y(k+3|k) \\ \vdots \\ w_y(k+p|k) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.5.9}$$

En (3.5.9) el primer término de la derecha son los primeros p elementos de estado que describen la evolución futura del sistema cuando todas las entradas futuras cambian desde cero. Los términos restantes describen el efecto de los cambios presentes y futuros de las entradas manipuladas $\Delta u(k+i|k)$, las perturbaciones medidas $\Delta d(k+i|k)$ y las perturbaciones no medidas y no modeladas $w_y(k+i|k)$. La notación $y(k+i|k)$ representa la predicción de $y(k+i)$ basada en el hecho de que la información esta disponible en el de tiempo k . La misma anotación se aplica a Δd y Δw_y .

Los valores de la mayoría de estas variables no están disponibles en el tiempo k y tienen

que ser *predichas* de una manera racional. La medida en el tiempo k , $d(k)$ es conocida y por consiguiente $\Delta d(k) = d(k) - d(k-1)$. A menos que alguna información de proceso adicional este disponible para concluir sobre la conducta de las perturbaciones futuras, suponemos que las perturbaciones no cambian en el futuro para la derivación algoritmo:

$$\Delta d(k+1|k) = \Delta d(k+2|k) = \dots = \Delta d(k+p-1|k) = 0 \quad (3.5.10)$$

Esta suposición es razonable cuando las perturbaciones están variando con poca frecuencia. Similarmente, se supone que las perturbaciones futuras no modeladas $w_y(k+i|k)$ no cambian.

$$w_y(k|k) = w_y(k+1|k) = w_y(k+2|k) = \dots = w_y(k+p|k) \quad (3.5.11)$$

Se obtiene una estimación de la perturbación no modelada presente de la ecuación (3.5.1):

$$w_y(k|k) \approx y_m(k) - \tilde{y}_0(k) \quad (3.5.12)$$

donde $y_m(k)$ representa el valor de la salida como el realmente medido en la planta. Aquí $\tilde{y}_0(k)$, el primer componente de estado $\tilde{Y}(k)$, es la predicción modelada de la salida en el tiempo k (suponiendo $w_y(k) = 0$) basado en la información en este tiempo. La diferencia entre esta salida predicha y la medida de la salida proporciona una buena estimación de la perturbación no modelada.

Para la generalidad considerar el caso donde las entradas manipuladas no varían por encima del horizonte p pero solamente en las próximas m etapas.

$$(\Delta u(k|k), \Delta u(k+1|k), \dots, \Delta u(k+m-1|k))$$

y que después los cambios en la entrada se vuelven cero.

$$\Delta u(k+m|k) = \Delta u(k+m+1|k) = \dots = \Delta u(k+p-1|k) = 0 \quad (3.5.13)$$

Con estas suposiciones (3.5.9) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 Y(k+1|k) = & \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{y}_1(k) \\ \tilde{y}_2(k) \\ \tilde{y}_3(k) \\ \vdots \\ \tilde{y}_p(k) \end{bmatrix}}_{M\tilde{Y}(k) \text{ de la memoria}} + \underbrace{\begin{bmatrix} S_1^d \\ S_2^d \\ S_3^d \\ \vdots \\ S_p^d \end{bmatrix}}_{S^d \Delta d(k) \text{ termino prealimentado}} \Delta d(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} y_m(k) - \tilde{y}_0(k) \\ y_m(k) - \tilde{y}_0(k) \\ y_m(k) - \tilde{y}_0(k) \\ \vdots \\ y_m(k) - \tilde{y}_0(k) \end{bmatrix}}_{I_p(y_m(k) - \tilde{y}_0(k)) \text{ termino realimentado}} \\
 + & \underbrace{\begin{bmatrix} S_1^u & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_2^u & S_1^u & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ S_m^u & S_{m-1}^u & S_{m-2}^u & \cdots & S_1^u \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ S_p^u & S_{p-1}^u & S_{p-2}^u & \cdots & S_{p-m+1}^u \end{bmatrix}}_{S^u \text{ Matriz dinamica}} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta u(k|k) \\ \Delta u(k+1|k) \\ \Delta u(k+2|k) \\ \vdots \\ \Delta u(k+m-1|k) \end{bmatrix}}_{\Delta U(k) \text{ Movimiento de entrada futuro}}
 \end{aligned} \tag{3.5.14}$$

Los nuevos símbolos son:

$$Y(k+1|k) = \begin{bmatrix} y(k+1|k) \\ y(k+2|k) \\ \vdots \\ y(k+p|k) \end{bmatrix} \tag{3.5.15}$$

$$S^u = \begin{bmatrix} S_1^u & 0 & \cdots & 0 \\ S_2^u & S_1^u & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_m^u & S_{m-1}^u & \cdots & S_1^u \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_p^u & S_{p-1}^u & \cdots & S_{p-m+1}^u \end{bmatrix} \tag{3.5.16}$$

$$S^d = \begin{bmatrix} S_1^d \\ S_2^d \\ \vdots \\ S_p^d \end{bmatrix} \quad (3.5.17)$$

$$I_p = \left. \begin{bmatrix} I \\ I \\ \vdots \\ I \end{bmatrix} \right\} p \quad (3.5.18)$$

$$\Delta U(k) = \begin{bmatrix} \Delta u(k|k) \\ \Delta u(k+1|k) \\ \Delta u(k+2|k) \\ \vdots \\ \Delta u(k+m-1|k) \end{bmatrix} \quad (3.5.19)$$

$$M = \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & I & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & I & 0 & \dots & 0 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & I \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & I \end{array} \right] \end{array} \right\} \begin{array}{l} p < n \\ p \text{ para } p \geq n \end{array} \quad (3.5.20)$$

Con esta nueva anotación la predicción p pasos adelante se convierten en:

$$Y(k+1|k) = M\tilde{Y}(k) + S^d\Delta d(k) + I_p(y_m(k) - \tilde{y}_0(k)) + S^u\Delta U(k) \quad (3.5.21)$$

donde los primeros tres términos son completamente definidos por las acciones de control del pasado ($\tilde{Y}(k), \tilde{y}_0(k)$) y las medidas presentes ($y_m(k), \Delta d(k)$) y el último término describe el efecto de los movimientos variables manipuladas en el futuro $\Delta U(k)$.

Esta ecuación de predicción puede ser fácilmente ajustada si son hechas diferentes suposiciones sobre la conducta futura de las perturbaciones medidas y no medidas. Por ejemplo, si se espera que las perturbaciones evolucionen con una forma de rampa pondríamos hacer lo siguiente:

$$\Delta d(k) = \Delta d(k+1|k) = \dots = \Delta d(k+p-1|k) \quad (3.5.22)$$

y

$$w_y(k+l|k) = w_y(k|k) + l (w_y(k|k) - w_y(k-1|k-1)) \quad (3.5.23)$$

3.5.2. Función objetivo

Los requisitos de funcionamiento de la planta determinan los criterios de desempeño del sistema de control. Estos criterios deben expresarse en términos matemáticos para que la ley de control pueda obtenerse en forma algorítmica. En DMC una función objetivo *cuadrática* es usada tal que pueda declararse en su forma más simple ¹

$$\min_{\Delta u(k|k) \dots \Delta u(k+m-1|k)} \sum_{l=1}^p \|y(k+l) - r(k+l)\|^2 \quad (3.5.24)$$

Este criterio minimiza la suma de las desviaciones al cuadrado de los valores predichos CV en la trayectoria de referencia variante en el tiempo o punto de ajuste $r(k+l)$ hasta p etapas en tiempo futuro. El criterio cuadrático castiga proporcionalmente más las grandes desviaciones que las menores sobre el promedio de los residuos, acercando la salida a su trayectoria de referencia y evitando grandes desplazamientos.

Se supone que la variable manipulada es constante después de m intervalos de tiempo en el futuro, lo que equivale a:

$$\Delta u(k+m|k) = \Delta u(k+m+1|k) = \dots = \Delta u(k+p-1|k) = 0 \quad (3.5.25)$$

¹ $\|x\|$ simboliza la norma $(x^T x)^{\frac{1}{2}}$ del vector x

donde $m \leq p$ siempre. Esto significa que el DMC solo determina los próximos m movimientos. La selección de m y p afecta la conducta de ciclo cerrado. Es más, m , el número de grados de libertad, tiene un influencia dominante en el esfuerzo de cálculo computacional. Tampoco, tiene sentido hacer el horizonte más largo que $m + n$ ($p \leq m + n$), porque para un sistema FIR de orden n el sistema alcanza un estado estable después de $m + n$ etapas. Aumentando el horizonte más allá de $m + n$ simplemente agregaría condiciones constantes idénticas a la función objetivo (3.5.24).

Debido a las interacciones inherentes del proceso, generalmente no es posible mantener simultáneamente todas las salidas cercanas a sus trayectorias de referencia correspondientes. Por consiguiente, en la práctica sólo un subconjunto de las salidas es bien controlado a expensas de desplazamientos más grandes en otras. Esto puede ser transparentemente influenciado incluyendo pesos en la función objetivo así:

$$\min_{\Delta u(k|k) \dots \Delta u(k+m-1|k)} \sum_{l=1}^p \|\Gamma_l^y y(k+l) - r(k+l)\|^2 \quad (3.5.26)$$

Por ejemplo, para un sistema con dos salidas y_1 y y_2 y matrices diagonales de peso constante:

$$\min_{\Delta u(k|k) \dots \Delta u(k+m-1|k)} \sum_{l=1}^p \Gamma_l^y \|y(k+l) - r(k+l)\|^2 \quad (3.5.27)$$

La función objetivo se convierte en:

$$\Gamma_l^y = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{bmatrix}; \forall l \quad (3.5.28)$$

Así, el peso más grande es para una salida particular y por consiguiente será la contribución más grande en la suma de desviaciones al cuadrado de la función objetivo. Esto hará que el controlador lleve la salida correspondiente más cerca a su trayectoria de referencia.

Finalmente, los movimientos de las variables manipuladas hacen que la salida siga una trayectoria dada que podría ser demasiado severa para ser aceptable en la práctica. Esto puede corregirse agregando un término de penalización a la función objetivo para los

movimientos de las variables manipuladas como sigue:

$$\min_{\Delta u(k)} \sum_{l=1}^p \Gamma_l^y \|y(k+l) - r(k+l)\|^2 + \sum_{l=1}^m \Gamma_l^u \|\Delta u(k+l-1)\|^2 \quad (3.5.29)$$

Observe que los elementos más grandes de la matriz Γ_l^u resultan en menores movimientos y por consiguiente las trayectorias de salida no se seguirán. Así, las magnitudes relativas de Γ_l^y y Γ_l^u determinarán el intercambio entre seguir la trayectoria estrechamente y reducir la acción de las variables manipuladas.

3.5.3. Restricciones

En muchas aplicaciones de control el desempeño deseado no puede expresarse solamente como un problema de seguimiento de trayectoria. Muchos requisitos prácticos son expresados más naturalmente con las restricciones en las variables proceso.

Los tres tipos de restricciones comunes son implementadas por formulación DMC, como desigualdades lineales.

Restricciones de variables manipuladas

El vector solución DMC no sólo contiene los movimientos actuales para ser implementados sino también los movimientos para m intervalos de tiempo futuros. Aunque las violaciones se pueden evitar inhibiendo sólo el movimiento a ser implementado, pueden usarse restricciones en los movimientos futuros, para permitir al algoritmo anticiparse y prevenir violaciones futuras produciendo así una buena respuesta global. El valor de la variable manipulada en un tiempo futuro $k+l$ se restringe para que sea:

$$u_{low}(l) \leq \sum_{j=1}^l \Delta u(k+j|k) + u(k-1) \leq u_{high}(l); l = 0, 1, \dots, m-1 \quad (3.5.30)$$

donde $u(k-1)$ es el valor anterior implementado de la variable manipulada. Por generalidad, se varían los límites $u_{low}(l)$, $u_{high}(l)$ sobre el horizonte. Estas restricciones se expresan en

forma de matriz para todas las proyecciones como:

$$\begin{bmatrix} -I_L \\ I_L \end{bmatrix} \Delta U(k) \geq \begin{bmatrix} u(k-1) - u_{high}(0) \\ \vdots \\ u(k-1) - u_{high}(m-1) \\ u_{low}(0) - u(k-1) \\ \vdots \\ u_{low}(m-1) - u(k-1) \end{bmatrix} \quad (3.5.31)$$

donde

$$I_L = \begin{bmatrix} I & 0 & \cdots & 0 \\ I & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I & I & \cdots & I \end{bmatrix} \quad (3.5.32)$$

Siendo I la matriz unitaria.

Restricciones de velocidad en las variables manipuladas

A menudo MPC se usa en un modo de supervisión donde hay limitaciones en la velocidad a la que se mueve el nivel más bajo del punto de ajuste del controlador. Éstos son forzados por adición de restricciones en el tamaño de movimiento de las variables manipuladas:

$$\begin{bmatrix} -I \\ I \end{bmatrix} \Delta U(k) \geq \begin{bmatrix} -\Delta u_{m\acute{a}x}(0) \\ \vdots \\ -\Delta u_{m\acute{a}x}(m-1) \\ -\Delta u_{m\acute{a}x}(0) \\ \vdots \\ -\Delta u_{m\acute{a}x}(m-1) \end{bmatrix} \quad (3.5.33)$$

donde $\Delta u_{m\acute{a}x}(l) > 0$ es posiblemente la variación límite en el tiempo de la magnitud de los movimientos.

Restricciones en las variables de salida

El algoritmo puede hacer uso de las predicciones de salida (ecuación (3.5.21)) para anticiparse a violaciones de restricciones futuras.

$$Y_{low} \leq Y(k+1|k) \leq Y_{high} \quad (3.5.34)$$

Sustituyendo la ecuación (3.5.21) obtenemos:

$$\begin{bmatrix} -S^u \\ S^u \end{bmatrix} \Delta U(k) \geq \begin{bmatrix} M\tilde{Y}(k) + S^d \Delta d(k) + I_p (y_m(k) - \tilde{y}_0(k)) - Y_{high} \\ - \left(M\tilde{Y}(k) + S^d \Delta d(k) + I_p (y_m(k) - \tilde{y}_0(k)) \right) + Y_{low} \end{bmatrix} \quad (3.5.35)$$

donde

$$Y_{low} = \begin{bmatrix} y_{low}(1) \\ y_{low}(2) \\ \vdots \\ y_{low}(p) \end{bmatrix}; Y_{high} = \begin{bmatrix} y_{high}(1) \\ y_{high}(2) \\ \vdots \\ y_{high}(p) \end{bmatrix}$$

son vectores de restricciones de las trayectorias de salida $u_{low}(l)$, $u_{high}(l)$ sobre la longitud del horizonte p .

Restricciones combinadas

Las restricciones de variables manipuladas (3.5.31), de velocidad de las variables manipulada (3.5.33) y las de variables de salida (3.5.35) pueden combinarse en una expresión conveniente:

$$C^u \Delta u(k) \geq C(k+1|k) \quad (3.5.36)$$

donde C^u combina todas las matrices en el lado izquierdo de las desigualdades como sigue:

$$C^u = \begin{bmatrix} -I_L \\ I_L \\ -I \\ I \\ -S^u \\ S^u \end{bmatrix} \quad (3.5.37)$$

El vector $C(k+1|k)$ del lado derecho reúne todos los vectores "error" de las ecuaciones de restricción:

$$C(k+1|k) = \begin{bmatrix} u(k-1) - u_{high}(0) \\ \vdots \\ u(k-1) - u_{high}(m-1) \\ u_{low}(0) - u(k-1) \\ \vdots \\ u_{low}(m-1) - u(k-1) \\ -\Delta u_{m\acute{a}x}(0) \\ \vdots \\ -\Delta u_{m\acute{a}x}(m-1) \\ -\Delta u_{m\acute{a}x}(0) \\ \vdots \\ -\Delta u_{m\acute{a}x}(m-1) \\ M\tilde{Y}(k) + S^d \Delta d(k) + I_p (y_m(k) - \tilde{y}_0(k)) - Y_{high} \\ - \left(M\tilde{Y}(k) + S^d \Delta d(k) + I_p (y_m(k) - \tilde{y}_0(k)) \right) + Y_{low} \end{bmatrix} \quad (3.5.38)$$

3.6. Solución por programación cuadrática del problema de control

3.6.1. Programas cuadráticos

Antes de desarrollar el problema de optimización, se presentan algunos conceptos básicos de programación no lineal. En particular, es considerada la siguiente formulación de Programación Cuadrática (QP):

$$\begin{aligned} \min_x \quad & x^T H x - g^T x \\ \text{s.a.} \quad & C x \geq c \end{aligned} \quad (3.6.1)$$

donde

H es que una matriz simétrica llamada la matriz *Hessiana*;

g es el vector gradiente;

C es la ecuación matricial de restricciones de desigualdad; y

c es la ecuación vectorial de restricciones de desigualdad.

Este problema minimiza un objetivo cuadrático en las variables de decisión x sujetas a un conjunto de desigualdades lineales. En ausencia de restricciones la solución de este problema de optimización puede encontrarse analíticamente por computo de las condiciones necesarias para optimalidad como sigue:

$$\frac{d(x^T H x - g^T x)}{dx} = 2Hx - g = 0 \quad (3.6.2)$$

La derivada de segundo orden es

$$\frac{d^2(x^T H x - g^T x)}{dx^2} = 2H \quad (3.6.3)$$

que significa que para un mínimo no restringido existe la Hessiana que debe ser semi-definida positiva.

El problema de minimizar la suma de cuadrados de los residuos de un conjunto de ecuaciones lineales:

$$\rho = Ax - b \quad (3.6.4)$$

puede ponerse de la forma simple QP si:

$$\begin{aligned}\min_x \rho^T \rho &= \min_x (Ax - b)^T (Ax - b) \\ \min_x \rho^T \rho &= \min_x x^T A^T A x - 2b^T A x + b^T b\end{aligned}\quad (3.6.5)$$

Así QP es:

$$\min_x x^T A^T A x - 2b^T A x \quad (3.6.6)$$

obteniéndose:

$$\begin{aligned}H &= A^T A \\ g &= 2A^T b\end{aligned}\quad (3.6.7)$$

Para obtener la solución única no restringida:

$$x = \frac{1}{2} H^{-1} g \quad (3.6.8)$$

H debe ser definida positiva.

Cuando se agregan restricciones de desigualdad, H no se requiere que sea estrictamente definida positiva. Por ejemplo, para $H = 0$ el problema de optimización se vuelve:

$$\begin{aligned}\min_x & -g^T x \\ \text{s.a.} & Cx \geq c\end{aligned}\quad (3.6.9)$$

que es un problema de *Programación Lineal* (LP).

3.6.2. Formulación del problema de control como un programa cuadrático

Haciendo uso de la ecuación de predicción (3.5.21) para volver a escribir la función objetivo:

$$\min_{\Delta u(k)} \sum_{l=1}^p \Gamma_l^y \|y(k+l|k) - r(k+l)\|^2 + \sum_{l=1}^m \Gamma_l^u \|\Delta u(k+l-1)\|^2 \quad (3.6.10)$$

y ahora se toman las restricciones (3.5.36) para obtener el problema de optimización:

$$\min_{\Delta u(k)} \{ \Gamma^y \|y(k+1|k) - R(k+1)\|^2 + \Gamma^u \|\Delta u(k)\|^2 \} \quad (3.6.11)$$

$$\begin{aligned} s.a \quad Y(k+1|k) &= M\tilde{Y}(k) + S^d \Delta d(k) + I_p (y_m(k) - \tilde{y}_0(k)) + S^u \Delta U(k) \\ C^u \Delta u(k) &\geq C(k+1|k) \end{aligned} \quad (3.6.12)$$

donde

$$\Gamma^u = \text{diag} \{ \Gamma_1^u, \dots, \Gamma_m^u \} \quad (3.6.13)$$

y

$$\Gamma^y = \text{diag} \{ \Gamma_1^y, \dots, \Gamma_p^y \} \quad (3.6.14)$$

son las matrices de peso en forma de bloque diagonal, y

$$R(k+1) = \begin{bmatrix} r(k+1) \\ r(k+2) \\ \vdots \\ r(k+p) \end{bmatrix} \quad (3.6.15)$$

es el vector de la trayectoria de referencia.

Podemos sustituir la ecuación de predicción en la función objetivo para obtener:

$$\Gamma^y \|y(k+1|k) - R(k+1)\|^2 + \Gamma^u \|\Delta u(k)\|^2 \quad (3.6.16)$$

$$= \|\Gamma^y [S^u \Delta u(k) - E_p(k+1|k)]\|^2 + \Gamma^u \|\Delta u(k)\|^2 \quad (3.6.17)$$

$$\begin{aligned} &= \Delta U^T(k) (S^{uT} \Gamma^y T \Gamma^y S^u + \Gamma^{uT} \Gamma^u) \Delta U(k) \\ &\quad - 2E_p^T(k+1|k) \Gamma^y T \Gamma^y S^u \Delta U(k) + E_p^T(k+1|k) \Gamma^y T \Gamma^y E_p(k+1|k) \end{aligned} \quad (3.6.18)$$

Definimos el vector de errores:

$$E_p(k+1|k) = \begin{bmatrix} e(k+1|k) \\ e(k+2|k) \\ \vdots \\ e(k+p|k) \end{bmatrix}$$

$$E_p(k+1|k) \triangleq R(k+1) - \left[M\tilde{Y}(k) + S^d \Delta d(k) + I_p (y_m(k) - \tilde{y}_0(k)) \right] \quad (3.6.19)$$

suponiendo que todos los movimientos de control futuros son cero. Este vector incluye el efecto de las perturbaciones medidas ($S^d \Delta d(k)$) en la predicción.

El problema de optimización con un objetivo cuadrático y desigualdades lineales que tenemos definido es un Programa Cuadrático. Transformando a la formulación de QP normal el problema DMC se convierte en ²:

$$\begin{aligned} \min_{\Delta U(k)} \quad & \Delta u(k)^T H^u \Delta U(k) - G(k+1|k)^T \Delta U(k) \\ \text{s.a} \quad & C^u \Delta U(k) \geq C(k+1|k) \end{aligned} \quad (3.6.20)$$

donde la Hessiana de QP es

$$H^u = S^{uT} \Gamma^y T \Gamma^y S^u + \Gamma^{uT} \Gamma^u \quad (3.6.21)$$

y el vector gradiente es

$$G(k+1|k) = 2S^{uT} (\Gamma^y)^T \Gamma^y E_p(k+1|k) \quad (3.6.22)$$

3.7. Aplicación DMC

Como se explicó, la aplicación DMC se hace en una forma de *horizonte móvil*. Esto implica que el Programa Cuadrático derivado se resolverá en cada momento de ejecución del controlador. Debido a este rasgo, el algoritmo puede ser configurado en línea tomando precauciones de cuidado para situaciones inesperadas. Por ejemplo, en el caso de que un

²El término $E_p^T(k+1|k) E_p(k+1|k)$ es independiente de $\Delta U(k)$ y puede ser retirado de la función objetivo.

actuador esté perdido durante la aplicación, los límites de restricción de esa variable manipulada en particular puedan considerarse iguales. Entonces se resuelve el problema MPC con las variables manipuladas restantes. De igual manera, pueden ajustarse los parámetros de peso en la función objetivo en línea, dándole al usuario la habilidad de sintonizar la ley control.

3.7.1. Algoritmo de horizonte móvil

El algoritmo de MPC restringido se ejecuta en línea así:

1. *Preparación.* No cambiar las variables manipuladas para por lo menos n intervalos de tiempo $\Delta u(-1) = \Delta u(-2) = \dots = \Delta u(-n) = 0$ y suponer que las perturbaciones medidas son cero $\Delta d(-1) = \Delta d(-2) = \dots = \Delta d(-n) = 0$ durante ese tiempo. Entonces el sistema estará en reposo en el tiempo $k = 0$.
2. *Inicialización* ($k = 0$). Medir la salida $\tilde{y}_0(k)$ y a continuación iniciar el modelo vectorial de predicción ³.

$$\tilde{Y}(k) = \left[\underbrace{y_m(0)^T, y_m(0)^T, \dots, y_m(0)^T}_n \right] \quad (3.7.1)$$

3. *Actualización del estado:* Tomar $k = k + 1$. Entonces, actualizar el estado según:

$$\tilde{Y}(k) = M\tilde{Y}(k-1) + S^u \Delta u(k-1) + S^d \Delta d(k-1) \quad (3.7.2)$$

dónde el primer elemento de $\tilde{Y}(k)$, $\tilde{y}_0(k|k)$, es la salida predicha por el modelo $y_m(k)$ en el tiempo k .

4. *Obtención de las medidas:* Obtener las medidas $(y_m(k), \Delta d(k))$.
5. Calcular el vector error de la trayectoria de referencia

$$E_p(k+1|k) = R(k+1) - M\tilde{Y}(k) + S^d \Delta d(k) + I_p (y_m(k) - \tilde{y}_0(k)) \quad (3.7.3)$$

³Si (3.7.1) se usa para inicialización y han ocurrido realmente cambios en n entradas pasadas, entonces el funcionamiento inicial del algoritmo no será liso. El paso de manual a automático introducirá una perturbación; que no será "bumpless".

6. Calcular el vector gradiente QP

$$G(k+1|k) = S^{uT} (\Gamma^y)^T \Gamma^y E_p(k+1|k) \quad (3.7.4)$$

7. Calcular el lado derecho del vector de ecuaciones de restricción

$$C(k+1|k) = \begin{bmatrix} u(k-1) - u_{high}(0) \\ \vdots \\ u(k-1) - u_{high}(m-1) \\ u_{low}(0) - u(k-1) \\ \vdots \\ u_{low}(m-1) - u(k-1) \\ -\Delta u_{m\acute{a}x}(0) \\ \vdots \\ -\Delta u_{m\acute{a}x}(m-1) \\ -\Delta u_{m\acute{a}x}(0) \\ \vdots \\ -\Delta u_{m\acute{a}x}(m-1) \\ -E_p(k+1|k) + R(k+1) - Y_{high} \\ E_p(k+1|k) + R(k+1) + Y_{low} \end{bmatrix} \quad (3.7.5)$$

8. Resolver el problema QP

$$\begin{aligned} \min_{\Delta U(k)} \quad & \frac{1}{2} \Delta U(k)^T H^u \Delta U(k) - G(k+1|k)^T \Delta U(k) \\ \text{s.a.} \quad & C^u \Delta U(k) \geq C(k+1|k) \end{aligned} \quad (3.7.6)$$

y aplicar $\Delta u(k|k)$ como $\Delta u(k)$ a la planta.

9. Volver a 3.

3.8. Sintonización

La documentación relacionada con la de sintonía MPC es escasa. Se proporcionan criterios generales sobre la forma de calcular los parámetros P , M , N , γ , λ . Para ciclos simples DMC [31] ha propuesto un método de sintonización para modelos Entrada/Salida de primer orden más tiempo muerto. El procedimiento a seguir es:

1. Aproximar la dinámica del proceso de la salida de proceso a la variable de proceso manipulada con modelos de primer orden más tiempo muerto.

$$\tau_p \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K_p u(t - \theta_p) \quad o \quad \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_p e^{-\theta_p s}}{\tau_p s + 1} \quad (3.8.1)$$

2. Seleccionar el intervalo de muestreo tan cercano posible a

$$T_s = 0,1\tau_p \quad o \quad T = 0,5\theta_p \quad (3.8.2)$$

El más grande de los dos.

3. Calcular el horizonte de predicción P y el horizonte del modelo N , como el tiempo de asentamiento del proceso muestreado (redondeado al entero siguiente)

$$P = N = \frac{5\tau_p}{T} + k \quad donde \quad k = \frac{\tau_p}{T} + 1 \quad (3.8.3)$$

4. Seleccionar el horizonte de control M , como el tiempo en muestras requerido para la respuesta en ciclo abierto que alcance el 60% del valor de estado estacionario.

$$M = \frac{\tau_p}{T} + k \quad (3.8.4)$$

5. Calcular los coeficientes de supresión de movimiento λ (matrices de peso γ)

$$\lambda = \begin{cases} 0 & M = 1 \\ \frac{M}{10} \left(\frac{3,5\tau_p}{T} + 2 - \frac{(M-1)}{2} \right) K_p^2 & M > 1 \end{cases} \quad (3.8.5)$$

6. Implementar el DMC usando la matriz de respuesta al escalón tradicional del proceso actual y con los parámetros hallados anteriormente.

Para sintonía fina DMC, aumentar el correspondiente γ_U para que el control del proceso sea mas ajustado y aumentar el correspondiente γ_Y de la variable manipulada para que los movimientos sean menos agresivos.

Capítulo 4

APLICACIÓN

El manejo de la metodología propuesta se desarrolla a continuación. La aplicación se efectúa sobre una columna de destilación de 41 platos que se alimenta con una mezcla de dos sustancias en la bandeja 21. Se producen dos corrientes de sustancias una de cabeza y otra de cola lo más puras posibles, es decir que su fracción molar sea cercana a la unidad. Las variables de trabajo para la solución del problema se manejan como variables de desviación y se parte del hecho que el sistema se encuentra en reposo (estado estable) para ser sometido a cambios en la referencia. El objetivo central de este tipo de equipos de proceso es obtener una máxima separación de la mezcla. Este ejemplo se extrajo de los textos [28], [29] y el cual se presentó en [42]. La estrategia utilizada sigue la Figura 3.3 y cada etapa esta justificada.

4.1. Conversión a formato matemático

La siguiente (ver Figura 4.1) es la descripción de la operación de una columna de destilación para una mezcla binaria [28].

4.1.1. Requerimientos de diseño

Se supone un sistema binario con volatilidad relativa constante a través de la columna con NS bandejas del 100 % de eficiencia, lo que significa que el vapor que abandona las bandejas está en equilibrio con el líquido de la misma bandeja. Existe una relación simple

de equilibrio líquido vapor dado por:

$$y_i = \frac{\alpha x_i}{1 + (\alpha - 1) x_i} \quad (4.1.1)$$

donde:

x_i : composición del líquido en la bandeja i .

y_i : composición del vapor en la bandeja i .

α : volatilidad relativa.

Una sola corriente con calidad q_f alimenta la torre. Si la alimentación es líquido saturado q_f es 1 y si es vapor saturado q_f es 0. La alimentación se hace generalmente por la mitad de la columna con una flujo molar F y una composición del componente volátil, z_f . El flujo de vapor de bandeja a bandeja se realiza de abajo hacia arriba y el flujo de líquido de bandeja a bandeja es de arriba hacia abajo. El vapor de cabeza es totalmente condensado y fluye hacia un tanque de reflujo en el cual se acumula líquido saturado en una cantidad M_D , una porción del líquido se retornada como reflujo al plato superior con una rata L_D y una composición $x_1 = x_d$, el destilado es obtenido como producto de cabeza a una rata D y una composición x_d . En la base de la columna, los fondos son removidos a una rata B con una composición x_{NS} , el reflujo de vapor se efectúa a una rata $V_{rehervidor}$. Suponemos que el líquido en el rehervidor y en la base de la columna tiene la misma composición x_{NS} y una acumulación de M_B . La composición del vapor que entra del rehervidor a la columna es y_{NS} y está en equilibrio con el líquido de composición x_{NS} .

En una bandeja el líquido retenido es M_T y su composición x_i está en equilibrio con el vapor que abandona la bandeja y_i

También se supone que cuando se condensa una mol de vapor se vaporiza una mol de líquido, por lo tanto las pérdidas de calor en las bandejas son despreciables, además el flujo molar de vapor para una bandeja es igual al flujo de vapor de la bandeja inferior y el líquido que abandona una bandeja tiene un flujo molar igual al de la bandeja superior. Lo anterior no es válido para la bandeja de alimentación.

El líquido de una bandeja pasa sobre una presa y baja en cascada a la siguiente bandeja a través del rebosadero.

Como el líquido se mueve a través de la bandeja, éste se pone en contacto con el vapor proveniente de la bandeja inferior provocando una mezcla turbulenta.

En la Figura 4.2, el vapor proveniente de la etapa i es considerado como una corriente

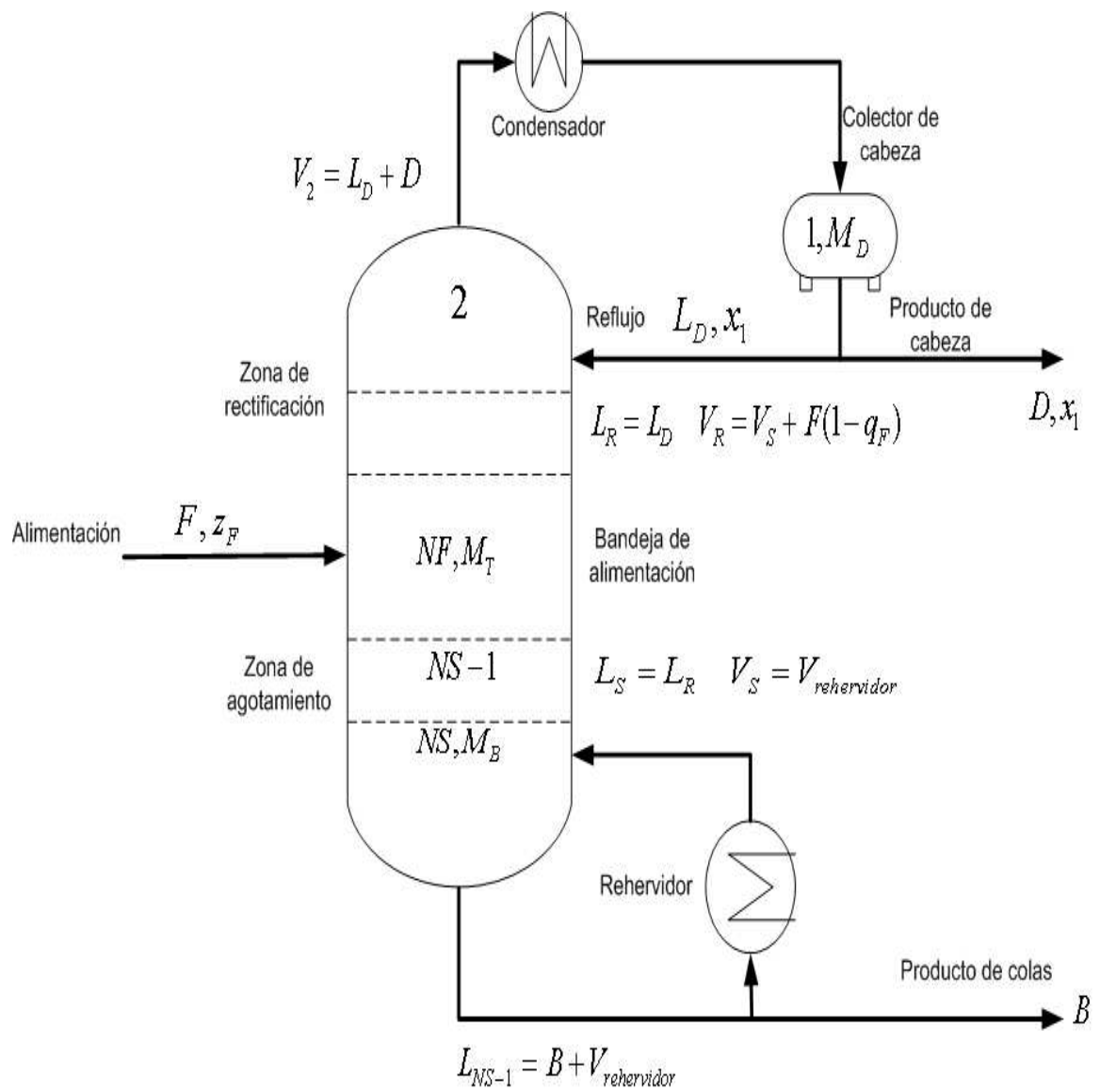


Figura 4.1: Columna de destilación

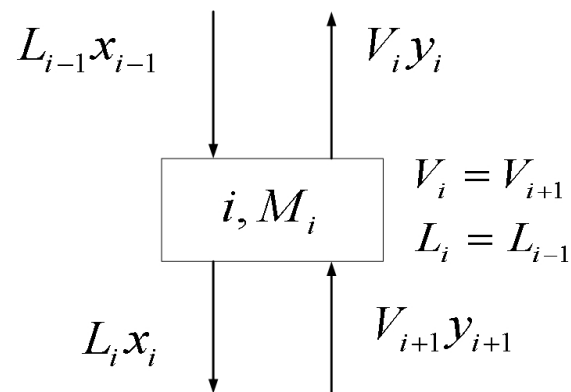


Figura 4.2: Bandeja típica.

única con flujo molar V_i y la composición del componente ligero en el vapor y_i . El líquido que abandona la etapa i a través del rebosadero es considerado como una corriente única con flujo molar L_i y la composición del componente ligero en el líquido es x_i

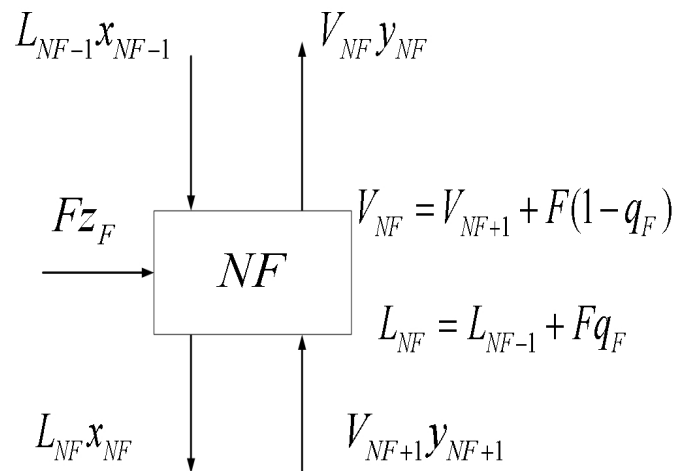


Figura 4.3: Bandeja de alimentación.

El diagrama conceptual de la etapa de alimentación se muestra en la Figura 4.3. Ésta difiere de la figura de cada plato en una entrada adicional a la etapa que es la alimentación de la columna.

Dentro de las especificaciones más importantes se solicita que en condiciones de operación normal la composición del destilado x_d sea la más cercana a 1, esto significa una máxima separación del componente liviano. La alimentación F y su composición x_F son en

general las variables manipuladas, siendo por comodidad la alimentación quien es escogida.

La descripción matemática se presenta a continuación, como resultado de la entrada anterior. Se aplican balances de materia a las componentes de columna. Para la sección de rectificación (sección de cima de la columna, sobre la etapa de alimentación) el flujo molar del líquido es [29]:

$$L_R = L_D \quad (4.1.2)$$

En la sección de fondos (debajo de la etapa de alimentación) los flujos molares del líquido son:

$$L_S = L_R + Fq_F \quad (4.1.3)$$

Los flujos molares de vapor en la sección de fondos son:

$$V_S = V_{rehervidor} \quad (4.1.4)$$

Los flujos molares en la sección de rectificado son:

$$V_R = V_S + F(1 - q_F) \quad (4.1.5)$$

El balance por componente en el tambor de cima es:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{M_D} [V_R(y_2 - x_1)] \quad (4.1.6)$$

El balance por componente para la sección de rectificación (para $i = 2$ hasta $NF - 1$) es:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{M_T} [L_R x_{i-1} + V_R y_{i+1} - L_R x_i - V_R y_i] \quad (4.1.7)$$

El balance para la etapa de alimentación es:

$$\frac{dx_{NF}}{dt} = \frac{1}{M_T} [L_R x_{NF-1} + V_S y_{NF+1} + Fz_F - L_S x_{NF} - V_R y_{NF}] \quad (4.1.8)$$

El balance por componente para la sección de agotamiento (para $i = NF + 1$ hasta $NS - 1$) es:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{M_T} [L_S x_{i-1} + V_S y_{i+1} - L_S x_i - V_S y_i] \quad (4.1.9)$$

y el balance por componente para el rehervidor es:

$$\frac{dx_{NS}}{dt} = \frac{1}{M_B} [L_S x_{NS-1} - B x_{NS} - V_S y_{NS}] \quad (4.1.10)$$

4.1.2. Especificaciones del sistema

Dentro de las especificaciones más importantes se solicita que en condiciones de operación normal la composición del destilado x_d sea la mas cercana a 1, esto significa una máxima separación del componente liviano. La alimentación F y su composición x_F son en general las variables manipuladas, siendo por comodidad la alimentación quien es escogida.

4.1.3. Representación de los requerimientos

Se empleo la siguiente nomenclatura y para la conversión matemática se proporcionan las especificaciones de operación:

y_i ; Fracción molar del componente ligero en el vapor en cada etapa.

x_i ; Fracción molar del componente ligero en el líquido en cada etapa.

$L_R = 2,706$; Reflujo en moles por minuto.

$L_S = 3,706$; Flujo molar de líquido en la sección de fondos en moles por minuto.

$V_R = 3,206$; Flujo molar de vapor en la sección de rectificación en moles por minuto.

$V_S = 3,206$; Flujo molar de vapor en la sección de fondos en moles por minuto.

$B = 0,5$; Flujo molar de producto de fondos en moles por minuto.

$F = 1$; Flujo molar de alimentación en moles por minuto.

$Z_F = 0,5$; Fracción molar del componente liviano en la alimentación.

$q_F = 1$; Calidad de la alimentación.

$\alpha = 1,5$; Constante de volatilidad relativa.

$D = 0,5$; Flujo de destilado en moles por minuto.

$M = 0,5$; Masa retenida en cada bandeja en moles.

$M_D = 5$; Moles retenidas en el colector de cabeza.

$M_B = 5$; Moles retenidas en el rehervidor.

$NS = 41$; Bandejas totales.

$NF = 21$; Bandeja de alimentación.

4.2. Diseño del sistema de control

4.2.1. Librerías

El desarrollo del software se realizó en MATLAB v6.5 que contiene librerías para solución de ecuaciones, formulación de modelos en varios formatos, comandos para la simulación de dinámicas de modelos (como SIMULINK) y librerías de optimización. Este paquete tiene además de comandos para graficación, manejo de matrices y programación.

4.2.2. Modelo de la columna

Las anteriores ecuaciones fueron linealizadas tomando como referencia el estado de equilibrio de la columna. Para obtener esta información se implemento el programa destila.m (Anexo en disco).

También se implemento el programa torre_mod.mdl (Anexo en disco) en SIMULINK y usando el método de identificación de la curva de reacción, se obtuvo la siguiente función de transferencia:

$$\frac{X_d(s)}{F(s)} = \frac{0,875}{195s + 1} e^{-5s} \quad (4.2.1)$$

4.2.3. Características de operación

Se efectuaron varios ensayos sobre la planta que permitieron establecer los límites permitidos de la variable de control, cumpliendo con los requisitos de operación, así se generaron las restricciones, los valores permitidos son:

$U_{max} = 0,15$; $U_{min} = -0,15$; para la restricción de señal de control, corresponde al caudal de alimento en variables de desviación.

$dU_{max} = 0,01$; $dU_{min} = -0,01$; para la restricción de velocidad. (Cambio en la señal de control)

Para evitar la saturación en la variable de salida se emplea la siguiente instrucción:
 $Y_{high} = 0,01; Y_{low} = -0,1;$

4.3. Validación del sistema de control

4.3.1. Criterios de desempeño

La estructura del control utilizada debe permitir que el sistema opere en condiciones estables con respuestas suaves, tiempos de establecimiento cortos y sin sobrepaso.

4.3.2. Simulación de modelos

Para implementar el control DMC, se usó un programa adaptado de [25]. Su implementación sigue el algoritmo presentado en el capítulo anterior. Los pasos son:

1. Preparación e inicialización: Incluye todos los pasos necesarios relacionados con datos de entrada donde se da el modelo de la columna, los parámetros de sintonización P , M , N , λ y γ basados en los presentados en el capítulo anterior. Las perturbaciones medidas son cero. Hallar los coeficientes de la respuesta al escalón (Su) empleando el comando `step`. Preparar las restricciones, inicializar las matrices de trabajo, la matriz de predicción dinámica, la hessiana y la matriz combinada de restricciones.

```
%——MODELO DE LA PLANTA——
Km=0.875; % Ganancia
taom=195; % Constante de tiempo
tdm=5; % Tiempo muerto
% ——Parámetros de sintonía del controlador——
T1 =0.1*taom;
T2 = 0.5*tdm;
if T1 < T2
Ts = T2; % Tiempo máximo de muestreo en Simulink
else
Ts = T1;
```

```

end
P = round((5*taom/Ts)+(taom/Ts)+1); % Horizonte de predicción, P
M = round((taom/Ts)+(taom/Ts)+1); % Horizonte de control, M
——Coeficientes de supresión de movimiento——
lambda = ((M/10)*(3.5*taom/Ts+2-(M-1)/2)*Km*Km);
gamma=1;
gammaY = gamma*eye(P); % Matriz de peso del error, gammaY, PxP
gammaU = lambda*eye(M); % Matriz de peso del esfuerzo de control, gammaU,
MxM
% ——Obtención de los coeficientes de la respuesta al escalón——
g = tf([Km],[taom 1], 'inputd', tdm); % Función de transferencia dada
N = P ; % Tiempo de asentamiento
delt = 0.05*P; % Incrementos de tiempo
Su = step(g,[1:N]*delt); % Cálculo de los coeficientes de respuesta al escalón unitario
% ——Restricciones——
Umax = 0.15; Umin = -0.15; % Restricción de entrada
dUmax= 0.01; dUmin= -0.01; % Restricción de velocidad
Yhigh = 0.01; Ylow = -0.1; % Restricción de salida
ref = 0.005; % Referencia de partida
SET = ones(P,1)*ref; % Vector de Referencia, Px1
% ——Construcción de las matrices de trabajo——
bigSu = [];
% Inicialización y generación de la Matriz de Predicción Dinámica, PxM
for i = 1:M
bigSu = [bigSu, [zeros(i-1,1);Su(1:P-(i-1))]];
end
% ——DMC restringido——
Yhat = zeros(N,1); % Inicialización del estado, Nx1
U = 0; delU = 0; % Inicialización de las entradas
Y = 0; % Inicialización de la salida
state=0; % Estado inicial para Simulink
REF=[];

```

```

% Calculo de la Hessiana % MxM
Hess = bigSu'*gammaY'*gammaY*bigSu + gammaU'*gammaU;
% ——Cálculo de la matriz de restricciones——
IL = tril(ones(M)); % IL es una matriz triangular inferior MxM
Cu = [-IL; IL; -eye(M); eye(M); -bigSu; bigSu]; % Lado izquierdo de la matriz de
restricciones

```

2. Efectuar un ciclo de 500 iteraciones para simular la estructura.
3. Actualización del estado: En la primera etapa de la iteración, se actualiza el estado del sistema con la ecuación (3.7.2)

```

Yhat = [Yhat(2:N); Y(end)] + Su*delU; % Actualización del estado Nx1

```

4. Obtención de las medidas: Con el programa en SIMULINK ruido.mdl (Anexo en disco) se halla el valor de la salida de la planta cuando se somete la señal de entrada correspondiente al primer valor hallado en la optimización. Emplear el comando sim de MATLAB.

```

[time,state,Yp]=sim('ruido',[0 Ts],simset('InitialState',state(end,:)),Uc);

```

5. Cálculo del vector error: Utilizar la ecuación (3.7.3) para hallar el error de la trayectoria de referencia.

```

Ep = SET - Yhat; % Cálculo del vector de errores Px1

```

6. Cálculo del vector gradiente: Con ayuda de la ecuación (3.7.4) se obtiene el valor del vector gradiente.

```

G = bigSu'*gammaY'*gammaY*Ep; % Cálculo del vector Gradiente Mx1

```

7. Vector de restricciones combinadas: Emplear la ecuación (3.7.5)

```

Crhs = [ ILmul*[U(i-1,:)'] - Umax];

```

```

ILmul*[Umin - U(i-1,:)'];

```

```

ILmul*[-dUmax];

```

```

ILmul*[dUmin] ];
-Ep+SET-ones(P,1)*[Yhigh];
Ep-SET+ones(P,1)*[Ylow];
];

```

8. Optimización: Con el comando `quadprog` se hallan los valores de salida óptimos. Hallar en orden la hessiana $Hess$, el vector gradiente G , el lado izquierdo de la matriz de restricciones Cu y el lado derecho de la matriz de restricciones $Crhs$.

```
deltaU = quadprog(Hess, -G, -Cu, -Crhs);
```

9. Hallar el valor de la señal de control U para ser aplicada en la próxima iteración. Volver al ciclo.

```

delU = deltaU(1); % Vector de esfuerzo de control
U(i,:) = U(i-1,:) + delU'; % Vector de señal de control

```

4.4. Modelos de comunicación, información del producto comercial

La aplicación final funciona perfectamente y los archivos desarrollados están a la disposición, el paquete de software contiene 4 programas. El primero se tienen las condiciones de equilibrio y datos de las funciones de transferencia. El siguiente es `torre_mod.mdl` para obtener el modelo E/S. Los otros dos son el resultado final del sistema de control se llaman `DMC_final_v2.m` y `ruido.mdl`

4.4.1. Análisis de resultados

Los programas anteriores proporcionaron una serie de gráficos con la siguiente información de sintonización:

$P = 61$; Horizonte de predicción

$M = 21$; Horizonte de control

$N = 61$; Elementos de la matriz Dinámica

$\lambda = 43,4109$; Peso de la Matriz de velocidad
 $\gamma = 1$; Peso de la matriz de señal de control
 $T_s = 19,5$; Tiempo de muestreo (min)

Se realizaron varios ensayos, cambiando los datos de sintonía. Se empleo para todos los ensayos una perturbación en la referencia de 0,005; las restricciones en la señal de control y en la velocidad de la señal de control fueron constantes. Se tomaron datos sobre 500 minutos. También, es bueno aclarar que el archivo ruido.mdl que corresponde a la medidas de la planta (composición del destilado), se le sumo un ruido de media cero y varianza 0,0001 con el fin de ofrecer una diferencia entre el modelo y la planta real. Recordar que los resultados se dan como variables de desviación.

La Figura 4.4, muestra la curva de salida del sistema suave, sin sobrepaso y con un tiempo de estabilización menor a los 450 minutos.

La Figura 4.5, comprueba que para valores de P que se acercan a M se incrementa el tiempo de estabilización y para valores muy grandes existe sobrepaso pero el tiempo de estabilización disminuye a 250 minutos aproximadamente.

La Figura 4.6, muestra que si solo cambiamos el valor del horizonte de control M manteniéndose constante el valor de la matriz de ponderación λ , la salida o sufre alteraciones. Recordemos que el valor de λ es función de M de acuerdo a la ecuación (3.8.5).

Pero la Figura 4.7, donde varía el horizonte de control M y la matriz de ponderación λ de acuerdo a las fórmulas de sintonía, nos muestra que disminuyendo el valor de M disminuye el tiempo de estabilización presentándose sobrepaso, si aumentamos levemente M hay una respuesta suave, disminuyendo el tiempo de estabilización, sin sobrepaso. Acercándose M al valor de P la respuesta es suave, sin sobrepaso y se incrementa el tiempo de estabilización sobre los 500 minutos.

En la Figura 4.8, observamos por primera vez que la variación del parámetro correspondiente a la matriz de supresión de movimiento provoca oscilaciones en la respuesta del sistema cuando se disminuye llegando a ser inestable y cuando se aumenta la curva de salida del sistema es suave, sin sobrepaso y con un tiempo de estabilización mayor a los 500 minutos. Este parámetro sensibiliza mucho la respuesta.

Para la Figura 4.9, las respuestas del sistema son contrarias a las dadas en el gráfico

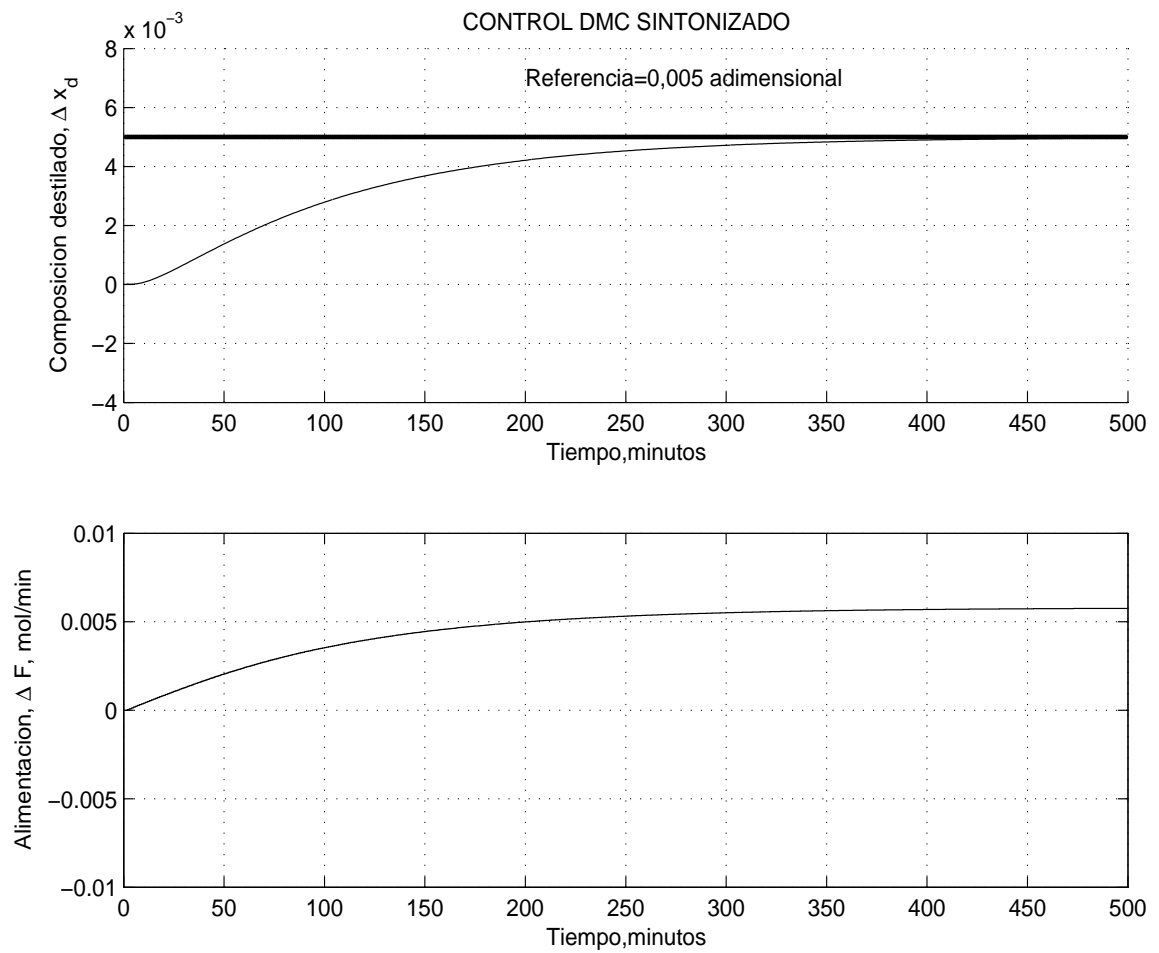


Figura 4.4: Control DMC sintonizado

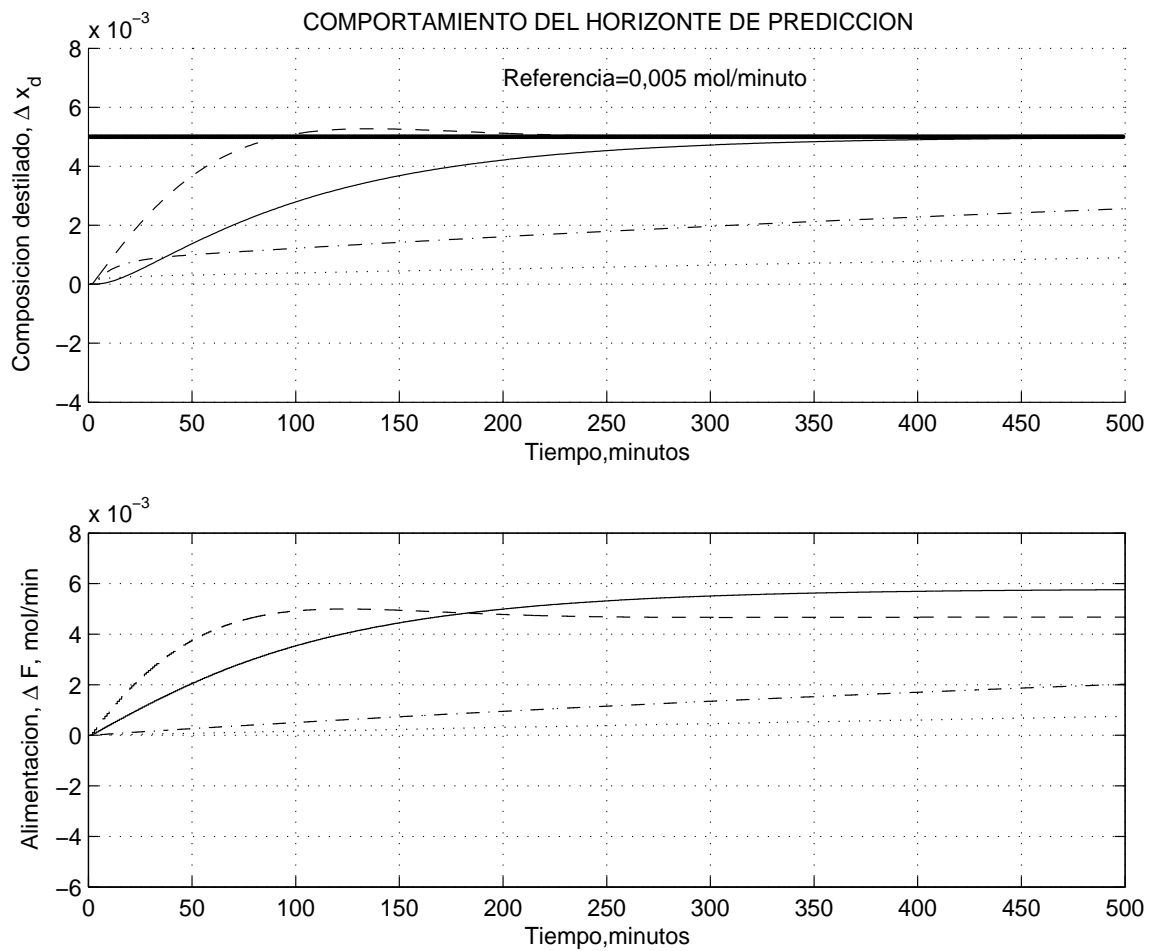


Figura 4.5: Variación del horizonte de predicción. $P = 61$, línea sólida; $P = 21$, línea punteada; $P = 30$, línea guión-punto; $P = 100$, línea de guiones

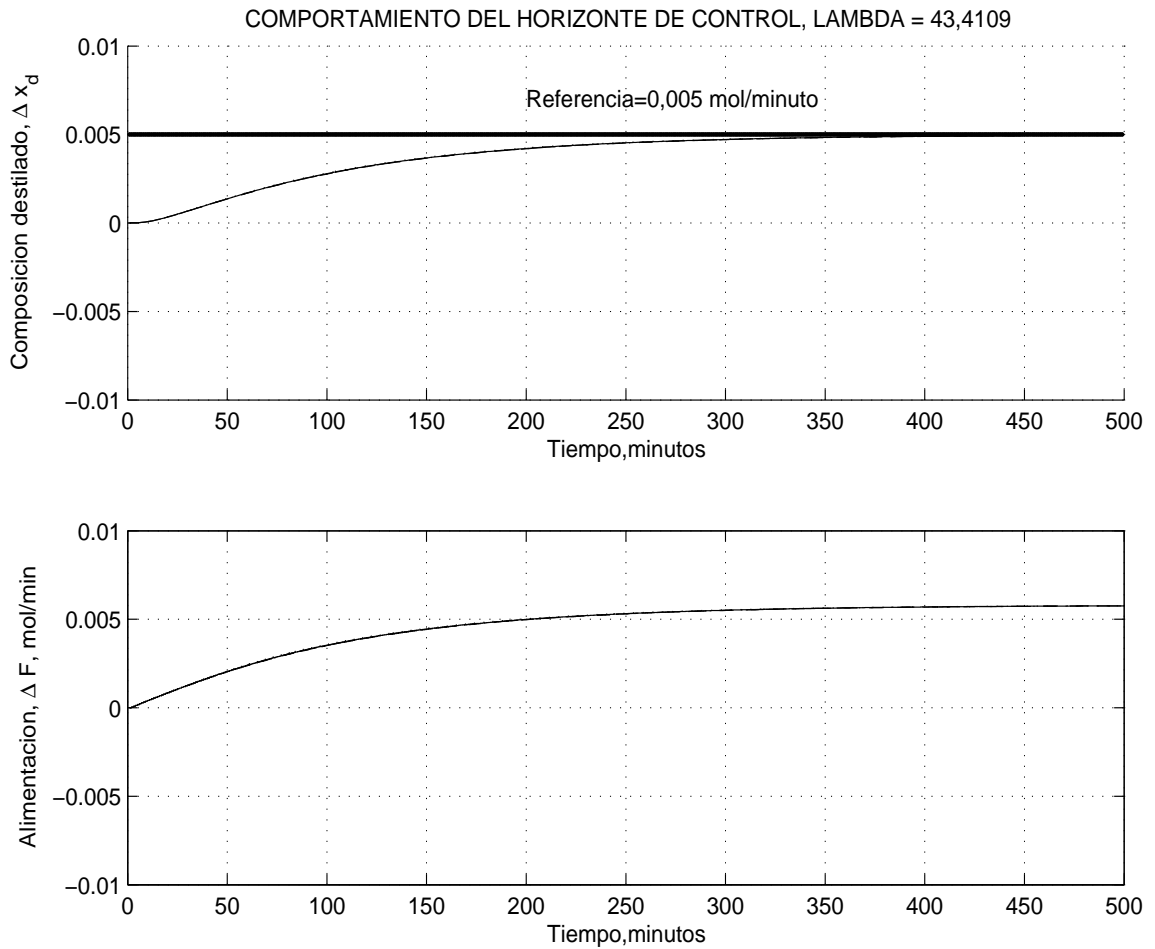


Figura 4.6: Variación del horizonte de Control. $M = 21$, línea sólida; $M = 10$, línea punteada; $M = 30$, línea guión-punto; $M = 61$, línea de guiones; en todos los casos $\lambda = 43,4109$

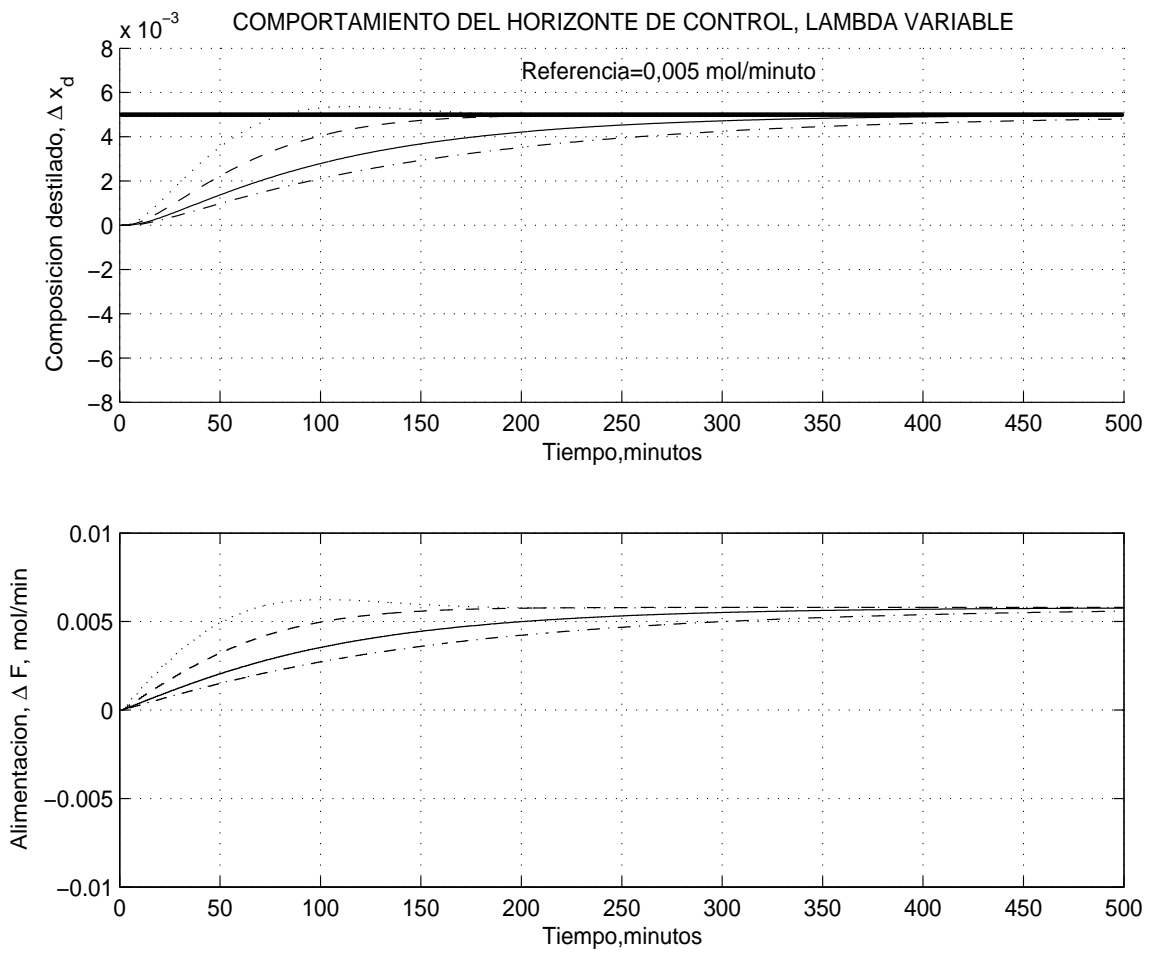


Figura 4.7: Variación del horizonte de Control. $M = 21$, línea sólida; $M = 10$, línea punteada; $M = 30$, línea guión-punto; $M = 61$, línea de guiones

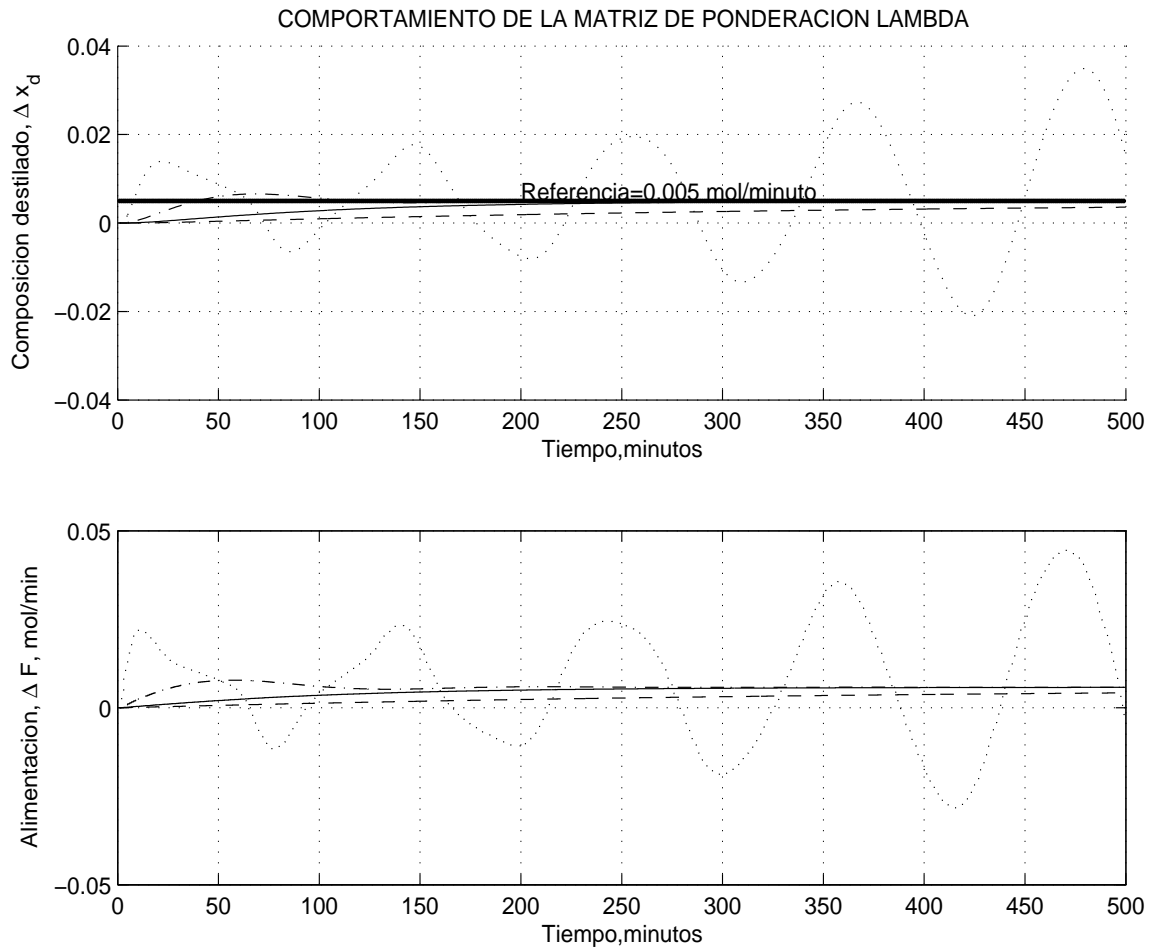


Figura 4.8: Variación de la matriz de peso del esfuerzo de control. $\lambda = 43, 4109$, línea sólida; $\lambda = 1$, línea punteada; $\lambda = 15$, línea guión-punto; $\lambda = 80$, línea de guiones

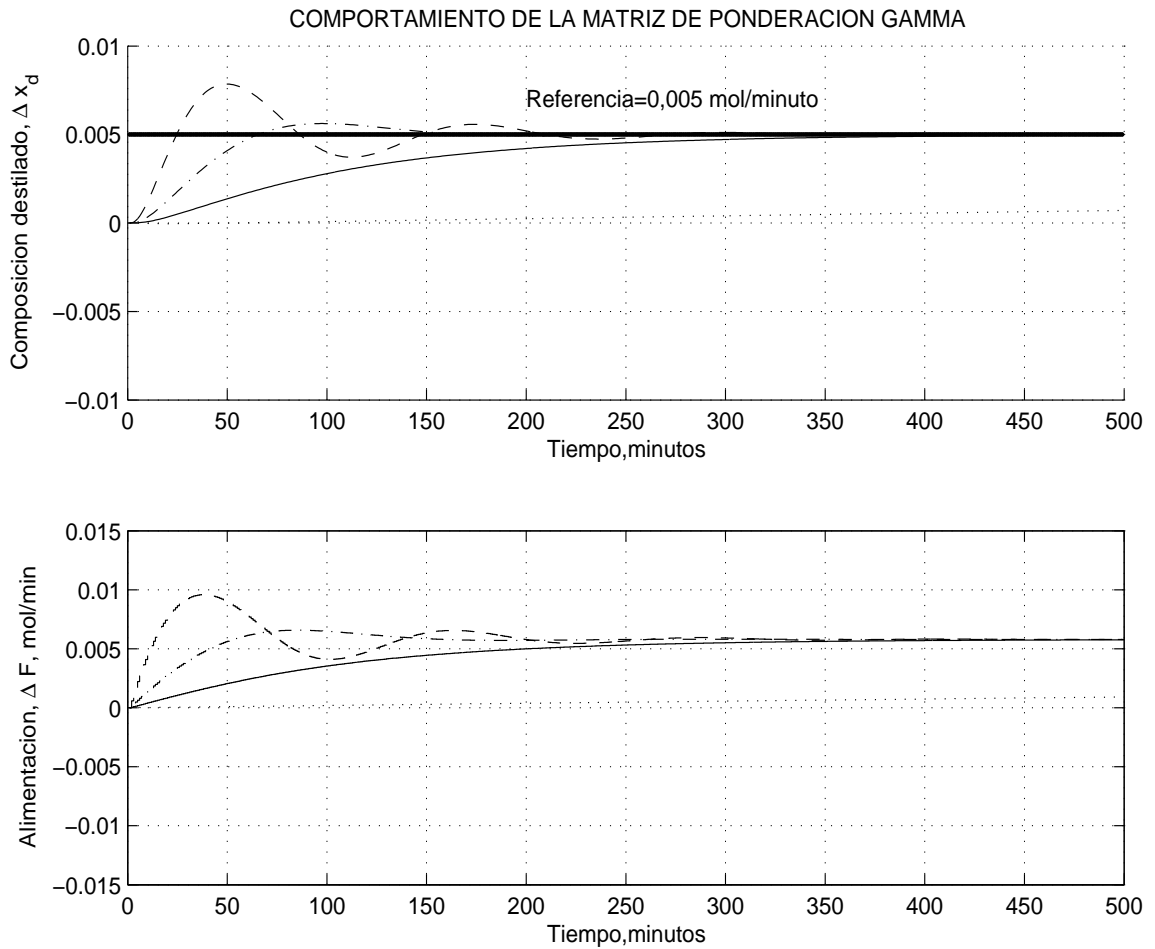


Figura 4.9: Variación de la matriz de peso de la señal de control. $\gamma = 1$, línea sólida; $\gamma = 0,2$, línea punteada; $\gamma = 2$, línea guión-punto; $\gamma = 5$, línea de guiones

anterior, para valores cercanos a cero la respuesta es suave, sin sobrepaso y con tiempo de estabilización mayor a 500 minutos, pero para valores mayores a la unidad se presentan oscilaciones y sobrepaso. Es otro parámetro que hace muy sensible respuesta. Se aconseja que sea de valor uno.

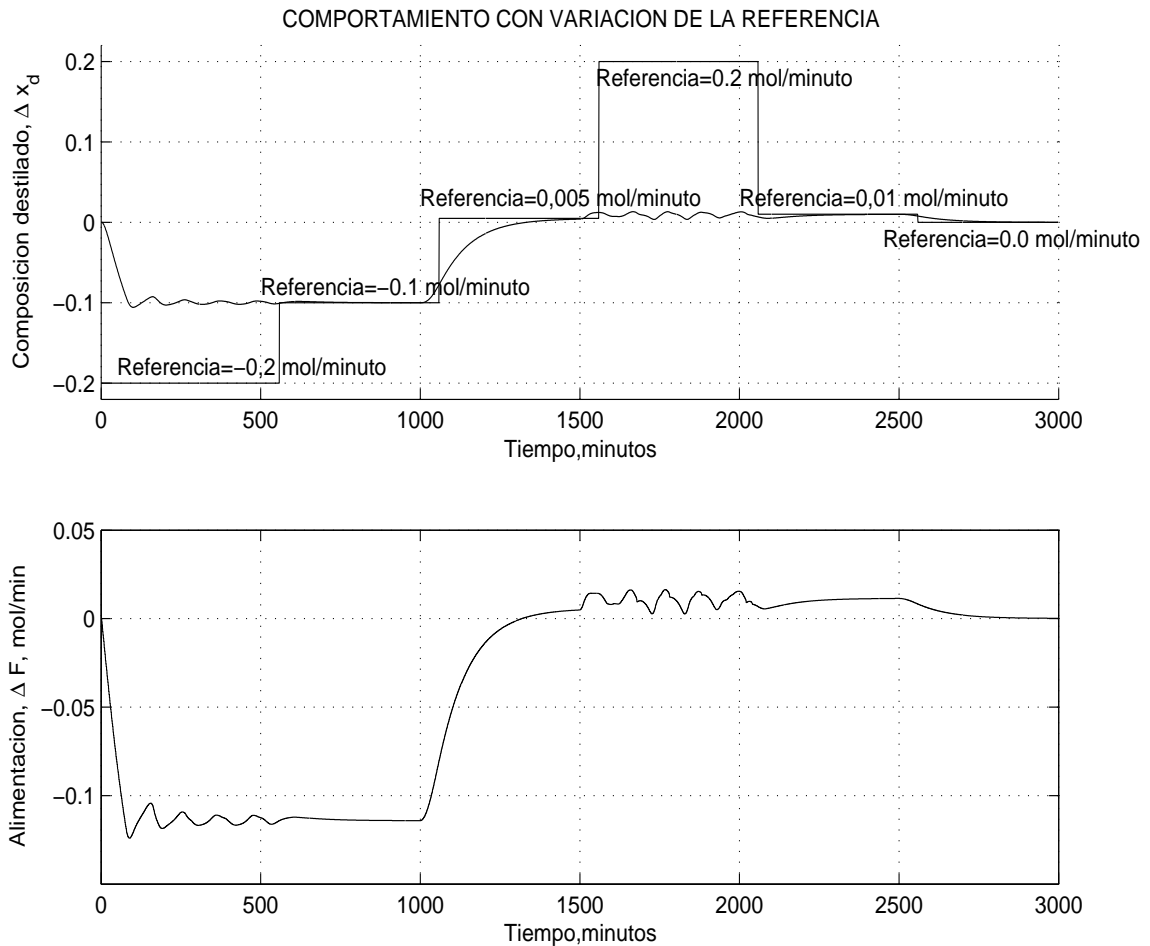


Figura 4.10: Control servo, variación del punto de control

Con la Figura 4.10, se realizaron varios cambios en la referencia, observamos como los efectos de prealimentación son efectivos, la respuesta del sistema actúa antes de que se alcance el tiempo en el cual ocurre el cambio, funciona bien para este servo.

Por último en la Figura 4.11 se cambiaron simultáneamente la referencia y el horizonte de control y se comparó con la respuesta anterior. Este servo muestra que es posible modificar el valor de algunos parámetros buscando respuestas de comportamiento suave, pero es

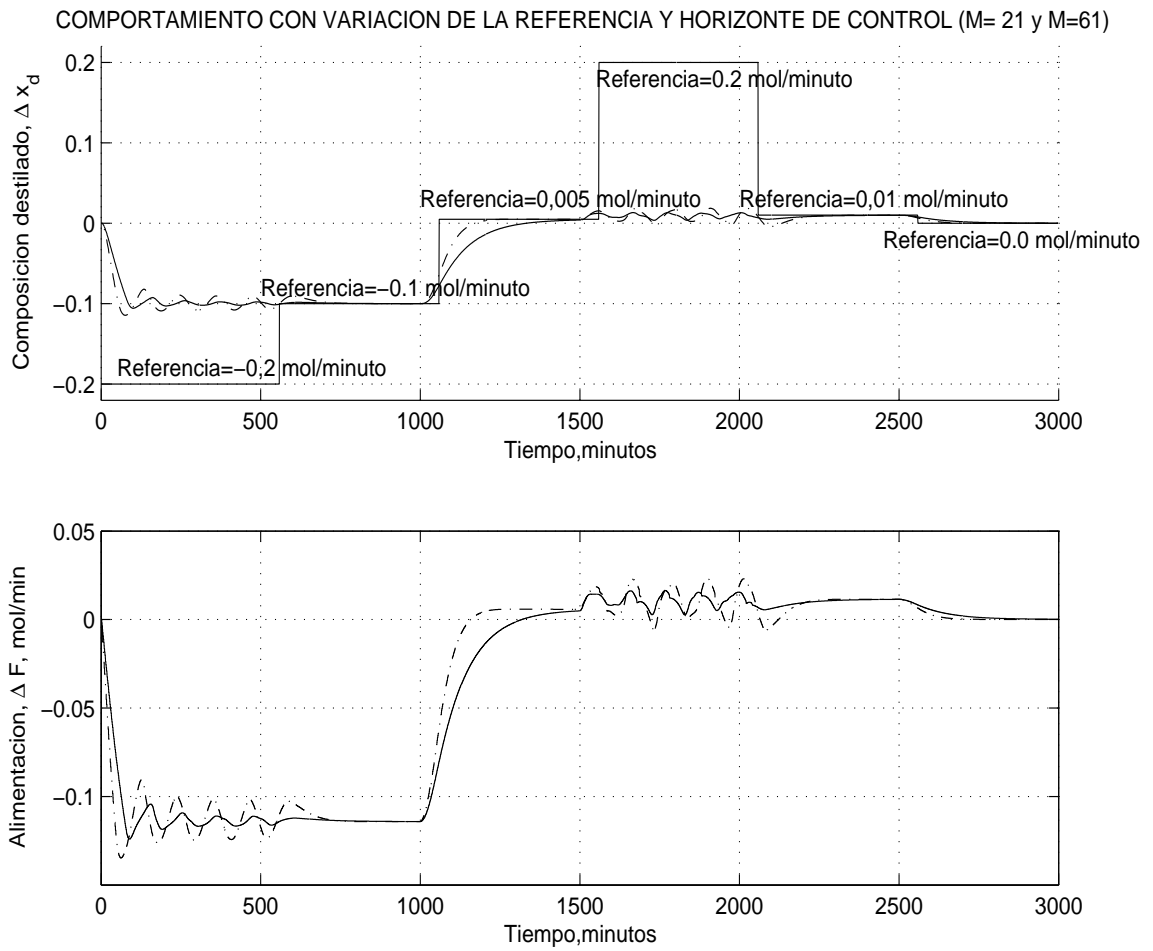


Figura 4.11: Control servo, variación del punto de control y del horizonte de control M , línea sólida $M = 21$ y línea punteada $M = 61$

importante aclarar que se disminuyo el tiempo de estabilización pero la carga computacional aumento.

Las respuestas mostradas no se vieron afectadas por el ruido sumado a la medida, esto indica un cierto grado de robustez del sistema de control, a la vez que por el efectivo desempeño de las restricciones el sistema no se sale de los límites preestablecidos y es estable.

Capítulo 5

CONCLUSIONES

- El desarrollo tecnológico de un país esta relacionado directamente con una adecuada generación de conocimientos, bien sea producido por sus habitantes o por transferencia desde otros lugares. El presente trabajo es la respuesta a la necesidad de transferir tecnología muy empleada en otros lugares del mundo y que no es común en nuestro medio.
- Los controladores predictivos gestionan problemas complejos de forma óptima, siendo una herramienta de gran valor para abordar problemas donde se necesita una mejora en la regulación, sin una complejidad conceptual elevada. [16]
- La estructura de control MPC utiliza una serie de parámetros cuyo significado es fácil de comprender y para los que existen reglas de selección que hacen la sintonía y el mantenimiento asequible al usuario. [37]
- El controladores DMC utilizan los horizontes de control y predicción, como los factores de ponderación para fijar el compromiso entre la velocidad de la respuesta y el tiempo de estabilización como se observa en la Figura 4.7
- El control predictivo es una tecnología probada y con numerosas aplicaciones industriales en la que, además, se realizan continuamente nuevas formulaciones para abordar problemas de robustez, modelos no-lineales, aplicación a nuevos sistemas, etc. [16], [3], [32]
- El MPC permite la solución de problemas de control con comportamientos dinámicos

no usuales, realiza la compensación de tiempos muertos y da una respuesta adecuada a procesos con respuesta inversa. El caso presentado es un sistema de fase no mínima.

- Es muy atractivo para técnicos con conocimientos limitados en control de procesos, puede manipular procesos con problemas de interacción multivariable [37]
- En la Figura 4.11 se observa la respuesta a una acción de control *feedforward* que hace atractivo el uso del MPC.
- La metodología propuesta reúne áreas de la ingeniería y la economía que permiten desarrollar herramientas de aplicación lo suficientemente poderosas para mejorar el desempeño de procesos con un gran número de variables.
- La aplicación desarrollada en el trabajo demostró que el método de sintonía propuesto es satisfactorio
- Con la herramienta MATLAB se pudo implementar el algoritmo de control y su puesta a punto fue efectiva.
- Quedan abiertos varios campos de trabajo entre ellos sistemas MIMO, procesos integrantes, procesos inestables, y estabilidad.

Apéndice A

FUNDAMENTOS DE CONTROL PREDICTIVO DE PROCESOS

Los controladores predictivos [16] gestionan situaciones complejas donde se necesita una mejora del control tradicional y dan posibilidades a la optimización del proceso. En la actualidad ha alcanzado un nivel sustancial de aceptación, solucionando situaciones de exigencias crecientes de calidad, seguridad y gestión económica de la planta.

En la última década el Control Predictivo Basado en Modelos (MPC) ha alcanzado un nivel muy significativo de aceptabilidad industrial en aplicaciones prácticas de control de procesos.

Es un hecho bien conocido que la mayoría de los problemas de control del nivel inferior se pueden resolver mediante simples reguladores PID. Sin embargo, existe una serie de lazos de control económicamente muy significativos que, debido a su dificultad (procesos con múltiples variables que interaccionan, retardos, dinámica compleja, etc.) o a la exigencia en la gestión de calidad, requieren técnicas de control más avanzadas. Estas aplicaciones tienden a aumentar debido a una serie de factores:

- Exigencias crecientes de calidad
- Ahorro de energía
- Seguridad
- Flexibilidad en la producción
- Necesidad de integrar decisiones económicas y sistemas de control

- Diseño integrado de plantas y sistemas de control

El MPC se puede considerar como un buen compromiso entre comportamiento y simplicidad y puede ofrecer una herramienta eficaz y fácilmente accesible para los ingenieros de control. Desde el punto de vista de las aplicaciones industriales, el método tiene algunas ventajas importantes sobre otras técnicas de control:

1. Permite tratar de forma sencilla sistemas multivariables con distinto número de entradas y salidas.
2. Incorpora de forma natural la compensación *feedforward*, proporciona varianza mínima en las variables controladas y puede utilizarse en sistemas de dinámica difícil, con retardos, respuesta inversa, etc.
3. Es posible la introducción de restricciones en las variables de entrada y salida.
4. Es conceptualmente simple de comprender y ajustar por el personal técnico.
5. Existen controladores comerciales en el mercado con adecuado soporte técnico.

A.1. Elementos del control predictivo

Hay una serie de elementos comunes a todos los controladores predictivos [32], [3], [35], [9], [25], [38], [39]:

- El uso de un modelo matemático del proceso que se utiliza para predecir la evolución futura de las variables controladas sobre un horizonte de predicción.
- La imposición de una estructura en las variables manipuladas futuras.
- El establecimiento de una trayectoria deseada futura, o referencia, para las variables controladas.
- El cálculo de las variables manipuladas optimizando una cierta función objetivo.
- La aplicación del control siguiendo una política de horizonte móvil.

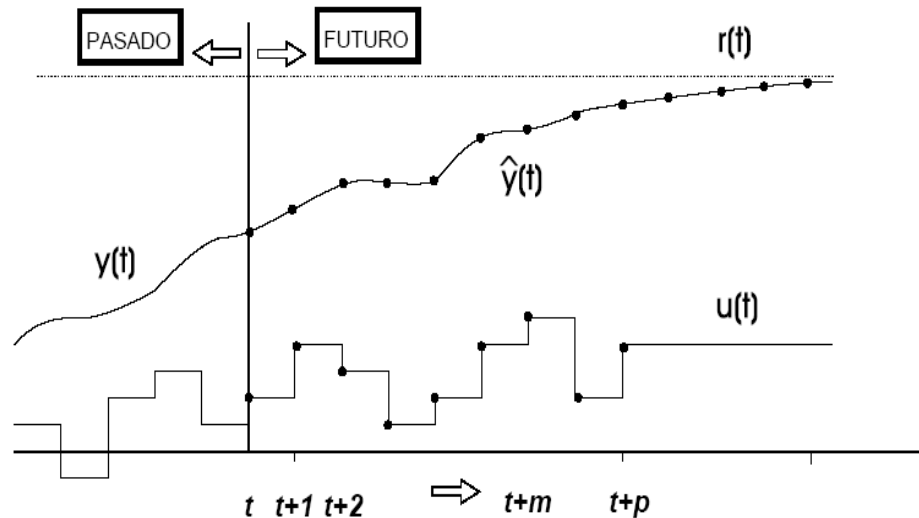


Figura A.1: Esquema general MPC

A.1.1. Concepto de horizonte móvil

En el tiempo actual t (ver Figura A.1), es considerada la conducta del proceso por encima de un horizonte p . Usando un modelo del sistema, se predice la respuesta de la salida del proceso ante cambios en la variable manipulada. Los movimientos actuales y futuros de las variables manipuladas son seleccionados tal que la respuesta posea ciertas características deseables (u óptimas). Por ejemplo, un objetivo usado normalmente es minimizar la suma de cuadrados de los errores futuros, es decir, las desviaciones de la variable controlada de una referencia deseada (punto de ajuste). Esta minimización también puede tomar en cuenta restricciones que estén presentes en las variables manipuladas y en las salidas.

La idea es recurrir a las predicciones pero no trabajarían muy bien en la práctica si determinados movimientos de la variable manipulada en el tiempo t para ser aplicados ciegamente por encima del horizonte futuro. Las perturbaciones y errores de modelado pueden llevar a desviaciones entre la conducta predicha y la conducta observada real, para que los movimientos hallados de las variables manipuladas no puedan ser aplicados más. Por consiguiente sólo el primero de los movimientos computados se lleva a cabo realmente. En el próximo instante de tiempo $t + 1$ se toma la medida, el horizonte se cambia adelante en un incremento de tiempo y se hace de nuevo la optimización sobre ese cambió del horizonte

basada en la información actualizada del sistema. Por consiguiente esta estrategia de control también es conocida como *control de horizonte móvil*.

A.2. Modelos y predicciones

A.2.1. Respuesta al impulso (FIR)

Si suministramos un pulso unitario

$$u(0) = \{1, 0, \dots, 0, \dots\} \quad (\text{A.2.1})$$

a un sistema en reposo se obtiene una respuesta

$$y(0) = \{h_0, h_1, \dots, h_n, h_{n+1}, \dots\} \quad (\text{A.2.2})$$

Asumiendo que el sistema tiene las siguientes características:

- $h_0 = 0$, es decir los sistemas no reaccionan inmediatamente a la entrada
- $h_k = 0$ para $k > n$, es decir el sistema se restablece después de n incrementos de tiempo

Estos sistemas se conocen como de Respuesta Finita al Impulso (FIR) y tienen una matriz de coeficientes FIR

$$H = [h_1, h_2, \dots, h_n]^T \quad (\text{A.2.3})$$

Para un sistema lineal invariante en el tiempo, una entrada pulso retardada,

$$u(0) = \{0, 1, 0, \dots, 0, \dots\} \quad (\text{A.2.4})$$

simplemente cambiará la respuesta al impulso

$$y(0) = \{0, h_0, h_1, \dots, h_n, h_{n+1}, \dots\} \quad (\text{A.2.5})$$

La conducta dinámica de un sistema FIR es completamente caracterizada por el conjunto de coeficientes FIR. La respuesta del sistema puede ser obtenida por el principio de superposición, cuando se somete el sistema a una entrada arbitraria

$$u(0) = \{u(0), u(1), u(2), \dots\} \quad (\text{A.2.6})$$

el cual lo podemos representar como una suma de impulsos

$$\begin{aligned} u(0) &= \{1, 0, 0, \dots\} u(0) \\ &+ \{0, 1, 0, \dots\} u(1) \\ &+ \{0, 0, 1, 0, \dots\} u(2) \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (\text{A.2.7})$$

La salida del sistema se obtiene sumando las respuestas al impulso pesadas por su respectiva fuerza de impulso $u(i)$

$$\begin{aligned} y(0) &= \{0, h_1, h_2, \dots, h_n, 0, 0, \dots\} u(0) \\ &+ \{0, 0, h_1, h_2, \dots, h_n, 0, 0, \dots\} u(1) \\ &+ \{0, 0, 0, h_1, h_2, \dots, h_n, 0, 0, \dots\} u(2) \\ &= \{0, h_1u(0), h_2u(0) + h_1u(1), h_3u(0) + h_2u(1) + h_1u(2), \dots\} \end{aligned} \quad (\text{A.2.8})$$

Por inspección observamos que esta derivación en un momento particular da la salida

$$y(k) = \sum_{i=1}^n h_i u(k-i) \quad (\text{A.2.9})$$

El coeficiente h_i expresa el efecto de una entrada que ocurrió i intervalos en el pasado, sobre la salida presente $y(k)$. Para computar esta salida necesitamos guardar las últimas n entradas $u(k-1), u(k-2), \dots, u(k-n)$ en la memoria.

A.2.2. Predicción multi paso

El objetivo de un controlador es determinar una acción de control tal que se produzca una conducta deseable de la salida en el futuro. Por lo tanto, necesitamos la habilidad para predecir eficientemente la conducta de la salida futura del sistema. Esta conducta futura es una función de las entradas pasadas al proceso, así como las entradas que estamos

considerando tomar en el futuro. Separaremos los efectos de las entradas pasadas de los efectos de las entradas futuras. Toda la información de las entradas pasadas se sintetizará en el *estado dinámico* del sistema. Así la conducta de la salida futura se determinará por el estado del sistema presente y las entradas presentes y futuras al sistema.

Para un sistema FIR podríamos escoger n entradas pasadas como el estado x .

$$x(k) = [u(k-1), u(k-2), \dots, u(k-n)]^T \quad (\text{A.2.10})$$

Claramente este estado resume toda la información relevante de las entradas pasadas para un sistema FIR y nos permite computar la evolución futura de sistema cuando damos la entrada presente $u(k)$ y la entrada futura $u(k+1), u(k+2), \dots$.

Normalmente la representación del estado no es única. Hay otras posibles opciones. Por ejemplo, en lugar de las n entradas pasadas podríamos escoger el *efecto* de las entradas pasadas sobre las salidas futuras en las próximos n pasos para definir el estado. En otros términos, definimos el estado como la salida presente y las $n-1$ salidas futuras, asumiendo que las entradas presentes y futuras son cero. Los dos estados son equivalentes y los dos tienen dimensión n y están relacionados unívocamente por un mapa lineal.

La última opción de estado demostrará ser más conveniente para los cálculos del control predictivo. Muestra explícitamente cómo el sistema evolucionará cuando no hay ninguna acción de control y por consiguiente nos permite determinar fácilmente que acción de control debe tomarse para lograr una conducta especificada de la salida en el futuro.

A.2.3. Predicción multi paso basado en modelo FIR

Definimos el estado en el tiempo k como

$$\bar{Y}(k) = [\bar{y}_0(k), \bar{y}_1(k), \dots, \bar{y}_{n-1}(k)]^T \quad (\text{A.2.11})$$

donde

$$\bar{y}_i(k) \triangleq y(k+i) \quad \text{para} \quad u(k+j) = 0; j \geq 0 \quad (\text{A.2.12})$$

Así, definimos el i^{th} estado del sistema con salida $y_i(k)$ en el instante $k+i$, bajo la suposición de que las entradas del sistema son cero desde tiempo k hasta el futuro $u(k+j) = 0; j \geq 0$. Este estado caracteriza completamente la evolución de la salida del

sistema bajo la suposición de que las entradas presentes y futuras son cero. Para determinar la salida futura agregamos simplemente al estado, el efecto de las entradas presentes y futuras usando (A.2.9).

$$\begin{aligned}
 y(k+1) &= \bar{y}_1(k) + h_1 u(k) \\
 y(k+2) &= \bar{y}_2(k) + h_1 u(k+1) + h_2 u(k) \\
 y(k+3) &= \bar{y}_3(k) + h_1 u(k+2) + h_2 u(k+1) + h_3 u(k) \\
 y(k+4) &= \dots
 \end{aligned} \tag{A.2.13}$$

Presentado estas ecuaciones en forma matricial tenemos:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} y(k+1) \\ y(k+2) \\ \vdots \\ \vdots \\ y(k+p) \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{y}_1(k) \\ \bar{y}_2(k) \\ \vdots \\ \vdots \\ \bar{y}_p(k) \end{bmatrix}}_{\substack{\text{efecto de las pasadas entradas} \\ \text{desde } Y^0(k)}} \\
 + \underbrace{\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ h_p \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ h_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ h_{p-1} \end{bmatrix} u(k+1) + \dots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ h_1 \end{bmatrix} u(k+p-1)}_{\substack{\text{efecto ocasionados por los cambios en la entrada futuras} \\ \text{(deben calcularse)}}} & \tag{A.2.14}
 \end{aligned}$$

y observamos que el primer término es una parte del estado y refleja el efecto de las entradas pasadas. Los otros términos expresan el efecto de las entradas futuras hipotéticas. Ellos simplemente dan la respuesta a impulsos que ocurren en incrementos de tiempo futuros.

El estado dinámico del sistema $\bar{Y}(k)$ captura toda la información pertinente del sistema en el tiempo k . Para obtener el estado en $k+1$, que por definición es

$$\bar{Y}(k+1) = [\bar{y}_0(k+1), \bar{y}_1(k+1), \dots, \bar{y}_{n-1}(k+1)]^T \tag{A.2.15}$$

con

$$\bar{y}_i(k+1) \triangleq y(k+1+i) \quad \text{para} \quad u(k+1+j) = 0; j \geq 0 \quad (\text{A.2.16})$$

necesitamos agregar el efecto de la entrada $u(k)$ en el tiempo k al estado $\bar{Y}(k)$.

$$\begin{aligned} \bar{y}_0(k+1) &= \bar{y}_1(k) + h_1 u(k) \\ \bar{y}_1(k+1) &= \bar{y}_2(k) + h_2 u(k) \\ &\dots \\ \bar{y}_{n-1}(k+1) &= \bar{y}_n(k) + h_n u(k) \end{aligned} \quad (\text{A.2.17})$$

vemos que $\bar{y}_n(k)$ no era una parte del estado en el tiempo k , pero sabemos que su valor es 0 debido a la suposición del modelo FIR. Para una definición matricial

$$M_i = \left. \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} n \quad (\text{A.2.18})$$

podemos expresar la actualización del estado de un modo compacto como

$$\bar{Y}(k+1) = M_i \bar{Y}(k) + H u(k) \quad (\text{A.2.19})$$

Esta ecuación que actualiza el estado es para modelos de respuesta finita al impulso, es usada para obtener $\bar{Y}(k)$ en el tiempo k y con el movimiento de la entrada $u(k)$ para obtener el estado $\bar{Y}(k+1)$ en el próximo instante de tiempo. Multiplicando con la matriz M en la representación anterior la simple operación de cambiar el vector $\bar{Y}(k)$ y poniendo el último elemento del vector resultante a cero.

A.2.4. Modelo de respuesta al escalón

Para una entrada escalón unitaria:

$$u(0) = \{1, 1, \dots, 1, \dots\} \quad (\text{A.2.20})$$

introducida a un sistema en reposo, la salida es

$$y(0) = \{0, h_1, h_1 + h_2, h_1 + h_2 + h_3, \dots\} \quad (\text{A.2.21})$$

$$\triangleq \{0, s_1, s_2, s_3, \dots\} \quad (\text{A.2.22})$$

$$\triangleq \{0, g_1, g_2, g_3, \dots\} \quad (\text{A.2.23})$$

Definimos los coeficientes de respuesta al escalón s_1, s_2, s_3 , o para otros autores por comodidad en la simbología como g_1, g_2, g_3 . Se aclara que ambas notaciones son equivalentes y en el presente documento se utilizarán indistintamente.

Para un sistema lineal invariante en el tiempo un escalón unitario retrasado en el tiempo

$$u(0) = \{0, 1, \dots, 1, \dots\} \quad (\text{A.2.24})$$

dará lugar a una respuesta al escalón retrasada

$$y(0) = \{0, 0, s_1, s_2, s_3, \dots\} \quad (\text{A.2.25})$$

La matriz de coeficientes de respuesta al escalón

$$S = [s_1, s_2, \dots, s_n]^T \quad (\text{A.2.26})$$

es una descripción *completa* de cómo una entrada particular afecta la salida del sistema cuando el sistema esta en reposo. Para una entrada arbitraria

$$u(0) = \{u(0), u(1), u(2), \dots\} \quad (\text{A.2.27})$$

puede representarse como una suma de escalones

$$\begin{aligned} u(0) &= \{1, 1, 1, 1, \dots\} u(0) \\ &+ \{0, 1, 1, 1, \dots\} (u(1) - u(0)) \\ &+ \{0, 0, 1, 1, \dots\} (u(2) - u(1)) \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (\text{A.2.28})$$

dónde definimos $\Delta u(i)$ para designar los cambios en la entrada

$$\Delta u(i) = u(i) - u(i - 1) \quad (\text{A.2.29})$$

de un próximo escalón en el tiempo. La salida del sistema se obtiene sumando las respuestas al escalón pesadas por sus respectivas alturas del escalón $\Delta u(i)$

$$\begin{aligned} y(0) &= \{0, s_1, \dots, s_n, s_n, s_n, \dots\} u(0) \\ &+ \{0, 0, s_1, \dots, s_n, s_n, s_n, \dots\} \Delta u(1) \\ &+ \{0, 0, 0, s_1, \dots, s_n, s_n, s_n, \dots\} \Delta u(2) \\ &+ \dots \\ &= \{0, \\ & s_1 u(0), \\ & s_2 u(0) + s_1 \Delta u(1), \dots, \\ & \dots, s_n u(0) + s_{n-1} \Delta u(1) + s_{n-2} \Delta u(2) + \dots + s_1 \Delta u(n-1), \\ & \left. \begin{aligned} & s_n \underbrace{(u(0) + \Delta u(1))}_{u(1)} + s_{n-1} \Delta u(2) + s_{n-2} \Delta u(3) + \dots + s_1 \Delta u(n), \dots \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.2.30})$$

En un momento en particular la salida esta dada por

$$y(k) = \sum_{i=1}^{n-1} s_i \Delta u(k-i) + s_n u(k-n) \quad (\text{A.2.31})$$

Los coeficientes s_i expresan el efecto de un cambio en la entrada que sucedieron i intervalos en el pasado, para la salida presente $y(k)$. Para computar esta salida necesitamos guardar las últimas n entradas en la memoria.

Los coeficientes de respuesta al escalón son directamente calculables de los coeficientes de respuesta al impulso y viceversa

$$s_k = \sum_{i=1}^k h_i \quad (\text{A.2.32})$$

$$h_k = s_k - s_{k-1} \quad (\text{A.2.33})$$

A.2.5. Predicción multi etapa recursiva basada en el modelo de respuesta al escalón

Definimos el estado en el tiempo k como:

$$\tilde{Y}(k) = [\tilde{y}_0(k), \tilde{y}_1(k), \dots, \tilde{y}_{n-1}(k)]^T \quad (\text{A.2.34})$$

donde

$$\tilde{y}_i(k) \triangleq y(k+i) \quad \text{para} \quad \Delta u(k+j) = 0; j \geq 0 \quad (\text{A.2.35})$$

En este caso, definimos el estado $\tilde{y}_i(k)$ como la salida del sistema en el tiempo $k+i$, bajo la suposición de que los *cambios* en la entrada son cero en el tiempo k y en el futuro $\Delta u(k+j) = 0; j \geq 0$. Observe que debido a la suposición FIR la respuesta al escalón se restablece después de n pasos, por ejemplo, $\tilde{y}_{k+n-1}(k) = \tilde{y}_{k+n}(k) = \tilde{y}_\infty(k)$. Así, la opción de estado $\tilde{Y}(k)$, caracteriza completamente la evolución de la salida del sistema bajo la suposición que los cambios en las entradas presente y futuras son cero. Para determinar la salida futura agregamos simplemente al estado el efecto de los cambios de la entrada presentes y futuros. De (A.2.31) encontramos

$$y(k+1) = \sum_{i=1}^{n-1} s_{i+1} \Delta u(k-i) + s_n u(k-n) + s_1 \Delta u(k) \quad (\text{A.2.36})$$

$$= \tilde{y}_1(k) + s_1 \Delta u(k) \quad (\text{A.2.37})$$

Continuando para $k+2, k+3, \dots$ encontramos

$$\begin{aligned} y(k+2) &= \tilde{y}_2(k) + s_1 \Delta u(k+1) + s_2 \Delta u(k) \\ y(k+3) &= \tilde{y}_3(k) + s_1 \Delta u(k+2) + s_2 \Delta u(k+1) + s_3 \Delta u(k) \\ y(k+4) &= \dots \end{aligned} \quad (\text{A.2.38})$$

Podemos pasar estas ecuaciones en forma matricial

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} y(k+1) \\ y(k+2) \\ \vdots \\ \vdots \\ y(k+p) \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{y}_1(k) \\ \tilde{y}_2(k) \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{y}_p(k) \end{bmatrix}}_{\substack{\text{efecto de las pasadas entradas y BIAS actual} \\ \text{desde } \tilde{Y}(k)}} \\
 + \underbrace{\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ s_p \end{bmatrix} \Delta u(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ s_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ s_{p-1} \end{bmatrix} \Delta u(k+1) + \dots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ s_1 \end{bmatrix} \Delta u(k+p-1)}_{\substack{\text{efecto ocasionados por los cambios en la entrada futuras} \\ \text{(deben calcularse)}}} & \tag{A.2.39}
 \end{aligned}$$

y observe que el primer término es una parte del estado y refleja el efecto de las entradas pasadas. Los otros términos expresan el efecto de los cambios de las entradas futuras supuestas. Son simplemente la respuesta al escalón que ocurre en instantes de tiempo futuro.

Para obtener el estado $k+1$, según la definición es

$$\tilde{Y}(k+1) = [\tilde{y}_0(k+1), \tilde{y}_1(k+1), \dots, \tilde{y}_{n-1}(k+1)]^T \tag{A.2.40}$$

con

$$\tilde{y}_i(k+1) \triangleq y(k+1+i) \quad \text{para} \quad \Delta u(k+1+j) = 0; j \geq 0 \tag{A.2.41}$$

necesitamos agregar el efecto del cambio en la entrada $u(k)$ en el tiempo k al estado $\tilde{Y}(k)$.

$$\begin{aligned}
 \tilde{y}_0(k+1) &= \tilde{y}_1(k) + s_1 \Delta u(k) \\
 \tilde{y}_1(k+1) &= \tilde{y}_2(k) + s_2 \Delta u(k) \\
 &\dots \\
 \tilde{y}_2(k+1) &= \tilde{y}_n(k) + s_n \Delta u(k) \\
 \tilde{y}_n(k) &= \tilde{y}_{n-1}(k)
 \end{aligned} \tag{A.2.42}$$

vemos que $\tilde{y}_n(k) = \tilde{y}_{n-1}(k)$ debido a la suposición FIR. Por definición la matriz

$$M = \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{array} \right] \Bigg\}^n \quad (\text{A.2.43})$$

podemos expresar la actualización del estado en forma compacta como

$$\tilde{Y}(k+1) = M\tilde{Y}(k) + S\Delta u(k) \quad (\text{A.2.44})$$

Multiplicando con la matriz M denota la operación de retardo del vector $\tilde{Y}(k)$ y repitiendo el último elemento. La relación recursiva (A.2.44) es llamada como *modelo de respuesta al escalón* del sistema.

Como está claro de la derivación, los modelos FIR y de respuesta al escalón son muy similares. La definición del estado es ligeramente diferente. Se asume que en el modelo FIR las entradas futuras son cero, en el modelo de respuesta al escalón los cambios futuros en la entrada se mantienen en cero. También la representación de la entrada es diferente. Para el modelo FIR las entradas futuras se dan en términos de pulsos, para el modelo de respuesta al escalón las entradas futuras son escalones. El modelo de respuesta al escalón expresa las entradas futuras en términos cambios Δu , será muy conveniente para incorporar la acción integral en el controlador.

A.2.6. Generalización Multivariable

La ecuación modelo (A.2.44) generaliza prontamente el caso cuando el sistema tiene las n_y salidas $y^\ell, \ell = 1, \dots, n_y$ y n_u entradas $u^j, j = 1, \dots, n_u$. Definimos el *vector* de salida

$$y(k-1) = [y_1(k-1), \dots, y_{n_y}(k-1)]^T \quad (\text{A.2.45})$$

el vector de entrada $\Delta u(k-1) = [\Delta u_1(k-1), \dots, \Delta u_{n_u}(k-1)]^T$ y la matriz de coeficientes de respuesta al escalón

$$S_i = \begin{bmatrix} s_{1,1,i} & s_{1,2,i} & \dots & s_{1,n_u,i} \\ s_{2,1,i} \\ \vdots \\ s_{n_y,1,i} & s_{n_y,2,i} & \dots & s_{n_y,n_u,i} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2.46})$$

donde $s_{l,m,i}$ son los i^{th} coeficientes de respuesta al escalón que relacionan la entrada m_{th} a la salida l^{th} . La matriz de respuesta al escalón $(n_y \cdot n) \times n_u$ se obtiene agrupando las matrices de coeficientes de respuesta al escalón.

$$S = [S_1^T, S_2^T, \dots, S_n^T]^T \quad (\text{A.2.47})$$

El estado de la múltiple salida del sistema en el de tiempo k es definido como

$$\tilde{Y}(k) = [\tilde{y}_0^T(k), \tilde{y}_1^T(k), \dots, \tilde{y}_{n-1}^T(k)]^T \quad (\text{A.2.48})$$

con

$$\tilde{y}_i(k+1) \triangleq y(k+i) \quad \text{para} \quad \Delta u(k+j) = 0; j \geq 0 \quad (\text{A.2.49})$$

Con estas definiciones una ecuación actualizada resulta equivalente como el caso de una variable simple (A.2.44).

$$\tilde{Y}(k+1) = M\tilde{Y}(k) + S\Delta u(k) \quad (\text{A.2.50})$$

M está el definido como

$$M = \left. \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & I \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & I \end{bmatrix} \right\} n \quad (\text{A.2.51})$$

donde la matriz identidad I es de dimensión $n_y \times n_y$ de la. La relación recursiva (A.2.51) es conocida como el *modelo de respuesta al escalón* sistema multivariable.

A.2.7. Modelo función de transferencia

Este modelo está dado por la siguiente ecuación:

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t) \quad (\text{A.2.52})$$

$$\begin{aligned} A(z^{-1}) &= 1 + a^1 z^{-1} + a^2 z^{-2} + \dots + a_{na} z^{-na} \\ B(z^{-1}) &= b^1 z^{-1} + b^2 z^{-2} + \dots + b_{nb} z^{-nb} \end{aligned} \quad (\text{A.2.53})$$

Entonces, la predicción del modelo es:

$$\hat{y}(t+j|t) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u(t+j|t) \quad (\text{A.2.54})$$

Esta representación es también válida para procesos inestables.

A.2.8. Modelo ARMAX

$$A(z^{-1})y_t = B(z^{-1})u_{t-d} + \eta_t \quad (\text{A.2.55})$$

donde $\eta_t = C(z^{-1})w_t$ con R.B.D. ($w_t = 0$ y $E(w_t^2) = \sigma_w^2$)

Sin embargo, esta modelación no considera derivadas ni procesos no estacionarios.

A.2.9. Modelo de perturbaciones

Uno de los modelos más utilizados para representar las perturbaciones, está dado por:

$$\eta(t) = \frac{C(z^{-1})e(t)}{D(z^{-1})} \quad (\text{A.2.56})$$

donde $D(z^{-1})$ es un polinomio que incluye al integrador $\Delta = 1 - z^{-1}$, $e(t)$ es un ruido blanco y generalmente el polinomio C es igual a 1.

A continuación, se definen los siguientes modelos estocásticos dependiendo de los modelos de proceso y perturbaciones utilizados:

- Modelo ARX, Autoregresivo con entrada exógena

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t) + e(t) \quad (\text{A.2.57})$$

- Modelo ARMAX, Autoregresivo de Media Móvil con entrada exógena

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t) + C(z^{-1})e(t) \quad (\text{A.2.58})$$

- Modelo ARIX, Autoregresivo Integrado con entrada exógena

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t) + \frac{e(t)}{\Delta} \quad (\text{A.2.59})$$

- Modelo ARIMAX, Autoregresivo Integrado de Media Móvil con entrada exógena

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t) + \frac{C(z^{-1})e(t)}{\Delta} \quad (\text{A.2.60})$$

A.2.10. Predicciones multi paso modelo función de transferencia

Modelo ARIMAX ('Auto Regressive Integrated Moving Average with exogenous variable')

$$A(z^{-1})y_t = B(z^{-1})u_{t-d} + \eta_t \quad (\text{A.2.61})$$

donde

$$\eta_t = \frac{C(z^{-1})w_t}{\Delta} \quad (\text{A.2.62})$$

$$\Delta = 1 - z^{-1} \quad (\Delta x_t = x_t - x_{t-1})$$

Para calcular la predicción a j pasos de y , se considera un modelo ARIMAX, con $C = 1$ por simplicidad.

$$Ay_t = Bu_{t-d} + \eta_t = Bu_{t-d} + \frac{w_t}{\Delta}$$

$$y_t = \frac{B}{A}u_{t-d} + \frac{w_t}{A\Delta} \quad (\text{A.2.63})$$

$$y_{t+j} = \frac{B}{A}u_{t-d+j} + \frac{w_{t+j}}{A\Delta}$$

donde

$$\frac{1}{A\Delta} = \underbrace{E_j}_{\text{Cociente}} + \underbrace{\frac{F_j}{A\Delta}z^{-1}}_{\text{Resto}} \quad (\text{A.2.64})$$

(Ecuación diofántica)

La división $\frac{1}{A\Delta}$ se realiza hasta que E_j sea un polinomio de grado $j - 1$, de modo que $E_j w_{t+j}$ tenga los valores futuros de w_t , es decir, $w_{t+1}, w_{t+2}, \dots, w_{t+j}$

Además,

$$A\Delta = 1 - z^{-1} + a_1 z^{-1} - a_1 z^{-2} + \dots \quad (\text{A.2.65})$$

entonces $A\Delta$ es mónico y por ende E_j es mónico.

Por lo tanto,

$$y_{t+j} = \frac{B}{A} u_{t-d+j} + \underbrace{E_j w_{t+j}}_{(w_{t+1}, w_{t+2}, \dots)} + \underbrace{\frac{F_j}{A\Delta} w_t}_{(w_t, w_{t-1}, \dots)} \quad (\text{A.2.66})$$

Para la determinación de w_{t+1}, w_{t+2}, \dots , se utiliza el modelo ARIMAX, es decir

$$\begin{aligned} Ay_t &= Bu_{t-d} + \frac{w_t}{\Delta} \\ w_t &= A\Delta y_t - B\Delta u_{t-d} \end{aligned} \quad (\text{A.2.67})$$

Entonces, reemplazando w_t en la ecuación (A.2.66), se obtiene:

$$\begin{aligned} y_{t+j} &= \frac{B}{A} u_{t-d+j} + E_j w_{t+j} + \frac{F_j}{A\Delta} A\Delta y_t - \frac{F_j}{A\Delta} B\Delta u_{t-d} \\ y_{t+j} &= \frac{B}{A} u_{t-d+j} + F_j y_t - F_j \frac{B}{A} u_{t-d} + E_j w_{t+j} \quad (j \geq 1) \end{aligned} \quad (\text{A.2.68})$$

F_j es de grado $n - 1$ (n orden del sistema) considerando que E_j tiene grado $j - 1$ por hipótesis.

A continuación,

$$\begin{aligned} y_{t+j} &= \frac{B}{A} u_{t-d+j} + E_j w_{t+j} + F_j y_t - F_j \underbrace{\frac{B}{A} u_{t-d+j} z^{-j}}_{u_{t-d}} \\ y_{t+j} &= \frac{B}{A} u_{t-d+j} [1 - F_j z^{-j}] + E_j w_{t+j} + F_j y_t \end{aligned} \quad (\text{A.2.69})$$

donde según la ecuación diofántica

$$F_j z^{-j} = 1 - E_j A\Delta \quad (\text{A.2.70})$$

Entonces,

$$y_{t+j} = \frac{B}{A} u_{t-d+j} E_j \Delta A + E_j w_{t+j} + F_j y_t \quad (\text{A.2.71})$$

$$y_{t+j} = B E_j \Delta u_{t-d+j} + E_j w_{t+j} + F_j y_t$$

Se define $G_j \cong B E_j$

$$y_{t+j} = G_j \Delta u_{t-d+j} + E_j w_{t+j} + F_j y_t \quad (\text{A.2.72})$$

Por lo tanto, la predicción a j pasos de y está dada por:

$$E [y_{t+j} | t] \equiv \hat{y}_{t+j} = G_j \Delta u_{t-d+j} + F_j y_t \quad (\text{A.2.73})$$

pues $E_j w_{t+j}$ genera sólo valores futuros de ruido blanco ($w_{t+1}, w_{t+2}, w_{t+3}$)

Casos especiales

$$d = 1 \quad (\text{A.2.74})$$

$$\hat{y}_{t+j} = G_j \Delta u_{t-1+j} + F_j y_t$$

$$j = d \quad (\text{A.2.75})$$

$$\hat{y}_{t+d} = G_d \Delta u_t + F_d y_t$$

Los valores futuros de u_t (u_{t+1}, u_{t+2}, \dots) se calculan con:

$$G_j \Delta u_{t-d+j} = B E_j (1 - z^{-1}) u_{t-d+j} \quad (\text{A.2.76})$$

$$G_j \Delta u_{t-d+j} = b_0 u_{t-d+j} + \beta_1 u_{t-d+j-1} + \dots$$

Para $j \leq d$, la predicción depende de términos hasta t , es decir:

$$\{y_t, y_{t-1}, \dots\} \quad (F_j y_t) \quad (\text{A.2.77})$$

$$\{u_t, u_{t-1}, \dots\} \quad (G_j \Delta u_{t-d+j})$$

Para $j > d$, la predicción además depende de los valores de control por aplicarse (no conocidos), dados por:

$$\{u_{t+1}, u_{t+2}, \dots, u_{t-d+j}\} \quad (G_j \Delta u_{t-d+j}) \quad (\text{A.2.78})$$

Entonces, $G_j \Delta u_{t-d+j}$ contiene términos conocidos en t $\{u_{t-1}, u_{t-2}, \dots\}$ y términos desconocidos (o por determinarse) $\{u_t, u_{t+1}, u_{t+2}, \dots\}$

Además, como $G_j = BE_j$, entonces

$$G_j(z^{-1}) = g_{j0} + g_{j1}z^{-1} + g_{j2}z^{-2} + \dots \quad (\text{A.2.79})$$

Como G_j representa los j primeros términos de la respuesta escalón, entonces $g_{ji} = g_i$ para $i = 0, 1, 2, \dots < j$. Es decir,

$$\begin{aligned} g_{j0} = g_{10} = \dots = g_{k0} = \dots = g_0 \\ \vdots \\ g_{ji} = g_{1i} = \dots = g_{ki} = \dots = g_i \end{aligned} \quad (\text{A.2.80})$$

Por lo tanto, se tiene

$$\begin{aligned} G_1 &= g_0 + g_1 z^{-1} + \dots + g_{n_b} z^{-n_b} \\ G_2 &= g_0 + g_1 z^{-1} + \dots + g_{n_b+1} z^{-(n_b+1)} \\ G_3 &= g_0 + g_1 z^{-1} + \dots + g_{n_b+2} z^{-(n_b+2)} \\ G_j &= g_0 + g_1 z^{-1} + \dots + g_{n_b+j-1} z^{-(n_b+j-1)} \end{aligned} \quad (\text{A.2.81})$$

Por otra parte,

$$\hat{y}_{t+j} = G_j \Delta u_{t-d+j} + F_j y_t \quad (\text{A.2.82})$$

si $d = 1$, $N_1 = 1$ y $N_2 = N$, se tiene

$$\begin{aligned} \hat{y}_{t+1} &= G_1 \Delta u_t + F_1 y_t \\ \hat{y}_{t+2} &= G_2 \Delta u_{t+1} + F_2 y_t \\ &\vdots \\ \hat{y}_{t+N} &= G_N \Delta u_{t-1+N} + F_N y_t \end{aligned} \quad (\text{A.2.83})$$

A continuación, se agrupan los términos conocidos hasta t en el vector

$$f \{ \Delta u_{t-1}, \Delta u_{t-2}, \dots, y_t, y_{t-1}, \dots \}$$

, es decir

$$\begin{aligned} f_{t+1} &= [G_1(z^{-1}) - g_0] \Delta u_t + F_1 y_t \\ f_{t+2} &= [G_2(z^{-1}) - g_1 z^{-1} - g_0] \Delta u_{t+1} + F_2 y_t \\ &\vdots \end{aligned} \quad (\text{A.2.84})$$

Entonces, la expresión (A.2.73) se puede expresar de manera vectorial como

$$\hat{y} = G\tilde{u} + f \quad (\text{A.2.85})$$

donde

$\hat{y} \equiv [\hat{y}_{t+1}, \hat{y}_{t+2}, \dots, \hat{y}_{t+N}]$ son las predicciones desde el horizonte de predicción $N_1 = 1$ hasta $N_2 = N$.

$$G = \begin{bmatrix} g_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ g_1 & g_0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ g_{N-1} & g_{N-2} & \cdots & & g_0 \end{bmatrix}_{N \times N} \quad (\text{A.2.86})$$

$\tilde{u} \equiv [\Delta u_t, \Delta u_{t+1}, \dots, \Delta u_{t+2}, \dots, \Delta u_{t+N-1}]^T$ son las acciones de control futuras.

Por lo tanto, $G\tilde{u}$ contiene términos desconocidos por determinar

$$\{\Delta u_t, \Delta u_{t+1}, \dots, \Delta u_{t+N-1}\}$$

y f agrupa los términos conocidos $\{\Delta u_{t-1}, \Delta u_{t-2}, \dots, y_t, y_{t-1}, \dots\}$

Predicción con modelo ARIMAX con $C \neq 1$

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t-1) + C(z^{-1})\frac{e(t)}{\Delta} \quad (\text{A.2.87})$$

donde $e(t)$ es ruido blanco.

En este caso, la ecuación diofántica está dada por:

$$C(z^{-1}) = E_j(z^{-1})A(z^{-1})\Delta + z^{-j}F_j(z^{-1}) \quad (\text{A.2.88})$$

donde E_j es de grado $j - 1$ y F_j es de grado na .

$$\frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})} = E_j(z^{-1}) + \frac{z^{-j}F_j(z^{-1})}{A(z^{-1})\Delta} \quad (\text{A.2.89})$$

A partir del modelo ARIMAX, se tiene:

$$\begin{aligned} y(t+j) &= \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} z^{-d} u(t+j-1) + \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})\Delta} e(t+j) \\ y(t+j) &= \frac{B}{A} u(t+j-1-d) + E_j e(t+j) + \frac{F_j}{A\Delta} e(t) \end{aligned} \quad (\text{A.2.90})$$

El ruido $e(t)$ en instantes previos está dado por:

$$e(t) = \frac{A\Delta y(t) - B\Delta u(t-1-d)}{C} \quad (\text{A.2.91})$$

Entonces, la salida a j pasos es:

$$\begin{aligned} y(t+j) &= \frac{B}{A} u(t+j-1-d) + E_j e(t+j) + \frac{F_j}{A\Delta} \left(\frac{A\Delta y(t) - B\Delta u(t-1-d)}{C} \right) \\ y(t+j) &= \frac{B}{A} u(t+j-1-d) + E_j e(t+j) + \frac{F_j}{C} y(t) - \frac{B}{AC} F_j u(t-1-d) \\ y(t+j) &= \frac{B}{A} \left[1 - \frac{F_j}{C} z^{-j} \right] u(t+j-1-d) + E_j e(t+j) + \frac{F_j}{C} y(t) \\ y(t+j) &= \frac{B}{A} \frac{E_j A \Delta}{C} u(t+j-1-d) + E_j e(t+j) + \frac{F_j}{C} y(t) \\ y(t+j) &= \frac{B E_j}{C} \Delta u(t+j-1-d) + E_j e(t+j) + \frac{F_j}{C} y(t) \end{aligned} \quad (\text{A.2.92})$$

Por lo tanto, la predicción de la salida es:

$$\begin{aligned} \hat{y}(t+j) &= E \{ y(t+j) \} \\ \hat{y}(t+j) &= \frac{B E_j}{C} \Delta u(t+j-1-d) + \frac{F_j}{C} y(t) \end{aligned} \quad (\text{A.2.93})$$

Esta ecuación representa una expresión recursiva para la predicción.

Para separar las acciones de control futuras de las pasadas, se considera la siguiente ecuación diofántica:

$$E_j(z^{-1})B(z^{-1}) = C(z^{-1})H_j(z^{-1}) + z^{-j}K_j(z^{-1}) \quad (\text{A.2.94})$$

con H_j de grado $j - 1$.

Por lo tanto, la predicción está dada por:

$$\begin{aligned}\hat{y}(t+j) &= \frac{CH_j + z^{-j}K_j}{C}\Delta u(t+j-1-d) + \frac{F_j}{C}y(t) \\ \hat{y}(t+j) &= H_j\Delta u(t+j-1-d) + \frac{K_j}{C}\Delta u(t-1-d) + \frac{F_j}{C}y(t)\end{aligned}\tag{A.2.95}$$

donde $H_j\Delta u(t+j-1-d)$ incluye las acciones de control futuras y $\frac{K_j}{C}\Delta u(t-1-d)$ las acciones de control pasadas.

A.2.11. Modelo en el espacio de estado

Las ecuaciones en variables de estados están dadas por:

$$\begin{aligned}x(t) &= Ax(t-1) + Bu(t-1) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{A.2.96}$$

donde $x(t)$ es un vector de estado, y A , B y C son las matrices del sistema. Para este modelo la predicción es:

$$\hat{y}(t+j|t) = C\hat{x}(t+j|t) = C \left[A^j x(t) + \sum_{i=1}^j A^{i-1} B u(t+j-1|t) \right]\tag{A.2.97}$$

Esta representación sirve para procesos multivariables. Sin embargo, se hace necesario disponer de un observador cuando los estados no son medibles.

A.2.12. Predicción multi paso con modelo en espacio de estado

Se considera el siguiente modelo en variables de estado:

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Ax(t) + B\Delta u(t) + Gw(t) \\ y(t) &= Dx(t) + w(t)\end{aligned}\tag{A.2.98}$$

donde $w(t)$ es ruido blanco.

El estado en j instantes más, está dado por:

$$\begin{aligned}
x(t+2) &= Ax(t+1) + B\Delta u(t+1) + Gw(t+1) \\
x(t+2) &= A^2x(t) + AB\Delta u(t) + AGw(t) \\
&\quad + B\Delta u(t+1) + Gw(t+1) \\
x(t+3) &= A^3x(t) + A^2B\Delta u(t) + A^2Gw(t) \\
&\quad + AB\Delta u(t+1) + AGw(t+1) + B\Delta u(t+2) + Gw(t+2) \\
&\quad \vdots \\
x(t+j) &= A^jx(t) + \sum_{i=1}^j A^{j-i}B\Delta u(t+i-1) \\
&\quad + \sum_{i=2}^j A^{j-i}Gw(t+i-1) + A^{j-1}Gw(t)
\end{aligned} \tag{A.2.99}$$

donde $\sum_{i=2}^j A^{j-i}Gw(t+i-1)$ agrupa las perturbaciones futuras y $A^{j-1}Gw(t)$ agrupa las perturbaciones pasadas medibles.

El ruido en instantes desde t hacia atrás es conocido y está dado por:

$$w(t) = y(t) - Dx(t) \tag{A.2.100}$$

Por lo tanto, el estado en j pasos es:

$$\begin{aligned}
x(t+j) &= A^jx(t) + \sum_{i=1}^j A^{j-i}B\Delta u(t+i-1) \\
&\quad + \sum_{i=2}^j A^{j-i}Gw(t+i-1) + A^{j-1}G(y(t) - Dx(t))
\end{aligned} \tag{A.2.101}$$

Entonces, la predicción de la salida es:

$$\hat{y}(t+j|t) = D\hat{x}(t+j|t) + E(w(t+j|t)) \tag{A.2.102}$$

donde $E(w(t+j|t))$ pues $w(t)$ es ruido blanco.

$$\begin{aligned}
\hat{y}(t+j|t) &= DE \left(A^jx(t) + \sum_{i=1}^j A^{j-i}B\Delta u(t+i-1) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=2}^j A^{j-i}Gw(t+i-1) + A^{j-1}G(y(t) - Dx(t)) \right)
\end{aligned} \tag{A.2.103}$$

Además, se tiene:

$$E(x(t) | t) = \hat{x}(t | t) \quad (\text{A.2.104})$$

Si el estado no es medible se requerirá de un observador de estado. También,

$$E(w(t + i - 1)) = 0 \quad i \geq 2 \quad (\text{A.2.105})$$

Finalmente, la predicción de la salida es:

$$\hat{y}(t + j | t) = DA^j \hat{x}(t | t) + \sum_{i=1}^j A^{j-i} BD \Delta u(t + i - 1) + DA^{j-1} G (y(t) - D \hat{x}(t | t)) \quad (\text{A.2.106})$$

A.3. Función objetivo

Cada algoritmo de control predictivo utiliza diferentes funciones objetivo para la obtención de la ley de control.

Esta encuentra la acción de control. La función objetivo puede ser cuadrática y la minimización de la función se puede hallar cuando la planta sea una función explícita lineal de las entradas y salidas pasadas y de la trayectoria de referencia futura. Cuando se incluyen restricciones con desigualdades, la solución puede ser obtenida por algoritmos numéricos.

En primer lugar se considera la función objetivo dada por:

$$J = [w(t + 1) - \hat{y}(t + j | t)]^2 \quad (\text{A.3.1})$$

donde $w(t + 1)$ es la referencia o salida deseada en el instante $t + 1$ y $\hat{y}(t + 1 | t)$ es la salida predicha en el instante $t + 1$, esta diferencia es el error.

Para reducir variaciones en la variable manipulada o sobreactuaciones se puede utilizar la siguiente función objetivo, que además incluye acción integral.

$$J = [w(t + 1) - \hat{y}(t + j | t)]^2 + \lambda [\Delta u(t)]^2 \quad (\text{A.3.2})$$

En este caso $\Delta u(t)$ es el esfuerzo de control y el parámetro λ es un factor de ponderación para penalizar dicho esfuerzo. Este término también se conoce como el factor de peso de velocidad o coeficiente de supresión de movimiento.

Para incluir algunos sistemas de fase no mínima y sistemas inestables se utiliza la siguiente función objetivo que incluye horizontes de predicción y control:

$$J = \sum_{j=N_1}^{N_p} \delta(j) [w(t+1) - \hat{y}(t+j|t)]^2 + \sum_{i=1}^{N_c} \lambda(i) [\Delta u(t+i-1)]^2 \quad (\text{A.3.3})$$

$\hat{y}(t+j|t)$ es la salida predicha en el instante $t+j$.

Parámetros N_1 y N_p son los mínimos y máximos horizontes de predicción y N_c es el horizonte de control. Ellos marcan los instantes límites en que es deseable que la salida siga la referencia. Así, para valores grandes de N_1 indicamos que no son importantes los errores en los primeros instantes, originando respuestas suavizadas; observe que un proceso con tiempo muerto d no hay razones para que $N_1 < d$, pues la salida solo evoluciona después de $t+d$. También si el proceso es de fase no mínima, estos parámetros podrían permitir en los primeros estantes que la respuesta inversa sea eliminada de la función objetivo.

En algunas funciones objetivo se emplean coeficientes δ y λ que ponderan el comportamiento del error y del esfuerzo de control futuros. Es posible utilizar una ponderación exponencial a lo largo del horizonte de predicción N_2 de la forma $\delta(j) = \alpha_{N_2-1}$. Si el valor de α esta entre 0 y 1, los errores más alejados desde un instante dado t , son más penalizado que los cercanos a él, generando respuestas suaves de control. Si α es mayor que 1 los primeros errores son más penalizados provocando una acción de control más agresiva.

Trayectoria de referencia $w(t+j)$ representa la trayectoria de referencia deseada. Una de las ventajas principales del control predictivo es que la evolución futura de la referencia es conocida a priori. El sistema reaccionara antes que el cambio haya sido efectivamente aplicado, evitando de este modo retardos en la respuesta del proceso. La evolución futura de la referencia es conocida previamente en muchas aplicaciones. Existen varias formas de proponer el comportamiento de esta trayectoria:

1.

$$w(t+j) = r(t+j) = cte \quad (\text{A.3.4})$$

2.

$$\begin{aligned}
 w(t) &= y(t) \\
 w(t+j) &= \beta w(t+j-1) + (1-\beta)r(t+j) \quad j = 1, \dots, N; 0 < \beta < 1
 \end{aligned}
 \tag{A.3.5}$$

β es un parámetro ajustable. Para valores pequeños de β la dinámica de la trayectoria es más rápida y para valores grandes es suave.

A.4. Ley de control

Para obtener los valores $u(t+j|t)$ es necesario minimizar la función de objetivo planteada anteriormente. Por lo tanto, se calculan los valores de las salidas predichas $\hat{y}(t+j|t)$ en función de los valores pasados de las entradas y salidas, y de las señales de control futuras, haciendo uso de un modelo de predicción y luego se sustituyen estos valores en la función objetivo. La minimización de esta expresión conduce a los valores buscados.

Se ha encontrado que una estructuración de la ley de control produce una mejora en la robustez del sistema. Esta estructura de la ley de control se basa en el uso del concepto de horizonte de control (N_c), que consiste en considerar que tras un cierto intervalo $N_c < N_p$ no hay variación en las señales de control propuestas, es decir:

$$\Delta u(t+i-1) = 0 \tag{A.4.1}$$

para $j > N_c$.

En otros algoritmos se emplean funciones base que son representaciones de la señal de control, compuestas por una combinación lineal de funciones del tipo

$$u(t+k) = \sum_{i=1}^n \mu_i(t) B_i(k) \tag{A.4.2}$$

donde B_i se escoge de acuerdo a la naturaleza del proceso y de la referencia, como polinomios del tipo:

$$B_0 = 1 \quad B_1 = k \quad B_2 = k^2 \tag{A.4.3}$$

A.5. Restricciones

Las restricciones están presentes en todos los sistemas de control [15] y pueden tener efectos perjudiciales en el desempeño, a menos que se consideren en el proceso de diseño del controlador. Más a menudo, las restricciones podemos identificarlas en la magnitud del actuador, la saturación en la velocidad, la salida y las restricciones de las variables de estado.

En algunos casos las restricciones se manejan de una manera estática, sobrediseñando los componentes del sistema de control tal que, durante el funcionamiento normal la saturación u otras limitaciones tengan poca probabilidad de activarse. Sin embargo, desde un punto de vista práctico es ineficiente y aumentará innecesariamente el costo del sistema global y no es un método recomendable. Por ejemplo, escogiendo un actuador más poderoso y grande que el necesario se evita la saturación. Sin embargo, si en algún momento la velocidad de producción o la carga de perturbaciones se incrementan, de nuevo las restricciones serán motivo de preocupación y el sobrediseño ha fallado.

La saturación del actuador es la más común y significativa no linealidad de un sistema de control. En la literatura se dan varios ejemplos donde por descuido, la saturación ha llevado a dificultades cruciales y ha puesto en peligro la estabilidad global del sistema.

La saturación del actuador también se ha culpado como una de varias desgracias infortunadas que llevaron en 1986 al desastre de la planta de potencia nuclear de Chernobyl donde la unidad 4 se fundió con consecuencias terribles (Stein, 1989; Kothare, 1997). Se ha informado que la limitación de la velocidad conlleva a una situación peligrosa (Stein, 1989). Cuando el proceso nuclear se aceleró durante una demostración de prueba, el sistema regulador automático empezó empujando las varillas de control hacia el centro para reducir la velocidad de generación. Pero la velocidad del movimiento de las varillas de control estaba limitada y el sistema era incapaz de alcanzar la reacción descontrolada. El resto es la historia terrible.

A.5.1. Restricciones en los sistemas de control

Tradicionalmente, al hablar de sistemas de control restringidos, uno se refiere al actuador, al estado o a las restricciones de la salida. El entendimiento conceptual de restricciones se extiende a incluir limitaciones y restricciones en los sensores, el modelo de conocimiento, la movilidad, etc. La Figura A.2 muestra un sistema de control bastante general e indica

donde pueden originarse algunos conflictos.

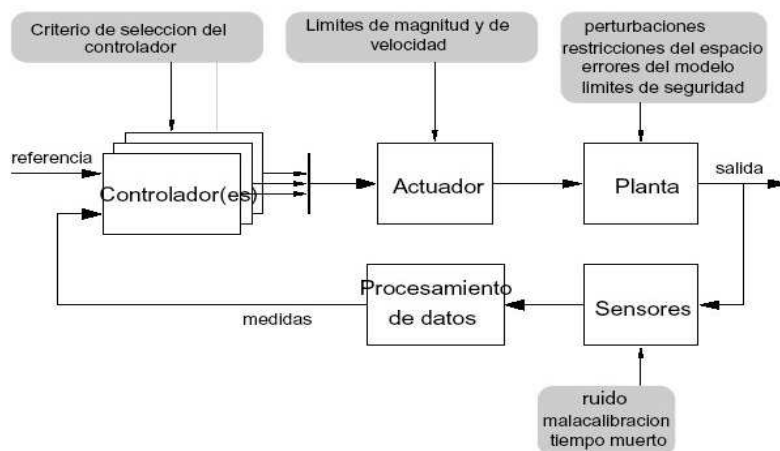


Figura A.2: Sistema general de control con varias restricciones, limitaciones y perturbaciones

Actuadores

Los sistemas de control se confían en los actuadores para manipular el estado o la salida del proceso controlado tal que se reúnan los requisitos de desempeño. En todos los sistemas físicos los actuadores están sujetos a saturación ya que solo pueden entregar una cierta cantidad de fuerza (o su equivalente). Más frecuentemente confrontando con este *nivel o magnitud* de restricción, dónde el actuador puede aplicar estrictamente un valor entre un límite superior o inferior. Menos frecuentemente consideradas son las restricciones en la *velocidad* dónde está limitado el cambio en la salida del actuador.

La Figura A.3 muestra la más importante y típica característica de saturación para un nivel de entrada o magnitud de saturación del actuador.

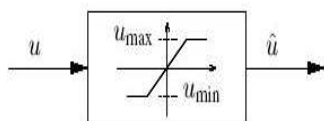


Figura A.3: La característica de saturación típica

Matemáticamente, la función de saturación $sat(u)$ para $u \in \mathbb{R}$ es definida como

$$sat(u) = \begin{cases} u_{\text{máx}} & u \geq u_{\text{máx}} \\ u & u_{\text{mín}} \leq u \leq u_{\text{máx}} \\ u_{\text{mín}} & u_{\text{mín}} \leq u \end{cases} \quad (\text{A.5.1})$$

y para $u \in \mathbb{R}^n$ como

$$sat(u) = \begin{pmatrix} sat(u_1) \\ sat(u_2) \\ \vdots \\ sat(u_n) \end{pmatrix} \quad (\text{A.5.2})$$

Los valores $u_{\text{mín}}$ y $u_{\text{máx}}$ se escogen o corresponden a los límites reales del actuador midiendo la salida del actuador o simplemente por estimación. La entrada de la velocidad de saturación puede ser modelada de una manera similar, aplicando el operador de diferenciación $\Delta = 1 - q^{-1}$ a la función de saturación:

$$sat(\Delta u) = \begin{cases} \Delta u_{\text{máx}} & \Delta u \geq \Delta u_{\text{máx}} \\ \Delta u & \Delta u_{\text{mín}} \leq \Delta u \leq \Delta u_{\text{máx}} \\ \Delta u_{\text{mín}} & \Delta u_{\text{mín}} \leq \Delta u \end{cases} \quad (\text{A.5.3})$$

dónde el $\Delta u_{\text{máx}}$ y $\Delta u_{\text{mín}}$ son los límites superiores e inferiores de las restricciones de velocidad respectivamente.

Muy pocos resultados teóricos *generales* existen para la estabilidad de sistemas restringidos del actuador, la siguiente es una excepción muy conocida:

Para un sistema lineal sujeto a saturaciones del actuador, una realimentación estabilizante globalmente asintótica sólo existe si y sólo si el propio sistema en ciclo abierto es estable [27]

Las restricciones pueden ser clasificadas como *duras* o *suaves*. Las restricciones duras son caracterizadas por la no violación de los límites, si son permisibles o factibles durante la operación pueden considerarse como restricciones suaves por violar los límites especificados temporalmente.

Sensores

Los cálculos de la salida del controlador están basados en la información que proporcionan los sensores sobre el estado del proceso. Ruidoso, lento, inestable (pero a menudo barato) los sensores limitan el desempeño y robustez de la tarea de control. Meticulosamente filtrado y posiblemente integrado puede mejorar la información, pero a veces el desempeño de un control está restringido por el sistema de medición.

Mobilidad/Orientabilidad

La construcción mecánica real de un sistema está sujeta a causar restricciones. En la robótica las juntas de un manipulador están propensas a flexibilidad limitada. Para un robot móvil, las configuraciones de la rueda pueden restringir los grados de libertad controladas a dos: típicamente el robot puede encender la marcha o puede avanzar, pero no puede moverse a los lados directamente.

Estado y espacio de trabajo, seguridad

Algunas aplicaciones deben tomar en cuenta las restricciones en el estado del sistema y en el ambiente de trabajo, estas son el estado y las restricciones de salida. En robótica, manipuladores y robots móviles, viajan de un punto a otro y frecuentemente encuentran obstáculos que imponen restricciones al movimiento.

Algunas restricciones son impuestas por el diseñador o usuario del sistema. Por razones de seguridad puede ser ventajoso limitar los estados como temperaturas, presiones, velocidades, velocidad de giro y voltajes. Además para evitar un innecesario desgaste mecánico, pueden imponerse restricciones en movimientos que causan movimientos súbitos y tirones.

Modelo de conocimiento y validación

Muchas estrategias de control son basadas en modelo, razón por la cual el éxito está limitado por la exactitud de modelo. Las fuentes de error son validación inadecuada, parámetros físicos inaccesibles, dinámica no modelada o linealización de dinámicas no lineales.

El diseño basado en modelo implica que el modelo dinámico matemático del proceso se usa en el diseño del controlador. Un ejemplo es el control predictivo, donde el modelo del

proceso predice la conducta del sistema y le permite al controlador que seleccione una señal basada en lo que ocurrirá en el futuro.

A.5.2. Restricciones en las plantas de procesos

Por ser la industria química la que emplea en la actualidad la mayor cantidad de controladores MPC, es necesario indicar las diferentes clases de restricciones que se pueden formular. Es así, que en la mayor parte de las unidades de proceso [37], la región de operación aceptable esta delimitada por varias restricciones o límites comprendidos dentro de algunas de las siguientes categorías o grupos:

- Límites de actuadores (Válvula totalmente abierta o cerrada)
- Límites de equipo (Máxima presión de trabajo o temperatura)
- Restricciones de operación (Bombeo de un compresor, inundación de una columna de destilación)
- Restricciones en la calidad del producto (Límite de impureza)

El punto más fácil de operar la unidad está en el centro de esta región de operación aceptable, lejos de las restricciones. Esto permite el máximo tiempo de respuesta ante una perturbación que pueda conducir la unidad a un punto de operación inaceptable. Sin embargo, desde un punto de vista económico no se esta operando en el punto de operación óptimo, tal como lo muestra la Figura A.4

La operación del proceso con multiples restricciones es difícil por muchas razones, entre las que se pueden citar las siguientes:

- Si alguna de las variables manipuladas está en su límite, no estará disponible para control.
- Si la unidad está operando en los límites de la región aceptable, si se produce una perturbación, como cambio en la calidad de la alimentación, una tormenta que modifique el poder de refrigeración de los intercambiadores, etc., debe realizarse una actuación rápida que compense inmediatamente esa perturbación.

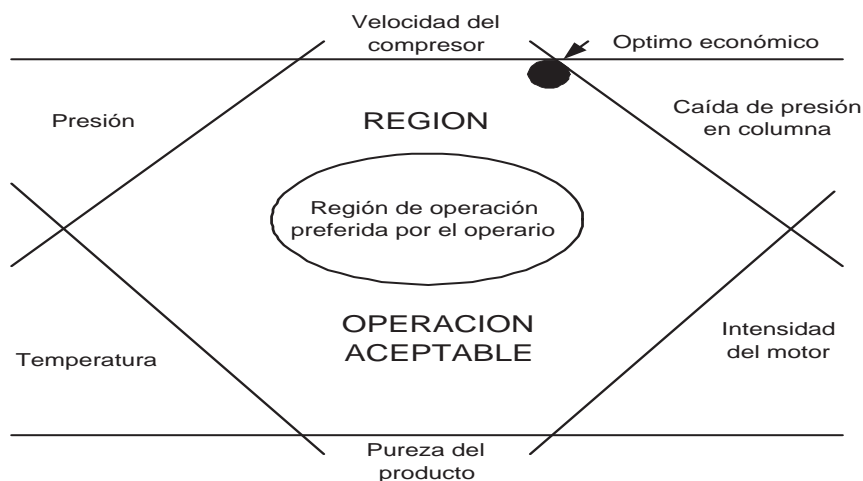


Figura A.4: Control basado en modelo y función objetivo para un sistema variante en el tiempo

- Muchas unidades de proceso son altamente interactivas. Un cambio en una variable manipulada afectará a varias variables controladas del conjunto.
- El punto de operación óptimo puede cambiar varias veces a lo largo del día si las condiciones ambientales, composición de la alimentación o calidad de los servicios auxiliares cambia.

Los controladores PID tradicionales no están adecuados para controlar un proceso con varias restricciones, porque el operador no puede atender razonablemente a todas las variables que tiene que supervisar y reajustarlas cada minuto. El resultado es que el proceso tendrá su punto de operación a una cierta distancia de las restricciones, con fin de darle tiempo al operador para reconocer y responder a las perturbaciones de entrada al proceso.

Cuando el controlador planifica cómo va a ser compensada una variable de perturbación, calcula los movimientos actuales y futuros en las variables manipuladas. Cuando calcula este plan de movimientos tiene mucho cuidado para no violar los límites superior o inferior permitidos.

A.6. Investigación en sistemas de control restringidos

El término *sistema de control restringido* usualmente se refiere a controlar los sistemas con entrada, salida o restricciones de estado. La investigación dentro de este campo principalmente está enfocada en parte a plantas *lineales*. Dos técnicas muy conocidas han recibido mucha atención:

1. **Anti-Windup y Bumpless Transfer (AWBT).**
2. **Control Predictivo Basado en modelo (MPC).**

Una categoría adicional es la estabilización no lineal de sistemas lineales restringidos que incluyen una variedad de aproximaciones como rescalamiento (*rescaling*) y planificación de ganancia (*gain scheduling*) con varias soluciones específicas a problemas específicos.

El control AWBT es una opción popular debida al acercamiento sencillo heurístico de la saturación del actuador. Es de cálculo barato y puede agregarse a cualquier control lineal sin restricciones existente. A la técnica le falta sin embargo, optimalidad, prueba de estabilidad y puede solamente tratar con la saturación de la magnitud de entrada.

Una alternativa al AWBT es el control predictivo que es el único acercamiento sistemático que se ocupa de las restricciones. MPC puede ocuparse de la magnitud y velocidad de las restricciones en la entrada, salida, o en las variables de estado. La desventaja principal del MPC es la optimización en línea envuelta, que debe completarse entre dos instantes de muestreo [15]. La aplicación del MPC óptimo se restringe a procesos muestreados relativamente lentos. Por esta razón MPC es una opción popular en la industria de procesos químicos, aunque los algoritmos subóptimos han encontrado aplicabilidad en sistemas más rápidos como los electromecánicos.

Los algoritmos de control predictivo más comunes indicando sus principales características son [32], [3]:

Control de Matriz Dinámica. (DMC) [41] Este método usa la respuesta al escalón para modelar el proceso, considerando sólo los N primeros términos, asumiendo por tanto que el proceso es estable. En cuanto a las perturbaciones, se considera que su valor permanece constante e igual al existente en el instante actual durante todo el

horizonte. La función objetivo puede considerar sólo errores futuros o incluir también el esfuerzo de control, en cuyo caso toma la forma genérica.

Una de las características de este método que lo ha hecho muy popular en la industria es la inclusión de restricciones, que se traduce en inecuaciones de la forma genérica.

En este caso la optimización debe ser numérica y se lleva a cabo en cada periodo de muestreo, enviándose la señal de control y recalculando todo en el nuevo periodo de muestreo, como en todos los métodos MPC. Los principales inconvenientes de este método son el tamaño del modelo empleado y la imposibilidad de tratar procesos inestables.

Control de Modelo Algorítmico. (MAC) Este método se conoce también como Modelo de Control Predictivo Heurístico. Es muy similar al DMC con la diferencia principal de usar un modelo FIR de respuesta. Introduce el concepto de trayectoria de referencia como un sistema de primer orden que evoluciona desde la salida actual al punto de ajuste según una determinada constante de tiempo. La varianza del error entre esta trayectoria y la salida es lo que marca la minimización de la función objetivo. Las perturbaciones se pueden tratar como en el método anterior. El método también considera restricciones en los actuadores, en las variables internas o en salidas secundarias.

Control Predictivo Funcional. (PFC) Este controlador fue desarrollado por Richalet [34] para procesos rápidos. Emplea un modelo en el espacio de estados, por lo que permite el manejo de procesos inestables, y también la extensión al caso no lineal. Este esquema de control tiene dos características que lo distinguen del resto de controladores de la familia: el uso de *puntos de coincidencia* y de *funciones base*.

El concepto de puntos de coincidencia se emplea para simplificar los cálculos considerando sólo un subconjunto de puntos en el horizonte de predicción. La salida deseada y la predicha deben coincidir en dichos puntos, no en todo el horizonte de predicción.

La otra idea innovadora de este método es la parametrización de la señal de control como una combinación lineal de ciertas *funciones base*, que son elegidas según la naturaleza del proceso y la referencia, estas funciones son de tipo polinómico: escalones, rampas o parábolas, ya que la mayoría de referencias se pueden especificar como

combinación de estas funciones. Con esta estrategia, un perfil de entrada complejo se puede especificar usando un pequeño número de parámetros desconocidos que son las incógnitas del problema de minimización.

El algoritmo PFC también puede manejar restricciones de máximo y mínimo en la aceleración, que son prácticas en aplicaciones de servocontrol.

Extended Prediction Self Adaptive Control. (EPSAC) [35] El algoritmo EPSAC usa un modelo de función de transferencia tipo CARIMA (*Controlled Auto-Regressive Integrated Moving Average*). (ARIMAX). Este modelo puede ampliarse para tratar perturbaciones medibles añadiendo un término para incluir efecto *feedforward*. La estructura de la ley de control es muy simple, ya que se considera que la señal de control permanecerá constante a partir del instante t (es decir, horizonte de control igual a 1).

Extended Horizon Adaptive Control. (EHAC) Esta formulación también emplea un modelo de función de transferencia y pretende minimizar la diferencia entre la salida calculada y la referencia en el instante $t + N$. La solución a este problema no es única a menos que N sea mayor o igual al tiempo muerto; una posible estrategia es considerar horizonte de control igual a 1 o minimizar el esfuerzo de control.

La ley de control depende solo de los parámetros del proceso y puede hacerse fácilmente adaptativa si se emplea un identificador en línea. El único coeficiente de ajuste es el horizonte de predicción N , lo cual simplifica el uso pero proporciona poca libertad para el diseño. No puede usarse trayectoria de referencia porque el error se considera sólo en un instante $(t + N)$, ni tampoco el esfuerzo de control.

Control Predictivo Generalizado (GPC) Este método propuesto por Clarke [33] emplea un modelo CARIMA para la predicción de la salida y la perturbación viene dada por un ruido blanco coloreado. Como en la práctica es difícil encontrar el verdadero valor del ruido, se puede emplear como parámetro de diseño para rechazo de perturbaciones o mejora de la robustez. La predicción óptima se lleva a cabo resolviendo una ecuación diofántica, lo cual puede hacerse eficazmente de forma recursiva.

Este algoritmo, al igual que otros que usan el modelo de función de transferencia, se

puede implementar fácilmente en forma adaptativa usando un algoritmo de identificación en línea como los mínimos cuadrados recursivos.

GPC usa una función objetivo cuadrática teniendo en cuenta el error y el esfuerzo de control, además de factores de ponderación para ambos términos que pueden ser contenidos o variables con el tiempo.

A.6.1. Aplicaciones Industriales

En la mayoría de los paquetes del control predictivo se han adoptado una serie de técnicas para resolver el problema de control [32], [3], [40].

Dividen el algoritmo de control en una optimización local estática y una optimización dinámica que se lleva a cabo minimizando la función objetivo con las restricciones correspondientes.

La mayoría de los productos sólo permiten matrices de peso constantes en todo el horizonte y sólo el NOVA-NLC trabaja con norma 1. El *Process Perfecter* minimiza sólo la salida pero con una matriz de peso que se incrementa gradualmente con el horizonte, dando por tanto más importancia a los errores más lejanos y en consecuencia dando lugar a una acción de control más suave.

En cuanto a las restricciones, normalmente las correspondientes a la entrada se tratan como restricciones duras, es decir, que nunca deben ser violadas. El PFC también incluye restricciones de aceleración, muy útiles para aplicaciones de servomecanismos. Este método no trata estas restricciones de forma óptima, sino que resuelve el problema de optimización sin restricciones y luego satura a los límites, produciendo por tanto una solución no óptima.

Respecto a restricciones en la salida, la mayoría de los productos comerciales las trata como restricciones blandas, debido a que una perturbación puede producir fácilmente una pérdida de factibilidad. Una opción ofrecida por el *Process Perfecter* es considerar una restricción dura en forma de embudo, de manera que se da más libertad a la salida al comienzo del horizonte que al final.

Significado de las siglas [32]: EE: espacio de estados no lineal. PP: primeros principios. E/S: entrada/salida. PNE: polinomio no lineal estático. K: filtro de Kalman. RN: red neuronal. Q: genérica. N1: norma 1, 1S saturación. BS: blandas (mínimo y máximo) en la salida. DS: duras en las salidas. DE: duras en las entradas. FB: funciones base. UM:

Empresa	Adersa	Aspen Tech	Continental	DOT Products	Pavillon Tech
Producto	PFC	Aspen Target	MVC	NOVA NLC	Process Perfecter
Modelo	EE, PP	EE	E/S, PNE	EE, PP, K	RN, E/S
F.Objetivo	Q	Q	Q	Q, N1	Q
Restricciones	S, BS	DS, DE, BS	DE, BS	DE, BS	DE, DS
Estructura señal control	FB, UM	MM	UM	MM	MM
Método Solución	NLS	QP	GRG	MINLP	GD

Cuadro A.1: Comparación productos comerciales MPC

único movimiento. MM múltiples movimientos. NLS: mínimos cuadrados no lineales. QP: programación cuadrática. GRG: Gradiente Reducido Generalizado. MINLP: *Mixed Integer Nonlinear Programming*. GD: Gradiente descendiente.

Parámetros: normalmente se elige un horizonte de predicción finito muy grande, con la idea de capturar la dinámica hasta el permanente de las salidas para todas las entradas. Esto se puede considerar una aproximación al método de horizonte infinito propuesto para garantizar la estabilidad del bucle cerrado y puede explicar por que ninguno de los productos comerciales incluye restricción terminal.

Una idea introducida en el PFC y adoptada por *Aspen Target* es el uso de puntos de coincidencia, en los cuales deben coincidir la salida y la trayectoria de referencia. Esta idea puede ser útil cuando las salidas responden con distinta velocidad y se pueden definir distintos puntos de coincidencia para cada una de ellas.

En cuanto a la estructuración de la señal de control, se puede encontrar desde considerar el horizonte de control igual a 1, horizonte variable o funciones base. Esta última idea, propia del PFC, parametriza la señal de control usando un conjunto de funciones polinomiales, permitiendo un perfil de entrada complejo para un horizonte de control grande (en teoría podría ser infinito) empleando un número de incógnitas pequeño. Esto puede resultar una ventaja en el caso de sistemas no lineales. La elección de la familia de funciones base establece muchas de las características del perfil de la entrada, pudiendo asegurar con una correcta elección una señal de control suave, por ejemplo. Si se eligen funciones base polinómicas, se puede seleccionar el orden para seguir un punto de ajuste polinómico sin retraso, lo cual

puede ser importante para aplicaciones de servo sistemas mecánicos.

La solución del problema no es tarea fácil debido a la no convexidad del problema genérico. El PFC propone una solución sencilla resolviendo el problema sin restricciones usando un algoritmo de mínimos cuadrados no lineal y saturando las entradas a sus límites si éstos se violan; lógicamente no se asegura una solución óptima pero se gana en velocidad, permitiendo que este controlador se use en aplicaciones con períodos de muestreo pequeños, como el caso de seguimiento de misiles.

Para el caso genérico se usan diversos algoritmos, algunos propietarios, basados en métodos más o menos conocidos de optimización. Entre ellos cabe destacar el que usa Aspen Target, desarrollado por Oliveira y Biegler [36], que garantiza que las soluciones intermedias, aunque no óptimas, son factibles. Ello garantiza que una pronta finalización del algoritmo por limitaciones de tiempo produce siempre una solución factible. En cualquier caso queda claro que el esfuerzo computacional es superior al caso lineal, siendo ésta una de las principales razones la todavía escasa implantación de estas técnicas en la industria.

Apéndice B

Programa DMC_final.m

```
% Archivo DMC_final.m
% Version 1
% Adecuado del existente en el texto [25]
% Implementación del controlador DMC usando MATLAB [30]
% Adecuado por José Nelson Rojas Grisales
% Junio de 2004
clc
close all
clear all
%——MODELO DE LA PLANTA——
Km=0.875;% Ganancia
taom=195;% Constante de tiempo
tdm=5;% Tiempo muerto

% ——Parámetros de sintonía del controlador——
T1 =0.1*taom;
T2 = 0.5*tdm;
if T1 < T2
Ts = T2;% Tiempo máximo de muestreo en Simulink
else
Ts = T1;
end
```

```

P = round((5*taom/Ts)+(taom/Ts)+1); % Horizonte de predicción, P
M = round((taom/Ts)+(taom/Ts)+1); % Horizonte de control, M

———Coeficientes de supresión de movimiento———
lambda = ((M/10)*(3.5*taom/Ts+2-(M-1)/2)*Km*Km);
gamma=1;

gammaY = gamma*eye(P); % Matriz de peso del error, gammaY, PxP
gammaU = lambda*eye(M); % Matriz de peso del esfuerzo de control, gammaU, MxM

% ——Obtención de los coeficientes de la respuesta al escalón ——
g = tf([Km],[taom 1],'inputd',tdm); % Función de transferencia dada
N = P ; % Tiempo de asentamiento
delt = 0.05*P; % Incrementos de tiempo
Su = step(g,[1:N]*delt); % Cálculo de los coeficientes de respuesta al escalón unitario

% ——Restricciones———

Umax = 0.15; Umin = -0.15; % Restricción de entrada
dUmax= 0.01; dUmin= -0.01; % Restricción de velocidad
Yhigh = 0.01; Ylow = -0.1; % Restricción de salida
ref = 0.005; % Referencia de partida
SET = ones(P,1)*ref; % Vector de Referencia, Px1

% ——Construcción de las matrices de trabajo———
bigSu = [];

% Inicialización y generación de la Matriz de Predicción Dinámica, PxM

for i = 1:M
bigSu = [bigSu, [zeros(i-1,1);Su(1:P-(i-1))]];
end

```

```

% -----DMC restringido-----
Yhat = zeros(N,1); % Inicialización del estado, Nx1
U = 0; delU = 0; % Inicialización de las entradas
Y = 0; % Inicialización de la salida
state=0; % Estado inicial para Simulink
REF=[];

% Calculo de la Hessiana % MxM
Hess = bigSu'*gammaY'*gammaY*bigSu + gammaU'*gammaU;

% -----Cálculo de la matriz de restricciones-----
IL = tril(ones(M)); % IL es una matriz triangular inferior MxM
Cu = [-IL; IL; -eye(M); eye(M); -bigSu; bigSu]; % Lado izquierdo de la matriz de restricciones

for i=2:1000

    Uc=[0 U(end)];

    Yhat = [Yhat(2:N); Y(end)] + Su*delU; % Actualización del estado Nx1

    % Obtención de datos desde Simulink. Archivo ruido.mdl
    [time,state,Yp]=sim('ruido',[0 Ts],simset('InitialState',state(end,:)),Uc);

    Y(i,:) = Yp(size(Yp,1),:); % Actualización de la salida
    if i < 500 % Cambio de la referencia
        ref = 0.005;
    else
        ref = -0.01;
    end
    SET = [SET(2:end);ref];
    REF= [REF;SET(1)]; % Referencia para graficar

```

```

Ep = SET - Yhat; % Cálculo del vector de errores Px1
G = bigSu'*gammaY'*gammaY*Ep; % Cálculo del vector Gradiente Mx1
ILmul = ones(M,1); % ILmul es un vector de unos de Mx1

    % Lado derecho de la matriz de restricciones
Crhs = [ ILmul*[U(i-1,:) - Umax];
ILmul*[Umin - U(i-1,:)]';
ILmul*[-dUmax];
ILmul*[dUmin];
-Ep+SET-ones(P,1)*[Yhigh];
Ep-SET+ones(P,1)*[Ylow];
];

    % Optimización por Programación Cuadrática (QP)
deltaU = quadprog(Hess, -G, -Cu, -Crhs);

    % El problema es de la forma:
% min deltaU'*Hess*deltaU -2G*deltaU
% Cu*deltaU >= Crhs
% Usamos el comando "quadprog" para resolver por QP Mx1

    delU = deltaU(1); % Vector de esfuerzo de control
U(i,:) = U(i-1,:) + delU'; % Vector de señal de control
end

```

Bibliografía

- [1] A. Desbiens, D. Hodouin, M. Milot. Observation, control and optimization of mineral processing and extractive metallurgy plants. Model based predictive control: A general framework Quebec, Canada, 1999
- [2] Slotine J. J. and Li W., *Applied Nonlinear Control* Prentice Hall, 1991
- [3] Camacho, Eduardo F. and Bordons, Carlos , *Model Predictive Control*, Springer-Verlag London Limited, 1999
- [4] Löfberg, Johan, *Linear Model Predictive Control: Stability and Robustness* Division of Automatic Control Department of Electrical Engineering Linköpings universitet, Linköping, 2001
- [5] Wills* A. G. and Heath **, W.P., *Using a Modified Predictor-Corrector Algorithm For Model Predictive Control*, * Department of Electrical and Computer Engineering, University of Newcastle, Australia. ** Centre for Integrated Dynamics And Control (CIDAC), University of Newcastle, Australia, 2002
- [6] Qin, S.J. and T.A. Badgwell, *An overview of nonlinear model predictive control applications in Nonlinear Model Predictive Control* edited by F. Allgöwer and A. Zheng, Birkhauser, Switzerland, 2000
- [7] Bart De Schutter and Ton van den Boom, *Model Predictive Control for Max-Plus-Linear Systems* Control Lab, Fac. Information Techn. and Systems, Delft University of Technology P.O.Box 5031, 2600 GA Delft, The Netherlands. American Control Conference, Chicago, Illinois, June 2000

- [8] Zhu, Yucai, *Multivariable and Closed-Loop Identification for Model Predictive Control* Faculty of Electrical Engineering, Eindhoven University of Technology P.O. Box 513, 5600 MB Eindhoven, The Netherlands Phone +31.40.2473246, y.zhu@tue.nl Firmin Butoyi Dow Benelux N.V. P.O. Box 48, 4530 AA Terneuzen, The Netherlands
- [9] Morari, Manfred and Lee, Jai H., *Model predictive control: Past, present and future* Institut für automatik ETH-Z/ETL CH-8092 Zürich Switzerland and Departament of Chemical Engineering Auburn University Auburn All 36849-5127 1997
- [10] Meadows, Eduard S. and Rawlings, James B, *Model Predictive control* In Michael A. Henson and Dale E. Serbor editors, *Nonlinear Process Control*, Chapter 5 Páq 233 a 310. Prentice Hall, 1997
- [11] Pannochia, Gabriele, *Strategies for Robust Multivariable Model Based Control* University of Pisa, Departament of Chemical Engineering, *Gradee of Doctor of Philosophy in Chemical Engineering*, 2001
- [12] Lorenz T. Biegler, Cervantes, Arturo M. and Wächter, Andreas, *Advances in Simultaneous Strategies for Dynamic Process* Departament of Chemical Engineering, Carnegie Mellon University, Pittsburgh PA 15213, USA, 2001
- [13] Rao C.V. and Wright S.J. and Rawling J. B., Arturo M. and Wächter, Andreas, *Application of interior point methods to model predictive control* Journal of Optimization Theory and Applications, 1998
- [14] Nikolaou, Michael, *Model Predictive Controllers: A Critical Synthesis of Theory and Industrial Needs*. Chemical Engineering Dept. University of Houston. *Advances in Chemical Engineering Series*, Academic Press. 2001
- [15] Bak, Martin *Control of systems with constraints*. Ph.D. Thesis. Department of Automation, Technical University of Denmark. November 2000
- [16] De Prada, Cesar *Los manuales de Ingeniería Química: Fundamentos de Control Predictivo de Procesos* Dpto. de Ingeniería de Sistemas y Automática. Facultad de Ciencias. Universidad de Valladolid. Expoquímica 1996

- [17] Richalet J., J.L. Rault, J.L. Testud and J. Papon, *Model Predictive Heuristic Control :Applications to Industrial Processes*. Automatica, 14 (5), 413-428, 1978.
- [18] Cutler C.R. and B.L. Ramaker, *Dynamic Matrix Control - A Computer Control Algorithm*, Proc. JACC San Francisco, 1980.
- [19] Soeterboek R. *Predictive Control - A Unified Approach*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1992.
- [20] Desbiens A., D.Hodouin and É. Plamondon, *Global Predictive Control: A Unified Control Structure for Decoupling Setpoint Tracking, feedforward Compensation and Disturbance Rejection Dynamics*. IEE Proc. Control Theory and Appl., submitted, 1999.
- [21] Morse H. Stephen, Isaac David, Lynnes Christopher, *Optimizing performance in intelligent archives*. Business Performance Systems and NASA/GSFC 23 January, 2003
- [22] March-Leuba J., Mullens J. A., Wood R. T., Oak Ridge National Laboratory *NERI PROJECT 99-119. ADVANCED CONTROL TOOLS AND METHODS*. Prepared by the Oak Ridge National Laboratory Oak Ridge, Tennessee 37831 Managed by UT-Battelle, LLC For U.S. Department of Energy Under contract DE-AC05-00OR22725 September 2002
- [23] Jockenhovel T.*, Biegler L. T.**, and Wächter A.*** *Dynamic Optimization of the Tennessee Eastman Process Using the OptControlCentre* * Institute for Energy Engineering, Technical University of Berlin, Marchstrasse 18, 10587 Berlin, Germany, ** Department of Chemical Engineering, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA 15213, USA, *** IBM T.J. Watson Research Center, P.O. Box 218, Yorktown Heights, NY 10598, USA, 2002
- [24] Backx T.*, Bosgra O.**, Marquardt W,*** *Integration of model predictive control and optimization of processes. Enabling technology for market driven process operation* * IPCOS Technology b.v., Bosscheweg 145a, 5282 WV Boxtel, The Netherlands Eindhoven University of Technology, P.O.Box 513, 5600 MB Eindhoven, The Netherlands, ** Delft University of Technology, Mekelweg 2, 2626 CD Delft, The Netherlands, *** RWTH Aachen, Turmstrasse 46, D-52064 Aachen, Germany 1999

- [25] Morari M., Lee, J.H., García, C.E. *Model Predictive Control* March 15, 2002
- [26] Sanchis J., Martínez M., Blasco X., Senent J. *Experimentación en control predictivo basado en modelos. práctica para la enseñanza de controladores predictivos generalizados (GPCS) en la ETSII* Depto. De Ingeniería de Sistemas, Computadores y Automática. Universidad Politécnica de Valencia. Camino de Vera s/n. 46071 Valencia. 2003
- [27] Sussmann,H.J., Sontag,E.D. and Yang,Y. *A general result on the stabilization of linear systems using bounded controls.* IEEE Transactions on Automatic Control,39(12),2411–2425, 1994
- [28] Bequette, W., *Process Dynamics, modeling, analysis and simulation* 1998
- [29] Luyben, W., *Process modeling, simulation and control for chemical engineers* Second edition. 1990.
- [30] MATLAB, The student edition of MATLAB. User's Guide. 1995
- [31] Dougherty, D., Cooper, D., *A practical multiple model adaptive strategy for multi-variable model predictive control* Chemical Engineering Department, 191 Auditorium RdU-3222, University of Connecticut, Storrs, CT06269-3222, USA july 2002
- [32] Bordons A.C., *Control predictivo: metodología, tecnología y nuevas perspectivas* Departamento de Ingeniería Sistemas y Automática. Universidad de Sevilla. Aguadulce, Almería, 2000
- [33] Clarke, D.W.,Mothadi, C. and Tuffs, P.S., *Generalized Predictive Control. Part I The Basic Algorithm* Automatica, 23(2):137-148, 1987
- [34] Richalet, J., *Practique de la commande predictive* Hermes, 1992
- [35] DE Keyser, R., *A Gent'le approach to MBPC model based predictive control* Ghent University, Belgium. Department of Electrical energy, systems and automation Curso dictado en Ibague, Colombia. Diciembre, 2003
- [36] Oliveira, N.M.C., Biegler, L.T., *An extension of Newton type algorithms for non-lineal process control* Automatica, 31:281-286, 1995

- [37] Acedo, S. J., *Control avanzado de procesos: teoría y práctica* Ediciones Díaz de Santos S.A. Madrid, 2003
- [38] Saéz, D. H., *Tópicos en control avanzado* Apuntes de clase. Universidad de Quilmes. 2002
- [39] Lee, J., *Industrial model predictive control In Lecture Notes* Georgia Institut of Technology School of Chemical Engineering 2001
- [40] El Ghoumari, M.Y., *Optimización de la producción de un invernadero mediante control predictivo no lineal* Tesis doctoral, 2001
- [41] Cutler, C.R., Ramaker, B.L., *Dynamic Matrix Control. A computer control algorithm* national meeting of AIChE. Houston, Texas. 1979
- [42] Suarez, A., Manzano, R., Velásquez, C. y Rojas, J.N., *Modelo de una columna de destilación continua* Poster ISCAPE 2000, Cartagena de Indias, Colombia. Enero 2000.